

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**



# **ВІСНИК**

**ХАРКІВСЬКОГО  
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА**

**№ 1067**

**Харків 2013**

ISSN 2311-0872

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ

**ВІСНИК**  
**ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО**  
**УНІВЕРСИТЕТУ**  
**імені В.Н. КАРАЗІНА**

**№ 1067**

**Серія “РАДІОФІЗИКА ТА ЕЛЕКТРОНІКА”**

**Випуск 22**

**ХАРКІВ**  
**2013**

У збірнику представлені результати теоретичних та експериментальних досліджень, що спрямовані на розв'язання актуальних задач сучасної радіофізики. До них відносяться: розповсюдження радіохвиль в навколосемному просторі, його діагностика з використанням радіофізичних методів, розповсюдження і дифракція електромагнітних хвиль у електродинамічних структурах, взаємодія лазерного випромінювання з речовиною та біологічними об'єктами, фізичні принципи у напівпровідникових приладах та ін.

Для наукових працівників, аспірантів, студентів старших курсів радіофізичних спеціальностей.

В сборнике представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований, направленных на решение актуальных задач современной радиофизики. К ним относятся: распространение радиоволн в околоземной среде, ее диагностика с использованием радиофизических методов, распространение и дифракция электромагнитных волн в сложных электродинамических структурах, взаимодействие лазерного излучения с веществом и биологическими объектами, физические принципы в полупроводниковых приборах и др.

Для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов радиофизических специальностей.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна ( протокол №13 від 21.06.2013).

#### **Редакційна колегія**

*Відповідальний редактор* - д.ф.-м.н., проф. **Свіч В.А.**

проф. **Блаунштейн Н.**, Ізраїль  
д.ф.-м.н., проф. **Дюбко С.П.**, Україна  
д.ф.-м.н., проф. **Колчигін М.М.**, Україна  
д.ф.-м.н., проф. **Потапов О.О.**, Росія  
проф. **Фролов В.Л.**, Росія  
акад. НАНУ **Шульга В.М.**, Україна  
д.ф.-м.н., проф. **Чорногор Л.Ф.**, Україна

д.ф.-м.н., проф. **Горобець М.М.**, Україна  
д.ф.-м.н., проф. **Катрич В.О.**, Україна  
акад. НАНУ **Литвиненко Л.М.**, Україна  
д.ф.-м.н., проф. **Прохоров Е.Д.**, Україна  
д.ф.-м.н., проф. **Шматько О.О.**, Україна  
д.ф.-м.н., проф. **Шульга С.М.**, Україна  
акад. НАНУ **Яковенко В.М.**, Україна

*Відповідальний секретар* - к.ф.-м.н., доц. **Цимбал А.М.**

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, радіофізичний факультет,  
тел. (057) – 707-51-23, e-mail: [Anatoliy.Tsybal@mail.ru](mailto:Anatoliy.Tsybal@mail.ru)  
[www-radiovestnik.univer.kharkov.ua](http://www-radiovestnik.univer.kharkov.ua)

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ №11825-696 ПР від 04.10.2006

© Харківський національний університет  
імені В.Н. Каразіна, оформлення, 2013

УДК 537.86

## ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЮСНОЙ МОДЕЛИ ДИСПЕРСИИ ДИЭЛЕКТРИКА НА ОСНОВЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ И ПОКАЗАТЕЛЯ ПОГЛОЩЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСЕ ЧАСТОТ

А. Ю. Бутрым, М. С. Антюфеева, В. В. Хардигов, С. Н. Шульга

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 61022, Харьков, пл. Свободы, 4,  
тел.: (057) 707-52-57, e-mail: [mariya.antyufeyeva@gmail.com](mailto:mariya.antyufeyeva@gmail.com)

Поступила в редакцию 30 мая 2013 г.

В работе изложен алгоритм построения аппроксимации частотной зависимости комплексной диэлектрической проницаемости с помощью обобщенной полюсной модели по результатам измерения комплексного показателя преломления в ограниченной полосе частот на нерегулярно расположенных частотах. Используемая обобщенная модель дисперсии включает в себя большинство механизмов поляризации диэлектриков. Подробно изложены физические и математические принципы формирования модели и аппроксимации измеренных данных. Приведены результаты численного расчета на основе сгенерированных зашумленных данных.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** комплексная диэлектрическая проницаемость, полюсная модель дисперсии диэлектрической проницаемости, численное моделирование.

У роботі викладено алгоритм побудови апроксимації частотної залежності комплексної діелектричної проникності за допомогою узагальненої полюсної моделі за результатами вимірювання комплексного показника заломлення у обмеженій смузі частот на нерегулярно розташованих частотах. Модель, що використовується для апроксимації, включає більшість механізмів поляризації діелектриків. Докладно викладені фізичні та математичні принципи формування моделі та апроксимації вимірних даних. Наведено результати числових розрахунків на прикладі згенерованих зашумлених даних.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** комплексна діелектрична проникність, полюсна модель дисперсії діелектричної проникності, числове моделювання.

An algorithm is described for approximation of complex permittivity frequency dependence using a generalized pole model provided the refractive index and absorption index is measured in a finite frequency band at unevenly spaced frequencies. The model includes most of the dielectric polarization mechanisms. Physical and mathematical principles of the model and the approximation of the measured data are detailed. A numerical example is shown for simulated noisy input data.

**KEY WORDS:** complex permittivity, pole model of permittivity dispersion, numerical simulation.

### ВВЕДЕНИЕ

Измерение отражения от материала и/или прохождения через него, в совокупности со знанием его физических размеров дает информацию для определения диэлектрической и магнитной проницаемости материала. Имея характеристики падающей, отраженной и преломленной от диэлектрического образца волны мы получаем набор значений для показателя преломления и показателя поглощения на частотах, которые определяются используемым в эксперименте генератором. Но для многих практических приложений, при создании искусственных сред, метаматериалов со специфическими свойствами, антенн, и других элементов современной электроники, например на основе слоистых структур, необходим предварительный расчет электромагнитных полей, требующий известных электродинамических характеристик материала в любой точке рабочего диапазона (а не только в выбранных при измерении), а, зачастую, и аналитической аппроксимации дисперсионной зависимости в расширенном диапазоне частот. Это характерно не только для аналитических методов, таких как интегральные методы или метод модового базиса, но и для численных методов, например, для метода конечных разностей во временной области (FDTD) необходима модель дисперсии, допускающая представление во временной области. Кроме того, нельзя не отметить, что многие материалы по своим диэлектрическим свойствам не вписываются только в одну из классических моделей Дебая, Друде, Лоренца, а, как правило, отвечают некоторой совокупности этих моделей. Данная статья предлагает алгоритм создания обобщенной полюсной модели, включающей указанные выше модели в качестве частных случаев.

Рассматриваться будет немагнитный диэлектрик. В этом случае действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости связаны с показателем преломления и показателем поглощения:

$$\epsilon' = n^2 - k^2, \quad \epsilon'' = 2nk. \quad (1)$$

Таким образом экспериментально измеренные частотные зависимости  $n$  и  $k$  пересчитываются в комплексную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon(f_i)$  на наборе частот  $f_i$ .

© Бутрым А. Ю., Антюфеева М. С., Хардигов В. В., Шульга С. Н., 2013



### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваемая задача заключается в построении аппроксимации измеренных данных частотной зависимости диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(f)$  в следующем виде:

$$\varepsilon_{PM}(f) = \varepsilon_\infty + \sum_k r_k / (if - s_k) = \varepsilon_\infty + \sum_k (a_k + ib_k) / (if - (\alpha_k + i\omega_k)), \quad (2)$$

где  $\varepsilon$ ,  $r_k = a_k + ib_k$  и  $s_k = \alpha_k + i\omega_k$  – комплексные величины,  $i$  – мнимая единица. Параметрами модели являются  $\varepsilon_\infty$ ,  $r_k$ ,  $s_k$ . Поскольку  $r_k$  и  $s_k$  – комплексные числа, каждое слагаемое в (2), соответствующее одному индексу суммирования, учитывается дважды, включая комплексно сопряженную пару:

$$r_k / (if - s_k) + r_k^* / (if - s_k^*) \quad (3)$$

Обозначим эту модель как полюсную модель (ПМ). Она удовлетворяет соотношениям Крамерса-Кронига (КК) и включает как частные случаи модели Дебая, Друде и Лоренца.

Модель Дебая соответствует простому действительному полюсу, когда  $r$  и  $s$  оба действительные числа.

$$\varepsilon_{Debye}(f) = 1 + A / (if - \alpha), \quad A, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Модель Лоренца соответствует комплексному  $s$  и чисто мнимому  $r$ .

$$\varepsilon_{Lorentz}(f) = 1 + \frac{iB}{if + (\alpha - i\omega)} - \frac{iB}{if + (\alpha + i\omega)} = 1 + \frac{2B\omega}{f^2 - (\alpha^2 + \omega^2) - i2\alpha f}, \quad \alpha, \omega, B \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Модель Друде (используемая для описания дисперсии в металлах в инфракрасном диапазоне длин волн) соответствует комбинации полюса проводимости (при  $s = 0$ ) и модели Дебая с общей амплитудой:

$$\varepsilon_{Drude}(f) = 1 + \frac{A}{if(if + \alpha)} = 1 + \frac{A/\alpha}{if} - \frac{A/\alpha}{if + \alpha}, \quad \alpha, A \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Таким образом, задача заключается в следующем: по данным измерений в определенной полосе частот дисперсионных зависимостей диэлектрической проницаемости ( $\varepsilon_j(f_j)$ ,  $f_{low} < f_j < f_{high}$ ) определить параметры модели  $\varepsilon_\infty$ ,  $r_k$ ,  $s_k$  которые обеспечивают минимальную невязку между моделью (2) и измеренными данными  $\varepsilon_j(f_j)$ . В качестве функции невязки возьмем сумму квадратов модулей разностей между измеренными и вычисленными значениями:

$$\chi^2(\varepsilon_\infty, r_k, s_k) = \sum_j \left| \varepsilon_j(f_j) - \varepsilon_{PM}(f_j; \varepsilon_\infty, r_k, s_k) \right|^2 \quad (7)$$

Особенностью используемого в нашем случае метода наименьших квадратов является комплексность аппроксимируемых данных.

### СХЕМА РЕШЕНИЯ

Существует несколько алгоритмов аппроксимации по методу наименьших квадратов. Для нелинейной зависимости модели от параметров наиболее эффективным и удобным является метод Левенберга-Марквардта (ЛМ), поскольку в рассматриваемом случае очень просто вычислить производные модели по параметрам. Этот метод, как правило, приводит к очень быстрой сходимости при условии, что начальные приближения параметров не слишком далеки от оптимальных значений. Основным недостатком ЛМ, как и любого аналогичного градиентного метода локальной оптимизации, является зависимость от начального приближения: ЛМ находит минимум  $\chi^2$ , ближайший к стартовой точке. Рассматриваемая задача является нелинейной, а измеренные данные могут содержать шум (конечная точность измерений). Все это приводит к тому, что существует много минимумов функции невязки, и чтобы получить лучшее соответствие, нужно обеспечить хорошее начальное приближение. Для преодоления этой проблемы будем использовать метод пучка матриц, называемый в зарубежной литературе Pencil of Matrix (PoM) [1, 2], при нахождении начального приближения для нелинейных параметров модели  $s_k$ . Полезной особенностью метода PoM является то, что он позволяет оценить достаточное количество полюсов, необходимых для описания сигнала. Однако, так как PoM работает с временными рядами, необходимо преобразовать входные частотные данные во временную область. Это может быть сделано с помощью преобразования Фурье, но для этого необходимо иметь равномерную выборку данных в частотном диапазоне от нуля до верхней частоты, определяющей временной шаг. Для получения этих данных мы будем использовать экстраполяцию степенными рядами, основанную на применении интегрального соотношения Крамерса-Кронига. После экстраполяции данных, мы используем интерполяцию кубическим сплайном внутри известного частотного диапазона и найденную экстраполяцию степенными рядами для вычисления дисперсионной зависимости в равномерно

распределенных точках  $f_j = j \cdot \Delta f$ . К этим данным применяется быстрое преобразование Фурье (Fast

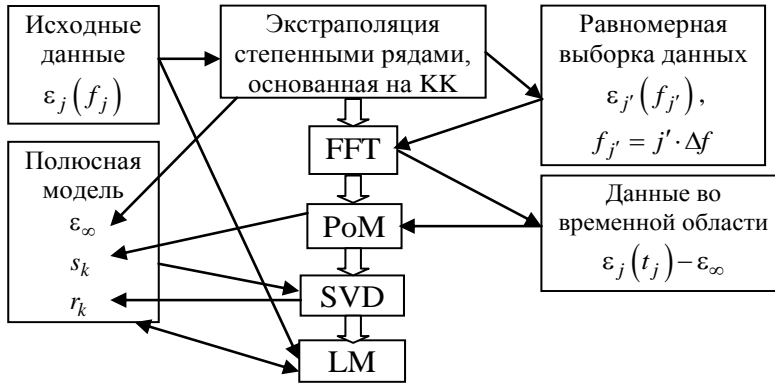


Рис. 1. Алгоритм построения полюсной модели

Fourier Transform (FFT)). К полученному временному ряду применяется PoM для получения комплексных частот полюсов  $s_k$  и оценки необходимого количества полюсов модели. После того как найдены нелинейные параметры модели  $s_k$ , задача нахождения линейных параметров модели  $r_k$  методом наименьших квадратов может быть легко решена широко известным методом сингулярного разложения матрицы (Singular Value Decomposition (SVD)). В результате мы приходим к

хорошему начальному приближению для полюсной модели, которое используется для дальнейшего уточнения с помощью нелинейной подгонки по методу ЛМ. Обобщенная схема алгоритма и взаимодействия данных на разных этапах представлена на рис. 1.

## ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

### 1. Экстраполяция степенными рядами на основе соотношений Крамерса-Кронига

В первую очередь для конвертации данных во временную область необходимо получить дисперсионные зависимости на равномерных отсчетах от нулевой частоты до некоторого высокочастотного предела. Поскольку экспериментальные данные измерены только в конечной полосе от некоторого  $f_{low}$  до  $f_{high}$ , то необходимо как-то экстраполировать эту зависимость. В данном случае важна не столько точность, сколько «физичность» экстраполяции. Мы используем аппроксимацию степенными рядами для «хвостов», основанную на четной/нечетной симметрии данных, исходя из того, что мы имеем дело со спектром некоторой реальной функции (временной отклик поляризации). Таким образом, мы представляем  $\epsilon'$  как сумму одночленов четной степени, а  $\epsilon''$  как сумму одночленов нечетной степени:

$$\epsilon'(f) = \begin{cases} f < f_{low}, & a_0 + a_1 f^2 + a_2 f^4 + \dots \\ f_{low} < f < f_{high}, & \epsilon'_{measured} \\ f > f_{high}, & \epsilon_{\infty} + b_1 f^{-2} + b_2 f^{-4} + \dots \end{cases} \quad \epsilon''(f) = \begin{cases} f < f_{low}, & \tilde{\sigma} f^{-1} + c_1 f + c_2 f^3 + \dots \\ f_{low} < f < f_{high}, & \epsilon''_{measured} \\ f > f_{high}, & \tilde{\sigma} f^{-1} + b_1 f^{-3} + b_2 f^{-5} + \dots \end{cases} \quad (8)$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $\tilde{\sigma}$ , и  $\epsilon_{\infty}$  воспользуемся соотношениями Крамерса-Кронига, связывающими действительную и мнимую части комплексной  $\epsilon$ :

$$\epsilon'(f) = \epsilon_{\infty} - \frac{2}{\pi} P.V. \int_0^{\infty} \frac{\varphi \cdot \epsilon''(\varphi)}{\varphi^2 - f^2} d\varphi, \quad \epsilon''(f) = \frac{2f}{\pi} P.V. \int_0^{\infty} \frac{\epsilon'(\varphi)}{\varphi^2 - f^2} d\varphi - \frac{\sigma_0 / 2\pi\epsilon_0}{f}. \quad (9)$$

Сингулярные интегралы вычисляются в смысле главных значений. Подставляя (8) в (9) получаем следующие функциональные равенства для указанных поддиапазонов частот:

$$\begin{aligned} f < f_{low}: & \tilde{\sigma} f^{-1} + c_1 f + c_2 f^3 + \dots + c_n f^{2n-1} = \\ & = \frac{2f}{\pi} P.V. \int_{f_{low}}^{f_{high}} \frac{\epsilon'_{measured}(\varphi)}{\varphi^2 - f^2} d\varphi + \epsilon_{\infty} f \cdot F_0^h(f) + f \left[ a_n F_n^l(f) + a_0 F_0^l(f) + b_n F_n^h(f) \right] + \frac{\tilde{\sigma}}{f} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} f > f_{high}: & \tilde{\sigma} f^{-1} + b_1 f^{-3} + b_2 f^{-5} + \dots + b_n f^{-2n-1} = \\ & = \frac{2f}{\pi} P.V. \int_{f_{low}}^{f_{high}} \frac{\epsilon'_{measured}(\varphi)}{\varphi^2 - f^2} d\varphi + \epsilon_{\infty} f \cdot F_0^h(f) + f \left[ a_n F_n^l(f) + a_0 F_0^l(f) + b_n F_n^h(f) \right] + \frac{\tilde{\sigma}}{f} \end{aligned} \quad (11)$$

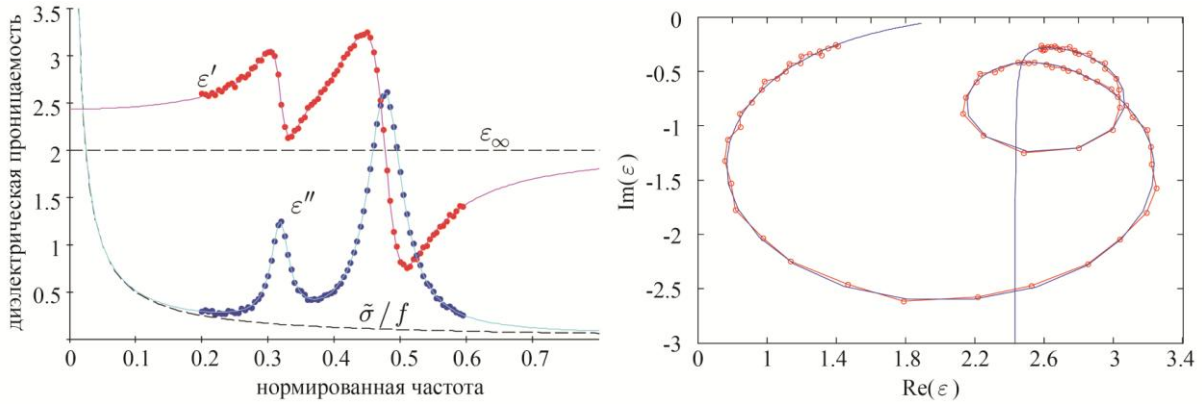


Рис. 2. Моделирование исходной диэлектрической проницаемости (сплошная линия – модель, точки – симуляция данных измеренных на нерегулярных частотах и с добавлением шума)

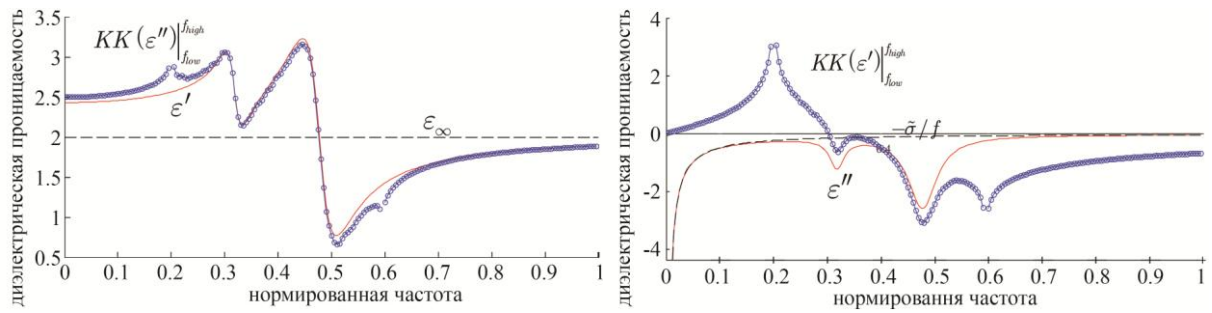


Рис. 3. Результат применения соотношений Крамерса-Кронига к набору зашумленных данных (сплошная линия – исходная модель, точки – результат применения соотношений Крамерса-Кронига)

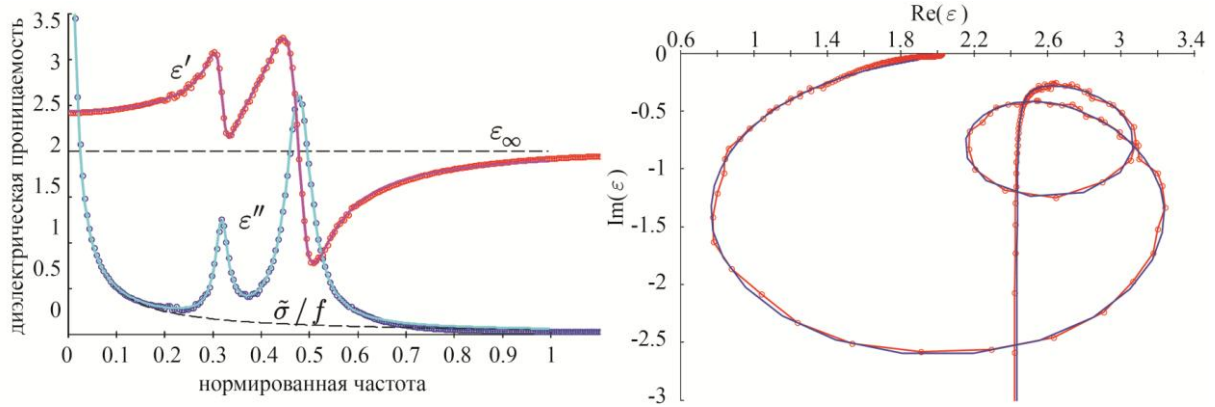


Рис. 4. Результат экстраполяции данных с применением соотношений Крамерса-Кронига (сплошная линия – исходная модель, точки – экстраполированная дисперсионная зависимость включая симуляцию измеренных данных)

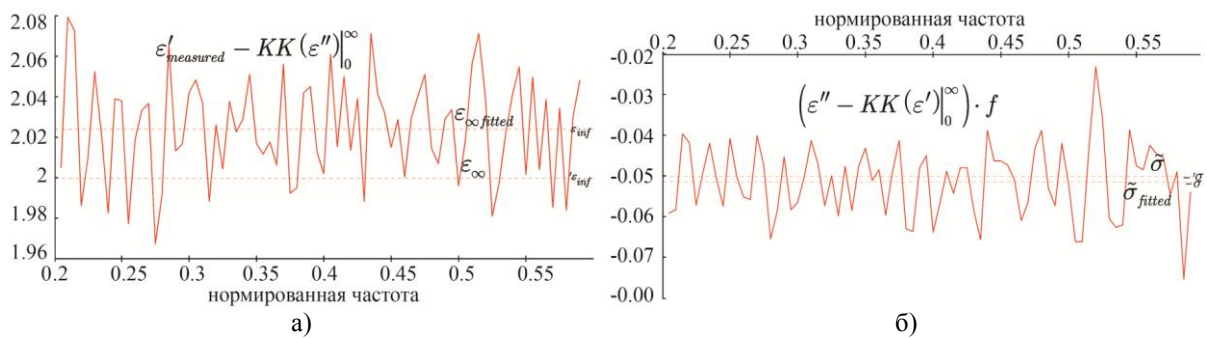


Рис. 5. Ошибка подгонки

$$f < f_{low} : a_0 + a_1 f^2 + a_2 f^4 + \dots + a_n f^{2n} = \varepsilon_\infty - \frac{2}{\pi} P.V. \int_{f_{low}}^{f_{high}} \frac{\varphi \varepsilon_{measured}^n(\varphi)}{\varphi^2 - f^2} d\varphi - \left[ c_n F_n^l(f) + \tilde{\sigma} (F_0^l(f) + F_0^h(f)) + d_n F_n^h(f) \right] \quad (12)$$

$$f > f_{high} : \varepsilon_\infty + b_1 f^{-2} + b_2 f^{-4} + \dots + b_n f^{-2n} = \varepsilon_\infty - \frac{2}{\pi} P.V. \int_{f_{low}}^{f_{high}} \frac{\varphi \varepsilon_{measured}^n(\varphi)}{\varphi^2 - f^2} d\varphi - \left[ c_n F_n^l(f) + \tilde{\sigma} (F_0^l(f) + F_0^h(f)) + d_n F_n^h(f) \right] \quad (13)$$

Функции  $F_n^l$ ,  $F_n^h$  соответствуют интегралам от степенных функций по нижним/верхним частотам:

$$F_n^l(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{f_{low}} \frac{\varphi^{2n}}{\varphi^2 - f^2} d\varphi; \quad F_n^h(f) = \frac{2}{\pi} \int_{f_{high}}^\infty \frac{\varphi^{-2n}}{\varphi^2 - f^2} d\varphi \quad (14)$$

Эти функции могут быть вычислены по следующим рекуррентным формулам:

$$F_n^l(f) = \frac{1}{2n-1} f_{low}^{2n-1} + f^2 F_{n-1}^l(f); \quad n=1, 2, \dots \quad F_0^l(f) = \frac{1}{\pi f} \ln \left| \frac{f - f_{low}}{f + f_{low}} \right|$$

$$F_n^h(f) = \frac{1}{f^2} \left( F_{n-1}^h(f) - \frac{1}{(2n-1) f_{high}^{2n-1}} \right); \quad n=1, 2, \dots \quad F_0^h(f) = \frac{1}{\pi f} \ln \left| \frac{f_{high} + f}{f_{high} - f} \right| \quad (15)$$

Система уравнений (10)–(13) включает неизвестные параметры линейно, что дает нам систему линейных функциональных уравнений. Для численного определения параметров система функциональных уравнений сводится к переопределенной системе линейных уравнений методом коллокации. Таким образом, мы берем несколько точек коллокации за пределами измеряемого интервала, в которых требуем выполнения равенств (10)–(13). Мы ограничиваем суммы (8) двумя слагаемыми для низких частот и тремя слагаемыми для высоких частот (не учитывая слагаемые с  $\tilde{\sigma}$  и  $\varepsilon_\infty$ ). В результате получается  $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 = 12$  параметров. Численное моделирование показало, что большее число параметров может привести к неправильной экстраполяции. Для ситуации с 12 параметрами численный эксперимент показал, что система (11)–(14) лучше всего обусловлена, когда вне известного интервала берется 20 точек: 10 для низкочастотного диапазона, от  $0.1 f_{low}$  до  $f_{low} - \Delta f$  и 10 точек для высокочастотного диапазона, в пределах  $f_{high} + 2\Delta f \dots 1.2 f_{high}$ , где  $\Delta f$  – средний шаг между известными точками. В результате получается переопределенная система линейных алгебраических уравнений, которая состоит из 20 уравнений с 12 неизвестными. Эта система решается в смысле наименьших квадратов с помощью SVD. Найденные параметры используются в аппроксимации хвостов. Проиллюстрируем вышесказанное численными результатами, описав диэлектрик полюсной моделью (2) с  $\varepsilon_\infty = 2$ , проводимостью  $\tilde{\sigma} = 0.05$ , и двумя парами полюсов Лоренца с параметрами  $r_1 = -0.5i / 2\pi$ ,  $s_1 = (-0.2 + 3i) / 2\pi$  и  $r_2 = -0.1i / 2\pi$ ,  $s_2 = (-0.1 + 2i) / 2\pi$ :

$$\varepsilon(f) = 2 + \frac{r_1}{if - s_1} + \frac{r_1^*}{if - s_1^*} + \frac{r_2}{if - s_2} + \frac{r_2^*}{if - s_2^*} - i \frac{\tilde{\sigma}}{f} \quad (16)$$

Эта дисперсионная зависимость «измеряется» в 200-х нерегулярно расположенных точках в интервале частот от 0.2 до 0.595, к расчетным данным добавим случайный шум с равномерным распределением по амплитудам в диапазоне  $\pm 1\%$  от максимума соответствующей кривой. Результаты приведены на рис. 2.

Результаты расчета интегралов КК по сплайн-интерполированным измеренным данным в пределах частотного диапазона измерений (интеграл от измеренных данных в (10)–(13)) приведены на рис. 3. Из графика видно, что КК интегралы зашумлены в среднем диапазоне частот и ведут себя довольно гладко вне этого диапазона. Это связано с особенностью в ядре интеграла КК – если точка находится внутри зашумленного диапазона, шум в окрестности этой точки будет существенно влиять на результат интегрирования, но если точка находится вне интервала интегрирования, тогда интегрирование усредняет шумы и результатом является гладкая кривая.

Решение системы (10)–(13) на выбранных точках коллокации с помощью SVD дает следующие аппроксимированные значения  $\varepsilon_{\infty fitted} = 2.024$ ,  $\tilde{\sigma}_{fitted} = 0.0509$  (точные значения были определены как  $\varepsilon_\infty = 2$ ,  $\tilde{\sigma} = 0.05$ ). Результат экстраполяции представлен на рис. 4. Полученные данные аппроксимируют «хвосты» не точно, но достаточно хорошо, учитывая присутствующий шум. Теперь, когда имеется аппроксимация для  $\varepsilon'$  и  $\varepsilon''$  во всем частотном диапазоне мы можем применить соотношения КК в

форме (9). Параметр  $\varepsilon_\infty$  находится как разность  $\varepsilon' - \text{KK}(\varepsilon'')|_0^\infty$ . Соответствующий график представлен на рис. 5 а. По этим результатам можно не только определить  $\varepsilon_\infty$  как среднеквадратичное значение, но и оценить зашумленность данных и ошибку оценки  $\varepsilon_\infty$ , как стандартное отклонение по измеренному диапазону значений. Здесь же можно исключить  $\varepsilon_\infty$  из параметров подгонки: если  $|\varepsilon_\infty - 1|$  существенно меньше полученной оценки стандартного отклонения, то можно полагать  $\varepsilon_\infty = 1$  и подгонять данные снова, исключив  $\varepsilon_\infty$  из системы (10)–(13). Аналогичную проверку можно выполнить и по параметру «проводимости»  $\tilde{\sigma}$ , используя второе соотношение КК. Результат для  $(\varepsilon'' - \text{KK}(\varepsilon')|_0^\infty) \cdot f$  представлен на рис. 5 б. Если окажется, что  $\tilde{\sigma}$  меньше вычисленного стандартного отклонения, то можно положить  $\tilde{\sigma} = 0$  и повторить решение системы (10)–(13) с нулевым  $\tilde{\sigma}$ .

## 2. Преобразование Фурье

После экстраполяции «хвостов» и получения оценки параметров  $\tilde{\sigma}$  и  $\varepsilon_\infty$  можно использовать соотношение (9) для пересчета аппроксимируемой зависимости на равномерной сетке частот, что необходимо для дальнейшего применения преобразования Фурье. Функция диэлектрической проницаемости была дискретизирована в полосе частот от 0 до  $4 \cdot f_{high}$  с равномерным шагом, близким к среднему шагу исходных данных, и обеспечивающему общее количество точек, кратное 8 (что необходимо для применения эффективного алгоритма быстрого преобразования Фурье (FFT)). Подготовленный таким образом временной ряд передается для дальнейшей обработки методом РоМ.

## 3. Метод пучка матриц (РоМ)

Метод пучка матриц (Pencil of Matrix, РоМ) является передовым методом анализа временных рядов, он служит для построения модели дискретного сигнала в виде суммы затухающих гармонических функций:

$$y_j = y(j\Delta t) = \sum_{i=1}^M A_i \exp(s_i j\Delta t) = \sum_{i=1}^M A_i z_i^j, \quad z_i = \exp(s_i j\Delta t). \quad (17)$$

Здесь  $\Delta t$  – временной шаг выборки. Необходимо отметить, что комплексные экспоненты во временной области соответствуют комплексным полюсам (2) в частотной области. Математическое описание метода можно найти в [1, 2], модификация метода, изложенная в [2], позволяет значительно ускорить вычисления. Дополнительными особенностями метода РоМ являются определенная устойчивость к шумам и возможность оценить требуемое количество полюсов (слагаемых в модели) без какой-либо априорной информации.

## 4. Дробно-рациональная функция и простейшие дроби

Полюсная модель (2) представляет собой сумму элементарных дробей. Эквивалентное представление этой модели – дробно-рациональная функция, то есть, отношение двух полиномов:

$$\varepsilon(f) = \varepsilon_\infty + \sum_k \frac{r_k}{if - s_k} = \sum_{k=0}^M a_k (if)^k / \sum_{k=0}^M b_k (if)^k. \quad (18)$$

Здесь параметры модели – действительные коэффициенты полиномов  $a_k$  и  $b_k$ . Без нарушения общности можно считать  $b_M = 1$ , тогда  $a_M = \varepsilon_\infty$ . Параметры  $s_k$  могут быть найдены как корни знаменателя, вычеты  $r_k$  и коэффициенты числителя связаны более сложным соотношением. Можно использовать оба представления, переходя от одного к другому по достаточно простому вычислительному алгоритму, когда это необходимо. Мы используем дробно-рациональную функцию в качестве промежуточного представления модели для оптимизации, потому что производные по параметрам  $a_k$ ,  $b_k$  ведут себя гораздо лучше, чем производные по параметрам  $s_k$ . Благодаря этому процедура оптимизации (ЛМ) имеет меньше шансов сделать большой скачок из-за присутствия сингулярности в Гессе функции невязки, определенному для параметров  $s_k$ .

## 5. SVD для подгонки линейных параметров

Метод РоМ позволяет оценить не только комплексные частоты  $s_k$ , но и вычеты  $r_k$ , но на получаемую оценку для их амплитуд влияют ошибки, внесенные при экстраполяции измеренных данных и вычислении FFT. Поэтому вычеты значительно лучше вычислять непосредственно в частотной области, используя исходные данные. Это так же обусловлено простотой и однозначностью задачи, поскольку  $r_k$  – линейные параметры. Эту линейную часть задачи удобнее решать для представления в форме (18), решается система  $N$  линейных уравнений с неизвестными  $a_k$  ( $N > M$ ):

$$\sum_{k=0}^M a_k (if_j)^k / \sum_{k=0}^M b_k (if_j)^k = \varepsilon_j = \varepsilon(f_j), \quad j = 0 \dots N-1 \quad (19)$$

Знаменатель известен ( $b_k$  рассчитываются как коэффициенты полинома, корни которого  $s_k$  оценены на предыдущем этапе методом РоМ). Обе стороны умножаются на знаменатель, а затем слева разделяются реальная и мнимая части (первая содержит только четные степени одночленов, в то время как вторая содержит только нечетные степени коэффициентов). Приравнивая отдельно действительную и мнимую части, получаем систему  $2N$  действительных линейных уравнений, решаемых методом SVD в смысле наименьших квадратов [3, р. 676].

В результате мы получаем рациональную функцию, которая соответствует исходным данным и может служить хорошим начальным приближением для дальнейшего применения ЛМ, варьирующего не только линейные параметры  $r_k$ , но и нелинейные параметры  $s_k$  для достижения наилучшего результата.

### 6. Нелинейная аппроксимация методом наименьших квадратов с использованием алгоритма Левенберга-Марквардта

Алгоритм ЛМ подробно изложен в [3, Глава 15.5]. В рассматриваемом случае алгоритм должен быть модифицирован с учетом комплексности аппроксимирующей функции. В исходном варианте ЛМ используется для минимизации квадратичной невязки:

$$\chi^2(\mathbf{p}) = \sum_j (y_j - Y(x_j; \mathbf{p}))^2, \quad \mathbf{p} = \{p_k\} - \text{model parameters} \quad (20)$$

Когда данные являются комплексными, мы используем сумму квадратов модулей отклонений:

$$\chi^2(\mathbf{p}) = \sum_j |y_j - Y(x_j; \mathbf{p})|^2 = \sum_j (y_j - Y(x_j; \mathbf{p})) \cdot (y_j - Y(x_j; \mathbf{p}))^* \quad (21)$$

При этом производные от  $\chi^2$  по параметрам могут быть найдены как (ср. с [3, eq. (15.5.6)]):

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial p_k} = - \sum_j \left( (y_j - Y(x_j; \mathbf{p})) \frac{\partial Y(x_j; \mathbf{p})}{\partial p_k} + (y_j - Y(x_j; \mathbf{p}))^* \frac{\partial Y(x_j; \mathbf{p})}{\partial p_k} \right) \quad (22)$$

И, наконец, Гессиан может быть аппроксимирован как (ср. с [3, eq. (15.5.7)]):

$$\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial p_k \partial p_l} = \sum_j \left( \frac{\partial Y(x_j; \mathbf{p})}{\partial p_k} \frac{\partial Y(x_j; \mathbf{p})}{\partial p_l} + \frac{\partial Y(x_j; \mathbf{p})}{\partial p_k}^* \frac{\partial Y(x_j; \mathbf{p})}{\partial p_l} \right) \quad (23)$$

Как уже отмечалось выше, применять ЛМ удобнее к модели в форме (18). В ЛМ варьируются как линейные  $a_k$ , так и нелинейные  $b_k$  параметры модели. После подгонки параметров осуществляется переход от представления (18) к исходной полюсной модели (2). В результате исходные параметры модели были восстановлены с высокой точностью, соответствующей уровню шума.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описан алгоритм построения полюсной модели диэлектрической проницаемости материала по результатам измерения показателя преломления и показателя поглощения. Основным методом подгонки модели является модифицированный для применения к комплексным величинам метод наименьших квадратов на основе алгоритма Левенберга-Марквардта. Его основной недостаток – для адекватной аппроксимации требуется хороший набор начальных значений для искомых параметров. Именно получению начального приближения и посвящена большая часть статьи. В частности, на основе использования соотношения Крамерса-Кронига продемонстрирована экстраполяция дисперсионной зависимости вне диапазона измерения. Этот этап проиллюстрирован численно, для приведенного примера получена достаточно хорошая экстраполяция «хвостов», и получены весьма точные начальные оценки значений параметров.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T. K. Sarkar and O. Pereira, "Using the Matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials," IEEE Antennas Propagat. Mag., vol. 37, pp. 48 - 55, February 1995.
2. T. K. Sarkar, S. Park, J. Koh, and S. M. Rao, "Application of the matrix pencil method for estimating the SEM (singularity expansion method) poles of source-free transient responses from multiple look directions," IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 48, pp. 612 - 618, April 2000.
3. William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. "Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, Second Edition" Cambridge University Press 1992.– 994 p.

УДК 621. 396. 671

## КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ АНТЕННЫЕ РЕШЕТКИ С УСЕЧЕННЫМ БИНОМИАЛЬНЫМ АМПЛИТУДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИСТОЧНИКОВ ПОЛЯ

**Н.Н. Горобец, А.А. Булгакова**

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, а пл. Свободы, 4, Харьков, 61022, Украина;  
Nikolay.N.Gorobets@karazin.ua*

Поступила в редакцию 14 февраля 2013г.

Предложены квазиоптимальные амплитудные распределения источников поля в синфазных антенных решетках, позволяющие обеспечить заданный допустимый уровень максимальных боковых лепестков диаграммы направленности. Распределение реализуется при заданном числе  $N$  реальных излучателей путем усечения биномиального распределения в виртуальной решетке с большим числом  $n$  излучателей на крайних излучателях. Рассчитаны диаграммы направленности, КНД, ширина главного лепестка и коэффициенты рассеяния таких антенных решеток при изменении числа реальных и виртуальных излучателей и расстояния между ними в широких пределах. Показано, что характеристики направленности усеченных биномиальных решеток имеют промежуточное значение между характеристиками антенн с биномиальным и однородным амплитудным распределением. Найденны расстояния между излучателями, при которых обеспечивается максимум максимум КНД при заданном уровне боковых лепестков.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** электромагнитное излучение, квазиоптимальные антенные решетки, биномиальное амплитудное распределение, усеченное биномиальное амплитудное распределение

Запропоновані квазіоптимальні амплітудні розподіли джерел поля у синфазних антенних решітках, які дозволяють забезпечити заданий допустимий рівень максимальних бічних пелюстків діаграми спрямованості. Розподіл реалізується при заданому числі реальних випромінювачів за допомогою усічення на останніх випромінювачах біноміального розподілу віртуальної решітки з великим числом  $n$  випромінювачів. Розраховані діаграми спрямованості, КНД, ширина головної пелюстки та коефіцієнти розсіювання таких антенних решіток при зміні числа реальних і віртуальних випромінювачів та відстань між ними в широких межах. Показано, що характеристики спрямованості усічених біноміальних решіток мають проміжне значення між характеристиками антен з біноміальним та однорідним амплітудним розподілом. Знайдені відстані між випромінювачами, які забезпечують максимум максимум КНД при заданому рівні бічних пелюсток.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** електромагнітне випромінювання, квазіоптимальні антенні решітки, біноміальний амплітудний розподіл, усічений біноміальний амплітудний розподіл.

Quasi-optimal amplitude distributions of field sources in in-phase antenna arrays which provide given feasible level of maximum side lobes of pattern have been proposed. The distribution is implemented for a given number  $N$  of real radiating elements by truncating binomial distribution for some large number  $n$  of virtual radiators. Radiation patterns, a gain, the main lobe beam width and scattering coefficients of antenna arrays have been calculated when changing the number of real and virtual radiators and distances between them in a wide range. It has been shown that the directivity characteristics of the truncated binomial arrays are intermediate between the characteristics of binomial and uniform antennas. Distances between radiators which provide maximum of the gain with the given level of side lobes have been found.

**KEY WORDS:** electromagnetic radiation, quasi-optimal antennas, arrays, binomial amplitude distribution, truncated binomial amplitude distribution.

### ВВЕДЕНИЕ

Оптимизация характеристик излучения антенных решеток для радиоастрономии, радиолокации, телекоммуникаций и других областей науки и техники актуальна для многих практических приложений [1-3]. При этом оптимизация характеристик направленности как по сумме требований (многопараметрическая оптимизация), так и по какому-либо конкретному параметру антенны, обеспечивается соответствующим выбором амплитудного и фазового распределения источников поля, типа, числа и ориентации излучателей, расстояния между ними, выбором конфигурации излучающего раскрытия. Опыт показывает, что основным из всех этих подходов и вариантов решения задачи является нахождение оптимального амплитудного распределения источников поля в синфазном излучающем раскрытии антенны.

Из всех известных к настоящему времени оптимальных и квазиоптимальных амплитудных распределений (Дольф-Чебышевское, Тейлоровое и др.) больший интерес представляет биномиальное

распределение, которое в синфазной эквидистантной решетке с расстоянием между излучателями, равным половине длины волны в свободном пространстве, обеспечивает диаграмма направленности вида  $F(\theta) = \cos^{N-1}\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right)$ , т.е. без боковых лепестков.

В [4] показано, что в эквидистантных синфазных биномиальных антенных решетках с произвольным расстоянием между излучателями полностью исключаются ближние боковые лепестки ДН, однако при  $d \geq \lambda$  дифракционные лепестки не подавляются. При  $d \approx \lambda$  можно создать антенную решетку с двумя сколь угодно низкими дальними боковыми лепестками (без ближних боковых лепестков), которые представляют собой не полностью сформированные дифракционные лепестки. Естественно, что коэффициент рассеяния биномиальных антенных решеток существенно меньше коэффициента рассеяния однородных решеток (т.е. при  $A_v = 1$ ). При уменьшении расстояния между излучателями до значений  $0,71 \leq d/\lambda \leq 0,93$ , как и в случае однородных решеток, обеспечивается максимум максимуму КНД. Другими словами, при заданном числе излучателей  $N$  имеется оптимальная длина линейной эквидистантной нефазированной антенной решетки  $L_{\text{опт}} = (N-1) d_{\text{опт}}/\lambda$ , при которой обеспечивается максимально достижимый КНД [5]. Следует особо подчеркнуть, что в такой оптимальной биномиальной решетке отсутствуют ближние боковые лепестки диаграммы направленности, а дальние можно подавить путем использования направленных излучателей – элементов решетки.

Кроме этих, несомненно, положительных качеств биномиальные антенные решетки имеют и существенный недостаток – их коэффициент усиления и действующая длина (площадь) существенно меньше по сравнению с теми же параметрами однородных решеток при том же числе излучателей.

Из данных табл. 2 в [4] следует, что при малом числе излучателей ( $N \approx 4$ ) биномиальная решетка хуже по КНД по сравнению с однородной решеткой примерно на 20%, а при увеличении числа излучателей до 32 этот проигрыш увеличивается до 70%. Следовательно, оптимальные по максимуму КНД биномиальные антенные решетки значительно уступают оптимальным однородным решеткам по размерам. Из физических соображений, очевидно, что КНД биномиальной решетки приближается к КНД однородной решетке с тем же числом излучателей, если амплитудное распределение приближается к постоянному. Эту процедуру постепенного перехода от биномиального к постоянному амплитудному распределению организуем следующим образом. Зададим число излучателей в решетке  $N$ . Биномиальное амплитудное распределение в ней реализуется соответствующим пересчетом коэффициентов в треугольнике Паскаля  $\dot{A}_v = \frac{\dot{A}_{vП}}{A_1}$ , где

$\dot{A}_{vП}$  – амплитуда тока (поля) в  $v$ -том излучателя,  $A_1$  – амплитуда тока (поля) в центральном излучателе. Далее находим амплитудное распределение в биномиальной решетке с большим числом излучателей  $n$ , но для исследуемой решетки из этого амплитудного распределения используем только центральную его часть для  $N$  излучателей. Очевидно, что чем  $n > N$  в такой усеченной биномиальной решетке, тем ближе амплитудное распределение к постоянному.

Целью настоящей статьи является исследование закономерностей формирования характеристик направленности антенных решеток изотропных и слабонаправленных излучателей с усеченным биномиальным распределением при произвольном расстоянии между излучателями.

### **ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРАВЛЕННОСТИ СИНФАЗНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК С УСЕЧЕННЫМ БИНОМИАЛЬНЫМ АМПЛИТУДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РАССТОЯНИИ МЕЖДУ ИЗЛУЧАТЕЛЯМИ**

Поставленная задача может быть решена, по крайней мере, в двух аспектах:

- изучение динамики изменения диаграммы направленности при изменении числа  $n$  излучателей в виртуальной биномиальной решетке, в частности, уровня боковых лепестков и ширины главного лепестка ДН, а также коэффициента рассеяния;
- определение максимального достижимого КНД и оптимальной длины нефазированной антенной решетки изотропных и слабонаправленных излучателей с усеченным биномиальным амплитудным распределением.

Задача решалась численным моделированием в наиболее общем и простом варианте, когда взаимное влияние излучателей в решетке не учитывается, а на расстояния между ними не накладывается никаких ограничений.

Прежде всего, исследовались диаграммы направленности эквидистантных антенных решеток изотропных и слабонаправленных синфазных излучателей (диполей Герца и полуволновых



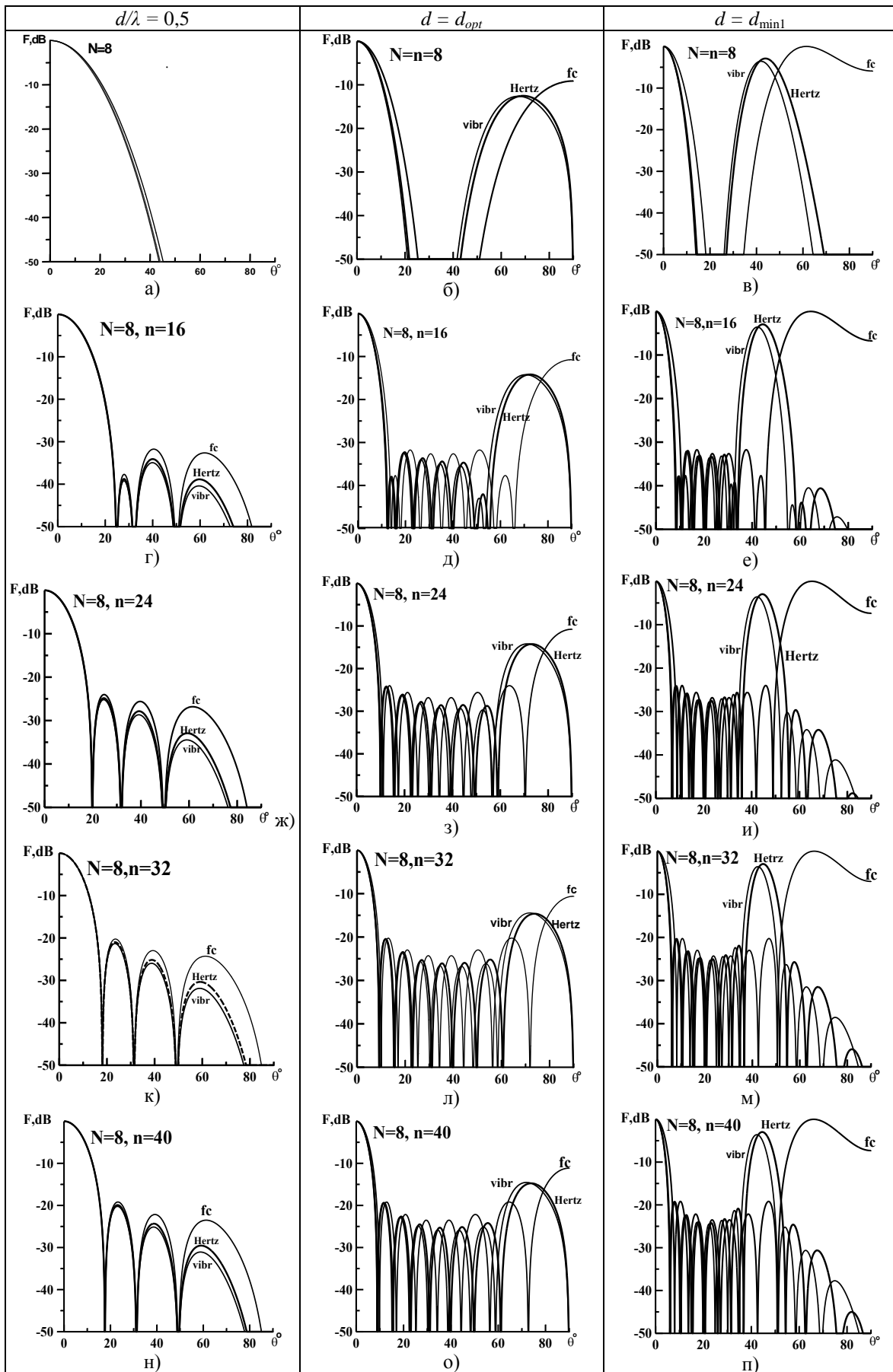


Рис. 1. Диаграммы направленности квазиоптимальных антенных решеток при разном числе излучателей

вibratorов) с усеченным биномиальным амплитудным распределением при изменении числа излучателей и расстояния между ними в широких пределах. Для иллюстрации закономерностей формирования ДН антенных решеток с усеченным биномиальным распределением на рис.1 приведена ДН трех линейных решеток указанных выше типов излучателей при  $N=8$  и  $n=16, 24, 32, 40$ .

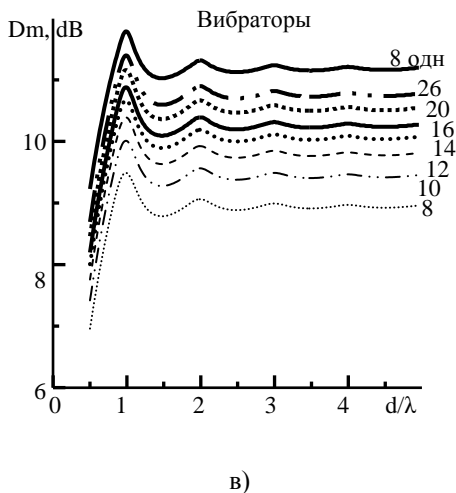
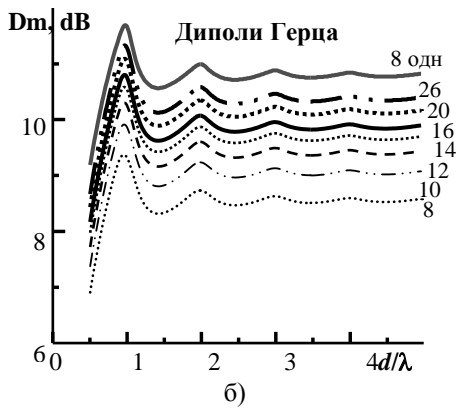
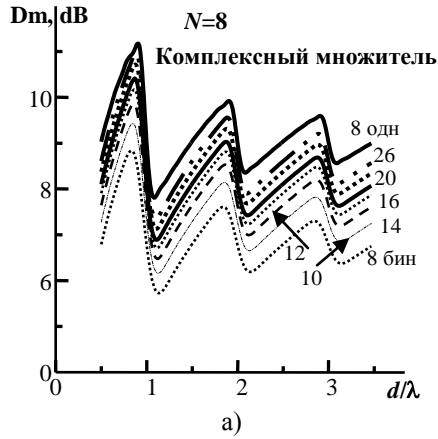


Рис. 2. Зависимость КНД от расстояния между излучателями трех вариантов решеток из 8 излучателей

Характерной особенностью ДН в этом случае является малая скорость убывания уровня ближних боковых лепестков ДН при увеличении номера лепестка, особенно в случае решетки изотропных излучателей.

Расстояния между излучателями выбраны в классическом варианте  $d = 0.5\lambda$ , а также при  $d = d_{opt}$ , когда обеспечивается максимум максимуму КНД, и при  $d = d_{min1}$ , когда разреженная решетка ( $d > \lambda$ ) имеет первый минимум КНД. Результаты приведены для комплексного множителя решетки 8 изотропных излучателей, а также 8 диполей Герца и 8 полуволновых вибраторов с учетом их направленных свойств. На рис.1 а, б, в приведены ДН синфазной решетки из 8 излучателей при биномиальном распределении. На рис.1 г, д, е приведены ДН усеченной биномиальной решетки при числе излучателей в виртуальной решетке  $n=16$ . На остальных рисунках представлены результаты расчетов ДН при  $n=24, 32$  и  $40$  соответственно. Рис.1 а, б, в подтверждает полученные в [4] выводы о том, что при  $d = 0.5\lambda$  ДН не имеет боковых и дифракционных лепестков, главный лепесток довольно широкий и вариант излучателя (из числа рассмотренных) практически на него не влияет. Увеличение КНД при увеличении расстояния между излучателями до  $d = d_{opt}$  обусловлено тем, что рост КНД за счет уменьшения ширины главного лепестка ДН превалирует над явлением уменьшения КНД за счет увеличения уровня дальних боковых лепестков. При большем увеличении  $d$  до  $d_{min1}$  влияние боковых лепестков увеличивается и КНД уменьшается.

При использовании усеченного биномиального распределения уже при  $n=16$  в ДН появляются ближние боковые лепестки, максимальный уровень которых не превышает  $-30$ дБ. Дальние боковые лепестки при  $d > 0,5\lambda$ , соответствующие дифракционным лепесткам решетки, при  $d = d_{opt}$  достигают  $-10$ дБ для решетки изотропных излучателей и  $-15$ дБ для решеток диполей Герца и полуволновых вибраторов. В случае же  $d = d_{min1}$  расчетные дифракционные лепестки достигают  $0...-5$ дБ. На рис.1 г, д, е видно интересное явление формирования первого бокового лепестка, относительный уровень и ширина которого существенно меньше всех остальных боковых лепестков. Это явление вообще не характерно для эквидистантных решеток. При увеличении числа  $n$  в виртуальной усеченной биномиальной антенной решетке до 24 ширина главного лепестка ДН уменьшается, а уровни боковых лепестков увеличиваются до  $-25...-27$ дБ при  $d = 0.5\lambda$ . Примерно такие же уровни ближних боковых лепестков имеют место и при больших расстояниях между излучателями (рис.1 в, з, п).

Отметим, что такое явление характерно для антенных решеток, оптимальных в смысле Дольфа-Чебышева.

Дальнейшее увеличение числа  $n$  в виртуальной усеченной биномиальной решетке, как видно из рис.1 к -  $n$  приводит к более существенному уменьшению ширины главного лепестка ДН и увеличению уровня боковых лепестков. Так, при  $n=40$  уровень первого бокового лепестка уменьшается до -20дБ, второго – до-22дБ и третьего – до -25дБ.

Полученные закономерности, как показали расчеты, вообще справедливы для усеченных биномиальных антенных решеток с большим числом  $N$  излучателей.

В [4] показано, что с помощью биномиальных антенных решеток возможна реализация антенн с заданным максимальным уровнем дальнего бокового лепестка (см. рис. 2 в [4]) выбором расстояния между излучателями. Так, в биномиальной решетке изотропных излучателей уровень бокового лепестка не превышает -50дБ при расстоянии между излучателями  $d = 0,645\lambda$ , а уровень -30дБ – при  $d = 0,715\lambda$ . Из рис.1 видно, что такой же подход возможен и в случае усеченных биномиальных антенных решеток. При этом уровень первых боковых лепестков всегда будет меньше уровня дальнего бокового лепестка, представляющего собой не полностью сформированный дифракционный лепесток.

Исследуем далее КНД антенных решеток с усеченным биномиальным амплитудным распределением. Как и в [4], рассчитывался КНД линейной эквидистантной решетки путем численного интегрирования ДН по мощности.

На рис.2 представлены зависимости КНД от расстояния между излучателями трех вариантов решеток 8 соответствующих излучателей при биномиальном распределении (самые нижние кривые), равномерном распределении (самые верхние кривые) и усеченных биномиальных распределениях при изменении числа виртуальных излучателей от  $n=10$  до  $n=28$ . Из рисунков видно, что КНД усеченных биномиальных решеток в зависимости от расстояния между излучателями качественно изменяется так же, как и однородных [5] и биномиальных [4] решеток:

1. При увеличении  $d$  от 0,5 до примерно 0,9 длины волны КНД равномерно увеличивается и достигает своего максимума максимумума, который на 20...30% больше КНД классической решетки с расстоянием между излучателями  $d = 0.5\lambda$ .

2. Оптимальные расстояния между излучателями, обеспечивающие максимум максимум КНД нефазированной решетки с заданным числом излучателей, находятся в пределах 0,83...0,95 длины волны, причем имеют незначительно большую величину при более близком к постоянному амплитудном распределении.

3. При увеличении расстояния между излучателями больше целой длины волны и на большие расстояния, т.е. в разреженных антенных решетках КНД изменяется по осциллирующей закономерности, причем размах осцилляций тем меньший, чем больше расстояние  $d/\lambda$ .

4. При использовании в решетке слабонаправленных излучателей – диполей Герца и полуволновых вибраторов КНД увеличивается и при  $d > \lambda$  размах осцилляций значительно меньший по сравнению со случаем изотропных излучателей.

5. КНД антенных решеток с усеченным биномиальным распределением тем больший, чем больше число  $n$  виртуальных излучателей, т.е. чем ближе амплитудное распределение к постоянному.

В табл.1 представлены результаты расчетов оптимального расстояния между излучателями, максимально достижимого значения КНД и коэффициента пропорциональности  $A$  в формуле для КНД линейной антенны в зависимости от электрической длины  $D_m = A(L/\lambda)$  для случая линейной решетки 8 изотропных излучателей при изменении числа виртуальных излучателей  $n$  от 8 до 40.

Таблица. 1. КНД оптимизированных решеток изотропных излучателей

Число излучателей $n$	8	10	12	14	16	20	24	28	32	36	40
$(d/\lambda)_{\text{опт}}$	0,830	0,845	0,859	0,866	0,867	0,874	0,881	0,883	0,888	0,889	0,89
$D_m, \text{отн.ед.}$	7,64	8,76	9,67	10,40	10,98	11,80	12,32	12,65	12,87	13,02	13,13
$A$	1,31	1,48	1,61	1,71	1,81	1,92	2,00	2,05	2,07	2,09	2,11

Расчеты показали, что при увеличении числа реальных излучателей в решетке коэффициент  $A$  незначительно уменьшается. Также незначительно уменьшается коэффициент  $A$  при использовании в качестве излучателей – элементов решетки слабонаправленных антенн.

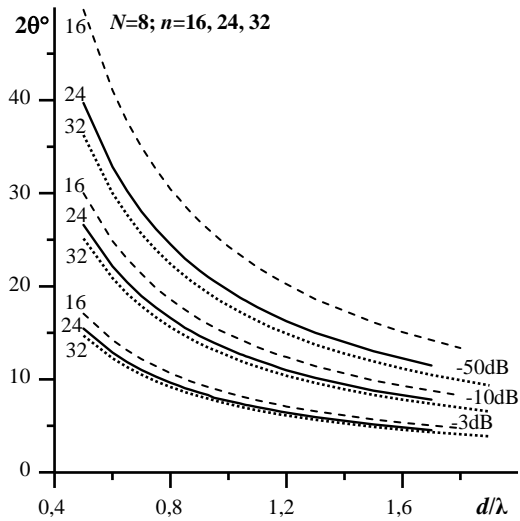


Рис.3. Зависимость ширины главного лепестка диаграммы направленности оптимизированных решеток изотропных излучателей от расстояния между ними

Рассмотрим далее зависимость ширины главного лепестка ДН квазиоптимальных антенных решеток с усеченным биномиальным амплитудным распределением. Как было отмечено выше, ширина главного лепестка биномиальных антенных решеток существенно больше, чем однородных. Из физических соображений, очевидно, что при использовании усеченных биномиальных распределений по мере увеличения числа  $n$  виртуальных излучателей в решетке ширина главного лепестка будет уменьшаться. Для количественной оценки ширины главного лепестка исследуемых антенн на рис. 3 приведены зависимости ширины главного лепестка диаграммы направленности по уровням -3дБ; -10дБ и -50дБ от расстояния между излучателями антенной решетки из 8 изотропных излучателей с усеченным биномиальным амплитудным распределением при числе виртуальных излучателей  $n=16, 24$  и  $32$ . Из рисунка видно, что как и следовало ожидать, ширина главного лепестка обратно

пропорциональна электрической длине антенны, причем лепесток тем уже, чем больше число  $n$  виртуальных излучателей. Как хорошо известно [7], ширина главного лепестка ДН обратно пропорциональна электрической длине антенны  $2\Delta\theta = \frac{B}{L/\lambda}$ , причем коэффициент  $B$  определяется

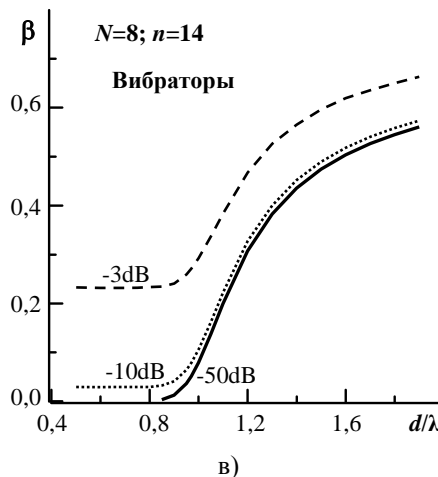
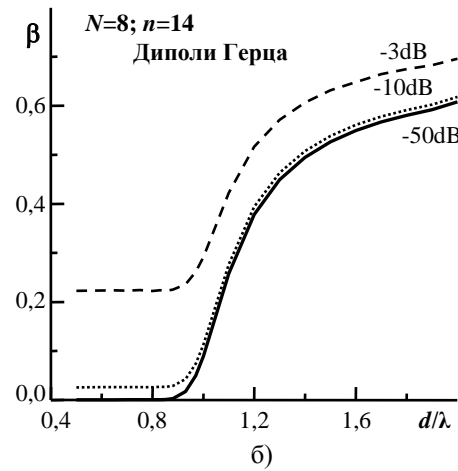
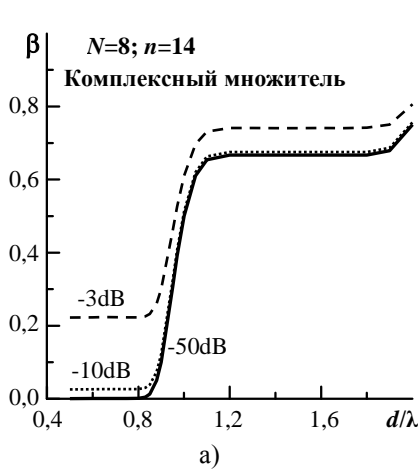


Рис.4. Парциальные коэффициенты рассеяния оптимизированных антенных решеток

амплитудным распределением источников поля в антенне. В частности, в случае непрерывных антенн при определении ширины главного лепестка ДН по половине мощности поля в главном максимуме в градусах при постоянном амплитудном распределении  $B=51$ , при спадающем к краям антенны по косинусоидальному закону до нуля  $B=68$  [7]. Коэффициенты  $B$  для определения ширины главного лепестка по уровням  $-3\text{дБ}$  и  $-10\text{дБ}$  от главного максимума исследуемой квазиоптимальной решетки 8 изотропных излучателей при расстояниях между ними  $(d/\lambda)_{\text{opt}}$ , обеспечивающих максимум максимум КНД, и числе виртуальных излучателей от 10 до 40 приведены в таблице 2. Из таблицы видно, что для рассматриваемой антенны уже при  $n > 32$  главный лепесток ДН уже, чем линейной антенны той же электрической длины с постоянным амплитудным распределением, а при  $n > 12$  - с косинусоидальным. Таким образом, квазиоптимальные антенные решетки с усеченным биномиальным распределением обладают свойством умеренной сверхнаправленности.

Аналогично [4, 5] рассчитаны коэффициенты рассеяния усеченной биномиальной антенной решетки. Для частного случая решетки 8 изотропных излучателей с усеченным биномиальным амплитудным распределением при числе виртуальных излучателей  $n=14$  парциальные коэффициенты

Таблица. 2 Ширина главного лепестка ДН оптимизированных решеток изотропных излучателей

Число излучателей	8	10	12	14	16	20	24	28	32	36	40
$2\Delta\theta^{\circ}_{-3\text{дБ}}$	13,72	12,04	10,92	10,24	9,8	9,18	8,76	8,52	8,26	8,1	8,02
$B_{-3\text{дБ}}$	79,71	71,19	65,69	62,12	59,45	56,16	54,04	52,56	51,38	50,39	49,96
$2\Delta\theta^{\circ}_{-10\text{дБ}}$	24,72	21,54	19,42	18,04	17,18	15,88	15,02	14,52	14,10	13,84	13,58
$B_{-10\text{дБ}}$	143,62	127,36	116,82	109,44	104,23	97,15	92,66	89,58	87,71	86,09	84,60

рассеяния по ширине ДН по уровням  $-3\text{дБ}$ ,  $-10\text{дБ}$  и  $-50\text{дБ}$  в зависимости от расстояния между излучателями представлены на рис. 4 (а – изотропные излучатели, б – диполи Герца, в – полуволновые вибраторы). Качественно эти зависимости аналогичны полученным в [4, 6], однако, количественно коэффициенты рассеяния квазиоптимальных усеченных биномиальных антенных решеток меньше, чем однородных, но больше биномиальных.

### ВЫВОДЫ

Предложенные квазиоптимальные амплитудные распределения в эквидистантных антенных решетках, реализуемые простым усечением биномиальных распределений в решетках с большим заданного числа излучателей, позволяют реализовать антенны с заранее заданным сколь угодно низким уровнем максимального бокового лепестка. Из анализа расчетов диаграмм направленности, коэффициента направленного действия, ширины главного лепестка и коэффициента рассеяния при изменении чисел реальных и виртуальных излучателей в решетках и расстояния между излучателями в широких пределах показано, что можно реализовать антенны с характеристиками направленности между крайними вариантами – от биномиальных решеток без боковых лепестков до однородных с высоким уровнем боковых лепестков.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Проблемы антенной техники. / Под ред. Л. Д. Бахраха, Д.И. Воскресенского. – М.: Радио и связь. 1989. – 368с.
2. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Основы теории антенн. – М.: Дрофа. – 2007. – 491с.
3. Скобелев С.П. Фазированные антенные решетки с секторными парциальными диаграммами направленности. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2010. – 320с.
4. Gorobets N.N., Bulgakova A.A. Directivity of the dispersed antenna arrays with a binomial amplitude distribution // Telecommunications and radio engineering. – 2011, Vol.70, Issue 8, pp.663-672.
5. Горобец Н. Н. Булгакова А. А. Оптимальная длина разреженных антенных решеток с максимумом КНД. 20-я Международная Крымская конференция “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”. Материалы конференции. 13 - 17 сентября 2010г. Севастополь (Украина). – С.552-553.
6. Gorobets N.N., Bulgakova A.A. Pattern characteristics of dispersed antenna array // Telecommunications and radio engineering. – 2010, Vol.69, Issue 11, pp.959 – 966.
7. Шубарин Ю.В. Антенны сверхвысоких частот.- Харьков: Изд.-во Харьковского гос. ун-та. 1960, 284с.

УДК. 621.372.852

## ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СЕЛЕКТОРЫ НА ВОЛНОВОДЕ КВАДРАТНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

**Н.К. Блинова, Н.Н.Горобец, А.В. Селютин**

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, 61022, пл. Свободы, 4  
e-mail:Natalya.K.Blinova@univer.kharkov.ua,*

Поступила в редакцию 18 февраля 2013г.

Теоретически исследованы микроволновые поляризационные селекторы на магистральном волноводе квадратного поперечного сечения и двух выходных волноводных каналах стандартного сечения для ортогональных линейно-поляризованных волн. Один канал реализован в виде плавного продольного перехода от квадратного волновода на прямоугольный, а второй сформирован прямоугольным волноводом, подключенным к боковой стенке квадратного волновода так, что его широкая стенка либо параллельна, либо перпендикулярна оси магистрального волновода. Показано, что лучшие параметры поляризационного селектора достигаются при продольном расположении прямоугольного волновода относительно оси квадратного.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** микроволны, поляризационные селекторы, квадратный волновод, коэффициент отражения

Теоретично досліджені мікрохвильові поляризаційні селектори на магистральному хвилеводі квадратного поперечного перетину і двох вихідних хвилеводних каналів стандартного перетину для ортогональних лінійно-поляризованих хвиль. Один канал реалізований у вигляді плавного поздовжнього переходу від квадратного хвилеводу на прямокутний, а другий сформований прямокутним хвилеводом, підключеним до бічної стінки квадратного хвилеводу так, що його широка стінка або паралельна, або перпендикулярна осі магистрального хвилеводу. Показано, що кращі параметри поляризаційного селектора досягаються при поздовжньому розташуванні прямокутного хвилеводу щодо осі квадратного.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** мікрохвилі, поляризаційні селектори, квадратний хвилевід, коефіцієнт відбиття

Microwave polarization selectors based on the main square cross-section waveguide and two output waveguide channels of the standard cross-sections for orthogonally linearly polarized waves were theoretically studied. One output channel is implemented as a smooth longitudinal junction of the square and rectangular waveguides and another one is formed by the rectangular waveguide connected with a sidewall square waveguide so that the rectangular waveguide broad wall is perpendicular or parallel to the main waveguide axis. It is shown that the best of the polarization selector parameters is achieved when the rectangular waveguide broad wall is parallel to the main waveguide axis.

**KEY WORDS:** microwaves, polarization selectors, square waveguide, reflectance

### ВВЕДЕНИЕ

Поляризационные эффекты в электродинамике позволяют решать многие прикладные задачи в различных областях науки и техники. В частности, в радиолокации методы поляризационной селекции сигналов позволяют улучшить помехозащищенность радиолокационных станций, решить проблему распознавания целей, улучшить характеристики антенно-фидерных устройств и т.п. [1]. В радиосвязи поляризационная модуляция позволяет обеспечить защиту передаваемой информации от несанкционированного доступа, а применение ортогонально поляризованных волн в соседних информационных каналах позволяет обеспечить частотное уплотнение каналов. В спутниковых системах связи прием и передача информации осуществляется на разных частотах на ортогональной поляризации волн. Этот краткий перечень далеко не исчерпывает список решаемых прикладных задач. Однако, для технической реализации этих приложений в различных частотных диапазонах и на различной элементной базе необходимо обеспечить выделение двух сигналов одной частоты на ортогональных поляризациях. Принципиально важно, что в радиолокации, радиосвязи, радиорелейных линиях связи и т.д. поляризационные разделители (поляризационные селекторы) могут быть узкополосными и работать либо в ортогональном линейнополяризованном, или в ортогональном кругополяризованном базисе. В

других областях, в частности, в пассивных многоканальных радиометрических комплексах аэрокосмического базирования для дистанционного зондирования Земли и в радиоастрономии нужны широкополосные, а в некоторых случаях - многодиапазонные поляризационные селекторы, обеспечивающие высокую поляризационную развязку между ортогональными каналами. В микроволновом диапазоне обычно используются в качестве магистральных волноводы, не имеющие свойств поляризационной анизотропии - волноводы круглой (реже квадратной) формы поперечного сечения. Для снятия информации используются прямоугольные волноводы стандартного поперечного сечения. Связь магистральных и выходных волноводов обычно осуществляется в узкой полосе частот через узкие резонансные щели, в широкой - через широкополосные волноводные окна связи.

В [2] рассмотрены продольно-поперечные поляризационные селекторы на квадратных волноводах. Существенным техническим недостатком таких поляризационных селекторов является включение в волноводный тракт поляризационных фильтров в виде наклонных проволочных сеток. Эти фильтры ухудшают эксплуатационные характеристики поляризационных селекторов, особенно в аэрокосмической технике. Аналогичные продольно-поперечные поляризационные селекторы, в которых исключены сетчатые поляризационные фильтры, предложены и исследованы в [3]. Недостатком таких поляризационных селекторов является использование ступенчатых переходов в тракте продольного канала.

Целью настоящей статьи является исследование и сравнительный анализ двух вариантов продольно-поперечных поляризационных селекторов на магистральном волноводе квадратного поперечного сечения с плавным переходом на стандартный прямоугольный волновод в продольном канале и продольной или поперечной щелью связи в поперечном канале.

Конструкции исследуемых волноводных селекторов представлены на рис.1 и 2. Селекторы представляют собой волноводный тройник, выполненный из волновода квадратного сечения и двух каналов в виде волноводов прямоугольного сечения. Через тракт квадратного сечения (канал 1) поступают волны двух линейных поляризаций - вертикальной и горизонтальной, которые разделяются соответственно в канал 2 (горизонтальная поляризация вектора напряженности электрического поля) и канал 3 (вертикальная поляризация вектора напряженности электрического поля). В первом случае канал 2 выполнен в виде волновода стандартного прямоугольного сечения, широкая стенка которого расположена вдоль продольной оси магистрального тракта квадратного сечения (рис.1), а во втором – поперек продольной оси Z (рис.2). Электрическое поле с горизонтальной поляризацией проходит в этот канал из канала 1. Канал 3 представляет собой волновод прямоугольного сечения, который соединен с каналом 1 при помощи плавного волноводного перехода длиной  $L_2$ . Электрическое поле с вертикальной поляризацией из канала 1 проходит в канал 3. Аналогичным образом работает поляризационный селектор при питании его со стороны каналов 2 и 3. К этим каналам подводятся волны с различными плоскостями поляризации, которые затем поступают в общий канал 1. Каналы 2 и 3 между собой должны быть развязаны. Необходимо исследовать основные параметры поляризационного селектора – величины развязки между каналами 2 и 3, коэффициенты прохождения в каналы 2 и 3, а также согласование всех каналов с питающими волноводами в рабочих диапазонах волн обеих поляризаций.

Из изложенного следует, что согласование поляризационного селектора по вертикальной поляризации электромагнитной волны, т.е. по выходному каналу 3 на рис. 1 и 2, определяются длиной плавного волноводного перехода от квадратного поперечного сечения к стандартному прямоугольному. Очевидно, что согласование селектора по этому каналу будет тем лучше, чем больше длина перехода. По ортогонально поляризованному каналу, т.е. по каналам 2 на рис.1 и 2, отражения будут определяться интерференцией двух отраженных волн – отраженной непосредственно от щели связи и отраженной от запердельного сечения в плавном волноводном переходе.

Таким образом, изменяемыми параметрами задачи оптимизации поляризационного селектора являются длина плавного волноводного перехода  $L_2$  и расстояние  $Z_1$ , которое определяет положение волновода 2 (середина широкой стенки прямоугольного волновода) относительно общего канала 1 от начала координат  $Z=0$  (рис.1). Примем, что волноводы возбуждаются волной основного типа  $H_{10}$  из волновода 1. Необходимо найти коэффициенты матрицы рассеяния такого волноводного тройника и исследовать их в зависимости от частоты при изменении  $L_2$  и расстояния  $Z_1$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Были проведены расчеты коэффициентов отражения и КСВН в каждом канале, коэффициентов прохождения соответственно в каналы 2 и 3 и величины развязки между каналами в широком диапазоне частот для соответствующих поляризаций.

Изменяя длину волноводного перехода  $L_2$  и положение волновода - 2 (расстояние  $Z_1$ ) при фиксированной длине волновода квадратного сечения  $L_1$  добивались в компьютерном эксперименте

получения оптимальных характеристик коэффициентов отражения, передачи в соседние каналы и развязки между каналами по соответствующим поляризациям.

Для изучения физических закономерностей изменения характеристик исследуемых поляризационных селекторов в диапазоне частот были рассчитаны соответствующие зависимости в случае магистрального квадратного волновода с поперечным сечением  $23 \times 23 \text{ мм}^2$  с выходными стандартными волноводами с поперечным сечением  $23 \times 10 \text{ мм}^2$ . Сечение области связи волноводов по горизонтальной поляризации также равно  $23 \times 10 \text{ мм}^2$ .

Для первого варианта поляризационного селектора (рис.1) зависимости КСВН для первого канала от частоты по вертикальной поляризации представлены на рис.3. Видно, что зависимости имеют осциллирующий характер и минимальное значение КСВН  $< 1,15$  можно получить при длине волноводного перехода  $L_2$ , изменяющейся в пределах от 55мм до 75мм в диапазоне частот 7,3 - 7,7 ГГц, а также в диапазоне частот 8,1 - 8,8 ГГц.

Для второго варианта поляризационного селектора зависимости КСВН от частоты для первого канала по вертикальной поляризации при различных значениях длины волноводного перехода  $L_2$  представлены на рис.4. Видно, что как и в первом варианте, зависимости имеют осциллирующий характер и минимальное значение КСВН  $< 1,15$  можно получить при длине волноводного перехода  $L_2$ , изменяющейся в пределах от 55мм до 70мм в диапазоне частот 8,5 - 9,2 ГГц.

Зависимости КСВН для первого канала от частоты по горизонтальной поляризации представлены на рис.5 и 6 для первого и второго вариантов поляризационных селекторов соответственно. Из рис.5 видно, что минимальное значение КСВН уменьшается с увеличением длины перехода и смещается в область более низких частот, изменяясь от 1,42 до 1, 21 при изменении  $L_2$  в пределах от 55мм до 75мм в диапазоне частот 8,35 - 8,05 ГГц. Из рис.6 видно, что КСВН превышает 2,7.

Для первого варианта продольно-поперечного поляризационного селектора коэффициент передачи в каналы 3 и 2 представлены на рис.7 и 9 соответственно. Хорошо видно, что в диапазоне частот 7,8 - 8,8 ГГц передается практически вся мощность как в канал 2, так и в канал 3. Изоляция между каналами представлена зависимостью коэффициента прохождения из второго канала в третий канал для случая  $L_2 = 60 \text{ мм}$  и различных расстояний  $Z_1$  на рис.11. Такой же характер имеет зависимость коэффициента прохождения из третьего канала во второй. Видно, что изоляция между каналами достаточно хорошая и составляет около -50дБ.

Для второго варианта поляризационного селектора коэффициент передачи в каналы 3 и 2 представлены на рис.8 и 10 соответственно. Видно, что в диапазоне частот 7,8 - 8,8 ГГц передается практически вся мощность как в канал 2, так и в канал 3. Изоляция между каналами представлена зависимостью коэффициента прохождения из второго канала в третий для случая  $L_2 = 60 \text{ мм}$  и различных расстояний  $Z_1$  на рис.12. Такой же характер имеет зависимость коэффициента прохождения из третьего канала во второй. Видно, что изоляция между каналами высокая и не хуже -50дБ.

Таким образом, продольно-поперечные поляризационные селекторы имеют лучшие характеристики при продольной ориентации области связи волноводов.

## ВЫВОДЫ

Предложен поляризационный селектор на поляризационноизотропном квадратном волноводе, который соединен плавным волноводным переходом с прямоугольным волноводом стандартного поперечного сечения.

Волна ортогональной поляризации проходит в стандартный прямоугольный волновод, подсоединенный к магистральному перпендикулярно его продольной оси. Исследовано два варианта подключения ортогонально поляризованного канала относительно оси магистрального волновода - с продольным и поперечным расположением широкой стенки прямоугольного волновода. При этом полная передача и высокое согласование ортогонального канала обеспечивается отражением в плавном переходе от квадратного волновода в прямоугольный.

Исследован вариант продольно-поперечного селектора с областью связи в виде волноводного окна с размерами соответствующими волноводу стандартного поперечного сечения. Широкая стенка элемента связи расположена вдоль оси магистрального волновода. Показано, что канал, который выполнен в виде плавного перехода из квадратного волновода на прямоугольный имеет слабовыраженные резонансные характеристики, причем минимальный КСВН=1,05, коэффициент передачи колеблется в пределах от 0 до -0,1дБ в широкой полосе частот (7,3ГГц - 9ГГц).



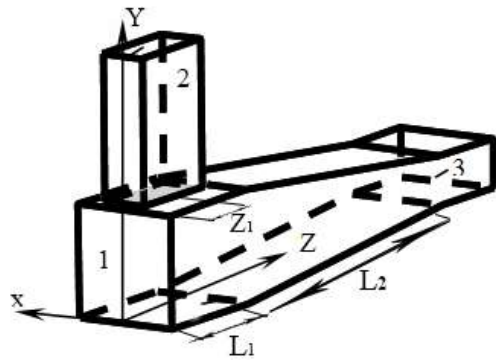


Рис. 1. Продольно-поперечный поляризационный селектор со связью второго канала через волновод, расположенный вдоль оси квадратного волновода.

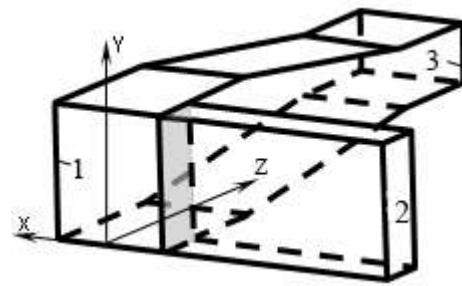


Рис. 2. Продольно-поперечный поляризационный селектор со связью второго канала через волновод, расположенный в боковой стенке квадратного волновода.

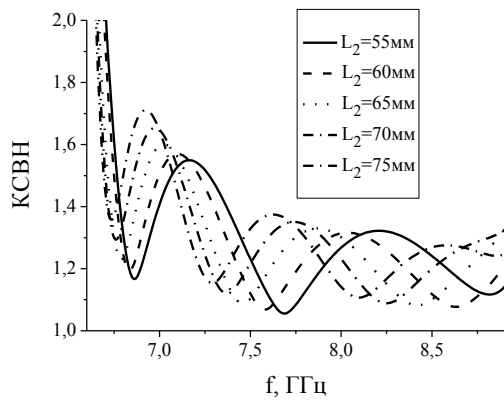


Рис. 3. Зависимость КСВН от частоты первого канала по вертикальной поляризации для различных значений длины волноводного перехода

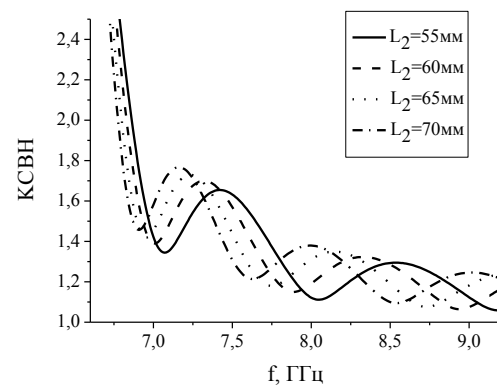


Рис. 4. Зависимость КСВН от частоты первого канала по вертикальной поляризации для различных значений длины волноводного перехода

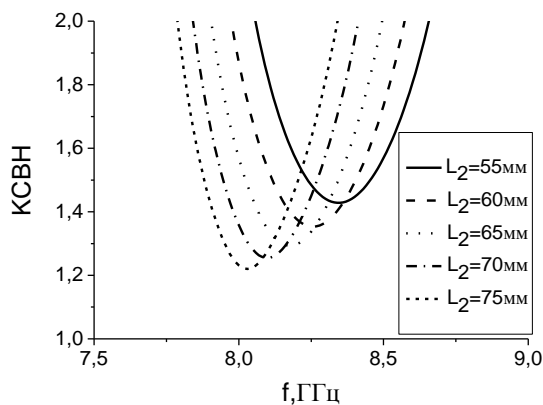


Рис.5. Зависимость КСВН первого канала от частоты по горизонтальной поляризации для различных значений длины волноводного перехода

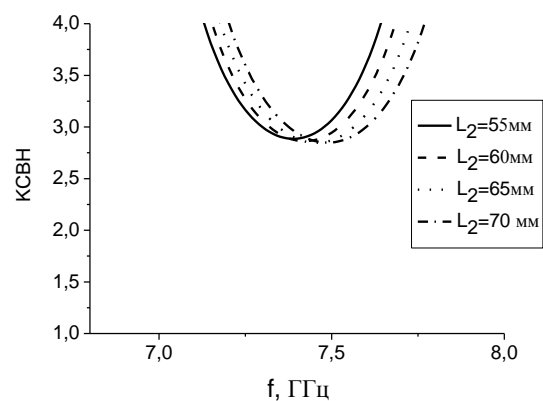


Рис.6. Зависимость КСВН первого канала от частоты по горизонтальной поляризации для различных значений длины волноводного перехода

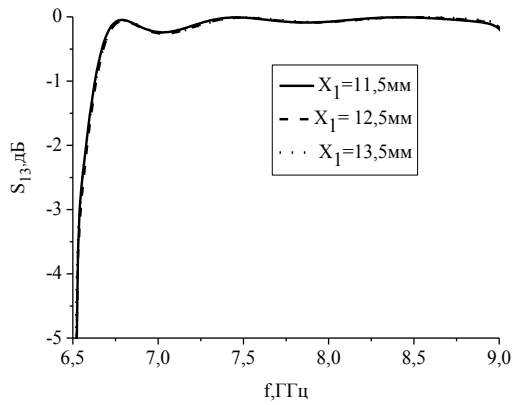


Рис.7. Зависимость коэффициента прохождения волны из 1-го канала в канал 3 от частоты для случая  $L_2 = 60$  мм и различных расстояний.

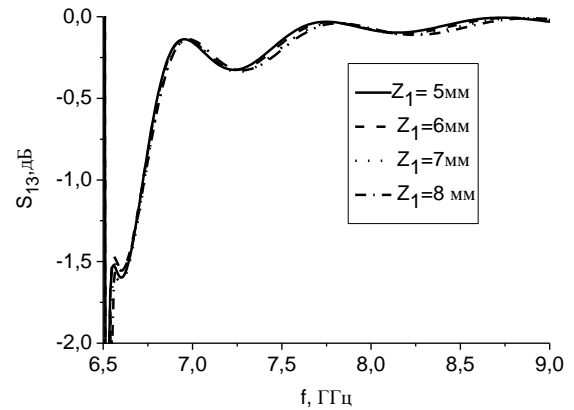


Рис.8. Зависимость коэффициента прохождения волны из 1-го канала в канал 3 от частоты для случая  $L_2 = 60$  мм и различных расстояний  $Z_1$ .

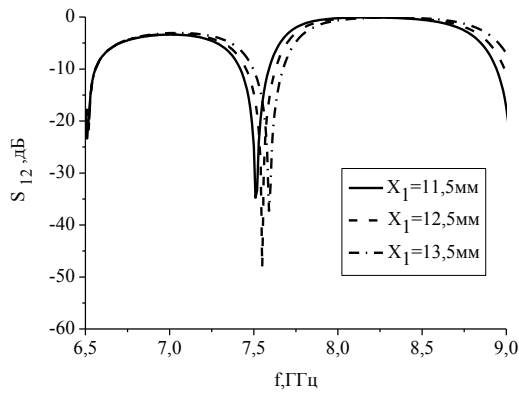


Рис.9. Зависимость коэффициента прохождения волны из 1-го канала в канал 2 от частоты для случая  $L_2 = 60$  мм и различных расстояний.

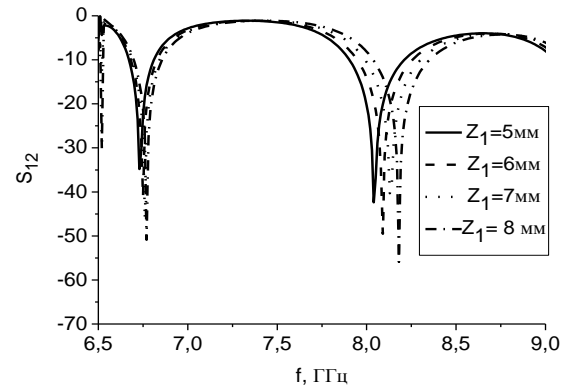


Рис. 10. Зависимость коэффициента прохождения волны из 1-го канала в канал 2 от частоты для случая  $L_2 = 60$  мм и различных расстояний

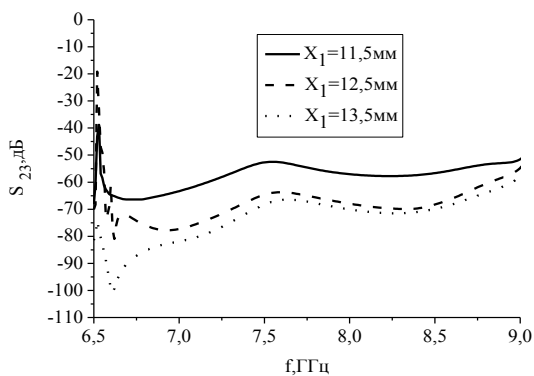


Рис.11. Зависимость коэффициента прохождения волны из 2-го канала в канал 3 от частоты для случая  $L_2 = 60$  мм и различных расстояний.

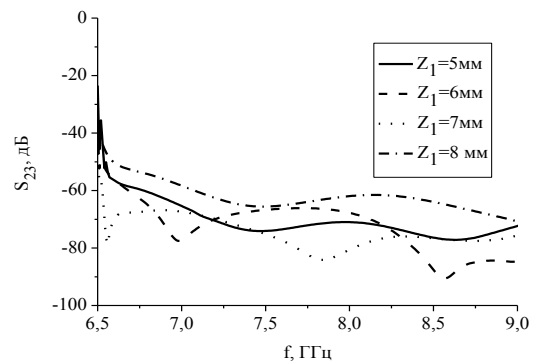


Рис.12. Зависимость коэффициента прохождения волны из 2-го канала в канал 3 от частоты для случая  $L_2 = 60$  мм и различных расстояний.

Показано также, что характеристики такого поляризационного селектора по ортогональному магистральному волноводному каналу имеют минимальный КСВН=1,21, коэффициент передачи около 0дБ в диапазоне частот 7,8 - 8,8 ГГц, развязка между ортогональными каналами выше - 50дБ.

Исследован вариант продольно-поперечного селектора в случае, когда широкая стенка прямоугольного волновода в области связи перпендикулярна продольной оси магистрального волновода. В этом случае показано, что канал, который выполнен в виде плавного перехода из квадратного волновода в прямоугольный, обладает характеристиками, имеющими слабовыраженный резонансный характер, минимальный КСВН=1,05; коэффициент передачи колеблется в пределах от -0Б до -0,2дБ в широкой полосе частот (7,5 ГГц – 11 ГГц). В случае канала, который выполнен в виде ортогонального магистральному волноводному каналу минимум КСВН ухудшается до КСВН=1,28 коэффициент передачи -1,2 дБ в диапазоне частот 7,2 - 7,7 ГГц. Развязка между ортогональными каналами высокая и не хуже -50дБ.

Таким образом, продольно-поперечные поляризационные селекторы имеют лучшие характеристики при продольной ориентации области связи волноводов. Такой же вывод получен в [4] для поперечных волноводных селекторов с резонансными щелевыми элементами связи, работающих в ортогональном линейно – поляризованном базисе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов Н.И., Логвин А.И, Сарычев В.А.Поляризация радиоволн. Книга 1.Поляризационная структура радиолокационных сигналов. – М.: Радиотехника, 2005. –704с.
2. Модель А.М. Фильтры СВЧ в радиорелейных системах.- М.:Связь.,1967. –352с.
3. Schlegel H., and Fowler W.D. The orthomode transducer offers a key to polarization diversity in EW systems. Microwave System News, September 1984, p.65-70.
4. Горобец Н.Н., Ляховский А.Ф., Розыскнов С.Ю.Увеличение развязки между каналами в волноводных поляризационных разделителях //Вестник Харьковского государственного университета, № 371, Радиофизика и электроника, 1992, с. 36-41.

УДК 621.396.67

## ИМПУЛЬСНАЯ РЕФЛЕКТОРНАЯ АНТЕННА НА ОСНОВЕ НЕРЕГУЛЯРНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

**М.Н. Легенький**

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

[E-mail: mlegenkiy@ya.ru](mailto:mlegenkiy@ya.ru)

Поступила в редакцию 31 мая 2013 г.

С помощью численного решения уравнения Лапласа на сфере рассчитан импеданс конической линии. Предложена методика получения новых конструкций импульсных рефлекторных антенн с использованием радиально-неоднородной конической линии (для согласования импеданса) при возбуждении структуры. Разработана программа для расчета нормализованного импульсного отклика антенны из временных форм возбуждающего импульса напряжения и излученного импульса в дальней зоне. Показана возможность получения более мощного излучения на больших расстояниях от антенны при использовании таких излучателей вместо обычных антенн (с радиально-однородной конической линией).

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** Импульсная рефлекторная антенна, уравнение Лапласа, радиально-неоднородная коническая линия, согласование импеданса, нормализованный импульсный отклик.

За допомогою чисельного розв'язку рівняння Лапласа на сфері розраховано імпеданс конічної лінії. Запропоновано методику отримання нових конструкцій імпульсних рефлекторних антен з використанням радіально-неоднорідної конічної лінії (для узгодження імпедансу) при збудженні структури. Розроблено програму для розрахунку нормалізованого імпульсного відгуку антени через часові форми імпульсу збуджуючої напруги та випроміненого імпульсу в дальній зоні. Показана можливість отримання більш потужного випромінювання на великій відстані від антени при використанні таких випромінювачів замість звичайних антен (з радіально-однорідною конічною лінією).

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** Імпульсна рефлекторна антена, рівняння Лапласа, радіально-неоднорідна конічна лінія, узгодження імпедансу, нормалізований імпульсний відгук.

Impedance of conical line is calculated with the help of numerical solution of the Laplace equation on a sphere. The technique of the obtaining new constructions of Impulse Reflection Antennas (IRA) is proposed. In these structures some radial-ingomogeneous conical lines are used in order to feed the antenna. The program for Normalized Impulse Response calculation via the waveforms of feeding voltage pulse and radiated field is written. It is shown the possibility to obtain more power radiated field at large distance from antenna in comparison with usual antennas (with radial-homogeneous conical line).

**KEYWORDS:** Impulse Radiating Antenna, Laplace equation, radial-ingomogeneous conical line, impedance matching, normalized impulse response.

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время системы связи и локации на импульсных сигналах широко используются в технике. Это объясняется некоторыми преимуществами этих сигналов: большая разрешающая способность при локации, возможность работы устройств на таких сигналах рядом с обычными узкополосными устройствами без взаимного влияния, отсутствие слепых зон и скоростей, скрытность передачи информации и т.д. Также в последнее время появились адекватные генераторы импульсов, позволяющие синтезировать пикосекундные сигналы. Сверхширокополосные сигналы (СШПС) применяются в различных областях: мониторинг состояния пациентов, подповерхностная локация, помехоустойчивая связь, системы контроля движения транспортных средств и т.д. Также одной из причин интереса к антеннам, предназначенным для излучения и приема сверхкоротких электромагнитных импульсов, являются исследования воздействия электромагнитного импульса ядерного взрыва на электронные системы.

Для всех этих целей необходимо создание соответствующих излучателей, способных излучать без искажения сверхкороткие импульсные сигналы, то есть необходимо разрабатывать различные типы СШП антенн.

Особое место среди импульсных антенн занимают апертурные антенны, которые позволяют создать плоскую волну в пределах прожекторного луча апертуры на небольших расстояниях от нее. В работе [1] кратко описывается метод расчета импульсного поля плоской апертуры, приводятся выражения, полученные для поля плоской прямоугольной апертуры в ближней зоне в пределах и за пределами прожекторного луча, а также обсуждаются особенности импульсного поля, описаны особенности импульсных переходных характеристик прямоугольной плоской апертуры в ближней зоне. Показано, что по сравнению со случаем круглой апертуры импульсная переходная характеристика прямоугольной апертуры имеет более сложную структуру заднего фронта.

Общеизвестно, что направленное излучение создаётся с помощью антенн, имеющих большие размеры синхронно излучающей апертуры. К таким антеннам относятся линзовые и зеркальные антенны, а также решётки излучателей. Относительной простотой конструкции обладают параболические антенны, в частности – «импульсная излучающая антенна» Impulse Radiating Antenna (IRA). Данная антенна состоит из конической линии и параболического металлического рефлектора. В конической линии, которая обычно состоит из четырех металлических «плечей», возбуждается ТЕМ-волна, которая после взаимодействия с рефлектором преобразуется в плоскую и создает мощный короткий излученный импульс на больших расстояниях от антенны [2] (пример подобной антенны показан на Рис. 1). Отметим одну неочевидную особенность параболических (и вообще зеркальных) антенн, применяемых для излучения СШП сигналов. Облучатель параболических антенн, излучающих СШП импульсы, отличается своими размерами от облучателей обычных узкополосных антенн. В обычных антеннах зеркало находится в дальней зоне облучателя. В зеркальных СШП антеннах излучатель представляет собой ТЕМ рупор, или точнее отрезок конической линии с ТЕМ волной, которая продлевается почти до самого зеркала. Это приводит к тому, что временная форма импульса поля на апертуре в первом приближении совпадает с формой импульса в линии, поэтому импульс поля излучения получается пропорциональным производной импульса возбуждающего напряжения. Если же использовать «обычный» излучатель (вибраторный или рупорный), то его поле излучения вблизи зеркала будет пропорционально второй производной подводимого напряжения, что приведёт к снижению амплитуды импульса поля излучения и сдвигу его спектра в область высоких частот.

Однако большие размеры облучателя создают проблемы с затенением зеркала, особенно если зеркало осесимметричное. Поэтому в антенне IRA используется облучатель в виде четырёхпроводной конической ТЕМ линии с плоскими радиальными «незатеняющими» проводниками. Однако, он создаёт неудачное распределение поля на апертуре, потому даже теоретическая эффективность апертуры такой антенны низка. Кроме того, энергия к облучателю IRA подводится с помощью гибких кабелей, проложенных вдоль поверхности проводников облучателя и вдоль оси симметрии, что позволяет избежать дополнительного затенения зеркала, но ограничивает величину подводимого напряжения [3].

Благодаря простоте конструкции и хорошим электродинамическим характеристикам зеркальные антенны широко применяются в тех диапазонах длин волн, где при относительно небольших геометрических размерах всей конструкции достаточно просто достигаются весьма значительные электрические размеры апертур, которыми, в основном, и определяются электродинамические характеристики антенны. В тоже время, зеркальные антенны обладают недостатком принципиального характера: масса зеркала растёт быстрее, чем его апертура, что затрудняет создание антенн с предельно достижимыми электродинамическими характеристиками и, следовательно, геометрически большими апертурами. В связи с этим поиск новых решений в конструировании зеркальных антенн и в настоящее время является актуальной задачей.

Перспективной возможностью для улучшения конструкций данной антенны представляется изменение конструкции возбуждающей конической линии при неизменных размерах параболического зеркала. В частности, в статье [4] рассмотрена оптимизация конической линии, используемой для возбуждения в импульсной рефлекторной антенне, с помощью метода конечных элементов (в качестве свободных параметров рассматриваются угол между плечами и углы раскрытия плеча). Показано, что рассматриваемый в предыдущих работах случай, когда каждая пара плечей перпендикулярна друг другу, не приводит к наилучшим результатам.

Однако оптимизация конической линии затруднена тем что, эта линия описывается большим количеством различных параметров (см. Рис. 2-3). Поэтому перспективным представляется подход, основанный на использовании некоторых эмпирических принципов для улучшения конструкции антенны. В частности, для антенн, базирующихся на ТЕМ-линиях передачи, часто применяется оптимизация их конструкции при использовании ТЕМ-линий с плавно изменяющимся импедансом [5].

Следует отметить также, что для импульсных антенн все широко известные в частотной области

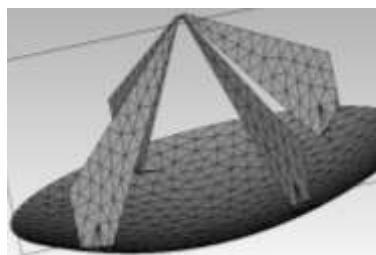


Рис. 1. Импульсная рефлекторная антенна с дискретизированной поверхностью.

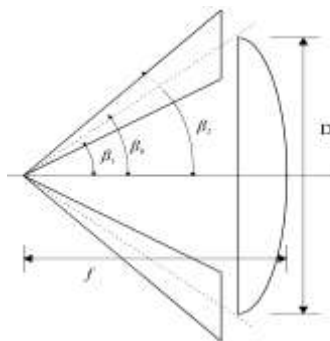


Рис. 2. Импульсная рефлекторная антенна, вид сбоку.

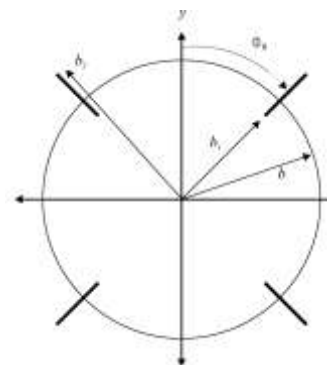


Рис. 3. Плоскость апертуры антенны.

параметры антенн (диаграмма направленности, коэффициент направленного действия, коэффициент усиления и т.д.) становятся функциями от частоты. Поэтому для описания характеристик излучения и приема импульсной антенны вводится нормализованный импульсный отклик (НАО) антенны. НАО антенны - это сигнал, который появляется на выходе антенны при падении на нее плоской волны, приходящей из заданного направления, с временной зависимостью в виде дельта импульса [6, 7].

Таким образом, целью данной работы является создание теоретических моделей для излучения сверхширокополосных импульсных сигналов, оптимизация профиля импеданса для линии возбуждения рефлекторной антенны и определения принципов построения оптимальной конструкции антенны, то есть антенны с наилучшим НАО.

В статье [8] представлен метод расчета импеданса для ТЕМ рупора. В настоящей работе этот метод адаптирован для расчета импеданса плечей импульсной рефлекторной антенны.

В [9] предложен метод расчета импульсного отклика импульсной антенны методом физической оптики. В работе [1] рассмотрена импульсная переходная характеристика параболической антенны в дальней зоне. Показано отличие полей, отраженных от плоской апертуры и от параболической антенны в дальней зоне. Выявлено, что при увеличении глубины зеркала длительность отклика незначительно возрастает. Однако, общеизвестно, что метод физической оптики является приближением общей теории дифракции для высоких частот и поэтому не совсем подходит для анализа широкополосных антенн. Для анализа таких антенн во временной области часто используются численные методы, такие как, метод интегральных уравнений во временной области (IETD) [10] (на Рис. 1 представлен пример дискретизации поверхности антенны при использовании IETD метода) и метод конечных разностей во временной области (FDTD) [11]. В данной работе для анализа различных конструкций антенны используется трехмерная FDTD программа, из результатов расчета которой вычисляется НАО антенны, что позволяет судить о взаимных преимуществах тех или иных антенн.

В работе рассматривается импульсная рефлекторная антенна, возбуждаемая конической линией, состоящей из четырех плечей. На практике часто используются конструкции антенны подобные представленной на Рис. 1. Основными параметрами антенны являются фокусное расстояние  $f$ , диаметр рефлектора  $D$ , а также параметры возбуждающего плеча: углы  $\beta_0, \beta_1$  и  $\beta_2$  (см. Рис. 2), а также угол между плечами  $\phi_0$  (см. Рис. 3). В работе предложена конструкция антенны, для которой импеданс ТЕМ-волны конической линии изменяется вдоль радиуса (изменяется геометрическая форма возбуждающих плечей). Это позволяет улучшить нормализованный импульсный отклик антенны. В работе варьируются углы  $\beta_1, \beta_2$  и  $\phi_0$ .

### ИМПЕДАНС КОНИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

Для расчета характеристического импеданса регулярной конической линии (см. Рис. 2-3) вначале необходимо найти распределение поля для ТЕМ-моды, которое определяется из решения уравнения Лапласа на сфере с граничными условиями  $\Phi = -V$  и  $\Phi = +V$  на разных плечах антенны [8]

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{1}$$

Здесь потенциал  $\Phi$  следующим образом связан с поперечной компонентой электрического поля  $\vec{e}_t, \theta, \varphi = -r \nabla \Phi, \theta, \varphi$ . Полученный из решения уравнения (1) потенциал  $\Phi$  может быть использован для расчета импеданса. Для этого вначале вычисляется полный заряд на единицу длины одной пластины как интеграл (здесь опущен термин  $e^{-jk_0 r}$ )

$$Q = -\epsilon_0 \oint_C \vec{n} \cdot \nabla \Phi \, dl \tag{2}$$

где  $C$  - контур, который обходит пластину,  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к  $C$ , и  $\epsilon_0$  диэлектрическая проницаемость свободного пространства. Из выражения для заряда на единицу длины, характеристический импеданс конической линии определяется следующим образом [12]

$$Z_c = V / cQ \tag{3}$$

где  $c$  - скорость света в свободном пространстве.

В работе для расчета импеданса конической линии использовался математический пакет MATLAB PDE Toolbox, который использует метод конечных элементов для решения многих типов двумерных граничных задач. Для уменьшения размера моделируемого пространства рассматривается только четвертая часть сферы и область расчета ограничивается идеальными магнитными и

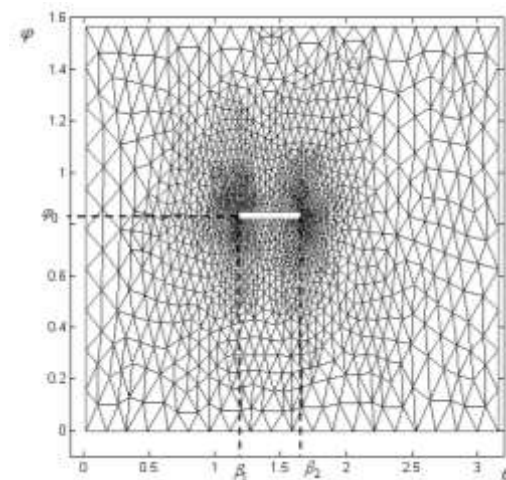


Рис 4. Дискретизация области конечными элементами для расчета импеданса конической линии.

электрическими стенками. При этом моделируется прямоугольная область, в которой угол  $\theta$  изменяется от  $0$  до  $\pi$ , а угол  $\varphi$  - от  $0$  до  $\pi/2$ . В эту область попадает только одно плечо конической линии, и в моделируемой области это плечо рассматривается, как линией с некой толщиной  $w$  (см. Рис. 4). В работе толщина  $w$  выбирается равной  $1^\circ$ .

Граничные условия выбираются следующим образом: на полюсах при  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$  и  $\varphi = \pi/2$  (электрическая плоскость симметрии) искомый потенциал удовлетворяет однородным условиям Дирихле ( $\Phi = 0$ ). При  $\varphi = 0$  (магнитная плоскость симметрии) удовлетворяется условие Неймана  $\partial\Phi / \partial\vec{n} = 0$ . На границах пластины выполняются неоднородные условия Дирихле  $\Phi = 1$ .

Программа MATLAB PDE Toolbox предназначена для решения следующего уравнения эллиптического типа

$$-\text{div}(c \text{grad}(\Phi)) + a \Phi = f, \quad (4)$$

которое в случае замены

$$x = \theta, y = \varphi, a = 0, f = 0, c = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1/\sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \cot(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \sin^{-2}(\theta) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (6)$$

что эквивалентно исходному уравнению Лапласа (1) на сфере.

С помощью программы находится распределение поля на сфере. Импеданс рассчитывается с помощью численного интегрирования в (2) и формулы (3).

### МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ РЕФЛЕКТОРНОЙ АНТЕННЫ

В работе [9] предложена конструкция импульсной рефлекторной антенны. Фокусное расстояние для этой антенны  $f = 230$  мм., диаметр зеркала  $D = 460$  мм., глубина параболоида равна  $d = 57.5$  мм., параметр  $b = 287.5$  мм,  $b_2 - b_1 = 0.435 b$  и  $b^2 = b_1 b_2$ . В этом случае  $b_1 = 231.69$  мм. и  $b_2 = 356.75$  мм. (Рис. 2-3).

В качестве возбуждающего сигнала используется Гауссов импульсом со спектром, находящимся в полосе частот  $0 \div 15$  ГГц.

Были проведены исследования зависимости параметра  $S_{11}$  для этой антенны от угла  $\varphi_0$ . Показано, что наименьшее значение  $S_{11}$  достигается при  $\varphi_0 = 73^\circ$ , что довольно близко к представленному в [9] оптимальному значению  $\varphi_0 = 75^\circ$ . Отличие обусловлено конечной толщиной плечей антенны в данном

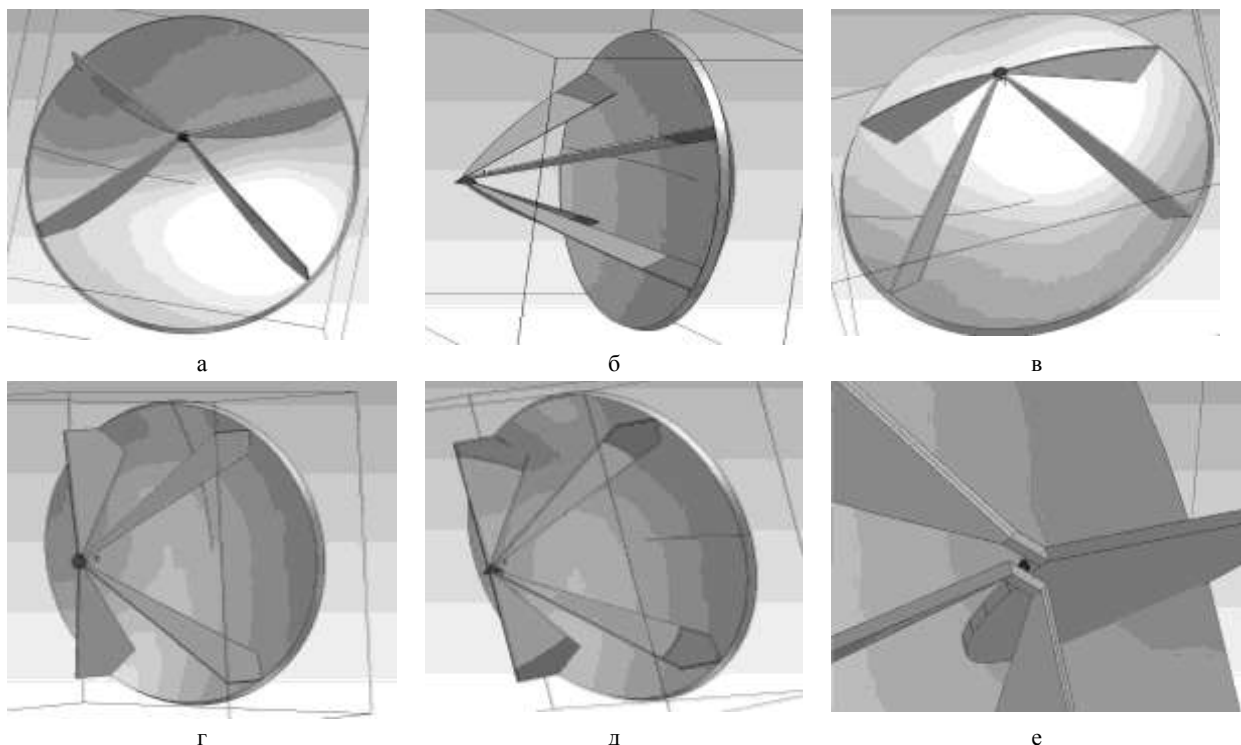


Рис. 5. Рассматриваемые в работе антенны.

моделировании.

Для антенн с различными профилями плечей конической линии, возбуждающей рефлектор, рассчитано излученное поле на расстоянии  $100f$  от начала конической линии. Примеры антенн, для которых проводились расчеты представлены на Рис. 5а-д. При этом на Рис. 5е изображена область возбуждения антенны 1 – в качестве источника используется волновой порт с импедансом  $100 \text{ Ом}$ , аналогичным образом осуществляется возбуждение и других антенн. Были промоделированы следующие типы антенн: 1 - антенна с искривленным внутренним плечом конической линии (Рис. 5а), 2 - антенна с искривленным внешним плечом конической линии (Рис. 5б), 3 - обычная антенна с прямыми плечами (Рис. 5в), 4 - антенна с прямым плечом и резистивной нагрузкой (Рис. 5г), 5 - антенна с искривленным внешним плечом и резистивным нагрузкой (Рис. 5д). Искривление профиля плечей антенны выполняется таким образом, чтобы импеданс изменялся вдоль конической линии от  $100 \text{ Ом}$  на входе до  $120\pi \text{ Ом}$  вблизи рефлектора по экспоненциальному закону. Для моделирования резистивной нагрузки часть идеально металлического плеча вблизи рефлектора (20% его длины) выполнялась из другого материала (в работе использовался материал с проводимостью  $12.5 \text{ См/м}$ ). Такая модель антенны является более приближенной к реальным конструкциям [13], где также используется резистивная нагрузка.

Полученная напряженность излученного поля на большом расстоянии от антенны используется для вычисления НИО антенны (при этом рассматривается параллельная возбуждающему волновому порту на Рис. 5е компонента напряженности электрического поля). Согласно [6] НИО антенны  $(\vec{h}_n(t, \vec{n}))$  это напряжение в антенне, работающей в режиме приема, в случае, если на нее из направления  $\vec{n}$  падает плоская волна с временной зависимостью в виде дельта импульса. Для случая произвольной временной зависимости падающего поля соотношение между напряжением на выходе  $V_{rec}$  антенны и падающим полем  $\vec{E}_{inc}$  имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{Z_c}} V_{rec} t = \vec{h}_n(t, \vec{n}) * \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \vec{E}_{inc} t \quad (7)$$

Здесь значение напряжения на выходе антенны нормировано на импеданс запитывающей линии передачи  $Z_c$ , а значения напряженности падающего поля нормировано на импеданс свободного пространства  $Z_0 = 120\pi \text{ Ом}$ . Размерность НИО — [м/с]. Звездочка обозначает свертку по времени. В случае, если антенна работает в режиме излучения, напряженность излученного в направлении  $\vec{n}$  поля на расстоянии  $R$  от излучающего центра антенны в момент времени  $t$  будет определяться, как свертка того же НИО с производной по времени от сигнала на входе антенны или, в силу свойства свертки, как свертка производной от НИО с сигналом на входе антенны:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \vec{E}_{rad} t, R, \vec{n} &= \frac{1}{2\pi Rc} \vec{h}_n(t, \vec{n}) * \frac{1}{\sqrt{Z_c}} \frac{dV_{exc} t}{dt} * \delta t - R/c = \\ &= \frac{1}{2\pi Rc} \frac{d\vec{h}_n(t, \vec{n})}{dt} * \frac{1}{\sqrt{Z_c}} V_{exc} t * \delta t - R/c \end{aligned} \quad (8)$$

Для вычисления НИО антенны выражение (8) переводится в частотную область с помощью обратного преобразования Фурье. При этом учитываются следующие свойства преобразования Фурье

$$\begin{aligned} \vec{h}_n(t, \vec{n}) &\Rightarrow \vec{h}_n(\omega, \vec{n}), \vec{E}_{rad}(t, R, \vec{n}) \Rightarrow \vec{E}_{rad}(\omega, R, \vec{n}), \\ \frac{dV_{exc} t}{dt} &\Rightarrow j\omega V_{exc}(\omega), \delta t - R/c \Rightarrow e^{-j\omega R/c} \end{aligned} \quad (9)$$

В результате получаем следующую формулу для вычисления спектра НИО антенны через спектры возбуждающего антенну сигнала и излученного поля

$$\vec{h}_n(\omega, \vec{n}) = 2\pi Rc \sqrt{\frac{Z_c}{Z_0}} \frac{\vec{E}_{rad}(\omega, R, \vec{n})}{j\omega V_{exc}(\omega)} e^{j\omega R/c} \quad (10)$$

Однако, более удобным для анализа оказывается интеграл от НИО антенны. Для вычисления его спектра выражение (10) необходимо поделить на  $j\omega$ . Далее в работе анализируется временная форма интеграла от НИО, которая получена из спектра с помощью обратного преобразования Фурье.

На Рис. 6 изображен вычисленный по описанной выше методике интеграл от нормализованного импульсного отклика (спектр интеграла от НИО получается) – для различных типов антенн (см. Рис. 6).

Амплитуда первого пика на Рис. 6 отвечает за максимальную амплитуду излученного поля в дальней зоне для данного типа антенны. Следует отметить, что использование конической линии с переменным импедансом с искривлением внутренней части плеча (антенна 1) в отличие от линии с



постоянным импедансом (антенна 3) позволяет увеличить максимальную амплитуду излученного поля в

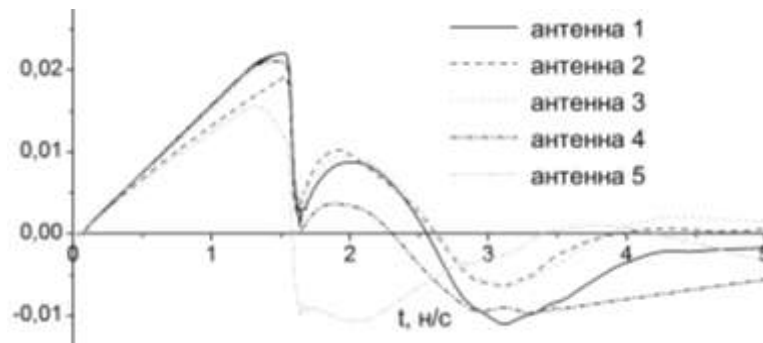


Рис. 6. Интеграл от нормализованного импульсного отклика для разных типов антенн.

дальней зоне.

Кривые 2 и 5 на Рис. 6 получены для одинаковых геометрических конструкций антенн, но в антенне 5 используется резистивная нагрузка. При этом начало сигналов совпадает, но для антенны с резистивной нагрузкой уменьшается амплитуда излученного сигнала, а также уменьшается амплитуда позднеременных колебаний. Следует отметить, что в случае антенны с постоянным импедансом линии, использование резистивной нагрузки влияет только на позднеременную часть интеграла от нормализованного импульсного отклика (кривые 3 и 4 на Рис. 6).

### ВЫВОДЫ

Проведены исследования возможностей улучшения конструкции импульсной рефлекторной антенны. Рассмотрено изменение профиля металлических плечей, составляющих коническую линию, которая используется для возбуждения антенны, для получения более выгодной конфигурации поля на зеркале. Предложен алгоритм изменения формы конической линии, основанный на плавном изменении импеданса ТЕМ-волны вдоль конической линии.

Для реализации данного алгоритма разработана программа для расчета импеданса конической линии с помощью решения численного уравнения Лапласа (с использованием электрических и магнитных плоскостей симметрии) и расчета полного заряда на единицу длины пластины. Расчеты выполнены с помощью популярной программы MATLAB PDE Toolbox.

Трехмерная FDTD программа использована для численного моделирования импульсного излучения различных типов импульсной рефлекторной антенны (антенна с постоянным импедансом конической линии, антенна с переменным импедансом конической линии, антенна с резистивной нагрузкой). Рассчитано излученное поле на большом расстоянии от антенны. С использованием временных форм возбуждающего сигнала и излученного поля рассчитаны и проанализированы временные зависимости интегралов от нормализованных импульсных откликов для различных типов антенн. Показано, что в случае использования антенны с переменным импедансом конической линии излученное поле имеет большую амплитуду по сравнению с обычной антенной (с постоянным импедансом). Рассмотрены преимущества и недостатки использования антенн с резистивной нагрузкой.

Дальнейшие исследования по данной тематике могут быть направлены на изменение импеданса линии, с помощью изменения угла между металлическими плечами, а также последующее усовершенствование предложенных в работе конструкций антенн посредством использования других профилей импеданса.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скулкин С.П. “Импульсное поле параболической антенны в дальней зоне”, Известия ВУЗов, Радиофизика, Т. 51, № 12, 2008. С. 1081-1088.
2. Baum С.Е. “Radiation of Impulse-Like Transient Fields”, Sensor and Simulation Notes # 321, С.Е. Baum, Ed. Albuquerque, NM: Philips Laboratory, 1989.
3. Амосова А.И. “Диапазонные свойства зонированного рефлектора”, Журнал Радиоэлектроники, № 1 2008.
4. Тью J.S. “Optimization of the TEM Feed Structure for Four-Arm Reflector Impulse Radiating Antennas” / IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 49, No. 4, April 2001. pp. 607-614.
5. Mallahzadeh A.R., Karshenas F., “Modified TEM horn antenna for broadband applications”, Progress In Electromagnetics Research, 2009, Vol. 90. pp. 105-119.

6. Scheers B. "Ultra-Wideband Ground Penetrating Radar, with Application to the Detection of Anti Personnel Landmines", Ph.D. thesis / Université Catholique de Louvain, Laboratoire D'Hyperfréquences. – Louvain-la-Neuve (Belgium), March 2001, 277 p.
7. Farr E.G., Baum C.E., "Time Domain Characterization of Antennas with TEM Feeds", Sensor and Simulation Notes, 1998. Note 426.
8. Lee R.T., Smith G.S. "On the Characteristic Impedance of the TEM Horn Antenna", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 52, No. 1, January 2004. pp. 315-318.
9. Baretela M.J., Tyo J.S. "Improvement of Prompt Response From Impulse Radiating Antennas by Aperture Trimming", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 51, No. 9, Sept. 2003. pp. 2158-2167.
10. Rao S. M., "Time Domain Electromagnetics", Department of Electrical Engineering, Auburn University, Auburn, AL., 1999, 372 p.
11. Taflove A., Hagness S. C. "Computational Eletrodynamics:The Finite-Difference Time-Domain method", Second Edition, Artech House, 2000, 852 p.
12. Collin R.E., "Foundations for Microwave Engineering", 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1992, ch. 3.
13. Bowen L.H, Farr E.G., "A Dual-Polarity Impulse Radiating Antenna", Sensor and Simulation Notes, 2003. Note 479.

УДК 621.385.6

## ПУСКОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХРЕЖИМНОЙ ЭЛЕКТРОННО-ВОЛНОВОЙ СИСТЕМЫ О-ТИПА

**Е.Н. Одаренко<sup>1</sup>, А.А. Шматько<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Харьковский национальный университет радиоэлектроники, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14  
E-mail: oen@kture.kharkov.ua

<sup>2</sup>Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 4  
Поступила в редакцию 30 октября 2013 г.

В работе проведено теоретическое исследование пусковых характеристик двухрежимного генератора с двумя выходными сигналами на кратных частотах. Анализ проводится на основе многомерной теории резонансных приборов О-типа с длительным взаимодействием в рамках приближения слабого сигнала. Установлены основные закономерности влияния амплитуды поля поверхностной обратной волны и величины индукции магнитного фокусирующего поля на пусковые характеристики режима дифракционного излучения.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** двухрежимный генератор, линейная теория, пусковые характеристики.

В роботі проведено теоретичне дослідження пускових характеристик дворежимного генератора з двома вихідними сигналами на кратних частотах. Аналіз проводиться на базі багатовимірної теорії резонансних приладів О-типу з тривалою взаємодією в рамках наближення слабого сигналу. Встановлені основні закономірності впливу амплітуди поля поверхневої зворотної хвилі та значення індукції магнітного фокусуєчого поля на пускові характеристики приладу в режимі дифракційного випромінювання.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** дворежимний генератор, лінійна теорія, пускові характеристики.

Theoretical investigation of the double-mode oscillator starting characteristics with two output multiple frequencies signals is carried out in this work. Analysis is performed on the basis of the multidimensional theory of the O-type resonant electron devices with prolonged interaction within the framework of small-signal approach. Basic regularities of the effect of the surface backward wave amplitude and magnetic focusing field induction value on the starting characteristics of the diffraction radiation regime are determined.

**KEY WORDS:** double-mode oscillator, linear theory, starting characteristics.

### ВВЕДЕНИЕ

Современные тенденции развития радиоэлектронных устройств характеризуются интенсивным освоением новых коротковолновых диапазонов, что необходимо для совершенствования средств связи, навигации, научного приборостроения, медицины и т.д. Особое место здесь занимает так называемый терагерцовый диапазон, который характеризуется длинами волн от десятых до сотых долей миллиметра.

Основой для освоения любого частотного диапазона является разработка средств для генерации, усиления, преобразования и обработки сигналов. В оптическом и инфракрасном диапазоне успешно применяются источники когерентного и некогерентного излучения – лазеры различных типов и модификаций, а также разнообразные светодиоды. В СВЧ-диапазоне используются вакуумные и полупроводниковые приборы, которые перекрывают диапазон длин волн от метрового до субмиллиметрового.

Особое место занимают устройства дифракционной электроники, специально созданные для работы в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах [1]. Сочетая в себе элементы конструкции, присущие классическим электронным приборам СВЧ (электронный поток, замедляющая система (ЗС)) и приборам квантовой электроники (открытый резонатор), эти устройства обеспечивают лучшие эксплуатационные характеристики в терагерцовом и субтерагерцовом частотном диапазонах по сравнению с приборами СВЧ или квантовыми генераторами. Характерной особенностью генераторов дифракционного излучения является возможность работы в двух режимах – режиме генерации на обратной волне (режим ЛОВ) и режиме генерации дифракционного излучения (режим ГДИ). Данный факт непосредственно следует из структуры поля периодической ЗС – энергия поля распределяется между поверхностными и объемными волнами. Модуляция электронного потока полем обратной волны обуславливает возбуждение быстрых объемных волн, уходящих от поверхности ЗС [2, 3].

Ввиду нелинейности процесса модуляции спектр электромагнитных колебаний в системе обогащается высшими гармониками частоты колебаний режима ЛОВ и возникает возможность одновременной реализации двух режимов электронно-волнового взаимодействия на кратных частотах, что подтверждается результатами натурных и численных экспериментов [4, 5]. Обычно этот режим считался нежелательным, поскольку за счет конкуренции колебаний ЛОВ и ГДИ снижалась выходная мощность генератора. Однако, поскольку устройства вывода энергии колебаний режимов ЛОВ и ГДИ пространственно разнесены, то в этом случае возможно получить одновременно два сигнала различных частот, связанные по фазе. Если обеспечить кратность частот сигналов ЛОВ и ГДИ, то получается устройство, которое является одновременно генератором и умножителем частоты. В случае, когда генерация на обратной волне осуществляется в субтерагерцовом диапазоне, данный прибор одновременно обеспечивает выходной сигнал более коротковолнового диапазона (терагерцового). Такие двухчастотные электронно-волновые системы имеют важное преимущество перед многокаскадными умножителями частоты, поскольку обеспечивают пространственное совмещение в одном приборе областей максимальной степени группировки электронного потока и интенсивности высокочастотного поля на гармонике частоты генерации.

Ранее подобные схемы были предложены для клистронных генераторов [6] и приборов гиротронного типа [7]. Кроме того, экспериментально было установлено возбуждение генератора оротронного типа на второй гармонике частоты колебаний ЛОВ [8].

Важной особенностью двухрежимной электронно-волновой системы является уменьшение пускового тока режима ГДИ на высшей гармонике частоты генерации ЛОВ по сравнению с «чистым» режимом дифракционного излучения на такой же частоте. Увеличение отношения рабочего тока к пусковому приводит к повышению электронного КПД прибора. Поэтому возникает необходимость исследования закономерностей физических процессов на различных стадиях развития колебаний в рассматриваемой системе с целью разработки способов повышения эффективности электронно-волнового взаимодействия. С повышением рабочей частоты следует учитывать все больше факторов, влияющих на процесс энергообмена электронного потока с полем: поперечное взаимодействие, оседание электронов на поверхность ЗС, высокочастотное расслоение пучка и др. Поэтому при теоретическом анализе приборов субтерагерцового и терагерцового диапазонов необходимо использовать двух- и трехмерные модели, позволяющие значительно повысить достоверность результатов и установить основные закономерности физических процессов, протекающих в сложной колебательной системе.

В данной работе на основе многомерной самосогласованной теории электронно-волнового взаимодействия в резонансных приборах с длительным взаимодействием исследуется начальная стадия возбуждения колебаний в двухрежимном приборе.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Моделирование физических процессов в резонансной электронно-волновой системе О-типа с длительным взаимодействием в двухмодовом двухчастотном режимах проводится на основе многомерной самосогласованной теории с учетом пространственного распределения индукции фокусирующего поля [9]. Схема прибора и соответствующая система координат представлены на рис. 1. В дальнейшем используются следующие основные допущения:

- на вход пространства взаимодействия поступает немодулированный электронный поток;
- на первой гармонике происходит взаимодействие в режиме ЛОВ;
- на  $n$ -й гармонике ЛОВ происходит взаимодействие в режиме ГДИ.

Для формирования самосогласованной системы уравнений, описывающей двухрежимное электронно-волновое взаимодействие, необходимо сформулировать уравнения движения электрона в высокочастотных и статических полях, а также уравнения возбуждения для всех полей, существующих в системе. Исходя из сформулированных ранее допущений, можно сделать вывод о том, что в уравнении движения (в общем случае векторном) необходимо учитывать поле ЛОВ на первой гармонике и поле ГДИ на одной из высших гармоник основной частоты (частоты ЛОВ). В общем случае уравнение движения электрона представляет собой векторное уравнение Лоренца:

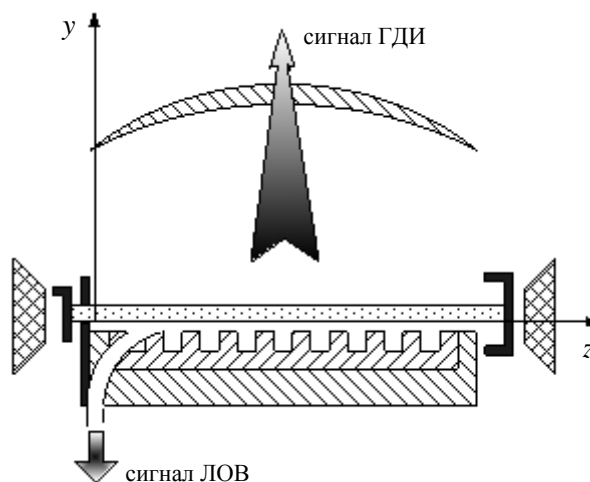


Рис. 1. Схема двухрежимного прибора

$$m\ddot{\vec{r}} = -|e|\left\{\vec{E}_g + \vec{E}_b + \vec{E}_{sc} + \left[\dot{\vec{r}}, \vec{B}\right]\right\}, \quad (1)$$

где  $e$  и  $m$  - заряд и масса покоя электрона;  $\vec{r}$  - радиус-вектор электрона в выбранной системе координат;  $\vec{B}$  - вектор индукции магнитостатического фокусирующего поля;  $\vec{E}_g$  - вектор напряженности высокочастотного электрического поля колебаний ГДИ;  $\vec{E}_b$  - вектор напряженности высокочастотного поля колебаний ЛОВ;  $\vec{E}_{sc}$  - поле пространственного заряда. Точками обозначено дифференцирование по времени. Для записи электрического поля колебаний ГДИ и ЛОВ используются следующие выражения:

$$E_b = E_1 f_1(z) \Psi_1(y) \exp[i(\beta_1 z - \omega t)], \quad (2)$$

$$E_g = E_2 f_2(z) \Psi_2(y) \exp[i(\beta_2 z - n\omega t)]. \quad (3)$$

Здесь функции  $f_{1,2}(z)$  и  $\Psi_{1,2}(y)$  характеризуют амплитудное распределение высокочастотного поля вдоль продольной и поперечной координаты;  $\beta_{1,2}$  - волновые числа, соответствующие замедленным волнам;  $E_{1,2}$  - амплитуды полей. В дальнейшем предполагается, что поля имеют две координатные компоненты, а движение электронов в пространстве взаимодействия является трехмерным.

Для анализа начальной стадии развития колебаний обычно используется приближение слабого сигнала, которое позволяет ограничиться рассмотрением линейных процессов и тем самым значительно упростить исходные нелинейные уравнения. Поскольку в этом случае амплитуды колебаний являются малыми величинами, то можно пренебречь обратным воздействием поля в режиме ГДИ на поле ЛОВ. Такой подход позволяет рассматривать сигнал ЛОВ как некое внешнее воздействие на колебательную систему ГДИ. Поскольку это воздействие непосредственно определяет модуляцию электронного потока и условия возбуждения автоколебаний, то его можно определить как параметрическое.

Представим поперечную координату заряженной частицы, нормированную на поперечный масштаб, в виде суммы трех слагаемых:

$$\zeta = \frac{y}{H} = \zeta_0 + \zeta_s + \zeta_d, \quad (4)$$

где  $\zeta_0$  - координата влета частицы в пространство взаимодействия;  $\zeta_s$  - статическая траектория частицы (обусловленная действием магнитного фокусирующего поля и полем пространственного заряда);  $\zeta_d$  - динамическая траектория, которая формируется под воздействием высокочастотных полей. Очевидно, что в данном случае  $\zeta_d$  является линейной функцией амплитуды колебаний.

Рассмотрим далее функции, характеризующие поперечное амплитудное распределение высокочастотных полей ЛОВ и ГДИ:

$$\Psi_1(\zeta) = e^{-\beta_1 \zeta}, \quad \Psi_2(\zeta) = e^{-\beta_2 \zeta}. \quad (5)$$

В результате линеаризации этих выражений получаем:

$$\begin{aligned} \Psi_1(\zeta) &= e^{-\beta_1(\zeta_0 + \zeta_s)} e^{-\beta_1 \zeta_d} \approx e^{-\beta_1(\zeta_0 + \zeta_s)} (1 - \beta_1 \zeta_d); \\ \Psi_2(\zeta) &= e^{-\beta_2(\zeta_0 + \zeta_s)} e^{-\beta_2 \zeta_d} \approx e^{-\beta_2(\zeta_0 + \zeta_s)} (1 - \beta_2 \zeta_d). \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда после соответствующих преобразований линейное продольное уравнение движения можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} &= \Phi_0 \frac{F_1}{2} f_1(\xi) \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \theta \sin(\phi) \end{bmatrix} e^{-\beta_1(\zeta_0 + \zeta_s)} - \Phi_0^3 \frac{\omega_c^2}{\omega^2} B_y \left( \frac{H}{L} \int_{\zeta_0}^{\zeta_0 + \zeta_s} B_z d\zeta + \frac{H}{L} B_z \zeta_H - \int_0^\xi B_y d\xi \right) + \\ &+ \Phi_0 \frac{F_2}{2} f_2(\xi) \cos(n\phi + \delta\gamma) e^{-\beta_2(\zeta_0 + \zeta_s)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь приняты следующие обозначения безразмерных величин:  $\theta = \omega t - \Phi_0 \xi - \varphi_0$ ;  $\omega$  – циклическая частота колебаний режима ЛОВ;  $\Phi_0 = \beta_e L$  – статический угол пролета электроном пространства взаимодействия длиной  $L$ ;  $\beta_e = \frac{\omega}{v_0}$  – электронное волновое число;  $\phi = \Phi_0 b \xi$ ;  $\xi = \frac{z}{L}$  – нормированная продольная координата;  $b = 1 - \frac{v_0}{v}$  – относительный рассинхронизм между начальной скоростью электронов  $v_0$  и фазовой скоростью синхронной с пучком волны  $v$ ;  $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$  – циклотронная частота;  $B_0$  – постоянная составляющая индукции фокусирующего магнитного поля;  $B_y(\xi, Z)$  и  $B_z(\xi, Z)$  – координатные компоненты фокусирующего магнитостатического поля (в общем случае – неоднородного);  $\delta\gamma$  – разность фаз между сигналами ЛОВ и ГДИ. Фактически это фаза сигнала ГДИ, которая отсчитывается от фазы сигнала ЛОВ.

В правой части выражения (7) находятся три слагаемые, соответствующие различным физическим механизмам изменения фазового положения заряженной частицы относительно синхронной с пучком волны. Первое слагаемое характеризует воздействие сигнала ЛОВ, который, по сути, является внешним воздействием на колебательную систему ГДИ. Второе слагаемое связано с пространственным распределением индукции фокусирующего магнитного поля. Очевидно, что в случае идеализированной фокусировки, когда магнитостатическое поле имеет только одну продольную компоненту  $B_z$ , это слагаемое равно нулю. Третье слагаемое характеризует воздействие поля ГДИ. Поскольку в данном случае амплитуда  $F_2$  весьма мала, то роль внешнего сигнала ЛОВ может быть существенной при формировании пусковых характеристик режима ГДИ. Таким образом, появляется возможность управления процессом возбуждения колебаний ГДИ в двухрежимном приборе за счет изменения условий электронно-волнового взаимодействия в режиме ЛОВ.

Результат линеаризации поперечного уравнения движения представим в виде двух уравнений – для статической и динамической компонент траектории электрона:

$$\frac{\partial^2 \zeta_s}{\partial \xi^2} + A_1 \frac{\partial \zeta_s}{\partial \xi} + \Phi_0^2 \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \zeta_s = \Phi_0^2 \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 (\zeta_0 - h) - \frac{L}{H} \frac{B_z}{B_y} A_1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_d}{\partial \xi^2} + A_1 \frac{\partial \zeta_d}{\partial \xi} + A_2 \zeta_d = \frac{F_1}{2} f_1(\xi) e^{-\beta_1(\zeta_0 + \zeta_s)} \left[ \frac{L}{H} \sin(\phi) + \frac{\partial \zeta_s}{\partial \xi} \cos(\phi) \right] + \frac{F_2}{2} f_2(\xi) e^{-\beta_2(\zeta_0 + \zeta_s)} \left[ \frac{L}{H} \sin(n\phi + \delta\gamma) + \frac{\partial \zeta_s}{\partial \xi} \cos(n\phi + \delta\gamma) \right], \quad (9)$$

$$A_1 = \Phi_0^2 \frac{\omega_c^2}{\omega^2} B_y \left( \frac{H}{L} \int_{\zeta_0}^{\zeta_0 + \zeta_s} B_z d\zeta - \int_0^{\xi} B_y d\xi \right), \quad A_2 = \Phi_0^2 \left[ \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \left( B_z^2 + \frac{H}{L} \frac{\partial \zeta_s}{\partial \xi} B_y B_z \right) - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right].$$

Здесь  $h$  – начальная поперечная координата центра электронного потока;  $\omega_p = \sqrt{\frac{\rho e}{\epsilon_0 m}}$  – плазменная частота;  $\rho$  – плотность заряда;  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная.

Из уравнений (7)-(9) следует известный вывод о разделении различных механизмов энергообмена в рамках линейной теории. Выполняется принцип суперпозиции для продольного и поперечного взаимодействия, а также для сигналов ЛОВ и ГДИ. Таким образом, можно исследовать вклад различных факторов и механизмов в эффективность электронно-волнового взаимодействия на начальной стадии развития колебательного процесса в режиме ГДИ.

Если предположить, что фокусирующее магнитостатическое поле имеет только продольную компоненту  $B_z$ , то в левой части поперечных уравнений движения (8) и (9) останется только два слагаемых, и они фактически переходят в уравнение маятника. Частное решение такого неоднородного дифференциального уравнения второго порядка обычно находится через функцию Грина, а общее решение однородного уравнения зависит от начальных условий, которые используются в системе. Для поперечной координаты и ее производной начальные условия являются в общем случае ненулевыми. Поэтому итоговое решение состоит из двух частей: общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Ключевую роль при анализе и решении уравнения возбуждения резонансной колебательной системы играет средняя комплексная крутизна колебательной характеристики, которая в рамках многомерной модели записывается в виде [10]:

$$S(F, \delta\gamma) = S_1(F, \delta\gamma) + iS_2(F, \delta\gamma) = \frac{1}{2\pi F\Delta} \int_0^1 f_2(\xi) \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \Psi_2(\zeta) \int_0^{2\pi} \left(1 - i \frac{2}{\Phi_0} \frac{d\zeta}{d\xi}\right) \exp[i(n(\theta + \phi) + \delta\gamma)] d\varphi_0 d\zeta_0 d\xi, \quad (10)$$

где  $\Delta$  – начальная безразмерная толщина электронного потока;  $\zeta_{1,2}$  – поперечные координаты границ пучка в начале пространства взаимодействия.

Линеаризация уравнения возбуждения фактически означает запись функции  $S(F)$  в рамках приближения слабого сигнала. Подынтегральное выражение в общем случае содержит нелинейные функции амплитуды сигналов ЛОВ и ГДИ. Как и для уравнений движения, здесь используется предположение о том, что амплитуда  $F_2$  мала и при разложении в ряд в рассмотрении удерживаются слагаемые, содержащие амплитуду в степени не выше первой. В этом случае комплексная крутизна содержит амплитуду в минус первой или в нулевой степени.

Рассмотрим разложение в ряд различных сомножителей подынтегрального выражения в (10). Функция  $\Psi_2(\zeta)$  характеризует поперечную неоднородность синхронной волны и может быть представлена в виде (6). Сомножитель в скобках содержит производную от поперечной координаты по продольной, т. е. характеризует многомерные траектории заряженных частиц. Представим его следующим образом:

$$1 - i \frac{2}{\Phi_0} \frac{d\zeta}{d\xi} = 1 - i \frac{2}{\Phi_0} \frac{d}{d\xi} (\zeta_0 + \zeta_s + \zeta_d) = \left[1 - i \frac{2}{\Phi_0} \frac{d\zeta_s}{d\xi}\right] - i \frac{2}{\Phi_0} \frac{d\zeta_d}{d\xi}. \quad (11)$$

Таким образом разделяются различные компоненты траектории электрона, обусловленные взаимодействием со статическими и высокочастотными полями.

Решение уравнения (7) можно представить в виде двух слагаемых:  $\theta = \theta_0 + \theta(F_2)$ . Здесь  $\theta_0$  – часть решения, которая не зависит от амплитуды сигнала ГДИ  $F_2$ . Тогда экспоненциальная функция в правой части (10) записывается в виде:

$$\exp[i(n(\theta + \phi) + \delta\gamma)] = \exp[i(n(\theta_0 + \phi) + \delta\gamma)] (1 + in\theta(F_2)). \quad (12)$$

С учетом выражений (11) и (12) среднюю комплексную крутизну колебательной характеристики можно представить в виде суммы четырех слагаемых:

$$S^{(1)}(F_2, \delta\gamma) = \frac{1}{2\pi F_2\Delta} \int_0^1 f_2(\xi) d\xi \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} e^{-\beta_2(\zeta_0 + \zeta_s)} d\zeta_0 \int_0^{2\pi} e^{i(n(\theta_0 + \phi) + \delta\gamma)} \left(1 - i \frac{2}{\Phi_0} \frac{\partial \zeta_s}{\partial \xi}\right) d\varphi_0, \quad (13)$$

$$S^{(2)}(F_2, \delta\gamma) = \frac{-\beta_2}{2\pi F_2\Delta} \int_0^1 f_2(\xi) d\xi \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} e^{-\beta_2(\zeta_0 + \zeta_s)} d\zeta_0 \int_0^{2\pi} e^{i(n(\theta_0 + \phi) + \delta\gamma)} \left(1 - i \frac{2}{\Phi_0} \frac{\partial \zeta_s}{\partial \xi}\right) \zeta_d d\varphi_0, \quad (14)$$

$$S^{(3)}(F_2, \delta\gamma) = \frac{in}{2\pi F_2\Delta} \int_0^1 f_2(\xi) d\xi \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} e^{-\beta_2(\zeta_0 + \zeta_s)} d\zeta_0 \int_0^{2\pi} e^{i(n(\theta_0 + \phi) + \delta\gamma)} \left(1 - i \frac{2}{\Phi_0} \frac{\partial \zeta_s}{\partial \xi}\right) \theta d\varphi_0, \quad (15)$$

$$S^{(4)}(F_2, \delta\gamma) = \frac{-i}{\pi \Phi_0 F_2 \Delta} \int_0^1 f_2(\xi) d\xi \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} e^{-\beta_2(\zeta_0 + \zeta_s)} d\zeta_0 \int_0^{2\pi} e^{i(n(\theta_0 + \phi) + \delta\gamma)} \frac{\partial \zeta_d}{\partial \xi} d\varphi_0. \quad (16)$$

Выражения (13)-(16) характеризуют различные механизмы энергообмена ленточного электронного потока с электромагнитным полем в многомерной двухрежимной электронно-волновой системе.

Первое слагаемое  $S^{(1)}$  комплексной крутизны преимущественно определяется изменением эффективности взаимодействия за счет искривления траекторий заряженных частиц в неоднородном поле синхронной волны. Третье слагаемое  $S^{(3)}$  содержит решение уравнения (7), т. е. характеризует, в основном, продольное взаимодействие пучка с сигналом ГДИ и обуславливает наличие в линейном уравнении воз-

буждения слагаемых, содержащих амплитуду  $F_2$  в первой степени. Остальные слагаемые определяются решением уравнения (9) и содержат информацию о двух сигналах, присутствующих в системе.

### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Одной из основных характеристик электронно-волнового взаимодействия в слабосигнальном приближении является инкремент нарастания амплитуды колебаний, который в автономных генераторах непосредственно определяется через среднюю крутизну амплитудной колебательной характеристики:

$$\alpha = GS_1^{st} - 1, \quad S_1^{st} = S_1(F)|_{F \rightarrow 0}. \quad (17)$$

Рассматриваемая двухрежимная система по своей сути также является генератором, характеристики которого определяются параметрами двух взаимосвязанных колебательных систем. В связи с этим можно выделить два инкремента нарастания – для колебаний ЛОВ и ГДИ. Инкремент нарастания амплитуды колебаний ЛОВ определяется стандартным выражением (17), поскольку, в соответствии с допущениями, принятыми в постановке задачи, воздействие колебаний ГДИ на колебательную систему ЛОВ не учитывается. Крутизна амплитудной колебательной характеристики ЛОВ в этом случае зависит только от амплитуды  $F_1$ .

На рис. 2 представлены результаты расчетов инкремента нарастания амплитуды колебаний на обратной волне  $\alpha_b$  как функции параметра пространственного рассинхронизма  $\Phi_0 b$ . Цифры на кривых показывают величину отношения рабочего тока пучка к минимальному по зоне генерации пусковому. Значения индукции фокусирующего поля выбирались достаточно большими, чтобы исключить влияние статических и динамических поперечных смещений траекторий электронов. Данные зависимости характеризуют эффективность возбуждения колебаний ЛОВ на первой гармонике частоты и позволяют определить зоны возбуждения колебаний для различных значений параметров системы: рабочего тока, циклотронной частоты, характеристик электронного потока и т.д.

Рассматривать закономерности возбуждения колебаний ГДИ следует только в пределах зоны генерации ЛОВ, поскольку они порождаются в результате модуляции пучка полем обратной поверхностной волны замедляющей системы. Поскольку колебательная система ГДИ по существу является неавтономной, то ее характеристики определяются параметрами внешнего воздействия со стороны колебательной системы ЛОВ. В частности, крутизна колебательной характеристики ГДИ зависит от амплитуды и фазы колебаний на обратной волне, от которой отсчитывается фаза колебаний на объемных волнах. Следовательно, инкремент нарастания амплитуды колебаний ГДИ  $\alpha_g$  является функцией амплитуды и фазы колебаний ЛОВ.

На рис. 3 представлены результаты расчетов пускового значения средней крутизны амплитудной колебательной характеристики режима ГДИ как функции разности фаз  $\delta\gamma$  для различных значений нормированной амплитуды колебаний, возбужденных на обратной волне. Пунктирная горизонтальная линия показывает значение крутизны колебательной характеристики для автономного режима колебаний ГДИ. Естественно, что в этом случае пусковой ток и инкремент нарастания амплитуды колебаний не зависят от фазы колебаний. Рассматривается третья гармоника частоты режима ЛОВ, поскольку в этом случае

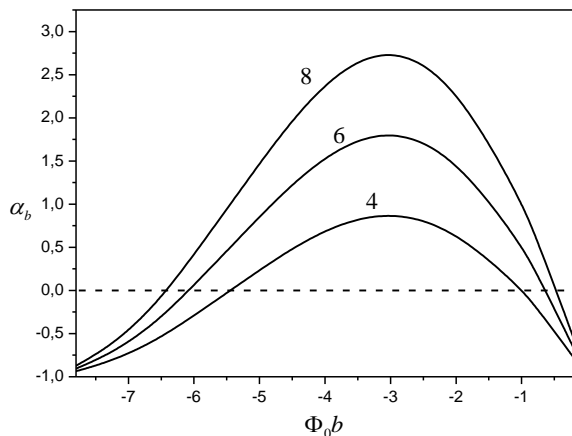


Рис. 2. Инкремент нарастания амплитуды колебаний ЛОВ

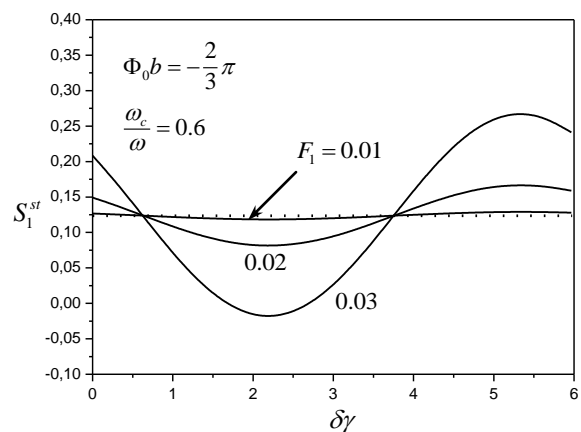


Рис. 3. Пусковые значения крутизны амплитудной колебательной характеристики в режиме ГДИ



реализуется максимальное сопротивление связи для высших гармоник.

Увеличение амплитуды сигнала ЛОВ приводит к формированию гармонической зависимости пускового значения средней крутизны от разности фаз. Для определенных наборов параметров системы величина  $S_1^{st}$  оказывается отрицательной в определенном диапазоне значений параметра  $\delta\gamma$ . Это свидетельствует о возможности формирования зоны генерации сигнала ГДИ не только по параметру рассинхронизма  $\Phi_0 b$ , но и по разности фаз с колебаниями ЛОВ. Кроме того, результаты расчетов показывают, что изменение параметра  $\Phi_0 b$  сопровождается смещением зон генерации вдоль оси  $\delta\gamma$ . Значения разности фаз, соответствующие максимумам и минимумам пускового значения средней крутизны колебательной характеристики, не зависят от амплитуды сигнала ЛОВ. Следовательно, они определяются закономерностями электронно-волнового взаимодействия в режиме ГДИ. К такому же выводу можно прийти, если рассмотреть значения параметра  $\delta\gamma$ , для которых средняя крутизна принимает значения, соответствующие автономной колебательной системе. На периоде изменения разности фаз между колебаниями ЛОВ и ГДИ реализуется два таких значения, причем они зависят от величины параметра пространственного рассинхронизма.

Многомерная самосогласованная теория позволяет исследовать процесс электронно-волнового взаимодействия в двухрежимном приборе с учетом конечного значения индукции магнитного фокусирующего поля. На рис. 4 представлены зависимости  $S_1^{st}(\delta\gamma)$  для различных значений амплитуды колебаний ЛОВ и нормированной циклотронной частоты, которая характеризует индукцию фокусирующего поля. Сплошные и штриховые кривые построены для значений  $\frac{\omega_c}{\omega} = 0.6$  и  $0.2$  соответственно. В рамках приближения слабого сигнала уменьшение жесткости фокусировки приводит к повышению эффективности электронно-волнового взаимодействия. Данный эффект наблюдается для всех возможных значений разности фаз  $\delta\gamma$ . Поскольку в линейной теории амплитуда колебаний мала, то динамические поперечные смещения траекторий электронов не оказывают существенного влияния на энергообмен высокочастотного поля с потоком заряженных частиц. Следовательно, увеличение средней крутизны колебательной характеристики может происходить только за счет статических поперечных смещений траекторий электронов и поперечного взаимодействия пучка с соответствующими координатными компонентами высокочастотного поля электродинамической системы двухрежимного прибора. Однако следует учесть, что в данном случае параметры электронно-оптической системы прибора таковы, что уменьшение нормированной циклотронной частоты до значений 0.2 не приводит к существенному токооседанию на поверхность электродинамической системы.

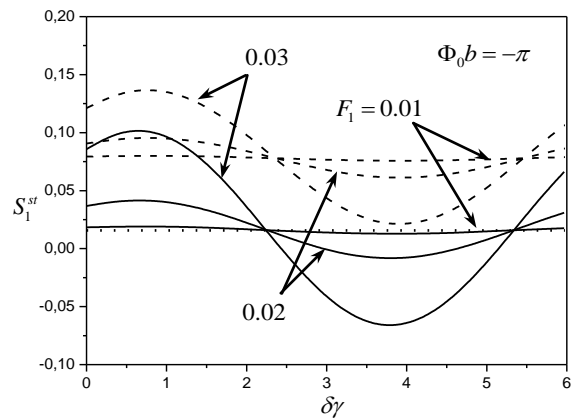


Рис. 4. Пусковые значения средней крутизны для различных значений амплитуды колебаний ЛОВ

На рис. 5 представлены зависимости инкремента  $\alpha_g$  от разности фаз колебаний ЛОВ и ГДИ при возбуждении последних на третьей гармонике частоты ЛОВ. Зависимости  $\alpha_g(\delta\gamma)$  построены для раз-

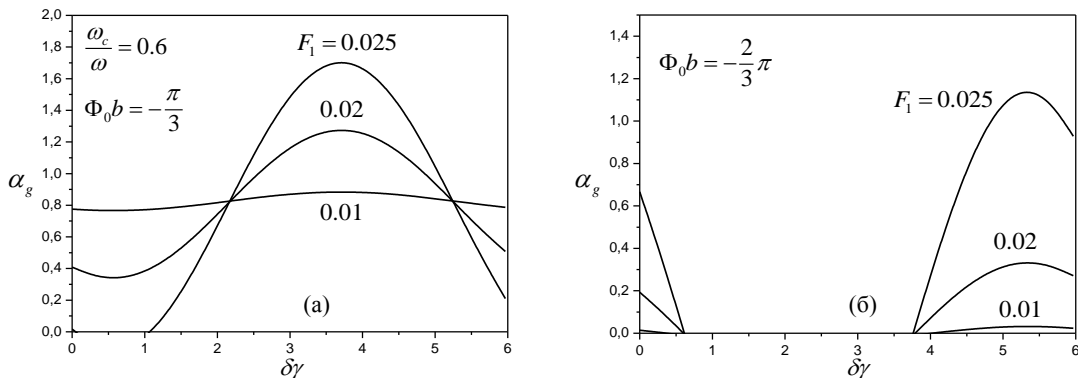


Рис. 5. Инкремент нарастания амплитуды колебаний режима ГДИ

личных значений амплитуды колебаний ЛОВ. Значения параметра пространственного рассинхронизма выбирались в пределах зоны возбуждения колебаний на обратной волне. Рабочий ток в четыре раза превышает минимальное пусковое значение для режима ЛОВ (см. рис. 2).

Для значений амплитуды внешнего воздействия  $F_1 < 0.02$  фактически реализуется автономный режим возбуждения колебаний ГДИ с пусковым током, превышающим соответствующее значение для колебаний на обратной волне. На рис. 5а увеличение амплитуды колебаний ЛОВ до уровня 0.02 сопровождается формированием практически гармонической зависимости  $\alpha_g(\delta\gamma)$ , причем инкремент нарастания амплитуды колебаний ГДИ остается положительным для любых значений разности фаз. Для значения  $F_1 > 0.025$  формируется зона возбуждения колебаний ГДИ по параметру  $\delta\gamma$ . В этом случае происходит синхронизация колебательной системы ГДИ внешним сигналом на третьей гармонике частоты ЛОВ. Следует отметить практически двукратное увеличение инкремента нарастания амплитуды колебаний ГДИ по сравнению с автономным режимом возбуждения дифракционного излучения.

На рис. 5б зона возбуждения колебаний режима ГДИ по разности фаз наблюдается для всех рассмотренных значений амплитуды колебаний ЛОВ. В этом случае параметры электронно-волновой системы таковы, что возбуждение дифракционного излучения происходит только при наличии внешнего сигнала. В автономном режиме ГДИ для получения положительных значений инкремента  $\alpha_g$  необходимо использовать относительно большие рабочие токи, более чем в пять раз превышающие минимальное пусковое значение.

### ВЫВОДЫ

Электронно-волновая система с одновременным существованием режимов ЛОВ и ГДИ может использоваться в качестве двухчастотного источника колебаний терагерцового и субтерагерцового диапазона. Наличие модуляции электронного потока сигналом обратной волны обуславливает увеличение инкремента нарастания амплитуды колебаний (снижение пусковых токов) для возбуждения дифракционного излучения на одной из высших гармоник частоты ЛОВ. Следовательно, в рамках приближения слабого сигнала увеличивается эффективность умножения частоты в двухрежимном приборе. Ослабление фокусировки электронного потока сопровождается увеличением пускового значения средней крутизны колебательной характеристики режима ГДИ и, соответственно, снижением пускового тока в основном за счет статических поперечных смещений траекторий электронов при условии незначительного оседания электронного потока на поверхность электродинамической системы прибора.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шестопапов В. П., Вертий А. А., Ермак Г. П. и др. Генераторы дифракционного излучения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 320 с.
2. Скрынник Б.К., Корнеев В.К., Демченко М.Ю. Об обратной связи в опытах Смита-Парселла // Сб. науч. труд. Радиофизика и электроника. – 2000. – том.5, № 3. – С. 14-18.
3. Шматько А.А., Юдинцев П.В. Эффект Смита-Парселла (дифракционное излучение) и его моделирование // Вісник СумДУ. Серія Фізика, Математика, Механіка. – 2008. – №1'2008. – С. 166-175.
4. Andrews H. L., Brau C. A., Jarvis J. D. et al. Observation of THz evanescent waves in a Smith-Purcell free-electron laser // Appl. Phys. Lett. – 2009. – Vol. 12, №8. – 080703.
5. Donohue J. T., Gardelle J. Simulation of Smith-Purcell terahertz radiation using a particle-in-cell code // Phys. Rev. ST Accel. Beams. – 2006. – Vol. 9, №6. – 060701.
6. Cornetet W.H. A Self-Excited Drift-Tube Klystron Frequency Multiplier for Use in Generating Millimeter Waves // IRE Trans. on Electron Devices. – 1959. – Apr. – pp. 236-241.
7. Бандуркин И.В., Братман В.Л., Савилов А.В. Умножение частоты в автогенераторах гиротронного типа // Письма в ЖТФ. – 2006. – 32. – вып. 2. – С. 72-78.
8. Bratman V. L., Fedotov A. E., Makhalov P. V. Experimental demonstration of Smith-Purcell radiation enhancement by frequency multiplication in open cavity // Appl. Phys. Lett. – 2011. – Vol. 98, №6. – 061503.
9. Одаренко Е.Н., Шматько А.А. Нелинейная теория неавтономных многомерных электронно-волновых систем миллиметрового диапазона (усилители и умножители) // Успехи современной радиоэлектроники. – 2007. – № 10. – С. 33-45.
10. Одаренко Е.Н., Шматько А.А. Нелинейная теория СВЧ генераторов О-типа с неоднородным магнитостатическим полем (двухмерная модель) // Радиотехника и электроника. – 1994. – 39. – №4. – С. 653-661.

УДК 517.9:53

## ЭФФЕКТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН $TE$ ИЛИ $TM$ В ВОЛНОВЕДУЩИХ КАНАЛАХ С $TEM$ -ВОЛНОЙ

В.В. Щербак

Институт Радиофизики и электроники НАН Украины., 61085, Харьков, ул. Ак. Проскуры 12,  
тел.: (057) 7203-393, e-mail: shcherbak@ire.kharkov.ua

Поступила в редакцию 5 июня 2013 г.

В работе решена проблема оптимизации для эффективной передачи энергии  $TM$ -или  $TE$ -волны с заданным номером  $p$  в волну  $TEM$  и обратно на каскаде из трех разнопериодных ленточных диафрагм в плоском волноводе (или для разнопериодных ленточных решеток в свободном пространстве). Исследовано также взаимодействие между двумя высшими волнами в волноведущем канале с волной  $TEM$ . Благодаря раздвоению диафрагм и диэлектрическим включениям удалось улучшить энергетику и широкополосность устройств.  
**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** разнопериодные диафрагмы, решетки, чистый спектр, плосковершинная АЧХ.

У роботі вирішена проблема оптимізації для ефективної передачі енергії  $TM$ - або  $TE$ -хвилі з заданим номером  $p$  у хвилю  $TEM$  або зворотно на каскаді з трьох різноперіодних стрічкових діафрагм у плоскому хвилеводі (або для різноперіодних стрічкових ґраток у вільному просторі). Досліджена також взаємодія між двома вищими хвилями з різними індексами у хвилеведучому каналі з  $TEM$ -хвилею. Завдяки роздвоєнню діафрагм та діелектричним вставкам вдалось покращити енергетику та широкополосність пристроїв.  
**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** різноперіодні діафрагми, ґратки, чистий спектр, плосковершинна АЧХ.

In work the optimization problem for efficient transmission of energy  $TM$ - or  $TE$ -wave with given number  $p$  in the wave  $TEM$  or back on the cascade of three unequally-period strip diaphragms in planar waveguide is solved (and also for strip gratings in free-space). Or such problem is strictly solved for coupling between two higher waves in the waveguide channel with  $TEM$ -wave. Bifurcation of diaphragms and the dielectric insertions have given in improving energetics and broadbandness of devices.

**KEY WORDS:** periodical diaphragms, grating, pure spectrum, flat-topped amplitude-frequency response.

### ВВЕДЕНИЕ

Известны устройства для эффективной передачи энергии возбуждающей низшей  $TE_{1,0}$ -волны только в одну из возбужденных высших  $TE_{n,0}$ -волн прямоугольного волновода [1-2]. Например, –каскад разнопериодных ленточных диафрагм [1]. Для нужд антенной техники и др. приложений необходима разработка аналогичных преобразователей для плоских волн свободного пространства. Т.е. нужно решить проблему конвертеров волн для волноведущих каналов с  $TEM$ -волной для эффективной передачи ее энергии в  $TE$ - либо в  $TM$ -волны. Этой проблеме посвящена данная работа. Исследуется также взаимодействие двух высших волн в канале с  $TEM$ -волной. Наша цель –обеспечить широкополосность разрабатываемых устройств и их равномерную амплитудно-частотную характеристику (АЧХ).

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ

Упомянутая конверсия плоских волн свободного пространства возможна в каскадах разнопериодных ленточных решеток (по аналогии с диафрагмами [1]). Однако, вместо решеток мы вновь рассмотрим каскад диафрагм в плоском волноводе (например, структуру рис.1.а). Только теперь стенки волновода

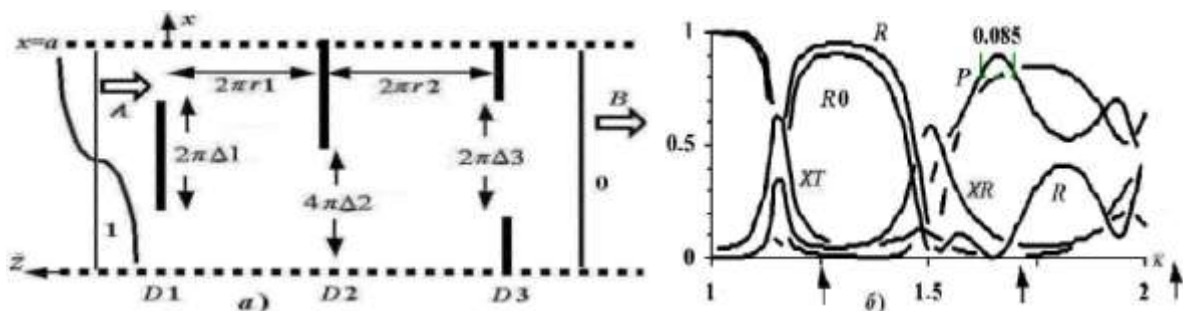


Рис.1. Конверсия  $TE_1 \Rightarrow TE_0$ : а) структура; б) зависимость от параметра  $\kappa$  величин  $P$  –КПД  $R$  –отражения  $TE_1$ ;  $XR$  и  $XT$  –паразитных потоков ( $TE_0$  в отраженном поле и прохождение  $TE_1$ )

предполагаем выполненными из идеального магнетика (в отличие от металлических в [1]). Это равносильно анализу рассеяния волн свободного пространства на решетках с неограниченной апертурой.

В структуре рис.1.а волна  $TEM=TE_{0,0}$  является низшей среди волн  $TE_{n,0}=TE_n$ . Оптимизируем ее взаимодействие с одной из высших  $TE$ -волн. В данном случае с  $TE_1$ -волной. Здесь (и в рассматриваемых далее ситуациях) ищем поля дифракции волн в частичных областях структуры в виде разложений в одномерный спектр волноводных волн, поляризованных по оси  $Oy$  (перпендикулярно к плоскости рисунка). Соответственно выразим искомые поля (их компоненту  $E_y$ ) через функцию

$$P_k = \sum_n \{ C_n^k \exp[i\gamma_n (Z_{k-1} - z)] - D_n^k \exp[i\gamma_n (z - Z_k)] \} \exp[i\gamma_n x]; \quad \gamma_n = \sqrt{\kappa^2 - n^2}, \quad (1)$$

$$C_n^k + \Omega D_n^k e_n^k = C_n^{k-1} e_n^{k-1} + \Omega D_n^{k-1} e_n^{k-1}; \quad D_n^3 = 0; \quad e_n^k = \exp(2i\gamma_n r_k \pi/a); \quad Z_1 = -r_1; \quad Z_2 = -r_1 - r_2; \quad r_k = r_1 \wedge r_2, \quad (2)$$

где  $\kappa=2a/\lambda$  – безразмерное волновое число ( $a:=2\pi$ ),  $\lambda$  – длина волны. Амплитуды полей связаны здесь как  $C, D_n^k = C, D_n^k$ , в отличие от  $C, D_n^k = -C, D_n^k$  в [1], что и предполагает наличие нулевой ( $TEM$ ) волны. В (2) имеем также фактор  $\Omega=\pm 1$ , зависящий от поляризации поля. Пока  $\Omega=-1$ , однако, далее при переходе к аналогичной задаче для волн  $TM_{n,0}=TM_n$  будем полагать  $\Omega=1$ . Поля (1) и их градиенты сшиваем на границах  $z=0, Z_1, Z_2$ . Это позволяет определить коэффициенты  $\delta_m^n + R_{m \leftarrow n}^k \Omega = T_{m \leftarrow n}^k$  многомодового рассеяния на каждой  $k$ -й диафрагме каскада отдельно из эффективных алгоритмов [3]. Приступим далее к построению строгих алгоритмов анализа рассеяния волн на каскаде в целом. Для этого используем метод матричных операторов [4]. Один из вариантов его применения сводится к таким двум этапам: Вначале положим нулю величину  $Z_1=-r_1$  и рассмотрим поля (1) в структуре рис.1.а при отсутствии диафрагмы  $D1$  и падении слева на узлы “ $D2+ D3$ ” любой  $p$ -й волны спектра. В соответствии с [4] амплитуды полей  $P_k$  для  $k=2 \div 4$  вычислим из экспоненциально сходящейся системы уравнений (СЛАУ)

$$C_m^3 = (\delta_m^p + \delta_m^{-p} \Omega) T_{m \leftarrow p}^2 + \sum_n R_{m \leftarrow n}^2 D_n^3 e_n^2, \quad D_m^3 = \sum_n R_{m \leftarrow n}^3 C_n^3 e_n^2, \quad (3)$$

$$R_{m \leftarrow p}^K \equiv A_m \equiv D_m^2 = (\delta_m^p + \delta_m^{-p}) R_{m \leftarrow p}^2 + \sum_{n \geq 0} T_{m \leftarrow n}^2 D_n^3 e_n^2, \quad T_{m \leftarrow p}^K \equiv B_m \equiv C_m^4 = \sum_{n \geq 0} T_{m \leftarrow n}^3 C_n^3 e_n^2, \quad (4)$$

где  $R_{m \leftarrow p}^\Sigma$  и  $T_{m \leftarrow p}^\Sigma$  – элементы матриц рассеяния на каскаде “ $D2+ D3$ ”. На втором этапе аналогично

$$C_m^2 = (\delta_m^p + \delta_m^{-p} \Omega) T_{m \leftarrow p}^1 + \sum_n R_{m \leftarrow n}^1 D_n^2 e_n^1, \quad D_m^2 = \sum_n R_{m \leftarrow n}^\Sigma C_n^2 e_n^1 \quad (5)$$

$$A_n \equiv D_m^1 = (\delta_m^p + \delta_m^{-p}) R_{m \leftarrow p}^1 + \sum_{n \geq 0} T_{m \leftarrow n}^1 D_n^2 e_n^1, \quad B_n \equiv C_m^4 = \sum_{n \geq 0} T_{m \leftarrow n}^\Sigma C_n^2 e_n^1 \quad (6)$$

для совокупности узлов “ $D1$ ” и “ $D2+ D3$ ”, чтоб рассчитать для них амплитуды отражения  $A_n$  и прохождения  $B_n$ . Т.е. поставленная задача решена и допускает усечение полученных СЛАУ (3) и (5) до порядка 4 (в двухмодовом диапазоне  $1 < \kappa < 2$ , где при  $r_k > 0$  учитываем во взаимодействиях лишь волны  $TE_0$  и  $TE_1$ ).

### ОПТИМИЗАЦИЯ КОНВЕРСИИ ВОЛН $TE_1 \Rightarrow TEM$ И ВОЛН $TM_1 \Rightarrow TEM$

В структуре рис.1.а диафрагмы  $D1$  и  $D3$  не связывают волны  $TE_0=TEM$  и  $TE_1$  (эпюры “0” и “1” на рисунке). И они преимущественно пропускают волну  $TE_1$  либо  $TEM$ . Смеситель  $D2$  связывает эти волны. Так что возможен выбор [1] параметров  $\Delta k$  и резонансных значений дистанций  $r_1$  и  $r_2$  между диафрагмами, который обеспечивает в двухмодовом диапазоне  $1 < \kappa < 2$  возможность максимальной передачи энергии волны  $TEM$  вправо от каскада при возбуждении структуры волной  $TE_1$  слева. На рис.1.б это соответствует полосе  $1.62 < \kappa < 1.70$  с КПД конверсии  $P > 80\%$  и его максимуму  $\sim 85\%$  (для  $\Delta k = 0.45, -0.4, 0.45$  и  $r_k = 0.65, 0.5$ ). В силу теоремы взаимности полученные данные для конверсии  $TE_1 \Rightarrow TEM$  совпадают с данными конверсии  $TEM \Rightarrow TE_1$  при падении  $TEM$ -волны справа. Кривая  $R0$  на рис.1.б соответствует отражению волны  $TEM$  при ее падении (вместо  $TE_1$ ) на каскад справа. Резонансные минимумы на кривых  $R0$  и  $R$  отражения волн служат указателем для поиска максимума величины  $P$ . Удалось также вычислить (из уравнения  $\det[\text{СЛАУ}(5)]=0$ ) комплексные частоты собственных колебаний в рассмотренных структурах и соответствующие им значения безразмерного волнового числа  $\kappa$ . Их вещественные части указаны стрелками под осью  $\kappa$  на рисунках. Они также – репер для нашего поиска оптимальных режимов конверсии волн. Максимумам двугорбой кривой для величины  $P$  на рис.1.б соответствуют дистанции  $r_k$  каскада рис.1, при которых справа от  $D2$  имеем (при  $1 < \kappa < 2$ ) один резонанс для  $TE_1$ -волны и слева от  $D2$  (где менее добротны резонансы на  $TE_1$ -волне) имеем (при  $r_2 \ll r_1$ ) лишь один резонанс для волны  $TEM$ . При неоптимальных  $r_k$  (малых или больших) либо нет первого из указанных добротных резонансов (снижено

взаимодействие мод), либо резонансов на обоих модах будет слишком много (сужаются резонансные пики). От выбора параметров  $\Delta k$  зависит интенсивность взаимодействия мод на  $D2$  и их фильтрация на  $D1$  и  $D3$  (и отсюда – форма искомой резонансной кривой). При иных (чем для рис.1.б) оптимальных значениях параметров  $\Delta k$  и  $r_k$  удается превратить двугорбую кривую для  $P$  в плосковершинную (или в близкую к ней слабо-двугорбую либо туповершинную). Однако, здесь – при более низком уровне КПД, и это вызывает необходимость поиска альтернативных конструктивных решений (см. далее).

Заменяем теперь в структуре рис.1.а стенки из идеального магнетика  $\chi=0$  и  $2\pi$  на металлические (рис.2.а). Рассмотрим задачу о преобразовании в волну  $TEM=TM_0$  волны  $TM_1$ , набегающей слева. (Те же эпюры “1” и “0” для компоненты поля  $H_y$  вместо  $E_y$  ранее). Изменив согласно принципу двойственности [4] алгоритм расчета величин  $R_{m \leftrightarrow n}^k$  для (3)-(6), проведем оптимизации для  $TM$ -волн. Получим данные рис.2.б с  $0.9534 > P > 0.9$  в полосе 4.8% (для  $\Delta k=0.45, 0.6, 0.9$  и  $r_k=0.7, 0.125$ ). При иных значениях параметров  $\Delta k$  и  $r_k$  (0.6, 0.4, 0.85, 0.65, 0.1) имеем  $0.819 > P > 0.8$  в более широкой полосе частот 22% при плосковершинной зависимости КПД от  $k$  (кривая  $P2$  на рис.2.б). Из принципа зеркальных отражений переходим отсюда к каскаду разнопериодных решеток в свободном пространстве. Здесь, как и выше для волн  $TE$ , возникли трудности с обеспечением плосковершинной и отсюда – широкополосной АЧХ конвертора.

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ВЫСШИХ ВОЛН ОДИНАКОВОЙ И РАЗНОЙ ЧЕТНОСТИ

Зеркальные отражения (удвоение и т.д.) структур рис.1.а или рис.2.а по  $x$  тривиально породят задачу о конверсии  $M \Rightarrow 0$  вместо  $1 \Rightarrow 0$ . Рассмотрим более общий случай  $p > 0$  конверсии  $M \Rightarrow p$ . При  $p > 0$  нет тривиальности, отмеченной для  $p=0$ . Проблема разрешима. Она упрощается, если номера  $M$  и  $p$  нечетны. Так, конверсию  $5 \Rightarrow 1$  или  $1 \Rightarrow 5$  мы осуществим для  $TM$ -волн в структуре рис.3.а с 10-реберными селекторами и 6-реберным смесителем (при стенках волновода из идеального магнетика). Аналогично для волн  $TE$  при металлических стенках волновода. При иных нечетных  $M$  и  $p$  мы берем смесительную периодическую диафрагму  $D2$  с  $M+p$  полупериодами на сечении волновода и фильтрующие  $D1$  и  $D3$  с  $2M$  полупериодами (для  $M > p$ ). При таких периодичностях диафрагм обеспечиваем разрежение спектра рассеянных волн, которое устраняет в рабочем диапазоне  $M < k < M+2p$  паразитные волны (вследствие разреженности матриц  $R_{m \leftrightarrow n}^k$  и  $T_{m \leftrightarrow n}^k$ ). Заодно сохраняем порядок усечения СЛАУ (3) и (5) на уровне 4.

Данные оптимизации режима  $5 \Leftrightarrow 1$  для  $TM$ -волн значительно лучше, чем выше для  $0 \Leftrightarrow 1$  и составляют 30% по полосе для  $0.8 < P < 0.914$  либо 12% по полосе для  $P > 0.9$ . Для режима  $3 \Leftrightarrow 1$  в более простых каскадах, чем на рис.3.а имеем полосу 29% для  $0.8 < P < 0.85$ . Для режима  $7 \Leftrightarrow 1$  в более сложном, чем на рис.3.а, каскаде  $M+p=8$  и  $2M=14$  имеем полосу 42% для  $0.8 < P < 0.94$  либо 18% для  $P > 0.9$ . В этих случаях (и для режима  $TM_9 \Leftrightarrow TM_1$  в более сложной структуре с  $M+p=10$  и  $2M=18$ ) АЧХ конверторов близка к плосковершинной. На рис.3.б показаны данные для режима  $9 \Leftrightarrow 1$   $TM$ -волн. Здесь АЧХ конвертора туповершинная с полосой 30% для  $0.8 < P < 0.914$  либо 16.5% для  $P > 0.9$ .

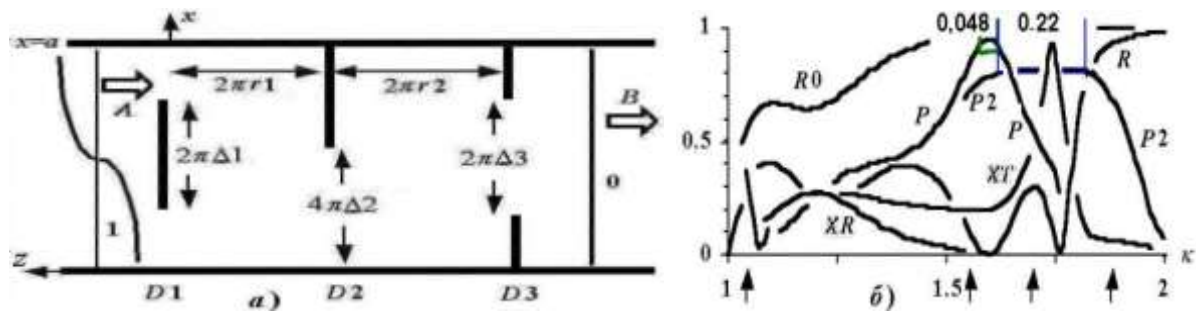


Рис.2. Конверсия  $TEM \Leftrightarrow TM_1$  а) каскад диафрагм; б) данные оптимизации.

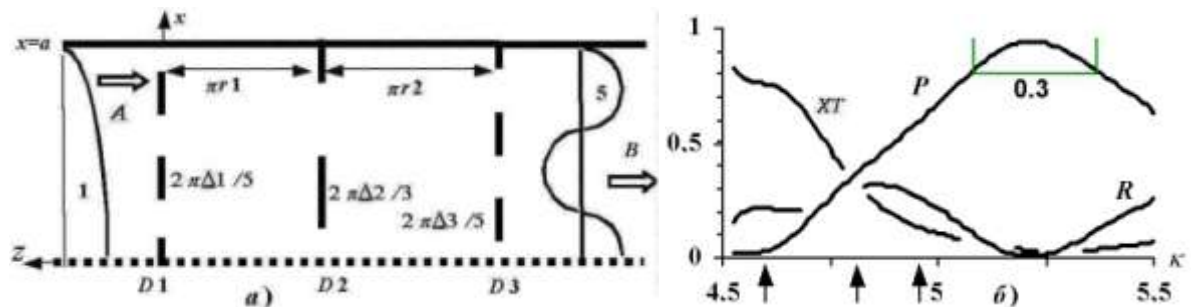


Рис.3. а) каскад (верхняя  $\pi > \chi > 0$  часть) для режима  $TE_5 \Leftrightarrow TE_1$ ; б) данные режима  $TM_9 \Leftrightarrow TM_1$ .



Такого же порядка данные для нечетных  $TE$ -волн. Для режимов  $7 \leftrightarrow 1$  и  $9 \leftrightarrow 1$  имеем согласно рис.4 полосу 16.5% для  $0.9 < P < 0.979$  и 17.5% для  $0.9 < P < 0.907$  (вместо полос 18% и 16.5% для  $P > 0.9$  волн  $TM$ ).

Выше в этом разделе рассмотрены задачи о структурах, которые (вместе с полями) симметричны относительно середины сечения волновода. Такие задачи сводятся к задачам о половинках этих диафрагм в волноводах половинной ширины (см. рис.3.а) с различными идеальными импедансами его стенок  $0$  и  $\infty$ . Такого упрощения нет, если номера  $p$  и  $M$  возбуждающей и возбужденной волн имеют разную четность. Пример этого – структура рис.5.а для конверсии волн  $TE_1$  и  $TE_2$  в волноводе с немагнитическими стенками. Обе эти волны –высшие (в отличие от волн  $TE_1$  и  $TE_2$  в металлических волноводе [1]). Анализ процессов в этой структуре предполагает учет четных и нечетных пространственных гармоник поля. Из них все кроме 1-й и 2-й подавляются выбранной нами периодичностью диафрагм. Расчет из СЛАУ (5) при найденных оптимальных  $\Delta k$  и  $r_k$  привел к полосе 0.225 для  $0.8 < P < 0.936$  или к полосе 0.06 для  $P > 0.9$ . Аналогичные поиски проведены для режима  $2 \leftrightarrow 3$  в волноводе со стенками из идеального металла (полоса 0.77 для  $0.9 < P < 0.97$ ) и для режима  $2 \leftrightarrow 3$  в каскадах типа рис.5.б.

**МОДИФИКАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ.**

Сравнение данных рис.1-3 и из работы [1] свидетельствует о худших результатах по широкополосности или КПД для рассматриваемых режимов конверсии волн, касающихся волны  $TEM$  (из-за равномерности ее фазового фронта, затрудняющей выборочную фильтрацию). Т.е., возникли трудности обеспечения плосковершинной (и отсюда широкополосной) АЧХ конверторов. Нужен поиск модифицированных конструкций таких устройств для преодоления этих трудностей. Одна из них изображена на рис.6.а С применением такой конструкции можно надеяться на усиление взаимодействия волн  $TEM$  и  $TM_1$  на смесителе  $D2$  в связи с резонансными явлениями в слое диэлектрика внутри раздвоенной диафрагмы  $D2$ .

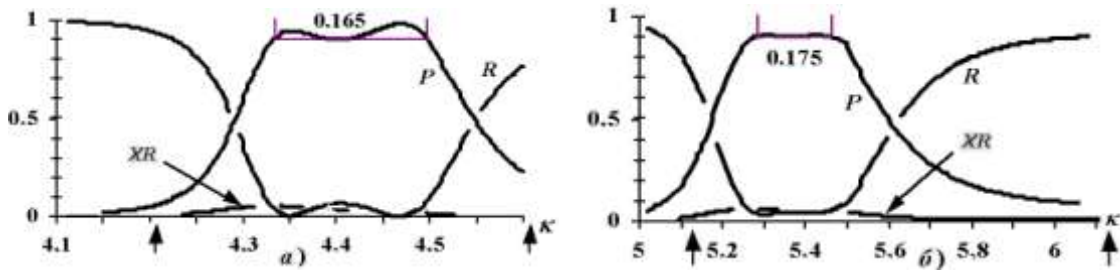


Рис.4. Данные конверсии для  $TE$ -волн а)  $7 \leftrightarrow 1$  б)  $9 \leftrightarrow 1$

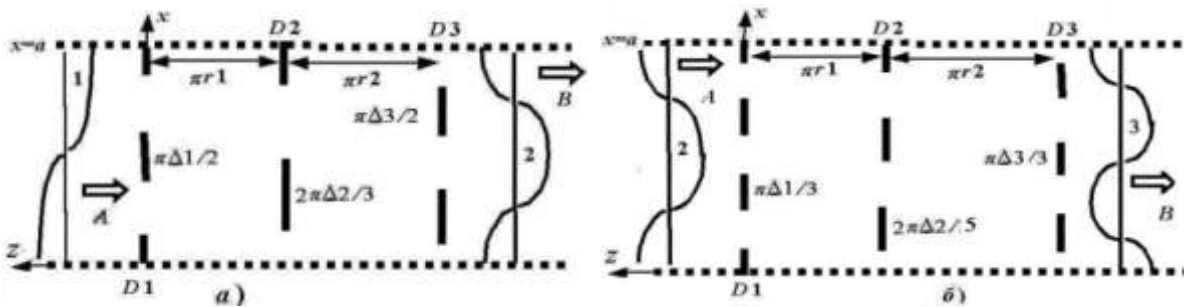


Рис.5. Каскады диафрагм для конверсии  $TE$ -волн: а)  $2 \leftrightarrow 1$ , б)  $3 \leftrightarrow 2$

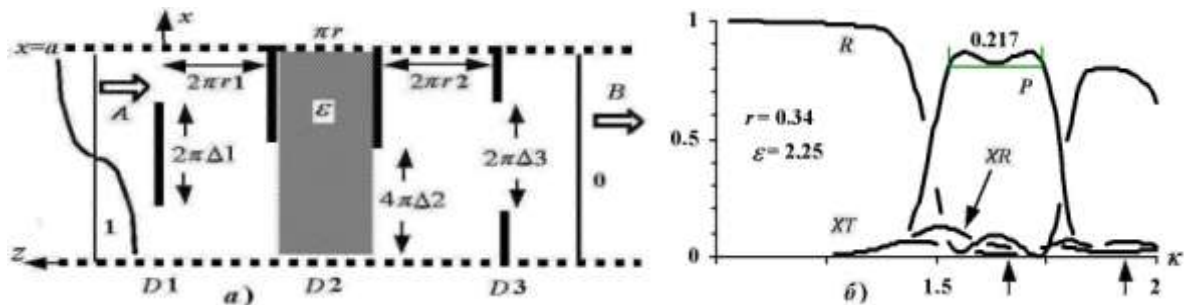


Рис.6. а) каскад с раздвоенной диафрагмой  $D2$ ; б) данные режима  $TE_1 \leftrightarrow TEM$ .

(Здесь алгоритмы [3] дополнили построениями [5]). Из отраженных на рис.6.б результата расчетов, видим, что при КПД $>0.8$  рабочую полосу конверсии  $TE_1 \leftrightarrow TEM$  удалось увеличить от 8.5% (см. рис.1.б) до 21.5% от ширины двухмодового диапазона значений  $k$  при проницаемости диэлектрика  $\varepsilon=2.25$ . Либо (рис.7) – до 9.5% при вакууме ( $\varepsilon=1$ ) в раздвоенной диафрагме и до 20% при раздвоении слоя среды в  $D2$ .

Другая идея состоит в обрамлении одиночной смесительной диафрагмы  $D2$  (в каскадах рис.1.а или рис.2.а) двойным слоем радиопрозрачной среды с  $\varepsilon$  или  $\mu \neq 1$ . Это привело (рис. 7,б) к полосе 20% для  $P>0.8$  в режиме  $TE_1 \leftrightarrow TEM$ . Аналогично в режиме  $TM_1 \leftrightarrow TEM$ . получили (при  $\mu=2$ ) полосу 9.5% для  $P>0.8$ . Реализована также идея модифицирования фильтра  $D3$ . В том числе – слоем диэлектрика с оптической плотностью меньшей единицы, достаточной для запердельности  $TE_1$  или  $TM_1$  волны и отсюда – к снижению ее прохождения. Достигнуто КПД $>0.9$  в полосе часто 9% от ширины двухмодового диапазона.

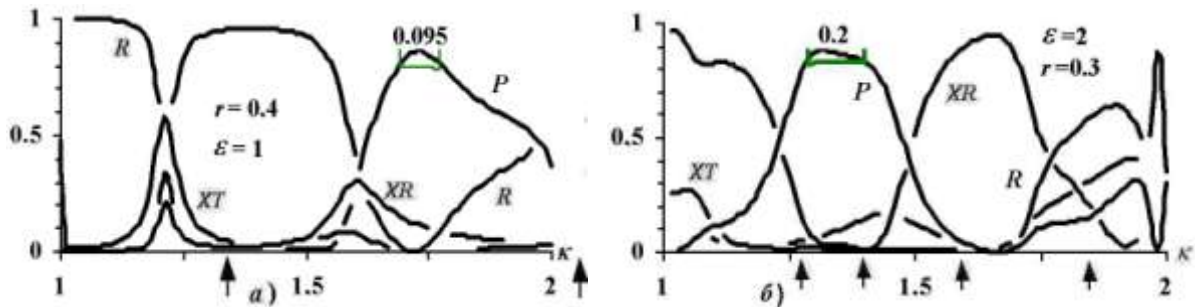


Рис.7. Данные  $TE_1 \leftrightarrow TEM$  а) при раздвоении диафрагмы  $D2$ ; б) при двойном слое диэлектрика в узле  $D2$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После разработки [1] конверторов волн  $TE_{p,0} \leftrightarrow TE_{n,0}$  из каскада разнопериодных ленточных диафрагм в плоском металлическом волноводе ( $n, p \geq 1$ ) в данной работе проведены аналогичные исследования по синтезу конверторов волн  $TE$  или  $TM$  в каналах с одномерным спектром пространственных гармоник, содержащим нулевую ( $TEM$ ) волну, т.е. в плоском волноводе со стенками с бесконечным (для волн  $TE$ ) или нулевым импедансом. Выяснено, что из-за однородного фазового фронта  $TEM$ -волны затруднено создание узлов эффективной селекции на входе и выходе устройства двух взаимодействующих на срединном узле волн. Это ухудшает характеристики конвертора (по КПД и рабочей полосе частот) по сравнению с режимами взаимного преобразования двух высших ( $n, p > 0$ ) волн (рассмотренными здесь и в [1]). Исследованы альтернативные конструкции для обеспечения плосковершинной и отсюда широкополосной АЧХ конвертора при более высоких КПД устройства ( $>90\%$  вместо  $>80\%$ ). А именно, рассмотрены каскады разнопериодных диафрагм с раздвоением некоторых из них или модифицированные слоями радиопрозрачной среды. Улучшения есть. Однако нужен дальнейшее совершенствование конструкций таких устройств через включение и оптимизацию иных резонансных и селективных элементов.

Предпринятый поиск оптимальных режимов конверторов волн интересен для приложений в антенной технике и в узлах для квазиоптических лучеводов, т.к. здесь от диафрагм в волноводе можно перейти к аналогичным каскадам из разнопериодных ленточных решеток с безграничной апертурой.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shcherbak V.V., Pure conversion for high order  $TE_{n,0}$  -modes, effected by a cascade of three strip diaphragms of different periods// Telecom and Radio Eng., Begell House, v.68, 15, 2009, pp. 1121-1138.
2. Kirilenko A. A., Rud' L. A., Tkachenko V. I., Nonsymmetrical  $H$ -Plane Corners for  $TE_{1,0}$ - $TE_{q,0}$  -Mode Conversion in Rectangular Waveguide// IEEE Trans. 2006, MTT-54, 6, pp. 2471-2477
3. Щербак В.В. Розв'язок задач дифракції хвиль на неоднорідностях з довільною кількістю стрічок та щілин на періоді// ДАН УРСР, сер. А, 12, 1982, С.51-54.
4. Шестопалов В.П., Щербак В.В. Матричные операторы в задачах дифракции Теор. откр. рез. // Изв.вуз., Радиофизика, Изд-во Горьк. ун-та, 1968, 11, 2, С. 296 305
5. Шестопалов В.П., Щербак В.В. Неоднородности в прямоугольных волноводах. Высшие типы волн // Радиотехника и электроника, 1966, 11, 4, С.675-683).
6. Щербак В.В., Дифракция э.м. волн на двойной равнощелевой диафрагме с магнитодиэлектриком// Радиотехника. Изд-во ХГУ, 1966, .2, С. 18-29.

УДК 621.385.6

## СТАБИЛИЗАЦИЯ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ВАКУУМНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ СУБМИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

**А.Н. Кулешов**

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины  
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина*

E-mail: [jeanalexkh@gmail.com](mailto:jeanalexkh@gmail.com)

Поступила в редакцию 23 апреля 2013 г.

В работе рассмотрены вопросы стабилизации выходной мощности вакуумных электронных источников электромагнитного излучения субмиллиметрового диапазона. Предложен метод стабилизации выходной мощности на основе пропорционально–интегрально–дифференциального закона регулирования с двумя контурами. На основе метода разработана и реализована схема стабилизации, которая позволяет управлять вакуумным электронным генератором как в режиме со стабилизацией тока пучка с обратной связью по току накала, так и в режиме стабилизации с двумя контурами, одновременно управляя током накала и анодным напряжением трех – электродной пушки. Схема была успешно применена для стабилизации выходной мощности гиротрона на частоту генерации 395 ГГц в непрерывном режиме, предназначенного для спектрального анализа ядерных магнитных резонансов в исследованиях динамической поляризации ядер.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** стабилизация выходной мощности, вакуумные электронные источники, пропорционально–интегрально–дифференциальный регулятор, питч-фактор, трех – электродная магнетронно-инжекторная пушка.

У роботі розглянуто питання стабілізації вихідної потужності вакуумних електронних джерел електромагнітного випромінювання субміліметрового діапазону. Запропоновано метод стабілізації вихідної потужності на основі пропорційно – інтегрально – диференційного закону регулювання з двома контурами. На основі метода розроблено та реалізовано схему стабілізації, що дозволяє управляти вакуумним електронним генератором як у режимі зі стабілізацією струму пучка зі зворотнім зв'язком за струмом розжарювання, так і у режимі стабілізації з двома контурами, одночасно керуючи током розжарювання та анодною напругою трьох – електродної гармати. Схема було успішно застосовано для стабілізації вихідної потужності гиротрона на частоті генерації 395 ГГц у безперервному режимі, що призначено для спектрального аналізу ядерних магнітних резонансів у дослідженнях динамічної поляризації ядер.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** стабілізація вихідної потужності, вакуумні електронні джерела, пропорційно – інтегрально – диференційний регулятор, пітч-фактор, трьох – електродна магнетронно-інжекторна гармата.

Output power stabilization of vacuum electron sources of THz radiation is investigated in the paper. The method based on double PID controller for output power stabilization has been proposed. Based on the method the stabilization scheme, which allows one to control vacuum electron device in the case of beam current stabilization using the feedback by heater current and in the case of double PID control of both heater current and anode voltage, was designed and tested. The scheme was successfully implemented for 395 GHz CW gyrotron designed for DNP NMR experiments.

**KEY WORDS:** output power stabilization, vacuum electron devices, proportional-integral-differential controller, pitch-factor, three-electrode magnetron injection gun.

Проблема освоения субмиллиметрового диапазона остается актуальной, несмотря на интенсивный поиск методов генерации в последние несколько десятилетий [1]. В настоящее время компактные полупроводниковые генераторы и умножители частоты могут достаточно успешно конкурировать с малогабаритными вакуумными источниками вплоть до коротковолновой части миллиметрового диапазона рабочих длин волн. Однако в частотном диапазоне от 100 ГГц и до терагерц мощность твердотельных источников резко падает. Единственными источниками в данном диапазоне с уровнями мощности намного превышающими десятки Ватт в непрерывном режиме генерации являются гироприборы [2]. В то же время наибольшее распространение среди генераторов средней мощности с перестройкой по частоте в широких пределах получили приборы черенковского типа (лампы обратной волны, клинотроны) [3] и приборы на эффекте Смита-Парселла (ледатроны, генераторы дифракционного излучения, оротроны) [4].

Наиболее широкое применение субмиллиметровые источники электромагнитного излучения средней мощности нашли в молекулярной спектроскопии [5]. Поскольку спектральный анализ ядерного



магнитного и электронного спиновых резонансов часто требует достаточно продолжительных исследований, к источникам электромагнитного излучения предъявляются повышенные требования по стабильности параметров генерируемых сигналов в течение нескольких часов непрерывной работы. В данной работе предложен и исследован метод стабилизации генерируемой мощности вакуумных источников субмиллиметрового диапазона с помощью (пропорционально–интегрально–дифференциального) ПИД регулятора для клинотрона с двухэлектродной пушкой и гиротрона с трехэлектродной электронно-оптической системой.

### СИСТЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ МОЩНОСТИ СУБМИЛЛИМЕТРОВОГО КЛИНОТРОНА С ДВУХЭЛЕКТРОДНОЙ ПУШКОЙ

В приборах черенковского типа генерация электромагнитного излучения происходит в результате длительного взаимодействия электронного пучка с поверхностными волнами замедляющих систем. Одним из важных преимуществ таких приборов является электронная перестройка частоты генерируемых колебаний в широком диапазоне за счет дисперсионных свойств замедляющих систем. Однако в субмиллиметровом диапазоне мощность генерируемых колебаний черенковских приборов существенно снижается вследствие уменьшения толщины эффективного слоя ВЧ поля над поверхностью замедляющей системы. С целью повышения мощности генерируемых колебаний в таких приборах применяют «клинотронный» эффект, когда достаточно широкие электронные пучки транспортируются в пространстве взаимодействия под небольшим углом к поверхности замедляющей системы типа гребенки [6]. Для еще большего увеличения эффективности взаимодействия в клинотронах подбирают оптимальный профиль магнитного фокусирующего поля наряду с оптимизацией электронно-оптической системы для формирования интенсивных ленточных электронных пучков [7].

Одними из важных факторов, влияющих на стабильность параметров генерируемых сигналов в клинотронах, являются тепловое воздействие на элементы электродинамической структуры и стабильность параметров высоковольтных источников питания. Так, тепловые уходы элементов конструкции пушки и электродинамической системы приводят к уходу частоты и изменению мощности генерируемых сигналов, локальный перегрев элементов замедляющей системы и коллектора может приводить к ухудшению вакуума в приборе и, как следствие, к ухудшению параметров эмиссии и электронных пучков. Требование к стабильности высоковольтного источника питания обусловлено электронной перестройкой частоты колебаний и дисперсионными свойствами гребенки, и является существенным ограничением на пути увеличения стабильности частоты генерации.

В связи с тем, что мощность генерируемого излучения клинотрона зависит от большого числа параметров, как было показано выше, наиболее эффективным методом для ее стабилизации является использование метода ПИД регулятора [8]. На рис. 1 представлена схема стабилизации мощности клинотрона с ПИД регулятором в виде отдельного блока, который управляет высоковольтным блоком питания и блоком управления накалом.

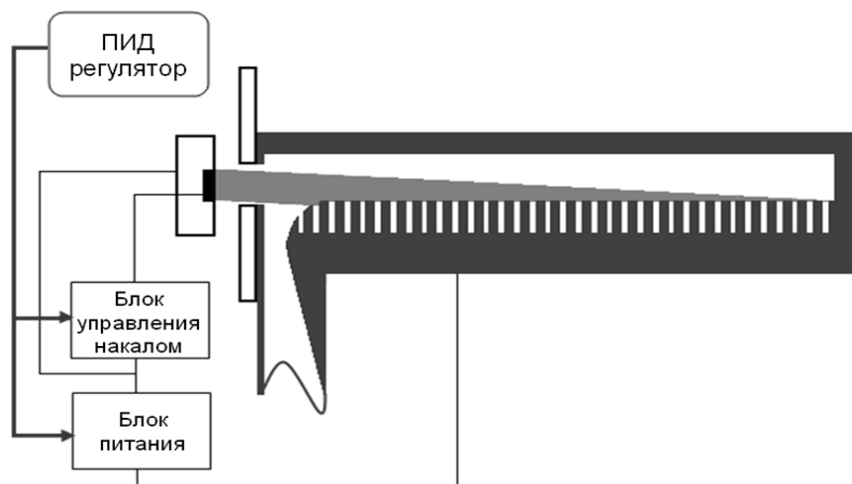


Рис. 1. Схема стабилизации мощности клинотрона с ПИД регулятором.

С целью стабилизации мощности излучения клинотрона наиболее просто реализуется схема стабилизации тока пучка путем управления питанием накала в случае стабилизированного высоковольтного питания. Действительно, поскольку в клинотроне электронная перестройка по частоте реализуется путем изменения ускоряющего напряжения, то при стабилизированном значении

напряжения клинотрон будет работать на фиксированной частоте в случае отсутствия тепловых уходов элементов электродинамической системы прибора, что решается применением системы водяного охлаждения. В таком случае стабилизация тока пучка приведет к стабилизации мощности в случае отсутствия поглощения мощности остаточными газами в области взаимодействия. Стабилизировать значение тока пучка можно путем управления термоэлектронной эмиссией катода, т.е. током накала в случае резистивного подогревателя. Поскольку управление температурой эмиттера при изменении тока подогревателя является достаточно инерционным процессом, то в ПИД регуляторе достаточно использовать большой пропорциональный коэффициент по сравнению с интегральным и дифференциальным:

$$I_{fil} = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{d}{dt} e(t); K_p \gg K_i, K_d; e(t) = I_{beam0} - I_{beam}(t)$$

Также инерционность такой системы накладывает существенные ограничения на уровень стабильности мощности в случае быстрых ее изменений.

Более точная схема по стабилизации мощности излучения путем управления током пучка реализуется с помощью волноводного ответвителя и измерителя мощности, т.е. контролируется не анодный ток блока питания, а непосредственно генерируемая мощность. Измеренное значение мощности сравнивается с заданным значением и обрабатывается в ПИД регуляторе, который управляет блоком накала. В случае отсутствия быстрых флуктуаций мощности в приборе такая схема представляется наиболее эффективной.

### СИСТЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ МОЩНОСТИ СУБМИЛЛИМЕТРОВОГО ГИРОТРОНА С ТРЕХЭЛЕКТРОДНОЙ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

В приборах гиротронного типа в энергию электромагнитного излучения переходит энергия вращательного движения электронов винтового электронного пучка (ВЭП). С целью формирования винтовых электронных пучков с достаточной энергией вращательного движения в гиротронах традиционного типа применяется магнетронно-инжекторная пушка (МИП), помещенная в адиабатическое нарастающее магнитное поле. Таким образом, мощность излучения гиротрона зависит не только от приложенного магнитного поля, но также и от профиля адиабатического магнитного поля, т.е. от отношения значения магнитного поля в области резонатора к магнитному полю в области пушки. Также мощность излучения зависит не только от полной энергии электронов, а и от питч-фактора, т.е. отношения поперечной и продольной скоростей в МИП [9]:

$$P = \eta IU, \quad \eta = \eta_{\perp} \frac{g^2}{(1+g^2)} [(1-Q/Q_{ohm})(U_0 - \Delta U)]/U_0$$

$$\eta \approx \frac{0.26 g^{3/2} v_s^{5/4} (\lambda^{5/2} P_{ohm})^{3/4}}{(1+g^2)^{1/2} m^{1/4} U_0^{1/2} P^{1/2}}$$

где  $\eta$  - коэффициент полезного действия,  $g$  - питч-фактор,  $v_s$  - корень функции Бесселя,  $\lambda$  - длина волны излучения,  $P_{ohm}$  - омические потери в резонаторе,  $m$  - азимутальный индекс моды,  $U_0$  - напряжение катода,  $P$  - мощность потерь при выводе излучения из резонатора.

Для обеспечения работы гиротрона с оптимальными параметрами применяют кроме соленоида в области резонатора еще и дополнительные катушки в области пушки, а также трех - электродную электронно-оптическую систему, что позволяет эффективно регулировать адиабатическое нарастающее магнитное поле и питч-фактор. Таким образом, для стабилизации мощности излучения гиротрона в течение длительного времени необходимо учитывать еще большее число параметров в отличие от клинотрона. Вместе с тем использование трех - электродной МИП позволяет использовать схему ПИД регулятора с двумя контурами: один контур для стабилизации тока пучка путем управления током накала, а второй - для стабилизации выходной мощности путем управления анодным напряжением при постоянном катодном напряжении. Увеличение разности между катодным и анодным напряжениями ведет к увеличению питч-фактора, и, следовательно, мощности излучения, а при уменьшении разности напряжений, соответственно, будет приводить к уменьшению питч-фактора и мощности. Схема предложенного ПИД регулятора для стабилизации мощности гиротрона приведена на рис. 2.

Предложенная схема была реализована для стабилизации мощности 395 ГГц гиротрона в непрерывном режиме генерации с использованием высоковольтного блока питания и блока управления накалом компании Spellman [10], а ПИД регулятор был выполнен на основе алгоритма в программе NI LabVIEW [11] и преобразователя сигналов NI USB-6363.

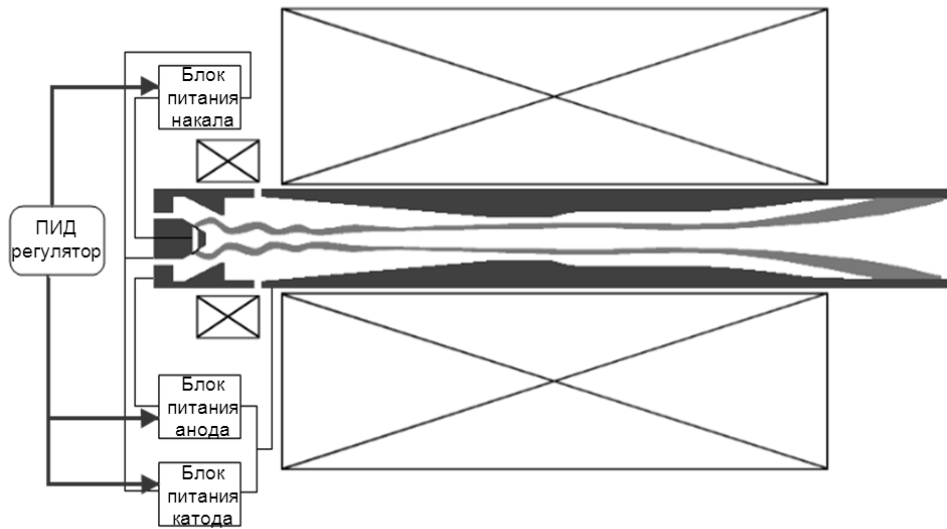


Рис. 2. Схема стабилизации мощности гиротрона с помощью ПИД регулятора с двумя контурами.

На рис. 3 изображены результаты экспериментальных исследований предложенной схемы, управлявшей 395 ГГц гиротроном: верхняя линия соответствует катодному току, стабилизированное значение которого составляло 95 мА; средняя линия соответствует выходной мощности, стабилизированной на уровне 50 Вт. Изменение анодного напряжения и тока накала иллюстрируется двумя нижними линиями на рис. 3. Следует отметить, что при работе гиротрона, управляемого схемой ПИД регулятора с двумя контурами, очень важно правильно выбрать диапазон изменения анодного напряжения, а также коэффициенты ПИД регулятора. В противном случае работа ПИД регулятора с двумя контурами может приводить к развитию неустойчивостей в работе прибора. В результате экспериментальных исследований было показано, что применение ПИД регулятора для стабилизации тока пучка (ПИД регулятор с одним контуром) позволяет уменьшить пульсации мощности до 10%, что было проверено в течение 10 часов непрерывной работы. Применение ПИД регулятора с двумя контурами позволяет уменьшить флуктуации мощности до уровня 1.1% в течение того же времени непрерывной работы. Дальнейшее повышение стабильности мощности излучения возможно при более детальном изучении природы флуктуаций.

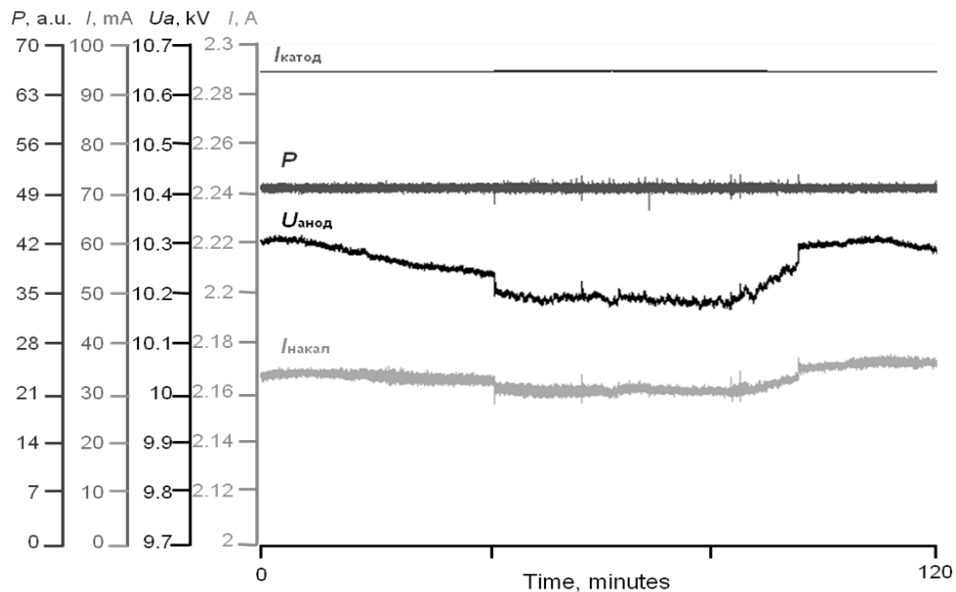


Рис. 3. Схема стабилизации мощности гиротрона с помощью ПИД регулятора с двумя контурами:  $I_{\text{катод}}$  — ток в цепи катода,  $P$  — мощность излучения,  $U_{\text{анод}}$  — напряжение анода,  $I_{\text{накал}}$  — ток накала.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена схема стабилизации выходной мощности вакуумных источников электромагнитного излучения на основе ПИД закона регулирования, которая позволяет эффективно управлять как приборами черенковского типа, так и гиротронного типа с двух- и трех – электродными оптическими системами. Разработанная схема была применена для стабилизации мощности 395 ГГц гиротрона непрерывного действия для экспериментов с динамической поляризацией ядер при ядерном магнитном резонансе. В результате применения схемы была получена генерация со стабильной выходной мощностью с флуктуациями менее 1.1% и стабильной частотой на протяжении более 12 часов непрерывной работы гиротрона.

В заключение автор выражает благодарность проф. Идехаре Т., д.т.н. Ефимову Б.П., к.ф.-м.н. Хуторяну Э.М. и д.ф.-м.н. Глявину М.Ю. за критические замечания и плодотворное обсуждение результатов при рецензировании этой работы, а также Пономаренко С.С. и Кишко С.А. за помощь в оформлении результатов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Booske J., Dobbs R.J., Joye C.D. et.al. "Vacuum Electronic High Power Terahertz Sources" // IEEE Trans. on THz Sci. Tech., 2011, vol. 1, no. 1, P. 54-75.
2. Nusinovich G.S. *Introduction to the Physics of Gyrotrons*. Baltimore: John Hopkins University Press, 2004. 352p.
3. Гершензон Е.М., Голант М.Б., Негирев А.А., Савельев В.С. *Лампы обратной волны миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн* / Под. ред. Девяткова Н.Д.-М.: Радио и связь, 1985. 137с.
4. Шестопапов В.П., Вертий А.А., Ермак Г.П. и др. *Генераторы дифракционного излучения*. Киев: Наук.думка, 1991. 320с.
5. Бенуэлл К. *Основы молекулярной спектроскопии.* / Пер. с англ. под ред. Гордона Е.Б. Москва: Мир, 1985. 193с.
6. Левин Г.Я., Бородкин А.И., Кириченко А.Я., Усиков А.Я., Чурилова С.А. *Клиноотрон*. Под. ред. Усикова А.Я. Киев: Наук. думка, 1992. 200с.
7. Пономаренко С.С., Кишко С.А., Кулешов А.Н. и др. "Транспортировка нерелятивистских электронных потоков в слабонеоднородных магнитных фокусирующих полях для клинотронов субмиллиметрового диапазона" / Вестник ХНУ. Сер. Радиофизика и электроника, № 1038, вып. 21, 2012, с. 77-82.
8. Idehara T., Kuleshov A., Ueda K. and Khutoryan E. "Power-Stabilization of High Frequency Gyrotrons Using a Double PID Feedback Control for Applications to High Power THz Spectroscopy" // J. Infrared, Millimeter and THz Waves, doi: 10.1007/s10762-013-0034-z.
9. Zavolsky N.A., Zapevalov V.E. and Moiseev M.A. "Numerical Study of Processes in the Cavity of the 170 GHz Gyrotron for ITER Operating at the TE<sub>25,10</sub> Mode" // J. Infrared, Millimeter and THz Waves, vol. 21, no. 9, 2000. P. 1381-1396.
10. <http://www.spellmanhv.com/>
11. <http://www.ni.com>

УДК 621.385.6

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ПЛАЗМОННЫХ РЕЗОНАНСОВ НАНОПРОВОДА И НАНОТРУБКИ ИМПУЛЬСНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Н. П. Стогний<sup>1</sup>, Н. К. Сахненко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Харьковський національний університет радіоелектроніки  
14, пр. Леніна, г. Харків, 61166, Україна

<sup>2</sup> Інститут радіофізики та електроніки ім. А.Я. Усикова НАН України  
12, ул. Академіка Проскури, г. Харків, 61085, Україна

Поступила в редакцію 2013 г.

В данной работе теоретически исследуется возбуждение плазмонных резонансов металлического нанопровода и нанотрубки внешними импульсами. Для этого использовался строгий математический метод, основанный на применении преобразования Лапласа, что позволило получить аналитическое представление решения задачи. Нахождение обратного преобразования основано на оценке вычетов в особых точках, которые соответствуют плазмонным резонансам структур.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** плазмонные резонансы, импульсный комплексный точечный источник.

В даній роботі теоретично досліджується збудження плазмонних резонансів металевого нанопроводу та нанотрубки зовнішніми імпульсами. Для цього використовувався строгий математичний метод, заснований на застосуванні перетворення Лапласа, що дозволило отримати аналітичне представлення розв'язку задачі. Знаходження оберненого перетворення засноване на оцінці лишків в особливих точках, які відповідають плазмонним резонансам структур.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** плазмонні резонанси, імпульсне комплексне точкове джерело.

In this paper we theoretically investigate the excitation of plasmon resonances of metallic nanowires and nanotubes by external pulses. To solve the problem, we used a rigorous mathematical method based on the Laplace transform, which allowed us to obtain an analytic representation of the solution. Finding the inverse transformation is based on the evaluation of residues at singular points that correspond to the plasmon resonances of the structures.

**KEY WORDS:** plasmon resonances, complex pulse source point.

Плазмонные колебания возникают на поверхности раздела металл-диэлектрик и обусловлены коллективными осцилляциями электронов. Плазмоны могут существовать только в зоне непрозрачности металлов, когда действительная часть их диэлектрической проницаемости отрицательна. В плазмонике особенно часто используются благородные металлы (серебро, золото) в силу того, что их плазмонные резонансы лежат в видимом диапазоне.

В работах, опубликованных в последние годы, были предложены различные устройства, такие как плазмонные волноводы [1] и субволновые резонаторы [2, 3]. Поверхностные и локализованные плазмоны обладают огромным потенциалом в детектировании объектов малых размеров вплоть до одной молекулы [4, 5], передаче света через субволновые отверстия [6, 7] и получении субволновых изображений [8]. Биосенсоры на плазмонах используют факт их чрезвычайной чувствительности к изменению диэлектрической проницаемости окружающей среды вблизи поверхности металла [9, 10].

В данной статье изучается динамика возбуждения нестационарных плазмонов внешним пучком, который моделируется с помощью импульсного комплексного точечного источника (КТИ) с комплексными координатами [11, 12].

В работе используется строгий математический метод, основанный на применении преобразования Лапласа. Это позволяет для объектов с простой геометрией построить решение аналитически. Поле во временной области находится с помощью вычисления вычетов в особых точках, которые соответствуют собственным частотам структуры, а также оценкой интеграла вдоль разреза. Такой подход гарантирует высокую точность вычислений и позволяет понять и легко трактовать полученные физические результаты.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается двумерная задача возбуждения плазмонов на границе металлического нанопровода и нанотрубки нестационарным внешним пучком, который моделируется с помощью КТИ. В основе такой модели лежит идея аналитического продолжения функции поля обычного точечного источника в комплексное пространство [11]. Рассматривается случай перпендикулярной поляризации.

Сначала предположим, что источник расположен в точке с действительными координатами, представленной радиус-вектором  $\vec{\rho}_s$ . Используя выражение для двумерной функции Грина во временной области

$$g(t, t', \vec{\rho}, \vec{\rho}_s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta(t-t' - |\vec{\rho} - \vec{\rho}_s|/c)}{\sqrt{(t-t')^2 - |\vec{\rho} - \vec{\rho}_s|^2/c^2}}, \quad (1)$$

где  $\theta(\dots)$  - единичная функция Хевисайда, можно записать выражение для магнитного поля в свободном пространстве

$$h_0(t, \vec{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dt' \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\theta(t-t' - |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|/c)}{\sqrt{(t-t')^2 - |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|^2/c^2}} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'} \hat{j}(t', \vec{\rho}'). \quad (2)$$

Если источник расположен в действительной точке пространства, то  $\hat{j}(t, \vec{\rho}) = j(t) \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_s) / |\vec{\rho} - \vec{\rho}_s|$ , где  $\delta(\dots)$  - дельта функция Дирака, то

$$h_0(t, \vec{\rho}) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_0^\infty dt' \frac{\theta(t-t' - |\vec{\rho} - \vec{\rho}_s|/c)}{\sqrt{(t-t')^2 - |\vec{\rho} - \vec{\rho}_s|^2/c^2}} \frac{\partial}{\partial t'} j(t'). \quad (3)$$

Преобразование Лапласа  $F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$  выражения (3) имеет вид

$$H_0(p, \vec{\rho}) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} K_0 \left( \frac{p}{c} |\vec{\rho} - \vec{\rho}_s| \right) p J(p), \quad (4)$$

где  $J(p)$  - изображение функции  $j(t)$ ,  $H_0(p, \vec{\rho})$  - изображение функции  $h_0(t, \vec{\rho})$ ,  $K_0(\dots)$  - модифицированная функция Бесселя второго рода. Предположим далее, что вектор  $\vec{\rho}_s$  является комплексным  $\vec{\rho}_s = \vec{\rho}_{cs}$ , где  $\vec{\rho}_{cs}$  определяется выражением:

$$\begin{cases} x_{cs} = x_0 + ib \cos \beta \\ y_{cs} = y_0 + ib \sin \beta, \end{cases} \quad (5)$$

$x_0, y_0, b, \beta$  - действительные числа. В этом случае расстояние между точкой источника и точкой наблюдения тоже является комплексным  $|\vec{\rho} - \vec{\rho}_{cs}| = \sqrt{(x - x_{cs})^2 + (y - y_{cs})^2}$ .

Чтобы продемонстрировать направленный характер поля КТИ, применим асимптотические формулы для функции Бесселя при большом значении аргумента

$$K_0 \left( \frac{p}{c} |\vec{\rho} - \vec{\rho}_{cs}| \right) \approx \frac{\pi}{\sqrt{2\pi \frac{p}{c} \rho}} e^{-\frac{p}{c}(\rho - \rho_0)} e^{\frac{p}{c} ib \cos(\varphi - \beta)}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Направленность излучения становится очевидной, если перейти к частотному представлению с помощью подстановки  $p = i\omega$ . Очевидно, что уходящая волна экспоненциально растет, когда  $\cos(\varphi - \beta) = -1$ , т.е.  $\varphi = \pi + \beta$ , и экспоненциально убывает, если  $\cos(\varphi - \beta) = 1$ ,  $\varphi = \beta$ . В свободном пространстве вещественных координат КТИ моделирует луч, исходящий из апертуры с центром в точке  $\rho_0 = (x_0, y_0)$  и шириной, определяемой величиной параметра  $b\omega/c$ , направление излучения луча определяется углом  $\varphi = \pi + \beta$ .

При вычислении функции оригинала, следует модифицировать формулу обращения Меллина следующим образом

$$f(t, \vec{\rho}, \vec{\rho}_{cs}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(p, \vec{\rho}, \vec{\rho}_{cs}) e^{p(t-t_1)} dp, \quad (7)$$

где  $t_1 = -ib$  при  $\text{Im } p > 0$ , и  $t_1 = ib$  при  $\text{Im } p < 0$  имеет смысл комплексного временного запаздывания.

Рассмотрим нестационарную динамику поверхностных плазмонов, возбуждаемых импульсным КТИ на цилиндрической границе (рис. 1 (а)). Сначала получим нестационарные уравнения для электромагнитного поля в диспергирующей среде, которая описывается моделью Друде вида

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\gamma_e)}, \quad (8)$$

где  $\omega_{pe}$  - плазменная частота,  $\gamma_e$  описывает поглощение. Восприимчивость такой плазмы в частотной области имеет вид

$$\chi(\omega) = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\gamma_e)}. \quad (9)$$

Восприимчивость среды во временной области может быть найдена с помощью обратного преобразования Фурье

$$\chi(t) = -\frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_e}(1 - e^{-\gamma_e t})\Theta(t), \quad (10)$$

тогда вектор электрической индукции имеет вид

$$\vec{d}(t) = \varepsilon_0 \vec{e}(t) + \varepsilon_0 \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_e} \int_0^t \vec{e}(t') dt' - \varepsilon_0 \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_e} \int_0^t e^{-\gamma_e(t-t')} \vec{e}(t') dt'. \quad (11)$$

Возьмем ротор от уравнения Максвелла  $\text{rot} \vec{h}(\vec{r}, t) = \partial_t \vec{d}(\vec{r}, t)$ :

$$\text{rot} \text{rot} \vec{h}(t) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{e}(t) + \varepsilon_0 \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_e} \text{rot} \vec{e}(t) - \varepsilon_0 \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_e} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t e^{-\gamma_e(t-t')} \text{rot} \vec{e}(t') dt'. \quad (12)$$

С учетом уравнения Максвелла  $\text{rot} \vec{e}(\vec{r}, t) = -\partial_t \mu_0 \vec{h}(\vec{r}, t)$ , получим уравнения во временной области для магнитного поля в плазме с потерями

$$\text{rot} \text{rot} \vec{h}(t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{h}(t) + \frac{1}{c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_e} \frac{\partial}{\partial t} \vec{h}(t) - \frac{1}{c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_e} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t e^{-\gamma_e(t-t')} \vec{h}(t') dt' = 0. \quad (13)$$

Операторное уравнение для функции-изображения  $z$ -координаты магнитного поля внутри плазменного цилиндра получается после применения к (13) преобразования Лапласа:

$$\Delta H(p) - \frac{n_p^2 p^2}{c^2} H(p) = 0. \quad (14)$$

Это уравнение переходит в уравнение Гельмгольца, если положить  $p = i\omega$ . Здесь  $n_p^2$  имеет вид:

$$n_p^2 = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{p^2 + p\gamma_e}. \quad (15)$$

Магнитное поле снаружи удовлетворяет уравнению (14), если положить  $n_p^2 = 1$ . Принимая во внимание теорему сложения для функций Бесселя

$$K_0\left(\frac{p}{c} |\vec{\rho} - \vec{\rho}_{cs}|\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\varphi - \varphi_{cs})} \left( I_k(q\rho_{cs}) K_k(q\rho) \Theta(\rho - |\rho_{cs}|) + I_k(q\rho) K_k(q\rho_{cs}) \Theta(|\rho_{cs}| - \rho) \right), \quad q = p/c. \quad (16)$$

где  $\rho_{cs} = \sqrt{\rho_0^2 - b^2 + 2ib(x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta)}$ ,  $\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ ,  $\varphi_{cs} = \arccos((x_0 + ib \cos \beta) \rho_{cs}^{-1})$  будем искать решение в виде

$$H = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m I_m(\bar{n}_p q \rho) e^{im(\varphi - \varphi_{cs})}, \quad \rho < a, \quad (17)$$

$$H = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m K_m(q \rho) e^{im(\varphi - \varphi_{cs})}, \quad \rho > a,$$

здесь  $I_k(\cdot)$ ,  $K_k(\cdot)$  - модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Представление внешнего поля в виде функций  $K_k(\cdot)$  гарантирует выполнение условия излучения на бесконечности.

Применяя граничные условия, которые представляют собой непрерывность тангенциальных компонент поля на цилиндрической границе  $\rho = a$ , приходим к системе уравнений (при условии, что источник расположен снаружи,  $\rho_0 > a$ ) для определения неизвестных коэффициентов  $A_m$  и  $B_m$ :

$$A_m I_m(\bar{n}_p qa) - B_m K_m(qa) = I_m(qa) K_m(q\rho_{cs}) p J(p) \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \quad (18)$$

$$A_m I'_m(\bar{n}_p qa) - \bar{n}_p B_m K'_m(qa) = \bar{n}_p I'_m(qa) K_m(q\rho_{cs}) p J(p) \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \quad (19)$$

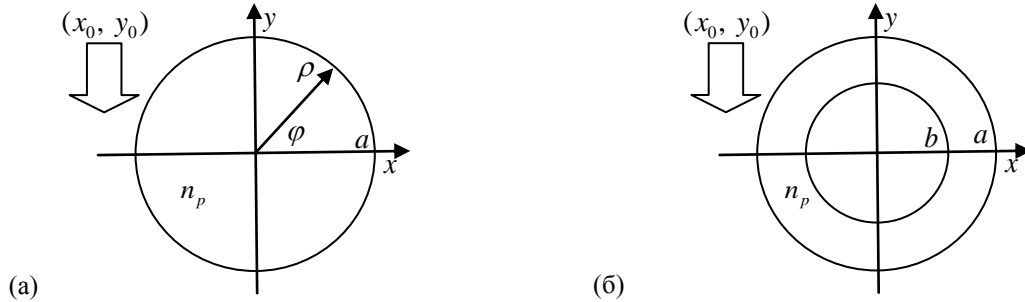


Рис. 1. Схематическая диаграмма исследуемого явления.

Для нанотрубки (рис. 1 (б)) решение будем искать в виде

$$H^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(1)} I_m(q\rho) e^{im(\varphi-\varphi_{cs})}, \quad \rho < b, \quad (20)$$

$$H^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (A_m^{(2)} I_m(n_p q\rho) + B_m^{(2)} K_m(n_p q\rho)) e^{im(\varphi-\varphi_{cs})}, \quad b < \rho < a, \quad (21)$$

$$H^{(3)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^{(3)} K_m(q\rho) e^{im(\varphi-\varphi_{cs})}, \quad a < \rho \quad (22)$$

Аналогично, после применения граничных условий, неизвестные коэффициенты определяем из системы:

$$A_m^{(1)} I_k(qb) - A_m^{(2)} I_m(n_p qb) - B_m^{(2)} K_m(n_p qb) = 0 \quad (23)$$

$$n_p A_m^{(1)} I'_k(qb) - A_m^{(2)} I'_m(n_p qb) - B_m^{(2)} K'_m(n_p qb) = 0 \quad (24)$$

$$A_m^{(2)} I_m(n_p qa) + B_m^{(2)} K_m(n_p qa) - B_m^{(3)} K_m(qa) = I_m(qa) K_m(q\rho_{cs}) p J(p) \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \quad (25)$$

$$A_m^{(2)} I'_m(n_p qa) + B_m^{(2)} K'_m(n_p qa) - n_p B_m^{(3)} K'_m(qa) = n_p I'_m(qa) K_m(q\rho_{cs}) p J(p) \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \quad (26)$$

Коэффициенты разложений имеют полюса, соответствующие плазмонным резонансам, а также точки ветвления. Собственные частоты возбуждаемых плазмонных резонансов комплексны вида  $\omega = \omega' + i\omega''$ . Добротности плазмонных резонансов определялись по формуле  $Q = \omega'/2\omega''$ . Зависимость внешнего импульсного источника от времени рассматривается вида:

$$j(t) = e^{i\omega t} [\Theta(t) - \Theta(t - \tau)]. \quad (27)$$

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Введем в рассмотрение нормированную величину  $w_p = \omega_p a/c$ . На рис. 2 представлено сечение поперечного рассеяния для нанопровода (штриховая линия) и нанотрубки (сплошная линия). Здесь и далее использованы такие значения параметров:  $w_p = 1$ ,  $\gamma = 10^{-3} \cdot w_p$ ,  $b/a = 0.5$ . В спектре нанопровода присутствует дипольный ( $\text{Re}(ka) = 0.63$ ) и квадрупольный ( $\text{Re}(ka) = 0.675$ ) плазмоны. Их распределения полей изображены на рис. 4 (а, б) соответственно. В спектре нанотрубки присутствуют два типа плазмонов: четные и нечетные. Нечетные плазмонные резонансы смещаются в область более низких частот ( $\text{Re}(ka) = 0.48$  и  $\text{Re}(ka) = 0.6$ ), а четные - в область более высоких частот ( $\text{Re}(ka) = 0.77$  и  $\text{Re}(ka) = 0.83$ ). Более широкие резонансные пики соответствуют дипольным плазмонам, более узкие - квадрупольным. На рис. 4 (в, г) представлены распределения полей дипольного четного (в) и нечетного (г) плазмонов. На рис. 3 представлены значения действительной части собственной частоты и добротности плазмонов для различных значений числа угловых вариаций поля (линии маркированы кружками для нанопровода, треугольниками и прямоугольниками для, соответственно, нечетных и



четных плазмонов нанотрубки). Очевидно существенное увеличение добротностей плазмонных резонансов для нанотрубки.

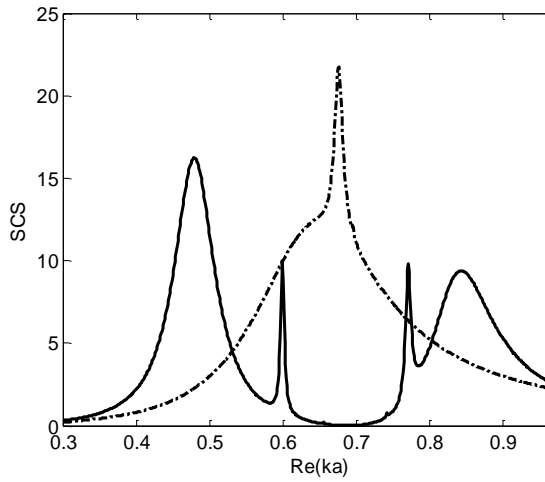


Рис. 2. Сечение поперечного рассеяния для нанопровода (штриховая линия) и нанотрубки (сплошная линия).

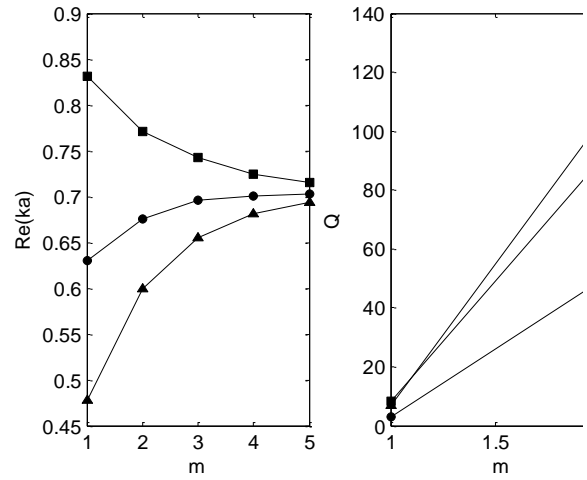


Рис. 3. Собственные частоты и добротности плазмонных резонансов провода (маркированы кружками) и трубки (маркированы квадратами и треугольниками).

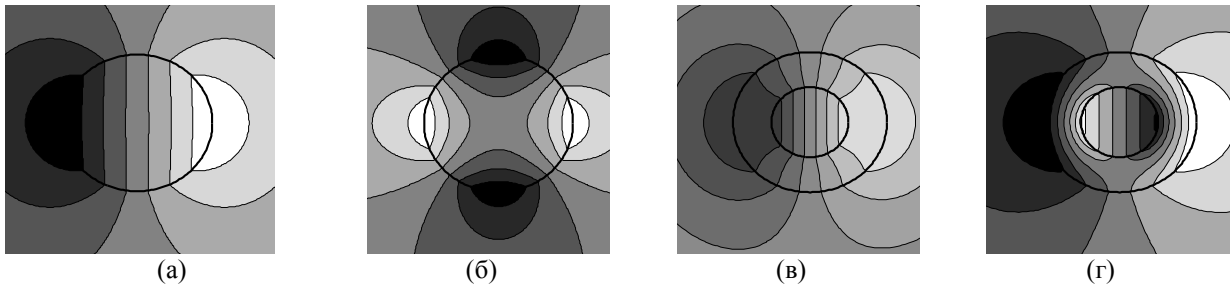


Рис. 4. Распределения полей в ближней зоне металлического нанопровода: (а) дипольный плазмон, (б) квадрупольный плазмон; и нанотрубки: (в) четный дипольный плазмон, (г) нечетный дипольный плазмон.

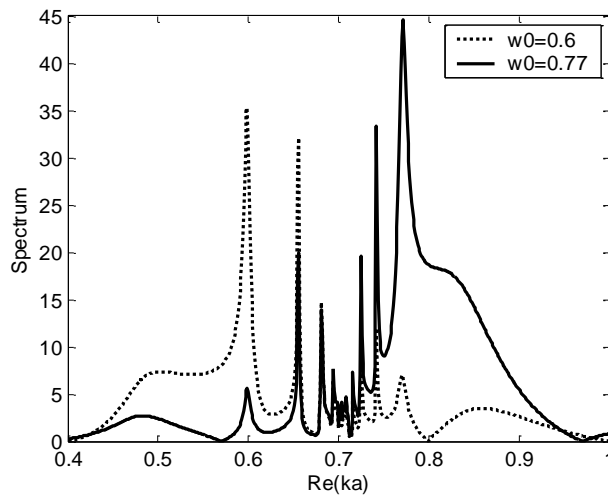


Рис. 5. Спектральная плотность поля в нанотрубки ( $w_p = 1$ ,  $\tau = 2\pi a/c$ ).

На рис. 5 представлена спектральная плотность поля в нанотрубке при возбуждении ее импульсным источником. Введена нормированная частота источника  $w_0 = \omega_0 c/a$ . Сплошная линия соответствует случаю, когда частота источника совпадает с действительной частью частоты четного дипольного плазмона, а штриховая линия отвечает нечетному дипольному плазмону. Продолжительность импульса  $\tau = 2\pi a/c$ . В данном случае, в отличие от случая гармонической падающей волны (рис. 2), в спектре присутствуют множественные пики, связанные с высшими плазмонами.

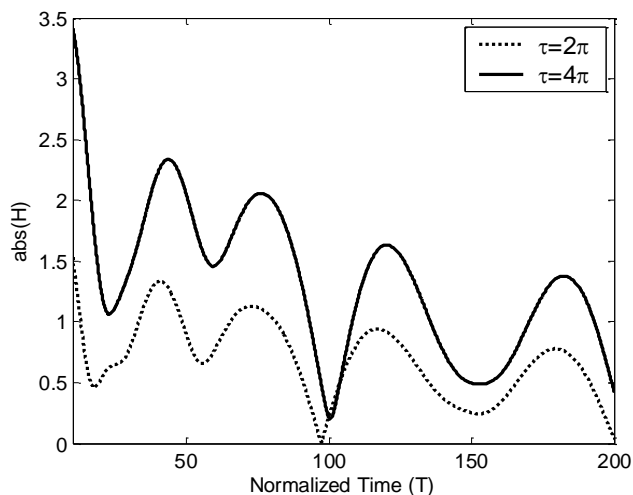


Рис. 6. Эволюция магнитного поля во времени в нанотрубке  $w_0 = 0.8318$ .

На рис. 6 представлена временная динамика модуля магнитного поля для двух значений продолжительности импульса. Нормированное время здесь  $T = tc/a$ . В случае большей продолжительности импульса интенсивность поля увеличивается.

На рис. 7 представлены мгновенные изображения модуля действительной части магнитного поля. Рис. 7(а) соответствует случаю нанопровода. Направление падения пучка указано стрелкой на рис. 1(а). Такой импульс возбуждает волну, распространяющуюся против часовой стрелки. Падающий импульс возбуждает плазмоны с разными добротностями. Биение одновременно возбуждаемых плазмонов приводит к возбуждению асимметричной поверхностной волны, бегущей по поверхности провода (рис. 7(а)). Распределение поля на поверхности нанотрубки носит более сложный характер, так как при этом возбуждаются как четные, так и нечетные плазмоны с разными добротностями и распределениями полей (рис. 7(б, в)).

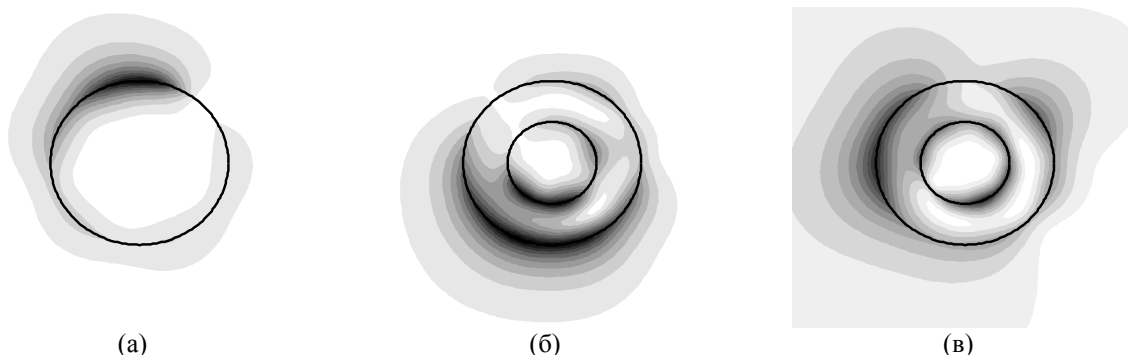


Рис. 7. Мгновенные изображения модуля действительной части магнитного поля: (а)  $w_0 = 0.675$ ,  $\tau = 2\pi a/c$ ,  $T = 100\pi$ ; (б)  $w_0 = 0.83$ ,  $\tau = 2\pi a/c$ ,  $T = 100\pi$ ; (в)  $w_0 = 0.83$ ,  $\tau = 2\pi a/c$ ,  $T = 120\pi$ .

### ВЫВОДЫ

В данной работе построено аналитическое решение в виде преобразования Лапласа задачи возбуждения нестационарных плазмонов внешним импульсным источником. Для моделирования внешнего нестационарного пучка использовано понятие импульсного комплексного точечного источника. В основе такой модели лежит идея аналитического продолжения функции поля обычного

точечного источника в комплексное пространство. При вычислении обратного преобразования Лапласа формула Меллина была модифицирована с учетом «комплексного временного запаздывания». Этот вид источника является очень удобной моделью для описания возбуждения бегущих волн. В качестве объекта, в котором возбуждались нестационарные поля, рассмотрены металлический провод и трубка. Показано, что в результате возбуждения импульсом нескольких плазмонных резонансов, результирующее поле имеет вид бегущей асимметричной поверхностной волны.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhao Y., Hao Y. Finite-difference time-domain study of guided modes in nano-plasmonic waveguides // IEEE Transactions on Antennas and Propagations. – 2007. – Vol. 55. – N. 11. – P. 3070 - 3077.
2. Stuart H. R., Pidwerbetsky A. Electrically small antenna elements using negative permittivity resonators // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2006. – Vol. 54. - P. 1644 - 1653.
3. Li J., Engheta N. Ultracompact sub-wavelength plasmonic cavity resonator on a nanowire // Physical Review B. – 2006. - Vol. 74. – P. 115125.
4. Kneipp K., Wang Y., Kneipp H., Perelman L., Itzkan I., Dasari R. Single molecule detection using surface-enhanced Raman scattering (SERS) // Physical Review Letters. – 1997. - Vol. 78. – P. 1667 – 1670.
5. Bahns J., Imre A., Vlasko-Vlasov V., Pearson J., Hiller J. M., Chen L. H., Welp U. Enhanced Raman scattering from focused surface plasmons // Applied Physics Letters. – 2007. - Vol. 91. – P. 081104.
6. Weiner J. The physics of light transmission through subwavelength apertures and aperture arrays // Reports on Progress in Physics. – 2009. - Vol. 72. – P. 064401.
7. Thio T., Pellerin K., Linke R., Lezec H., Ebbesen T. Enhanced light transmission through a single subwavelength aperture // Optics Letters. – 2001. -Vol. 26. - P.1972 - 1974.
8. Smolyaninov I., Elliott J., Zayats A., Davis C. C. Far-field optical microscopy with a nanometer-scale resolution based on the in-plane image magnification by Surface Plasmon Polaritons // Physical Review Letters. – 2005. - Vol. 94. – P. 057401.
9. Yogeswaran U., Chen S. M. A Review on the Electrochemical Sensors and Biosensors Composed of Nanowires as Sensing Material // Sensors. – 2008. – Vol. 8. – P. 290 - 313.
10. Byun K. M., Yoon S. J., Kim D., Kim S. J. Experimental study of sensitivity enhancement in surface plasmon resonance biosensors by use of periodic metallic nanowires // Optics Letters. – 2007. - Vol. 32, No. 13. – P. 1902 - 1904.
11. Sakhnenko N. K., Chipouline A., Schmidt C., Nerukh A., Pertsch T. Modeling of transient dynamics in two-dimensional circular microresonators using the pulsed complex source point beam concept // Journal Optical Society of America A. – 2012. – Vol. 29. - N. 10. – P. 2197 – 2203.
12. Sakhnenko N. K., Stognii N. P., Nerukh A. G., Chipouline A., Pertsch T. Modeling of transient plasmon dynamics in metallic cylinders // Proc. Int. Conference on Mathematical Method in Electromagnetic Theory (MMET 2012), Kharkiv, Ukraine. – 28 - 30 August 2012. – P. 35 - 38.

УДК 621.382.2

## ГЕНЕРАЦИЯ И УМНОЖЕНИЕ ЧАСТОТЫ ПЛАНАРНЫМ ДИОДОМ С ТУННЕЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Э. Д. Прохоров, О.В. Боцула, О.А. Реутина

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
4, пл. Свободы, Харьков, 61077, Украина, Тел. (0572) 7051262  
e-mail: E.D.Prokhorov@gmail.com  
Поступила в редакцию 30 мая 2013 г.

Исследуются планарные диоды с туннельными границами на основе арсенида галлия, которые обладают участком отрицательной дифференциальной проводимости (ОДП) на вольтамперной характеристике. Нелинейность вольтамперной характеристики использована для генерации гармоник и умножения частоты. Исследованы генерация и умножение частоты на диодах с двумя туннельными границами и со сплошной туннельной границей. Расчеты проводились с помощью Фурье-анализа. Показано, при каких параметрах постоянного смещения на диоде, и каких амплитудах входного сигнала можно получить эффективную генерацию на второй или третьей гармониках. Показано, что с помощью умножения на диодах с туннельными границами возможно получение генерации в коротковолновой части мм-диапазона.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** отрицательная дифференциальная проводимость, планарный диод, туннельная граница, генерация и умножение частоты, мм-диапазон.

Досліджуються планарні діоди з тунельними межами на основі арсеніду галію, які володіють ділянкою негативної диференціальної провідності (НДП) на вольтамперній характеристиці. Нелінійність вольтамперної характеристики використана для генерації гармонік і множення частоти. Досліджено генерацію і множення частоти на діодах з двома тунельними межами і з суцільною тунельною межею. Розрахунки проводилися за допомогою Фур'є - аналізу. Показано, при яких параметрах постійного зміщення на діоді, і яких амплітудах вхідного сигналу можна отримати ефективну генерацію на другій чи третій гармоніках. Показано, що за допомогою множення на діодах з тунельними межами можливе отримання генерації в короткохвильовій частині мм – діапазону.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** негативна диференціальна провідність, планарний діод, тунельна межа, генерація і множення частоти, мм – діапазон.

Planar diodes with tunnel boundaries based on gallium arsenide, which have a plot of negative differential conductivity (NDC) on the current-voltage curve are investigated. Nonlinearity of the current-voltage curve used for the generation of harmonics and frequency multiplication. Generation and frequency multiplication by diodes with two tunnel boundaries and with continuous tunnel boundaries are studied. Calculations were carried out using Fourier analysis. Shows under which the parameters of constant bias on the diode, and what input signal amplitude efficient generation of the second or third harmonics can be obtained. It is shown that by multiplying the diodes with tunnel boundaries may lasing in the short-millimeter range.

**KEYWORDS:** negative differential conductivity, planar diode, tunnel boundary generation and frequency multiplication, mm-range.

### ВВЕДЕНИЕ

Планарным диодам с туннельной границей (ТГ) и резонансно-туннельной границей (РТГ) посвящен ряд работ [1-4]. Такие диоды привлекают внимание тем, что обладают отрицательной дифференциальной проводимостью на вольтамперных характеристиках (ВАХ) на частотах до 60-70 ГГц при параметрах, приведенных в работе [5]. Увеличение частот генерации возможно или путем уменьшения размеров диодов, или за счет генерации на гармониках, или умножения частоты на нелинейности ВАХ. Нелинейность характеристик рассматриваемых диодов обусловлена, прежде всего, туннельными и резонансно-туннельными боковыми границами. Такие границы обладают высоким быстродействием механизмов проводимости, но и большими емкостями, включенными параллельно активным проводимостям. С увеличением частоты отрицательная дифференциальная проводимость (ОДП) таких диодов уменьшается, что приводит к уменьшению эффективности генерации с увеличением частоты.

Цель настоящей работы - исследовать генерацию и умножение частоты в мм-диапазоне диодами с ТГ для случаев одной ТГ, двух ТГ и пяти ТГ (или практически сплошной ТГ между анодом (А) и катодом (К)). Также необходимо выяснить при каких постоянных смещениях, и каких амплитудах входного сигнала возможно получение эффективного сигнала на выходе на гармониках.

## ИССЛЕДУЕМЫЕ МОДЕЛИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Планарный вариант диода, выполненного на эпитаксиальной пленке  $n$ -GaAs, выращенной на полуизолирующей подложке и его эквивалентная схема показаны на рис.1. Схема упрощенная. Упрощение заключается в том, что ТГ с параметрами такими же, как в «сэндвич» варианте [3,4], подключается в сечение канала, показанное пунктиром на рис.1. ТГ может быть соединена с любой точкой на длине канала (пунктир на рис.1) и сопротивление канала  $R_2$  от этой точки до катода  $l_2$  может меняться от долей Ома до единиц Ом.

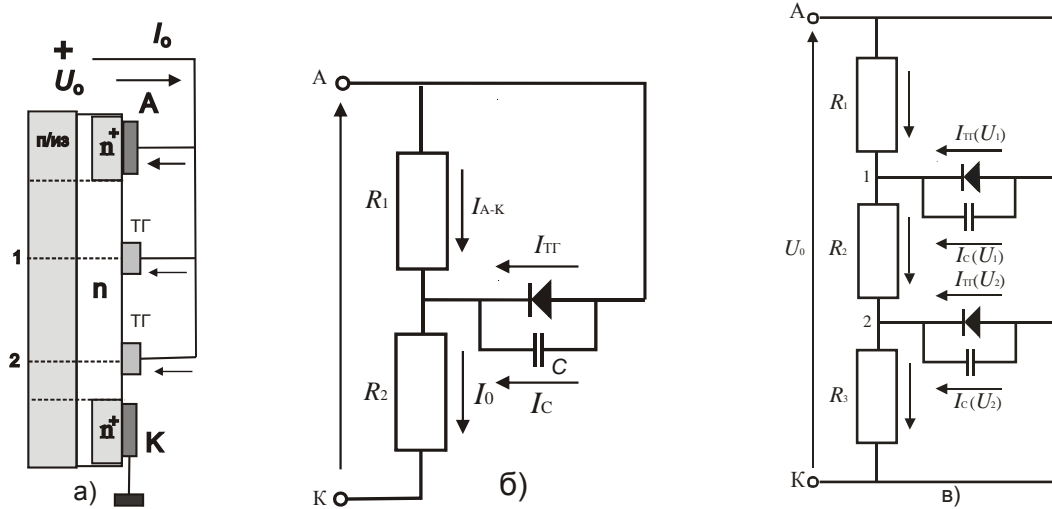


Рис. 1. Планарная структура диода с боковыми ТГ (а) и эквивалентные схемы диодов с одной (б) и двумя (в) ТГ

Эквивалентная схема структуры с одной ТГ представляет собой проводимость ТГ, параллельно которой включена емкость ТГ –  $C$  и часть канала  $R_1$ . Последовательно с ними включена часть канала  $R_2$  между ТГ и катодом. Емкость А-К намного меньше емкости ТГ ( $l_1 \gg l_2$ ,  $l_1$  – расстояние между А-К,  $l_2$  – расстояние между ТГ и катодом). С увеличением частоты существенную роль будет играть емкость, которая включена параллельно активной проводимости ТГ.

Эквивалентная схема структуры с двумя ТГ представляет собой канал из  $n$ -GaAs с омическими контактами на аноде и катоде. С одной стороны канала боковая граница представляет собой полуизолятор, с другой боковой стороны располагаются две боковые ТГ (рис.1). Одна ТГ расположена вблизи катода (пунктир 2 рис.1), вторая ТГ (пунктир 1 рис.1) может передвигаться от катода к аноду. При этом меняются сопротивления между ТГ ( $R_1$ ) и меняется сопротивление между ТГ (1) и анодом ( $R_3$ ) меняются токи через ТГ.

Структура с пятью ТГ представляет собой канал, как и в предыдущем случае, на боковой границе которого нанесены пять ТГ с площадями в пять раз меньшими в сравнении со структурой с одной ТГ. Соответственно меняются и сопротивления между ТГ и токи ТГ и емкости ТГ. Если пять ТГ расположены друг по отношению к другу близко (расстояния между границами меньше протяженности одной границы), то такую границу можно воспринимать как сплошную протяженную границу на боковой границе структуры.

Реальные ВАХ планарного диода с одной ТГ при прямом смещении построена при следующих параметрах: материал GaAs:  $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ,  $\mu_n = 7000 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ,  $l = 10^{-4} \text{ см}$ ,  $R_1 \approx 10 \text{ Ом}$ ,  $I_{\max} = 0,2 \text{ А}$ ,  $U_{\max} = 0,1 \text{ В}$ ,  $I_S = 10^{-6} \text{ А}$ ,  $b = 0,3$ . Исходная площадь ТГ  $S = 10^{-6} \text{ см}^2$ . Емкость  $C = 1 \text{ пФ}$  ( $C = \epsilon \epsilon_0 S / L$ , где  $L$  – толщина ТГ  $\sim 10^{-6} \text{ см}$ ).

Ток проводимости ТГ  $I_{\text{N}\bar{\text{A}}}(U)$  может быть записан точно [5,6] или в виде следующей аппроксимации [7,8]:

$$I_{TA}(U) = I_{\max} \frac{U}{U_{\max}} \exp\left(1 - \frac{U}{U_{\max}}\right) + I_{\min} \exp(A(U - U_{\min})) + I_S \exp\left(b \frac{eU}{kT} - 1\right), \quad (1)$$

где  $I_{\max}$  – максимальный туннельный ток через диод при напряжении  $U_{\max}$ ,  $I_{\min}$  – минимальный ток через диод при напряжении  $U_{\min}$ ,  $A$  – постоянная, характерная для конкретного полупроводникового материала,  $b$  – показатель роста диффузионного тока через переход,  $I_S$  – ток насыщения туннельного перехода без учета туннелирования, где  $U$  – напряжение на ТГ.

ВАХ диодов с ТГ (1, 2 и 5) с учетом приведенных выше параметров материала *n*-GaAs и ТГ показаны на рис.2. ВАХ на рис.2 приведены для диодов с различным количеством ТГ. Все ВАХ обладают участками ОДП. Именно особенности приведенных ВАХ и использованы для генерации и умножения на второй и третьей гармониках.

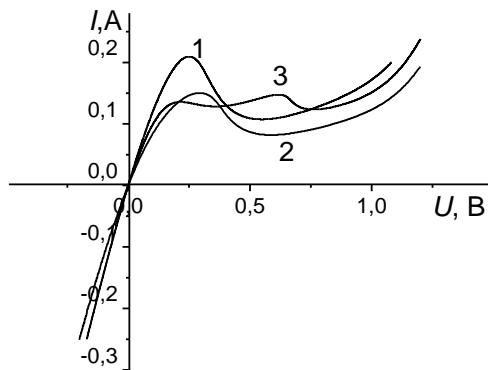


Рис.2. ВАХ диода с ТГ на частоте 10 ГГц при условии:

- 1 – две ТГ,  $R_1=9$  Ом,  $R_2=R_3=0.5$  Ом;
- 2 - пять ТГ,  $R_1=6.5$  Ом,  $R_2=3$  Ом,  $R_3=0.5$  Ом;
- 3 - две ТГ,  $R_1=6.5$  Ом,  $R_2=3$  Ом,  $R_3=0.5$  Ом

### ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК

ВАХ диода с ТГ нелинейна, имеет участок ОДП. При выведении постоянного напряжения на участок ОДП возникает генерация СВЧ-колебаний. В режиме генерации ток через диод имеет сложную форму, содержащую множество гармоник. Любую гармонику можно выделить, поместив диод с ТГ в сложный резонатор, состоящий из резонатора настроенного на 1-ю гармонику и резонатора, который настроен на *n*-ю гармонику. В этом случае на диоде с ТГ действует напряжение:

$$U(t) = U_0 + \sum_{n=1} U_n (-1)^n \sin \left[ n\omega t + \frac{\pi}{2} (n+1) \right]. \quad (2)$$

Постоянная составляющая и амплитуда *n*-ой гармоники тока определяются по формулам:

$$I(U_0) = \frac{1}{T} \int_0^T I(U(t)) dt, \quad (3)$$

$$I_g(n) = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) \sin \left\{ n\omega t + \frac{\pi}{2} (n+1) \right\} (-1)^n dt. \quad (4)$$

Эффективность генерации на первой и *n*-й гармониках определяются в виде:

$$КПД = \frac{1}{2} \frac{I_g(n) U_n}{I(U_0) U_0} \cdot 100\%. \quad (5)$$

При необходимости получить максимальный КПД на *n*-й гармонике следует оптимизировать амплитуды и 1-й, и *n*-й гармоник. Здесь возможны следующие режимы – генерация на основной частоте в присутствии гармоник, генерация гармоник при работе диода на основной частоте и генерация на частотах гармоник.

Введение 2-й гармоники в сигнал напряжения на диоде, приводит к увеличению эффективности генерации (КПД) на 1-й гармонике [9,10]. На 2-й же гармонике при малых амплитудах напряжения, близких к пороговым, тоже наблюдается генерация, которая при увеличении напряжения может возрастать по мощности. То же самое происходит и в присутствии *n*-й гармоники. В этом случае можно говорить об оптимальной генерации на основной частоте в присутствии гармоник (рис.3 область напряжений от 0 до А).

Когда КПД на 1-й гармонике больше КПД на высших гармониках, то можно говорить о генерации гармоник при работе диода на основной частоте. В этом случае возможны такие соотношения амплитуд гармоник, при которых генерируются и 1-я и 2-я гармоники в примерно равных соотношениях по эффективности генерации. На рис. 3 (область напряжений от А до В) видно, что при увеличении амплитуды  $U_2$  увеличивается КПД на 2-й гармонике, при этом КПД на 1-й гармонике выше, чем на 2-й.

Увеличение эффективности генерации на гармониках приводит к уменьшению эффективности генерации на 1-й гармонике. Когда генерация на 1-й гармонике по мощности становится меньше мощности 2-й гармоники, то такую ситуацию можно характеризовать как генерацию на частотах гармоник.

При увеличении частоты основной гармоники эффективность генерации и на основной частоте и на частотах гармоник значительно уменьшаются.

На рис.3 (сплошная линия) показаны зависимости КПД на основной и второй гармониках от амплитуды второй гармоники, для случая двух ТГ, когда одна из ТГ расположена рядом с катодом, что аналогично ситуации с одной ТГ, которые подтверждают сказанное выше.

На рис.4 показаны зависимости КПД на основной и второй гармониках от амплитуды второй гармоники, для случая пяти ТГ (или сплошной ТГ). Значения эффективностей генерации меньше, чем

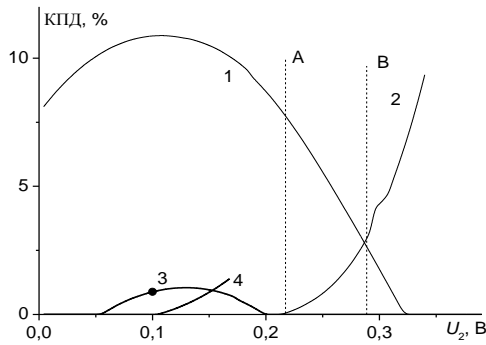


Рис.3. Эффективность генерации диода с двумя ТГ при  $R_1 = 9$  Ом,  $R_2 = 0,5$  Ом,  $R_3 = 0,5$  Ом на первой и второй гармониках от амплитуды второй гармоники: 1 - первая гармоника частота 10 ГГц, 2 - вторая гармоника; 3 - первая гармоника частота 30 ГГц, 4 - вторая гармоника, при  $U_0 = 0,4$  В,  $U_1 = 0,3$  В

приведенные на рис.3, что связано с ВАХ диода для пяти ТГ (см. рис.2). Как сказано выше, если расстояния между границами меньше протяженности одной границы, то такую границу можно воспринимать как сплошную протяженную границу на боковой границе структуры.

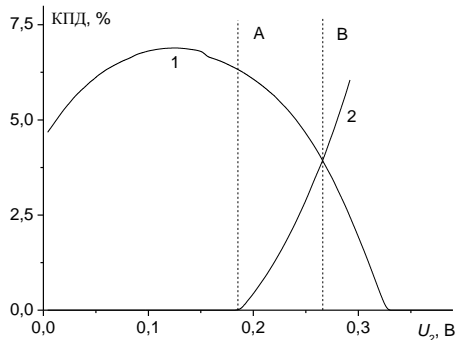


Рис.4. Эффективность генерации диода с пятью ТГ при  $R_1 = 6,5$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $R_3 = 0,5$  Ом на первой и второй гармониках от амплитуды второй гармоники: 1 - первая гармоника частота 10 ГГц, 2 - вторая гармоника, при  $U_0 = 0,4$  В,  $U_1 = 0,3$  В

Таким образом, диод с ТГ может быть использован для эффективной генерации на частотах гармоник в широком диапазоне частот в коротковолновой части мм диапазона.

### УМНОЖЕНИЕ ЧАСТОТЫ

В режиме умножения на диод подается сигнал с определенной частотой и амплитудой:

$$E(t) = E_0 + E_1 \sin \omega t, \quad (6)$$

где  $E_0, E_1$  - постоянная составляющая и амплитуда входного сигнала. За счет нелинейности характеристики  $I(U)$  ток через диод имеет сложную форму, содержащую высшие гармоники. Выделение гармоники осуществлялось контуром, настроенным на частоту гармоники. Амплитуды постоянной составляющей, первой и  $n$ -ой гармоники тока определяются из разложения формы тока через диод  $I(t)$  в ряд Фурье. [9, 10, 11].

Коэффициент преобразования частоты КПЧ или коэффициент полезного действия (это отношение мощности на  $n$ -ой гармонике к поступающей на диод мощности первой гармоники) определяется в виде:

$$КПЧ = \frac{J_g(n) \cdot E_g}{J_g(1) \cdot E_1} \cdot 100\% \quad (7)$$

Особенностью всех характеристик является несимметричность ВАХ, участок ОДП наблюдается только при прямом включении, при обратном включении происходит резкое нарастание тока через туннельную границу. Поэтому постоянное смещение выбирается на прямой ветви ВАХ, при этом сумма постоянного смещения и амплитуды первой гармоники не должна превышать максимальный ток через диод, а разница амплитуды первой гармоники и постоянного смещения должна быть вблизи к нулю. Эти условия определяют диапазон возможных изменений напряжений, действующих на диоде.

Умножение на планарном диоде с двумя ТГ. ВАХ диода с одной ТГ показана на рис.2. ВАХ при перемещении ТГ к аноду ухудшаются: уменьшается максимум тока при увеличении соответствующего напряжения, увеличивается минимум тока и уменьшается ОДП. Все это приводит к уменьшению эффективности генерации на первой гармонике и генерации на гармониках. Наилучшие результаты получаются при положении ТГ вблизи катода. Для этого случая и приведены результаты умножения на второй и третьей гармониках (рис. 5).

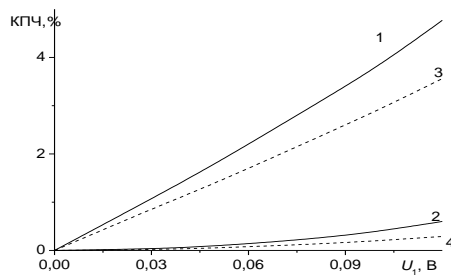


Рис 5. КПЧ на второй (1,3) и третьей (2,4) гармониках для диода с двумя ТГ при  $R_1=9$  Ом,  $R_2=0.5$  Ом,  $U_0=0.14$  В,  $U_2=0.3U_1$  на частоте входного сигнала: 1,3 -10 ГГц; 2,4 – 50 ГГц.

Умножение на планарном диоде с двумя ТГ. ВАХ диода для разных положений ТГ, которая ближе к аноду, имеет два участка ОДП и две зоны генерации по напряжению [12]. Некоторые результаты по умножению на второй и третьей гармониках показаны на рис. 6. Поскольку для ВАХ с двумя участками ОДП с увеличением частоты сначала уменьшается второй участок ОДП, а умножение мы рассматриваем при напряжениях, которые соответствуют первому участку ОДП, мы наблюдаем незначительные изменения КПЧ с увеличением частоты. Все ВАХ нелинейны начиная с самых маленьких напряжений на диоде. Поэтому сигнал на гармониках появляется практически от нуля напряжения. Перемещение второй ТГ к аноду уменьшает КПЧ до 3% на второй гармонике и до 8% на третьей гармонике.

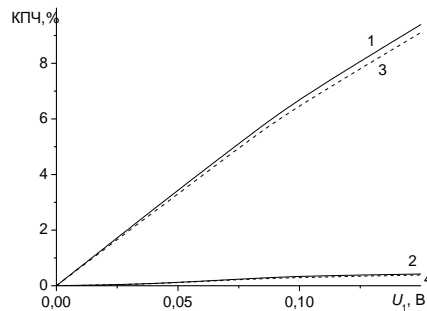


Рис. 6. КПЧ на второй(1,3) и третьей гармониках (2,4) для диода с двумя ТГ при  $R_1=6,5$  Ом,  $R_2=3$  Ом,  $R_3=0.5$  Ом,  $U_0=0.1$  В,  $U_2=0.3U_1$  на частоте входного сигнала: 1,3 -10 ГГц; 2,4 – 50 ГГц.

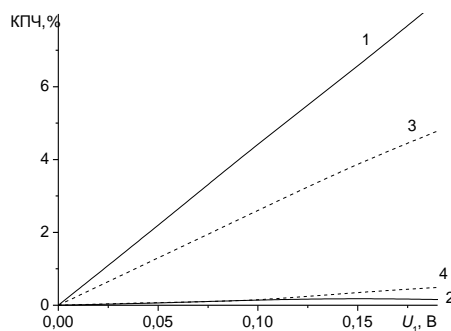


Рис. 7. КПЧ на второй(1,3) и третьей гармониках (2,4) для диода с пятью ТГ при  $R_1=6,5$  Ом,  $R_3=0.5$  Ом,  $U_0=0.17$  В,  $U_2=0.3U_1$  на частоте входного сигнала: 1,3 -10 ГГц; 2,4 – 40 ГГц.

Умножение на планарном диоде с пятью ТГ. ВАХ диода с пятью ТГ имеет меньшие значения тока в максимуме и минимуму по сравнению с ВАХ диода с одной ТГ и меньшее отношение максимуму к минимуму (рис.7). При тех же напряжениях на диоде, что и в случае двух ТГ, КПЧ на второй гармонике примерно такой же как и для диода с двумя ТГ. А КПЧ на третьей гармонике меньше почти в два раза.



### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Планарные диоды с различным числом ТГ можно использовать для генерации и умножения частоты на второй и третьей гармониках, поскольку ВАХ этих диодов имеют участки ОДП вплоть до частот 60-70 ГГц. ОДП диодов с ТГ с увеличением частоты уменьшается, что обусловлено шунтирующим влиянием емкостей ТГ, которые включены параллельно активной проводимости диода. Вследствие этого и эффективность генерации на гармониках и эффективность умножения уменьшаются с частотой.
2. Показано, что при введении сложного сигнала напряжения на диодах с различным числом ТГ возможно получение эффективной генерации на гармониках с эффективностью даже превосходящей генерацию на первой гармонике. Это может расширить частотный диапазон работы диодов с ТГ в планарном исполнении.
3. Максимальные КПЧ на второй гармонике составляют ~5-8 % для разного количества ТГ при постоянном смещении на диодах  $\sim 0.5 U_{\text{п}}$ . На третьей гармонике КПЧ растёт при увеличении амплитуды входного сигнала и составляет 3-6 %.
4. С помощью генерации гармоник и умножения частоты на планарных диодах с ТГ возможно получение мощности на частотах, превышающих частотный диапазон работы диодов на первой гармонике. Более того, при генерации на 2-ой гармонике можно получить большую мощность по сравнению с генерацией на той же частоте на 1-й гармонике.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прохоров Э.Д., Боцула О.В. Отрицательная дифференциальная проводимость полупроводникового диода с туннельными боковыми гранями // Радиофизика и электроника.—2010.—Т.15, №2. — С. 109-113.
2. Прохоров Э.Д., Боцула О.В., Клименко О. А. Влияние междолинного переноса электронов на эффективность генерации диодов с туннельными границами на основе GaAs, // Доклады НАН Украины.—№4.— С. 75-80.
3. Прохоров Э.Д., Боцула О.В., Клименко О.А., Генерация и умножение частоты диодами с туннельными границами на основе GaAs // Радиофизика и электроника. – 2011. – Т. 16, № 3.—С. 91-96.
4. Прохоров Э.Д., Боцула О.В., Клименко О.А. Эффективность генерации диодов с резонансно—туннельными границами в сэндвич варианте // Радиофизика и электроника.—2012. —Т. 17,—№ 3.— С. 72-78.
5. Esaki L. New Phenomenon in Narrow Germanium p-n junction // Phys.Rev.- 1958.—109. -p. 603-605.
6. Hall R.N. Tunnel diodes, IRE Trans.Electron Devices, ED-17, 1960, 1.
7. Зи С. Физика полупроводниковых приборов: в 2 т. Т. 2. -М.: Мир, 1984.-456 с.
8. Прохоров Э.Д. Твердотельная электроника.-Х: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2008.-544 с.
9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А., Справочник по математике, Изд. техн-теор. лит.,- М, 1963, С. 608.
10. Ризкин И.К. Умножители и делители частоты, М. - Связь, 1976, 328 с.
11. Жаботинский М.Е., Свердлов Ю.Л. Основы теории и техника умножения частоты, М. - Сов. радио, 1964, 327 с.
12. Прохоров Э.Д., Боцула О.В., Реутин О.А. Влияние боковой границы на вольтамперные характеристики и эффективность генерации планарного диода, // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна Серія «Радіофізика та електроніка», —2012.— №1038, вип. 2.— С.64-68.

УДК 621.382.2

## ВЛИЯНИЕ УДАРНОЙ ИОНИЗАЦИИ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГЕНЕРАЦИИ КОРОТКИХ ДИОДОВ НА ОСНОВЕ GAN

О. В. Боцула, Э. Д. Прохоров, Д. С. Свергун, К. Г. Приходько

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
4, пл. Свободы, Харьков, 61077, Украина, Тел. (0572) 7051262  
E-mail: oleg.botsula@mail.ru

Поступила в редакцию 30 мая 2013 г.

Рассматривается генерация электромагнитных колебаний терагерцового диапазона короткими диодами на основе GaN. Моделирование работы диодов проводится с использованием многочастичного метода Монте Карло. Анализируется влияние величины концентраций в отдельных областях диода на величину эффективности генерации в диапазоне параметров. Установлены оптимальные соотношения для концентраций в структуре с высокоомной катодной неоднородностью. Проводится сравнение работы диода с учетом и без учета ударной ионизации. Показано, что ударная ионизация может быть основным фактором ограничивающим возможность работы диода с длиной активной области менее 0,3 мкм на основе GaN.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** терагерцовый диапазон, концентрация, активная область, эффективность генерации, ударная ионизация, пробивные напряжения.

Розглядається генерація електромагнітних коливань терагерцового діапазону короткими діодами на основі GaN. Моделювання роботи діодів проводиться з використанням багаточасткового методу Монте Карло. Аналізується вплив величини концентрацій в окремих областях діода на величину ефективності генерації в діапазоні параметрів. Визначені оптимальні співвідношення для концентрацій в структурі з високоомною катодною неоднорідністю. Проводиться порівняння роботи діода з врахуванням та без врахування ударної іонізації. Показано, що ударна іонізація може бути основним фактором, що обмежує можливість роботи діода з довжиною активної області менше 0,3 мкм на основі GaN.

**КЛЮЧЕВІ СЛОВА:** терагерцовий діапазон, концентрація, активна область, ефективність генерації, ударна іонізація, пробивні напруги.

The generation of electromagnetic waves in the terahertz range by short diodes based on GaN is considered. Simulation of the diodes is carried out using ensemble Monte Carlo method. The influence of doping concentration in certain areas of the diode on the value of the generation efficiency in the range of parameters is analyzed. The optimum ratio for the concentrations in the structure with cathode notch is determined. Comparisons of the diode with and without impact ionization are performed. It is shown that the impact ionization may be a major factor limiting the work of the GaN diodes having active region with length less than 0,3 micron.

**KEYWORD:** terahertz range, concentration, active region, oscillation efficiency, impact ionization, breakdown voltage.

### ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительно возрос интерес к азотосодержащим соединениям ( GaN, AlN, InN и т.д.). В отличие от приборов, созданных на основе традиционных полупроводниковых материалов ( Si, GaAs и др.), приборы на основе нитридов способны работать в значительно более широком диапазоне частот, при более высоких температурах, с большей выходной мощностью, а также обладают высокой радиационной стойкостью, что значительно расширяет область их применения [1].

Большинство нитридов являются прямозонными полупроводниками, причем эффективная масса электрона в боковых долинах зоны проводимости больше по сравнению с центральной долиной, а минимумы боковых долин достаточно удалены от центральной долины, что приводит к ярко выраженному эффекту междолинного переноса электронов (МПЭ). Это, в сочетании с малыми временами междолинных переходов, делает их привлекательными для создания диодов с МПЭ, способных генерировать электромагнитные колебания в терагерцовом диапазоне [2-4].

Особенности использования нитридов в диодах Ганна можно проиллюстрировать на примере нитрида галлия, наиболее часто рассматриваемого как потенциальный материал для создания действующего диода [4-7]. Отталкиваясь от результатов, полученных, например, в [2,3], величина произведения концентрации на длину в активной области диода должна составлять порядка  $\sim 10^{13} \text{ см}^{-2}$ , что для диода с длиной активной области порядка 3 мкм соответствует концентрации  $\sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$  [2], тогда как для диода с длиной активной области 0,3 мкм уже необходима концентрация  $\sim 8 \cdot 10^{17} - 10^{18} \text{ см}^{-3}$  [3].

С повышением уровня легирования активной области величина напряженности электрического поля в диоде также растет. При работе диода в резонансно – пролетном режиме напряжение на нем равно сумме напряжения смещения  $U_0$  и переменной составляющей  $U_{\sim}$ . В случае идеальной резонансной системы,

настроенной на частоту  $\omega_0$ , являющейся моделью одноконтурного резонатора, переменная составляющая будет содержать только первую гармонику  $U_- = U_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ , где  $U_1$  - амплитуда первой гармоники.

В такой ситуации, при распространении волн пространственного заряда, даже при среднем значении напряженности ниже величины пробойного значения, которая определяется величиной напряжения смещения  $U_0$ , в отдельные промежутки времени напряженность поля может достичь уровня, необходимого для начала ударной ионизации. Степень влияния ударной ионизации будет зависеть от распределения напряженности электрического поля в диоде, то есть определяется структурой диода, и от величины перенапряжения  $U(t) - U_{пр}$ , где  $U_{пр}$  - напряжение пробоя диода, и фазовых соотношений между током и приложенным напряжением.

Целью данной работы является выяснение влияния ударной ионизации на работу коротких (с длиной активной области менее 0,3 мкм) диодов на основе GaN.

### ИССЛЕДУЕМЫЕ МОДЕЛИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматриваются диоды, представляющие собой структуру  $n^+ - n^- - n - n^+$ , где  $n^+$  - сильнолегированная область с толщиной 0,1 мкм и концентрацией донорной примеси порядка  $10^{18}$  см $^{-3}$ . Контакты к катодной и анодной  $n^+$  - областям считаются омическим – концентрация на контактах поддерживается постоянной величиной, что соответствует условию квазинейтральности, выполняющемуся для идеальных омических контактов. Длины, на которых происходит изменения концентрации в  $n^+ - n^-$ ,  $n - n^+$  переходах, составляют 0,05 мкм. Длина активной области, состоящей из  $n^-$  и  $n$  - областей, составила порядка 0,3 мкм. Для моделирования физических процессов использовался многочастичный метод Монте – Карло [8]

Рассматривалась работа диода в резонансно-пролетном моногармоническом режиме. Эффективность генерации (коэффициент полезного действия) определялась в виде:

$$\eta = \frac{P_-}{P_0} \cdot 100\%, \quad (1)$$

где  $P_-$  - мощность, генерируемая диодом на частоте резонатора,  $P_0$  - подводимая к диоду мощность постоянного тока. Максимальная эффективность генерации определялась путем оптимизации напряжения смещения и амплитуды первой гармоники. Частотная характеристика диода с указанными параметрами показана на рис.1а. Одна из оптимизированных по амплитуде переменной составляющей напряжения зависимостей эффективности от напряжения смещения показана на рис.1б.

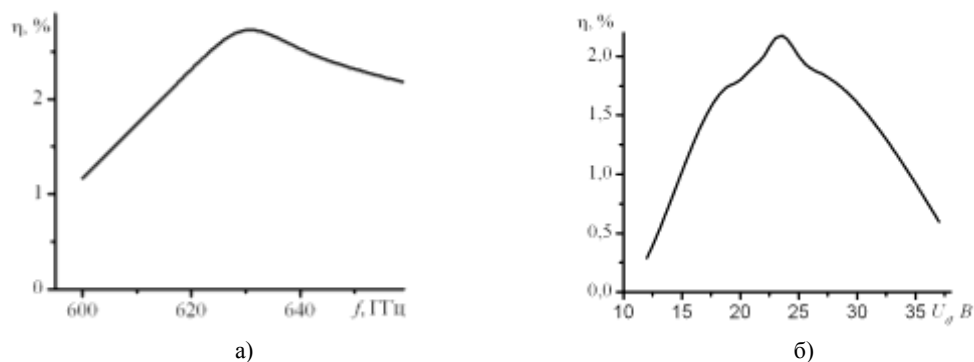


Рис. 1. Зависимость эффективности от частоты - а) и от напряжения смещения для одной из частот из а) - б).

Максимальная эффективность генерации для выбранного диода соответствовала частоте 630 ГГц, которая и была выбрана для последующего анализа, а оптимальное для генерации напряжение смещения - 20 – 25 В.

С целью обеспечения максимальной эффективности генерации были рассмотрены различные профили легирования в активной области и в области зарубки. При этом во всех рассмотренных случаях длина области пониженного легирования оставалась неизменной.

Следует отметить, что уровень легирования – критический параметр для диода с междолинным переносом электронов. Нижний предел уровня легирования связан с условием образования стационарно движущихся доменов сильного поля и связан с критерием Крамера. Если напряжение смещение немного превышает пороговое значение для эффекта МПЕ в диоде возникают волны пространственного заряда. Верхний - соответствует такой концентрации, при которой в диоде возникает стабильный анодный домен. При напряжении смещения, превышающем некоторую критическую величину, в отсутствие ударной ионизации в диоде возникает статический домен на аноде.

Для диодов на основе нитридов ситуация осложняется значительным сокращением ширины вольт-амперной характеристики при уменьшении длины диода по сравнению, например, с арсенидом галлия [9].

Для получения максимальной эффективности работы диода было проанализировано влияние уровня легирования в активной области ( $N_{d3}$ ), в зарубке ( $N_{d2}$ ) и приконтактных областях ( $N_{d1}, N_{d4}$ ) без учета ударной ионизации. Результаты моделирования приведены на рис. 2.

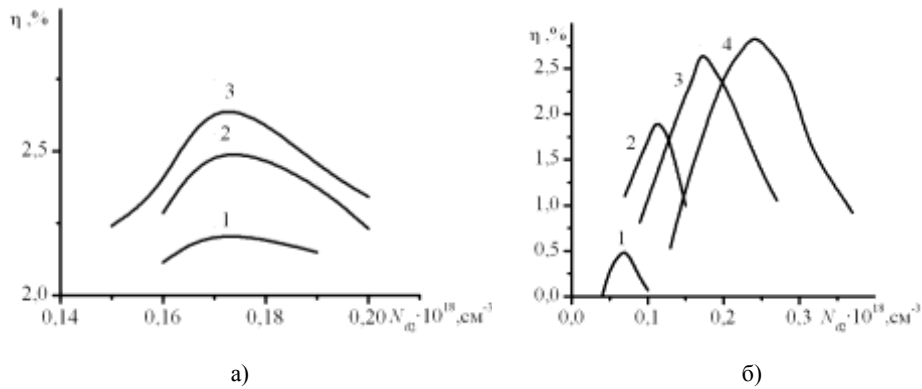


Рис. 2 Зависимость эффективности генерации от концентрации в области зарубки  $N_{d2}$ : а) -  $N_{d3} = 0,4 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , 1 -  $N_{d1} = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , 2 -  $N_{d1} = 1,1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , 3 -  $N_{d1} = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ ; б) 1-  $N_{d3} = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , 2-  $N_{d3} = 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , 3-  $N_{d3} = 3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , 4-  $N_{d3} = 4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ .

Как следует из рис.2, максимальная эффективность зависит как от концентрации в активной области ( $N_{d3}$ ), так и от концентрации в пассивной области диода (областях, примыкающих к контактам). Уменьшение концентрации в приконтактных областях положительно сказывается на эффективности генерации и обусловлено уменьшением величины напряженности электрического поля в  $p^+-p$  переходе.

Кроме того, из сравнения зависимостей на рис. 2а и 2б видно, что с повышением уровня легирования активной области оптимальное значение концентрации в зарубке также увеличивается. Это детально показано на рис. 2б, из которого следует, что эффективность генерации растет одновременно с увеличением как концентрации в активной области, так и в области зарубки, что свидетельствует о наличии их оптимального соотношения, которое оказалось равным  $N_{d2} / N_{d3} = 0,6$ .

Исходя из полученных результатов, можно предположить дальнейший рост эффективности генерации с увеличением концентраций. Однако, численный анализ показывает, что исчезновение волны пространственного заряда сопровождается сильным повышением электрического поля в прианодной области, и при рассмотренных концентрациях, напряженность электрического поля в аноде достигает величины  $\sim 2200 \text{ кВ}$ . Это свидетельствует о возможности появления ударной ионизации, порог возникновения которой, по разным оценкам лежит близко к диапазону  $2500 - 3000 \text{ кВ/см}$ . Если же принять во внимание разогрев анодной области при протекании электрического тока, то данная величина может быть еще меньше.

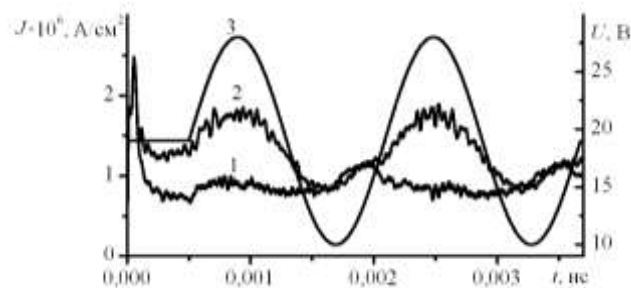
Мы описываем ударную ионизацию, используя вероятность ударной ионизации в виде [10]:

$$W_{ii}(E) = 2,5 \cdot 10^6 (E - E_p)^8 \sigma(E - E_p), \quad (2)$$

где  $E$  - энергия электрона в эВ,  $E_p = 4 \text{ эВ}$  - пороговая энергия ударной ионизации,  $\sigma$  - ступенчатая функция Хевисайда.

Это выражение, по сравнению с неэмпирическими результатами для GaN, обладает аналогичными экспоненциальными и пороговыми значениями. Используется кусочно-линейная зависимость между начальным и конечным значением энергии электронов.

Зависимости плотности тока от времени для диода с  $N_{d2} = 1,1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$  и  $N_{d3} = 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$  при  $U_0 = 19 \text{ В}$  и  $U_1 = 9 \text{ В}$ , полученные с учетом и без учета ударной ионизации, показаны на рис.3.



1 – без ударной ионизации, 2 – с ударной ионизацией, 3 – форма напряжения.

Рис. 3. Зависимость плотности тока через диод (кривые 1,2) и напряжения (3) от времени.

Видно, что в положительный полупериод напряжения наблюдается увеличение плотности тока, в то время как в отрицательный полупериод величина тока с ударной ионизацией совпадает с величиной тока без ударной ионизации. Несмотря на изменение формы тока, когерентность колебаний практически не нарушается, пробой не наступает, но имеет место инициированная электронами ударная ионизация и восстановление стационарного состояния через вынос избыточных носителей заряда через контакты. Однако, как следует из рис. 3, ток и напряжение большую часть периода находятся в фазе - генерация отсутствует.

С целью уменьшения влияния ударной ионизации рассматривалась и область малых напряжений смещения (рис. 1 б), однако эффективность генерации в этом случае не превысила десятые доли процента.

Таким образом, ударная ионизация в области сильного поля волны пространственного заряда может стать основным препятствием для получения генерации диодами на основе GaN с длиной активной области менее 0,3 – 0,25 мкм.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ работы коротких диодов на GaN показал, что в диодах на основе GaN, сокращая длину активной области, теоретически можно получать все более высокие частоты при соответствующем выборе величины концентрации. Для рассмотренного диода с профилем легирования  $n^+ - n^- - n - n^+$  с протяженностью  $n^-$  - области  $\sim 0,05$  мкм оптимальное соотношение между концентрациями в  $n$  и  $n^-$  областях для получения максимальной эффективности оказалось равным  $\sim 0,6$ , а сама эффективность постоянно увеличивается при повышении концентрации в  $n$  - области в диапазоне рассмотренных значений ( $10^{17} - 4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ).

Моделирование работы диодов с длиной активной области менее 0,3 мкм в резонансно – пролетном режиме, проведенное с учетом ударной ионизации продемонстрировало негативное влияние этого механизма на генерацию вплоть до ее исчезновения. Можно отметить, что ударная ионизация возникала локально в области с максимальной напряженностью поля и не приводила к образованию лавинного пробоя.

Полученный результат ставит под сомнение использование GaN как материала для диодов с длинами менее 0,3 мкм, а значит, и получение на них генерации на частотах более 700 ГГц. Это в равной степени относится и к диодам, использующим соединения InGaN, для которых предельные длины могут оказаться значительно больше указанной величины, а также варизонным диодам с анодной областью из InN [11].

Вопрос об использовании соединений AlGaIn требует отдельного рассмотрения, однако, можно констатировать, что уже при молярной доле Al  $x = 0,2$  происходит заметное увеличение пороговых напряженностей [9] и диоды на таком материале, по – видимому, будут более устойчивы к ударной ионизации.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. <http://www.ecse.rpi.edu/shur/sdm2/Notes/Notespdf/19WideBandGapMaterials.pdf>
2. Aleskseev E. and Pavlidis D. Microwave potential for GaN-based Gunn devices// Electronic Letters. – 2000. – Vol.36. –No.2. – P.176-178.
3. Alekseev E., Eisenbach, A., Pavlidis, D., Hubbard, S. M. ; Sutton, W. Development of GaN-based Gunn-Effect Millimeter-Wave Sources WOCSDICE -WORKSHOP Compound semiconductor devices and integrated circuits; WOCSDICE 2000 Workshop; 24th, Compound semiconductor devices and integrated circuits; WOCSDICE 2000. - XII-5-6
4. E. A. Barry, V. N. Sokolov, K. W. Kim, and R. J. Trew, “Terahertz generation in GaN diodes in the limited space-charge accumulation mode,” J. Appl. Phys. – 2008. – Vol. 103. – No. 12. – P. 126- 101.
5. E. A. Barry, V. N. Sokolov, K. W. Kim, and R. J. Trew. Large-signal analysis of terahertz generation in submicrometer GaN Diodes, IEEE Sens. J. –2010. 10, P. 765-771.
6. Боцула О.В., Прохоров Э.Д., Частотные свойства междолинного переноса электронов в нитриде галлия// Техника и приборы СВЧ. – 2011. – №1. – С.24-28.
7. A. Íñiguez-de-la-Torre1, I. Íñiguez-de-la-Torre, J. Mateos, T. González, P. Sangaré, M. Faucher, B. Grimbert, V. Brandli, G. Ducournau and C. Gaquière Searching for THz Gunn oscillations in GaN planar nanodiodes // J. Appl. Phys. – 2012 111, 113705
8. Боцула О.В. Прохоров Э.Д., Заиченко С.В., Павленко Л.В., Моторнюк С.В.. Эффективность генерации и частотные свойства диодов с МПЭ на основе GaN, Материалы 22 Межд. Крымской конф.-“ СВЧ техника и телекоммуникационные технологии”, Севастополь, КрыМиКо-2012. – т.2. – С.171-172.
9. Павленко Д. В., Прохоров Э. Д. Ширина вольтамперных характеристик диодов Ганна на основе  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$  // Радиопизика и электроника. - Харьков: Ин-т радиопизики и электрон. НАН Украины. - 2006. - 11. № 2. - С. 291-297.
10. C. Bulutay Electron Initiated Impact Ionization in AlGaIn Alloys Semicond//Sci. Technol. – 2002. – No.17. – P.59–62.
11. I.P. Storozhenko, A.N. Yaroshenko, M.V. Kaydash Graded-gap AlInN Gunn diodes Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. – 2012. – Vol. 15. – No.2. – P. 176-180.

УДК 550.34:550.510.533

## ИОНОСФЕРА КАК ИНДИКАТОР ПРОЦЕССОВ В ОКОЛОЗЕМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ТРОПОСФЕРЕ И ЛИТОСФЕРЕ

И. Г. Захаров

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, Харьков, 61022, Украина, e-mail: giz-zig@ukr.net

Поступила в редакцию 25 апреля 2013 г.

По данным о критической частоте области F2 ионосферы рассмотрены возможные причины высокой изменчивости ионосферы ото дня ко дню под влиянием процессов в геокосмосе, тропосфере и литосфере. Показано, что даже при отсутствии мощных событий ионосфера испытывает влияние как «сверху», так и «снизу», при этом ионосфера может реагировать на внешнее воздействие как открытая диссипативная система.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** ионосфера, критическая частота области F2, изменчивость ото дня ко дню.

За даними про критичну частоті області F2 іоносфери розглянуто можливі причини високої мінливості іоносфери від доби до доби під впливом процесів у геокосмосі, тропосфері і літосфері. Показано, що навіть за відсутності потужних подій іоносфера відчуває вплив як «зверху», так і «знизу», при цьому іоносфера може реагувати на зовнішній вплив як відкрита дисипативна система.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** іоносфера, критична частота області F2, мінливість від доби до доби.

The possible reasons for the high variability of the ionosphere from day to day under influence of the processes in the geospace, the troposphere and lithosphere is considered using critical frequency of the ionospheric F2 region data. It is shown that even in the absence of powerful events ionosphere is influenced by both the "top" and "bottom", and the ionosphere may be respond to external action an open dissipative system.

**KEY WORDS:** ionosphere, critical frequency of F2 region, variability from day to day.

### ВВЕДЕНИЕ

За длительную историю ионосферных исследований сложились стереотипные представления о поведении ионосферы: в спокойных условиях значения ионосферных параметров флуктуируют вокруг некоторых средних значений; значительные отклонения наблюдаются после начала геомагнитной бури (ГМБ) и других возмущений; имеются особенности отклика на возмущение в дневных и ночных условиях. Однако это далеко не так. На рис. 1 в качестве примера приведены изменения критической частоты области F2 ионосферы  $f_0F2$  ото дня ко дню в различные часы суток. Несмотря на достаточно спокойные условия в геокосмосе (умеренная 27-суточная периодичность солнечной активности (СА) при наличии умеренных ГМБ (на рисунке не показаны), характер изменчивости  $f_0F2$  ото дня ко дню различается даже в близкие часы суток, при этом в 16 LT изменения  $f_0F2$  следуют за изменениями СА; в вечерние часы (20 LT) – проявляется влияние солнечной и геомагнитной (ГМА) активностей, в 12 LT наблюдаются 3-4 суточные колебания с одним и тем же размахом, явным образом не зависящие от СА и ГМА. В некоторых случаях такие 3-4 суточные вариации  $f_0F2$  наблюдаются в течение всех суток на протяжении нескольких недель.

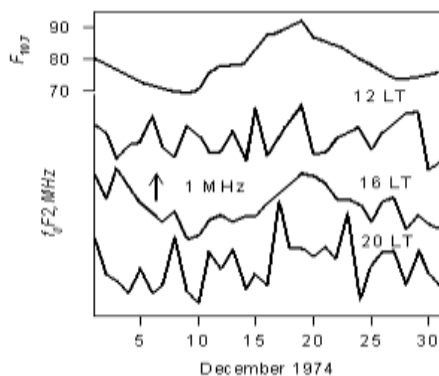


Рис. 1. Пример резкого изменения характера вариаций  $f_0F2$  (Боулдер) ото дня ко дню в различные часы суток

Таким образом, значительные изменения параметров ионосферы ото дня ко дню наблюдаются и при отсутствии мощных источников влияния. Можно предположить, что в ионосфере существуют всегда или создаются достаточно часто условия, при которых внешнее влияние проявляется значительно сильнее или иным образом, чем это следует из известных физических моделей ионосферы. Не случайно поиск причин высокой изменчивости ионосферы является одной из наиболее актуальных и сложных задач современной физики ионосферы [1].

Цель работы – изучить особенности постоянно существующей изменчивости ионосферы под одновременным воздействием факторов космической погоды, тропосферы и литосферы на примере одного из основных параметров – критической частоты области F2 ионосферы  $f_0F2$ . Учитывая, что высокая изменчивость ионосферных параметров наблюдается и за пределами мощных событий, представляется целесообразным рассмотреть этот вопрос

для длительного интервала времени без разделения условий в ионосфере на спокойные и возмущенные.

В работе использованы ежедневные данные двух ионосферных станций, расположенных на большом расстоянии друг от друга (для учета роли локальных эффектов): Боулдер (40 N; 255 E) и Хабаровск (48 N; 135 E) за период с октября 2010 по декабрь 2011 года в 00, 04 (ночные условия), 12 и 16 (дневные условия) часов местного времени (LT). Обычно используют данные для 00 и 12 LT; в данном случае дополнительно использованы данные для 04 и 16 LT, которые благодаря инерционности ионосферных процессов лучше отражают типичные дневные и ночные условия в ионосфере, а также позволяют оценить изменчивость ионосферы в течение дня или ночи.

Для учета различных влияний на ионосферу использованы следующие данные: СА: число Вольфа  $W$  и плотность потока радиоизлучения Солнца  $F_{10.7}$  – отражают изменения ионизирующего волнового излучения; ГМА: индекс  $A_p$  – косвенно отражает динамические процессы в ионосфере, в том числе сопровождающиеся изменениями нейтрального состава; приземное атмосферное давление (ПАД): косвенно отражает перестройки атмосферной циркуляции с созданием условий, благоприятных для проникновения в ионосферу акустико-гравитационных волн; данные о землетрясениях (ЗТ): число ЗТ с магнитудой  $M > 5$ , которое является удобным индикатором уровня глобальной сейсмической активности (ГСА) [2]. Данные об атмосферном давлении взяты с сайта [www.gismeteo.ru](http://www.gismeteo.ru), о ЗТ – с сайта [www.ncedc.org](http://www.ncedc.org), все остальные данные – с сайта <http://sec.noaa.gov/Data>.

Исследования проведены с использованием спектрального анализа и метода наложенных эпох с проверкой достоверности результатов расчетов по критерию Фридмана [3]. Рассматривались изменения  $f_0F2$  ото дня ко дню для так называемых "изолированных" событий, т.е. достаточно резких изменений внешних факторов после периода относительного затишья, что исключало возможность наложения эффектов от двух близких возмущений. Спектры рассчитывались по данным за каждые 60 дней: так как речь идет о возмущениях, имеющих ограниченную длительность проявления, целесообразно максимально уменьшить длину ряда, но до уровня, обеспечивающего получение достоверного результата.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим сначала изменения в ионосфере, тропосфере и литосфере после начала изолированных ГМБ. В целом, выбранные геомагнитные возмущения не были сильными: максимальные значения  $A_p$  достигли 67. Видимо, поэтому достаточно очевидным эффект ГМБ в ионосферных данных на обеих станциях был только для ночных условий (уменьшение  $f_0F2$  после первоначального увеличения), тогда как в дневные часы имели место квазипериодические флуктуации  $f_0F2$ .

Заслуживает внимания достоверный ( $p < 0,05$ ) скачок ПАД на обеих станциях после начала ГМБ. В последние годы получены достаточно убедительные свидетельства влияния космической погоды на процессы в тропосфере, при этом отмечается [4], что эта связь осуществляется на основе триггерных механизмов, так как энергия ГМБ на 4 – 5 порядков ниже энергии тропосферных циклонов.

Изменения ионосферных и тропосферных показателей на каждой из станций имели очевидные сходства (рис. 2) и заметно отличались от результатов для другой станции, при этом связь проявилась без заметного запаздывания по времени.

Резкие изменения ПАД в Хабаровске или в Боулдере сопровождались определенными изменениями в ионосфере с запаздыванием не более суток, более выраженными в 04 и 12 LT. Отметим, что ПАД в Боулдере и Хабаровске изменялось в противофазе ( $p < 0,05$ ). Учитывая, что между этими городами десятки тысяч километров, для такой синхронизации необходимо наличие закономерностей в поведении атмосферы планетарного масштаба, например, перемещения больших масс воздуха, в том числе между полушариями [5]. Значения  $f_0F2$  ото дня ко дню на двух станциях также проявляли тенденцию к изменению в противофазе, но она не была очевидной на фоне вариаций другой природы. На основании приведенных данных не ясно, можно ли отнести изменения  $f_0F2$  к влиянию тропосферы, так как одновременно наблюдались заметные изменения ГМА, хотя и на низком среднем уровне.

Число ЗТ с  $M > 5$  после начала ГМБ резко увеличилось примерно с 5 до 30. Такой выраженный эффект обусловлен мощной серией ЗТ вблизи Японии 11 марта 2011 г. (около 280 ЗТ с  $M > 5$  в течение суток!), однако, при использовании для расчета ранжированных значений, эффект, хоть и слабый, сохраняется ( $p > 0,1$ ). О возможности «триггерного» запуска подготовленных ЗТ при изменении ГМА многократно отмечалось в литературе (см, например, [6, 7]), хотя механизмы такого явления, если оно реально, пока не ясны.

Более выраженный результат ( $p > 0,05$ ) в изменении числа ЗТ получен после скачка ПАД, а максимальный эффект ( $p > 0,01$ ) наблюдался после резкого изменения разности давлений между Хабаровском и Боулдером (рис. 3). Напомним, что во всех вариантах расчетов изменения ПАД на этих станциях изменялись преимущественно в противофазе, что можно объяснить наличием крупномасштабных потоков воздушных масс. Отметим, что именно такой процесс рассматривают как один из механизмов запуска подготовленных ЗТ (см., например, [5]), так как изменение силы при

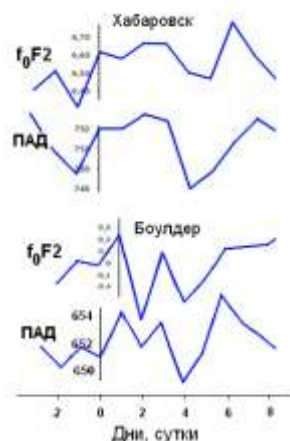


Рис.2. Сравнение изменений ото дня ко дню  $f_0F2$  в 00 LT с изменениями приземного атмосферного давления

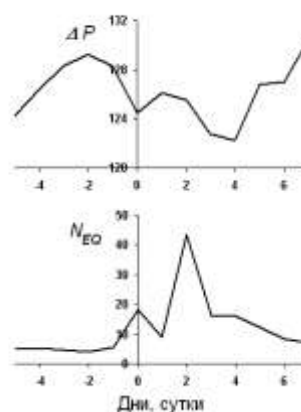


Рис.3. Связь изменений разности давлений в Хабаровске и Боулдере и числа землетрясений с  $M > 5$

переходе от антициклона к циклону, действующей на земную поверхность на площади типичного циклона, составляет  $10^{15} - 10^{16} \text{Н}$ , что равно весу такой горы как Эльбрус. В частности, получено [5], что усиление числа ЗТ с  $M > 5,5$  происходит после резкого уменьшения разности давлений между Восточной Сибирью и западным побережьем Северной Америки, что согласуется, в целом, с нашими результатами.

Рассмотрим реакцию  $f_0F2$  и других параметров на резкие изолированные усиления ГСА после периода относительного затишья, а именно после увеличения числа ЗТ с  $M > 5$ . Отметим, прежде всего, небольшие по величине, но значимые ( $p > 0,05$ ) изменения индекса  $A_p$  после резкого усиления ГСА (рис. 4), при этом уровень ГМА остался, в целом, низким ( $A_p < 10$ ). Этот результат, в целом, согласуется с полученными ранее [8].

Изменения П АД и  $f_0F2$  после резкого усиления ГСА имели сложный характер, который трудно однозначно связать с влиянием ГСА несмотря на достаточно высокий уровень значимости:  $p > 0,01$  для П АД и  $f_0F2$  в 00 LT и  $p > 0,05$  для  $f_0F2$  в другие часы суток. Однако очевидным, как и в случае с влиянием «сверху», является сходство изменений П АД и  $f_0F2$  на каждой из станций (рис. 5: приведен пример для Хабаровска). Полученный результат наглядно демонстрирует целесообразность комплексного анализа с использованием данных для нескольких «геосфер»: несмотря на достоверный результат об изменении ионосферных показателей после усиления ГСА, более очевидным является отклик ионосферы на процессы в тропосфере. Этот результат не исключает наличия реакции  $f_0F2$  на процессы в литосфере, но в данном случае эта реакция не проявилась или незаметна на фоне вариаций другой природы.

Приведенный пример показывают, что даже самый тщательный отбор данных не позволяет избавиться от влияния других факторов на исследуемый показатель. Более того, часто проявляется тенденция к синхронизации процессов в разных геосферах. В частности, если обычно в спектрах ионосферных данных имеются только отдельные общие периоды со спектрами ГМА и П АД, то при наличии сходства временных вариаций ГМА и П АД сходными становятся спектры в целом (рис. 6). Таким образом, развитие квазисинхронных процессов в нескольких «геосферах» одновременно – это достаточно типичное явление, найти объяснение которому в рамках известных механизмов сложно, т.к. возникают ограничения как по времени развития отклика, так и по энергии процессов.

Обычно при анализе влияния различных факторов на ионосферу рассматривают явления, в которых внешний фактор за счет привнесенной энергии полностью определяет вариации ионосферного параметра, при этом величина отклика пропорциональна величине воздействия. Частое отсутствие ожидаемого пропорционального отклика на внешнее воздействие, наличие квазисинхронных изменений характеристик разных геосфер указывает на необходимость привлечения к объяснению высокой изменчивости ионосферы ото дня ко дню, наряду с известными, принципиально иных, «информационных» механизмов, которые лишь запускают ионосферный процесс, а его развитие определяется энергией системы. Наличие значительной энергии, запасенной в ионосфере (тепловая энергия ионосферной плазмы составляет величину  $10^{12} - 10^{13}$  Дж [9]), способно обеспечить их протекание. Как известно, подобные механизмы широко рассматриваются при анализе возможного влияния СА на земную погоду и биосферу [4]. Скорее всего, одновременно может реализовываться несколько механизмов. В конечном счете, подобный «информационный» обмен может привести к установлению квазисинхронных изменений в различных оболочках земной атмосферы. Таким образом, даже при отсутствии мощных возмущений ионосфера на протяжении длительных периодов или даже непрерывно «чувствует» влияние как «сверху», так и «снизу». Такие процессы характерны для системы Земля – атмосфера – геокосмос как открытой динамической нелинейной системы [9].



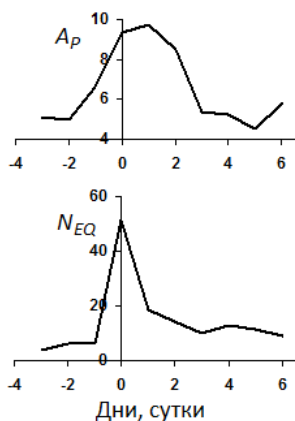


Рис. 4. Изменения геомагнитной активности после усиления глобальной сейсмической активности

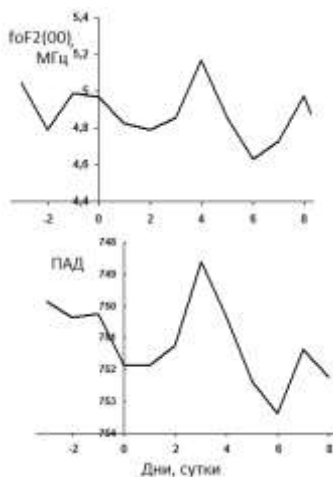


Рис. 5. Изменения ПАД и  $f_0F2$  в Хабаровске после усиления глобальной сейсмической активности

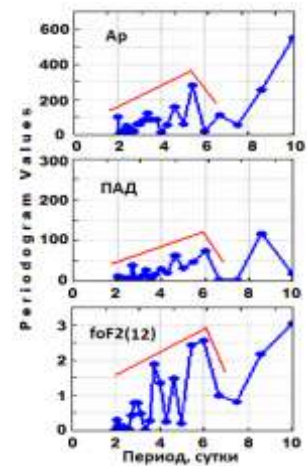


Рис. 6. Пример сходства спектров геомагнитных, тропосферных и ионосферных показателей

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что процессы в одной из геосфер, в том числе типичные, которые не могут быть отнесены к мощным возмущениям, сопровождаются определенными изменениями в ионосфере и в других «геосферах». При этом зафиксированный отклик, по своему характеру и амплитуде, не всегда можно объяснить известными физическими механизмами, что требует для их объяснения привлечения принципиально иных подходов. Прежде всего, часть установленных вариаций ионосферы ото дня ко дню может быть обусловлена откликом ионосферы как открытой динамической системы, при этом внешний фактор выполняет роль спускового крючка, а отклик определяется внутриионосферными процессами. Это, прежде всего, флуктуационный характер изменений  $f_0F2$  в околополуденные часы, связь изменений в ионосфере и тропосфере при отсутствии мощных источников возмущения в тропосфере. Нельзя исключить также возможности появления квазисинхронных вариаций в системе литосфера – тропосфера – ионосфера – геокосмос.

Полученные результаты указывают на возможность генерации и протекания процессов в магнитосфере, ионосфере и тропосфере как в единой нелинейной открытой системе, в которой даже малые внешние воздействия или изменения в одной из подсистем могут сопровождаться заметными изменениями параметров системы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pulinets S., Boyarchuk K. Ionospheric Precursors of Earthquakes. Springer-Verlag, – Berlin Heidelberg, 2004. – 315 p.
2. Bogdanov, Yu. A., and I. G. Zakharov. Electromagnetic and acoustic emissions associated with seismic activity // Proceeding of the 6<sup>th</sup> Int. Conference “Problem of Geocosmos”. –St. Petersburg, Petrodvorets, May 23-27, 2006. – P. 357-360.
3. Браунли К.А. Статистическая теория и методология в науке и технике. – М.: Наука, 1977. –245 с.
4. Пудовкин М.И. Влияние солнечной активности на состояние нижней атмосферы и погоды // Соровский образовательный журнал. – 1996. – № 10. – С. 106 – 113.
5. Гордиец Б.Ф., Марков М.Н., Шелепин Л.А. Солнечная активность и Земля. –М.: Знание, 1980. – 64 с.
6. Белов С.В., Шестопалов И.П., Харин Е.П. О взаимосвязи эндогенной активности с солнечной и геомагнитной активностью // Доклады АН. – 2009. – Т. 428, № 1. – С. 104 – 108.
7. Закржевская Н.А., Соболев Г.А. Влияние магнитных бурь с внезапным началом на сейсмичность в различных районах // Вулканология и сейсмология. – 2004. – № 3. – С. 63 – 75.
8. Тертышников А.В. Оценка практической значимости геомагнитных предвестников сильных землетрясений // Гелиогеофизические исследования. – 2013. – Вып. 3. – С. 63 – 70.
9. Черногор Л.Ф. Земля – атмосфера – ионосфера – магнитосфера как открытая динамическая нелинейная физическая система. 1 // Нелинейный мир. – 2006. – Т. 4, № 12. – С. 655 – 697.

УДК 517.9:535.4

## ЭКРАНИРОВКА СФЕРОЙ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ ПОЛЯ ПОПЕРЕЧНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ, РАЗМЕЩЁННОГО В ШАРЕ

**В.А. Резуненко**

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина  
e-mail: [rezunenko@univer.kharkov.ua](mailto:rezunenko@univer.kharkov.ua)  
Поступила в редакцию 10 апреля 2013 г.

Изучается экранировка сферой с круговым отверстием поля поперечного электрического диполя, который размещён в диэлектрическом шаре. Для решения задачи в строгой постановке использованы метод регуляризации четырёх отдельных функциональных сумматорных уравнений, метод интегральных преобразований, выделения и обращения главных частей сумматорных уравнений. Получены две несвязанные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений второго рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве  $l_2$ . Каждая система эффективно разрешима. Рассмотрены некоторые резонансные частоты структуры.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** сфера с отверстием, поперечный электрический диполь, шар, интегральные уравнения, две системы алгебраических уравнений II рода, компактные операторы, резонансные частоты.

Вивчається екранування сферою с круговим отвором поля поперечного електричного диполя, розміщеного у діелектричну кулю. Для розв'язку задачі у строгій постановці використано метод регуляризації чотирьох окремих функціональних сумматорних рівнянь, метод інтегральних перетворень, виділення і обертання головних частин сумматорних рівнянь. Одержано дві незв'язані нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду з компактним оператором у гільбертовому просторі  $l_2$ . Кожна система ефективно розв'язна. Розглянуті деякі резонансні частоти структури.

**КЛЮЧЕВІ СЛОВА:** сфера з отвором, поперечний електричний диполь, куля, інтегральні рівняння, дві системи алгебраїчних рівнянь II роду, компактні оператори, резонансні частоти.

We study the transverse electrical dipole field. The dipole is screened by a sphere with circular aperture and a ball. The method of regularization in the strict formulation for four functional summarized equations is used. The method of the integral transformations is applied. The principal parts of the summarized equations are isolated and inverted. Two disconnected systems of the linear algebraic equations of the second kind with the compact operator in the Hilbert space  $l_2$  are obtained. Each system is effectively solvable. Some resonance frequencies of the structures are examined.

**KEY WORDS:** the sphere with aperture, transverse electrical dipole, the ball, integral equations, two systems algebraic equations of the second kind, the compact operators, resonance frequencies.

### ВВЕДЕНИЕ

Численно – аналитические методы решения и анализа задач радиофизики базируются на наиболее эффективных методах теоретической радиофизики, математической физики, вычислительной электродинамики, моделирования и информатики [1–12, 14–17]. Большую роль в этом направлении играет исследование задач на классических, в том числе, сферических поверхностях. Сфера с круговым отверстием имеет широкое применение. Она может рассматриваться прототипом многих устройств и узлов, в том числе резонаторов, зондов, антенн кругового обзора, экранирующих поверхностей. Изучение распределения поля электрического диполя, помещённого в материальную среду шара, и расположенного вблизи отражающих поверхностей, также является классической задачей и имеет многочисленные приложения, например в мобильной связи, в интроскопии. Для решения задач рассеяния, дифракции и экранировки волн различными, в том числе и сложными сферическими структурами, известны эффективные методы решения прямых и обратных задач. К таким методам относится, в частности, метод полуобращения матричных и интегральных операторов задачи [3–8, 10–11, 14]. Метод полуобращения сравнительно хорошо себя зарекомендовал при исследовании резонансных эффектов, когда характерные размеры рассеивающих структур сравнимы с длинами падающих волн. В данной работе методом полуобращения матричного и интегрального операторов построено решение задачи экранировки идеально проводящей сферой с круговым отверстием поля поперечного электрического диполя, который размещён внутри диэлектрического шара. Получена и исследована система двух несвязанных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений второго рода с компактными матричными операторами в гильбертовом пространстве. Рассмотрены варианты постановки задачи. Рассмотрены некоторые резонансные частоты структуры.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Разместим начало декартовой и сферической систем координат в общий геометрический центр сферы с круговым отверстием и концентрического шара. Пусть ось  $OZ$  есть ось симметрии структуры, и плоскость среза сферы с круговым отверстием ориентирована перпендикулярно оси  $OZ$ . Радиус сферы с отверстием полагаем равным  $a$ , полярный угол ребра среза сферы полагаем равным  $\theta_1$ , на отверстии  $\theta \in (\theta_1; \pi]$ . Радиус шара выбираем равным  $d$ ,  $0 < d < a$ . Электрический диполь помещаем внутри шара на оси  $OZ$  на расстоянии  $b$  от начала системы координат,  $0 \leq b < d < a$ ; момент диполя  $\vec{p}$  направляем параллельно оси  $OX$ . Сферу с отверстием полагаем идеально проводящей бесконечно тонкой, шар – диэлектрическим. Полные поля должны: удовлетворять уравнениям Максвелла всюду вне границ структур и вне точки размещения диполя; удовлетворять граничным условиям, в частности, тангенциальные компоненты  $E_\theta$ ,  $E_\varphi$  полного электрического поля должны обращаться в нуль на сфере с отверстием; удовлетворять условиям конечности интеграла энергии в любой ограниченной области пространства  $R^3$ , в том числе области, содержащей ребро сферы с отверстием и не содержащей диполь; удовлетворять условию излучения на бесконечности. В такой постановке задача имеет единственное решение.

### ПОТЕНЦИАЛЫ ДЕБАЯ И СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения задачи используем метод частичных областей и метод суперпозиции. Зависимость от времени полагаем гармонической  $\exp(-i\omega t)$  с круговой частотой  $\omega$ . Для уравнений Максвелла в сферической системе координат применяем метод разделения переменных Фурье. Компоненты полных полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  представляем в виде векторных дифференциальных форм полных скалярных потенциалов Дебая:  $u$  – электрического и  $v$  – магнитного. Полные потенциалы должны быть решением уравнения Гельмгольца  $\Delta U + k^2 U = 0$ , где для вакуума волновое число  $k = \omega/c$ ,  $c$  – скорость света. Полные потенциалы ищем в виде комбинаций потенциалов диполя  $u^0$ ,  $v^0$  и вторичных потенциалов  $u^i$ ,  $v^i$   $i=1,2,3,4$  такого вида:  $u = u^0 + u^1$ ,  $v = v^0 + v^1$  в области I ( $0 \leq r < d$ );  $u = u^2 + u^3$ ,  $v = v^2 + v^3$  в области II ( $d < r < a$ );  $u = u^4$ ,  $v = v^4$  в области III ( $r > a$ ). Из векторных граничных условий для полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  на границе (диэлектрического) шара получаем для потенциалов Дебая систему шести линейных алгебраических уравнений. Отметим, что матрица коэффициентов этих уравнений имеет блочный вид. Решив систему шести уравнений, приходим к известному выводу, что на границе шара граничные условия для потенциалов Дебая разделяются. Анализ граничных условий для полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  на идеально проводящей сфере с отверстием и на отверстии в сфере приводит к анализу граничных условий для потенциалов Дебая на поверхности сферы и на отверстии. В результате приходим к нахождению решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\sin\theta \frac{d^2}{d\theta^2} F(\theta) + \cos\theta \frac{d}{d\theta} F(\theta) - \frac{1}{\sin\theta} F(\theta) = 0. \quad (1)$$

Коэффициенты этого уравнения имеют корни и особенности на сегменте  $\theta \in [0, \pi]$  [4–8, 14]. Это уравнение есть специальный нестандартный случай уравнения для присоединенных функций Лежандра. Общее решение уравнения (1) может быть представлено несколькими вариантами, которые есть линейная комбинация друг друга, например:

$$F(\theta) = C_1 \operatorname{tg}[\theta/2] + C_2 \operatorname{ctg}[\theta/2], \quad F(\theta) = C_3 (\sin\theta)^{-1} + C_4 \operatorname{tg}\theta.$$

Величины констант  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  являются важными для формирования граничных условий на (металлической) сфере с отверстием и на отверстии в сфере (на щели). Единственным решением, которое обеспечивает выполнение одновременно граничных условий для потенциалов Дебая и на металле и на щели сферы есть частное решение [4–8, 10–12, 14], для которого константы являются нулевыми  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ . Значит, частное решение для (1) должно быть нулевым

$F_0(\theta)=0$ , и тогда на металле и на щели сферы граничные условия для потенциалов Дебая разделяются. Так, на щели граничные условия таковы:

$$\frac{\partial}{\partial r}[r(v^2 + v^3)] = \frac{\partial}{\partial r}[r(v^4)], \quad [u^2 + u^3] = u^4, \quad r = a, \quad \theta \in (\theta_1, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (2)$$

Отметим, что исходное поле поперечного электрического диполя и вторичные поля независимо от факта разделения или неразделения граничных условий для потенциалов Дебая являются полями ТЕМ типа. Аналогичные разделения граничных условий для потенциалов Дебая стали давно общепринятыми, например, для задач дифракции электромагнитных волн на бесконечном идеально проводящем цилиндре с продольной щелью. Для нашей задачи на сфере с отверстием в результате разделения граничных условий для потенциалов Дебая пришли к смешанным граничным задачам Неймана и Дирихле для уравнения Гельмгольца. Для решения этих задач применим метод разделения переменных Фурье в сферической системе координат и представим два потенциала диполя и восемь вторичных потенциалов рядами Фурье – Бесселя – Лежандра, учтя области, в которых ищем потенциалы. Для диполя (в области I) получаем:

$$u^0 = \frac{\cos \varphi}{br} \sum_{n=1}^{\infty} F(n) C_n P_n^1(\cos \theta) \begin{cases} \psi_n^1(k_1 b) \xi_n(k_1 r), & b < r < d, \\ \xi_n^1(k_1 b) \psi_n(k_1 r), & 0 < r < b, \end{cases} \quad (3)$$

$$v^0 = \frac{\sin \varphi}{br} \sum_{n=1}^{\infty} F(n) C_n P_n^1(\cos \theta) \begin{cases} \psi_n(k_1 b) \xi_n^1(k_1 r), & b < r < d, \\ \xi_n(k_1 b) \psi_n^1(k_1 r), & 0 < r < b, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$F(n) = (-1)^n, \quad z < 0, \quad F(n) = 1, \quad z > 0, \quad C_n = (2n+1)[n(n+1)]^{-1}. \quad (5)$$

В рядах (3) и (4)  $P_n^1(\cos \theta)$  – присоединённые функции Лежандра первого рода первой степени порядка  $n \geq 1$  аргумента  $\cos \theta$ ;  $\psi_n(x)$ ,  $\xi_n(x)$  – сферические функции Бесселя и Ханкеля первого рода в обозначениях Дебая аргумента  $x$ . Здесь и далее  $(\varepsilon_0, \mu_0, \sigma_0, k_0)$ ,  $(\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1, k_1)$  – материальные и волновые параметры вакуума и шара соответственно. Для вторичных потенциалов в области II ( $d < r < a$ ) ряды запишем так:

$$u^2 = \frac{\cos \varphi}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 C_n \xi_n(k_0 r) P_n^1(\cos \theta), \quad v^2 = \frac{\sin \varphi}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 C_n \xi_n(k_0 r) P_n^1(\cos \theta), \quad (6)$$

$$u^3 = \frac{\sin \varphi}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 C_n \psi_n(k_0 r) P_n^1(\cos \theta), \quad v^3 = \frac{\cos \varphi}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 C_n \psi_n(k_0 r) P_n^1(\cos \theta). \quad (7)$$

В области I потенциалы  $u^1, v^1$  имеют вид потенциалов (7) с коэффициентами  $a_n^1, b_n^1$ ; в области III потенциалы  $u^4, v^4$  имеют вид потенциалов (6) с коэффициентами  $a_n^4, b_n^4, n \geq 1$ . Отыскиваемые потенциалы должны удовлетворять, в частности, граничным условиям (2), применяя которые получаем связь между всеми отыскиваемыми коэффициентами  $a_n^j, b_n^j$  потенциалов  $u_n^j, v_n^j, j = 1, 2, 3, 4$ . Связь имеет вид шести линейных алгебраических уравнений. Определитель системы отличен от нуля, так как по условию  $k_0 a > |k_1 d|$ . Система имеет единственное решение. Из этой системы выразим коэффициенты  $a_n^1, a_n^2, a_n^4$  и  $b_n^1, b_n^2, b_n^4$  через коэффициенты  $a_n^3$  и  $b_n^3, n = 1, 2, 3, \dots$ , с которые далее удобно работать. Для поиска коэффициентов  $a_n^3$  потенциала  $u^3$  (7) устанавливаем в результате из граничных условий требуемые парные функциональные уравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^3}{\xi_n^1(k_0 a)} C_n P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n^3 \left( 1 - \frac{N_{n,u}^{(1)}}{L_{n,u}^{(1)}} \right) \psi_n^1(k_0 a) - \frac{ik_0}{b} F(n) \psi_n^1(k_1 b) \xi_n^1(k_0 a) \right\} C_n P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad \theta_1 < \theta \leq \pi, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} N_{n,u}^{(1)} &= \frac{k_0^2 \mu_1}{k_1^2} [\psi_n(k_0 d) \psi_n^1(k_1 d) \xi_n^1(k_0 a) - \psi_n^1(k_0 a) \psi_n^1(k_0 d) \xi_n(k_1 d)] + \\ &+ \psi_n^1(k_0 a) \xi_n^1(k_0 d) \psi_n(k_1 d) - \psi_n^1(k_0 d) \xi_n^1(k_0 a) \psi_n(k_1 d), \quad L_{n,u}^{(1)} = L_{n,u} \psi_n^1(k_0 a), \\ L_{n,u} &= \xi_n^1(k_0 d) \psi_n(k_1 d) - \frac{k_0^2 \mu_1}{k_1^2} \xi_n(k_0 d) \psi_n^1(k_1 d). \end{aligned}$$

Здесь в формулах для функций Бесселя и Ханкеля вида  $\psi_n^1(k_1 d)$ ,  $\xi_n^1(k_0 a)$  штрих (единица в показателе степени) обозначает дифференцирование по аргументу  $k_1 d$  и  $k_0 a$  соответственно.

Чтобы найти коэффициенты  $b_n^3$  потенциала  $v^3$  (7) получаем также из граничных условий два необходимых функциональных уравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^3}{\xi_n(k_0 a)} C_n P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n^3 \left( 1 - \frac{N_{n,v}^{(1)}}{L_{n,v}^{(1)}} \right) \psi_n(k_0 a) + \frac{k_1}{b} F(n) \psi_n^1(k_1 b) \times \xi_n(k_0 a) \right\} C_n P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad \theta_1 < \theta \leq \pi, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} N_{n,v}^{(2)} &= \mu_1 \psi_n(k_0 a) \psi_n(k_1 d) \xi_n^1(k_0 d) - \\ &- \mu_1 \psi_n^1(k_0 d) \psi_n(k_0 d) \xi(k_0 a) + \psi_n(k_0 d) \psi_n^1(k_0 d) \xi_n(k_0 a) - \\ &- \psi_n(k_0 a) \psi_n^1(k_1 d) \xi_n(k_0 d), \quad L_{n,v}^{(2)} = L_{n,v} \psi_n(k_0 d), \\ L_{n,v} &= \mu_1 \xi_n^1(k_0 d) \psi_n(k_1 d) - \xi_n(k_0 d) \psi_n^1(k_1 d). \end{aligned}$$

Системы функциональных уравнений (8), (9) являются несвязанными, первого рода с различными сложными ядрами. Аналитически и численно эти системы непосредственно эффективно не решаются. Прямые численные методы типа метода коллокаций также не эффективны. Применим метод регуляризации парных сумматорных функциональных уравнений [4–9, 11, 14]. Каждая система требует своего подхода. Выполним регуляризацию обеих систем уравнений (8), (9) одновременно. Для этого понадобится несколько преобразований. На первом шаге введём новые обозначения для искоемых коэффициентов  $a_n^3$ ,  $b_n^3$  потенциалов  $u^3$ ,  $v^3$  (3) соответственно:

$$T_n = a_n^3 (2n+1) [\xi_n^1(k_0 a)]^{-1}, \quad Z_n = b_n^3 [\xi_n(k_0 a)]^{-1}. \quad (10)$$

Теперь выделим главные части функциональных уравнений. Для этого используем представления и разложения для специальных сферических функций  $\psi_n(x)$ ,  $\xi_n(x)$ , их производных  $\psi_n^1(x)$ ,  $\xi_n^1(x)$ , а также для  $P_n^1(\cos \theta)$  при различных  $n$ ,  $x$ ,  $\theta$ . Затем вводим параметры малости:

$$\varepsilon_n^{(1)} = 1 + \frac{4ik_0 a}{2n+1} \psi_n^1(k_0 a) \xi_n^1(k_0 a) \left( 1 - \frac{N_{n,u}^{(1)}}{L_{n,u}^{(1)}} \right), \quad (11)$$

$$\mu_n^{(1)} = 1 - \frac{i}{k_0 a} (2n+1) \xi_n(k_0 a) \psi_n(k_0 a) \left( 1 - \frac{N_{n,v}^{(2)}}{L_{n,v}^{(2)}} \right). \quad (12)$$

Параметры малости стремятся к нулю сравнительно быстро при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\varepsilon_n^{(1)} = O(n^{-2}), \quad \mu_n^{(1)} = O_1(n^{-2}), \quad n \gg 1, \quad n \gg k_0 a > k_0 d, \quad (13)$$

$$\frac{N_{n,u}^{(1)}}{L_{n,u}^{(1)}} = O\left(\left(\frac{d}{a}\right)^{2n+1}\right) \rightarrow 0, \quad \frac{N_{n,v}^{(2)}}{L_{n,v}^{(2)}} = O_1\left(\left(\frac{d}{a}\right)^{2n+1}\right) \rightarrow 0.$$

### СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Продолжим преобразование систем функциональных уравнений (8), (9) после выполнения переобозначения (10) и введения параметров малости (11), (12). Для этого во всех новых четырёх уравнениях для присоединённых функций Лежандра  $P_n^1(\cos \theta)$  применим интегральные представления типа Мелера – Дирихле [4, 7–9]:

$$\frac{\pi \sin \theta}{2\sqrt{2}} C_n P_n^1(\cos \theta) = \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin(n+0.5)x \sin x}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} dx = \int_0^{\theta} \frac{\cos(n+0.5)x \sin x}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} dx.$$

После этого, используя принадлежность новых коэффициентов (10)  $T_n, Z_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$ , пространству  $\tilde{L}_2$  (которое определяется условием конечности интеграла энергии), меняем порядки интегрирования и суммирования. В итоге приходим к системе четырёх интегральных уравнений типа Абеля первого рода [4, 7–12]:

$$\int_0^{\theta} \frac{f_j(x)}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} dx = 0, \quad \theta \in [0, \theta_1), \quad \int_{\theta}^{\pi} \frac{g_j(x)}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} dx = 0, \quad \theta \in (\theta_1, \pi], \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

Здесь функции  $f_j(x), g_j(x)$  есть ряды по тригонометрическим функциям  $\sin(n+0.5)x, \cos(n+0.5)x$  с коэффициентами, содержащим спецфункции. По лемме Римана находим, что функции типа  $f_j(x), g_j(x)$  в интегральных уравнениях (13) принадлежат гильбертовому пространству  $\tilde{L}_2(0, \pi)$ . Ищем решения уравнений (13) с помощью композиций с ядрами, имеющими вид ядер самих уравнений (13). Находим, что каждое уравнение типа Абеля имеет единственное решение и это решение обращается в нуль на соответствующих областях определения:

$$f_j(x) = 0, \quad x \in [0, \theta_1), \quad g_j(x) = 0, \quad x \in (\theta_1, \pi], \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

Этим приходим к новым функциональным уравнениям по тригонометрическим функциям, которые удобно свести к системам алгебраических уравнений.

### ДВЕ НЕСВЯЗАННЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

Преобразуем полученные парные несвязанные функциональные уравнения по тригонометрическим функциям. В каждой паре уравнений получили одно уравнение – ряды Фурье по  $\sin(n+0.5)x$ , а другое уравнение – ряды по  $\cos(n+0.5)x$ . В новых рядах функции  $\cos(n+0.5)x$  ортогональны на  $[0, \pi]$  и при  $n = 0, 1, 2, \dots$  являются полным множеством функций [11, 12] в  $L_2(0, \pi)$ . Такими же свойствами обладают и функции  $\sin(n+0.5)x$  на  $[0, \pi]$  в  $L_2(0, \pi)$ . Отметим, что функции  $P_n^1(\cos \theta)$  ортогональны с весом  $\sin \theta$  на  $[0, \pi]$ , но не обладают соответствующим свойством полноты. Отметим также, что установленные парные уравнения различными вариантами могут быть преобразованы и сведены к двум несвязанным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода (БСЛАУ–II). Требуется выбрать такой вариант преобразований каждой пары функциональных уравнений в эквивалентную БСЛАУ–II, чтобы решение двух БСЛАУ–II обеспечивало в итоге выполнение условия конечности электромагнитной энергии. Таким вариантом преобразования парных уравнений оказалась операция дифференцирования тех двух уравнений из четырёх уравнений,

которые обладают достаточным запасом сходимости  $L_2(0, \pi)$ . Выполнив дифференцирование, получили одну парную систему функциональных уравнений только по  $\cos(n+0.5)x$ , а другую парную систему только по  $\sin(n+0.5)x$ . В этих системах уравнений, состоящих из рядов Фурье, выделяем главные части, учтя наличие в этих рядах параметров малости (11), (12). Полностью обращаем главные части рядов Фурье, используя ортогональность и полноту  $\cos(n+0.5)x$  и  $\sin(n+0.5)x$  в  $L_2(0, \pi)$  [3–14]. В результате получаем две требуемые несвязанные БСЛАУ–II типа Фредгольма:

$$T_m = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n T_n \beta_{n,m}(\theta_1) - \frac{4k_0 a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} F_{n,u}^{(1)}(\beta_{n,m}(\theta_1) - \delta_{n,m}), \quad (15)$$

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n Z_n \gamma_{n,m}(\theta_1) - \frac{ik_1}{k_0 ab} \sum_{n=1}^{\infty} F_{n,v}^{(2)}(2n+1)(\gamma_{n,m}(\theta_1) - \delta_{n,m}), \quad (16)$$

где

$$F_{n,u}^{(1)} = F_n \psi_n^1(k_1 b) \xi_n^1(k_0 a), \quad F_{n,v}^{(2)} = F_n \psi_n(k_1 b) \xi_n(k_0 a), \quad (17)$$

$$\beta_{n,m}(\theta_1) = \frac{\sin(n-m)\theta_1}{\pi(n-m)} + \frac{\sin(n+m+1)\theta_1}{\pi(n+m+1)}, \quad n \neq m, \quad (18)$$

$$\beta_{m,m}(\theta_1) = \theta_1 / \pi + [\sin(2m+1)\theta_1] / [\pi(2m+1)], \quad n = m, \quad (19)$$

$$\gamma_{n,m}(\theta_1) = \frac{\sin(n-m)\theta_1}{\pi(n-m)} - \frac{\sin(n+m+1)\theta_1}{\pi(n+m+1)}, \quad n \neq m, \quad (20)$$

$$\gamma_{m,m}(\theta_1) = \theta_1 / \pi - [\sin(2m+1)\theta_1] / [\pi(2m+1)], \quad n = m, \quad (21)$$

$$\delta_{n,m} = 1, \quad n = m; \quad \delta_{n,m} = 0, \quad n \neq m; \quad n, m = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

В системах (15), (16) величины  $T_m$ ,  $Z_m$  введены в (10), величины  $a_n^3$ ,  $b_n^3$  – в (7), параметры малости  $\varepsilon_n^{(1)}$ ,  $\mu_n^{(1)}$  – в (11), (12),  $F_n$  – в (5). Отметим, что анализ полученных систем, показывает выполнение предельных переходов к частным вариантам постановкам задачи экранировки: а) при  $\theta_1 \rightarrow 0$  (сфера с отверстием превращается в диск и исчезает) к задаче экранировки поля диполя только шаром; в) при  $\theta_1 \rightarrow \pi$  (отверстие в сфере уменьшается до нуля и сфера с отверстием превращается в замкнутую сферу) к задаче двойной экранировки поля диполя – шаром и охватывающей шар замкнутой идеально проводящей сферой; с) при переходе материальных параметров шара ( $\varepsilon_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $k_1$ ) к вакууму приходим к задаче экранировки поля диполя только сферой с отверстием [4, 8, 14].

### ВЫВОДЫ

1. Получены две несвязанные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений второго рода (15) и (16) (БСЛАУ – II) типа Фредгольма.

2. Системы БСЛАУ – II удобно представить в матричной форме:

$$\tilde{T} = M_1 \tilde{T} + B_1^{(1)}, \quad \tilde{Z} = M_2 \tilde{Z} + B_2^{(2)}; \quad M_1 = \left\| \varepsilon_n^{(1)} \beta_{n,m}(\theta_1) \right\|, \quad M_2 = \left\| \varepsilon_n^{(1)} \beta_{n,m}(\theta_1) \right\|. \quad (23)$$

Системы уравнений (15) – (23) определяют операторы в гильбертовом пространстве  $\tilde{l}_2$  [3 – 8, 10 – 12], которым соответствуют матрицы  $M_1$ ,  $M_2$  (23). Эти операторы компактны [11–12], так как параметры малости  $\varepsilon_n^{(1)}$ ,  $\mu_n^{(1)}$  (11), (12) удовлетворяют оценкам (13), величины  $\beta_{n,m}(\theta_1)$ ,  $\gamma_{n,m}(\theta_1)$  (18) – (21) равномерно ограничены, а величины  $F_{n,u}^{(1)}$ ,  $F_{n,v}^{(2)}$  (17) быстро стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Спектр операторов не содержит единицы, правые столбцы в (15), (16), (23) принадлежат  $\tilde{l}_2$ .

3. Системы (15), (16), (23) имеют единственные решения в  $\tilde{l}_2$ . Системы эффективно разрешимы численно (для любых параметров задачи) различными методами, в том числе методом редукции. Они разрешимы и аналитически в предельных вариантах постановки задачи, например, методом последовательных приближений.

4. С целью улучшения сходимости численных и аналитических методов решения БСЛАУ-II (15), (16), (23) целесообразно выполнить переобозначения в этих системах и перейти от  $T_m, Z_m$  (10) к новым отыскиваемым коэффициентам  $T_m^{(1)}, Z_m^{(1)}$ , например, так:  $T_m^{(1)} = T_m / m, Z_m^{(1)} = Z_m / m, m \geq 1$ .

5. Разделение граничных условий для потенциалов Дебая позволило ускорить численно – аналитический алгоритм расчёта, в частности, приведённых резонансных частот  $(k_1 a)$  нагруженной сферы с отверстием [8, 14 – 17]. Резонансные частоты электрического типа сферы с малым отверстием (при  $\pi - \theta_1 \ll 1$ ) и шаром, размещённым внутри сферы, отличаются от резонансных частот такой же сферы без шара также на величину пропорциональную  $\theta_1$ , а резонансные частоты магнитного типа – на величину пропорциональную  $(\theta_1)^3$ . При этом в длинноволновом случае  $k_0 a \ll 1$  в структуре возникают резонансы Гельмгольца [8, 14]. Отметим, что рассматриваемые электромагнитные поля  $\vec{E}, \vec{H}$  являются поля ТЕМ типа, так как являются полными векторными дифференциальными формами электрического  $u$  и магнитного  $v$  потенциалов Дебая.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. King R.W.P. and Smith G.S. Antennas in material: Fundamentals, theory and applications. – Cambridge: – MIT Press. Mass, – 1981. – 527 p
2. Balanis C.A. Antennas theory, analysis. and design. – New York: – Harper & Row, – 1982. – 164 p
3. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: – Изд. ХГУ, – 1973. – 288 с.
4. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. – Харьков: – Основа, – 1997. – 284 с.
5. Кравченко В.Ф., Сиренко Ю.К., Сиренко К. Ю. Преобразование и излучение электромагнитных волн открытыми резонансными структурами. – Москва: – Физматлит, 2011. – 318 с.
6. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2003. – Т.8, выпуск 10 – 11. – С. 4 – 78.
7. Свищёв Ю. В., Тучкин Ю. А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах// Киев: – ДАН УССР, сер. А. – 1987. – Т.12. – С. 56 – 60.
8. Резуненко В.А. Рассеяние плоской волны сферой с круговым отверстием// Электромагнитные волны и электронные системы. – 2005. – Т.10, в.8. – С. 3 – 15.
9. Бейтмен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. – Москва: – Наука, – 1974. – 295 с.
10. Zolotariov D., Nerukh A. Extension of approximation functions method for 2D nonlinear Volterra integral equations// Applied radio electronics. – 2011. – V. 10, №1. – P. 39 – 44.
11. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: – Наукова Думка, – 1977. – 362 с.
12. Садовничий В.А. Теория операторов. – М.: – Высшая школа, – 1999. – 368 с.
13. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М., Стиган И. – Москва: – ФМЛ, – 1979. – 832 с.
14. Vyazmitinov I.A., Rezenenko V.A., Udyanskaya L.V., Shestopalov V.P. Antennas characteristics of spherical reflector, which is working at regime of Helmholtz resonance excitation// Proc. of international scientific – technical conference Contemporary Radiolocation. – Kiev. – 1994. – P. 72 – 76.
15. Ock J.S. and Eom H.J. Radiation of a Hertzian dipole in a slotted conducting sphere// IEEE Trans. AP, December 2009. – vol. 57. – NO 12. – P. 3847 – 3851.
16. Ziolkowski R.W. Design, fabrication, and testing of double negative materials// IEEE Trans. AP, – 2003. – vol. 51. – NO 7. – P. 1516 – 1529.
17. Легенький М. Н., Бутрым А. Ю., Колчигин Н. Н. Расчет импульсного излучения круглой диэлектрической стержневой антенны методом согласования мод во временной области// Радиотехника. Всеукр. межвед. научно-техн. сб. – Харків: – ХНУРЕ. – 2010. – Вып. 162. – С. 5 – 12.



УДК 621.396

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ЩЕЛЕВОМ ПОЛУПРОЗРАЧНОМ КОНУСЕ

**В.А. Дорошенко, О.Г. Литвинова, А.А. Стрельницкий**

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, пр.Ленина 14, 61166  
Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина, Харьков, пл.Свободы,4, 61077  
E-mail: vlad\_a\_doroshenko@mail.ru  
Поступила в редакцию 18 апреля 2013 г.*

В работе приведены результаты исследования в строгой постановке задачи дифракции электромагнитных волн на тонком полупрозрачном круговом полубесконечном конусе с прорезанной от вершины продольной щелью. Источником электромагнитного поля является электрический радиальный диполь. Метод решения задачи основан на использовании интегральных преобразований Конторовича-Лебедева. Показано, что рассматриваемая электродинамическая задача эквивалентна решению системы линейных алгебраических уравнений. Получены численное и аналитическое решения задачи. Приведены диаграммы пространственного распределения поля в зависимости от ширины щели.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** полупрозрачный конус, продольная щель, аналитическое решение, диаграммы распределения поля

В роботі наведено результати дослідження у строгій постановці задачі дифракції електромагнітних хвиль на тонкому напівпрозорому круговому напівнескінченному конусі з прорізаною від вершини поздовжньою щілиною. Джерелом електромагнітного поля є електричний радіальний диполь. Метод розв'язку базується на використанні інтегральних перетворень Конторовича-Лебедева. Показано, що електродинамічна крайова задача, що розглядається, еквівалентна розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Отримано чисельний та аналітичний розв'язки задачі. Наведено діаграми просторового розподілу поля в залежності від ширини щілини.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** напівпрозорий конус, поздовжня щілина, аналітичний розв'язок, діаграми розподілу поля

Results of investigating a rigorous statement problem of electromagnetic waves diffraction on a thin semi-transparent circular semi-infinite cone with a longitudinal slot cut from a cone vertex are considered. An electrical radial dipole is an electromagnetic field source. The solution method is based on using the Kontorovich-Lebedev transforms. It is showed that the electromagnetic problem that is under consideration is equivalent to solving a linear algebraic equations system. Numerical and analytical problem solutions are derived. Space distribution field diagrams as for slot width dependence are given.

**KEY WORDS:** semi-transparent cone, longitudinal slot, analytical solution, field distribution diagrams

### ВВЕДЕНИЕ

Для исследования прикладных задач современной электродинамики требуется совершенствование существующих и создание новых подходов и методов решения модельных краевых задач для рассеивающих структур сложной конфигурации с различными поверхностными свойствами. Строгие методы решения применимы для довольно ограниченного круга задач, а результаты вследствие использования приближенных методов далеки от универсальности и объясняют физическую картину явления для суженной полосы изменения параметров исследуемой задачи. В данной работе получил своё развитие строгий метод решения краевых задач электродинамики в конических областях, который базируется на использовании интегральных преобразований Конторовича-Лебедева [1]. Рассматриваемая в работе полупрозрачная коническая структура с продольной щелью является моделью сверхширокополосных и широкополосных антенн [2-4], обтекателя антенн летательных аппаратов [5], радиопрозрачного антенного укрытия [6]. В работах [5, 7] приведены результаты исследования задачи дифракции волн на идеально проводящем сплошном (замкнутом) конусе, на поверхности которого заданы краевые условия без учёта его угла раскрытия.

Цель данной работы заключается в исследовании задачи дифракции электромагнитных волн на тонком полупрозрачном круговом полубесконечном конусе с продольной щелью, на поверхности которого заданы усреднённые краевые условия, учитывающие угол раскрытия конуса. Эти краевые условия были получены из точного предельного решения краевой электродинамической задачи для тонкого идеально проводящего кругового конуса с периодически прорезанными вдоль образующих щелями [8].

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Полупрозрачная неограниченная тонкая круговая коническая поверхность  $\Sigma$  с углом раскрытия  $2\gamma$  и прорезанной вдоль образующей щелью находится в поле электрического диполя с моментом

$$\vec{P}_r(\vec{r}, t) = M_r \vec{i}_r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) e^{ia\omega t}, \quad a = \pm 1.$$

Радиальный диполь расположен в точке  $B_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  вне и на оси конической поверхности, которая во введенной сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  задаётся уравнением  $\theta = \gamma$  (рис.1). Способность поверхности пропускать и отражать падающее на неё поле характеризуется параметром прозрачности  $W > 0$ . Ширина щели  $d$  имеет угловой размер и равна величине двугранного угла, образованного плоскостями, которые проведены через ось конической структуры и кромки щели.

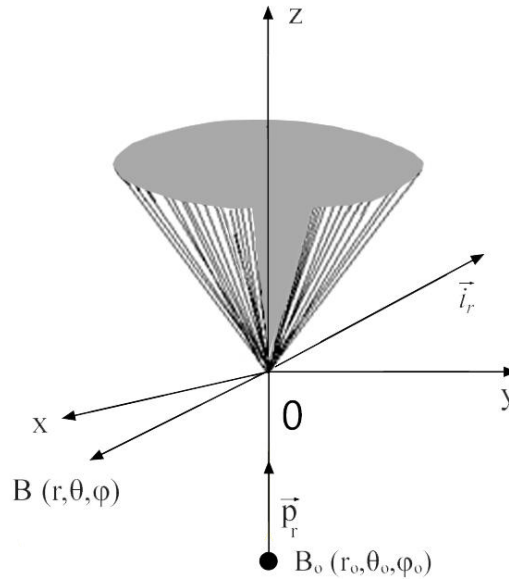


Рис.1. Геометрия щелевой полупрозрачной конической структуры

Присутствие в пространстве полупрозрачного конуса вносит возмущение (поле  $\vec{E}_1(\vec{r}), \vec{H}_1(\vec{r})$ ) в поле диполя  $\vec{E}_0(\vec{r}), \vec{H}_0(\vec{r})$ . Задача заключается в нахождении полного поля -  $\vec{E}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r})$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \vec{E}_1(\vec{r}), \quad \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r}) + \vec{H}_1(\vec{r}), \quad (1)$$

которое удовлетворяет:

- 1) уравнениям Максвелла вне полупрозрачного конуса и источника;
- 2) усредненным краевым условиям на конических секторах поверхности:

$$\vec{n} \times \left\{ \vec{n} \times \left[ \vec{E}^+ + \vec{E}^- \right] \right\} = 2R\vec{n} \times L^{(1)} \left[ \vec{H}^+ - \vec{H}^- \right],$$

$$\vec{n} \times \vec{E}^+ = \vec{n} \times \vec{E}^-,$$

где  $\vec{E}^\pm = \vec{E}|_{\theta=\gamma\pm 0}$ ,  $R = \frac{w}{q} W \sin \gamma$ ,  $q = iak$ ,  $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ ,  $w = \sqrt{\mu/\epsilon}$  - волновое сопротивление среды,  $\epsilon$  и  $\mu$  - проницаемости среды, в которую помещена полупрозрачный конус,  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к поверхности конуса  $\Sigma$ ,  $L^{(1)}g = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - q^2 \right)(rg)$

- 3) условию на бесконечности в пространстве;
- 4) условию ограниченности энергии.

Условия 1)-4) обеспечивают единственность решения поставленной электродинамической краевой задачи, которая посредством введения потенциалов Дебая  $U = U_0 + U_1$  сводится к смешанной краевой задаче математической физики для однородного уравнения Гельмгольца относительно потенциала  $U$  [9], удовлетворяющего на полупрозрачной поверхности краевым условиям

$$U|_{\Sigma} - rW \sin \gamma \left( \frac{\partial}{\partial n} U^+ - \frac{\partial}{\partial n} U^- \right) \Big|_{\Sigma} = 0, \quad U^+ = U^-, \quad (2)$$

принципу предельного поглощения и условию ограниченности энергии, где потенциал  $U$  соответствует полному полю,  $U_0$  - полю диполя, а  $U_1$  - возмущённому конусом полю (1). Искомый потенциал ищем в виде интеграла Конторовича-Лебедева [1,8]

$$U_1 = \frac{M_r}{2\pi^2 \varepsilon r_0} \int_0^{\infty} \tau h \pi \tau \frac{K_{i\tau}(qr_0)}{\sqrt{r_0}} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) \hat{U}_{i\tau}(\theta, \varphi) d\tau, \quad (3)$$

где

$$\hat{U}_{i\tau}(\theta, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \frac{P_{-1/2+i\tau}^n(\pm \cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^n(\pm \cos \gamma)} e^{in\varphi}, \quad (4)$$

Знак «+» в (3), (4) соответствует области  $0 < \theta < \gamma$ , а «-» - области  $\gamma < \theta < \pi$ ,  $x_n$  - неизвестные коэффициенты. Используя условия непрерывности поля в щели, а также математический аппарат рядов Фурье, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов  $x_n$ :

$$x_p = \frac{1}{2W\varpi_p} B_{0,p}(\delta) - \frac{1}{2W\varpi_p} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_{n,p}(\delta) x_n, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (5)$$

$$B_{n,p}(\delta) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \frac{\sin(n-p)\delta}{n-p}, & n \neq p, \\ \frac{1}{\pi}(\pi - \delta), & n = p; \end{cases} \quad \delta = d/2,$$

$$\varpi_n = \frac{(-1)^n ch\pi\tau}{\pi} \frac{\Gamma(1/2 + i\tau + n)}{\Gamma(1/2 + i\tau - n)} \frac{1}{P_{-1/2+i\tau}^n(-\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}^n(\cos \gamma)},$$

причём  $x_{-p} = x_p$ , а для  $n \neq p$  коэффициенты  $B_{n,p}(\delta)$  (5) имеют такие свойства:

$$B_{n,p}(-\delta) = -B_{n,p}(\delta), \quad B_{-n,-p}(\delta) = B_{n,p}(\delta), \quad B_{-n,p}(\delta) = B_{n,-p}(\delta).$$

Следует отметить, что предельный переход в (5) к системе в случае возбуждения идеального проводящего конуса ( $W \rightarrow 0$ ) делать нельзя в силу ограничения используемого метода. Для получения системы линейных уравнений в случае возбуждения электрическим радиальным диполем идеально проводящего конуса с прорезанной вдоль образующей щелью может быть использован метод задачи Римана-Гильберта [8].

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. ПОЛЕ В ВОЛНОВОЙ ЗОНЕ

Следует отметить, что система (5) является системой линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа (СЛАУ-2), для решения которой в преобразованном виде

$$x_p^{(1)} + \frac{1}{2W^{(1)}\varpi_p^{(1)}} B_{0,p}(\delta) x_0^{(1)} + \frac{1}{2W^{(1)}\varpi_p^{(1)}} \sum_{n=1}^{+\infty} (B_{n,p} + B_{n,-p}) x_n^{(1)} = \frac{1}{2W^{(1)}\varpi_p^{(1)}} B_{0,p}(\delta), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

может быть использован метод редукции. В рассматриваемом случае число обусловленности [10] СЛАУ-2 (6) зависит от ширины щели, угла раскрытия конуса, параметра прозрачности и параметра интегрирования  $\tau$ . Исследования показали, что при различных диапазонах изменения параметра задачи значение числа обусловленности не превышает 400. Этот факт свидетельствует о хорошей обусловленности системы (6), а, следовательно, о сходимости вследствие редукции СЛАУ-2 полученного решения (6) к точному.

Для получения выражений поля в волновой зоне воспользуемся в подынтегральном выражении (3) асимптотическим поведением функции Макдональда  $K_{ir}(qr)$  при  $qr \gg 1$  [11]. В результате главный член в асимптотическом разложении составляющих электрического поля в волновой зоне записывается в таком виде

$$E_\theta = \frac{e^{-qr}}{r} F_\theta(\theta, \varphi, \gamma, d), \quad E_\varphi = \frac{e^{-qr}}{r} F_\varphi(\theta, \varphi, \gamma, d),$$

где  $F_\theta(\theta, \varphi, \gamma, d)$ ,  $F_\varphi(\theta, \varphi, \gamma, d)$  - функции, определяющие поле в волновой зоне:

$$F_\theta(\theta, \varphi, \gamma, d) = A^* \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau e^{\frac{\pi \tau}{2}} K_{ir}(qr_0) \times$$

$$\times P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{(1)}(\tau) \frac{d}{d\theta} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{-n}(-\cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{-n}(-\cos \gamma)} 2 \cos n\varphi - x_0^{(1)}(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \gamma)} \right) d\tau,$$

$$F_\varphi(\theta, \varphi, \gamma, d) = B^* \frac{1}{\sin \theta} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau e^{\frac{\pi \tau}{2}} K_{ir}(qr_0) \times$$

$$\times P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{(1)}(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}^{-n}(-\cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{-n}(-\cos \gamma)} n \sin n\varphi d\tau,$$

где  $A^*$  и  $B^*$  известные постоянные коэффициенты. Для зависимости полей от времени в виде  $e^{-i\omega t}$  параметр  $q$  берется в виде  $q = -ik$  ( $\operatorname{Im} k \leq 0$ ) и  $q = ik$  ( $\operatorname{Im} k \geq 0$ ) в случае зависимости во времени  $e^{i\omega t}$ . На рис.2 показана нормированная диаграмма пространственного распределения полного поля  $|\vec{E}| = \sqrt{|\vec{E}_\theta|^2 + |\vec{E}_\varphi|^2}$  в волновой зоне ( $\theta > 2\gamma$ ) в азимутальной плоскости для конуса ( $\gamma = \pi/8$ ) с продольной щелью (ось щели соответствует значению азимутального угла  $\varphi = 0^\circ$ ) для разных значений ширины щели  $d$ . Влияние щели на распределение поля в волновой зоне оказывается слабым, что объясняется данным способом возбуждения. Для  $d < 60^\circ$  диаграмма круговая, но при увеличении ширины щели наблюдается отклонение правой части от круговой и при  $d = 359^\circ$  диаграмма приобретает форму диаграммы одиночного протяженного рассеивателя в виде тонкого провода, ось которого смещена по оси  $OZ$  на  $\theta = \pi/8$ .

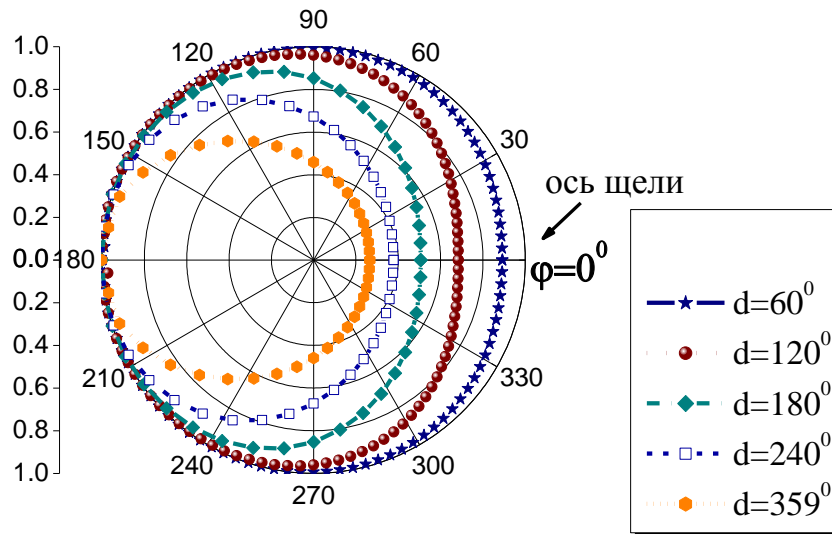


Рис.2. Диаграмма распределения полного электрического поля в волновой зоне ( $\theta > 2\gamma$ ) для полупрозрачного конуса с продольной щелью  $\gamma = \pi/8$ ,  $\theta = \pi/3$ ,  $|qr_0| = 1$  для разных значений ширины щели  $d$ .

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В СЛУЧАЕ УЗКОГО ПОЛУПРОЗРАЧНОГО КОНИЧЕСКОГО СЕКТОРА**

В случае узкого полупрозрачного конического сектора ( $\beta^* = 1 - \frac{\delta}{\pi} \ll 1$ ) матричный оператор СЛАУ-2 (6) является сжимающим в рассматриваемом энергетическом пространстве  $l^2$  решений (6), [12], что позволяет найти аналитическое решение (6) и краевой задачи. Потенциал Дебая  $U_1$  (3) вдали от ребра конического сектора имеет такой вид

$$U_1 = -\frac{2}{\pi^2} \beta^* \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{\tau \operatorname{sh} \pi \tau a_{0\tau}^{(1)} b_{0\tau}^{(1)}}{2W/D_{i\tau}^{-n} + \beta^*} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{-n}(\pm \cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{-n}(\pm \cos \gamma)} d\tau +$$

$$+ O\left(\frac{1}{W} (\beta^*)^2 \ln \frac{1}{\beta^*}\right), \frac{1}{W} (\beta^*)^2 \ln \frac{1}{\beta^*} \ll 1. \quad (7)$$

$$a_{0\tau}^{(1)} = \frac{M_r}{4\epsilon \operatorname{ch} \pi \tau} \frac{K_{i\tau}(qr_0)}{\sqrt{r_0}}, \quad b_{0\tau}^{(1)} = -P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma),$$

$$D_{i\tau}^Q = (-1)^Q \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \tau} \frac{\Gamma(1/2 + i\tau - Q)}{\Gamma(1/2 + i\tau + Q)} P_{-1/2+i\tau}^Q(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}^Q(-\cos \gamma).$$

При исчезновении сектора,  $\beta^* \rightarrow 0$ , исчезает потенциал (7) и возмущённое присутствием конического сектора поле. Под спектром рассматриваемой краевой задачи понимается множество полюсов подынтегральной функции в (7) после перехода к интегрированию по мнимой оси вследствие введения новой переменной интегрирования  $\zeta = i\tau$  в (7). Спектр краевой задачи для узкого полупрозрачного конического сектора определяется множеством корней уравнения

$$2W \frac{(-1)^n}{\pi} \cos \pi \zeta \frac{\Gamma(1/2 + \zeta - n)}{\Gamma(1/2 + \zeta + n)} \frac{1}{P_{-1/2+\zeta}^{-n}(\cos \gamma) P_{-1/2+\zeta}^{-n}(-\cos \gamma)} + \beta^* = 0, \quad (8)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

которые находятся вблизи корней  $\tilde{\zeta}_s^{*-n}$  функции  $\cos \pi \zeta \Gamma(1/2 + \zeta - n)$ ,  $\operatorname{Re} \zeta > 0$ :

$$\hat{\zeta}_s^{-n} = \tilde{\zeta}_s^{*-n} - \beta^* (-1)^n \frac{\pi}{2W} \frac{d}{d\zeta} \left\{ \cos \pi \zeta \Gamma(1/2 + \zeta - n) \right\} \frac{\Gamma(1/2 + \zeta + n)}{P_{-1/2+\zeta}^{-n}(\cos \gamma) P_{-1/2+\zeta}^{-n}(-\cos \gamma)} \Big|_{\zeta = \tilde{\zeta}_s^{*-n}} +$$

$$+ O\left((\beta^*/W)^2\right), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad \beta^*/W \ll 1. \quad (9)$$

Наименьшее из спектральных значений (9), которое является наименьшим из корней уравнения (8) с индексом  $n = 0$

$$\hat{\zeta}_s^{-n} \Big|_{n=0} = \hat{\zeta}_s = \frac{1}{2} + s + \beta^* \frac{1}{2W} \left[ P_s(\cos \gamma) \right]^2 + O\left((\beta^*/W)^2\right),$$

$$\tilde{\zeta}_0^{(1)*} = \min \tilde{\zeta}_s^{(1)*} = \frac{1}{2} + \frac{\beta^*}{2W} + O\left((\beta^*/W)^2\right)$$

определяет поведение поля у вершины узкого полупрозрачного конического сектора ( $qr \ll 1$ )

$$|\vec{E}| \sim |qr|^{-1+\beta^*/2W}, \quad |\vec{H}| \sim |qr|^{\beta^*/2W} \quad (10)$$

Из (10) делаем заключение о наличии сильной особенности электрического поля у вершины узкого полупрозрачного конического сектора. При уменьшении параметра прозрачности  $W$  поверхностные свойства полупрозрачного конического сектора приближаются к свойствам хорошо проводящего конического сектора. Формально при  $W = 0$  сектор становится идеально проводящим, но результаты, приведенные выше справедливы при  $\beta^*/W \ll 1$ . Это свидетельствует о том, что из вышеприведенных резуль-

татов нельзя получить результаты для идеально проводящего конического сектора и даже сравнить с последними. В этом и заключается ограничение метода решения задачи в случае возбуждения полупрозрачного конуса с продольной щелью электрическим радиальным диполем.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование краевой электродинамической задачи для полупрозрачной конической поверхности со щелью, прорезанной от вершины конуса вдоль его образующей. Вследствие введения скалярного потенциала Дебая и использования интегральных преобразований Конторовича-Лебедева исходная задача свелась к решению хорошо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа, решение которой получено численно, а в случае узкого полупрозрачного конического сектора аналитически. На основе аналитического решения проведен качественный анализ спектра краевой задачи и выяснен характер поведения поля у вершины узкого конического сектора. Анализ поведения поля показал существование сильной особенности электрического поля у вершины узкого полупрозрачного сектора и медленное убывание магнитного поля по мере приближения к ней. Полученное численное решение позволило изучить тенденцию изменения формы диаграммы пространственного распределения поля в волновой зоне в зависимости от ширины щели. Так при ширине щели меньшей  $60^\circ$  форма диаграммы мало отличается от круговой. Существенное изменение формы наблюдается при ширине щели большей  $120^\circ$ , что обуславливается типом возбуждения незамкнутой конической поверхности.

Полученные в работе результаты могут быть использованы для практических приложений в радиотехнике, радиолокации, при разработке и проектировании приборов диагностики и контроля. Результаты теоретического изучения поведения электромагнитного поля у вершины полупрозрачного сектора могут быть использованы в качестве тестов для численных расчётов рассеянных полей полупрозрачными криволинейными экранами, имеющими угловые точки и вершины.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уфлянд Я.С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики. В Н.: Вопросы математической физики. – Л.: Наука, 1976. – С.93-106.
2. Palud, S., F. Colombel, M. Himdi, C. Le Meins, A novel broadband eighth-wave conical antenna, IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2008.– Vol. 56, No. 7. – P. 2112 – 2116.
3. Wang, H. Zhang, X. Liu, K. Huang, A CPW-FED ULTRA-WIDEBAND PLANAR INVERTED CONE ANTENNA, Progress In Electromagnetics Research C.– 2010. – Vol. 12.– P.101-112.
4. S. Zhou, J. Ma, J. Deng, and Q. Liu. A low-profile and broad-band conical antenna // Progress in Electromagnetics Research Letters. – 2009. – Vol. 7. – P. 97–103.
5. Минокин М.Л. Дифракция плоской электромагнитной волны на полом диэлектрическом конусе// Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). – 2000, №6.
6. Щеглов К.С. Шумовая температура радиопрозрачного антенного укрытия//Радиотехника и электроника. – 2001. – Т.46, №8. – С.994-996.
7. Lyalinov, M.A. Acoustic scattering of a plane wave by a circular penetrable cone// Wave Motion. – 2011. – Vol. 48, issue 1. – P. 62-82.
8. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур//Электромагнитные волны и электронные системы. – 2003. – Т.8, №6. – С.4-78.
9. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. – М.: Высш. Шк., 1991.– 224с.
10. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука. 1975. – 631с.
11. Бейтмен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т.1. – М.: Наука, 1973. – 407с.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука. 1977. – 741с.

УДК 621.574

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИТЕРАЦИОННОГО И ГЕНЕТИЧЕСКОГО  
АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ****Д.О. Батраков, Д.В. Головин, О.Д. Батраков***Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, кафедра теоретической радиофизики,  
E-mail: Dmitry.O.Batrakov@univer.kharkov.ua  
Поступила в редакцию 16 мая 2013 г.*

В работе проведен сравнительный анализ различных подходов к задаче восстановления профиля диэлектрической проницаемости плоскослоистых структур. В качестве информативного параметра использовалась частота. Сравниваются два подхода, основанные на сведении задачи к интегральному уравнению и использованию генетического алгоритма. Проанализированы преимущества совместного использования этих подходов. Таким образом преодолевается одна из трудностей, связанная с критерием оценки используемой пробной структуры.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** плоскослоистые среды, обратная задача, диэлектрическая проницаемость, генетические алгоритмы.

У роботі проведено порівняльний аналіз різних підходів до задачі відновлення профілю діелектричної проникності плоскошаруватих структур. Як інформативний параметр використовувалася частота. Порівняно два підходи, що засновані на зведенні задачі до інтегрального рівняння й використання генетичного алгоритму. Проаналізовано переваги спільного використання цих підходів. У такий спосіб долається одна із труднощів, яка пов'язана із критерієм оцінки пробної структури що використовується.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** плоскошаруваті середовища, зворотня задача, діелектрична проникність, генетичні алгоритми.

Paper deals with the comparative analysis of various approaches to a problem of restoration of a profile of dielectric permittivity of the plane-layered structures. As informative parameter was used frequency. Two approaches based on reduction of a problem to the integral equation and based on genetic algorithm are compared. Advantages of sharing of these approaches are analysed. Thus one of the difficulties, which is connected with criterion of an estimation of the used probing structures is overcome.

**KEYWORDS:** plane-layered media, inverse problem, dielectric permittivity, genetic algorithms.

Обратные задачи рассеяния, т.е. восстановления профиля диэлектрической проницаемости по данным о характеристиках поля в дальней зоне находят применение при дистанционном зондировании природных сред, неразрушающем контроле качества промышленных изделий и строительных конструкций, а также в биомедицинских исследованиях [1,2].

Одним из подходов к решению задач такого типа является метод, основанный на сведении задачи восстановления профиля диэлектрической проницаемости к задаче минимизации функционала невязки [2]. Для решения задачи минимизации функционала невязки используют как точные методы [1], так и пользующиеся большей популярностью итеративные методы [2,3]. С другой стороны, в практических исследованиях часто используют прямые методы решения задач оптимизации, среди которых большой популярностью пользуются генетические алгоритмы [4]. Поэтому целью настоящей работы является сравнительный анализ преимуществ и ограничений этих схем решения и разработка нового подхода, опирающегося на их совместное использование.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Рассмотрим плоскослоистую структуру с неизвестным распределением электрических параметров, лежащую на подложке с известной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_s(z)$ . Введем дополнительно в рассмотрение также структуру (которую назовем пробной) с известным и близким по значениям распределением диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{aux}$  (рис. 1). Предполагается, что слои составляющие структуру - немагнитные, т.е.  $\mu = 1$ .

Исследуемая структура облучается электромагнитной волной с известными параметрами, и измеряются характеристики рассеянного поля. Сторонние монохроматические источники располагаются над структурой на конечном или же бесконечном удалении. Они порождают первичную электромагнитную волну с комплексной амплитудой  $\vec{E}^{in}$ . Эта волна, падая на слой, порождает как поле внутри слоя, так и рассеянное поле  $\vec{E}^{sc}$ .

Будем искать профиль диэлектрической проницаемости исследуемой структуры с помощью последовательного уточнения оценки искомого профиля. На каждом этапе будем находить новую поправку к  $\epsilon_{aux}(z)$  как результат "подгонки" расчетных данных к экспериментальным в рамках приближения Борна [2] для прямой задачи рассеяния.

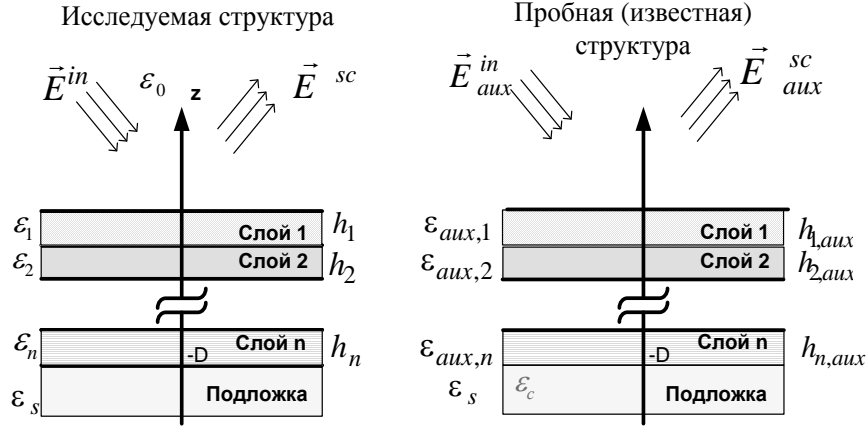


Рис. 1. Постановка задачи.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Поле, создаваемое сторонними источниками в пробной структуре, может быть записано как:

$$\vec{E}(\vec{R}) \equiv \vec{E}_{aux}(\vec{R}) + \frac{ik_0c}{4\pi} \int_V dV' [\hat{G}_{ee}(\vec{R}, \vec{R}') \hat{\eta}(\vec{R}') \vec{E}(\vec{R}')] \quad (1)$$

где  $\hat{G}_{ee}(\vec{R}, \vec{R}')$  - полевая функция Грина пробной структуры,  $\hat{\eta} = \epsilon'_{aux} - \epsilon'$  - искомая поправка к профилю диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{aux}(z)$  пробной структуры.

Если  $\hat{\eta}(\vec{R})$  - малая величина, т.е. диэлектрические проницаемости эталонного и исследуемого тела различаются незначительно, можно воспользоваться борновским приближением, отбрасывая члены  $\cong \eta^2$

$$\vec{E}(\vec{R}) \approx \vec{E}_S(\vec{R}) + \frac{ik_0c}{4\pi} \int_{V_P} dV' [\hat{G}_{ee}(\vec{R}, \vec{R}') \hat{\eta}(\vec{R}') \vec{E}_S(\vec{R}')] \quad (2)$$

Пусть теперь  $\vec{R}_H$  - радиус-вектор точки наблюдения вне исследуемого тела,  $\vec{p}(\vec{R})$  - вектор, определяющий поляризацию, на которой регистрируется поле в точке наблюдения. Тогда:

$$\vec{U}(\vec{R}_H) = U_{in}(\vec{R}_H) + \frac{ik_0c}{4\pi} \int dV' [\vec{p}(\vec{R}_H) \hat{G}_{ee}(\vec{R}, \vec{R}') \hat{\eta}(\vec{R}') \vec{E}_{in}(\vec{R}')] \quad (3)$$

Если диэлектрические проницаемости исследуемого и эталонного тела - скалярные величины, приходим к соотношению:

$$U(\vec{R}_H) = U_{in}(\vec{R}_H) + (L\eta)(\vec{R}_H) \equiv U_{in}(\vec{R}_H) + \int_{V_P} dV' L(\vec{R}_H, \vec{R}') \eta(\vec{R}') \quad (4)$$

где:  $\eta(\vec{R}) = \epsilon_P(\vec{R}) - \epsilon(\vec{R})$ ,  $L(\vec{R}_H, \vec{R}') = p(\vec{R}_H) G_{ee}(\vec{R}_H, \vec{R}') E_{in}(\vec{R}') \left[ \frac{ik_0c}{4\pi} \right]$ .

**Процедура регуляции и восстановления профиля.** Пусть для каждого из N значений параметра  $\lambda$  известны соответствующие значения:

$$U^{(1)}(\vec{R}_H), U_{in}^{(j)}(\vec{R}_H), L^{(j)}(\vec{R}_H, \vec{R}'), j = 1, 2, \dots, N.$$

В качестве  $\lambda$  могут выступать частота, радиус-вектор точки наблюдения, величины, характеризующие поляризацию или направление распространения волны, испускаемой, сторонними источниками и т.д. Согласно (4) получаем:



$$U^{(j)}(\vec{R}_H) = U_{in}^{(j)}(\vec{R}_H) + \int_{V_P} L^{(j)}(\vec{R}_H, \vec{R}') \eta(\vec{R}') dV'; j = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Это система N интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода относительно  $\eta(\vec{R}), (R \in V_P)$ . Ищем  $\eta(\vec{R})$  как функцию, реализующую минимум сглаживающего функционала [2]

$$F[\eta] \equiv \sum_{j=1}^N w_j \left| U^{(j)}(\vec{R}_H) - U_{in}^{(j)}(\vec{R}_H) - \int_{V_P} L^{(j)}(\vec{R}_H, \vec{R}') \eta(\vec{R}') dV' \right|^2 + \alpha \int_{V_P} w(\vec{R}) |\eta(\vec{R})|^2 dV. \quad (6)$$

Здесь  $w_j$  - весовые коэффициенты,  $w(\vec{R})$  - весовая функция,  $\alpha$ - параметр регуляризации (все - положительно определенные величины).

Условием экстремума функционала, как известно, является требование обращения в нуль его первой вариации  $\delta F$ . Соответствующее уравнение называют уравнением Эйлера. В данном случае оно имеет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N w_j L^{(j)*}(\vec{R}_H, \vec{R}) [U_{in}^{(j)}(\vec{R}_H) - U^{(j)}(\vec{R}_H)] + \\ & + \int_{V_P} dV' \left[ \sum_{j=1}^N w_j L^{(j)*}(\vec{R}_H, \vec{R}) L^{(j)}(\vec{R}_H, \vec{R}') \right] \eta(\vec{R}') + \alpha w(\vec{R}) \eta(\vec{R}) = 0; \quad (\vec{R} \in V_P). \end{aligned} \quad (7)$$

Перепишем уравнение Эйлера в форме:

$$- \int_{V_P} K(\vec{R}, \vec{R}') \eta(\vec{R}') dV' + \alpha w(\vec{R}) \eta(\vec{R}) = q(\vec{R}), (\vec{R} \in V_P) \quad (8)$$

Это - интегральное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром:

$$K(\vec{R}, \vec{R}') = \sum_{j=1}^N w_j L^{(j)*}(\vec{R}_H, \vec{R}') L^{(j)}(\vec{R}_H, \vec{R})$$

и правой частью:

$$q(\vec{R}) = \sum_{j=1}^N w_j L^{(j)*}(\vec{R}_H, \vec{R}') [U_{in}^{(j)}(\vec{R}_H) - U^{(j)}(\vec{R}_H)]$$

Из уравнения Эйлера с учетом вырожденности его ядра следует, что его решение может быть представлено как:

$$\eta(\vec{R}) = \frac{1}{\alpha w(\vec{R})} [q(\vec{R}) + \sum_{j=1}^N w_j L^{(j)*}(\vec{R}_H, \vec{R}') x_j], \quad (9)$$

где

$$x_j = const = \int_{V_P} dV' L^{(j)}(\vec{R}_H, \vec{R}') \eta(\vec{R}'), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Подставив под интеграл выражения для  $\eta(\vec{R}')$ , приходим к системе N линейных алгебраических уравнений относительно  $\{x_j\}$ :

$$x_j + \sum_{n=1}^N a_{jn} x_n = \psi_j; (j = 1, 2, \dots, N); \quad (10)$$

$$\text{где: } \psi_j = \int_{V_P} L^{(j)}(\vec{R}_H, \vec{R}') \frac{q(\vec{R}')}{\alpha w(\vec{R}')} dV'; a_{jn} = w_n \int_{V_P} L^{(j)}(\vec{R}_H, \vec{R}') L^{(n)*}(\vec{R}_H, \vec{R}') \frac{dV}{\alpha w(\vec{R}')}.$$

Решая (10) относительно  $\{x_j\}$  мы можем по прямой формуле (9) определить  $\eta(\vec{R})$  и найти искомый профиль из соотношения:

$$\varepsilon(\vec{R}) = \varepsilon_s(\vec{R}) - \eta(\vec{R}) \quad (11)$$

Далее для уточнения  $\varepsilon(\vec{R})$  можно опять повторить процедуру восстановления, подставив  $\varepsilon(\vec{R})$  из (11) в (5) вместо  $\varepsilon_s(\vec{R})$  и так до достижения требуемой точности.

Суть **генетических алгоритмов** [4] состоит в имитации механизма естественной селекции и эволюции. Эти алгоритмы предназначены для решения оптимизационных задач. Стандартный генетический алгоритм (СГА) переводит оптимизационные параметры в строку двоичных кодов. Таким образом, гены в СГА являются фактически двоичными кодами. Хромосомы (Chr) в этом случае представляют собой «цепку» генов, имеющую форму:

$$Chr = \overbrace{g_1^1 \ g_2^1 \ \dots \ g_{L_1}^1}^{x_1} \ \overbrace{g_1^2 \ g_2^2 \ \dots \ g_{L_2}^2}^{x_2} \ \dots \ \overbrace{g_1^N \ g_2^N \ \dots \ g_{L_N}^N}^{x_N}; \quad (12)$$

где  $g_j^i$  – ген, а  $L_i$  - длина кодовой строки для  $j$ -го оптимизационного параметра. Соответствие между хромосомами и оптимизационными параметрами дается следующей формулой:

$$x_i = x_i^{\min} + \frac{x_i^{\max} - x_i^{\min}}{2^{L_i} - 1} \sum_{j=1}^{L_i} g_j^i 2^{L_i - j}; \quad i = 1, N, \quad (13)$$

где интервал  $\left[ x_i^{\min}, x_i^{\max} \right]$  является областью поиска для  $i$ -го оптимизационного параметра.

Как видим, в рамках данного алгоритма неявно предполагается наличие простой связи между генами (хромосомами) с одной стороны и оптимизационными параметрами с другой. Иными словами, предполагается существование критериев отбора результатов мутации. Однако в рассматриваемой задаче, например при работе с данными в частотной области такая зависимость имеет сложный характер, и установить априори эффективность отдельной мутации в большинстве случаев невозможно. Поэтому наиболее эффективным является совместное использование данных алгоритмов. Такая схема предполагает применение на начальном этапе генетических алгоритмов с целью отыскания начального приближения, обеспечивающего быструю сходимость итерационного метода. Далее с помощью итерационного метода Ньютона-Канторовича определяется искомое распределение диэлектрической проницаемости.

## ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе предложен новый подход к решению обратной задачи рассеяния, сводящий ее к математической задаче минимизации функционала. Первоначальные этапы (отыскание начального приближения) предлагается проводить с помощью прямых методов (генетические алгоритмы), а основную часть - аналитически, с помощью схемы Ньютона-Канторовича. Это существенно повышает эффективность реализации решения. Таким образом преодолевается одна из трудностей, связанная с критерием оценки используемой пробной структуры.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Tarantola Inverse problem theory and methods for model parameter estimation - Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation. Philadelphia, PA, USA, - Society of Industrial and Applied Mathematics (SIAM), -2005г. 352 стр.
2. D. O. Batrakov and N. P. Zhuck Solution of a general inverse scattering problem using distorted Born approximation and iterative technique. //Inverse Problems, 10, Feb. 1994, pp. 39-54.
3. Батраков Д.О. Качество и эффективность обработки информации при радиоволновом контроле слоистонеоднородных диэлектриков многочастотным методом.// Дефектоскопия - N8. - С.68-76, 1998.
4. Z. Q. Meng, T. Takenaka, and T. Tanaka, "Image reconstruction of two-dimensional impenetrable objects using genetic algorithm," /J. Electromagn. Waves Applicat., vol. 13, pp. 95-118, Jan. 1999.

УДК 538.574.6

## РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ Е-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ НА РЕШЕТКЕ ИЗ МЕТАМАТЕРИАЛА

А.В. Казанко<sup>1</sup>, Е.Н. Одаренко<sup>2</sup>, А.А. Шматько<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, 61050, Харьков, пл. Фейербаха, 7,  
тел.: (057) 730-10-39 e-mail: [vtisusheet@mail.ru](mailto:vtisusheet@mail.ru)

<sup>2</sup>Харьковский национальный университет радиоэлектроники, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14,  
тел.: (057) 702-10-57, e-mail: [oen@kture.kharkov.ua](mailto:oen@kture.kharkov.ua)

<sup>3</sup>Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 61022, Харьков, пл. Свободы, 4,  
тел.: (057) 707-51-33, e-mail: [alexandr.a.shmatko@univer.kharkov.ua](mailto:alexandr.a.shmatko@univer.kharkov.ua)

Поступила в редакцию 18 апреля 2013г

В работе решена задача дифракции плоской  $E$ -поляризованной волны на решетке, состоящей из брусьев прямоугольного поперечного сечения для произвольных соотношений между длиной волны и геометрическими размерами решетки. Исследованы зависимости коэффициентов отражения и прохождения волны от волнового параметра и угла падения для случаев, когда материальные параметры элементов решетки имеют положительные и отрицательные (метаматериал) значения. Определены размеры решетки и электродинамические параметры задачи, которые соответствуют полному отражению и полному прохождению падающей волны для различных материальных параметров решетки.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** дифракционная решетка, метаматериал.

В роботі розв'язана задача дифракції плоскої  $E$ -поляризованої хвилі на решітці, що складається з брусів прямокутного перетину для довільних співвідношень між довжиною хвилі та геометричними розмірами решітки. Досліджені залежності коефіцієнтів відбиття та проходження хвилі від хвильового параметру та кута падіння для випадків, коли матеріальні параметри елементів решітки мають додатні та від'ємні (метаматеріал) значення. Визначені розміри решітки та електродинамічні параметри задачі, що відповідають повному відбиттю та повному проходженню хвилі, що падає на систему, для різних матеріальних параметрів решітки.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** дифракційна решітка, метаматеріал.

Problem of the  $E$ -polarized wave diffraction on the rectangular bars cross-section grating for arbitrary relationship between the wavelength and grating geometrical parameters is solved. Dependencies of the reflection and transmission factors on the wave parameter and incidence angle are investigated for cases when grating elements material parameters signs are positive and negative (metamaterial). Electrodynamical problem parameters and grating sizes that correspond to the total reflection or transmission of the incident wave are defined for different grating material parameters.

**KEY WORDS:** diffraction grating, metamaterial.

### ВВЕДЕНИЕ

В целом ряде практических приложений (спектроскопии, антенной технике и др.) возникает необходимость решения задачи дифракции на различных периодических структурах. Дополнительные возможности по расширению функциональности этих систем появляются благодаря применению в их конструкции искусственных сред с отрицательными значениями диэлектрической и магнитной проницаемости – метаматериалов [1, 2]. Уникальные физические свойства таких «левосторонних» сред позволяют создавать устройства с необычными характеристиками в различных частотных диапазонах (фильтры, частотно-селективные структуры, волноводы, резонаторы, линзы).

Задачи дифракции плоской волны на решетке из брусьев прямоугольного поперечного сечения относятся к разряду классических и были решены для различных поляризаций исходной волны. В работе [3] решена задача дифракции  $E$ -поляризованной плоской электромагнитной волны на плоской решетке, состоящей из диэлектрических брусьев прямоугольного поперечного сечения. В работе [4] рассматривалась задача дифракции плоской  $H$ -поляризованной электромагнитной волны на решетке из проводящих металлических брусьев. Использование метаматериалов в конструкции дифракционных решеток приводит к изменению электродинамических свойств этих периодических систем и, соответственно, к новым закономерностям рассеяния и излучения электромагнитных волн [5, 6]. В связи с этим актуальными являются задачи исследования взаимодействия плоских волн с дифракционными решетками, содержащими элементы из метаматериалов.

В данной работе рассматривается задача дифракции плоской монохроматической E-поляризованной электромагнитной волны на решетке из метаматериала. Для формирования периодической структуры используются среды с различными знаками диэлектрической и магнитной проницаемостей.

**ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ**

Рассматривается задача о рассеянии плоской монохроматической  $E_x$ -поляризованной электромагнитной волны, падающей под углом  $\varphi$ , на объемную периодическую решетку из метаматериала (рис. 1).

В однородной изотропной среде расположена периодическая дифракционная решетка, состоящая из двух семейств перемежающихся брусьев прямоугольного поперечного сечения с материальными параметрами  $(\varepsilon_1, \mu_1)$  и  $(\varepsilon_2, \mu_2)$ . Обозначим период решетки через  $l$ , глубину решетки -  $h$ . Тогда  $d \times h$  – сечение брусьев одного семейства в плоскости  $(y, z)$ , и  $(l-d) \times h$  – сечение брусьев другого семейства.

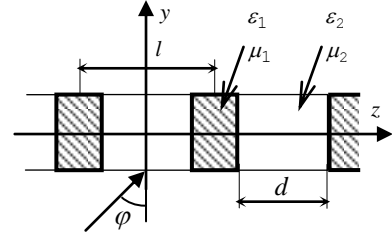


Рис. 1. Модель решетки

Для нахождения рассеянного решеткой поля необходимо решить однородное уравнение Гельмгольца относительно компоненты напряженности электрического поля  $E_x$ :

$$\Delta E_x + k^2 \varepsilon \mu E_x = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_{1,2}, \quad \mu = \mu_{1,2}, \tag{1}$$

с соответствующими граничными условиями:

$$E_x|_{y=\pm \frac{h}{2}-0} = E_x|_{y=\pm \frac{h}{2}+0}, \tag{2}$$

$$H_z|_{y=\pm \frac{h}{2}-0} = H_z|_{y=\pm \frac{h}{2}+0}. \tag{3}$$

Используя теорему Флоке и метод частичных областей,  $E_x$ -компоненту поля за пределами решетки  $(|y| \geq \frac{h}{2})$  можно представить в виде:

$$E_x(z, y) = \begin{cases} e^{ik y (y + \frac{h}{2}) + ik \alpha z} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{\lambda_m} e^{-i\gamma_m (y + \frac{h}{2})} e^{-i(k\alpha + \lambda_m)z}; & y < \frac{h}{2} \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{\lambda_m} e^{i\gamma_m (y + \frac{h}{2})} e^{-i(k\alpha + \lambda_m)z}; & y > \frac{h}{2} \end{cases}, \tag{4}$$

здесь  $\lambda_m = \frac{2\pi}{l} m$ ,  $\gamma_m = \sqrt{k^2 - (k\alpha + \lambda_m)^2}$ ,  $\alpha = \sin \varphi$ ,  $k_y = k \cos \varphi$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число,  $A_{\lambda_m}$ ,  $B_{\lambda_m}$  – неизвестные коэффициенты разложения.

Далее определим решение уравнения Гельмгольца в области  $|y| \leq \frac{h}{2}$  при следующих граничных условиях:

$$E_x|_{z=-\frac{d}{2}-0} = E_x|_{z=-\frac{d}{2}+0}, \tag{5}$$

$$H_y|_{z=-\frac{d}{2}-0} = H_y|_{z=-\frac{d}{2}+0}. \tag{6}$$

Решения уравнения (1) в этой области представимо в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля с граничными условиями (5), (6):

$$E_x(z, y) = \sum_n Y_{\zeta_n}(y) Z_{\zeta_n}(z), \quad |y| \leq \frac{h}{2}, \tag{7}$$

здесь  $Z_{\zeta_n}$  – решения задачи Штурма-Лиувилля на собственные значения (и собственные функции) оператора Лапласа с граничными условиями (5),(6):

$$\ddot{Z} + \zeta^2 Z = 0. \quad (8)$$

Функции  $Y_{\zeta_n}(y) = C_{\rho_n} e^{i\rho_n y} + D_{\rho_n} e^{-i\rho_n y}$  ( $\rho_n = \sqrt{k^2 \varepsilon_n - \zeta_n^2}$ ) представляют собой общее решение линейного дифференциального уравнения 2-го порядка:  $\ddot{Y} + \rho_n^2 Y = 0$  с неизвестными коэффициентами  $C_{\rho_n}, D_{\rho_n}$ . Решения уравнения (8) представим в виде:

$$\begin{cases} Z_{\zeta_n^I}(z) = A_{\zeta_n^I} \cos \zeta_n^I(z-l) + B_{\zeta_n^I} \sin \zeta_n^I(z-l) \\ Z_{\zeta_n^{II}}(z) = A_{\zeta_n^{II}} \cos \zeta_n^{II}(z-l) + B_{\zeta_n^{II}} \sin \zeta_n^{II}(z-l) \end{cases} \quad (9)$$

где  $\zeta_n^I = \sqrt{k^2 \varepsilon_1 \mu_1 + \beta_n^2}$ ,  $\zeta_n^{II} = \sqrt{k^2 \varepsilon_2 \mu_2 + \beta_n^2}$ . Неизвестные коэффициенты  $A_{\zeta_n^I}, A_{\zeta_n^{II}}, B_{\zeta_n^I}, B_{\zeta_n^{II}}$  определяются из граничных условий (5), (6). Эти условия приводят к однородной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) 4-го порядка. Для нахождения собственных значений  $\beta_n$  воспользуемся характеристическим уравнением, которое получается из условия равенства нулю определителя СЛАУ:

$$\begin{vmatrix} e^{-ikal} \cos \zeta_n^I(d-l) & e^{-ikal} \sin \zeta_n^I(d-l) & -\cos \zeta_n^{II}d & -\sin \zeta_n^{II}d \\ -e^{-ikal} \frac{\zeta_n^I}{\mu_1} \sin \zeta_n^I(d-l) & e^{-ikal} \frac{\zeta_n^I}{\mu_1} \cos \zeta_n^I(d-l) & \frac{\zeta_n^{II}}{\mu_2} \sin \zeta_n^{II}d & -\frac{\zeta_n^{II}}{\mu_2} \cos \zeta_n^{II}d \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\zeta_n^I}{\mu_2} & 0 & \frac{\zeta_n^{II}}{\mu_2} \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Раскрывая определитель в левой части уравнения (10), получим характеристическое уравнение относительно  $\beta$ :

$$\cos k\alpha d = \cos \zeta_n^{II}d \cos \zeta_n^I(d-l) + \frac{1}{2} \left( \eta + \frac{1}{\eta} \right) \sin \zeta_n^{II}d \sin \zeta_n^I(d-l) \quad (11)$$

здесь  $\zeta_n^I = \sqrt{k^2 \varepsilon_1 \mu_1 + \beta^2}$ ,  $\zeta_n^{II} = \sqrt{k^2 \varepsilon_2 \mu_2 + \beta^2}$ ,  $\eta = \frac{\zeta_n^I \mu_2}{\zeta_n^{II} \mu_1}$ .

Решение характеристического уравнения (11) позволяет найти собственные значения  $\beta = \beta_n$  и соответствующие им собственные функции  $Z_{\zeta_n}$ .

Перейдем к определению неизвестных коэффициентов Фурье  $A_{\lambda_m}, B_{\lambda_m}$  для полей в (4). Для этого в плоскостях раздела  $y = \pm \frac{h}{2}$  воспользуемся граничными условиями (2), (3).

Непрерывность тангенциальных компонент полей  $E_x, H_z$  на верхней и нижней поверхностях решетки приводит к следующим функциональным уравнениям:

$$\left\{ \begin{aligned} e^{ik\alpha z} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{\lambda_m} e^{-i(k\alpha + \lambda_m)z} &= \begin{cases} \sum_n Y_{\zeta_n}(-\frac{h}{2}) Z_{\zeta_n}(z), & z \in [\frac{d}{2} - l, -\frac{d}{2}) \\ \sum_n Y_{\zeta_n}(-\frac{h}{2}) Z_{\zeta_n}(z), & z \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}) \end{cases} \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{\lambda_m} e^{-i(k\alpha + \lambda_m)z} &= \begin{cases} \sum_n Y_{\zeta_n}(\frac{h}{2}) Z_{\zeta_n}(z), & z \in [\frac{d}{2} - l, -\frac{d}{2}) \\ \sum_n Y_{\zeta_n}(\frac{h}{2}) Z_{\zeta_n}(z), & z \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}) \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ik_y e^{ik\alpha z} - i \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{\lambda_m} \gamma_m e^{-i(k\alpha + \lambda_m)z} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} \sum_n \dot{Y}_{\zeta_n}(-\frac{h}{2}) Z_{\zeta_n}(z), & z \in [\frac{d}{2} - l, -\frac{d}{2}] \\ \frac{1}{\mu_2} \sum_n \dot{Y}_{\zeta_n}(-\frac{h}{2}) Z_{\zeta_n}(z), & z \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}] \end{cases} \\ i \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{\lambda_m} \gamma_m e^{-i(k\alpha + \lambda_m)z} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} \sum_n \dot{Y}_{\zeta_n}(\frac{h}{2}) Z_{\zeta_n}(z), & z \in [\frac{d}{2} - l, -\frac{d}{2}] \\ \frac{1}{\mu_2} \sum_n \dot{Y}_{\zeta_n}(\frac{h}{2}) Z_{\zeta_n}(z), & z \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}] \end{cases} \end{array} \right. \quad (13)$$

Для упрощения системы функциональных уравнений (12), (13) введем обозначения:  $E_{\lambda_m}^{\pm} = A_{\lambda_m} \pm B_{\lambda_m}$ ,  $G_{\rho_n}^{\pm} = D_{\rho_n} \pm C_{\rho_n}$ . Для получения СЛАУ относительно коэффициентов  $E_{\lambda_m}^{\pm}$ ,  $G_{\rho_n}^{\pm}$  первоначально воспользуемся ортогональностью системы базисных функций  $e_{\lambda_m}(z) = e^{-i(k\alpha + \lambda_m)z}$  ( $m = 0, \pm 1, \dots$ ) на интервале  $[\frac{d}{2} - l, \frac{d}{2}]$ . В результате преобразований получаем из (12) две связанные системы уравнений относительно коэффициентов  $E_{\lambda_m}^{\pm}$ ,  $G_{\rho_n}^{\pm}$ :

$$\sum_n \left( \frac{1}{\mu_1} \dot{Y}_{\zeta_n}(-\frac{h}{2}) Z_{\zeta_n}(z) - \sum_m E_{\lambda_m}^+ e_{\lambda_m}(z) \right) = 0 \quad (14)$$

$$\sum_n \left( \frac{1}{\mu_2} \dot{Y}_{\zeta_n}(\frac{h}{2}) Z_{\zeta_n}(z) - \sum_m E_{\lambda_m}^- e_{\lambda_m}(z) \right) = 0 \quad (15)$$

где  $U^+ = \cos \rho_n \frac{h}{2}$ ,  $U^- = i \sin \rho_n \frac{h}{2}$ ,  $L_{nm} = (Z_n, e_{\lambda_m})$  – скалярное произведение.

Складывая и вычитая уравнения (14) и (15), получим две независимых системы уравнений относительно коэффициентов  $E_{\lambda_m}^{\pm}$ ,  $G_{\rho_n}^{\pm}$ :

$$2 \sum_n G_{\rho_n}^{\pm} U^{\pm} L_{nm} = \delta_{0m} + E_{\lambda_m}^{\pm}, \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (16)$$

Другую систему уравнений относительно коэффициентов  $E_{\lambda_m}^{\pm}$ ,  $G_{\rho_n}^{\pm}$  получим из (13), воспользовавшись ортогональностью системы собственных функций  $Z_{\zeta_n}$  на интервале  $[\frac{d}{2} - l, \frac{d}{2}]$ :

$$ik_y L_{n0} - i \sum_m E_{\lambda_m}^{\pm} \gamma_m L_{nm} = -2i G_{\rho_n}^{\pm} \rho_n U^{\mp}, \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (17)$$

Из уравнений (16), (17) следует две независимых СЛАУ относительно неизвестных  $E_{\lambda_m}^{\pm}$  или  $G_{\rho_n}^{\pm}$ .  
Относительно неизвестных  $E_{\lambda_m}^{\pm}$  СЛАУ имеет вид:

$$\sum_n \frac{i}{\rho_n} \frac{U^{\pm}}{U^{\mp}} \left( \sum_m E_{\lambda_m}^{\pm} \gamma_m L_{nm} - k_y L_{n0} \right) L_{nm} = \delta_{0m} + E_{\lambda_m}^{\pm}, \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Изменим порядок суммирования:

$$\sum_m E_{\lambda_m}^{\pm} \gamma_m \sum_n \frac{1}{\rho_n} \frac{U^{\pm}}{U^{\mp}} L_{nm} L_{nm} - k_y \sum_n \frac{1}{\rho_n} \frac{U^{\pm}}{U^{\mp}} L_{n0} L_{nm} = \delta_{0m} + E_{\lambda_m}^{\pm} \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (18)$$

Каждая СЛАУ (18) в отдельности описывает четные и нечетные колебания по глубине решетки. Коэффициенты  $G_{\rho_n}^{\mp}$  определяются по найденным значениям коэффициентов  $E_{\lambda_m}^{\pm}$  через формулы (17). Отметим, что в отличие от полученных СЛАУ можно получить также и другую СЛАУ относительно коэффициентов  $G_{\rho_n}^{\mp}$ , тогда коэффициенты  $E_{\lambda_m}^{\pm}$  находятся через  $G_{\rho_n}^{\mp}$  по формуле (16).

### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Решение СЛАУ проводилось численно для различных значений параметров задачи. Анализ постоянного распространения показывает, что, в зависимости от геометрических размеров решетки, длины волны  $\lambda$ , и угла падения  $\varphi$ , в системе возможно распространение одной или нескольких пространственных гармоник поля. Условие распространения  $m$ -ой пространственной гармоники поля:  $k^2 - (k\alpha + \lambda_m)^2 \geq 0$  (см. (4)). Отсюда получаем условие существования дифракционных гармоник с индексом  $m$ :

$$-\frac{1}{2} \frac{kl}{\pi} (1 + \alpha) \leq m \leq \frac{1}{2} \frac{kl}{\pi} (1 - \alpha), \quad (19)$$

здесь  $\alpha = \sin \varphi$ . Из неравенства (19) следует, что пространственная гармоника с индексом  $m=0$  распространяется при любых значениях волнового числа  $k$  и угла падения  $\varphi$ . Угол распространения  $\psi_m^+$  (угол отражения  $\psi_m^-$ )  $m$ -ой распространяющейся гармоники выражается через угол падения  $\varphi$  следующим образом:

$$\psi_m^{\pm} = \pm \arctan \frac{k\alpha + \lambda_m}{\gamma_m}, \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда получаем выражение для угла распространения  $\psi_m^+$  (угла отражения  $\psi_m^-$ ) нулевой (распространяющейся) гармоники:

$$\psi_0^{\pm} = \pm \arctan \frac{k\alpha}{\sqrt{k^2 - (k\alpha)^2}} = \arctan \tan \varphi = \pm \varphi. \quad (20)$$

Перейдем к обсуждению численных результатов. На рис. 2 представлена зависимость модуля коэффициента отражения  $|R_0| = |A_{\lambda_0}|$  от волнового числа  $k$  при фиксированном угле падения  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ . Из рисунка видно, что для значения волнового числа  $k=0.7$  наблюдается полное прохождение волны (коэффициент отражения  $|R_0|=0$ ) при угле падения  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ .

Изолинии  $E_x$ -компоненты рассеянного поля для случая полного прохождения падающей волны через решетку изображены на рис. 3 и рис. 4 (на рис. 4 представлено увеличенное изображение области пространства в окрестности границы решетки). При полном прохождении в области вне решетки ( $|y| > \frac{h}{2}$ ) распространяется одна дифракционная гармоника поля. Поэтому изолинии  $E_x$ -компоненты в этой области представляют собой практически прямые линии (рис. 3).

Из рис. 4 видно, что вблизи границы раздела сред ( $y = \frac{h}{2}$ ) изолинии поля искривляются. Это связано с тем, что в этой области пространства полное поле состоит из поля плоской волны – основной гармоники, и бесконечного набора поверхностных затухающих гармоник.

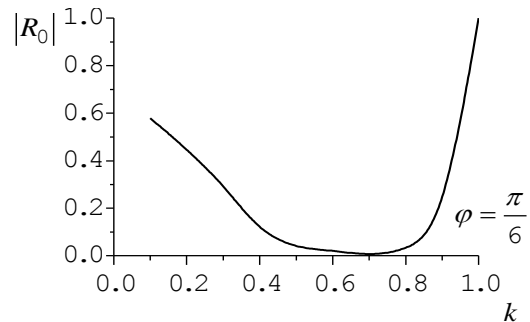


Рис. 2. Зависимость модуля коэффициента отражения  $|R_0|$  от волнового числа  $k$

Варьируя параметрами решетки и углом падения  $\varphi$ , можно обеспечить также полное отражение падающей волны ( $|R_0|=1$ ). На рис. 5 представлена зависимость модуля коэффициента прохождения  $|T_0|=|B_{\lambda_0}|$  от волнового числа  $k$  при фиксированном угле падения  $\varphi = \frac{\pi}{10}$ . Очевидно, что полное отражение волны от решетки наблюдается для значения  $k = 0.8$ .

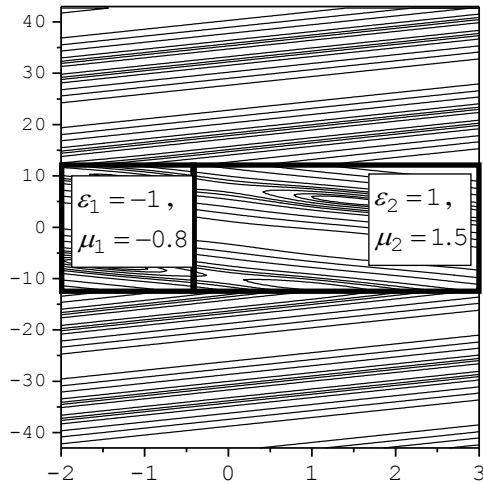


Рис. 3. Распределение  $E_x$ -компоненты электрического поля при полном прохождении

$$(\varphi = \frac{\pi}{6}, k = 0.7)$$

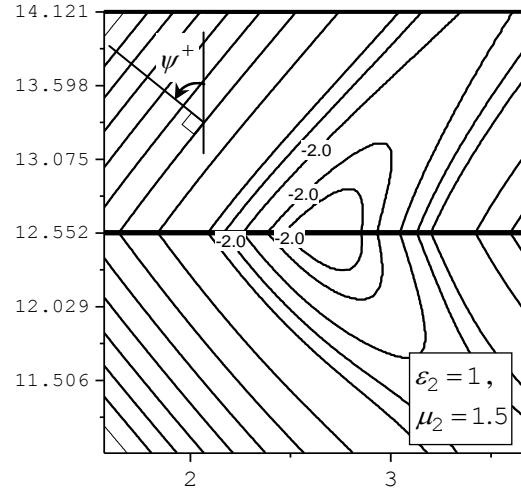


Рис. 4. Амплитудное распределение поля вблизи границы решетки

На рис. 6 представлены результаты расчета пространственного распределения электрического поля для значений параметров системы, соответствующих полному отражению падающей волны от решетки. В этом случае поле существует только внутри решетки и в области  $y < -\frac{h}{2}$ , где результирующее поле

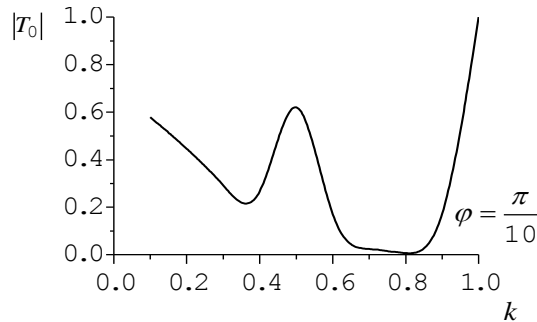


Рис. 5. Зависимость модуля коэффициента прохождения  $|T_0|$  от волнового числа  $k$ .

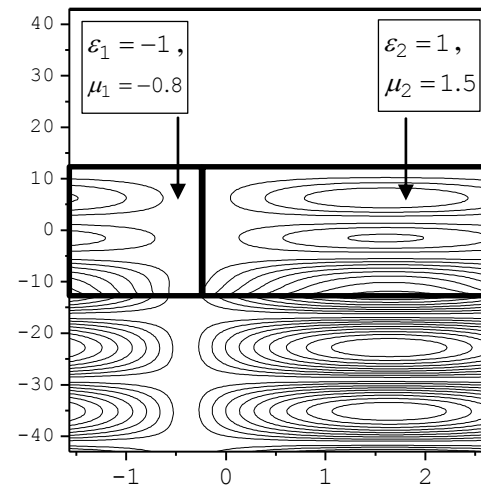


Рис. 6. Распределение электрического поля при полном отражении ( $\varphi = \frac{\pi}{10}, k = 0.8$ )

представляет собой результат интерференции падающей и отраженной волн.



### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено численно-аналитическое решение задачи дифракции плоской  $E_x$ -поляризованной волны на объемной решетке из метаматериала. Разработанный численный алгоритм позволяет рассчитывать амплитудно-частотные и амплитудно-угловые характеристики рассеянных полей для произвольных геометрических размеров решетки и значений материальных параметров сред, заполняющих решетку. Диэлектрическая и магнитная проницаемости могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Определены параметры задачи, для которых наблюдается полное прохождение и полное отражение падающей на решетку волны при распространении одной дифракционной пространственной гармоники поля.

Полученные результаты могут быть использованы в задачах исследования дифракции полей различной поляризации, для которых необходимы знания решения задач для  $H_x$ - и  $E_x$ -поляризованной падающей волны. На этой основе могут быть установлены основные закономерности преобразования поляризации падающего излучения и влияния геометрических размеров решетки и значений материальных параметров различных сред на характеристики рассеянного поля.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Theory and Phenomena of Metamaterials / Edited by F. Capolino. – CRC Press, 2009. – 926 p.
2. Solymar L., Shamoina E. Waves in Metamaterials. – Oxford University Press, USA, 1<sup>st</sup> edition, 2009. – 368 p.
3. Масалов С. А., Репа Ю. Т., Шестопалов В. П. Дифракция плоской электромагнитной волны на диэлектрической решетке // Республ. Межведомств. тематический научно-техн. сб. «Радиотехника». – 1969. – вып. 10. – С. 15-24.
4. Квач Н. В., Сологуб В. Г., Шестопалов В. П. Дифракция плоской  $H$ -поляризованной волны на решетке из проводящих диэлектрических брусьев прямоугольного сечения // Республ. Межведомств. тематический научно-техн. сб. «Радиотехника». – 1975. – вып. 34. – С. 3-11.
5. Кусайкин А.П., Мележик П.Н., Поединчук А.Е. Эффект резонансного излучения электромагнитных волн дифракционной решеткой с метаматериалом // Письма в ЖТФ. – 2009. – Т. 35, вып. 1. – С. 26-34.
6. Казанко А.В., Одаренко Е.Н., Шматько А.А. Взаимодействие плоской электромагнитной волны с дифракционной решеткой из метаматериала // Вісник ХНУ імені Каразіна. Сер. Радіофізика та електроніка. – 2012. – № 1010. – Вип. 20. – С. 57–65.

УДК 621.574.4

## ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ЗОНДИРУЮЩИХ ИМПУЛЬСОВ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНИЧЕСКИХ И БИМЕДИЦИНСКИХ ОБЪЕКТОВ

Д. О. Батраков<sup>1</sup>, Д. В. Головин<sup>1</sup>, Г. П. Почанин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, радиофизический факультет,  
пл.Свободы 4, Харьков, 61077, Украина

<sup>2</sup>Институт радиофизики и электроники НАН Украины,  
ул. Ак. Проскуры 12, Харьков, 61085, Украина

Поступила в редакцию 25 мая 2013 г.

В работе рассмотрены проблемы оптимизации формы импульсов при решении задач подповерхностного зондирования тонкослойных плоскострых структур. Для анализа использовались аналитические выражения сигналов различной формы, характерных как для рупорных, так и для дипольных антенн импульсных георадаров. В результате проведенных вычислительных экспериментов по обработке рассеянных сигналов с помощью преобразования Гильберта установлена оптимальная форма зондирующего сигнала. Проведено сравнение с результатами экспериментальных исследований на реальных конструкциях дорожных одежд.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** Преобразование Гильберта, импульсные сигналы, аналитический сигнал, подповерхностное зондирование.

У роботі розглянуто проблеми оптимізації форми імпульсів при розв'язанні завдань підповерхневого зондування тонкошарових плоскошаруватих структур. Для аналізу використовувалися аналітичні вирази для сигналів різної форми, які є характерними як для рупорних, так і для дипольних антен імпульсних георадарів. У результаті проведених обчислювальних експериментів по обробці розсіяних сигналів за допомогою перетворення Гільберта встановлена оптимальна форма сигналу. Проведено порівняння з результатами експериментальних досліджень на реальних конструкціях дорожніх одягів.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** Перетворення Гільберта, імпульсні сигнали, аналітичний сигнал, підповерхневе зондування.

Problems regarding optimization of form of probing impulses in the tasks of subsurface sounding of plane layered medium consisting of thin layers are considered in the present work. Analytical expressions of signals of the various form, which are typical both for horn and for dipole antennas of pulse ground penetrating radar were used for the analysis. As a result of the performed numerical experiments on data processing of scattered signals using the Hilbert transform, the optimum form of the probing signal was defined. Comparison with results of experimental researches on real road pavements is given.

**KEYWORDS:** Hilbert transform, pulse signals, an analytical signal, subsurface sensing.

### ВВЕДЕНИЕ

Импульсные сверхширокополосные (СШП) сигналы находят все более широкое применение в различных областях науки и технических приложениях. Использование таких сигналов открывает новые возможности в решении задач дистанционного зондирования природных сред, неразрушающего контроля качества технических изделий и диагностики в биомедицине. Вместе с такими параметрами, как крутизна фронтов зондирующего импульса, амплитуда, средняя частота спектра зондирующего сигнала, одним из ключевых моментов, позволяющих максимально эффективно использовать импульсные СШП сигналы на практике, является оптимальная форма зондирующего сигнала.

В литературе [1-2] приводятся результаты использования различных по форме импульсов без анализа влияния формы на качество и точность получаемых результатов. Это во многом связано как со спецификой решаемых задач, так и с техническими возможностями приборов. Например, при решении задач зондирования природных сред с целью изучения их внутренней структуры, толщина слоев либо пространственные масштабы характерных неоднородностей составляют десятки и более сантиметров. В таком случае, для достижения компромисса между глубиной зондирования и точностью определения координат границ пространственных неоднородностей целесообразно использование сигналов с центральной частотой 400-500 МГц. Очевидно, что при длительности импульсов порядка нескольких наносекунд и значениях диэлектрической проницаемости, лежащих в диапазоне 4-12, величина задержки по Гильберту [3] будет соизмерима либо больше, чем длительность зондирующего импульса. Таким образом, вопрос определения временных задержек сигналов, отраженных от внутренних структурных неоднородностей, может быть решен при визуальной обработке радарограмм оператором. В то же время ряд практических задач, возникающих в процессе георадарного обследования автомобильных дорог с

асфальтобетонным покрытием и в биомедицинских исследованиях, приводят к необходимости определения толщин слоев, тонких по сравнению с пространственной длительностью зондирующего импульса. В таком случае для интерпретации получаемых данных необходимо привлекать результаты численного моделирования и специфические алгоритмы обработки сигналов [4-6]. В таких задачах эффективность используемых алгоритмов во многом определяется формой зондирующего сигнала.

Поэтому целью настоящей работы является исследование влияния формы зондирующего сигнала на качество восстановления физико-геометрических характеристик плоскостойких сред.

### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

При решении задач обработки данных зондирования в качестве модельных используют несколько сигналов различной формы. Например, в [1] приведены осциллограммы импульсных сигналов, наблюдаемых на выходе приемных антенн с помощью стробоскопического осциллографа. Рис. 1.а соответствует несимметричному вибратору, а Рис. 1.б – рупорной антенне. Первый сигнал (Рис. 1. а)

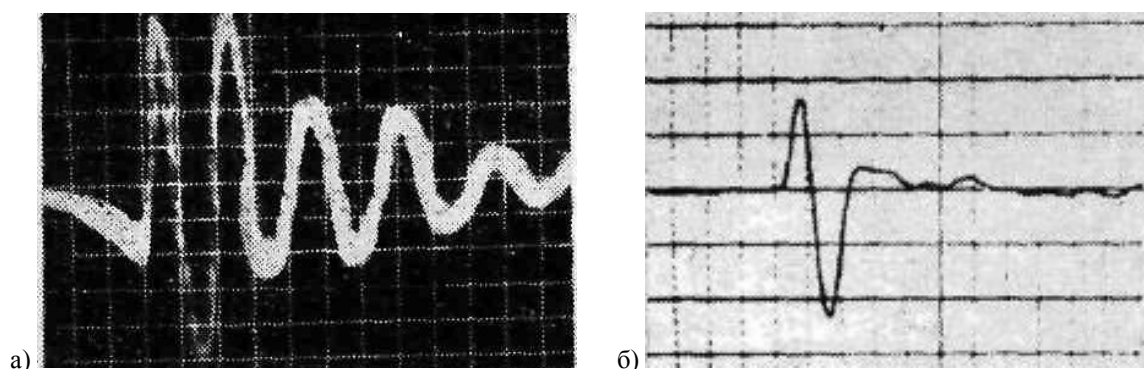


Рис. 1. Сигналы на выходе приемных антенн.

имеет форму, которую принято называть «сомбреро», и сопровождается так называемым «звоном» антенны – затухающими колебаниями со средней частотой, близкой к резонансной частоте антенны. Второй сигнал имеет форму, близкую к «моноимпульсу», что повышает разрешающую способность аппаратуры по сравнению с аппаратурой, использующей сигнал Рис.1.а. Однако чтобы сформировать сигнал типа Рис.1.б, требуются антенны, гораздо более сложные с точки зрения обеспечения всех необходимых электродинамических условий для СШП излучения импульсного сигнала.

Очевидно, что для успешного решения задач диагностики тонкослойных конструкций необходимо исследование возможностей различных импульсов с помощью численного моделирования. Под термином тонкослойные конструкции будем понимать плоскостойкие среды, у которых электрическая толщина слоев меньше либо соизмерима с пространственными размерами импульса. При зондировании таких структур основные трудности связаны с необходимостью разделения сигналов, отраженных от внутренних неоднородностей. Поэтому возникает вопрос о наиболее оптимальной форме зондирующего импульса, позволяющей разделить во времени сигналы, приходящие с задержками, меньшими, чем длительность импульса. Для ответа на этот вопрос необходимы, прежде всего, соответствующие вычислительные эксперименты.

В процессе численного моделирования используют следующие сигналы, аппроксимирующие реальные импульсы [2]:

$$S(t) = A \{ \exp(-\alpha t) - \exp[-(\alpha + \beta)t] \} \cdot \cos(\omega_0 t), \quad (1)$$

где  $\alpha, \beta$  – постоянные нарастания и затухания огибающей,  $A$  – амплитуда,  $\omega_0$  – центральная частота (угловая) спектра сигнала, совпадающая с центральной частотой полосы пропускания антенны.

$$S(t) = A \{ E(t) - E(t-T) \} \cdot \sin^2\left(\pi \frac{t}{T}\right) \sin(\omega_0 t), \quad (2)$$

где  $E(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$  – единичная функция Хэвисайда.

$$S(t) = (t^2 - 1) \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \tag{3}$$

$$S(t) = A \sin(\omega t) \cdot \exp[-\alpha(t - t_0)]. \tag{4}$$

Сигнал (1) является типичной моделью собственного колебания узкополосной антенной системы, имеющего вид синусоиды, промодулированной двумя экспоненциальными функциями. В зависимости от соотношения параметров (амплитуды, частоты и постоянных нарастания и затухания) получаем различную форму сигналов. В частности, на рис. 2 показана форма сигнала (1) при следующих значениях параметров:  $\alpha = 0.029$ ,  $\beta = 0.0017$ ,  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ ,  $\nu_0 = 800$  МГц, а также сигнал реального антенного блока георадара с дипольными антеннами. Как видим, форма модельного сигнала (1) достаточно хорошо аппроксимирует реальный импульс, регистрируемый приемной антенной в первые два периода.

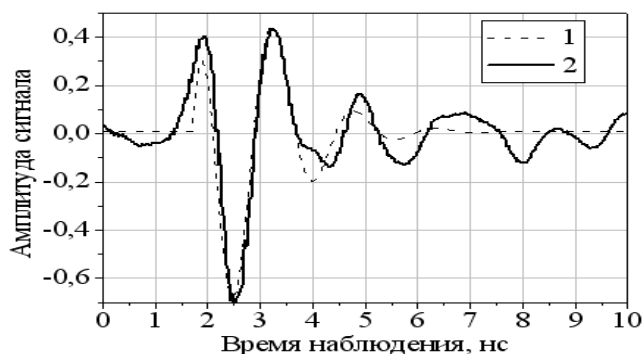


Рис. 2. Модельный сигнал (1) и импульс антенного блока дипольных антенн георадара «Одяг 1».  
 ———— — импульс георадара, - - - - - модельный импульс.

На рис. 3 показана форма импульса антенного блока георадара «Одяг 4» и ее аппроксимация сигналом (4). Такой сигнал хорошо аппроксимирует реальный импульс практически на четырех периодах.

В процессе обработки сигналов импульсных георадаров во временной области ключевой задачей является определение задержки, т.е. моментов прихода сигналов, отраженных от внутренних неоднородностей. В случае тонкослойных конструкций (например, слои асфальтобетона) трудности связаны с одной стороны с необходимостью разделения сигналов, близко расположенных на временной оси, а с другой стороны – со слабой контрастностью границ в некоторых случаях. Например, диэлектрическая проницаемость сухого песка (3,0-3,7) слабо отличается, а в некоторых ситуациях совпадает с диэлектрической проницаемостью сухого щебня (3,5-4,4). Эффективным инструментом определения задержки сигналов в таком случае является преобразование Гильберта [3,6], определяемое следующими соотношениями – прямое преобразование Гильберта:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau, \tag{5}$$

где функция  $1/(t - \tau)$  называется ядром преобразования Гильберта, и обратное преобразование Гильберта:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau. \tag{6}$$

Интегралы преобразования имеют особую точку  $a = (t - \tau) \rightarrow 0$ , в которой при вычислении

используется их главное значение по Коши:  $\lim_{a \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{t-a} + \int_{t+a}^{\infty} \right]$ . Преимущество этого преобразования

применительно к обработке импульсных сигналов заключается в его свойстве «идеального фазовращателя». В итоге задача может быть сведена к оценке модуля комплексного аналитического сигнала, сконструированного из исходного сигнала с помощью преобразования Гильберта. Такая

функция является гладкой и однополярной. Она имеет только один главный максимум, соответствующий одной границе. Поэтому анализ сигнала сводится к поиску максимумов модуля этой функции.

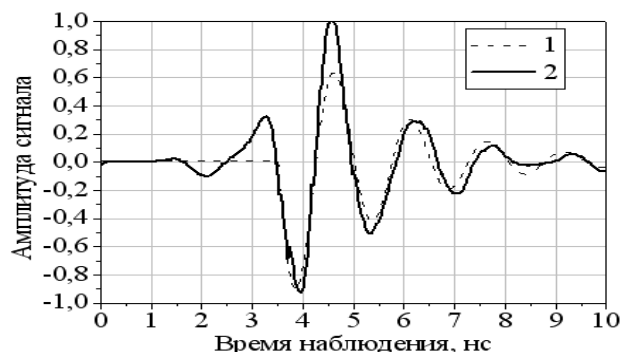


Рис. 3. Модельный сигнал (4) и импульс антенного блока дипольных антенн георадара «Одэг 4».  
 ———— — импульс георадара, - - - - - — модельный импульс.

Для определения задержки сигналов ранее предлагалось [6] с помощью дискретного преобразования Фурье вычислить преобразование Гильберта, затем построить аналитический сигнал и найти задержку, как расстояние на временной оси между максимумами положительной функции  $S(t)$ :

$$S(t) = |h(t)| = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)}. \quad (7)$$

Полярность отраженных импульсов определяется на основании одного из свойств преобразования: максимум модуля  $|h(t)|$  отвечает максимуму модуля  $|x(t)|$  действительной знакопеременной функции [4,6]. При нахождении максимума модуля преобразования анализируется знак функции  $x(t)$  в соответствующий момент времени. Однако, при наличии дополнительных колебаний (так называемого «звона») в антенной системе аналитический сигнал (7), полученный в результате обработки принятого импульса, будет иметь несколько максимумов (рис. 4а).

Как видно из рис. 4, в первом случае аналитический сигнал, полученный при обработке, имеет несколько максимумов, а во втором – положение максимума «размыто». Подчеркнем, что на графиках изображены лишь зондирующие импульсы, зарегистрированные приемной антенной после отражения практически идеально проводящей поверхностью.

При отражении импульсов от плоскостной структуры форма сигнала усложняется, и, помимо одного главного максимума, имеется несколько дополнительных, связанных как с формой зондирующего сигнала, так и с наличием отражений от границ слоев конструкции (Рис. 5). В таком случае обработка сигналов значительно усложняется, поскольку необходимо различать максимумы аналитического сигнала, связанные с дополнительными колебаниями в антенной системе («звоном») и информативными сигналами в результате отражений от структурных границ раздела. Таким образом, для успешного решения задач толщинометрии тонкослойных конструкций необходимо оптимизировать форму зондирующего сигнала.

Из приведенного выше анализа становится очевидно, что сигналы типа (1) не пригодны для толщинометрии тонкослойных конструкций. Поэтому для дальнейшего теоретического исследования были выбраны импульсы типа «сомбреро» (3) и «моноимпульс» (4). Для расчетов был разработан специализированный модуль «Моделирование» к программному комплексу «GeoVizu». С помощью данного модуля было проведено численное моделирование сигналов различных форм и получены результаты их обработки с применением преобразования Гильберта, а также соответствующие аналитические сигналы (рис. 6). Как видно из рис. 6, аналитический сигнал, полученный в результате обработки «моноимпульса», имеет несимметричную относительно его главного максимума форму и несколько локальных максимумов, следующих за ним. В определенных ситуациях несимметричность самого исходного импульса совместно с несимметричностью аналитического сигнала может вызвать трудности при обработке. Напротив, аналитический сигнал, полученный при аналогичной обработке сигнала типа "сомбреро", имеет симметричную форму и единственный максимум, в соответствии которому можно поставить положение сигнала на временной оси.

В процессе моделирования также проводились численные эксперименты по отражению таких импульсов от плоскостных структур, состоящих из трех слоев разной толщины и с разными значениями диэлектрической проницаемости (рис. 7). В качестве одной из модельных структур была выбрана трехслойная среда, лежащая на подложке, полубесконечной в направлении распространения зондирующего сигнала. Были выбраны толщины слоев (в порядке прохождения зондирующего сигнала)

9, 15 и 20 см, а значения диэлектрической проницаемости составляли 6.7, 4.4 и 3.6 соответственно. Значение диэлектрической проницаемости подложки (основания) принималось равным 4.8. Положения максимумов аналитического сигнала отмечены штриховыми вертикальными линиями, а моменты прихода сигналов, отраженных от границ слоев – вертикальными сплошными линиями. Как видно из приведенных результатов, для симметричного импульса в форме «сомбреро» обработка сигнала с

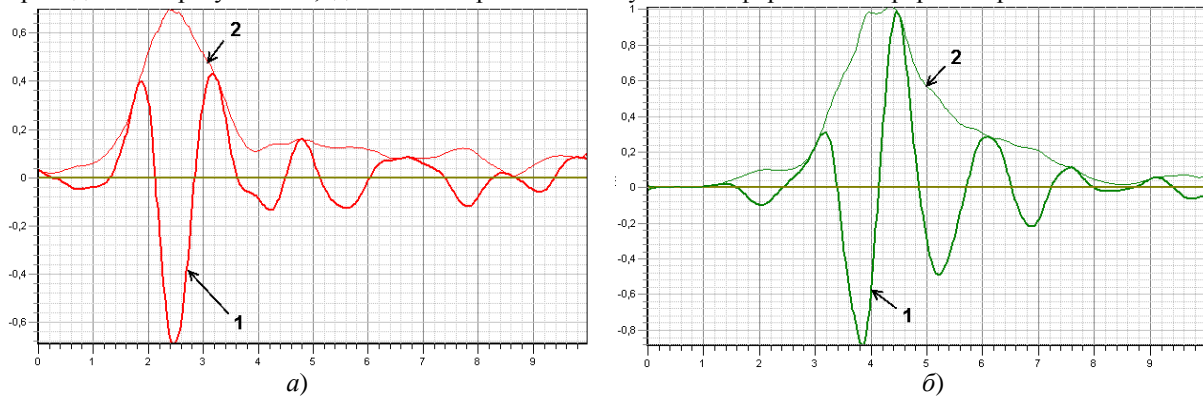


Рис. 4. Сигналы антенного блока георадара «Одяг 1» (а) и георадара «Одяг 4» (б) результат их обработки с помощью преобразования Гильберта.  
1 – импульс георадара, 2 – аналитический сигнал.

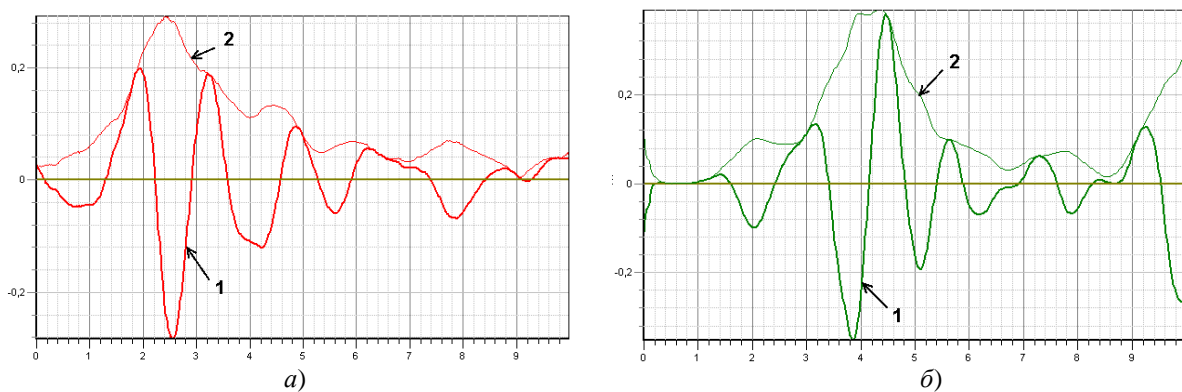


Рис. 5. Сигналы антенного блока георадара «Одяг 1» (а) и георадара «Одяг 4» (б) при отражении от плоскостойких сред (конструкций дорожных одежд).  
1 – импульс георадара, 2 – аналитический сигнал.

помощью преобразования Гильберта (Рис.7.б) позволяет более точно определить моменты отражения зондирующего импульса от границ слоев. Это, в первую очередь, характерно для тонких слоев. В случае симметричного импульса амплитуды двух боковых «всплесков» немного меньше, чем амплитуда одного

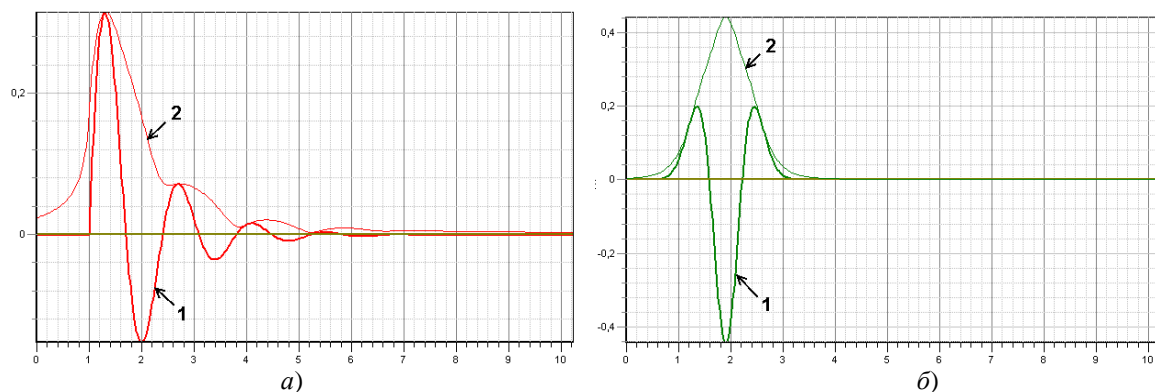


Рис. 6. Сигналы «моноимпульс» (а) и «сомбреро» (б) и их преобразование Гильберта  
1 – импульс георадара, 2 – аналитический сигнал.

(следующего за главным) выброса у «моноимпульса». В результате послемпульсные колебания "маскируют" сигнал, отраженный второй границей раздела слоев, и смещают максимум аналитического сигнала по времени.

Из проведенного анализа следует, что при разработке антенных блоков георадаров для подповерхностного зондирования тонкослойных конструкций необходимо обеспечить симметрию сигнала, регистрируемого приемной антенной после отражения от зондируемой среды. Другой важной частью задачи синтеза оптимальных антенных блоков является обеспечение максимально достижимого отношения амплитуды главного «выброса» к амплитуде боковых выбросов («полей сомбреро»). При этом достигается максимальная крутизна фронтов аналитического сигнала, что в итоге обеспечивает более высокую точность и достоверность восстановления значений толщины слоев.

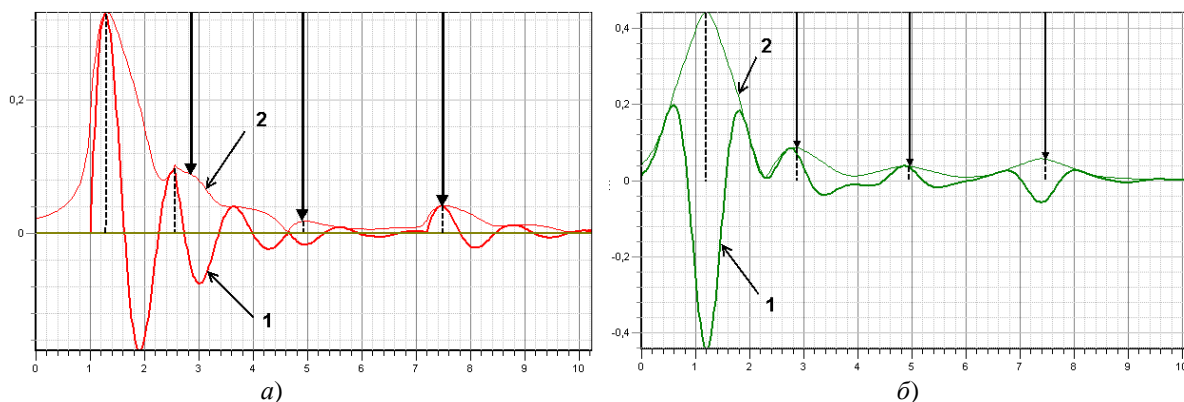


Рис. 7. Сигналы «моноимпульс» (а) и «сомбреро» (б) отраженные от трехслойной среды и их преобразование Гильберта  
1 – импульс георадара, 2 – аналитический сигнал

## ВЫВОДЫ

Таким образом, именно форма зондирующего сигнала во многом определяет качество (точность) и достоверность получаемых данных о внутренней структуре исследуемого объекта. Это особенно характерно для таких приложений, как неразрушающий контроль и неинвазивная диагностика биологических тканей, где электрическая толщина слоев мала, (т.е. значение произведения толщины слоя на корень квадратный из его диэлектрической проницаемости, мало по сравнению с пространственной длительностью импульса в среде). Как следствие, для решения этих задач, особую роль приобретает не только длительность импульса, но и его форма.

В результате проведенных с помощью разработанного программного обеспечения вычислительных экспериментов установлена наиболее оптимальная (из реально достижимых) форма зондирующих сигналов – сигнал типа "сомбреро". Использование этих сигналов позволит достичь большей точности и достоверности обработки данных георадарного обследования таких технических объектов как дорожные одежды нежесткого типа с использованием преобразования Гильберта и обеспечит повышение качества интерпретации данных медико-биологических исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Финкельштейн М. И. Радиолокация слоистых земных покровов / М. И. Финкельштейн, В. Л. Мендельсон, В. А. Кутев ; [под ред. М. И. Финкельштейна]. – М. : Советское Радио. – 1977. – 176 с.
2. Вопросы подповерхностной радиолокации : коллективная монография / [под ред. А. Ю. Гринева]. – М. : Радиотехника, 2005. – 416 с.
3. Крылов В.В. Определение понятия задержки сигнала по Гильберту и методы её измерения / В.В. Крылов, Д.М. Пономарев // Радиотехника и Электроника. – 1980. – т.25. – №1. – С.204-206.
4. Batrakov D. O. Hilbert transform application to the impulse signal processing / D. O. Batrakov, A. G. Batrakova, D.V. Golovin // Proceedings of UWBUSIS'2010 – Sevastopol, Ukraine. – 2010. – September 6-10, P. 113-115
5. Astanin L. Yu. The structural features of ultrawideband signals / L. Yu. Astanin, M. V. Kipke, V. V. Kostyleva // Proceedings of UWBUSIS'2008 – Sevastopol, Ukraine. – 2008. – 15-19 September, P. 180-182
6. Батраков Д.О. Алгоритм определения задержки импульсных сигналов, основанный на преобразовании Гильберта. / Д.О. Батраков, Д.В. Головин, С.В. Греков // Вісник Харківського Національного університету ім. В.Н. Каразіна. – Випуск 14. – 2009. – №853. – С. 68-74.

УДК 612.84:778.38

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЯМКЕ И НА ПЕРИФЕРИИ ЖЁЛТОГО ПЯТНА СЕТЧАТКИ ГЛАЗА

**В.П. Титарь, О.В. Шпаченко**

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, 61022, пл. Свободы, 4*  
E-mail: inhol@ukr.net

Поступила в редакцию 15 мая 2013 г.

Проведен сравнительный анализ отражения и преломления лазерного излучения в центральной ямке жёлтого пятна и на его периферии. Поскольку в сетчатке содержатся биологические квазикристаллы двух типов (нервные волокна и стопки фоторецепторных дисков), то для описания процесса прохождения электромагнитных волн через все слои сетчатки впервые получены аналоги формул Френеля, описывающие отражение и преломление на границах разделов между изотропной средой и одноосным кристаллом, между одноосным кристаллом и изотропной средой, а также между двумя одноосными кристаллами для конкретных случаев расположения в пространстве их оптических осей. Получены графики зависимостей напряжённостей электрического поля для всех электромагнитных волн (отражённых и преломлённых), которые распространяются в слоях сетчатки в центральной ямке и на периферии жёлтого пятна. Показано, что существенные различия имеются для графиков напряжённостей электрического поля только в случае волн, отражённых от нижней границы слоя нервных волокон, что обусловлено различием в анатомическом строении сетчатки в центре и на периферии жёлтого пятна.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** физиологическая оптика, сетчатка глаза, одноосный кристалл, форм-двулучепреломление, формулы Френеля.

Проведено порівняльний аналіз відбиття та заломлення лазерного випромінювання у центральній ямці жовтої плями та на її периферії. Оскільки в сітківці є біологічні квазікристали двох типів (нервові волокна та стопки фоторецепторних дисків), то для опису процесу проходження електромагнітних хвиль крізь всі шари сітківки вперше отримано аналоги формул Френеля, що описують відбиття та заломлення на межах розподілу між ізотропним середовищем та одновісним кристалом, між одновісним кристалом та ізотропним середовищем, а також між двома одновісними кристалами для конкретних випадків розташування в просторі їх оптичних осей. Отримано графіки залежностей напруженості електричного поля для всіх електромагнітних хвиль (відбитих та заломлених), які розповсюджуються в шарах сітківки в центральній ямці та на периферії жовтої плями. Показано, що значна різниця є між графіками напруженості електричного поля тільки у випадку хвиль, які відбиті від нижньої межі шару нервових волокон, що обумовлено різницею в анатомічній будові сітківки в центрі та на периферії жовтої плями.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** фізіологічна оптика, сітківка ока, одновісний кристал, форм-двопроменезаломлення, формули Френеля.

Reflection and refraction of laser radiation at a central fovea of macula and its periphery is analysed. Since the retina contains two types of biological quasicrystals, nerve fibres and photoreceptor disk stacks, the transmission of electromagnetic waves through all retina layers is described by analogues of Fresnel formulas derived. These formulas define the reflection and refraction at an interface between an isotropic medium and a uniaxial crystal, between a uniaxial crystal and an isotropic medium, as well as between two uniaxial crystals for specific cases of their optical axes orientation. Plots of electric field for reflected and refracted electromagnetic waves, propagating in the retina layers in the fovea and at the macula periphery, are presented. It is shown that significant differences is observed only for waves reflected from the bottom of the nerve fibre layer. The effect may be explained by the anatomical structure of the retina in the centre and on the periphery of the macula.

**KEYWORDS:** physiological optics, retina, uniaxial crystal, form-birefringence, Fresnel's formulas.

Данная статья является логическим продолжением серии статей, в которых рассматривалось отражение и преломление электромагнитных волн на границах между различными слоями сетчатки. В [1] и [2] было рассмотрено отражение лазерного излучения от верхних и нижних границ квазикристаллических сред сетчатки – слоя нервных волокон и стопок фоторецепторных дисков, при условии, что данные слои граничат с изотропными средами. Были рассмотрены случаи темноадаптированных и полностью обесцвеченных фоторецепторных дисков. Для случая отражения от нижних границ квазикристаллических сред были решены задачи падения на границу раздела обыкновенной и необыкновенной волн.

В [3] были впервые получены аналоги формул Френеля для границы раздела между двумя одноосными прозрачными немагнитными кристаллами при произвольной ориентации в пространстве их



оптических осей. На основании полученных формул был проведен теоретический анализ и компьютерное моделирование процесса отражения и преломления лазерного излучения на границах разделов между слоем нервных волокон и стопками фоторецепторных дисков [3 - 5], а также между обесцвеченными и темноадаптированными фоторецепторными дисками [3, 5].

В данной статье на примере центральной ямки и периферии жёлтого пятна сетчатки рассматривается распространение лазерного излучения через многослойные структуры, составленные из квазикристаллических и изотропных слоёв.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На периферии жёлтое пятно (макулу) можно условно разделить на следующие слои: 1) нервные волокна; 2) внутренние сегменты фоторецепторных клеток; 3) наружные сегменты фоторецепторов, состоящие из специализированных мембранных структур – фоторецепторных дисков, которые заполнены светочувствительными пигментами (в палочках - пигментом родопсином, а в колбочках – тремя видами иодопсина). При попадании света на сетчатку молекулы фоторецепторных пигментов претерпевают ряд конформных преобразований, в результате чего происходит так называемое обесцвечивание пигмента, и в фоторецепторной клетке вырабатывается электрический потенциал, идущий по нервным волокнам в зрительную кору головного мозга.

В силу своей высокой упорядоченности и небольшого размера структурных элементов слой нервных волокон и стопки фоторецепторных дисков обладают так называемым форм-двулучепреломлением [6], то есть фактически являются одноосными квазикристаллами. В слое нервных волокон оптическая ось параллельна волокнам и, следовательно, параллельна границе раздела этого слоя с примыкающими к нему средами. В стопках фоторецепторных дисков оптическая ось перпендикулярна плоскости дисков и, следовательно, перпендикулярна границе фоторецепторного слоя. При этом обесцвеченные и темноадаптированные фоторецепторные диски обладают различными оптическими свойствами: обесцвеченные диски являются отрицательным, а темноадаптированные – положительным одноосным квазикристаллом. Для создания упрощённой оптической модели сетчатки, которую удобно было бы описывать с помощью имеющихся аналогов формул Френеля, мы предполагаем, что между обесцвеченными и темноадаптированными фоторецепторными дисками имеется чёткая граница.

Для математического описания взаимодействия лазерного излучения с сетчаткой также необходимо учесть оптические свойства сред, расположенных выше (ближе к зрачку глаза) и ниже сетчатки. Над слоем нервных волокон сетчатки располагается стекловидное тело, являющееся изотропной средой. В здоровом глазу нижний слой сетчатки, заполненный темноадаптированными фоторецепторными дисками, плотно примыкает к пигментному эпителию, выстилающему дно глазного бокала. Пигментный эпителий обладает большим коэффициентом поглощения, так что в здоровом глазу свет, прошедший через всю сетчатку, обратно не отражается. При отслойке сетчатки между слоем фоторецепторных дисков и пигментным эпителием образуется пространство, заполняемое межклеточной жидкостью, которая является изотропной средой.

В центральной ямке (фовеа) сетчатки слой нервных волокон становится тоньше, а фоторецепторные клетки изгибаются, так что их внутренние сегменты «ложатся» параллельно нервным волокнам. В этом случае можно считать, что слой нервных волокон напрямую граничит со стопками фоторецепторных дисков.

Таким образом, упрощённая оптическая схема, описывающая центральную ямку, выглядит следующим образом (см. рис. 1 а): изотропная среда – квазикристалл с параллельной границе оптической осью – два квазикристалла с перпендикулярными границе оптическими осями – изотропная среда (при отслойке сетчатки) либо поглощающий слой.

Периферия жёлтого пятна представлена следующей упрощённой схемой (см. рис. 1 б), отличающейся от центральной ямки (рис. 1 а) наличием внутри структуры «дополнительной» изотропной прослойки: изотропная среда – квазикристалл с параллельной границе оптической осью – изотропная среда – два квазикристалла с перпендикулярными границе оптическими осями – изотропная среда (при отслойке сетчатки) либо поглощающий слой.

Поскольку необыкновенные лучи, распространяющиеся внутри слоя нервных волокон, выходят из плоскости падения (из плоскости рисунка), то на указанных рисунках линиями со стрелочками указаны не направления необыкновенных лучей, а направления волновых нормалей соответствующих необыкновенных волн. Для обыкновенных волн, как известно, направления лучей совпадают с направлением волновых нормалей.

На рис. 1 схематически показаны направления распространения волны, падающей на периферическую область жёлтого пятна и на центральную ямку, а также всех отражённых и преломлённых волн для случая отслоения сетчатки. В здоровой сетчатке, как было уже сказано выше, вместо нижнего изотропного слоя (межклеточной жидкости) располагается поглощающий слой. Поэтому для случая здоровой сетчатки будут отсутствовать волны, преломлённые и отражённые на нижней

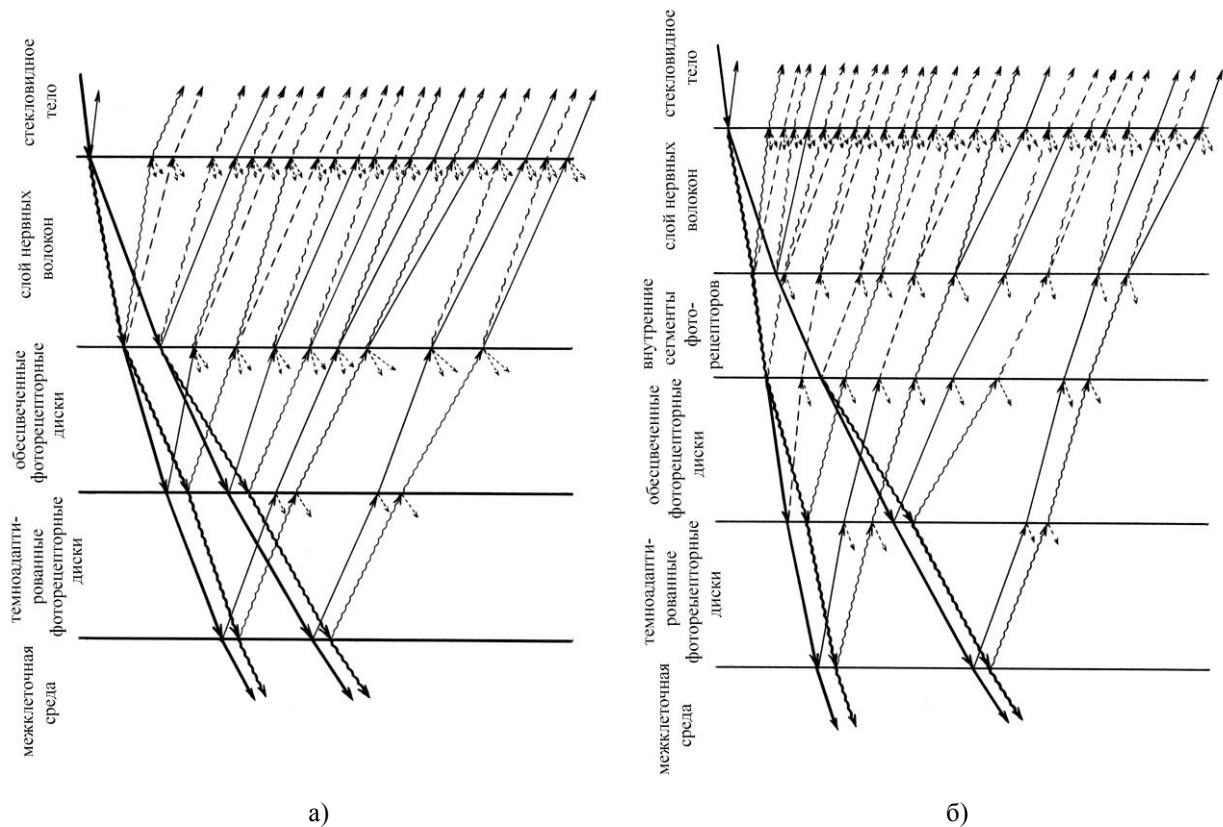


Рис. 1. Схема распространения отражённых и преломлённых волн в центральной ямке (а) и на периферии жёлтого пятна сетчатки (б)

границе темноадаптированных фоторецепторных дисков. Волновые нормали обыкновенных волн обозначены на рисунках прямыми линиями, а необыкновенных – волнистыми. На рисунках также схематически учтены результаты расчётов значений напряжённостей электрического поля: жирными линиями обозначены волны, у которых  $|\vec{E}| > 0,1$ ; более тонкими линиями обозначены волны, у которых  $0,1 > |\vec{E}| > 0,01$ ; пунктирными линиями обозначены волны, для которых  $|\vec{E}| < 0,01$  при условии, что для падающей на сетчатку волны  $|\vec{E}| = 1$ .

Как видно из приведенных на рис. 1 схем, для математического описания процессов отражения и преломления лазерного излучения на различных участках сетчатки необходимо решить следующие задачи:

- падение электромагнитной волны на границу раздела изотропная среда – одноосный кристалл с оптической осью, параллельной границе раздела;
- падение электромагнитной волны на границу раздела изотропная среда – одноосный кристалл с оптической осью, перпендикулярной границе раздела;
- падение обыкновенной и необыкновенной волн на границу раздела одноосный кристалл – изотропная среда для случая, когда оптическая ось кристалла параллельна границе раздела сред;
- падение обыкновенной и необыкновенной волн на границу раздела одноосный кристалл – изотропная среда для случая, когда оптическая ось кристалла перпендикулярна границе раздела сред;
- падение обыкновенной и необыкновенной волн на границу раздела между двумя одноосными кристаллами для случая, когда оптическая ось первого кристалла параллельна границе раздела сред, а оптическая ось второго кристалла перпендикулярна границе раздела сред;
- падение обыкновенной и необыкновенной волн на границу раздела между двумя одноосными кристаллами для случая, когда оптическая ось первого кристалла перпендикулярна границе раздела сред, а оптическая ось второго кристалла параллельна границе раздела сред;
- падение обыкновенной и необыкновенной волн на границу раздела между двумя одноосными кристаллами для случая, когда оптические оси обоих кристаллов перпендикулярны границе раздела сред.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

При решении перечисленных выше задач об отражении и преломлении электромагнитных волн на границах разделов между одноосными кристаллами и изотропными средами векторы напряжённостей электрического поля удобно записывать в следующем виде [7]:

- для волн, распространяющихся в изотропной среде:

$$\vec{E}_i = A_i \vec{a} + B_i [\vec{n}_i, \vec{a}], \quad (1)$$

- для обыкновенных волн, распространяющихся в одноосном кристалле:

$$\vec{E}_{oi} = A_{oi} [\vec{m}_{oi}, \vec{c}_j], \quad (2)$$

- для необыкновенных волн, распространяющихся в одноосном кристалле:

$$\vec{E}_{ei} = A_{ei} (\varepsilon_{oj} - \vec{m}_{ei} \bullet \vec{m}_{ei}) \vec{c}_j, \quad (3)$$

где  $A_i$  и  $B_i$  – компоненты поля, расположенные перпендикулярно плоскости падения и лежащие в плоскости падения, соответственно;  $A_{oi}$  и  $A_{ei}$  – амплитудные множители для обыкновенной и необыкновенной волн;  $\vec{m}_i = n_i \vec{n}_i = \vec{b} + \eta_i \vec{q}$  – вектор рефракции какой-либо из падающих, отражённых или преломлённых волн;  $\vec{n}_i$  – волновая нормаль соответствующей волны;  $n_i$  – показатель преломления для среды, в которой эта волна распространяется;  $n$  – показатель преломления изотропной среды;  $\vec{q}$  – единичный вектор нормали к границе раздела сред, направленный из первой среды во вторую;  $\vec{c}_j$  – единичный вектор, параллельный оптической оси рассматриваемого одноосного кристалла;  $\varepsilon_{oj}, \varepsilon_{ej}$  – компоненты тензора диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_j$  для  $j$ -го одноосного кристалла; знак  $\bullet$  означает диадное произведение векторов;  $\vec{a} = [\vec{m}_i, \vec{q}]$ . В случае, если рассматривается граница раздела между двумя кристаллами, индекс  $j$  показывает, о каком из двух кристаллов идёт речь:  $j = 1$  – кристалл, в котором распространяются падающая и отражённые волны;  $j = 2$  – кристалл, в котором распространяются преломлённые волны. Вместо  $i$  следует подставить индексы «пад», «отр», «прел» для падающих, отражённых и преломлённых волн соответственно.

Параметры  $\eta_i$ , входящие в выражения для векторов рефракции, определяются из уравнения нормалей для рассматриваемой среды. Для обыкновенной волны, распространяющейся в  $j$ -м кристалле, в общем случае имеем [7]:

$$\eta_{oji} = \pm \sqrt{\varepsilon_{oj} - \vec{a}^2}, \quad (4)$$

а для необыкновенной волны:

$$\eta_{eji} = \frac{1}{\vec{q} \varepsilon_j \vec{q}} \left\{ -\vec{b} \varepsilon_j \vec{q} \pm \sqrt{(\vec{b} \varepsilon_j \vec{q})^2 - \vec{q} \varepsilon_j \vec{q} (\vec{b} \varepsilon_j \vec{b} - \varepsilon_{oj} \varepsilon_{ej})} \right\}, \quad (5)$$

Знак перед корнем в приведенных выражениях зависит от того, в какую сторону направлена волновая нормаль рассматриваемой волны.

Амплитудные множители  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $A_{oi}$  и  $A_{ei}$ , входящие в формулы (1) – (3), были получены с использованием метода, разработанного Ф.И.Фёдоровым [7, 8], и основанного на последовательном применении тензорного анализа при решении уравнений Максвелла вблизи границы раздела двух сред. В результате были получены общие формулы (при произвольном расположении в пространстве оптической оси кристалла) для компонентов поля, отражённого на границах раздела изотропная среда – одноосный кристалл и одноосный кристалл – изотропная среда [1], а также общие формулы для случая отражения и преломления на границе раздела между двумя одноосными прозрачными немагнитными кристаллами [3 - 5]. Для решения задачи о распространении лазерного излучения через многослойные структуры на различных участках сетчатки глаза на основе имеющихся общих формул нами были получены аналоги формул Френеля для частных случаев, когда оптическая ось кристалла параллельна либо перпендикулярна границе раздела сред. Ниже приведены три группы формул, описывающих отражение и преломление лазерного излучения на границах разделов изотропная среда – одноосный кристалл, одноосный кристалл – изотропная среда и одноосный кристалл – одноосный кристалл для указанных частных случаев расположения оптических осей.

#### Граница раздела изотропная среда – одноосный кристалл

В случае, когда лазерное излучение падает на границу раздела изотропная среда – одноосный кристалл и при этом оптическая ось кристалла параллельна границе раздела, амплитудные коэффициенты для отражённой и преломлённых волн определяются выражениями:

$$A_{отр} = \frac{A_{над}}{\Delta} \left[ \eta_o \cos^2 \alpha (\eta_{над} - \eta_o) (n_o^2 \eta_{над} \eta_e + n^2 \eta_o^2) + n_o^2 \sin^2 \alpha (\eta_{над} - \eta_e) (n_o^2 \eta_{над} + \right.$$

$$+ n^2 \eta_o) \Big] + \frac{2B_{nao}}{\Delta} n_o^2 n \eta_{nao} \eta_o \sin \alpha \cos \alpha (\eta_o - \eta_e) , \quad (6)$$

$$B_{omp} = \frac{B_{nao}}{\Delta} \left[ \eta_o \cos^2 \alpha (\eta_{nao} + \eta_o) (n_o^2 \eta_{nao} \eta_e - n^2 \eta_o^2) + n_o^2 \sin^2 \alpha (\eta_{nao} + \eta_e) (n_o^2 \eta_{nao} - n^2 \eta_o) \right] + \frac{2A_{nao}}{\Delta} n_o^2 n \sin \alpha \cos \alpha (\eta_e - \eta_o) , \quad (7)$$

$$A_o = \frac{2\eta_{nao}}{\Delta} n \sin \psi_{nao} \left\{ B_{nao} n_o^2 \sin^2 \alpha (\eta_{nao} + \eta_e) - A_{nao} \cos \alpha (n_o^2 \eta_{nao} \eta_e + n^2 \eta_o^2) \right\} , \quad (8)$$

$$A_e = \frac{2\eta_{nao}}{\Delta} n \sin \psi_{nao} \left\{ A_{nao} \sin \alpha (n_o^2 \eta_{nao} + n^2 \eta_o) + B_{nao} \cos \alpha n \eta_o (\eta_{nao} + \eta_o) \right\} , \quad (9)$$

$$\Delta = \sin^2 \alpha \left\{ \eta_o (\eta_{nao} + \eta_o) (n_o^2 \eta_{nao} \eta_e + n^2 \eta_o^2) + n_o^2 (\eta_{nao} + \eta_e) (n_o^2 \eta_{nao} + n^2 \eta_o) \right\} , \quad (10)$$

где  $\psi_{nao}$  - угол падения света на сетчатку;  $\alpha$  - угол между плоскостью падения света и оптической осью рассматриваемого кристалла.

Поскольку в слое нервных волокон оптическая ось параллельна границе раздела сред, формулы (6) – (10) вместе с (1) – (5) позволяют получить амплитуды отражённой и преломлённых волн для случая, когда электромагнитная волна падает в прямом направлении (от зрачка к дну глазного бокала) на границу раздела стекловидное тело – слой нервных волокон, а также для случая, когда идущая в обратном направлении (от нижних слоёв сетчатки в сторону зрачка) электромагнитная волна падает на границу раздела внутренние сегменты фоторецепторов – слой нервных волокон.

Для того, чтобы иметь возможность рассчитывать амплитуды волн, отражённой и преломлённых на границе раздела внутренние сегменты фоторецепторов (изотропная среда) – обесцвеченные фоторецепторные диски (одноосный квазикристалл), с учётом того, что в фоторецепторных дисках оптическая ось перпендикулярна границе раздела, нами были получены следующие формулы:

$$A_{omp} = \frac{\eta_{nao} - \eta_o}{\eta_{nao} + \eta_o} A_{nao} , \quad (11)$$

$$B_{omp} = \frac{\varepsilon_o \eta_{nao} - n^2 \eta_e}{\varepsilon_o \eta_{nao} + n^2 \eta_e} B_{nao} , \quad (12)$$

$$A_o = \frac{2\eta_{nao}}{\eta_{nao} + \eta_o} A_{nao} , \quad (13)$$

$$A_e = - \frac{2n\eta_{nao}}{\varepsilon_o \eta_{nao} + n^2 \eta_e} B_{nao} , \quad (14)$$

### Граница раздела одноосный кристалл – изотропная среда

Приведенные ниже аналоги формул Френеля, полученные нами для частного случая границы раздела между изотропной средой и одноосным кристаллом, у которого оптическая ось параллельна границе раздела сред, позволяют производить расчёты прохождения лазерного излучения в прямом направлении через границу раздела между слоем нервных волокон и внутренними сегментами фоторецепторов, а также в обратном направлении через границу раздела слой нервных волокон – стекловидное тело. При этом было учтено, что внутри кристалла распространяется две поляризованные волны (обыкновенная и необыкновенная), каждая из которых порождает по две отражённых в кристалл волны (отражённую обыкновенную и отражённую необыкновенную) и одну преломлённую. Для того, чтобы различать случай падения обыкновенной волны от случая падения необыкновенной волны из кристалла на изотропную среду, были введены дополнительные подстрочные индексы в обозначении входящих в формулы величин: первая буква в подстрочном индексе обозначает характеристику падающей волны (*o*- либо *e*- падающая волна), а вторая буква *o* или *e* относится к характеристике соответствующей отражённой волны. Для преломлённых в изотропную среду волн также в качестве первой буквы в индексе стоит буква *o* или *e*, характеризующая падающую волну.

Аналоги формул Френеля для обыкновенной волны, падающей на границу раздела одноосный кристалл – изотропная среда в случае, когда оптическая ось кристалла параллельна границе раздела сред:

$$A_{ooomp} = \frac{A_{oao}}{\Delta_o} \left\{ \sin^2 \alpha (\eta_{ooomp} - \eta_{oпрел}) (n^2 \eta_{oao} - n_o^2 \eta_{oпрел}) + \eta_{oao} \cos^2 \alpha (\eta_{oao} - \eta_{oпрел}) (n^2 \cos^2 \psi_{oao} - \eta_{oпрел} \eta_{ooomp}) \right\} , \quad (15)$$

$$A_{eomp} = \frac{2A_{eao}}{\Delta_o n_o^2} \eta_{oao} \sin \alpha \cos \alpha (n^2 \eta_{oao}^2 - n_o^2 \eta_{eпрел}^2) , \quad (16)$$

$$A_{\text{отрел}} = \frac{2A_{\text{онад}}\eta_{\text{онад}} \cos \alpha}{\Delta_o n_o \sin \psi_{\text{онад}}} \left\{ \sin^2 \alpha \left( n^2 \eta_{\text{онад}}^2 - n_o^2 \eta_{\text{отрел}} \eta_{\text{ооотр}} \right) + \eta_{\text{онад}}^2 \cos^2 \alpha \left( n^2 \cos^2 \psi_{\text{онад}} - \eta_{\text{отрел}} \eta_{\text{ооотр}} \right) \right\}, \quad (17)$$

$$B_{\text{отрел}} = \frac{2A_{\text{онад}} n \eta_{\text{онад}} \sin \alpha}{\Delta_o n_o \sin \psi_{\text{онад}}} \left\{ n_o^2 \sin^2 \alpha \left( \eta_{\text{ооотр}} - \eta_{\text{отрел}} \right) - \cos^2 \alpha \left( n_o^2 \eta_{\text{отрел}} \cos^2 \psi_{\text{онад}} - \eta_{\text{онад}}^2 \eta_{\text{ооотр}} \right) \right\}, \quad (18)$$

$$\Delta_o = \sin^2 \alpha \left( \eta_{\text{ооотр}} - \eta_{\text{отрел}} \right) \left( n^2 \eta_{\text{онад}} + n_o^2 \eta_{\text{отрел}} \right) - \eta_{\text{онад}} \cos^2 \alpha \left( \eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{отрел}} \right) \left( n^2 \cos^2 \psi_{\text{онад}} - \eta_{\text{отрел}} \eta_{\text{ооотр}} \right), \quad (19)$$

где  $\psi_{\text{онад}}$  - угол падения обыкновенной волны на границу раздела кристалл – изотропная среда.

Аналоги формул Френеля для необыкновенной волны, падающей на границу раздела одноосный кристалл – изотропная среда в случае, когда оптическая ось кристалла параллельна границе раздела сред:

$$A_{\text{ооотр}} = \frac{A_{\text{енад}}}{\Delta_e} 2\varepsilon_o \eta_{\text{енад}} \sin \alpha \cos \alpha \left[ n^2 \left( \varepsilon_o - n_{\text{енер}}^2 \sin^2 \psi_{\text{енад}} \right) - \varepsilon_o \eta_{\text{енер}}^2 \right], \quad (20)$$

$$A_{\text{еотр}} = \frac{A_{\text{енад}}}{\Delta_e} \left\{ \varepsilon_o \sin^2 \alpha \left( \eta_{\text{енад}} - \eta_{\text{енер}} \right) \left( n^2 \eta_{\text{онад}} + \varepsilon_o \eta_{\text{енер}} \right) - \right. \\ \left. - \eta_{\text{онад}} \cos^2 \alpha \left( \eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{енер}} \right) \left[ n^2 \left( \varepsilon_o - n_{\text{енер}}^2 \sin^2 \psi_{\text{енад}} \right) - \varepsilon_o \eta_{\text{енер}} \eta_{\text{енад}} \right] \right\}, \quad (21)$$

$$A_{\text{енер}} = \frac{2A_{\text{енад}} \varepsilon_o \eta_{\text{енад}} \sin \alpha}{\Delta_e n_{\text{енер}} \sin \psi_{\text{енад}}} \left\{ \varepsilon_o \sin^2 \alpha \left( n^2 \eta_{\text{онад}} + \varepsilon_o \eta_{\text{енер}} \right) + \eta_{\text{онад}} \cos^2 \alpha \left[ n^2 \left( \varepsilon_o - n_{\text{енер}}^2 \sin^2 \psi_{\text{енад}} \right) + \varepsilon_o \eta_{\text{онад}} \eta_{\text{енер}} \right] \right\}, \quad (22)$$

$$B_{\text{енер}} = \frac{2A_{\text{енад}} n \varepsilon_o \eta_{\text{енад}} \cos \alpha}{\Delta_e n_{\text{енер}} \sin \psi_{\text{енад}}} \left\{ \varepsilon_o \sin^2 \alpha \left( \eta_{\text{онад}} + \varepsilon_o - n_{\text{енер}}^2 \sin^2 \psi_{\text{енад}} \right) + \eta_{\text{онад}} \cos^2 \alpha \left( \eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{енер}} \right) \left( \varepsilon_o - n_{\text{енер}}^2 \sin^2 \psi_{\text{енад}} \right) \right\}, \quad (23)$$

$$\Delta_e = \varepsilon_o \sin^2 \alpha \left( \eta_{\text{енад}} + \eta_{\text{енер}} \right) \left( n^2 \eta_{\text{онад}} + \varepsilon_o \eta_{\text{енер}} \right) + \\ + \eta_{\text{онад}} \cos^2 \alpha \left( \eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{енер}} \right) \left[ n^2 \left( \varepsilon_o - n_{\text{енер}}^2 \sin^2 \psi_{\text{енад}} \right) + \varepsilon_o \eta_{\text{енер}} \eta_{\text{енад}} \right], \quad (24)$$

где  $\psi_{\text{енад}}$  - угол между волновой нормалью падающей необыкновенной волны и перпендикуляром к границе раздела сред, а переменный показатель преломления  $n_{\text{енер}}$  необыкновенной волны в кристалле, который зависит от направления её распространения, определяется формулой:

$$n_{\text{енер}} = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 + \left( n_e^2 - n_o^2 \right) \sin^2 \psi_{\text{енад}} \cos^2 \alpha}}. \quad (25)$$

В стопках фоторецепторных дисков оптическая ось расположена перпендикулярно границе раздела сред, так что она всегда лежит в плоскости падения волны. Поэтому отражённые волны всегда имеют ту же поляризацию, что и падающие, и в случае падения обыкновенной волны на границу раздела фоторецепторные диски – изотропная среда отражённая волна будет только обыкновенной, а необыкновенная отражённая волна будет отсутствовать. Точно так же в случае падения на границу раздела фоторецепторные диски – изотропная среда необыкновенной волны будем иметь только необыкновенную отражённую волну. В преломлённых волнах в этих случаях будут также отсутствовать компоненты с поляризацией, отличной от поляризации падающей волны. Кроме того, для случая, когда оптическая ось кристалла перпендикулярна границе раздела сред, аналоги формул Френеля ещё больше упрощаются.

В случае падения обыкновенной волны на границу раздела одноосный кристалл – изотропная среда, когда оптическая ось кристалла перпендикулярна границе раздела сред, с учётом того, что  $A_{\text{ооотр}} = 0$  и  $B_{\text{отрел}} = 0$ , имеем:

$$A_{\text{ооотр}} = A_{\text{онад}} \frac{\eta_{\text{онад}} - \eta_{\text{отрел}}}{\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{отрел}}}, \quad (26)$$

$$A_{\text{отрел}} = A_{\text{онад}} \frac{2\eta_{\text{онад}}}{\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{отрел}}}, \quad (27)$$

При падении необыкновенной волны на границу раздела одноосный кристалл – изотропная среда для случая, когда оптическая ось кристалла перпендикулярна границе раздела сред, будут равны нулю  $A_{\text{ооотр}}$  и  $A_{\text{енер}}$ , а амплитудные множители  $A_{\text{еотр}}$  и  $B_{\text{енер}}$  определяются выражениями:

$$A_{\text{еотр}} = -A_{\text{енад}} \frac{\varepsilon_o \eta_{\text{енер}} - n^2 \eta_{\text{енад}}}{\varepsilon_o \eta_{\text{енер}} + n^2 \eta_{\text{енад}}}, \quad (28)$$

$$B_{\text{енер}} = -A_{\text{енад}} \frac{2n\varepsilon_o \eta_{\text{енад}}}{\varepsilon_o \eta_{\text{енер}} + n^2 \eta_{\text{енад}}}. \quad (29)$$

Приведенные формулы (25) – (28) позволяют определять амплитуды электромагнитных волн, отражённых и преломлённых на границе раздела между темноадаптированными фоторецепторными дисками и межклеточной жидкостью, а также на границе раздела между обесцвеченными фоторецепторными дисками и внутренними сегментами фоторецепторных клеток.

### Граница раздела между двумя одноосными кристаллами

Случай падения электромагнитной волны на границу раздела между двумя одноосными кристаллами является наиболее интересным и важным для решения задачи о распространении лазерного излучения через различные участки сетчатки. Как в центральной ямке, так и на периферии жёлтого пятна, всегда граничат друг с другом два квазикристалла с оптическими осями, перпендикулярными границе раздела сред, – это обесцвеченные и темноадаптированные фоторецепторные диски. Кроме того, в центральной ямке слой нервных волокон (квазикристалл с оптической осью, параллельной границе раздела) непосредственно граничит с обесцвеченными фоторецепторными дисками (квазикристаллом с оптической осью, перпендикулярной границе раздела). Поэтому для электромагнитной волны, идущей в прямом направлении (от зрачка к главному дну), были получены аналоги формул Френеля для такого случая: кристалл с параллельной границе раздела оптической осью – кристалл с перпендикулярной границе раздела оптической осью. Для электромагнитных волн, отражённых от нижних слоёв сетчатки и идущих в обратном направлении (к зрачку), была решена обратная задача: отражение и преломление на границе раздела между двумя кристаллами, когда оптическая ось первого кристалла перпендикулярна, а оптическая ось второго кристалла параллельна границе раздела. Следует также отметить, что во всех перечисленных случаях фактически рассматривались две задачи: падение на границу раздела обыкновенной волны и падение на границу раздела необыкновенной волны. При этом следует отметить, что на границе раздела между слоем нервных волокон и фоторецепторными дисками как обыкновенная, так и необыкновенная падающая волна порождает по две отражённых (*o*- и *e*-) и две преломлённых (*o*- и *e*-) волны. В случае же с границей раздела между обесцвеченными и темноадаптированными фоторецепторными дисками благодаря тому, что их оптические оси лежат в плоскости падения, отражённая и преломлённая волны будут иметь поляризацию падающей волны. Иными словами, при падении обыкновенной волны на границу раздела между обесцвеченными и темноадаптированными дисками будем иметь только одну отражённую обыкновенную волну и одну преломлённую обыкновенную волну, а при падении на эту границу необыкновенной волны будут существовать только необыкновенная отражённая и необыкновенная преломлённая волны.

Ниже приведены шесть групп формул, которые описывают падение обыкновенной и необыкновенной волн на три типа границ между квазикристаллическими слоями сетчатки глаза.

Аналоги формул Френеля для случая падения обыкновенной волны на границу раздела между двумя одноосными кристаллами, когда оптическая ось первого кристалла параллельна границе раздела сред, а оптическая ось второго кристалла перпендикулярна границе раздела сред (нервные волокна – фоторецепторные диски):

$$A_{\text{ооопр}} = \frac{A_{\text{онад}}}{\Delta_o} n_{o1} \sin \psi_{\text{онад}} (n_{o1}^2 n_{\text{оепрел}} - n_{o2}^2 n_{\text{онад}}) \left\{ n_{o1}^2 \sin^2 \alpha_1 (n_{\text{ооопр}} - n_{\text{оопрел}}) + n_{\text{онад}}^2 \cos^2 \alpha_1 (n_{\text{онад}} - n_{\text{оопрел}}) \right\}, \quad (30)$$

$$A_{\text{ооопр}} = \frac{2A_{\text{онад}}}{\Delta_o} n_{o1} n_{\text{онад}} n_{\text{оопрел}} \sin \psi_{\text{онад}} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 (n_{o2}^2 n_{\text{онад}} - n_{o1}^2 n_{\text{оепрел}}), \quad (31)$$

$$A_{\text{оопрел}} = \frac{2A_{\text{онад}}}{\Delta_o} n_{\text{онад}} \cos \alpha_1 (n_{o1}^2 n_{\text{ооопр}} n_{\text{оепрел}} - n_{o2}^2 n_{\text{онад}}^2) (n_{o1}^2 \sin^2 \alpha_1 + n_{\text{онад}}^2 \cos^2 \alpha_1), \quad (32)$$

$$A_{\text{оепрел}} = \frac{2A_{\text{онад}}}{\Delta_o} n_{o1}^2 n_{\text{онад}} \sin \alpha_1 (n_{\text{ооопр}} - n_{\text{оопрел}}) (n_{o1}^2 \sin^2 \alpha_1 + n_{\text{онад}}^2 \cos^2 \alpha_1), \quad (33)$$

$$\Delta_o = n_{o1} \sin \psi_{\text{онад}} \left\{ n_{o1}^2 \sin^2 \alpha_1 (n_{\text{оопрел}} - n_{\text{ооопр}}) (n_{o2}^2 n_{\text{онад}} + n_{o1}^2 n_{\text{оепрел}}) - n_{\text{онад}} \cos^2 \alpha_1 (n_{\text{онад}} + n_{\text{оопрел}}) (n_{o1}^2 n_{\text{ооопр}} n_{\text{оепрел}} - n_{o2}^2 n_{\text{онад}}^2) \right\}. \quad (34)$$

Аналоги формул Френеля для случая падения необыкновенной волны на границу раздела между двумя одноосными кристаллами, когда оптическая ось первого кристалла параллельна границе раздела сред, а оптическая ось второго кристалла перпендикулярна границе раздела сред (нервные волокна – фоторецепторные диски):

$$A_{\text{еоопр}} = \frac{2A_{\text{енад}}}{\Delta_e} n_{o1}^2 n_{\text{еепрел}} n_{\text{енад}} \sin \psi_{\text{енад}} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 (n_{o2}^2 n_{\text{еоопр}} - n_{o1}^2 n_{\text{еепрел}} n_{\text{еепрел}}), \quad (35)$$

$$A_{\text{еоопр}} = \frac{A_{\text{енад}}}{\Delta_e} n_{\text{еепрел}} n_{\text{еоопр}} \sin \psi_{\text{енад}} \left\{ n_{o1}^2 n_{o2}^2 \sin^2 \alpha_1 (n_{\text{еепрел}} - n_{\text{енад}}) + \cos^2 \alpha_1 (n_{\text{еепрел}} - n_{\text{еоопр}}) (n_{o2}^2 n_{\text{еоопр}} - n_{o1}^2 n_{\text{енад}} n_{\text{еепрел}}) \right\}, \quad (36)$$

$$A_{\text{еопрел}} = \frac{2A_{\text{енад}}}{\Delta_e} n_{o1}^2 \sin \alpha_1 \left\{ n_{o2}^2 n_{\text{енер1}}^2 \eta_{\text{еоопр}} \sin^2 \psi_{\text{енад}} \cos^2 \alpha_1 - n_{o1}^2 n_{o2}^2 \eta_{\text{еоопр}} + n_{o1}^2 \eta_{\text{еепрел}} (n_{o1}^2 \sin^2 \alpha_1 + \eta_{\text{еоопр}}^2 \cos^2 \alpha_1) \right\}, \quad (37)$$

$$A_{\text{еепрел}} = \frac{2A_{\text{енад}}}{\Delta_e} n_{o1}^2 \eta_{\text{енад}} \eta_{\text{еоопр}} \cos \alpha_1 (\eta_{\text{еопрел}} - \eta_{\text{еоопр}}) (n_{o1}^2 \sin^2 \alpha_1 + \eta_{\text{еоопр}}^2 \cos^2 \alpha_1), \quad (38)$$

$$\Delta_e = n_{\text{енер1}} \sin \psi_{\text{енад}} \left\{ n_{o1}^2 \eta_{\text{еепрел}} \left[ n_{o1}^2 \sin^2 \alpha_1 (\eta_{\text{енад}} + \eta_{\text{еопрел}}) - \cos^2 \alpha_1 \eta_{\text{енад}} \eta_{\text{еоопр}} (\eta_{\text{еопрел}} - \eta_{\text{еоопр}}) \right] - n_{o1}^2 n_{o2}^2 \eta_{\text{еоопр}} \sin^2 \alpha_1 (\eta_{\text{енад}} + \eta_{\text{еопрел}}) - n_{o2}^2 \eta_{\text{еоопр}}^3 \cos^2 \alpha_1 (\eta_{\text{еопрел}} - \eta_{\text{еоопр}}) \right\}. \quad (39)$$

Аналоги формул Френеля для случая падения обыкновенной волны на границу раздела между двумя одноосными кристаллами, когда оптическая ось первого кристалла перпендикулярна границе раздела сред, а оптическая ось второго кристалла параллельна границе раздела сред (фоторецепторные диски – нервные волокна):

$$A_{\text{ооопр}} = \frac{A_{\text{онад}}}{\Delta_o} \left\{ n_{o2}^2 \sin^2 \alpha_2 (\eta_{\text{онад}} - \eta_{\text{оопрел}}) (n_{o1}^2 \eta_{\text{оопрел}} - n_{o2}^2 \eta_{\text{ооопр}}) + \eta_{\text{оопрел}} \cos^2 \alpha_2 (\eta_{\text{онад}} - \eta_{\text{оопрел}}) (n_{o1}^2 \eta_{\text{оопрел}}^2 - n_{o2}^2 \eta_{\text{ооопр}} \eta_{\text{оопрел}}) \right\}, \quad (40)$$

$$A_{\text{ооопр}} = \frac{2A_{\text{онад}}}{\Delta_o} n_{o2}^2 n_{o1} \eta_{\text{онад}} \eta_{\text{оопрел}} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 (\eta_{\text{оопрел}} - \eta_{\text{оопрел}}), \quad (41)$$

$$A_{\text{оопрел}} = \frac{2A_{\text{онад}}}{\Delta_o} n_{o1} \eta_{\text{онад}} \sin \psi_{\text{онад}} \cos \alpha_2 (n_{o2}^2 \eta_{\text{ооопр}} \eta_{\text{оопрел}} - n_{o1}^2 \eta_{\text{оопрел}}^2), \quad (42)$$

$$A_{\text{оепрел}} = \frac{2A_{\text{онад}}}{\Delta_o} n_{o1} \eta_{\text{онад}} \sin \psi_{\text{онад}} \sin \alpha_2 (n_{o1}^2 \eta_{\text{оопрел}} - n_{o2}^2 \eta_{\text{ооопр}}), \quad (43)$$

$$\Delta_o = n_{o2}^2 \sin^2 \alpha_2 (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оопрел}}) (n_{o1}^2 \eta_{\text{оопрел}} - n_{o2}^2 \eta_{\text{ооопр}}) + \eta_{\text{оопрел}} \cos^2 \alpha_2 (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оопрел}}) (n_{o1}^2 \eta_{\text{оопрел}}^2 - n_{o2}^2 \eta_{\text{ооопр}} \eta_{\text{оопрел}}), \quad (44)$$

Аналоги формул Френеля для случая падения необыкновенной волны на границу раздела между двумя одноосными кристаллами для случая, когда оптическая ось первого кристалла перпендикулярна границе раздела сред, а оптическая ось второго кристалла параллельна границе раздела сред (фоторецепторные диски – нервные волокна):

$$A_{\text{еоопр}} = \frac{A_{\text{енад}}}{\Delta_e} n_{o1}^2 n_{o2}^2 \eta_{\text{еопрел}} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 (\eta_{\text{еепрел}} - \eta_{\text{еопрел}}) (\eta_{\text{енад}} - \eta_{\text{еоопр}}), \quad (45)$$

$$A_{\text{еоопр}} = \frac{A_{\text{енад}}}{\Delta_e} \left\{ n_{o2}^2 \sin^2 \alpha_2 (\eta_{\text{еоопр}} - \eta_{\text{еепрел}}) (n_{o1}^2 \eta_{\text{еопрел}} - n_{o2}^2 \eta_{\text{енад}}) + \eta_{\text{еопрел}} \cos^2 \alpha_2 (\eta_{\text{еоопр}} - \eta_{\text{еопрел}}) (n_{o1}^2 \eta_{\text{еопрел}}^2 - n_{o2}^2 \eta_{\text{енад}} \eta_{\text{еепрел}}) \right\} \quad (46)$$

$$A_{\text{еопрел}} = \frac{A_{\text{енад}}}{\Delta_e} n_{o1}^2 n_{o2}^2 n_{\text{енер1}} \sin \psi_{\text{енад}} \sin \alpha_2 (\eta_{\text{еоопр}} - \eta_{\text{еепрел}}) (\eta_{\text{енад}} - \eta_{\text{еоопр}}), \quad (47)$$

$$A_{\text{еепрел}} = \frac{A_{\text{енад}}}{\Delta_e} n_{o1}^2 n_{\text{енер1}} \eta_{\text{еопрел}} \sin \psi_{\text{енад}} \cos \alpha_2 (\eta_{\text{еоопр}} - \eta_{\text{еопрел}}) (\eta_{\text{енад}} - \eta_{\text{еоопр}}), \quad (48)$$

$$\Delta_e = n_{o2}^2 \sin^2 \alpha_2 (\eta_{\text{еепрел}} - \eta_{\text{еоопр}}) (n_{o1}^2 \eta_{\text{еопрел}} - n_{o2}^2 \eta_{\text{еоопр}}) + \eta_{\text{еопрел}} \cos^2 \alpha_2 (\eta_{\text{еопрел}} - \eta_{\text{еоопр}}) (n_{o1}^2 \eta_{\text{еопрел}}^2 - n_{o2}^2 \eta_{\text{еоопр}} \eta_{\text{еепрел}}), \quad (49)$$

Аналоги формул Френеля для случая падения обыкновенной волны на границу раздела между двумя одноосными кристаллами, когда оптические оси обоих кристаллов перпендикулярны границе раздела сред (обесцвеченные и темноадаптированные фоторецепторные диски):

$$A_{\text{ооопр}} = A_{\text{онад}} \frac{\eta_{\text{онад}} - \eta_{\text{оопрел}}}{\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оопрел}}}, \quad (50)$$

$$A_{\text{оопрел}} = A_{\text{онад}} \frac{2\eta_{\text{онад}}}{\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оопрел}}}, \quad (51)$$

Аналоги формул Френеля для случая падения необыкновенной волны на границу раздела между двумя одноосными кристаллами, когда оптические оси обоих кристаллов перпендикулярны границе раздела сред (обесцвеченные и темноадаптированные фоторецепторные диски):

$$A_{\text{еоопр}} = A_{\text{енад}} \frac{n_{o2}^2 \eta_{\text{енад}} - n_{o1}^2 \eta_{\text{еепрел}}}{n_{o2}^2 \eta_{\text{енад}} + n_{o1}^2 \eta_{\text{еепрел}}}, \quad (52)$$

$$A_{\text{еепрел}} = A_{\text{енад}} \frac{2n_{o1}^2 \eta_{\text{енад}}}{n_{o2}^2 \eta_{\text{енад}} + n_{o1}^2 \eta_{\text{еепрел}}}, \quad (53)$$

### РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Полученные выше аналитические выражения были использованы для компьютерного моделирования процесса отражения и преломления лазерного излучения на слоистых структурах, представленных на рис. 1 (а) (модель отслоившейся центральной ямки сетчатки) и рис. 1 (б) (модель отслоившейся периферии жёлтого пятна сетчатки). Значения показателей преломления глазных сред были взяты такие же, как в [1, 4]: показатель преломления стекловидного тела  $n = 1,336$ ; показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся в слое нервных волокон  $n_o = 1,262$ ,  $n_e = 1,263$ ; показатель преломления внутреннего сегмента палочки  $n = 1,36$ ; показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся в обесцвеченных фоторецепторных дисках  $n_o = 1,382$ ,  $n_e = 1,378$ ; показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся в темноадаптированных фоторецепторных дисках  $n_o = 1,418$ ,  $n_e = 1,419$ ; показатель преломления межклеточной среды  $n = 1,34$ .

В результате компьютерного моделирования были получены графики напряжённостей электрического поля ( $|\vec{E}|$ ) отражённых и преломлённых волн в зависимости от угла падения  $\psi_{nao}$  лазерного излучения на сетчатку (на границу раздела стекловидное тело – нервные волокна) и от угла  $\alpha$  между плоскостью падения и направлением оптической оси в нервных волокнах. В естественных условиях значения угла  $\psi_{nao}$  ограничены раскрытием зрачка глаза, поэтому нами рассматривались значения  $\psi_{nao} \leq 20^\circ$ , а значения угла  $\alpha$  были взяты в пределах от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . Для случая отслоившейся центральной ямки сетчатки всего было получено 127 графиков, а для отслоившейся периферии жёлтого пятна сетчатки было получено 157 графиков. Анализ полученных результатов показал, что различия в виде графиков существуют только для волн, отражённых от нижней границы слоя нервных волокон, поскольку в центральной ямке нервные волокна снизу граничат с одноосным квазикристаллом (стопками фоторецепторных дисков), а на периферии жёлтого пятна нервные волокна снизу граничат с изотропной средой (внутренними сегментами фоторецепторов). Для волн, распространяющихся внутри фоторецепторных дисков (обесцвеченных и темноадаптированных) графики  $|\vec{E}|$  для центральной ямки и периферии жёлтого пятна по внешнему виду практически ничем не отличаются. В качестве примера на рис. 2 представлены графики  $|\vec{E}|$  для волн, распространяющихся в темноадаптированных фоторецепторных дисках на периферии жёлтого пятна. Также не отличаются для двух рассматриваемых участков сетчатки графики  $|\vec{E}|$  для волн, отражённых от границ разделов между обесцвеченными и темноадаптированными фоторецепторными дисками и между темноадаптированными дисками и изотропной средой (межклеточной жидкостью). Графики  $|\vec{E}|$  для волн, отражённых от перечисленных границ, прошедших в обратном направлении через нервные волокна и вышедших обратно в стекловидное тело, также не отличаются для двух рассматриваемых участков сетчатки, поэтому на рис. 3 в качестве примера представлены графики только для периферической области жёлтого пятна. Существенные различия имеются в графиках  $|\vec{E}|$  для волн, которые отразились от нижней границы нервных волокон в центральной ямке и на периферии жёлтого пятна и вышли назад в стекловидное тело (см. рис. 4).

Как было уже сказано выше, результаты компьютерного моделирования процесса распространения лазерного излучения через слои сетчатки в центральной ямке и на периферии жёлтого пятна были также схематически отражены на рис. 1, где различия в амплитудах распространяющихся в сетчатке волн отмечены линиями различной толщины. На рис. 1 наглядно видно, что как обыкновенные, так и необыкновенные волны, распространяющиеся в прямом направлении внутри фоточувствительного слоя (темноадаптированных фоторецепторных дисков), имеют амплитуду, превышающую 10% от амплитуды падающей на сетчатку первичной волны. Такой амплитуды оказывается достаточно для формирования и регистрации в фоточувствительном слое сетчатки комплексных Фурье-голограмм интенсивности [9 - 11]. При этом, как уже было сказано выше, вид соответствующих графиков  $|\vec{E}|$  для волн, распространяющихся в фоточувствительном слое в центральной ямке и на периферии жёлтого пятна, оказывается одинаковым (см. рис. 2). Следовательно, наличие на периферии жёлтого пятна дополнительного изотропного слоя никак не сказывается на процессе восприятия световых стимулов.

Амплитуды волн, отразившихся от границы раздела внутренние сегменты фоторецепторов – обесцвеченные фоторецепторные диски и границы раздела между обесцвеченными и темноадаптированными дисками и вышедших обратно в стекловидное тело, не превышают одного процента от амплитуды первичной волны. В здоровой сетчатке, в которой отсутствует отражение от нижней границы темноадаптированных фоторецепторных дисков, только отразившиеся от нижней



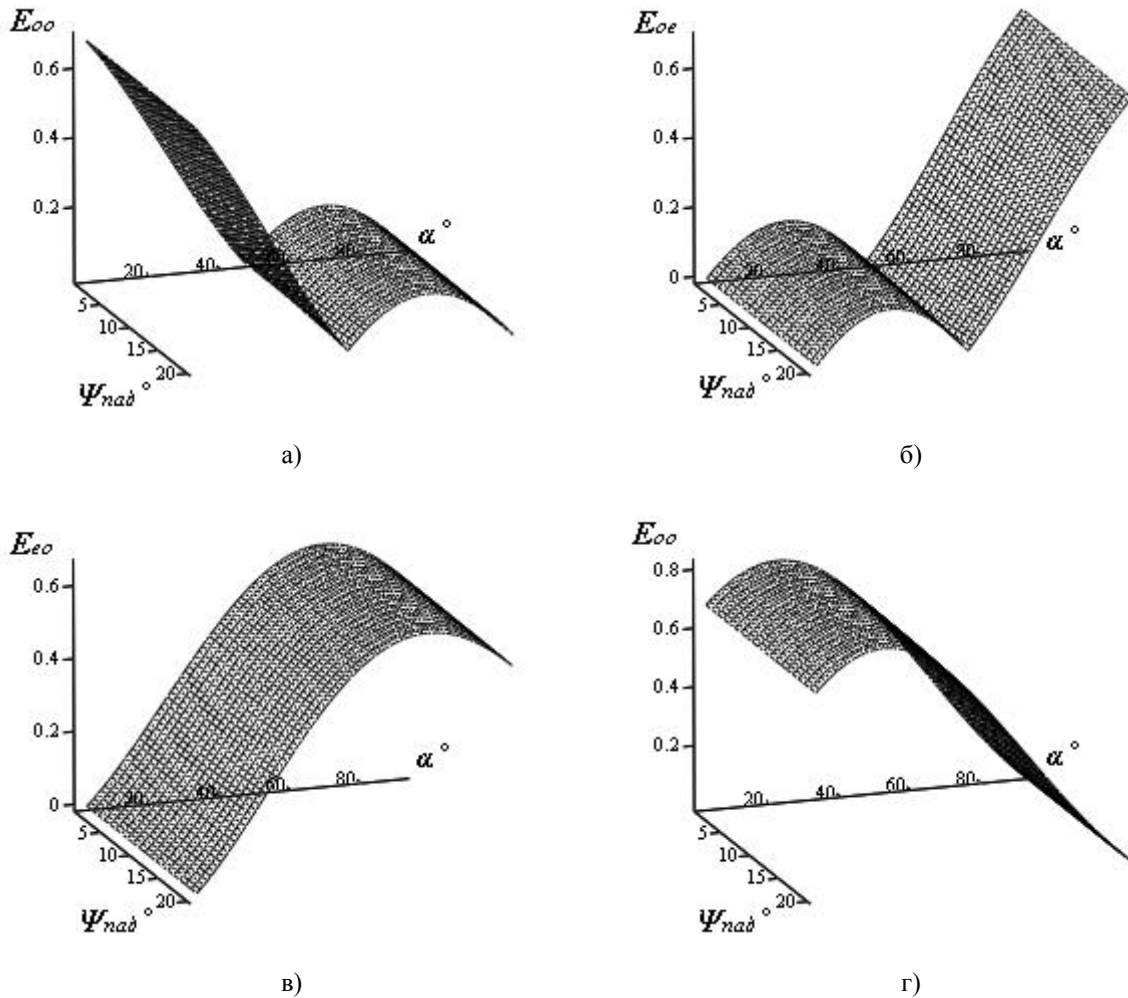


Рис. 2. Полученные в результате компьютерного моделирования значения напряжённостей электрического поля для волн, распространяющихся в фоточувствительном слое (темноадаптированных фоторецепторных дисках) в зависимости от угла падения  $\psi_{nad}$  и угла  $\alpha$  между плоскостью падения и оптической осью слоя нервных волокон для периферии жёлтого пятна: а) «обыкновенно-обыкновенная» волна (волна, которая была обыкновенной внутри слоя нервных волокон и внутри фоторецепторных дисков при распространении в прямом направлении); б) «обыкновенно-необыкновенная» волна (волна, которая была обыкновенной в слое нервных волокон и необыкновенной в фоторецепторных дисках); в) «необыкновенно-обыкновенная» волна (необыкновенная в нервных волокнах и обыкновенная в фоторецепторных дисках); г) «необыкновенно-необыкновенная» волна (необыкновенная в нервных волокнах и фоторецепторных дисках)

границы нервных волокон «обыкновенно-обыкновенная» и «необыкновенно-необыкновенная» волны выходят назад в стекловидное тело с амплитудой в несколько процентов от амплитуды первичной волны. Здесь словами «обыкновенно-обыкновенная» названа волна, которая внутри слоя нервных волокон была обыкновенной при распространении в прямом направлении и, отразившись от нижней границы слоя нервных волокон, также стала обыкновенной, распространяющейся в обратном направлении (к зрачку). Аналогично «необыкновенно-необыкновенная» – это волна, которая в слое нервных волокон является необыкновенной при распространении как в прямом, так и в обратном направлениях. Таким образом, оптические эффекты, которые может наблюдать офтальмолог при исследовании здоровой (не отслоившейся) сетчатки, обусловлены в основном «обыкновенно-обыкновенной» и «необыкновенно-необыкновенной» волнами, отразившимися от нижней границы нервных волокон, а также отражённой от верхней границы нервных волокон частью первичной волны. Поскольку в центральной ямке нервные волокна непосредственно граничат с обесцвеченными дисками, а на периферии жёлтого пятна ниже нервных волокон располагается изотропный слой (внутренние сегменты фоторецепторов), то графики  $|\vec{E}|$  для вышедших обратно в стекловидное тело «обыкновенно-обыкновенной» и «необыкновенно-необыкновенной» волн на этих участках сетчатки различаются (см. рис. 4). Следовательно, в

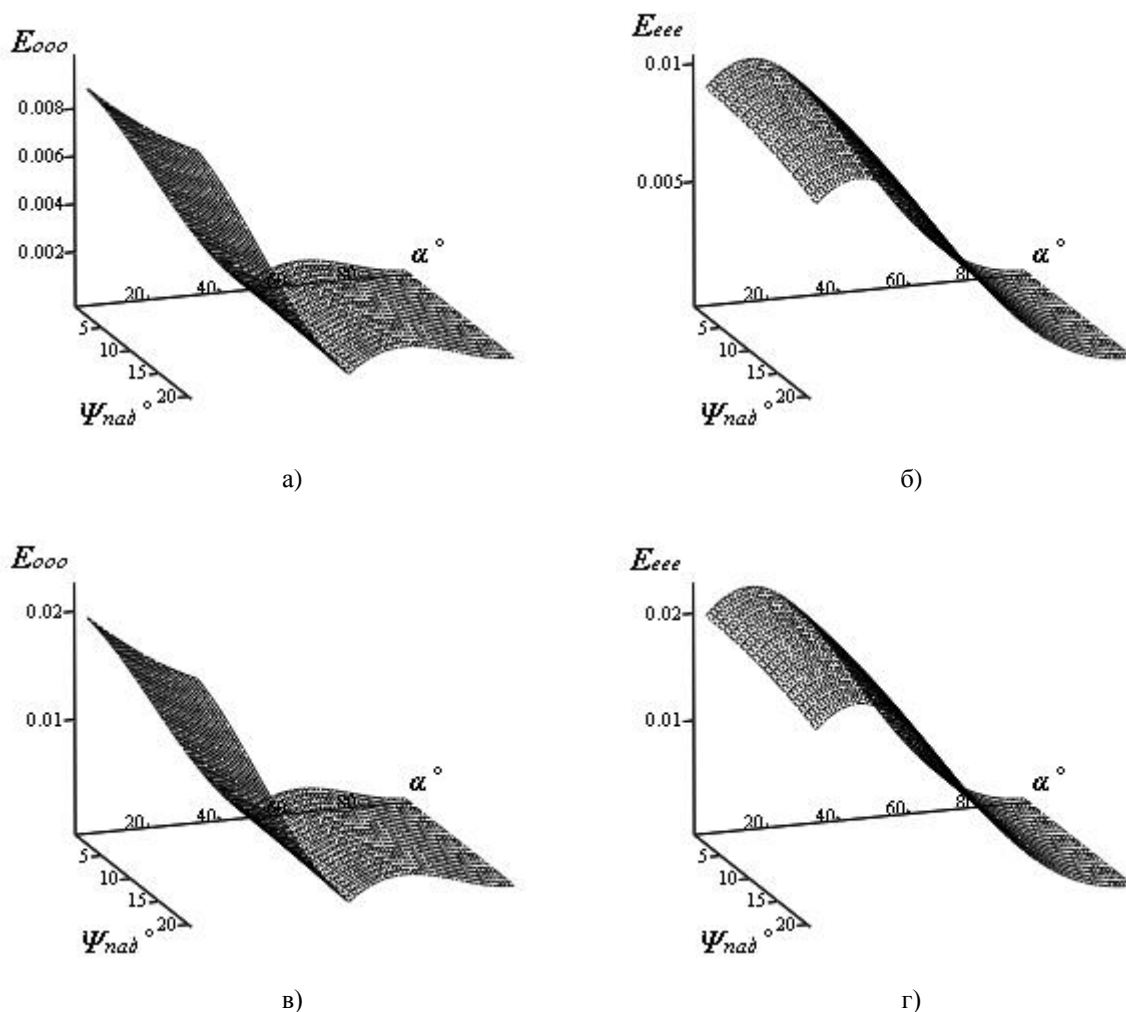


Рис. 3. Полученные в результате компьютерного моделирования значения напряженностей электрического поля для периферии жёлтого пятна сетчатки: «обыкновенно-обыкновенно-обыкновенная» (а) и «необыкновенно-необыкновенно-необыкновенная» (б) волны, отражённые от границы раздела между обесцвеченными и темноадаптированными фоторецепторными дисками и вышедшие обратно в стекловидное тело; «обыкновенно-обыкновенно-обыкновенная» (в) и «необыкновенно-необыкновенно-необыкновенная» (г) волны, отражённые от границы раздела темноадаптированные фоторецепторные диски – межклеточная среда (случай отслойки сетчатки) и вышедшие обратно в стекловидное тело. Здесь под словами «обыкновенно-обыкновенно-обыкновенная» («необыкновенно-необыкновенно-необыкновенная») подразумеваются волны, которые были обычными (необыкновенными) при распространении в прямом и обратном направлениях в нервных волокнах и в фоторецепторных дисках.

центральной ямке и на периферии жёлтого пятна должны различаться наблюдаемые в отражённом свете оптические эффекты.

Как видно из рис. 1, в случае отслоившейся сетчатки часть лучей, идущих в обратном направлении от границы раздела темноадаптированные фоторецепторные диски – межклеточная среда, выходит в стекловидное тело с амплитудой, равной нескольким процентам от амплитуды первичной волны. При этом количество таких лучей для центральной ямки оказывается больше, чем для периферии жёлтого пятна, что вполне объяснимо, поскольку в центральной ямке имеется меньшее количество слоёв и, соответственно, меньше оказываются потери при отражении на границах между слоями.

### ВЫВОДЫ

Полученные аналоги формул Френеля для границ разделов между изотропной средой и одноосным кристаллом, между одноосным кристаллом и изотропной средой, а также между двумя одноосными кристаллами для частных случаев, когда оптические оси рассматриваемых кристаллов параллельны либо перпендикулярны границам разделов сред, позволили провести компьютерное моделирование процесса отражения и преломления лазерного излучения в центральной ямке и на периферии жёлтого пятна сетчатки. На основе проведенного компьютерного моделирования были сделаны следующие выводы.

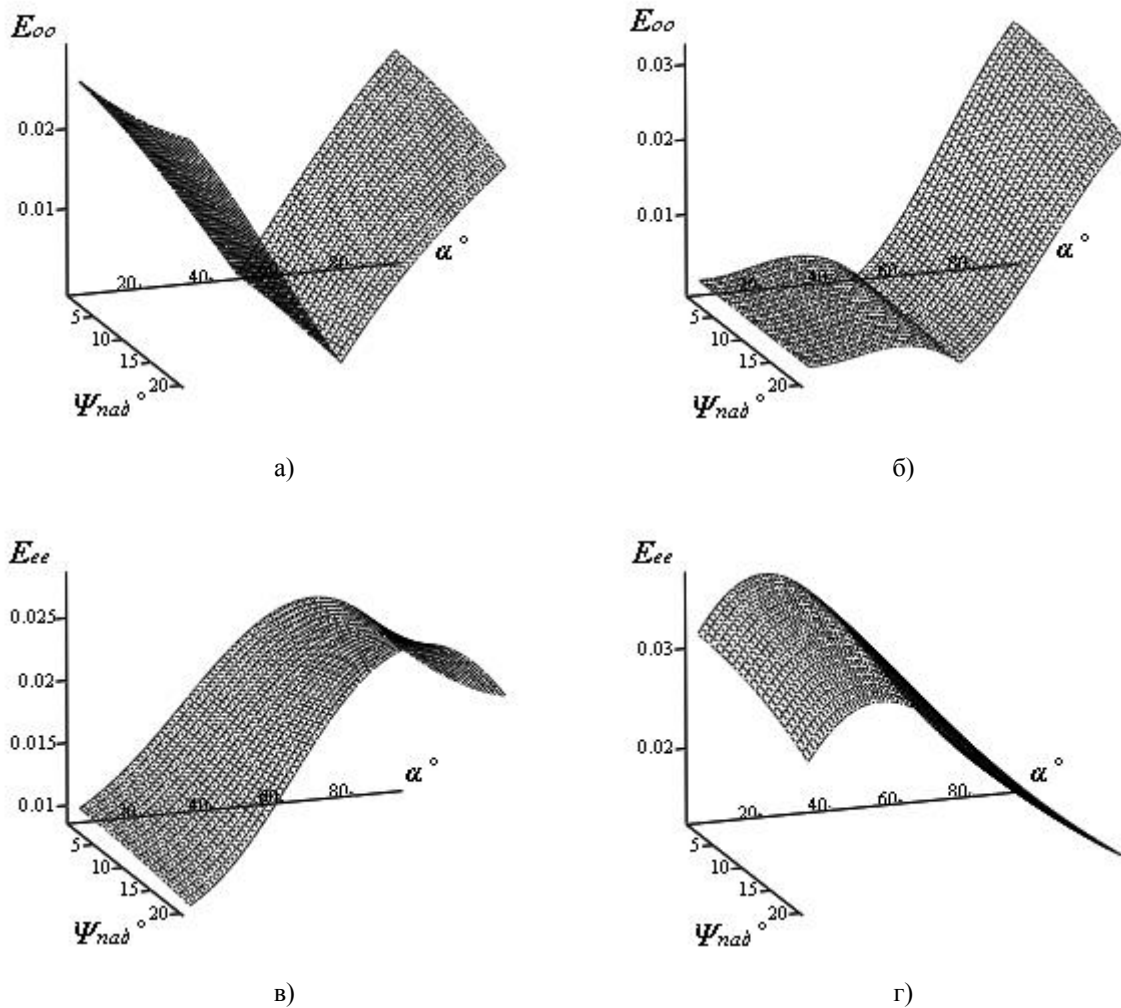


Рис. 4. Полученные в результате компьютерного моделирования значения напряжённостей электрического поля для волн, отражённых от нижней границы слоя нервных волокон и вышедших обратно в стекловидное тело, в зависимости от угла падения  $\psi_{nad}$  и угла  $\alpha$  между плоскостью падения и оптической осью слоя нервных волокон. Слева показаны графики для периферии жёлтого пятна, справа – для центральной ямки жёлтого пятна.

Для волн, распространяющихся в фоточувствительном слое (темноадаптированных фоторецепторных дисках), зависимость напряжённости электрического поля от углов  $\psi_{nad}$  и  $\alpha$  является одинаковой как для центральной ямки сетчатки, так и для периферии жёлтого пятна. Следовательно, проведенные нами теоретические исследования показали, что субъективное восприятие световых стимулов в центральной ямке и на периферии жёлтого пятна оказывается одинаковым. В то же время имеются различия в форме графиков для части отражённых от сетчатки волн для центральной ямки и для периферической области жёлтого пятна. Следовательно, в этом случае при офтальмологических исследованиях должны наблюдаться различия в отражённом от сетчатки лазерном излучении в области центральной ямки и на периферии жёлтого пятна. При этом, как показали результаты проведенного компьютерного моделирования, в тех местах, где произошла отслойка сетчатки, отражённый назад к зрачку световой поток оказывается больше, причём отслоившаяся центральная ямка «отсвечивает» больше, чем отслоившиеся периферические области жёлтого пятна.

Полученные в данной статье аналитические выражения, позволяющие определять амплитуды электромагнитных волн, распространяющихся в различных слоях сетчатки, а также результаты проведенного компьютерного моделирования будут использованы для дальнейшего совершенствования голографической модели физиологической оптики, которая разрабатывается в лаборатории радио- и оптической голографии ХНУ им. В.Н.Каразина, а также для создания офтальмологических приборов для диагностики и коррекции зрения с применением лазерного излучения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титарь В.П., Шпаченко О.В. Модельные исследования отражения лазерного излучения от слоёв сетчатки // Лазеры. Измерения. Информация. Сб. докл. 19-й междунар. конф., Санкт-Петербург: Изд-во Политехнического ун-та, 2009, т. 1, с. 411-430.
2. Titar V.P., Shpachenko O.V. Reflection of laser radiation from retina quasi-crystal layers: model investigations // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics), vol. 19, no 1, 2010, pp. 39-49.
3. Титарь В.П., Шпаченко О.В. Отражение и преломление лазерного излучения на границе раздела между двумя одноосными кристаллами // Лазеры. Измерения. Информация. Сб. докл. 21-й междунар. конф., Санкт-Петербург: Из-во Политехнического ун-та, 2011, т. 3, с. 325-343.
4. Титарь В.П., Шпаченко О.В. Теоретический анализ прохождения лазерного излучения через границу раздела между двумя квазикристаллическими слоями сетчатки // Вісник Харківського університету. Радіофізика та електроніка, вип. 19, № 983, 2011, с. 91-101.
5. Titar V.P., Shpachenko O.V. Reflection and refraction of laser radiation at interface between two uniaxial crystals // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics), vol. 21, no 3, 2012, pp. 177-185.
6. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – Москва: Наука, 1970. – 856 с.
7. Фёдоров Ф.И. Оптика анизотропных сред. – Москва: УРСС, 2004. – 384 с.
8. Фёдоров Ф.И., Филиппов В.В. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами. – Минск: Наука и техника, 1976. – 224 с.
9. Титарь В.П., Шпаченко О.В. Голографическая модель физиологической оптики // Вісник Харківського національного університету. Радіофізика та електроніка, вип. 1, № 467, 2000, с. 46-55.
10. Титарь В.П., Шпаченко О.В. Голографическая модель физиологической оптики – новое направление для создания информационных систем // Радиотехника, вып. 116, 2000, с. 133-140.
11. Титарь В.П., Шпаченко О.В. Формирование комплексных Фурье-голограмм интенсивности на сетчатке глаза // Вісник Харківського університету. Радіофізика та електроніка, вип. 1, № 622, 2004, с. 136-141.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИОДА С КАТОДНЫМ СТАТИЧЕСКИМ ДОМЕНОМ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Э. Д. Прохоров, О. В. Боцула, И. А. Горбунов

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
4, пл. Свободы, Харьков, 61077, Украина, Тел. (0572) 7051262  
E-mail: E.D.Prokhorov@mail.ru

Поступила в редакцию 30 мая 2013 г.

Рассматривается диод, в котором при определенных условиях образуется катодный статический домен. В катодном статическом домене при больших напряжениях может развиваться ударная ионизация. Возникновение ударной ионизации приводит к лавинно-пролетному эффекту и создает шумовую генерацию. Анализ проводился с использованием метода Монте-Карло. В результате показано преимущества металлического катода над  $n^+$ -катодом для достижения пробивных напряжений, при которых начинается шумовая генерация. Расчеты сравниваются с экспериментальными данными для диодов на основе GaAs.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** ударная ионизация, статический катодный домен, вольтамперные характеристики, эффективность генерации, пробивные напряжения.

Розглядається діод, у якому за певних умов виникає катодний статичний домен. У катодному статичному домені при великих напругах може розвиватися ударна іонізація. Виникнення ударної іонізації призводить до лавинно-пролітного ефекту і створює шумову генерацію. Аналіз проводився з використанням методу Монте-Карло. В результаті показано перевагу металічного катода над  $n^+$ -катодом для досягнення пробивних напруг, при яких починається шумова генерація. Розрахунок порівнюється з експериментальними даними для діодів на основі GaAs.

**КЛЮЧЕВІ СЛОВА:** : ударна іонізація, статичний катодний домен, вольтамперні характеристики, ефективність генерації, пробивні напруги.

Diode, where in a cathode the static domain is formed under certain conditions are considered. Impact ionization can occur in cathode static domain at high voltages. The occurrence of impact ionization leads to the avalanche transit effects and create noise generation. The analysis was performed using Monte Carlo simulation. The advantages of a metal cathode over  $n^+$  cathode to achieve breakdown voltages at which the noise generation are shown. The calculations are compared with experiment data for the GaAs diodes.

**KEYWORD:** impact ionization, static cathode domain, current voltage characteristics, oscillation efficiency, breakdown voltage.

### ВВЕДЕНИЕ

Диоды с катодным статическим доменом являются источниками шумовой генерации со спектральной плотностью мощности шума до  $10^5$   $\kappa T_0$  [1,3,4,5]. Ранее оценка максимальных напряженностей электрического поля вблизи катода была проведена на простейшей модели, в которой учитывалась только электронная составляющая тока, а скорости электронов в областях диода считались разными, но постоянными [2]. Позже катодный статический домен был исследован с помощью локально-полевой модели с учетом электронной и дырочной составляющих тока при одинаковых зависимостях дрейфовой скорости электронов и дырок во всех областях диода [3].

Ниже приводятся результаты анализа электронных процессов и напряжений, при которых начинается ударная ионизация и генерация СВЧ шума для диодов с различными катодными контактами с использованием метода Монте-Карло.

### ИССЛЕДУЕМЫЕ МОДЕЛИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматриваются структуры  $n^+ - n^- - n - n^+$  и  $m - n^- - n - n^+$ , где  $n^+$  – сильнолегированные области катода и анода с концентрацией примеси  $5 \cdot 10^{16} \dots 10^{17}$   $\text{см}^{-3}$ ,  $n$  – область легирована слабее (концентрация  $1 \dots 5 \cdot 10^{16}$   $\text{см}^{-3}$ ) и имеет длину  $L_2$ ,  $n^-$  – область вблизи катода с длиной  $L_1$ , легированная примерно на порядок меньше, чем  $n$  область. Контакты к катодной и анодной  $n^+$ -областям считаются омическим,  $m - n$  контакт в структуре  $m - n^- - n - n^+$  является запиорным (рис. 1). Длины, на которых происходит изменения концентрации в  $n^+ - n^-$ ,  $n^- - n$  и  $n - n^+$  переходах, составляют 0,5 мкм. В структуре  $n^+ - n^- - n - n^+$  внутренние электрические поля в переходах  $n^+ - n$  и  $n^- - n$  имеют разные направления. Внутреннее поле  $n^+ - n$  перехода направлено противоположно прикладываемой к диоду напряженности, а направление поля  $n^- - n$  совпадает с прикладываемой напряженностью. Вследствие этого у катода образуется виртуальный

катод, где напряженность электрического поля равна нулю, а напряженность электрического поля  $n^- - n$  перехода будет увеличиваться. В структуре  $m - n^- - n - n^+$  направления электрических полей в  $m - n^-$  и  $n^- - n$  переходах совпадают с направлением внешне приложенного поля, виртуальный катод отсутствует и величина электрического поля у катода в структуре  $m - n^- - n - n^+$  оказывается выше, чем в структуре  $n^+ - n^- - n - n^+$  при одинаковых напряжениях на диодах.

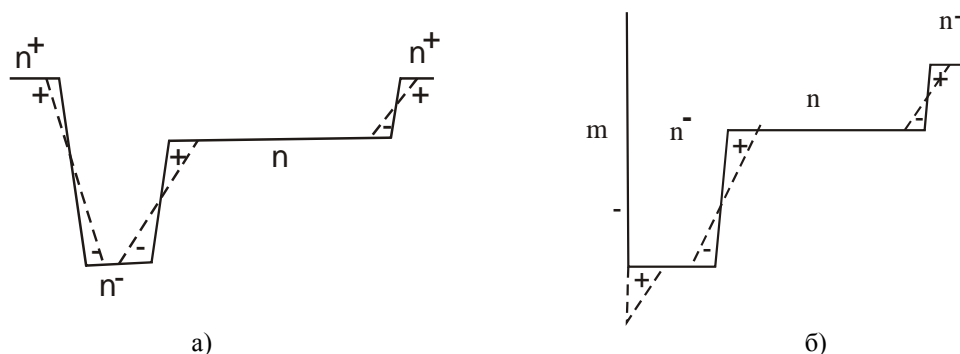


Рис. 1. Профили легирования диодов с катодным статическим доменом: а) с пониженной концентрацией у катода; б) с металлическим катодным контактом. Пунктирная линия – распределение электронов.

В диоде  $m - n^- - n - n^+$  ударная ионизация развивается при меньших напряжениях по сравнению с диодом  $n^+ - n^- - n - n^+$ . Следовательно, пороговые напряжения в диодах  $m - n^- - n - n^+$  оказываются меньше пороговых напряжений в диодах  $n^+ - n^- - n - n^+$ .

Расчетная область представляла собой прямоугольник. В расчетах использовался многочастичный метод Монте-Карло совместно с уравнением Пуассона [6]. Использовалась трехдолинная модель зоны проводимости GaAs. Учитывались все существенные механизмы рассеяния электронов: рассеяние при взаимодействии с деформационными потенциалами оптических и акустических фононов, полярное оптическое, примесное, междолинное рассеяние между эквивалентными и неэквивалентными долинами. Во всех долинах учитывалась их непараболичность [8]. Параметры, необходимые в расчетах для GaAs, были взяты из литературы [6,9].

В структуре  $m - n^- - n - n^+$  контакт  $m - n^-$  - запорный. Концентрация на контакте задавалась в виде  $n(0, t) = n_0 \exp\left(-\frac{e(\varphi_k - \Delta\varphi)}{kT_0}\right)$ , где  $\varphi_k$  - высота барьера,  $\Delta\varphi$  - понижение высоты барьера за счет сил

зеркального изображения. Барьер на катодном контакте сравнительно небольшой высоты  $\sim 0,03$  эВ обеспечивает достаточно высокое поле в прикатодной области, максимум которого меняется от 10 кВ/см до 30 кВ/см в зависимости от приложенного электрического поля. Такое поле обеспечивает быстрый набор электронами энергии, соответствующей верхним долинам зоны проводимости, и образование доменов сразу же за областью прикатодного обеднения электронами. Если высота барьера становится большей 0,4- 0,5 эВ, то поле сосредоточено в области катода, величина его вне этой области ниже пороговой и образуется катодный статический домен. Параметры диода (длины областей, концентрации) изменяются в разумных пределах для получения статического домена с высокой напряженностью электрического поля, достаточной для развития в нем ударной ионизации.

Зависимости напряженности электрического поля от координаты при различных приложенных к структуре напряжениях выглядят так: максимум электрического поля соответствует границе слаболегированной области и сильнолегированной области. Максимальная напряженность электрического поля растет с увеличением напряжения и достигает 180 – 200 кВ/см (рис. 2).

При больших напряженностях начинает сказываться ударная ионизация, которая приводит к изменению формы катодного статического домена, домен расширяется как в сильнолегированную так и в слаболегированную области. В области вне домена напряженность электрического поля меньше пороговой и составляет 1,5...2,0 кВ/см.

Напряжение на диоде, при котором начинается рост тока, мы назвали порогом генерации СВЧ шума. Зависимости порогов генерации от концентрации примесей в  $n$ - области диода показаны на рис.3 для ранее проведенных расчетов и для расчетов методом Монте-Карло в сравнении с экспериментальными результатами.

Для образования статического домена длина прикатодной слаболегированной области должна быть достаточно протяженной для получения напряженностей электрического поля более 180 кВ/см в арсениде галлия (это длины  $\sim 2...6$  мкм).

Соотношение концентраций в областях должно удовлетворять определенному соотношению. При небольшой разнице концентраций в слаболегированной области и в объеме образующийся у катода домен

отрывается от катода и дрейфует к аноду. Примерное соотношение для этих концентраций для стабилизации домена у катода  $n/n^- \sim 5-10$ .

При увеличении напряжения ток через структуру сначала растет и насыщается, а при дальнейшем повышении напряжения на диоде снова увеличивается, что обусловлено ударной ионизацией в статическом домене у катода. При этом статический домен с сильным электрическим полем за счет ударной ионизации расширяется. В отличие от простейших расчетов электрического поля в структуре расчеты с использованием метода Монте-Карло показывают, что напряженность электрического поля как в случае пониженной концентрации у катода, так и в случае металлического контакта распределена асимметрично, что обусловлено учетом пространственной зависимости подвижности носителей заряда от концентрации примеси.

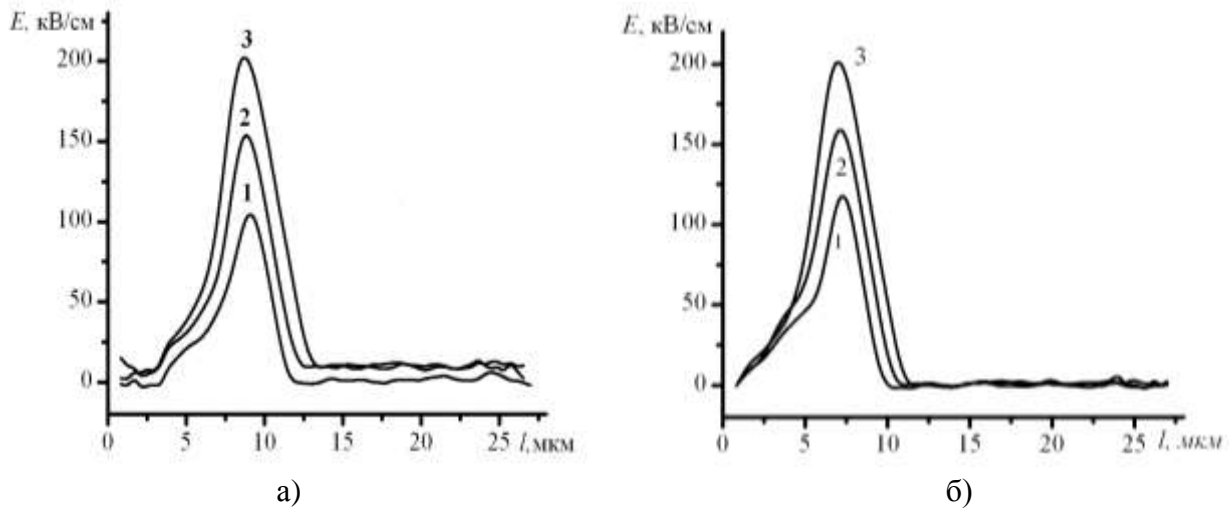


Рис. 2. Распределение напряженности электрического поля в диоде, 1 – 40 В, 2 – 60 В, 3 – 90 В а) с пониженной концентрацией у катода  $n^+ - n^- - n - n^+$ ; б) с металлическим катодным контактом  $m - n^- - n - n^+$ .

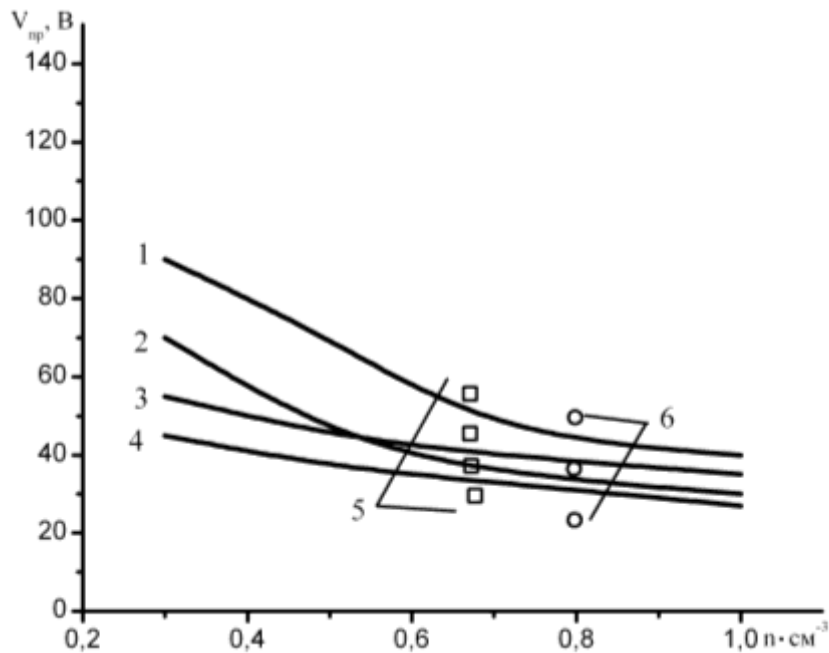


Рис. 3. Зависимости порогов генерации СВЧ шума от концентрации в  $n$ -области: 1 –  $n^+ - n^- - n - n^+$  диод с  $L_1 = 6$  мкм,  $L_2 = 20$  мкм; 2 –  $n^+ - n^- - n - n^+$  диод с  $L_1 = 2$  мкм,  $L_2 = 20$  мкм; 3 –  $m - n^- - n - n^+$  диод с  $L_1 = 6$  мкм,  $L_2 = 20$  мкм; 4 –  $m - n^- - n - n^+$  диод с  $L_1 = 2$  мкм,  $L_2 = 20$  мкм; 5 – экспериментальные пробивные напряжения  $m - n^- - n - n^+$  диода с  $L_1 = 2 \dots 6$  мкм,  $L_2 = 20$  мкм,  $n = 6,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ; 6 – экспериментальные пробивные напряжения  $m - n^- - n - n^+$  диода с  $L_1 = 2 \dots 6$  мкм,  $L_2 = 20$  мкм,  $n = 8 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .

Пороги генерации СВЧ шума, рассчитанные методом Монте-Карло, меньше порогов генерации, полученных с использованием локально-полевой модели [3]. Наибольшие отличия наблюдаются при низких уровнях легирования  $n$ -области, где величина порога генерации приблизительно в полтора раза меньше, чем полученная при использовании более простой модели. Как видно из рис. 3, полученные кривые хорошо ложатся на экспериментально полученные точки.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных расчетов и сравнения их с экспериментами показано:

1. Использование для анализа метода Монте-Карло позволило получить более точные распределения электрических полей в диодах, значения напряженностей электрических полей, при которых начинается ударная ионизация и в дальнейшем позволит изучить частотный спектр шумового сигнала (последнее будет рассмотрено отдельно);

2. Увеличение концентрации в  $n$ -области увеличивает первоначальную напряженность электрического поля в  $n^- - n$  переходе, что приводит к меньшим пороговым напряжениям, при которых развивается ударная ионизация.

3. Использование металлического запорного катодного контакта исключает область виртуального катода ( $E=0$ ), повышает напряженность у катода и уменьшает пробивные напряжения диода. При одинаковых напряжениях на диодах с  $n^+$ -катодом и металлическим катодом максимальное поле в диоде с металлическим катодом больше, чем в диоде с  $n^+$ -катодом на 20-30 кВ/см.

4. Справедливость модели диодов с катодным статическим доменом с  $n^+$  и металлическим катодом качественно подтверждается экспериментом. Некоторое расхождение обусловлено тем, что в эксперименте использована  $n^-$ -область в виде полуизолирующего GaAs, свойства которой несколько отличаются от рассмотренной в расчетах.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прохоров Э.Д., Скоробогатова С.Н., Золотарев Е.С., Генерация СВЧ шума диодом с катодным статическим доменом//Радиотехника и электроника. – 1976. – Вып.21. – № 8. – С. 1732-1739.
2. Золотарев Е.С., Прохоров Э.Д., Модели диодов с катодным статическим доменом//Радиотехника и электроника. – 1990. – Вып. 35. – № 10. – С. 2221- 2223.
3. Прохоров Э.Д., Боцула О.В., Соколов С.Б. Влияние параметров прикатодной области диода с катодным статическим доменом на порог генерации СВЧ шума// Радиофизика и электроника. – 2010. – Вып. 15. – № 1. – С. 91-95.
4. Прохоров Э.Д., Скоробогатова С.Н., Шумовой спектр диода с катодным статическим доменом// Радиотехника и электроник. – 1985. – Вып. 31. – № 7. – С.1447- 1449.
5. А. с. № 1591775 Диод для генерации СВЧ шума / Прохоров Э. Д., Золотарев Е. С. (СССР). – от. 26. 07. 1989.
6. Иващенко В. М., Митин В. В. Моделирование кинетических явлений в полупроводниках. Метод Монте - Карло. К: Наукова думка, 1990, 192 с.
7. Зи С., Физика полупроводниковых приборов в. 2. – М.: Мир, 1984. – 456 с.
8. Киттель С. Введение в физику твердого тела. – М: Наука, 1978. – 790 с.
9. Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, URL, <http://www.ioffe.rssi.ru>, Semiconductor, GaAs.



## ЗМІСТ

<i>Бутрым А. Ю., Антюфеева М. С., Хардигов В. В., Шульга С. Н.</i> Построение полюсной модели дисперсии диэлектрика на основе результатов измерений показателя преломления и показателя поглощения в ограниченной полосе частот	3
<i>Горобец Н.Н., Булгакова А.А.</i> Квазиоптимальные антенные решетки с усеченным биномиальным амплитудным распределением источников поля	10
<i>Блинова Н.К., Горобец Н.Н., Селютин А.В.</i> Продольно-поперечные поляризационные селекторы на волноводе квадратного поперечного сечения	17
<i>Легенький М.Н.</i> Импульсная рефлекторная антенна на основе нерегулярной конической линии	23
<i>Одаренко Е.Н., Шматько А.А.</i> Пусковые характеристики двухрежимной электронно-волновой системы О-типа	30
<i>Щербак В.В.</i> Эффективное преобразование волн <i>TE</i> или <i>TM</i> в волноведущих каналах с <i>ТЕМ</i> -волной	38
<i>Кулешов А.Н.</i> Стабилизация мощности излучения вакуумных электронных приборов субмиллиметрового диапазона	43
<i>Стогний Н. П., Сахненко Н. К.</i> Возбуждение плазмонных резонансов нанопровода и нанотрубки импульсным источником	48
<i>Прохоров Э. Д., Боцула О.В., Реутин О.А.</i> Генерация и умножение частоты планарным диодом с туннельной границей	55
<i>Боцула О. В., Прохоров Э. Д., Свергун Д. С., Приходько К. Г.</i> Влияние ударной ионизации на эффективность генерации коротких диодов на основе GaN	61
<i>Захаров И. Г.</i> Ионосфера как индикатор процессов в околоземном пространстве, тропосфере и литосфере	65
<i>Резуненко В.А.</i> Экранировка сферой с круговым отверстием поля поперечного электрического диполя, размещённого в шаре	69
<i>Дорошенко В.А., Литвинова О.Г., Стрельницкий А.А.</i> Дифракция электромагнитных волн на щелевом полупрозрачном конусе	76
<i>Батраков Д.О., Головин Д.В., Батраков О.Д.</i> Сравнительный анализ итерационного и генетического алгоритмов решения обратных задач рассеяния	82
<i>Казанко А.В., Одаренко, Шматько А.А.</i> Рассеяние плоской Е-поляризованной волны на решетке из метаматериала	86
<i>Батраков Д. О., Головин Д. В., Почанин Г. П.</i> Влияние формы зондирующих импульсов на эффективность восстановления параметров технических и биомедицинских объектов	93
<i>Титарь В.П., Шпаченко О.В.</i> Сравнительный анализ отражения и преломления лазерного излучения в центральной ямке и на периферии жёлтого пятна сетчатки глаза	99
<i>Прохоров Э. Д., Боцула О.В., Горбунов И.А.</i> Моделирование диода с катодным статическим доменом методом Монте-Карло	112

## CONTENTS

<i>Butrym A.Yu., Antyufeyeva M.S., Khardikov V.V., Shulga S.N.</i> Building of the dielectric dispersion pole model based on measurements of the refractive index and absorption index in a finite frequency band	3
<i>Gorobets N.N., Bulgakova A.A.</i> Quasi-optimal antenna arrays with a truncated binomial amplitude distribution of the field sources	10
<i>Blinova N.K., Gorobets N.N., Selutin A.V.</i> Longitudinal and transverse polarization selectors on the waveguide of square cross-section	17
<i>Legenkiy M.N.</i> Impulse radiating antenna based on non-regular conical line	23
<i>Odarenko E.N., Shmat'ko A.A.</i> The double-mode oscillator starting characteristics of O-type electron-wave system	30
<i>Shcherbak V.V.</i> Efficient conversion of the wave TE or TM in waveguide channels with TEM wave	38
<i>Kuleshov A.N.</i> Output power stabilization of vacuum electron devices of submillimeter range	43
<i>Stognii N.P., Sakhnenko N.K.</i> Excitation of the plasmon resonance of nanowire and nanotube pulse source	48
<i>Prokhorov E. D., Botsula O. V., Reutyna O. A.</i> Generation and frequency multiplication by planar diode with a tunnel boundary	55
<i>Prokhorov E. D., Botsula O. V., Svergun D. S., Prykhodko K. G.</i> Influence of impact ionization on oscillation efficiency of GaN diodes with short length	61
<i>Zakharov I.G.</i> Ionosphere as an indicator of processes in the near-Earth space, the troposphere and lithosphere	65
<i>Rezunenko V. A.</i> The shielding of the field of a transverse electric dipole in a solid sphere by a sphere with a circular opening	69
<i>Doroshenko V.A., Litvinova O.G., Strelnytskyi O.O.</i> Electromagnetic waves diffraction on a slotted semi-transparent cone	76
<i>Batratkov D.O., Golovin D.V., Batratkov O.D.</i> Comparative analysis of iterative and genetic algorithms for solving inverse scattering problems	82
<i>Kazanko A.V., Odarenko E.N., Smatko A.A.</i> Scattering of flat E-polarized wave on the grate from metamaterial	86
<i>Batratkov D.O., Golovin D.V., Pochanin G.P.</i> Effect of the probe pulses shape on the efficiency of recovering the parameters of technical and biomedical objects	93
<i>Titar V.P., Shpachenko O.V.</i> Comparative analysis of reflection and refraction of laser radiation at a central fovea and periphery of macula lutea	99
<i>Prokhorov E. D., Botsula O. V., Gorbunov I. A.</i> Monte Carlo simulation of diodes with a cathode static domain	112

Наукове видання

ВІСНИК ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
імені В.Н. Каразіна  
№ 1067

Серія  
“Радіофізика та  
електроніка” Випуск 22

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Підписано до друку 27.06.2013. Формат 60×84/8.  
Папір офсетний.  
Друк ризографічний.  
Ум. друк. арк. 9,5. Обл.-вид. арк. 11,0. Тираж 100 пр.  
Ціна договірна.

---

61022, Харків, майдан Свободи, 4, Харківський національний університет  
імені В.Н. Каразіна  
Видавництво

---

Надруковано з готового оригінал-макету у друкарні ФОП Петров В.В.  
Єдиний державний реєстр юридичних осіб та фізичних осіб-підприємців.  
Запис №2480000000106167 від 08.01.2009.  
61144, м. Харків, вул. Гв. Широнінців, 79в, к. 137, тел. (057) 778-60-34  
e-mail: bookfabrik@rambler.ru