УДК 124.5
Пугач Б. Я.

Воину
Красной Армии, Герою Украины
Тронько Петру Тимофеевичу,
Партизану
Великой Отечественной войны
Пугачу Якову Андреевичу –
Секретарям Лебединского Райкома
Комсомола Сумской (Харьковской) области
ПОСВЯЩАЮ

ПАРАДИГМА ЭВАРИСТА ГАЛУА И ЕЕ ЭВРИСТИЧЕСКАЯ РОЛЬ В НАУКЕ

Стаття присвячена 200-річчю від дня народження геніального мислителя, філософа, математика Еварiста Галуа. Розкрито складний, суперечливий шлях формування нової парадигми сучасної математики – теорії груп. Виявлена роль теорії груп у квантовій механіці, теорії відносності, вирішенні найбільшої загадки математики – Великої теореми Ферма.

***Ключові слова**: математика, наука, філософія, теорія груп, теоретико-груповий метод, симетрія, Велика теорема Ферма.*

Пугач Б.Я. ПАРАДИГМА ЭВАРИСТА ГАЛУА И ЕЕ ЭВРИСТИЧЕСКАЯ РОЛЬ В НАУКЕ

Статья посвящена 200-летию со дня рождения гениального мыслителя, философа, математика Эвариста Галуа. Раскрыт сложный, противоречивый путь формирования новой парадигмы современной математики – теории групп. Выявлена роль теории групп в квантовой механике, теории относительности, в решении самой большой загадки математики – Великой теоремы Ферма.

***Ключевые слова**: математика, наука, философия, теория групп, теоретико-групповой метод, симметрия, Великая теорема Ферма.*

***B. Ya. Pugach.** EVARIST GALUA'S PARADIGM AND ITS HEURISTIC ROLE IN SCIENCE*

The article is dedicated to the 200-th anniversary of brilliant thinker, philosopher, mathematician Evarist Galua.

The author discloses complicated contradictory way of formation a new paradigm in modern mathematics – the theory of groups. He reveals the role of the theory of groups in quantum mechanics, theory of relativity, crystallography, in solution the biggest mathematics riddle – Ferm's Great theorem.

***Key words**: mathematics, science, the theory of groups, theoretical-group method, symmetry Ferm's Great theorem.*

Подчинить вычисления своей воле,
Сгруппировать математические операции,
Научиться их классифицировать
По степени трудности,
А не по внешним признакам –
Вот задачи математиков будущего,
Так, как я их понимаю,
Вот путь, по которому я хочу пойти.

Эварист Галуа,
создатель теории групп

Около 1830 г. во Франции засияла неожиданным блеском новая звезда на математическом небосклоне, засияла, чтобы, подобно метеору, быстро угаснуть. Это был Эварист Галуа.

Феликс Клейн

французский математик, историк науки

Математические работы Галуа, которые сохранились, составляют шестьдесят небольших страниц. Никогда еще труды такого малого объема не доставляли автору столь широкой известности.

Андре Дальма
французский критик

Время стерло много имен, некогда известных и могущественных. Но память о Галуа с годами лишь росла в истории математики. Там она и останется жить вечно.

Леопольд Инфельд
польский физик,
сотрудник А. Эйнштейна

26 октября – знаменательная дата в истории науки – *день рождения* одного из *гениальных мыслителей, математиков – Эвариста Галуа* (1811 – 1832). Подобно Н. Копернику, совершившему переворот в физике и астрономии, подобно И. Канту, осуществившему переворот в философии, Э. Галуа совершил кардинальные, революционные преобразования в математике.

Э. Галуа внес в математику совершенно *новый подход, новую точку зрения*. Он сделал важнейший и необходимый шаг в сторону абстракции. В трудах Галуа «математика перестает быть наукой о числах и формах – арифметикой, геометрией и набором связанных с ними идей, таких как алгебра и тригонометрия. Она стала наукой о *структурах*. То, что было исследованием *вещей*, стало исследованием *процессов*». К такому фундаментальному выводу приходит современный британский математик Иэн Стюарт [1]. Значение трудов Э. Галуа состоит в том, что в них в полной мере раскрыты совершенно новые глубинные математические закономерности – возникла новая *математическая парадигма – теория полей, концепция группы, теория Галуа*. Целая ветвь математики – исчисление симметрий, называемое теорией групп, – появилась на свет и с тех пор проникла в каждый уголок математики, во многие области современного научного познания. Именно в этом и состоит *философско-математическая роль и актуальность парадигмы Галуа*. В интересной книге «Десять великих идей в науке» современный автор Питер Эткинз подчеркивает, что данная программа «может иметь приложения почти неограниченной общности» [2].

Становление философской концепции Э. Галуа связано с его смелыми рассуждениями о новых методах и путях развития математики. Он обращает внимание на стремление некоторых математиков вообще избежать каких бы то ни было вычислений. «Вместо алгебраических формул они используют длинные рассуждения, – отмечает Э. Галуа, – и к громоздкости математических преобразований добавляют громоздкость словесного описания этих преобразований, пользуясь языком, не приспособленным для выполнения таких задач. *Эти математики отстали на сто лет*» [3].

Они не являются ориентиром в творческой деятельности Э. Галуа. У него ничего подобного нет. Мыслитель утверждает: «*Я занимаюсь анализом анализа.* При этом самые сложные из известных сейчас *преобразований (эллиптические функции)* рассматриваются всего лишь как частные случаи, так что отказ от дальнейших широких исследований был бы роковой ошибкой. Придет время, и *преобразования*, о которых идет речь в *намеченном* здесь *высшем анализе*, будут действительно *производиться* и *классифицироваться по степени трудности*, а не по виду возникающих функций» [4]. Далее высказывается важнейшее положение о том, что «*общий тезис*» (термин Галуа), можно сказать, *общий метод*, может быть «*расшифрован*» как некий *эвристический код*, только после внимательного изучения всей схемы, в которой находит раскрытие вся мощь результатов исследования.

Галуа глубоко размышляет о *философских основаниях научного поиска, путях получения новых научных результатов*, а также о проблемах этики, таких как *честность и добросовестность* в науке. Находясь в тюрьме Сент-Пелажи, он ставит цель: создать свою *философскую программу*. Ученый пишет: «Мы собираемся *изложить* в нескольких статьях наиболее общую, *наиболее философскую часть* своих *исследований*, которые из-за тысячи обстоятельств не могли быть опубликованы ранее. Мы представим только эти положения, не загромождая их примерами и дополнениями, за которыми у аналитиков обычно полностью пропадают общие идеи. Они будут изложены совершенно добросовестно, и мы честно расскажем о пути, приведшем к ним, и о препятствиях, преодолеваемых нами. Когда эта цель будет достигнута, мы можем считать, что показали пример добросовестности, который до сих пор не встречался» [5].

Поразительная ясность ума математика обращена не только к решению сложнейших и неразрешимых проблем науки, но и к солидарности ученых будущего: «*Ученые* созданы для изолированного существования не больше, чем все остальные люди. Они тоже принадлежат своему времени и рано или поздно *начнут действовать сообща*. Сколько тогда времени освободится для науки!»

Можно предположить, что ни у одного ученого в истории науки не было такого *единства научных и общественных идеалов*, как у *Эвариста Галуа*. Быть может, никогда это единство не вызывало столь яростного преследования ученого со стороны государства.

В центре внимания Галуа находилась основная проблема – это разрешимость в радикалах общих алгебраических уравнений. Причем не только в случае уравнений пятой степени, рассмотренном замечательным норвежским математиком Нильсом Абелем [6]. Цель Галуа заключалась в том, чтобы найти критерий, способ разрешимости для всех алгебраических уравнений. Обратимся к некоторым аспектам теории Галуа.

Прежде всего Галуа пытается выяснить понятие величины, рациональной относительно других величин. Он определил ее в «Мемуаре об условиях разрешимости уравнений в радикалах» (1831): «Можно условиться рассматривать как рациональности все рациональные функции от некоторого числа определенных количеств, предположенных *a priori* известными. Например, можно выбрать некоторый корень из целого числа и рассматривать как рациональности все рациональные функции от этого радикала.

Тогда, когда мы условливаемся рассматривать как известные некоторые количества, мы говорим, что мы их *присоединяем* к уравнению, о решении которого идет речь. Мы говорим, что эти количества *присоединены* к уравнению.

Когда мы будем пользоваться вспомогательными уравнениями, они будут рациональными, если их коэффициенты рациональны в нашем смысле» [7]. Эти понятия рациональной величины здесь выражены явно, и Галуа вплотную подошел к понятию *поля*, порожденного множеством алгебраических чисел.

Затем Галуа вводит свое ключевое понятие «*группы уравнения*»: «Пусть дано уравнение и *a, b, c, …* суть *m* его корней. Существует всегда группа перестановок букв *a, b, c, …,* обладающая следующими свойствами:

1. Всякая функция от корней, инвариантная относительно подстановок этой группы, рационально известна.
2. Обратно, всякая рационально определяемая функция от корней инвариантна относительно этих подстановок» [8].

Для нас важно обратить внимание на то, что *инвариантность* представляет собой неотъемлемое, обязательное *свойство* любой *группы*. Именно этот признак и определяет *методологическую ценность* и общность указанного математического понятия, а также возможность его *применения* в *других сферах научного познания*. Интересно заметить, что инвариантными являются не только определенные величины, но и математические функции. «Мы называем инвариантной, – утверждает Галуа, – такую функцию, форма которой остается неизменной при подстановках корней между собой, но еще и такую, численное значение которой не меняется при этих подстановках» [9].

Эварист Галуа совершил революцию в математике. Он является автором, изобретателем языка, который позволил описывать симметрии в математических структурах и выводить их следствия.

В настоящее время этот язык называется «*теорией групп*». Он имеет весьма широкое распространение в *чистой* и *прикладной математике*, а также отвечает за выражение закономерностей в физическом мире. Симметрия играет центральную роль в современной физике – в бесконечно малом квантовом мире и бесконечном мире Вселенной. Существуют основания, что симметрия может проложить путь к будущей «Теории всего», то есть математическому объединению двух главных направлений в современной физике – квантовой теории и теории относительности.

Что такое симметрия? *Симметрия* – это не число и не форма, это *специальный вид преобразований*, это есть некоторое единство сохранения и изменения. Так, например, законы физики должны оставаться неизменными, инвариантными во всех точках пространства и с течением времени. Можно сказать и так, законы природы должны быть симметричны относительно движений в пространстве и во времени. Квантовая физика утверждает, что все во Вселенной состоит из набора фундаментальных частиц. Поведение таких частиц описывается математическими уравнениями, выражающими законы природы, и эти законы обладают симметриями. Как указывает И. Стюарт: «Частицу можно математически преобразовать в совсем другие частицы, и эти преобразования также оставляют законы физики неизменными» [10].

Заметим, что все эти концепции, как и самые последние, относящиеся к границам, рубежам современной физики, – не были бы открыты без глубокого математического понимания симметрии. Такое понимание пришло из чистой математики. Весьма продуктивные и полезные идеи могут возникнуть из чисто абстрактных рассуждений и дискурсов – это примерно то, что физик Юджин Вигнер назвал «*непостижимой эффективностью математики в естественных науках*». Оценивая заслуги Дж. Максвелла в разработке и создании общей теории электромагнитного поля – классической электродинамики, выдающийся физик-теоретик и экспериментатор Генрих Герц пришел к такому кардинальному выводу: «Нельзя изучать эту чудесную теорию без того, чтобы порою не возникало ощущения, что *математическим формулам присущи самостоятельная жизнь и собственный разум*, что *они умнее нас*, умнее даже открывшего их, что *они дают больше*, *чем в них было вложено*» [11].

Интересно подчеркнуть, что в качестве доминирующей идеи симметрия появилась не так, как этого можно было бы ожидать, – то есть не через геометрию. Концепция симметрии, проявляющаяся в математике и физике, пришла к нам из алгебры.

С точки зрения Э. Галуа, разрешимость некоторого уравнения перестала быть абсолютной проблемой, требующей готового определенного ответа. Он рассматривает ее как *связь между* определенным алгебраическим объектом – *уравнением и* его «средой» – *полем* или областью рациональности, к которой оно относится. Как только изменяется область рациональности уравнения, изменяется и его группа Галуа.

Итак, понятие группы в теории Галуа становится мощным и гибким средством. Так, в частности, О. Коши и не думал приписывать понятию группы подобную роль. «Система сопряженных подстановок» для Коши была неразложимым понятием, он никогда не выявлял понятия подгруппы и нормальной группы.

Идея относительности группы – это *личное изобретение Галуа*. Она проникла затем во все математические и физические теории, ведущие свое происхождение от теории групп. Эту идею в действии мы видим в «Эрлангенской программе» Ф. Клейна. Как четко заметили издатели сочинений Э. Галуа *Р. Бурнь* и *Ж.-П. Азра*: «*Парадоксальная* *в своей краткости, его мысль была не из тех, от которых отталкиваются, но из тех, до которых нужно еще дорасти*».

И. Стюарт, раскрывая непостижимую эффективность математики в познании тайн природы, сформулировал глубокую мысль о связи философии и математики, подчеркнув, что никто не мог бы предположить, что *вопросы о разрешимости уравнений* приведут к одной из *ключевых концепций в математике – концепции группы* – или что *группы* окажутся *языком*, на котором *описывается симметрия*. Еще менее того можно было полагать, что *симметрии откроют нам дверь к тайнам физического мира* [12].

Продолжается сложный, противоречивый процесс открытия целых областей физического мира. Вместе с тем следствия из симметрии для науки в целом остаются недостаточно исследованными и изученными. Здесь предстоит нам многое глубоко осмыслить и понять. Но можно с уверенностью утверждать, что *группы симметрии* представляют собой *наш проводник через неисследованные земли, необъятные континенты*, пока не появится более мощная концепция. Выражаем уверенность в том, что наука XXI столетия будет развиваться под знаком эвристической парадигмы мужественного гения человечества Эвариста Галуа.

Если бы Галуа и его предшественники не были одержимы *задачей найти условия*, при которых *уравнение можно решить в радикалах, открытие* человечеством *теории групп сильно задержалось бы, а возможно, его никогда бы и не произошло*. Никто не смог бы предсказать, что замысловатый вопрос об уравнениях прояснит глубокую структуру физического мира.

В современной математизированной теории понятие группы, развитой на основе идей Галуа, служит средством теоретизации различных областей знания в силу того, что в ней выражен в абстрактной форме принцип инвариантности как методологический императив. Его роль проявляется в процессе построения математических и физических теорий и служит важнейшим условием эффективности и плодотворности математических идей в современном естественнонаучном познании. Так, например, наиболее четко и ярко это выявляется в неевклидовых геометриях.

Сейчас имя Галуа – одно из самых популярных в математике. Его имя имеют такие фундаментальные понятия: *группа Галуа*, *поле Галуа*, *теория Галуа*, *соответствие Галуа* и другие. Идеи Галуа оказали решающее влияние на развитие алгебры в течение столетия и проникли в другие области математики. Классическая теория Галуа обобщилась и развилась во многих направлениях [13].

Выдающийся ученый Феликс Клейн в «Лекциях о развитии математики в XIX столетии» пишет: «Великие достижения Галуа простираются в двух направлениях:

1. Он создал первую решительную по замыслу классификацию иррациональностей, определяемых алгебраическими уравнениями, учение, которое еще и сегодня носит краткое название *теории Галуа*.
2. Он далеко продвинулся в своих занятиях интегралами от произвольных алгебраических функций одной переменной – как мы теперь говорим, *абелевыми интегралами* – и оставил в этой области результаты, позволяющие говорить о нем как о предшественнике Римана.

И возможно, в качестве третьего пункта следовало бы упомянуть о еще одном кратком намеке, точный смысл которого, однако, трудно понять из-за чрезмерной сжатости изложения. В своем прощальном письме к Шевалье Галуа говорит об исследованиях, касающихся “ambiguité des fonctions” («двусмысленности функций»); вполне возможно, что здесь содержится намек на идею римановской поверхности и на понятие многосвязности.

Выдающиеся достижения Галуа не могут быть оценены по достоинству без знания теории Галуа» [14].

Обратимся к другим характеристикам понятия группы. Возникнув в алгебре, оно приобрело в математических исследованиях такую общность, что позволило применять это понятие в различных областях математики. Затем представление о группах выходит далеко за пределы математики и становится важнейшим понятием в теоретических построениях физики и других науках о природе. Выдающийся специалист во многих разделах современной алгебры – в теории групп, колец, структур – Александр Геннадиевич Курош (1908 – 1971), автор всемирно известных монографий «Теория групп» [15], «Курс высшей алгебры» [16] утверждает: «Понятие группы является одним из самых основных понятий современной математики и соединяет близость операций над числами с исключительно широкой областью применяемости» [17].

Теория групп позволяет в точных терминах определить симметричность геометрической фигуры. Так, каждой геометрической фигуре можно сопоставить совокупность всех преобразований пространства. Она и характеризует симметричность фигуры. Именно с таких позиций русский минеролог и кристаллограф Евграф Степанович Федоров (1853 – 1919), один из основоположников современной структурной кристаллографии и минералогии решил математическую задачу классификации правильных пространственных систем точек, являющуюся одной из основных проблем кристаллографии. Существует всего 17 плоских федоровских групп; они были найдены непосредственно; пространственных федоровских групп – 230. Эти результаты изложены в классическом труде ученого «Симметрия правильных систем фигур» (1890) [18]; [19]. Независимо от Е. С. Федорова немецкий математик Артур Шёнфлис в 1890 – 1891 гг. методами теории групп предложил классификацию всех кристаллических пространственных решеток. Полученные результаты А. Шёнфлис опубликовал в учебнике «Кристаллические системы и кристаллическая структура» (1891). Только теория групп позволила раскрыть достаточно полную классификацию кристаллов. Это был исторически первый случай применения теории групп в естествознании.

Немецкий физик-теоретик Макс фон Лауэ (1879 – 1960) разработал теорию интерференции рентгеновских лучей на кристаллах, предложив использовать кристаллы как дифракционные решетки для рентгеновских лучей. В том же году теория получила экспериментальное подтверждение в опытах немецких физиков Вальтера Фридриха (1883 – 1968) и Пауля Книппинга (1883 – 1935). Согласно предсказанию М. фон Лауэ ученые обнаружили явление интерференции рентгеновских лучей, вызываемое пространственной решеткой кристаллов. Это открытие привело к созданию мощного

способа исследования структуры вещества – рентгеноструктурного анализа. За открытие

дифракции рентгеновских лучей М. фон Лауэ удостоен Нобелевской премии [20].

Последующее развитие структурного анализа подтвердило теоретические заключения Е. С. Федорова и А. Шёнфлиса. Развивая идеи классической теории симметрии кристаллов, советский физик-кристаллограф Алексей Васильевич Шубников (1887 – 1940) расширил класс симметрий, предложенный Е. С. Федоровым, и, путем введения дополнительной операции симметрии, построил 1651 тип симметрий [21]; [22]. Эти новые предсказания получают подтверждения в многообразных формах кристаллических образований. Классические примеры эвристической роли идей симметрии относятся к области геометрического типа симметрии. Может показаться, что в области исследования кристаллических форм сама природа открывает эту симметрию и человеку остается лишь зафиксировать ее в простейших геометрических соотношениях и формах.

В XX столетии возросла роль симметрии в построении физических теорий в связи с развитием концепции физических принципов симметрии. Немецкий механик и математик Георг Гамель (1877 – 1954) установил связь между законами сохранения и основными симметриями пространства и времени. Затем немецким математиком Амали Эмми Нётер

(1882 – 1935) была открыта связь между инвариантностью физической системы относительно преобразований симметрии, описываемой непрерывной группой симметрии с независимыми параметрами и числом сохраняющихся величин в данной системе (теорема Нётер).

Английский физик и астрофизик Джеймс Джинс (1877 – 1946), обсуждая реформу учебного плана по математике в Принстонском университете (1910), заявил: *«Можно обойтись без теории групп. Этот раздел математики никогда не принесет какой-либо пользы физике».* Но теорию групп продолжали преподавать в Принстоне, что сыграло немаловажную роль в развитии науки. По иронии судьбы именно теория групп впоследствии стала для физиков одним из центральных предметов, и теперь она завладела умами тех, кто стремится раскрыть тайны природы микромира. И самое интересное, что именно принстонские профессора Ю. Вигнер и Г. Вейль оказались пионерами теоретико-группового направления в физике. Теория групп нашла применение в ядерной физике, квантовой теории, физике элементарных частиц, теории относительности (группа преобразований Лоренца).

В современной физике используются так называемые внутренние или динамические симметрии, которые, по тонкому и глубокому выражению американского физика-теоретика, лауреата Нобелевской премии (1963) Юджина Поль Вигнера (1902 – 1995) «*формулируются в терминах законов природы*». Он одним из первых показал эффективность применения к квантовой механике аппарата теории групп и многое сделал для того, чтобы идеи симметрии и теории групп утвердились в современной теоретической физике, заложил основы теории симметрий в квантовой механике и ввел идеи и методы, применив их к фундаментальным проблемам [23]. Применения симметрии в квантовой теории демонстрируют, что теория групп позволяет нам глубоко проникать в природу вещей, несмотря на то, что создавалась она для ответа на некий вопрос в рамках чистой математики.

Наиболее широко применяется в современной физике элементарных частиц калибровочная симметрия – термин, введенный немецким математиком и физиком Германом Вейлем (1885 – 1955). С помощью методов теории групп он получил некоторые результаты, относящиеся к теории атомных спектров. Ученый исследовал теорию непрерывных групп, применение которым нашел в дифференциальной геометрии, физике и теории относительности [24]. Работы Вейля сыграли большую роль в осмыслении важности идей симметрии как для математики, так и для физики. Он много сделал для того, чтобы понятие симметрии стало и физическим. Г. Вейль выявил связь теории групп и физики, утверждая, что он «всегда пытался соединить истину с красотой, и когда мне приходилось выбирать между ними, я всегда обычно останавливал выбор на красоте».

Установлено, что калибровочной симметрией обладает электромагнитное поле. Эта симметрия присуща системам, чей лагранжиан (Лангранжа функция) инвариантен относительно группы непрерывных преобразований с параметрами, зависящими от пространственно-временных координат.

В современной физике свойства симметрии используются для задач классификации, выявления новых законов сохранения, построения новых обобщенных теорий, упрощения конкретных расчетов, например, в спектроскопии, получения правил отбора [25].

Понятие симметрии выражает фундаментальную закономерность природы и познания [26]. Принцип симметрии является одним из важнейших методологических регулятивов построения научной теории. Этот императив, по выражению выдающегося ученого Владимира Ивановича Вернадского (1863 – 1945), имеет всеобщий характер, он проявляется в различных предметных сферах физического мира. Исследователь утверждает: «Принцип симметрии в XX в. охватывает все новые области. Из области материи он проник в область энергии, из области кристаллографии, физики твердого вещества он вошел в область химии, в область молекулярных процессов и в физику атома.

Нет сомнения, что его проявления мы найдем в еще более далеком от окружающих нас комплексов мире электрона и ему подчинены будут явления квантов. Несомненно и разнообразно им охвачены явления жизни и мирового Космоса» [27]. Поэтому актуальной является *проблема установления всеобщности принципа симметрии на основе* всестороннего рассмотрения *истории его проникновения в науку*, форм его проявления, а также «*необходимости его философского изучения*» (В. И. Вернадский).

Отмечая достижения и плоды титанической деятельности Ф. Клейна как результат его продуктивного мышления в различных областях математической науки, Г. Вейль подчеркнул: «Представление Клейна о геометрии есть не что иное, как теория относительности в ее всеобщем, математически формализованном понимании. Он понял и применил группу как великий организующий и упрощающий принцип в алгебре, геометрии и анализе.

Клейн, печатью гения которого отмечена целая эпоха, продолжает оказывать мощное воздействие на современную математику, развивающуюся под знаком теории групп, топологии и абстрактной алгебры. *Пламя, зажженное им*, – не елейный светильник педантичной традиции, *оно согревает горшки всех математических кухонь* и *горит в горнах всех математических кузниц*, делая как великую, так и малую повседневную работу. Его труды продолжают воздействовать на нас, его имя не будет забыто» [28].

Теория непрерывных групп оказывает благотворное влияние на развитие современной физики. Об этом красноречиво свидетельствуют открытия в области микромира лауреатов Нобелевской премии Луи де Бройля (1892 – 1987), Эрвина Шрёдингера (1887 – 1961), Поля Дирака (1902 – 1984). Они внесли существенный вклад в создание теории движения микрочастиц – *волновую* квантовую механику. В трудах ученых широко применялся математический аппарат для объяснения закономерностей, характеристик и процессов совершенно новой предметной области физического мира. Здесь свою эффективность проявила теория представления групп линейными операторами.

Так, в частности, Л. де Бройль в своей докторской диссертации «Исследования по теории квантов» (1924) вводит термин «скорость группы фазовых волн» [29].

Э. Шрёдингер пытался (1926) представить частицу как группу волн, занимающую определенную часть пространства и движущуюся целиком (волновой пакет) [30]; [31].

Так как *теория групп* находится в основе многих исследований в физике и математике, то вопрос о классификации групп считается весьма актуальным и важным. Для его решения в 70-е годы XX столетия было создано добровольное Международное сообщество энтузиастов-математиков. Примерно сто теоретиков определили конкретные вопросы и приступили к решению этой глобальной научной проблемы. Пожалуй, это *единственный в истории науки пример широкого, масштабного и координированного подхода к решению математической проблемы.* Постепенно было выделено три бесконечных семейства групп и 26 особых случаев конечных групп. Причем некоторые из них удалось обнаружить только при помощи компьютеров. По состоянию на 2004 г. опубликованы только пять из двенадцати томов полного доказательства. Основная причина медленного решения проблемы заключается в том, что ряды участников значительно уменьшились (возраст, уход из жизни многих членов сообщества) [32]; [33].

В тюрьме Сент-Пелажи Э. Галуа отредактировал свои самые важные результаты. В предисловии к одному из них он утверждает: «Прежде всего, титульный лист этой работы не загроможден именами, фамилиями и званиями, сопровождаемыми похвалами скупым вельможам. Никто не увидит здесь заголовка, написанного аршинными буквами и выражающего почтительное благоговение перед светилом науки.

Я не говорю, что все хорошее в моей работе достигнуто благодаря советам и поощрению такого-то. Не говорю, потому что это значило бы лгать» [34]. Хотелось бы подчеркнуть, что *новейшие результаты в математике* получены *Э. Галуа* *самостоятельно*. Поэтому у автора не было никаких оснований обращаться к знаменитым математикам со словами благодарности. Чем реально помогли «*Великие мира*» и «*Великие мира науки*» (термины Галуа) в возникновении нового знания в математической науке? На этот вопрос у Э. Галуа есть совершенно точный ответ: «*Великим мира науки* я обязан тем, что два моих мемуара появились так поздно; *великим мира сего* – тем, что все это пишется в тюрьме, месте, вряд ли подходящем для сосредоточенных занятий. Я должен рассказать, как часто пропадают рукописи в папках господ членов Академии. Мой мемуар по теории уравнений действительно был представлен в Академию наук в феврале 1830 года, но я не получил никакого отзыва и даже рукописи мне не вернули. Подобные забавные анекдоты происходили уже не раз. Счастлив путешественник, которого худоба спасает от волчьих зубов» [35].

Здесь же, в тюрьме, Э. Галуа получил письмо из Академии наук. В нем находилась его рукопись и записка от секретаря Академии Франсуа Араго:

«Дорогой мосье Галуа,

Ваша рукопись об условиях разрешимости уравнений в радикалах была послана на рассмотрение господам Лакруа и Пуассону. Приводим отзыв следующего содержания: “Мы сделали все от нас зависящее, чтобы понять доказательство господина Галуа. Его *рассуждения не обладают* ни достаточной *ясностью*, ни достаточной *полнотой* для того, *чтобы* мы могли *судить об их точности. Поэтому мы не в состоянии дать о них представление в этом докладе. Автор* заявляет, что теорема, составляющая основное *содержание* его *мемуара*, является *частью общей теории, имеющей много других приложений*.

Поэтому прежде чем высказывать окончательное мнение, следует подождать, пока автор опубликует свою работу целиком; *имеющуюся* же пока *часть* в том виде, в каком она представлена в Академию, мы *не можем оценить положительно*. Лакруа, Пуассон» [36].

Академия вновь, в который раз, не поняв, отвергла работу Галуа. Есть ли в этом хоть какая-то доля вины молодого исследователя? Возможно, что Галуа не всегда ясно излагал свои мысли, а некоторые теоремы, которые не были им доказаны, сформулировал как доказанные. Да и изложение трудов Галуа было непривычным для математиков первой половины XIX столетия. *Новый стиль математического мышления*, формируемый Э. Галуа, обладает высокой степенью *новизны* и становится *доминирующим* только *в XX столетии*.

Вместо длинных выкладок для решения проблем применялись совершенно неожиданные идеи. Кроме того, в его работах было слишком много новых понятий. Неудивительно, что Пуассону и другим математикам эти работы показались недостаточно ясными и доступными.

Э. Галуа получил многие результаты своей теории еще в возрасте 16 – 18 лет и дважды представлял их в Парижскую Академию Наук, однако, даже крупнейшие французские математики того времени О. Коши, Ж. Фурье, С. Пуассон – не сумели разобраться в работах Э. Галуа и оценить их значение.

Э. Галуа, обращаясь к сложнейшим математическим проблемам и их истории, подчеркивает, что, начиная с Л. Эйлера, вычисления становились все более необходимыми и вместе с тем все более трудными. Современные математики должны придавать своим исследованиям такую стройность, при которой с одного взгляда можно охватить значительное число операций. Каким способом математики могут осуществить столь трудную цель? У Галуа есть оригинальные соображения по данному вопросу: «Подчинить вычисления своей воле, сгруппировать математические операции, научиться их классифицировать по степени трудности, а не по внешним признакам – вот задачи математиков будущего так, как я их понимаю, вот путь, по которому я хочу пойти» [37]. Галуа питал неприязнь к длинным вычислениям, затемнявшим суть дела. Его стремление группировать задачи в соответствии с их глубокими структурными аналогиями, а не по внешним признакам – разве не в этом состоит *программа современной математики*, сформулированная, оказывается, со столетним опережением событий!

Мыслитель утверждает, что научная истина не должна рассматриваться как нечто законченное, неизменное. Она проявляется в вечно незавершенном движении открытий и постоянном процессе получения более глубокого, полного и точного знания. Труды Э. Галуа позволяют вступить в исключительный контакт с живым творением молодого математика в том виде, в каком оно возникло после расшифровки его рукописей, движением на ощупь, рождением принципиально нового, то есть творением, отмеченным печатью безжалостных обстоятельств его жизни.

Это уникальный пример математического труда, тесно переплетенного с личностью автора, который не захотел и не смог отделить себя от своих произведений.

В последнюю свою ночь Э. Галуа изложил теоремы, которые, по его убеждению, полностью объясняли загадку уравнений пятой степени. На этот раз идеи, которые он ранее представил известным математикам О. Коши (1789 – 1857) и Ж. Фурье (1768 – 1830), были скрыты за алгебраическими выкладками. На исходе ночи Галуа закончил вычисления и написал знаменитое письмо – научное завещание единственному другу Огюсту Шевалье и просил передать свои труды в случае гибели его, Галуа, на дуэли величайшим математикам Европы:

«Мой дорогой Друг!

Я сделал несколько открытий в области анализа. Первое из них относится к теории уравнений пятой степени и других целых функций.

В теории уравнений я исследовал условия разрешимости уравнений в радикалах; мне представился случай углубить эту теорию и описать все возможные преобразования уравнения, даже если оно не разрешимо в радикалах. Все это изложено в трех мемуарах.

За мою жизнь я часто отваживался выдвигать утверждения, в которых я сам не был уверен. Но все написанное было мне ясно более года, и было бы не в моих интересах оставаться под подозрением, будто я высказывал теоремы, не располагая доказательством. Попроси Якоби или Гаусса [немецкие математики Карл Якоби (1804 – 1851); Карл Фридрих Гаусс (1777 – 1855) – Б. П.] опубликовать их мнение не о том, верны ли *мои теоремы*, а о том, *насколько они важны*. Я надеюсь, что найдутся несколько человек навести порядок во всей этой неразберихе» [38].

В научном завещании ставится кардинальный вопрос: если в будущем *ученые-математики* откроют то, к чему пришел Галуа, они *должны* точно *знать имя первооткрывателя – истинного создателя теории групп – Эвариста Галуа*. Он же первым оценил значение революционных результатов для будущего развития науки. Да, дорого́й является *слава бессмертия* своего *имени*. «*Последняя битва* – это *битва* за *признание и утверждение в науке*. – Так примерно размышлял Галуа в свою последнюю ночь перед роковой дуэлью. И далее он продолжал. – *Последняя битва – это битва за бессмертие.* Наверное, *единственная*, которую *мне суждено выиграть*. *Я выиграю, но никогда мне не вкусить сладких плодов победы*». Какие ясные, поразительные, пророческие мысли! *Открытия Галуа принадлежат* не только алгебре и даже не только *математике, философии, науке, но и общечеловеческому миру культуры*.

Выполняя желание Эвариста Галуа, Огюст Шевалье и Альфред Галуа (младший брат Эвариста) разослали копии рукописи Карлу Гауссу, Карлу Якоби и другим известным математикам. Но прошло почти десять лет, прежде чем его работа была оценена по достоинству. Это произошло в 1846 году, когда одна из копий была вручена выдающемуся французскому математику Жозефу Лиувиллю (1809 – 1882). В ней ученый ощутил искру гения и уделил много времени, чтобы основательно разобраться в заметках Галуа. Ж. Лиувилль отредактировал мемуары Галуа и опубликовал в своем престижном издании – «Журнале чистой и прикладной математики» («Journal de Mathèmatiques pures et appliquées»). В предисловии к этой публикации Ж. Лиувилль писал: «Главным объектом исследований Эвариста Галуа являются условия разрешимости уравнений в радикалах.

Автор строит основы общей теории, которую детально применяет к любому уравнению, чья степень – простое число». [39]. Многие математики положительно оценили публикацию, в которой Э. Галуа раскрыл механизм решения уравнений пятой степени. Сначала Галуа разделил все уравнения пятой степени на два типа: уравнения разрешимые и неразрешимые, а затем для разрешимых уравнений предложил прием, как найти решения таких уравнений. Вместе с тем он обратился к уравнениям более высокого порядка, содержащие x^6, x^7 и др. и сумел доказать, какие из них разрешимы. *Фундаментальный труд Э. Галуа* представляет собой *один из шедевров математического творчества XIX века*.

В предисловии к работам Галуа Ж. Лиувилль обратил внимание не только на недостатки, но и достоинства трудов Галуа. В частности, он подчеркнул, что «мое усердие было вознаграждено и я испытал необычайное удовлетворение в тот момент, когда, восполнив мелкие пробелы, *убедился в правильности метода*, с помощью которого *Галуа* доказал эту прекрасную теорему».

Труды Э. Галуа являются очень сложными. Поэтому видные французские математики изучали его творческое наследие в течение 25 лет и признали, что ничего не поняли. Разобраться в работах Э. Галуа смог известный французский математик Камиль Жордан (1838 – 1922), который потратил на это много лет. В 1870 он выпустил первый систематический курс *теории групп и теории Галуа*. Он называется «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях», объемом 667 страниц, разъяснил и дополнил краткие и сжатые исследования Э. Галуа, раскрыл подлинный смысл теории во всей полноте, сделал ее достоянием широких математических кругов [40]. Трактат Жордана содержит, посвященные собственно изучению групп подстановок, теории Галуа и приложения теории Галуа к уравнениям, возникающим в разных областях математики.

В предисловии к книге автор пишет: «Галуа было суждено дать четкое обоснование теории разрешимости уравнений [в радикалах – Б. П.]. Проблема разрешимости, прежде казавшаяся единственным объектом теории уравнений, ныне представлена первым звеном в длинной цепи вопросов, касающихся преобразования и классификации иррациональных чисел. Применив свои общие методы к этой частной проблеме, Галуа без труда нашел характерное свойство групп уравнений, разрешимых в радикалах» [41].

В трудах Жордана есть выделение нормальных подгрупп, понятие простой группы; впервые рассматриваются математические группы, ставшие в XX веке предметом обстоятельных исследований. При изложении теории Галуа автор обращается к современному способу сопоставления уравнению не некоторого множества перестановок корней, а группы подстановок, и критерий разрешимости уравнения в радикалах выражается в разрешимости его группы Галуа. Трактат К. Жордана становится учебником как по теории групп, так и по теории Галуа.

Итак, монография К. Жордана «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях» представила теорию Галуа в систематическом виде, она становится важным элементом математического образования и фундаментом для новых математических поисков. Благодаря этой книге Жордана идеями теории групп увлеклись два молодых одаренных математика – норвежец Софус Ли и немец Феликс Клейн. Первый применил идеи Галуа в теории дифференциальных уравнений (группы Ли), второй – в геометрии (Эрлангенская программа).

Теория групп, являясь центральной в современной математике, прошла в своем развитии путь последовательных обобщений. Эта теория ведет свое начало от частной проблемы, привлекавшей к себе умы математиков еще в средние века. Речь идет об отыскании решений алгебраического уравнения степени выше второй алгебраическим же путем, то есть с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня. Теория квадратных уравнений была известна еще в Древнем Вавилоне, а решение уравнений третьей и четвертой степеней в общем виде было получено итальянскими математиками эпохи Возрождения – Джироламо Кардано (1501 – 1576) и

Никколо Тарталья (1500 – 1557). Однако решение уравнений пятой и еще более высоких степеней натолкнулось на непреодолимые трудности.

История теории групп начинается с середины XIX в., после опубликования работ Э. Галуа. Работы французских математиков Луи Лагранжа (1736 – 1813) и Александра Вандермонда (1755 – 1796) по теории алгебраических уравнений ввели в математику первый групповой объект – подстановки.

Среди последователей Лагранжа и Вандермонда следует назвать имя итальянского математика Паоло Руффини (1795 – 1822). В своих исследованиях по теории уравнений он рассматривает не только группу подстановок, но и ее подгруппы. Знаменитый немецкий математик, физик Карл Фридрих Гаусс (1777 – 1855) в «Арифметических исследованиях» (1801) делает важный шаг на пути возникновения теории групп. Он определяет первый в истории пример построения фактор-кольца. Доказательство очень общее и переносится на случай любого конечного поля, что сразу было отмечено Галуа, когда он стал строить теорию конечного поля.

Определение и первые исследования абстрактных групп были опубликованы английским математиком Артуром Кэли (1821 – 1895). Наиболее значительные результаты Кэли относятся к алгебраической геометрии, линейной алгебре и теории групп. Ф. Клейн утверждает, что Кэли является «создателем современной алгебраической геометрии как в том, что касается теории инвариантов, так и в ее геометрической части» [42].

Математик указывает, что элементами группы могут быть подстановки. Само название «группа» взято Кэли в память Галуа. Эти работы ученого не сразу получили широкую известность, но потом стали примером определения группы и общепринятыми во всех учебниках. Кроме работ Кэли, развитие теории групп продолжил французский математик – Жозеф Альфред Серре (1819 – 1885). В частности, его двухтомный «Курс высшей алгебры» посвящен изложению элементов теории Галуа.

Феликс Клейн (1849 – 1925) – крупнейший немецкий математик последней трети XIX столетия. Основные труды по неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп, теории алгебраических уравнений, теории эллиптических функций, теории автоморфных функций. Установив, что группа движений пространства Лобачевского, а также группы движений евклидова пространства и других проективных метрик являются подгруппами группы проективных преобразований пространства, Ф. Клейн пришел к общей идее о роли групп преобразований в геометрии, сформулированной им в лекции при вступлении в должность профессора Эрлангенского университета (1872). Лекция имеет название «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» – «Эрлангенская программа» [43].

В чем состоит сущность Эрлангенской программы? Она представляет собой новую парадигму геометрического мира, единую точку зрения на различные геометрии (например, евклидову, аффинную, проективную). Евклидова геометрия рассматривает те свойства фигур, которые не меняются при движениях; равные фигуры определяются как фигуры, которые можно перевести одна в другую движением. Но вместо движений можно выбрать какую-нибудь иную совокупность геометрических преобразований. Выбирая по-разному группы преобразований, получаются разные геометрии. Аффинные и проективные преобразования ведут к аффинной и проективной геометрии. Ф. Клейн показал, что принятие за основу группы проективных преобразований, переводящих в себя некоторый круг (или произвольное коническое сечение), приводит к неевклидовой геометрии Лобачевского. *Эрлангенская программа дала импульс дальнейшему развитию геометрии.*

Таким образом, каждая геометрия является теорией инвариантов особой группы преобразований. Расширяя или сужая группу, можно перейти от одной геометрии к другой. Этот подход мыслителя и математика позволил объединить многие различные геометрии: евклидову, аффинную, проективную, все неевклидовы.

Ф. Клейн становится сторонником теории групп Галуа. Поэтому Эрлангенская программа начинается с определения *группы преобразований*: «Наиболее существенное понятие, необходимое для дальнейшего изложения, есть понятие о *группе* пространственных изменений.

Произвольное число преобразований пространства дает, складываясь, снова преобразование пространства. Если данный ряд преобразований обладает тем свойством, что каждое изменение, получаемое от последовательного применения нескольких преобразований, принадлежащих этому ряду, само входит в его состав, то мы называем этот ряд *группой преобразований*» [44]. В качестве примера группы преобразований приводится «совокупность всех движений» пространства. Указывается, что вращения около точки образуют подгруппу группы движений.

Указав, что геометрические свойства образов не зависят от положения, занимаемого образом в пространстве, от его абсолютной величины и от ориентации в расположении его частей, т. е. не изменяются при движениях и при всех преобразованиях, Ф. Клейн приходит к выводу, что «*геометрические свойства не изменяются от преобразований главной группы*, и обратно, можно сказать: *геометрические свойства характеризуются их неизменяемостью от преобразований главной группы*» [45].

От «пространства», т. е. трехмерного евклидова пространства, ученый переходит к произвольному «многообразию»: «По аналогии с пространственными преобразованиями мы говорим о преобразованиях многообразия; они также образуют группы. Только уже нет более, как в пространстве, группы, которая бы выделялась по своему значению между остальными, – каждая группа равнозначна всякой другой. Как обобщение геометрии получается, таким образом, следующая многообъемлющая задача:

Дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразований группы.

Применительно к современной терминологии, которую, впрочем, обыкновенно прилагают только к определенной группе – группе всех линейных преобразований, можно выразиться еще так:

Дано многообразие и в нем группа преобразований. Требуется развить теорию инвариантов этой группы» [46]. Это есть общая, центральная проблема Эрлангенской программы.

Понятие группы *объединило* аналитическую и проективную геометрии. Цели и результаты программы *объединили* алгебру и геометрию. Так, «теория бинарных форм и проективная геометрия плоскости, которую изучаем, полагая в основу некоторое коническое сечение, эквивалентны между собой», или же «теория бинарных форм и общая проективная метрическая геометрия на плоскости – одно и то же» [47].

Отождествление конических сечений – линий второго порядка, порожденных пересечением двух пространственных фигур – конуса и плоскости – с бинарными (лат. binarius – двойной, состоящий из двух частей – Б. П.) квадратичными формами взаимно обогатили геометрию и алгебру. Теория инвариантов форм получила благодаря геометрии удобное и стройное представление, алгебра же придала методам геометрии общность. *Границы между двумя областями математики сгладились*, и в этом можно видеть *одну из основных тенденций современной математики*.

Следовательно, Эрлангенская программа дала импульс дальнейшему развитию геометрии. По словам французского математика Ф. Рюссо, новизна программы состоит в сближении понятий преобразований и групп, она является «важнейшим моментом в истории геометрии и даже шире, в истории математики» [48].

Благодаря работам Ф. Клейна, теория групп стала одним из важнейших разделов математики. С ее развитием осуществляется синтез геометрических и алгебраических понятий, рассмотренных в трудах К. Ф. Гаусса, Г. Монжа, Б. Римана, Г. Грассмана.

Согласно Эрлангенской программе все разнообразие геометрических систем удалось понять с единой теоретико-инвариантной позиции. Данная программа вместе с теорией групп оказала существенное влияние и на другие области математики (например, теорию функций, теорию дифференциальных уравнений и т. д.). Введение Эрлангенской программы в физику, т. е. утверждение теоретико-инвариантного подхода осуществилось с возникновением специальной теории относительности. Сначала Г. Минковский сформулировал ее как теорию инвариантов, а затем Ф. Клейн непосредственно связал специальную теорию относительности и классическую механику со своей парадигмой. Интересная монография В. П. Визгина «“Эрлангенская программа” и физика» и посвящена анализу двух проблем: формированию теоретико-инвариантного подхода к построению физических теорий и выявлению физических оснований «Эрлангенской программы» [50].

Подчеркнем, что введение в физику Эрлангенской программы не как частного геометрического и *теоретико-группового метода*, а как *фундаментального принципа построения научных теорий* стало возможным лишь после появления формулировок физических теорий в целом как *инвариантов* некоторых *групп преобразований*, которые находятся в основе этих теорий.

Норвежский математик Софус Ли (1842 – 1899) является автором многих выдающихся открытий в математическом анализе и геометрии. Но он известен прежде всего как *создатель непрерывных групп преобразований* [49]. Особенность теории, построенной С. Ли, кроме важности и красоты, состоит в том, что она основательно и тщательно разработана. Изложение ее заняло три объемистых тома и еще два тома составили приложения. В истории науки трудно найти подобный пример создания одним исследователем такой развитой дисциплины. Поэтому закрепившееся за ней в начале XX столетия наименование – «Группы Ли» – ни у кого не вызывало возражений.

Очень интересным оказался тот факт, что творчество Ли связано с двумя ведущими физическими теориями нашего времени – теорией относительности и теорией элементарных частиц. Это проявляется, в частности в том, что группа Г. Лоренца, находящаяся в основании теории относительности, представляет собой частный случай группы Ли. Обратимся к теории относительности. Принцип ковариантности, которому А. Эйнштейн придавал исключительное значение (математическое выражение инвариантности физических законов относительно выбора системы координат), представляет собой перенесение на физическую реальность положения Ф. Клейна, согласно которому каждая геометрия есть теория инвариантов той или иной группы. Схема Клейна получила у Ли далеко идущее и многостороннее развитие в построенной им теории дифференциальных инвариантов. Кроме того, Ли в своем творчестве затронул и геометрию римановских пространств, на базе которой Эйнштейн создал общую теорию относительности. Заметим далее, что в 50-х годах XX столетия проблема поиска частных решений уравнений гравитации Эйнштейна, классификация этих решений потребовали методов, которые непосредственно относились к исследованиям Ли.

Уже на первом этапе развития квантовой механики теория непрерывных групп оказалась для нее очень важной. Это обусловлено инвариантностью основного ее уравнения – уравнения Шредингера – относительно группы вращений пространства. На ее следующем этапе существенную роль играет группа Лоренца, связанная с именем Дирака. Здесь всюду, как и в последующей общей теории элементарных частиц, инструментом теоретического исследования является теория представлений групп Ли различных типов, в основе которой находится созданный Ли мощный инфинитезимальный метод (*алгебра Ли* – этот термин введен Г. Вейлем в 1934 г., через 35 лет после смерти Ли).

Давид Гильберт в знаменитом докладе на Втором международном математическом конгрессе (Париж, 1900) сформулировал «Проблемы Гильберта» (одна из них относилась к группам Ли – пятая проблема – частично доказана Дж. фон Нейманом (1933), Л. С. Понтрягиным (1934), окончательно доказана Г. Глисоном, Д. Монтгомери, Л. Циппином (1952) [51], подчеркнул, что группы Ли будут иметь большое значение для теоретической физики XX в. Это предположение полностью оправдалось. С. Ли всегда опирался на талант аналитика, обладая поразительной геометрической интуицией.

Исследования по теории непрерывных групп преобразований принесли Ли всемирную славу. Трехтомный трактат по группам преобразований остается наиболее популярным сочинением С. Ли [52]. Он является классикой – «Библией» теории непрерывных групп и их инвариантов. Открытая им новая область математики опиралась на геометрию, алгебру, топологию, анализ, дифференциальные уравнения, то есть находилась «на стыке наук». Этим объясняется, что проблематика Ли перешагнула столетие и заняла в XX веке достойное и прочное место. Сотни современных работ по дифференциальной геометрии, теории групп, топологии, дифференциальным уравнениям используют понятия *группы Ли* и *алгебры Ли*.

Его удивительные, оригинальные труды вызвали восхищение и получили высокую оценку и геометров, и аналитиков. Эти открытия будут оказывать благотворное влияние на развитие науки. Великий преемник Ли Эли Картан заявил: «Он войдет в историю как гениальный создатель непрерывных групп». Фридрих Энгель, последователь Ф. Клейна, подчеркнул: «В лице Ли ушел не только один из самых выдающихся математиков нашего времени, но и всех времен».

Приведем яркий пример роли теории групп Галуа в решении важнейших проблем современного математического познания. Знаменитый французский математик Пьер де Ферма (1601 – 1665) известен тем, что заложил основы аналитической геометрии и теории чисел. С его именем связана одна из самых известных и феноменальных математических задач – *Великая теорема Ферма (1637)*. Она связывает основания математики, ее фундаментальные понятия, у истоков которых находился Пифагор, с наиболее кардинальными идеями современной математики. Среди других нерешенных проблем теорема Ферма занимает особое место благодаря своей обманчивой простоте.

Многие математики на протяжении трех с половиной столетий пытались разрешить эту загадку. Как известно, Великая теорема Ферма утверждает, что уравнение

$$x^n+y^n=z^n$$

не имеет решений в целых числах, если n больше 2 (т. е. $n>2$). В книге Диофанта «Арифметика» (вероятно, III в.) на полях была найдена запись следующего содержания: «Я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но поля здесь слишком узки для того, чтобы вместить его» – “*Cuis rei demonstrationem mirabilem sane setex hanc marginis exiguitas non caparet*” (лат.). Из слов Ферма можно заключить, что он весьма доволен своим «поистине удивительным» доказательством, которое он так никому и не рассказал. Но Великая теорема Ферма обрела исключительную славу в грядущих веках.

Ни в физике, ни в химии, ни в биологии нет ни одной проблемы, которая формулировалась бы так просто и определенно и оставалась нерешенной так долго. Она получила название как самая трудная «головоломка» математики. Все попытки найти ее доказательство одна за другой терпели поражения. Так, например, многие теоремы, сформулированные Ферма, строго доказали Л. Эйлер, О. Коши и другие математики XVIII – XIX вв., а основная его теорема оставалась неразрешимой. В начале XX в. одного из гениальных математиков Давида Гильберта спросили, почему он никогда не пытался доказать Великую теорему Ферма. На это Гильберт ответил: «Прежде чем начать доказательство, я должен был бы затратить три года на усиленную подготовку, а у меня нет столько времени, чтобы так расточительно расходовать его на решение проблемы, которое может закончиться неудачей». В 1920 г. Д. Гильберт во время публичной лекции по обзору доказательства теоремы выразил надежду на то, что молодые слушатели, возможно, станут свидетелями ее решения. И предсказания ученого, по-видимому, имели под собой основания.

Обратимся к *теории групп Галуа*, которую автор превратил в *мощный метод*, способный *решать проблемы*, *ранее* казавшиеся *неразрешимыми*. В решении Великой теоремы Ферма ей принадлежит достойное место. Рациональные числа содержат бесконечное число элементов, и можно было бы предположить, что чем больше группа, тем больший интерес она вызывает к себе в математике. Но Галуа придерживался философии «чем меньше, тем лучше» и показал, что небольшие тщательно построенные группы могут обладать весьма богатым набором свойств. Как подчеркивает английский физик и журналист Саймон Сингх в замечательной книге «Великая теорема Ферма», «вместо того, чтобы воспользоваться бесконечными группами, Галуа начал с конкретного уравнения и построил свою группу из нескольких решений этого уравнения. Именно группы, образованные из решений уравнений пятой степени, позволили Галуа получить результаты об этих уравнениях. Через полтора столетия Уайлс воспользовался теорией Галуа как одной из основ для своего доказательства гипотезы Таниямы–Шимуры» [53].

Во второй половине XX в. благодаря мощному арсеналу математических средств возникла реальная возможность доказательства Великой теоремы Ферма. На пути решения величайшей проблемы в истории математического познания японские математики Ютака Танияма и Горо Шимура сформулировали гипотезу о связи между модулярными формами и эллиптическими линиями (гипотеза Таниямы–Шимуры). Сделаем некоторое разъяснение. Свое название эллиптические кривые (линии) получили потому, что некоторые функции, тесно связанные с этими линиями, потребовались для измерения длин эллипсов (а, следовательно, и длин планетных орбит). Для такого уравнения получается *Е-ряд*. Такой ряд содержит в себе значительную долю информации о том уравнении, которое оно описывает. Подобно тому, как биологическая ДНК несет в себе всю информацию, необходимую для построения живого организма, *Е-ряд* несет в себе наиболее существенную информацию об эллиптической кривой. Эндрю Уайлс был блестящим специалистом в арифметике эллиптических кривых. С каждым новым результатом он набирался опыта, который позже приведет его к возможности доказать Великую теорему Ферма.

Японские теоретики особенно привлекательной темой считали исследование модулярных форм, которые представляют собой один из самых причудливых и чудесных объектов в математике. Отличительной особенностью модулярных форм является их высокий уровень симметрии.

Что же касается модулярных форм (или *М-рядов*), то подобно тому, как «*Е-ряды* служат своего рода ДНК для эллиптических кривых, *М-ряды* играют роль ДНК для модулярных форм, – подчеркивает С. Сингх. – Модулярные формы сами по себе играют весьма важную роль в математике. Модулярная форма – объект необычайно сложный, открытый только в XIX в. и ставший предметом пристального изучения главным образом из-за его симметрии. Модулярные формы и эллиптические кривые обитают в совершенно разных областях математического мира, и никому и в голову не приходило, что между ними существует какая-нибудь связь. Поэтому *Танияма* и *Шимура* повергли математическое сообщество в состояние шока своей *гипотезой* о том, что *эллиптические кривые* и *модулярные формы по существу представляют собой одно и то же*» [54]. Но логического доказательства гипотезы авторы не представили.

Чтобы доказать теорему Таниямы-Шимуры, математикам необходимо показать, что каждое из бесконечного множества эллиптических уравнений может быть поставлено в соответствие с какой-то модулярной формой. В методе Уайлса интересным представляется то обстоятельство, что члены в *Е-рядах* обладают естественным упорядочением. Поэтому после того, как установлено соответствие между первыми членами ($E_1 = M_1$), следующим шагом является установление соответствия между вторыми членами ($E_2 = M_2$) и т. д. Речь идет о том, что Уайлсу предстояло доказать, что первый элемент *Е-ряда* можно поставить в соответствие первому элементу некоторого *М-*

ряда. Если такое соответствие будет *установлено* между первыми элементами рядов, то тогда оно будет *установлено* и между вторыми, третьими и т. д. элементами.

Перед нами вырисовывается сложная программа Э. Уайлса. Как практически сделать первый шаг? С. Сингх приходит к важному заключению о том, что математик осознал *эвристический потенциал результатов Э. Галуа – группу Галуа*.

Согласно такому взгляду «первый шаг в осуществлении этой программы был сделан, когда *Уайлс понял всю мощь групп Галуа*. Чтобы создать такую группу, можно было воспользоваться несколькими решениями уравнения, соответствующего эллиптической кривой. После анализа, на который ушло несколько месяцев, Уайлс доказал, что группы Галуа позволяют прийти к одному несомненному заключению: первый член любого *E-ряда* действительно может быть поставлен в соответствие с первым членом некоторого *M-ряда*. Благодаря теории Галуа, Уайлс сумел сделать первый шаг индукции. Следующий шаг требовал от Уайлса найти способ доказать, если какой-то один член *E-ряда* поставлен в соответствие соответствующему члену *M-ряда*, то и следующий элемент *E-ряда* должен соответствовать следующему эелементу *M-ряда*» [55]. Решение данной проблемы заняло два года и Э. Уайлс не мог пока осознать, сколько времени потребуется, чтобы продолжить доказательство.

На следующем этапе математик из Саарбрюккена (Германия) Герхард Фрей высказал предположение (1984) о том, что если кому-нибудь удастся доказать гипотезу Таниямы–Шимуры, то тем самым будет доказана и Великая теорема Ферма. Другими словами, на пути к доказательству теоремы существовало единственное препятствие: отсутствие доказательства гипотезы японских математиков. Следующий шаг связан с именем профессора Калифорнийского университета в Беркли Кена Рибета. Он устанавливает связь между теоремой и гипотезой Таниямы–Шимуры. Но вместе с тем К. Рибет считал данное предположение совершенно не доказуемым и высказывал мысль о том, что Эндрю Уайлс был одним из немногих людей на Земле, кто осмелился доказать эту гипотезу, так как она оставалась в основном русле развития математики.

Э. Уайлс после защиты диссертации на соискание ученой степени Ph. D. в Кембридже переезжает в Принстонский университет. Он принимает важное для себя решение: заняться систематическим поиском доказательства гипотезы Таниямы-Шимуры, а также работать в полной изоляции и секретности.

После семи лет работы в одиночку Э. Уайлс завершил доказательство гипотезы Таниямы–Шимуры и был готов объявить о полученных результатах всему миру. Летом 1993 г. в родном городе Уайлса, Кембридже, в Институте сэра Исаака Ньютона состоялся международный симпозиум. Серия лекций Уайлса называлась «Модулярные формы, эллиптические кривые и представления Галуа». После некоторых уточнений текста никаких сомнений в доказательстве гипотезы не было. Две статьи общим объемом 130 страниц были подвергнуты самому тщательному анализу и в мае 1995 года опубликованы в журнале «Annals of Mathematics» [56]; [57].

Бывший научный руководитель Э. Уайлса Джон Коутс заявил: «Для математиков окончательный вариант *доказательства эквивалентен* по своему значению *расщеплению атома* или *открытию структуры ДНК*. Доказательство Великой теоремы Ферма представляет собой *величайший триумф* человеческого *интеллекта*, и не следует упускать из виду, что оно совершило переворот в теории чисел. Для меня очарование и красота работы Эндрю заключается в том, что она стала гигантским шагом вперед в развитии теории алгебраических чисел».

Эндрю Уайлс обогатил математику целой серией новых методов и стратегий, которые можно использовать для доказательства других теорем. По словам С. Сингха, «за восемь лет упорнейшего труда Уайлс, по существу, свел воедино все достижения теории чисел XX в., выстроив из них одно сверхмощное доказательство. С помощью гипотезы Таниямы–Шимуры *Уайлс объединил эллиптический и модулярный миры* и, тем самым, проложил математике пути ко многим другим доказательствам: проблемы, стоящие в одной области, могут быть решены по аналогии с проблемами из параллельной области. – И далее Сингх продолжает: – После успеха, достигнутого Уайлсом, стало возможным с новыми силами пытаться доказать другие гипотезы, объединяющие различные разделы математики. *Уайлс* совершил *прорыв*, который может привести *математику в новый Золотой век*» [58].

Интересно узнать, что думает о теореме Ферма один из самых выдающихся математиков XX столетия Эндрю Уайлс? Он вспоминает: «Великая теорема Ферма была моей детской мечтой. Мне выпало счастье осуществить в моей взрослой жизни то, что было мечтой моего детства. Я знаю, что это редкая удача. Доказав Великую теорему Ферма, я не мог не ощутить чувство потери, но в то же время меня охватило чувство бескрайней свободы. На протяжении восьми лет я был настолько поглощен ее доказательством, что не мог думать ни о чем другом. Я думал о теореме Ферма все время – с утра до ночи. Теперь эта Одиссея подошла к концу. Мой разум обрел покой».

Доказательство Уайлса знаменует триумф математики в решении сложнейшей теоретической проблемы в истории науки. Оно основано на фундаментальных результатах Л. Эйлера, К. Гаусса (королей математики своих эпох), Э. Галуа (создателя теории групп и полей), А. Пуанкаре, Д. Гильберта, Ю. Таниямы, Г. Шимуры, Р. Тейлора и многих других авторов, которые прямо или косвенно связаны с самой сложной, неразрешимой проблемой в течение 358 лет. Доказательство Великой (последней) теоремы Ферма можно поставить в один ряд с такими достижениями XX века, как изобретение компьютера, полет в космос и др. Оно явилось вспышкой сверхновой звезды, которая всегда будет светить человечеству.

Литература:

1. Стюарт И. Истина и красота: Всемирная история симметрии. – М.: Астрель: CORPUS, 2010. – С. 174.
2. Эткинз П. Десять великих идей в науке: Как устроен наш мир. – М.: АСТ: Астрель, 2008. – С. 178.
3. Галуа Э. Два мемуара по анализу. Предисловие // Дальма А. Эварист Галуа, революционер и математик. – М.: Наука, 1984. – С. 67.
4. Там же. – С. 67.
5. Галуа Э. Математические науки // Дальма А. Эварист Галуа, революционер и математик. – М.: Наука, 1984. – С. 62.
6. Оре О. Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. – М.: Физматлит, 1961. – 343 с.
7. Галуа Э. Мемуар об условиях разрешимости уравнений в радикалах // Галуа Э. Сочинения. – М.-Л.: Гостехиздат, 1936. – С. 63.
8. Там же. – С. 67 – 68.
9. Там же. – С. 68.
10. Стюарт И. Истина и красота: Всемирная история симметрии. – М.: Астрель: CORPUS, 2010. – С. 12.
11. Герц Г. О соотношениях между светом и электричеством // Из предыстории радио. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – Вып. 1. – С. 196.
12. Стюарт И. Истина и красота: Всемирная история симметрии. – Астрель: CORPUS, 2010. – С. 437.
13. Постников М. М. Теория Галуа. – М.: Физматгиз, 1963. – 218 с.
14. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.: Наука, 1989. – Т. 1. – С. 105.
15. Курош А. Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.; Курош А. Г. Теория групп. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005. – 648 с.
16. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 431 с.
17. Курош А. Г. Теория групп. – М.: Наука 1967. – С. 22.
18. Федоров Е. С. Симметрия и структура кристаллов. – М.: Изд-во АН СССР, 1949. – 631 с.
19. Федоров Е. С. Начала учения о фигурах. – М.: Изд-во АН СССР, 1953. – 411 с.
20. Лауэ М. фон. Кристаллофизика // Лауэ М. фон. История физики. – М.: ГИТТЛ, 1956. – С. 135 – 144.
21. Шубников А. В. У истоков кристаллографии. – М.: Наука, 1972. – 51 с.
22. Шубников А. В. Избранные труды по кристаллографии. – М.: Наука, 1975. – 551 с.
23. Вигнер Е. Этюды о симметрии. – М.: Мир, 1971. – 318 с.
24. Вейль Г. Симметрия. – М.: Наука, 1968. – 191 с.
25. Узоры симметрии. – М.: Мир, 1980. – 271 с.
26. Принцип симметрии (историко-методологические проблемы). – М.: Наука, 1978. – 398 с.
27. Вернадский В. И. Принцип симметрии в науке и философии // Вернадский В. И. Размышления натуралиста. Пространство и время в неживой и живой природе. – М.: Наука, 1975. – Ч. 1. – С. 23.

28. Вейль Г. Феликс Клейн и его место в современной математике // Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.: Наука, 1989. – Т. 1. – С. 437.
29. Бройль Л. де. Исследования по теории квантов // Вариационные принципы механики. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 641 – 667.
30. Шрёдингер Э. Квантование как задача о собственных значениях // Вариационные принципы механики. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 668 – 704.
31. Вигнер Е. Теория групп и ее приложение к квантово-механической теории атомных спектров. – М.: Изд. иност. лит., 1961. – 443 с.
32. Aschbacher M. The status of the classification of the finite simple groups, Notices Amer. Math. Soc., 51, 736 (2004). [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.ams.org/notices/200407/fea-aschbacher.pdf
33. Атлас представлений конечных групп. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3
34. Галуа Э. Два мемуара по анализу. Предисловие // Дальма А. Эварист Галуа, революционер и математик. – М.: Наука, 1984. – С. 63 – 64.
35. Там же. – С. 64 – 65.
36. Отчеты о заседаниях Академии наук // Дальма А. Эварист Галуа, революционер и математик. – М.: Наука, 1984. – С. 90 – 91.
37. Галуа Э. Два мемуара по анализу // Дальма А. Эварист Галуа, революционер и математик. – М.: Наука, 1984. – С. 67.
38. Огюсту Шевалье, 29 мая 1832 года // Дальма А. Эварист Галуа, революционер и математик. – М.: Наука, 1984. – С. 56 – 57.
39. Инфельд Л. Эварист Галуа. Избранник богов. – М.: Молодая гвардия, 1958. – С. 349.
40. Jordan C. Traité des substitutions et des équations algébriques. – Paris, 1957.
41. Инфельд Л. Эварист Галуа. Избранник богов. – М.: Молодая гвардия, 1958. – С. 351.
42. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.: Наука, 1989. – Т. 1. – С. 168.
43. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа») // Об основаниях геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956. – С. 399 – 434.
44. Клейн Ф. Эрлангенская программа // Об основаниях геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956. – С. 401.
45. Там же. – С. 402.
46. Там же. – С. 402.
47. Там же. – С. 410.
48. Russo F. Groupes et géométrie. La genese du programme d’Erlangen de Felix Klein. – Paris, 1974.
49. Полищук Е. М. Софус Ли. – Л.: Наука, 1983. – 214 с.
50. Визгин В. П. Эрлангенская программа и физика. – М.: Наука, 1975. – 112 с.
51. Пугач Б. Я. Научное познание и математическое творчество // Социальная экономика, 2009. – № 1. – Часть первая. – С. 127.
52. Lie S, Engel F. Theorie der Transformationsgruppen. – Leipzig, I, 1888; II, 1890; III, 1893.
53. Сингх С. Великая теорема Ферма. – М.: Изд-во Московского центра непрерывного математического образования, 2000. – С. 215 – 216.
54. Там же. – С. 177.
55. Там же. – С. 217.
56. Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem // Annals of Mathematics, 1995. – Vol. 142. – P. 443 – 551. *Эта статья содержит основную часть предложенного Уайлсом доказательства гипотезы Таниямы–Шимуры и Великой теоремы Ферма*.
57. Taylor R., Wiles A. Ring-theoretic properties of Certain Hecke algebras // Annals of Mathematics, 1995. – Vol. 142. – P. 553 – 572.
58. Сингх С. Великая теорема Ферма. – М.: Изд-во Московского центра непрерывного математического образования, 2000. – С. 253 – 256.