

ISSN 2311-0872

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІСНИК
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
імені В.Н. КАРАЗІНА

Серія “ РАДІОФІЗИКА ТА ЕЛЕКТРОНІКА ”

Випуск 42

Започаткована 1971 р.

Харків 2025

У збірнику представлені результати теоретичних та експериментальних досліджень, що спрямовані на розв'язання актуальних задач сучасної радіофізики. До них відносяться: поширення радіохвиль в навколоземному просторі, його діагностика з використанням радіофізичних методів, поширення і дифракція електромагнітних хвиль у електродинамічних структурах, взаємодія лазерного випромінювання з речовиною та біологічними об'єктами, фізичні принципи у напівпровідникових приладах та ін.

Місія журналу полягає в тому, щоб представити свіжі досягнення в області радіофізики та природничих наук для наукових працівників, аспірантів, студентів старших курсів радіофізичних спеціальностей.

Журнал публікує наукові статті, короткі повідомлення та огляди з усіх проблем радіофізики та суміжних галузей.

Наукове фахове видання України, категорії «Б», галузь знань: 10 Природничі науки, спеціальність: 104 Фізика та астрономія, 105 Прикладна фізика та наноматеріали.
Наказ МОН України №1188 від 24.09.2020 р.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол № 17 від 30 червня 2025 року).

Редакційна колегія

Відповідальний редактор – д.ф.-м.н., проф. Шульга С.М.

д.ф.-м.н., проф. Аркуша Ю.В., Україна

проф. Блаунштейн Н., Ізраїль

д.ф.-м.н., проф. Горобець М.М., Україна

д.ф.-м.н., проф. Дюбко С.П., Україна

д.ф.-м.н., проф. Катрич В.О., Україна

д.ф.-м.н., проф. Шматько О.О., Україна

д.ф.-м.н., проф. Чорногор Л.Ф., Україна

проф. Цян Го, Китай

проф. Ю Джин, Китай

Заступник відповідального редактора – к.ф.-м.н., доц. Цимбал А.М.

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, факультет радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем

e-mail: radiovisnic@karazin.ua

A.Tsymbal@karazin.ua

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування

Ідентифікатор медіа у Реєстрі суб'єктів у сфері медіа: R30-04466

(Рішення № 1538 від 09.05.2024 р. Національної ради України

з питань телебачення і радіомовлення. Протокол № 15)

Засновник журналу Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна. Рік заснування 1971. Періодичність виходу 2 рази на рік.

ISSN 2311-0872

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

**Visnyk
of V.N. Karazin Kharkiv
National University**

series “Radio Physics and Electronics”

Issue 42

Founded in 1971.

Kharkiv 2025

The goal of the Journal is to publish articles, reports and reviews containing original results of theoretical and experimental research aimed at solving the current problems of modern Radio Physics. These include: the propagation of radio waves in the near-Earth space, its diagnosis using radio physical methods, the propagation and diffraction of electromagnetic waves in electrodynamic structures, the interaction of laser radiation with matter and biological objects, physical principles in semiconductor devices etc.

The mission of the journal is to present the latest achievements in the field of radiophysics and natural sciences for researchers, postgraduate students, and senior students of radiophysical specialties. The journal publishes research articles, short communications and reviews regarding all problems of Radio Physics and related fields.

Scientific professional publication of Ukraine, **category "B"**, branch of knowledge: 10 Natural sciences, specialty: **104 Physics and astronomy, 105 Applied physics and nanomaterials**. The Decree N 1188 of the Ministry of Education and Science Ukraine of 24.09.2020.

Approved for publication by the decision of the Academic Council of V.N. Karazin Kharkiv National University (protocol № 17 dated 30.06.2025).

Editorial Team

The responsible editor – Dr.Sc., Prof. **Shulga S.N.**

Dr.Sc., Prof. Arkusha Yu.V., Ukraine

Prof. Blaunstein N., Israel

Dr.Sc., Prof. Gorobets N.N., Ukraine

Dr.Sc., Prof. Dubko S.P., Ukraine

Dr.Sc., Prof. Katrich V.A., Ukraine

Dr.Sc., Prof. Shmatko A.A., Ukraine

Dr.Sc., Prof. Chernogor L.F., Ukraine

Prof. Qiang Guo, China

Prof. Yu Zheng, China

Deputy Editor-in-Chief – Ph.D., Assoc. **Tsymbal A.M.**, A.Tsymbal@karazin.ua

Address: 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

V.N. Karazin Kharkiv National University, School of Radio Physics, Biomedical Electronics and Computer Systems

e-mail: radiovisnic@karazin.ua

A.Tsymbal@karazin.ua

Articles have been reviewed internally and externally

Media identifier in the Register of the field of Media Entities: R30-04466

(Decision № 1538 dated May 9, 2024 of the National Council of

Television and Radio Broadcasting of Ukraine, Protocol № 15)

The founder of the Journal is V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine. Year of foundation 1971. The journal is published twice a year.

ЗМІСТ

<i>Шульга С. М., Багацька О.В.</i> Модові розкладання полів у вигляді соленоїдальних і потенціальних складових у закритому хвилеводі	7
<i>Плахтій В.А., Ахмедов Р.Д., Думін О.М.</i> Метод міграції Кірхгофа в задачі виявлення прихованих металевих об'єктів за допомогою надширокосмугового георадару	15
<i>Гавриленко Д.І., Думін О.М., Плахтій В.А.</i> Енергетичний аналіз нестационарного хвильового процесу, збудженого прямокутним імпульсом	24
<i>Легенький М. М., Бугай М. А.</i> Прогнозування розсіювання електромагнітних хвиль на складних великогабаритних об'єктах	38
<i>Кокодій М.Г., Натарова А., Мовенко С., Гуріна Д., Гарячевська І., Натаров Д., Руднева М.</i> Тиск електромагнітного випромінювання на дуже тонкі провідники	47
<i>Казанко О. В., Пенкіна О. Є., Головка О.В.</i> Розвиток методології переходу від спектрального рівняння відносно просторової змінної до диференціального рівняння відносно спектрального параметра у проблемі Штурма-Ліувілля для одновимірно-періодичного двошарового фотонного кристала	55

CONTENTS

<i>Shulga S.M., Bagatska O.V., Vinnichenko S.O., Maslennikov A.O.</i> Mode decomposition of fields into solenoidal and potential components in a closed waveguide	7
<i>Plakhtii V.A., Akhmedov R.D., Dumin O.M.</i> Kirchhoff migration method in the problem of detecting hidden metal objects using ultra-wideband GPR	15
<i>Havrylenko D.I., Dumin O.M., Berdnyk S.L.</i> Energy analysis of a transient wave process excited by a rectangular pulse	24
<i>Legenkiy M.M., Buhai M.A.</i> Prediction of electromagnetic waves scattering on complex shape large objects	38
<i>Kokodii N.G., Natarova A.O., Movenko S.Yu., Gurina D.V., Garyachevska I.V., Natarov D.M., Rudneva M.V.</i> Pressure of electromagnetic radiation on very thin conductors	47
<i>Kazanko O.V., Penkina O.E., Golovko O.V.</i> Development of a methodology for transitioning from a spectral equation relative to a spatial variable to a differential equation relative to a spectral parameter in the Sturm-Liouville problem for a one-dimensional periodic two-layer photonic crystal	55

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-01>

УДК 537.87

С. М. ШУЛЬГА, д. ф.-м. н., професор

e-mail: sergeyshulga@karazin.ua ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-9392-9366>

О. В. БАГАЦЬКА, к. ф.-м. н., доцент

e-mail: bagatska@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4078-4132>

С. О. ВІННІЧЕНКО, н.с.

e-mail: winnt1986@gmail.com

А. О. МАСЛЕННИКОВ, аспірант

e-mail: djanton2011@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7728-6559>

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

МОДОВІ РОЗКЛАДАННЯ ПОЛІВ У ВИГЛЯДІ СОЛЕНОЇДАЛЬНИХ І ПОТЕНЦІАЛЬНИХ СКЛАДОВИХ У ЗАКРИТОМУ ХВИЛЕВОДІ

Актуальність. Наприкінці минулого століття виникла необхідність у точному розв'язанні задачі про збудження нестационарних полів у закритих і відкритих електродинамічних структурах. На кафедрі теоретичної радіофізики у 80-х роках було запропоновано альтернативний до методу Фур'є метод модового базису для закритих порожнистих резонаторів. У запропонованій роботі розглянуто електродинамічну задачу про збудження нестационарного поля у відкритому циліндричному хвилеводі. При цьому з самого початку вихідну систему рівнянь Максвелла розбито на дві системи рівнянь для соленоїдальних і потенціальних векторів.

Мета роботи. Показати можливість застосування методу модового базису для суперпозиції соленоїдальних і потенціальних полів у хвилеводі з діелектричним заповненням.

Матеріали та методи. Під час розв'язання окремих спектральних електродинамічних задач для соленоїдальних і потенціальних складових векторів електромагнітного поля в роботі доведено ортогональність зазначених власних векторів в об'ємі хвилеводу з урахуванням умови обмеженості полів на торцях хвилеводу при прагненні поздовжньої компоненти циліндричного хвилеводу до плюс/мінус нескінченності.

Результати. У припущенні повноти знайдених власних функцій шукане поле представлено у вигляді суми розкладання за елементами модового базису для соленоїдальних і потенціальних полів з коефіцієнтами, що залежать від часу. Для часових коефіцієнтів отримано диференціальні рівняння першого порядку.

Висновки. У роботі на прикладі нескінченного циліндричного хвилеводу з діелектричним і діаманітним заповненням запропоновано різновид модового базису, коли на початковому етапі розв'язання рівнянь Максвелла векторні величини вихідної задачі подають у вигляді суми соленоїдальних і потенціальних складових. Після доведення ортогональності власних вектор-функцій для потенціальних і соленоїдальних полів і припущення їхньої повноти, у статті отримано розв'язки зі збудження хвилеводу нестационарними джерелами у вигляді розкладання за власними функціями з невідомими часовими коефіцієнтами.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: метод модового базису, соленоїдальні та потенціальні складові поля, задача на власні функції.

Як цитувати: Шульга СМ, Багацька ОВ. Модові розкладання полів у вигляді соленоїдальних і потенціальних складових у закритому хвилеводі. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2025;42:7-14. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-01>

In cites: Shulga SM, Bagatska OV. Mode decomposition of fields into solenoidal and potential components in a closed waveguide. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radiophysics and Electronics". 2025;42:7-14. (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-01>

ВСТУП

Довільне електромагнітне поле є сумою соленоїдального та потенціального полів. Через це виникає задача про представлення електромагнітного поля у хвилеводі у вигляді суперпозиції окремих модових розкладань за соленоїдальними і потенціальними складовими поля. Для її розв'язання ми будемо використовувати метод модового базису (ММБ) [1-4] для двох складових електромагнітного поля. Раніше в роботі [4] було розглянуто особливості побудови модового базису для відкритих електродинамічних структур. У запропонованій роботі розглянуто особливості побудови модового базису для відкритого

© Шульга С. М., Багацька О.В., 2025

Open access. This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

хвильоводу з використанням обмеженості напруженостей електричного і магнітного полів для соленоїдальних і потенціальних складових за умови прагнення поздовжньої координати хвильоводу до нескінченності. Розв'язання задачі проводиться на прикладі нескінченного циліндричного хвильоводу з діелектричним і діаманітним заповненням. Після доведення ортогональності власних вектор-функцій для потенціальних і соленоїдальних полів і припущення їхньої повноти у статті отримано розв'язки щодо збудження хвильоводу нестационарними джерелами у вигляді розкладання за власними функціями з невідомими часовими коефіцієнтами. Ці коефіцієнти для соленоїдальних векторних полів знаходяться із системи диференціальних рівнянь першого порядку, а коефіцієнти для потенціальних векторних полів – із двох незалежних диференціальних рівнянь також першого порядку.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо циліндричний хвильовід, вісь якого спрямована вздовж осі z . Нехай S – його поперечний переріз у площині $z = 0$, ∂S – контур, що обмежує S . Сформулюємо електродинамічну задачу про збудження нестационарного поля в такому хвильоводі

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}(\vec{R}, t) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}(\vec{R}, t)}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{M}(\vec{R}, t), \\ \nabla \times \vec{H}(\vec{R}, t) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{R}, t)}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{R}, t), \\ \operatorname{div} \varepsilon \vec{E}(\vec{R}, t) &= 4\pi \rho_e(\vec{R}, t), \\ \operatorname{div} \mu \vec{H}(\vec{R}, t) &= 4\pi \rho_h(\vec{R}, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad \vec{R} \in V\end{aligned}\quad (1)$$

з нульовими початковими даними та граничною умовою $\vec{E}_\tau(\vec{R}, t) = 0$ на бічних стінках хвильоводу. Тут $\vec{R} = (x, y, z)$, V – внутрішня область хвильоводу, $\vec{J}(\vec{R}, t)$ і $\vec{M}(\vec{R}, t)$ – густини струмів, а $\rho_e(\vec{R}, t)$ і $\rho_h(\vec{R}, t)$ – густини зарядів (електричного та магнітного типів відповідно), c – швидкість світла у вакуумі, ε і μ – діелектрична та магнітна проникності ($\varepsilon, \mu = \text{const}$); $\vec{E}_\tau(\vec{R}, t)$ – компонента поля, дотична до бічної поверхні Σ хвильоводу.

Представимо векторні величини вихідної задачі у вигляді суми соленоїдальних і потенціальних складових:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{R}, t) &= \vec{E}_s(\vec{R}, t) + \vec{E}_p(\vec{R}, t), \quad \vec{H}(\vec{R}, t) = \vec{H}_s(\vec{R}, t) + \vec{H}_p(\vec{R}, t); \\ \vec{J}(\vec{R}, t) &= \vec{J}_s(\vec{R}, t) + \vec{J}_p(\vec{R}, t), \quad \vec{M}(\vec{R}, t) = \vec{M}_s(\vec{R}, t) + \vec{M}_p(\vec{R}, t).\end{aligned}\quad (2)$$

Як результат рівняння Максвелла (1) розбиваються на дві задачі:

- для соленоїдальних векторів:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}_s(\vec{R}, t) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}_s(\vec{R}, t)}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{M}_s(\vec{R}, t), \\ \nabla \times \vec{H}_s(\vec{R}, t) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}_s(\vec{R}, t)}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}_s(\vec{R}, t), \\ \operatorname{div} \varepsilon \vec{E}_s(\vec{R}, t) &= 0, \\ \operatorname{div} \mu \vec{H}_s(\vec{R}, t) &= 0, \\ \vec{E}_{s\tau}(\vec{R}, t) &= 0, \quad \vec{H}_{sN}(\vec{R}, t) = 0, \quad \vec{R} \in \Sigma;\end{aligned}\quad (3)$$

- для потенціальних векторів:

$$\begin{aligned}
 \mu \frac{\partial \vec{H}_p(\vec{R}, t)}{\partial t} &= -4\pi \vec{M}_p(\vec{R}, t), \\
 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_p(\vec{R}, t)}{\partial t} &= 4\pi \vec{J}_p(\vec{R}, t), \\
 \operatorname{div} \varepsilon \vec{E}_p(\vec{R}, t) &= 4\pi \rho_e(\vec{R}, t), \\
 \operatorname{div} \mu \vec{H}_p(\vec{R}, t) &= 4\pi \rho_h(\vec{R}, t), \\
 \vec{E}_{p\tau}(\vec{R}, t) &= 0, \vec{H}_{pN}(\vec{R}, t) = 0, \vec{R} \in \Sigma;
 \end{aligned} \tag{4}$$

тут $\vec{H}_N$ – компонента магнітного поля, нормальна до бічної поверхні хвилеводу.

ЗАДАЧА НА ВЛАСНІ ФУНКЦІЇ ДЛЯ СОЛЕНОЇДАЛЬНИХ ВЕКТОРІВ

Рівняння (3) породжують таку задачу на власні функції:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{E}_s(\vec{R}, k_0) - ik_0 \mu \vec{H}_s(\vec{R}, k_0) &= 0, \\
 \nabla \times \vec{H}_s(\vec{R}, k_0) + ik_0 \varepsilon \vec{E}_s(\vec{R}, k_0) &= 0, \\
 \operatorname{div} \varepsilon \vec{E}_s(\vec{R}, k_0) &= 0, \\
 \operatorname{div} \mu \vec{H}_s(\vec{R}, k_0) &= 0;
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\vec{E}_{s\tau}(\vec{R}, k_0) = 0, \partial_N \vec{H}_s(\vec{R}, k_0) = 0, \vec{R} \in \Sigma; \tag{6}$$

$$\left| \vec{E}_s(\vec{R}, k_0) \right| < +\infty, \left| \vec{H}_s(\vec{R}, k_0) \right| < +\infty, z \rightarrow \pm\infty. \tag{7}$$

Нехай $k_0 \neq 0$, тоді розв'язок задачі (5-7) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_s^{v\beta}(\vec{R}, \omega) &= \vec{E}_{mn}^{v\beta}(\vec{r}, \omega) e^{\pm ig(\omega)z}, \\
 \vec{H}_s^{v\beta}(\vec{R}, \omega) &= \vec{H}_{mn}^{v\beta}(\vec{r}, \omega) e^{\pm ig(\omega)z}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

У цих співвідношеннях $\vec{r} = (x, y, 0)$, $v = \pm$; $\beta = e, h$; $\omega = k_0 c$; $g(\omega) = c^{-1} \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \omega_{mn}^2}$, $\operatorname{Im} \sqrt{} \geq 0$, $\omega_{mn} = \kappa_{mn} c$; κ_{mn} визначено нижче. Індекс $\beta = e$ відповідає ТМ, а $\beta = h$ – ТЕ-хвилям. Умова (7) накладає обмеження на спектр ω : $\omega \geq \omega_{mn} / \sqrt{\varepsilon \mu}$. Величини $\vec{E}_{mn}^{v\beta}(\vec{r}, \omega)$ і $\vec{H}_{mn}^{v\beta}(\vec{r}, \omega)$ виражаються через скалярні функції $\mathcal{E}_{mn}(\vec{r})$ та $\mathcal{H}_{mn}(\vec{r})$ [5]

$$\vec{E}_{mn}^{\pm e}(\vec{r}, \omega) = \pm \frac{ig(\omega)}{\kappa_{mn}^2} \nabla_{\perp} \mathcal{E}_{mn}(\vec{r}), \tag{9}$$

$$\vec{H}_{mn}^{\pm e}(\vec{r}, \omega) = \pm \frac{i\omega\varepsilon}{c\kappa_{mn}^2} \cdot \vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \mathcal{E}_{mn}(\vec{r});$$

$$\vec{E}_{mn}^{\pm h}(\vec{r}, \omega) = -\frac{i\omega\mu}{c\kappa_{mn}^2} \cdot \vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \mathcal{H}_{mn}(\vec{r}), \tag{10}$$

$$\vec{H}_{mn}^{\pm h}(\vec{r}, \omega) = \pm \frac{ig(\omega)}{\kappa_{mn}^2} \nabla_{\perp} \mathcal{H}_{mn}(\vec{r});$$

де $\mathcal{E}_{mn}(\vec{r})$ і $\mathcal{H}_{mn}(\vec{r})$ визначені як розв'язки задачі на власні значення

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\perp}^2 + \kappa_{mn}^2) \mathcal{E}_{mn}(\vec{r}) &= 0, \vec{r} \in S; \mathcal{E}_{mn_r}(\vec{r}) = 0 (\vec{r} \in \partial S); \\
(\nabla_{\perp}^2 + \kappa_{mn}^2) \mathcal{H}_{mn}(\vec{r}) &= 0, \vec{r} \in S; \mathcal{H}_{mn_n}(\vec{r}) = 0 (\vec{r} \in \partial S).
\end{aligned}
\tag{11}$$

У цих формулах $\nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, $\nabla_{\perp}$ - проекція оператора набла на площину $z = 0$.

Уведемо скалярний добуток для соленоїдальних власних вектор-функцій $\vec{E}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega)$ і $\vec{H}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega)$ в два способи:

$$\begin{aligned}
W_e^{\nu\beta\beta'}(\omega, \omega') &= \left\langle \varepsilon \vec{E}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega), \vec{E}_s^{-\nu\beta'}(\vec{R}, \omega') \right\rangle, \\
W_h^{\nu\beta\beta'}(\omega, \omega') &= \left\langle \mu \vec{H}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega), \vec{H}_s^{-\nu\beta'}(\vec{R}, \omega') \right\rangle.
\end{aligned}
\tag{12}$$

Кутові дужки позначають таку операцію для двох векторних функцій $\eta \vec{u}(\vec{R})$ та $\vec{v}(\vec{R})$:

$$\left\langle \eta \vec{u}(\vec{R}), \vec{v}(\vec{R}) \right\rangle = \int_V \eta \vec{u}(\vec{R}) \vec{v}(\vec{R}) dV.
\tag{13}$$

Використовуючи рівняння (5) і граничні умови (6, 7), перетворимо інтеграли за об'ємом хвилеводу на різницю двох інтегралів за його поперечними перерізами $z = L$ і $z = -L$:

$$\begin{aligned}
W_e^{\nu\beta\beta'}(\omega, \omega') &= \frac{c}{i(\omega - \omega')} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_S \vec{z}_0 [\vec{H}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega) \times \vec{E}_s^{-\nu\beta'}(\vec{R}, \omega') - \\
&\quad \vec{H}_s^{-\nu\beta'}(\vec{R}, \omega') \times \vec{E}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega)] dS \Big|_{z=-L}^{z=L},
\end{aligned}
\tag{14}$$

$$\begin{aligned}
W_h^{\nu\beta\beta'}(\omega, \omega') &= \frac{c}{i(\omega - \omega')} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_S \vec{z}_0 [\vec{E}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega) \times \vec{H}_s^{-\nu\beta'}(\vec{R}, \omega') - \\
&\quad \vec{E}_s^{-\nu\beta'}(\vec{R}, \omega') \times \vec{H}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega)] dS \Big|_{z=-L}^{z=L}.
\end{aligned}
\tag{15}$$

За допомогою цих виразів нескладно перевірити виконання співвідношень ортогональності в сенсі "скалярних" добутків (12)

$$\begin{aligned}
W_{e_{mm'n'}}^{\nu\beta\beta'}(\omega, \omega') &= N_{mn}^{\nu\beta}(\omega) \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta_{\beta\beta'} \delta(\omega - \omega'); \\
W_{h_{mm'n'}}^{\nu\beta\beta'}(\omega, \omega') &= -N_{mn}^{\nu\beta}(\omega) \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta_{\beta\beta'} \delta(\omega - \omega'),
\end{aligned}
\tag{16}$$

де

$$\begin{aligned}
N_{mn}^{\nu\beta}(\omega) &= 4\pi c \int_S \vec{z}_0 \cdot \vec{H}_{mv}^{\nu\beta}(\vec{r}, \omega) \times \vec{E}_{mn}^{-\nu\beta}(\vec{r}, \omega) dS, \\
N_{mn}^{\nu\beta}(\omega) &= -N_{mn}^{-\nu\beta}(\omega);
\end{aligned}
\tag{17}$$

при цьому для TM хвиль ($\beta = e$)

$$N_{mn}^{\nu\beta}(\omega) = \pm \frac{4\pi\omega\varepsilon g(\omega)}{\kappa_{mn}^2} \int_S \mathcal{E}_{mn}^2(\vec{r}) dS,$$

а для TE хвиль ($\beta = h$)

$$N_{mn}^{\nu h}(\omega) = \mp \frac{4\pi\omega\mu g(\omega)}{\kappa_{mn}^2} \int_S \mathcal{H}_{mn}^2(\vec{r}) dS.
\tag{18}$$

Для $k_0 = 0$ задача (5-7) не має нетривіальних розв'язків. Таким чином, значення $k_0 = 0$ в спектр задачі на власні функції для соленоїдальних функцій не входить.

ЗАДАЧА НА ВЛАСНІ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ПОТЕНЦІАЛЬНИХ ВЕКТОРІВ

Перейдемо до задачі на власні функції для потенціальних векторів (4). Вона має вигляд:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}_p(\vec{R}, \alpha) &= 0, \\ \nabla \times \vec{H}_p(\vec{R}, \gamma) &= 0, \\ \text{graddiv} \vec{E}_p(\vec{R}, \alpha) + \alpha \vec{E}_p(\vec{R}, \alpha) &= 0, \\ \text{graddiv} \vec{H}_p(\vec{R}, \gamma) + \gamma \vec{H}_p(\vec{R}, \gamma) &= 0;\end{aligned}\tag{19}$$

$$\vec{E}_{p\tau}(\vec{R}, \alpha) = 0, \vec{H}_{pN}(\vec{R}, \gamma) = 0, \vec{R} \in \Sigma;\tag{20}$$

$$|\vec{E}_p(\vec{R}, \alpha)| < +\infty, |\vec{H}_p(\vec{R}, \gamma)| < +\infty, z \rightarrow \pm\infty.\tag{21}$$

Її рішення дається виразами

$$\vec{E}_p(\vec{R}, \alpha) = -\nabla \psi_e(\vec{R}, \alpha);\tag{22}$$

$$\vec{H}_p(\vec{R}, \gamma) = -\nabla \psi_h(\vec{R}, \gamma),\tag{23}$$

де $\psi_e(\vec{R}, \alpha)$ і $\psi_h(\vec{R}, \gamma)$ - власні функції таких крайових задач:

$$\Delta \psi_e(\vec{R}, \alpha) + \alpha \psi_e(\vec{R}, \alpha) = 0, \vec{R} \in V,\tag{24}$$

$$\psi_e(\vec{R}, \alpha) = 0, \vec{R} \in \Sigma;$$

$$|\psi_e(\vec{R}, \alpha)| < +\infty, z \rightarrow \pm\infty.\tag{25}$$

$$\Delta \psi_h(\vec{R}, \gamma) + \gamma \psi_h(\vec{R}, \gamma) = 0, \vec{R} \in V,\tag{26}$$

$$\partial_N \psi_h(\vec{R}, \gamma) = 0, \vec{R} \in \Sigma;$$

$$|\psi_h(\vec{R}, \gamma)| < +\infty, z \rightarrow \pm\infty.\tag{27}$$

Ці власні функції записуються таким чином

$$\begin{aligned}\psi_e^\pm(\vec{R}, \alpha) &= \varphi_{e_{mn}}(\vec{r}) e^{\pm i \tilde{g}_{mn}(\alpha) z}; \\ \psi_h^\pm(\vec{R}, \gamma) &= \varphi_{h_{mn}}(\vec{r}) e^{\pm i \tilde{g}_{mn}(\gamma) z}.\end{aligned}\tag{28}$$

Тут $\varphi_{e_{mn}}(\vec{r})$ і $\varphi_{h_{mn}}(\vec{r})$ - мембранні функції, визначені в перерізі S хвилеводу рівняннями

$$\begin{aligned}(\nabla_\perp^2 + \chi_{e_{mn}}^2) \varphi_{e_{mn}}(\vec{r}) &= 0, \vec{r} \in S, \varphi_{e_{mn}}(\vec{r}) = 0 (\vec{r} \in \partial S); \\ (\nabla_\perp^2 + \chi_{h_{mn}}^2) \varphi_{h_{mn}}(\vec{r}) &= 0, \vec{r} \in S, \partial_N \varphi_{h_{mn}}(\vec{r}) = 0 (\vec{r} \in \partial S).\end{aligned}\tag{29}$$

У (28) $\tilde{g}_{mn}(\alpha) = \sqrt{\alpha - \chi_{e_{mn}}^2}$, $\tilde{g}_{mn}(\gamma) = \sqrt{\gamma - \chi_{h_{mn}}^2}$, ($\text{Im} \sqrt{\cdot} \geq 0$); умови (25), (27) накладають обмеження на спектр α і γ . Легко переконатися, що фіксованим m і n відповідають спектральні точки $\alpha \geq \chi_{e_{mn}}^2$ і $\gamma \geq \chi_{h_{mn}}^2$ (зауважимо, що значення $\alpha, \gamma = 0$ до спектра задачі не входять, оскільки вони

відповідають лише тривіальним розв'язкам (29)). Для $\psi_e(\vec{R}, \alpha)$ і $\psi_h(\vec{R}, \gamma)$ виконуються співвідношення ортогональності в сенсі скалярного добутку (13). З огляду на [6], легко показати, що співвідношення ортогональності для потенціальних полів записуються таким чином:

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon \vec{E}_{p_{mn}}^{(+)}(\vec{R}, \alpha), \vec{E}_{p_{m'n'}}^{(-)}(\vec{R}, \alpha') \rangle &= K_{mn}(\alpha) \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta(\alpha - \alpha'); \\ \langle \mu \vec{H}_{p_{mn}}^{(+)}(\vec{R}, \gamma), \vec{H}_{p_{m'n'}}^{(-)}(\vec{R}, \gamma') \rangle &= K_{mn}(\gamma) \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta(\gamma - \gamma').\end{aligned}\tag{30}$$

За такого визначення скалярних добутків нормувальні коефіцієнти $K_{mn}(\alpha)$ і $K_{mn}(\gamma)$ дорівнюють

$$\begin{aligned} K_{mn}(\alpha) &= 4\pi\epsilon\tilde{g}_{mn}(\alpha)\int_S \varphi_{e_{mn}}^2(\vec{r})dS; \\ K_{mn}(\gamma) &= 4\pi\mu\tilde{g}_{mn}(\gamma)\int_S \varphi_{h_{mn}}^2(\vec{r})dS. \end{aligned} \quad (31)$$

Можна показати, що сімейства соленоїдальних і потенціальних вектор-функцій тотожно ортогональні

$$\begin{aligned} \langle \epsilon\vec{E}_s^{\nu\beta}(\vec{R},\omega), \vec{E}_p^{-\nu}(\vec{R},\alpha) \rangle &\equiv 0; \\ \langle \mu\vec{H}_s^{\nu\beta}(\vec{R},\omega), \vec{H}_p^{-\nu}(\vec{R},\gamma) \rangle &\equiv 0. \end{aligned} \quad (32)$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ЧАСОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Припустимо, що системи власних вектор-функцій, які відповідають соленоїдальним і потенціальним полям, повні. Це дає змогу записати рішення про збудження хвилеводу нестационарними сторонніми джерелами у вигляді:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R},t) &= \sum_{\nu=\pm} \sum_{\beta=e,h} \sum_{m,n=1}^{+\infty} \left[\int_{\omega_{mn}/\sqrt{\epsilon\mu}}^{+\infty} d\omega a_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t) \vec{E}_s^{\nu\beta}(\vec{R},\omega) + \right. \\ &\quad \left. \int_{\chi_{e_{mn}}}^{+\infty} d\alpha a_{p_{mn\alpha}}^{\nu}(t) \vec{E}_p^{\nu}(\vec{R},\alpha) \right]; \\ \vec{H}(\vec{R},t) &= \sum_{\nu=\pm} \sum_{\beta=e,h} \sum_{m,n=1}^{+\infty} \left[\int_{\omega_{mn}/\sqrt{\epsilon\mu}}^{+\infty} d\omega b_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t) \vec{H}_s^{\nu\beta}(\vec{R},\omega) + \right. \\ &\quad \left. \int_{\chi_{h_{mn}}}^{+\infty} d\gamma b_{p_{mn\gamma}}^{\nu}(t) \vec{H}_p^{\nu}(\vec{R},\gamma) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Використовуючи співвідношення ортогональності (16)-(17) і (30)-(31) для часових коефіцієнтів $a_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t)$ і $b_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t)$, отримаємо систему диференціальних рівнянь першого порядку, а для $a_{p_{mn\alpha}}^{\nu}(t)$ і $b_{p_{mn\gamma}}^{\nu}(t)$ – незалежні диференціальні рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} i\omega a_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t) + \partial_t b_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t) = q_{sh_{mn}}^{\nu\beta}(\omega, t); \\ i\omega b_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t) + \partial_t a_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t) = q_{se_{mn}}^{\nu\beta}(\omega, t); \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \partial_t a_{p_{mn\alpha}}^{\nu}(t) &= q_{pe_{mn}}^{\nu}(\alpha, t); \\ \partial_t b_{p_{mn\gamma}}^{\nu}(t) &= q_{ph_{mn}}^{\nu}(\gamma, t). \end{aligned} \quad (35)$$

Праві частини в (34), (35) дорівнюють:

$$\begin{aligned}
q_{Sh_{mn}}^{\nu\beta}(\omega, t) &= -\frac{4\pi}{N_{mn}^{\nu\beta}(\omega)} \int_V \vec{M}(\vec{R}, t) \vec{H}_S^{-\nu\beta}(\vec{R}, \omega) dV; \\
q_{Se_{mn}}^{\nu\beta}(\omega, t) &= -\frac{4\pi}{N_{mn}^{\nu\beta}(\omega)} \int_V \vec{J}(\vec{R}, t) \vec{E}_S^{-\nu\beta}(\vec{R}, \omega) dV; \\
q_{pe_{mn}}^{\nu}(\alpha, t) &= -\frac{4\pi}{K_{mn}(\alpha)} \int_V \vec{J}(\vec{R}, t) \vec{E}_p^{-\nu}(\vec{R}, \alpha) dV; \\
q_{ph_{mn}}^{\nu}(\gamma, t) &= -\frac{4\pi}{K_{mn}(\gamma)} \int_V \vec{M}(\vec{R}, t) \vec{H}_p^{-\nu}(\vec{R}, \gamma) dV.
\end{aligned} \tag{36}$$

Доповнивши звичайні диференціальні рівняння (34), (35) необхідними початковими умовами, приходимо до канонічної задачі Коші, розв'язок якої знаходять у явному вигляді за допомогою стандартних засобів [7], наприклад, із залученням часових функцій Гріна. Спосіб їхньої побудови є відомим, наприклад, [7], і ми його не обговорюємо.

ВИСНОВКИ

У роботі на прикладі нескінченного циліндричного хвильоводу з діелектричним і діаманітним заповненням запропоновано різновид модового базису, коли на початковому етапі розв'язання рівнянь Максвелла векторні величини вихідної задачі подають у вигляді суми соленоїдальних і потенціальних складових. Після доведення ортогональності власних вектор-функцій для потенціальних і соленоїдальних полів і припущення їхньої повноти у статті отримано розв'язки зі збудження хвильоводу нестационарними джерелами у вигляді розкладання за власними функціями з невідомими часовими коефіцієнтами. Для часових коефіцієнтів отримуємо диференціальні рівняння, які найчастіше називають еволюційними рівняннями. Рішення цих рівнянь з відповідними фізичними початковими умовами зазвичай знаходяться за допомогою стандартних методів математичної фізики.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Tretyakov Oleg, Kaya Mehmet. Time-Domain Real-Valued TM-Modal Waves in Lossy Waveguides // Progress In Electromagnetics Research. – 2013. - Vol. 138, P. 675-696.
2. Butrym A. Yu., Kochetov B. A. Mode Basis Method for Spherical TEM-Transmission Lines and Antennas // Proceedings of the 2007 6-th International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT'07). – Sevastopol (Ukraine). – 2007. –P. 243-245.
3. Бутрим О.Ю., Третьяков О.О. Модифікація методу еволюційних хвильоводних рівнянь для випадку поперечно неоднорідних хвильоводів // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. “Радіофізика та електроніка”. – 2002. - № 544. – С. 71-74.
4. Бутрим О.Ю., Легенький М.М. Метод модового базису для відкритих діелектричних хвильоводів // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. “Радіофізика та електроніка”. – 2008. - № 806. – С. 44-47.
5. Mathews, Jon; Walker, Robert L. (1970). Mathematical methods of physics (2nd ed.). New York: W. A. Benjamin.
6. Третьяков О. О., Шульга С. М. Аналогія в розв'язанні нестационарних задач збудження резонаторів і хвильоводів // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. “Радіофізика та електроніка”. – 1989. - № 336. – С. 23-26.
7. Barton, Gabriel (1989). Elements of Green's functions and propagation: potentials, diffusion, and waves. Oxford science publications. Oxford : New York: Clarendon Press ; Oxford University Press.

REFERENCES

1. Tretyakov Oleg, Kaya Mehmet. Time-Domain Real-Valued TM-Modal Waves in Lossy Waveguides // Progress In Electromagnetics Research. – 2013. - Vol. 138, P. 675-696.
2. Butrym A. Yu., Kochetov B. A. Mode Basis Method for Spherical TEM-Transmission Lines and Antennas // Proceedings of the 2007 6-th International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT'07). – Sevastopol (Ukraine). – 2007. –P. 243-245.
3. Butrym O.Y., Tretyakov O.O. Modification of the method of evolutionary waveguide equations for the case of transversely inhomogeneous waveguides // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. "Radiophysics and Electronics." – 2002. – No. 544. – pp. 71–74.
4. Butrym O.Y., Legenkyi M.M. Mode basis method for open dielectric waveguides // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. "Radiophysics and Electronics." – 2008. – No. 806. – pp. 44–47.
5. Mathews, Jon; Walker, Robert L. (1970). Mathematical methods of physics (2nd ed.). New York: W. A. Benjamin.
6. Tretyakov O. O., Shulga S. M. Analogy in solving non-stationary problems of excitation of resonators and waveguides // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. "Radiophysics and Electronics." – 1989. – No. 336. – pp. 23–26.
7. Barton, Gabriel (1989). Elements of Green's functions and propagation: potentials, diffusion, and waves. Oxford science publications. Oxford : New York: Clarendon Press ; Oxford University Press.

Стаття надійшла до редакції: 20 лютого 2025

Рекомендовано до друку: 25 березня 2025

MODE DECOMPOSITION OF FIELDS INTO SOLENOIDAL AND POTENTIAL COMPONENTS IN A CLOSED WAVEGUIDE

S. M. SHULGA, O. V. BAGATSKA, S. O. VINNICHENKO, A. O. MASLENNIKOV

*V. N. Karazin Kharkiv National University, Department of Theoretical Radiophysics,
4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, Ukraine*

Background. At the end of the last century, it became necessary to solve the problem of excitation of unsteady fields in closed and open electrodynamic structures. In the 1980s, the Department of Theoretical Radiophysics proposed an alternative to the Fourier method, the mode basis method for closed hollow resonators. In this paper, we consider an electrodynamic problem on the excitation of an unsteady field in an open cylindrical waveguide. At the very beginning, the original system of Maxwell's equations is divided into two systems of equations for solenoidal and potential vectors.

Objectives. To show the possibility of applying the mode basis method for superposition of solenoidal and potential fields in a waveguide with dielectric filling.

Materials and methods. When solving some spectral electrodynamic problems for solenoidal and potential components of the electromagnetic field vectors, the orthogonality of these eigenvectors in the waveguide volume is proved, taking into account the condition of field boundedness at the waveguide ends when the longitudinal component of a cylindrical waveguide tends to plus/minus infinity.

Results. Under the assumption of completeness of the found eigenfunctions, the desired field is represented as the sum of the expansion by the elements of the mode basis for solenoidal and potential fields with time-dependent coefficients. The first-order differential equations are obtained for the time coefficients.

Conclusions. In this paper, using the example of an infinite cylindrical waveguide with dielectric and diamagnetic filling, a type of mode basis is proposed, when at the initial stage of solving Maxwell's equations, the vector quantities of the initial problem are represented as the sum of solenoidal and potential components. After proving the orthogonality of the eigenvector functions for the potential and solenoidal fields and assuming their completeness, the paper presents the solutions for waveguide excitation by nonstationary sources in the form of an expansion by eigenfunctions with unknown time coefficients.

KEYWORDS: mode basis method, solenoidal and potential field components, eigenfunction problem.

The article was received by the editors: February 20 2025

The article is recommended for printing: March 25 2025

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-02>

УДК 537.86

В.А. ПЛАХТІЙ, доктор філософії, доцент

e-mail: plakhtii@karazin.ua ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-0442-2716>

Р.Д. АХМЕДОВ, к. ф.-м. наук, старший науковий співробітник

e-mail: rolan.akhmedov@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-3819-1282>

О.М. ДУМІН, д. ф.-м. наук, провідний науковий співробітник

e-mail: dumin@karazin.ua ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-5067-9689>

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

МЕТОД МІГРАЦІЇ КІРХГОФА В ЗАДАЧІ ВИЯВЛЕННЯ ПРИХОВАНИХ МЕТАЛЕВИХ ОБ'ЄКТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ НАДШИРОКОСМУГОВОГО ГЕОРАДАРУ

Актуальність: Надширокосмугові (НШС) георадарні системи широко використовуються для виявлення прихованих об'єктів. Проте ефективна обробка даних, особливо у складних середовищах із неоднорідностями, залишається актуальною проблемою. Точність визначення глибини таких об'єктів значною мірою залежить від коректного застосування методів міграції та попередньої обробки сигналів.

Мета роботи: Розв'язання модельної задачі визначення глибини металевої труби в однорідному та неоднорідному середовищі з використанням методу міграції Кірхгофа для подальшого застосування підходу до реальних георадарних даних.

Матеріали та методи: Модель середовища включала однорідну область та область із траншеєю, що містить металеву трубу. Для моделювання поширення сигналу використовувався метод FDTD з гаусовим імпульсом тривалістю 0,6 нс. Було сформовано В-скани з 15 положень антени, а отримані дані піддавалися попередній обробці та міграції Кірхгофа. У випадку неоднорідного середовища враховувалась зміна діелектричної проникності.

Результати: Отримано чітке зображення труби після застосування методу міграції, яке співпадає з фактичною глибиною об'єкта як в однорідному, так і в неоднорідному середовищі. У разі ігнорування локальних змін діелектричної проникності спостерігається похибка, яка може досягати величини, близької до діаметра труби.

Висновки: Метод міграції Кірхгофа є ефективним для визначення глибини металевих об'єктів у модельному середовищі за умови правильної оцінки параметрів середовища. Необхідно враховувати неоднорідності, такі як траншеї, для зменшення похибок у розрахунках, що є критично важливим для практичних застосувань НШС георадарів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: підповерхневий об'єкт, георадар, надширокосмугові імпульсні електромагнітні хвилі, міграція Кірхгофа.

Як цитувати: Плахтій ВА, Ахмедов РД, Думін ОМ. Метод міграції Кірхгофа в задачі виявлення прихованих металевих об'єктів за допомогою надширокосмугового георадару. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2025;42:15-23. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-02>

In cites: Plakhtii VA, Akhmedov RD, Dumin OM. Kirchhoff migration method in the problem of detecting hidden metal objects using ultra-wideband GPR. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radiophysics and Electronics". 2025; 42:15-23. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-02>

ВСТУП

Підповерхневі георадари (GPR) сьогодні використовуються для широкого спектра задач, пов'язаних із вивченням внутрішньої структури ґрунтів та матеріалів без їхнього руйнування. Однією з найважливіших сфер застосування є будівництво, де георадар дозволяє до початку земляних робіт виявляти приховані інженерні комунікації — такі як труби [1], в тому числі не металеві [2], кабелі, включаючи оптоволоконні [3], чи дренажні системи. Це значно знижує ризик пошкодження інфраструктури та підвищує безпеку робіт. Також GPR активно використовують для обстеження бетонних конструкцій, зокрема для виявлення внутрішніх дефектів, армування або порожнин, що допомагає у визначенні технічного стану споруд [4].

У дорожньому та аеродромному будівництві георадари слугують інструментом контролю якості дорожнього полотна [5, 6]. Вони дозволяють визначати товщину шарів покриття, локалізувати зони розшліщення або приховані порожнини, які з часом можуть спричинити просідання чи тріщини на

поверхні. Також у зимових умовах GPR дає змогу стежити за процесами промерзання та відтавання ґрунтів, що особливо актуально для доріг у північних регіонах [7].

Нарешті, георадар активно застосовується у військових і гуманітарних операціях [8], зокрема для виявлення мін, боєприпасів або тунелів. Його здатність бачити крізь ґрунт без фізичного втручання робить його незамінним інструментом у місіях розмінування та в операціях цивільного захисту.

Проте обробка отриманих з них даних залишається складним і актуальним завданням. Багато підходів допомагають вирішити цю проблему. Наприклад, узагальнене перетворення Хафа [9], час прольоту [10], [11], методи міграції [12]–[14], штучні нейронні мережі [15]–[16], томографія [17] та багато інших. Існують різні методи міграції, які використовуються для обробки георадарних сканувань. Наприклад, гіперболічне (дифракційне) підсумовування, міграція Кірхгофа, фазова міграція, f – k міграція Столта та міграція на основі зворотної проекції [18]. Кожен з них має переваги, недоліки і деякі особливості застосування. У цій роботі ми використовували міграцію Кірхгофа [19]. Для коректної роботи методу міграції необхідно оцінити матеріальні параметри середовища. У роботі [20] автори навели приклад підходів, які допомагають це зробити. Оскільки енергія електромагнітного поля, відбитого від прихованого об'єкта, була меншою, ніж відбитого поля від поверхні та інших перешкод, необхідно ретельно виконувати попередню обробку отриманих сигналів. Ефект тремтіння часу під час запису сигналу підвищує рівень перешкод у результатуючому сигналі, що може призвести до поганого відновлення профілю прихованого об'єкта або навіть до помилкових спрацьовувань [21]. Автори пропонують дві специфікації, які необхідно враховувати при проектуванні антен і систем для реалістичної оцінки цього ефекту. Якість отриманих відображень від прихованих об'єктів безпосередньо залежить від рівня сторонніх перешкод. З цієї метою автори в [22] демонструють методи оцінки рівня впливу відбиттів від НШС антенної системи. Не менш важливо розробити антену, яка матиме мінімальний зв'язок між передавачем і приймачем, як показано в [23].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу нормального падіння плоскої електромагнітної хвилі на модель середовища. Часова залежність має вигляд гаусового імпульсу тривалістю 0,6 нс. Середовище розглядалося у двох випадках, спочатку однорідне середовище з діелектричною проникністю $\epsilon_2 = 9$ і провідністю $\sigma = 0,005$ См/м із заглибленою металевою трубкою на глибині Z (Рис. 1).

Другий випадок представляє модель середовища, яке містить траншею з діелектричною проникністю $\epsilon_3=12$ (Рис. 2). В обох випадках $\epsilon_1 = 1$. Траншея має глибину 0,6 м і ширину 0,6 м. Металева труба розташована в середині траншеї. Діаметр труби становить 0,05 м, а її глибина коливається від 0,175 м до 0,425 м з кроком 0,025 м. Загалом для отримання В-скану було використано 15 зондів. Відстань між кожним 0,1 м.

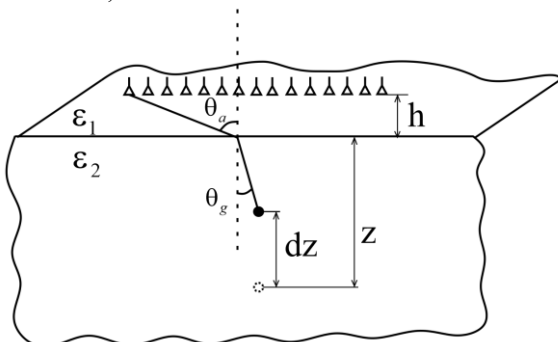


Рис. 1 Геометрія задачі з однорідним середовищем
Fig. 1 The geometry of the problem with a homogeneous medium

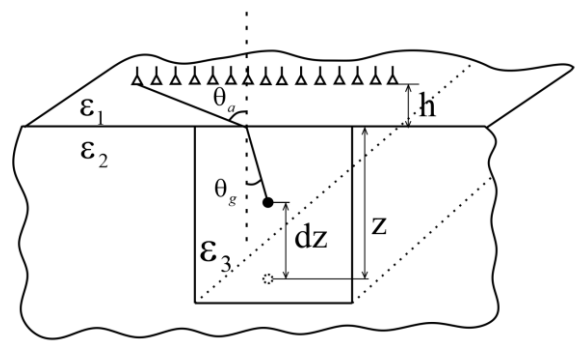


Рис. 2 Геометрія задачі з траншеєю
Fig. 2. The geometry of the problem with the trench

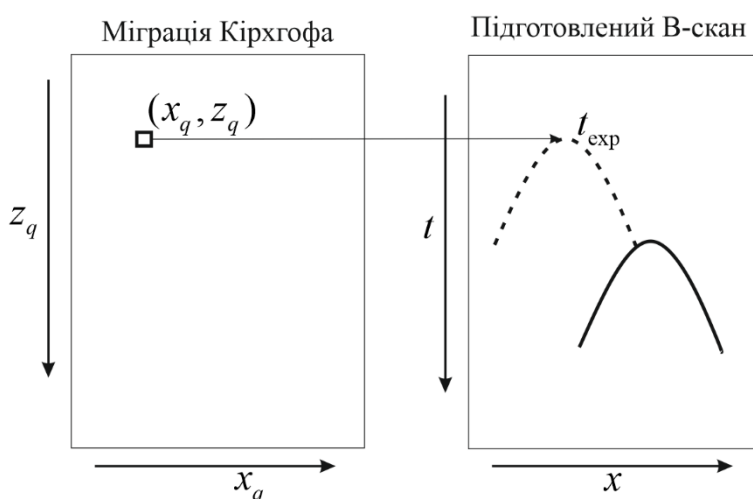


Рис. 3 Схематичне зображення процесу міграції Кірхгофа між простором зображення (x_q, z_q) та підготовленим В-сканом (x, t)

Fig. 3 Schematic illustration of the Kirchhoff migration process between the image space (x_q, z_q) and preprocessed B-scan (x, t)

У даній задачі для розрахунку часових залежностей електромагнітного поля використовувався метод FDTD. Для визначення глибини залягання металеві труби В-скани були попередньо оброблені та застосовано метод міграції Кірхгофа. Для розрахунку результуючого зображення були використані залежності (1) та (2).

$$I(x_q, z_q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{|\bar{r}|}} \frac{\partial^{1/2} t}{\partial t^{1/2}} E(x_a, t = t_{\text{exp}}) dx_a, \quad (1)$$

$$t_{\text{exp}} = \frac{2h}{c} \sec(\theta_a) + \frac{2z_q \sec(\theta_g) \sqrt{\varepsilon_2}}{c}, \quad (2)$$

де

θ - кут огляду цілі (θ_a, θ_g) ; θ_a - кут огляду в повітрі; θ_g - кут огляду в середовищі; $\bar{r}$ - відстань від антени до точки на гіперболічній кривій; x_a - положення сканування антени; t_{exp} - очікуваний час появи гіперболи.

θ_a та θ_g можна отримати виходячі із закону Снеліуса. Результуюче зображення міграції було розраховане за алгоритмом, який описано в [24].

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВОГО РОЗРАХУНКУ

Необроблений В-скан для моделі середовища (Рис. 1) представлений на Рис. 4. Компонента електричного поля нормована на максимальне значення електричного поля для кожного А-скану окремо. На Рис. 4 можна відзначити три важливі області: велика амплітуда падаючого Гаусового імпульсу, відбиття від межі двох середовищ з негативною амплітудою та низькоенергетичні відбиття від металеві трубки. Для кращого аналізу нам потрібно відокремити відображення від трубки. Ми віднімаємо в кожному А-скані середнє значення цієї амплітуди електричного поля протягом В-скану в кожному зворотному відліку. Слід зазначити, що такий підхід можливий лише за наявності гладкої поверхні, що не характерно для реальних даних. Інакше оброблене В-сканування матиме значні перешкоди.

Однак цього підходу достатньо для нашої модельної задачі. Результат попередньої обробки показаний на Рис. 5. Тут добре видно відбиття від трубки у вигляді параболи.

Після попередньої обробки необроблених даних ми можемо застосувати метод міграції Кірхгофа. Однак для коректної роботи методу необхідно правильно вказати всі параметри, а саме висоту приймальної системи, її крок у просторі i , головне, діелектричну проникність середовища.

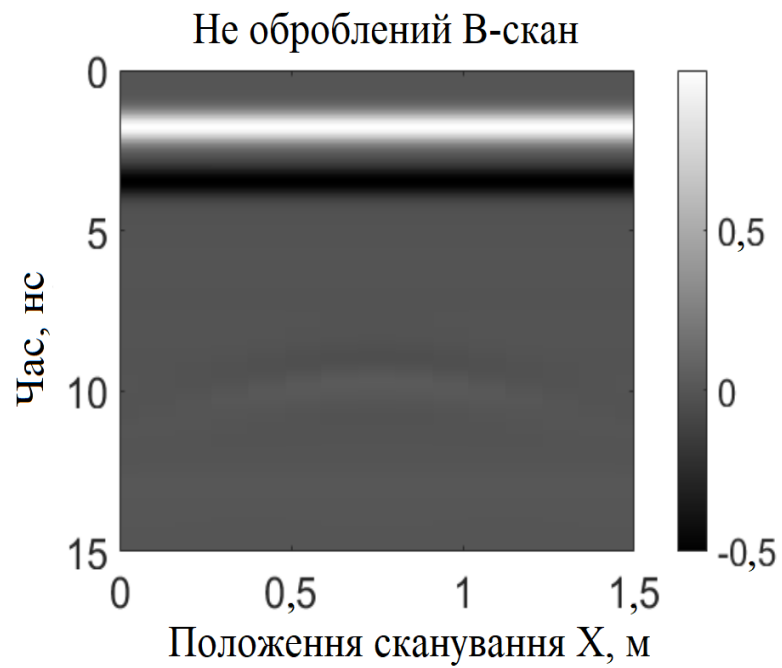
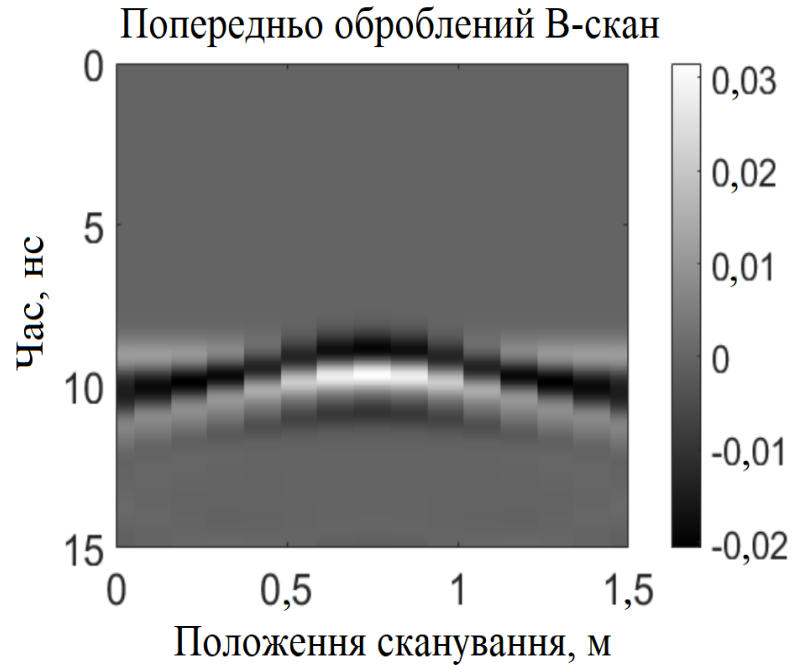


Рис. 4 Не оброблений В-скан для однорідного середовища

Fig. 4 Raw B-scan for a homogeneous medium

Рис. 5. Попередньо оброблений В-скан для однорідного середовища для глибини труби $z = 0,2$ мFig. 5 Pre-processed B-scan for a homogeneous medium for pipe depth $z = 0.2$ m

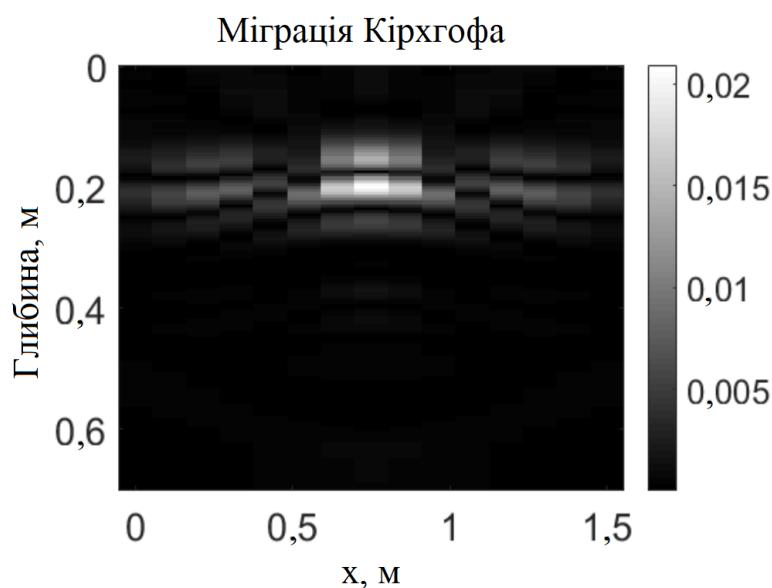


Рис. 6 Двовимірне зображення методу міграції Кірхгофа у часовій області для глибини труби $z = 0,2$ м
Fig. 6 2D time-domain Kirchhoff migration method image for pipe depth $z = 0.2$ m

Ці параметри будуть впливати на точність визначення глибини прихованих об'єктів. На Рис. 6 наведено результат міграції для випадку однорідного середовища $\epsilon_2 = 9$ і глибини металеві труби 0,2 м. Максимальне значення на отриманому зображенні точно відповідає координаті об'єкта.

У результаті розраховані глибини позначені на Рис. 7. Бачимо, що розраховані значення не відрізняються від фактичних. Це наслідок добре налаштованої моделі.

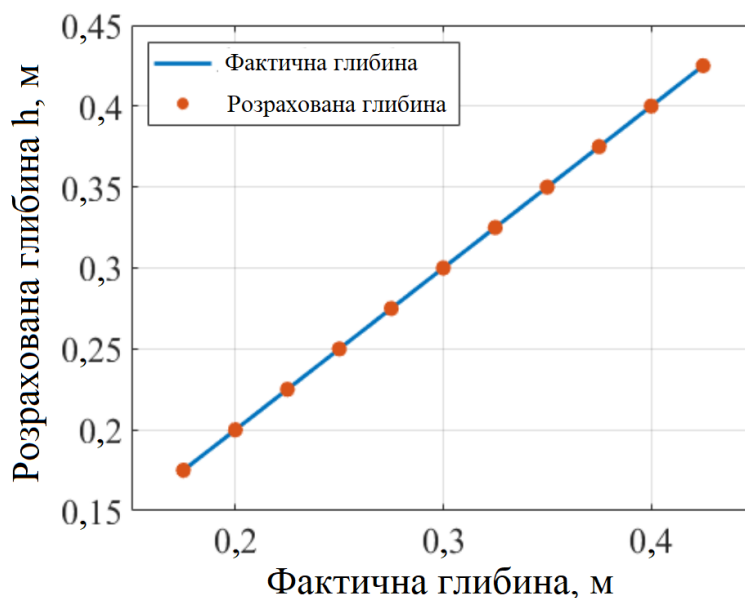


Рис. 7 Залежність розрахункової глибини труби від фактичної глибини
Fig. 7 Dependence of the calculated depth of the pipe on the actual depth

Цікавіше подивитися на роботу цього методу в разі наявної неоднорідності. Отже, ми побудували модель, яка показана на Рис. 2. Основна відмінність полягає в наявності траншеї у формі паралелепіпеда з трубою посередині. Наприклад, розраховано корпус з траншеєю $\epsilon_3 = 12$ глибиною і шириною 0,6 м і трубою на глибині 0,3 м. На необробленому В-скані (Рис. 8) особливих відмінностей від попередньої моделі (Рис. 4) на перший погляд не видно.

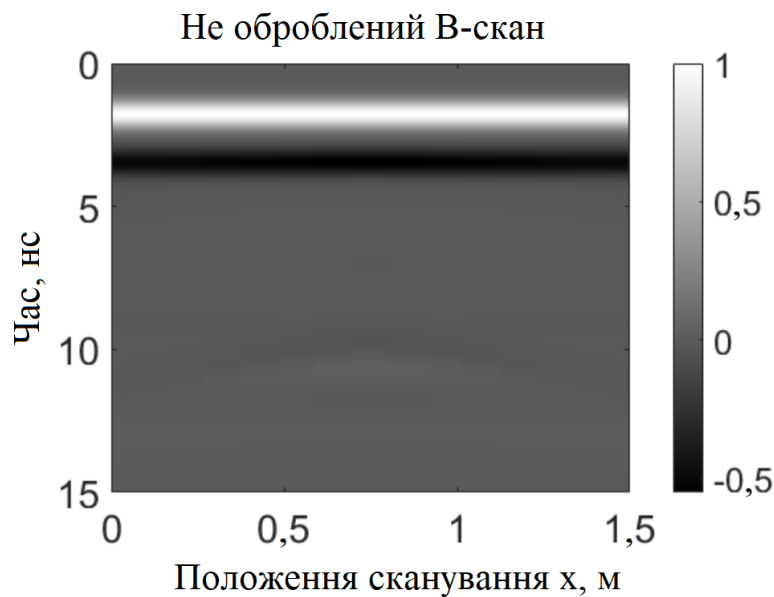


Рис. 8 Необроблений В-скан для середовища з траншеєю
Fig. 8 Raw B-scan for medium with trench

Однак після попередньої обробки (Рис. 9) ми можемо спостерігати значні флуктуації тривалістю від 2,5 нс до 5 нс. Цей проміжок часу відповідав у попередньому випадку відображенню від поверхні розділу двох середовищ.

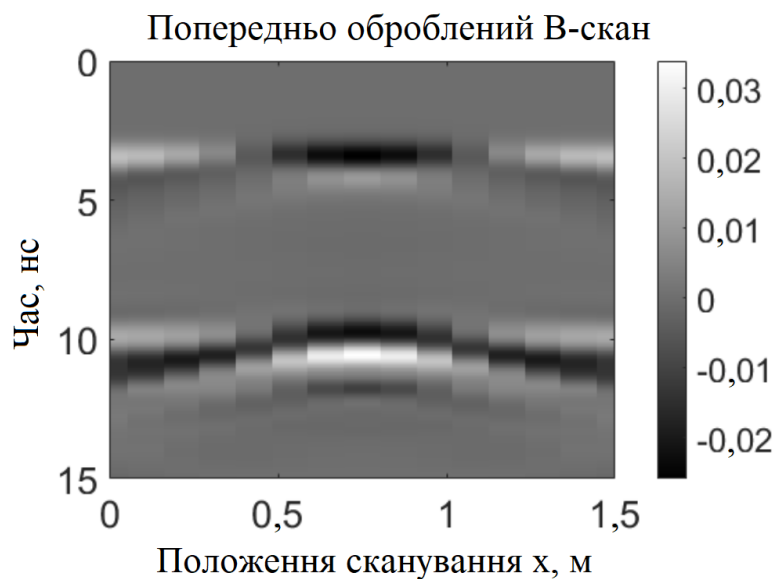
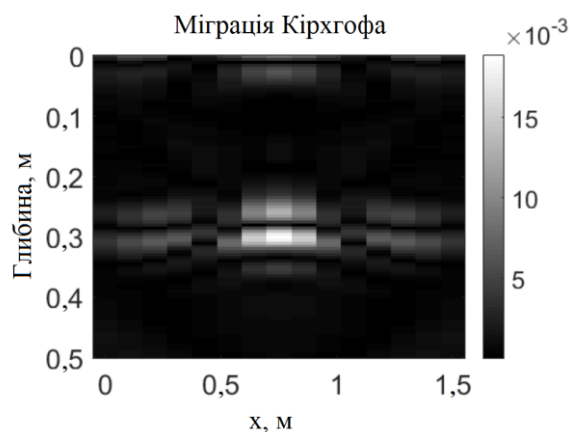


Рис. 9. Попередньо оброблений В-скан для середовища з траншеєю для глибини труби $z = 0,3$ м
Fig. 9. Pre-processed B-scan for medium with trench for pipe depth $z = 0.3$ m

Після застосування методу міграції Кірхгофа до цього В-скану ми отримали результат, представлений на Рис. 10. Важливо зазначити, що для розрахунку цього зображення параметр середовища в методі був обраний рівним діелектричній проникності траншеї $\epsilon = \epsilon_3 = 12$. Отже, максимальне значення на зображенні Рис. 10 відповідає фактичній глибині 0,3 м. Також можна відзначити наявність на зображенні Рис. 10 на невеликій глибині невеликого піку, який відноситься до траншеї. Однак завдяки відносно великій амплітуді та розміру гіперболи, утвореної трубою порівняно з траншеєю, їх можна розрізнити на отриманому зображенні. Наприклад, можна ввести поріг амплітуди, який буде вказувати на наявність прихованих металевих предметів і видалення помилкових спрацьовувань системи від наявних діелектричних неоднорідностей.

Рис. 10 Двовимірне зображення методу міграції Кірхгофа у часовій області для глибини труби $z = 0,3$ мFig. 10 2D time-domain Kirchhoff migration method image for pipe depth $z = 0.3$ m

Тепер буде корисно оцінити відхилення від фактичного значення глибини, якщо ми не беремо до уваги діелектричну проникність траншеї. Для цього на Рис. 11 показано розраховану залежність діелектричної проникності від глибини в методі міграції. Тут мова йде про випадок середовища $\epsilon_2 = 9$, $\epsilon_3 = 12$ і глибини металевої труби $0,3$ м. Синя крива відповідає розрахованим глибинам. Червоний ромб відповідає правильній глибині. Якби взяти значення середовища $\epsilon = 9$ без урахування траншеї, то похибка склала б $0,045$, майже діаметр труби.

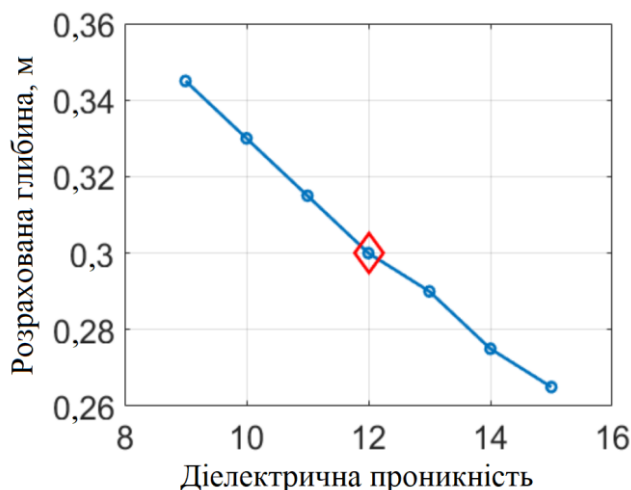


Рис. 11 Залежність розрахункової глибини для випадку з траншеєю від діелектричної проникності в розрахунку

Fig. 11 Dependence of the calculated depth for the case with a trench on the permittivity in the calculation

Дивлячись на ці результати, можна сказати, що точність визначення глибини буде прямо залежати від правильності оцінки діелектричної проникності середовища. Також зрозуміло, що відхилення від справжнього значення глибини буде тим більше, чим більше відношення реальної діелектричної проникності і закладеної в моделі.

ВИСНОВОК

У виконаній роботі було досліджено задачу виявлення та точного визначення глибини залягання металевої трубки в середовищі за допомогою методу FDTD і подальшого застосування міграції Кірхгофа до отриманих В-сканів. Було розглянуто два варіанти моделей: однорідне середовище з діелектричною проникністю $\epsilon_2 = 9$ та неоднорідне середовище, яке містить канавку з більшою діелектричною проникністю $\epsilon_3 = 12$. У першому випадку застосування методу міграції дало точне співпадіння розрахованої глибини з реальною, що свідчить про правильну реалізацію алгоритму та точне врахування параметрів середовища. У другому випадку наявність діелектричної неоднорідності вносить зміни в часові залежності сигналів, зокрема, спостерігаються флуктуації у часовому вікні від $2,5$ до 5 нс, які не дозволяють без додаткової обробки точно виділити сигнал від трубки.

Попередня обробка В-сканів, що включає видалення середньої амплітуди по кожному А-скану, дозволила ефективніше виділити корисні сигнали від металевих об'єктів. Після цього застосування методу міграції дало змогу точно локалізувати трубу навіть у складнішій конфігурації середовища. При цьому показано, що правильний вибір діелектричної проникності середовища є критично важливим для точного визначення глибини. Якщо ж не враховувати локальні зміни діелектричних властивостей, то похибка у визначенні глибини може сягати майже діаметра труби, що є неприпустимим у задачах високоточної георадарної діагностики.

Таким чином, результати роботи демонструють ефективність поєднання чисельного моделювання методом FDTD з подальшою обробкою сигналів методом міграції Кірхгофа для визначення глибини прихованих об'єктів. Водночас підкреслюється необхідність врахування неоднорідностей середовища для досягнення високої точності. Отримані результати можуть бути використані для покращення алгоритмів обробки георадарних даних, особливо у випадках складних геологічних умов.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

REFERENCES

1. Youn NH, Chen NC, Peter NL, Jr N. Automatic Pipe Detection Using Fully Polarimetric GPR. 2003, Las Vegas, NV July 27-30, 2003. 2003 Jan 1; <http://dx.doi.org/10.13031/2013.14036>
2. Li Y, Xu Y, Xiao X, Guan B, Ge L. Distorted Hyperbola Extraction of GPR Data using Edge Detection for Buried Non-Metallic Pipes. 2023 Jul 5;209:1–4. <https://doi.org/10.1109/IWAGPR57138.2023.10329239>
3. Utsi V. Detection of Fibre Optic cables using GPR. Proceedings of the 15th International Conference on Ground Penetrating Radar. 2014 Jun 1;465–8. <https://doi.org/10.1109/ICGPR.2014.6970467>
4. Liu S, Weng C, Jiao P, Wang F, Fu L, Meng X, et al. GPR signal analysis of post-tensioned prestressed concrete girder defects. Journal of Geophysics and Engineering. 2013 Jun 1;10(3):034005–5. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-2132/10/3/034005>
5. Batrakov DO, Antyufeyeva MS, Batrakova AG, Ruban VP. Ground Penetrating Radar Application for Positioning Cracks in Non-rigid Road Pavements. Lecture notes in networks and systems. 2024 Jan 1;453–64. https://www.doi.org/10.1007/978-981-99-7569-3_37
6. Batrakov DO, Mykola Kovalov, Batrakova AG. GPR Technologies for Finding and Positioning Subsurface Cracks in Road Surfaces. 2022 Nov 14;2:686–90 <https://www.doi.org/10.1109/UkrMW58013.2022.10037078>
7. Eyoab Zegeye Teshale, Holzbauer M, Dai S. Using Ground Penetrating Radar to Monitor Seasonal Moisture Fluctuations in Base Layers of Existing Roads. Transportation Research Record. 2022 Feb 10;2676(6):371–86. <http://dx.doi.org/10.1177/03611981221074360>
8. Bechtel T, Capineri L, Pochanin G, Crawford F, Falorni P, Ruban V. Demining 4.0: Principles of the latest industrial revolution applied to humanitarian demining. Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems 2021. 2021 Jun 11; <http://dx.doi.org/10.4133/sageep.33-159>
9. C. G. Windsor, L. Capineri, P. Falorni, "A Data Pair-Labeled Generalized Hough Transform for Radar Location of Buried Objects," in *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 11, no. 1, pp. 124-127, Jan. 2014, doi: 10.1109/LGRS.2013.2248119
10. G. Borgioli, L. Capineri, P. Falorni, S. Matucci, C. G. Windsor, "The Detection of Buried Pipes From Time-of-Flight Radar Data," in *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 46, no. 8, pp. 2254-2266, Aug. 2008, doi: 10.1109/TGRS.2008.917211.
11. G. P. Pochanin et al., "Measurement of Coordinates for a Cylindrical Target Using Times of Flight from a 1-Transmitter and 4-Receiver UWB Antenna System," in *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 58, no. 2, pp. 1363-1372, Feb. 2020, doi: 10.1109/TGRS.2019.2946064.
12. J. Gazdag and P. Sguazzero, "Migration of seismic data," in *Proceedings of the IEEE*, vol. 72, no. 10, pp. 1302-1315, Oct. 1984.
13. Caner Özdemir, Şevket Demirci, Enes Yiğit, and Betül Yilmaz, "A Review on Migration Methods in B-Scan Ground Penetrating Radar Imaging," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, Article ID 280738, 16 pages, 2014.
14. N. Smitha, D. R. Ullas Bharadwaj, S. Abilash, S. N. Sridhara and Vipula Singh, "Kirchhoff and F-K migration to focus ground penetrating radar images", Smitha et al. *Geo-Engineering* (2016) 7:4. DOI 10.1186/s40703-016-0019-6
15. O. Dumin, V. Plakhtii, O. Pryshchenko and G. Pochanin, "Comparison of ANN and Cross-Correlation Approaches for Ultra Short Pulse Subsurface Survey," 2020 IEEE 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET), 2020, pp. 1-6, doi: 10.1109/TCSET49122.2020.235459.
16. I. Persanov, O. Dumin, V. Plakhtii and D. Shyrokorad, "Subsurface Object Recognition in a Soil Using UWB Irradiation by Butterfly Antenna," 2019 XXIVth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), 2019, pp. 160-163, doi: 10.1109/DIPED.2019.8882577.

17. O. Dumin, V. Plakhtii, D. Shyrokod, O. Prishchenko and G. Pochanin, "UWB Subsurface Radiolocation for Object Location Classification by Artificial Neural Networks Based on Discrete Tomography Approach," 2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), 2019, pp. 182-187, doi: 10.1109/UKRCON.2019.8879827.
18. C. Özdemir, F. Demirci, E. YiLit, B. Yilmaz, "A Review on Migration Methods in B-Scan Ground Penetrating Radar Imaging", Mathematical Problems in Engineering Volume 2014, Article ID 280738, p. 16 <http://dx.doi.org/10.1155/2014/280738>
19. Vadym Plakhtii, Oleksandr Dumin, Oleksandr Pryshchenko. Kirchhoff Migration Method for Tube Detection with UWB GPR. 2021 Sep 8;181–4. Proceedings of International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory, DIPED Volume 2021-September, Pages 181 - 1848 September 2021 26th IEEE International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory, DIPED 2021Tbilisi8 September 2021through 10 September 2021Code 172372 <https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552330>
20. T. Bechtel, S. Truskavetsky, G. Pochanin, L. Capineri, A. Sherstyuk, K. Viatkin, T. Byndych, V. Ruban, L. Varyanitz-Roschupkina, O. Orlenko, P. Kholod, P. Falorni, A. Bulletti, L. Bossi, and F. Crawford, "Characterization of Electromagnetic Properties of In Situ Soils for the Design of Landmine Detection Sensors: Application in Donbass, Ukraine," Remote Sensing, vol. 11, no. 10, p. 1232, May 2019.
21. S. Wagner, B. M. Worthmann and A. -V. Pham, "Minimizing Timing Jitter's Impact on Ground-Penetrating Radar Array Coupling Signals," in IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 59, no. 6, pp. 4717-4724, June 2021, doi: 10.1109/TGRS.2020.3019976.
22. S. Wagner and A. Pham, "Structural Effect on Image Quality Degradation in Ground-Penetrating Radar Array," 2019 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI Radio Science Meeting, 2019, pp. 1631-1632, doi: 10.1109/APUSNCURSINRSM.2019.8889120.
23. G. P. Pochanin, A. A. Orlenko, P. V. Kholod, S. A. Masalov and I. Y. Pochanina, "UWB antenna with high isolation between transmitting and receiving modules," 2013 IX International Conference on Antenna Theory and Techniques, 2013, pp. 341-343, doi: 10.1109/ICATT.2013.6650771.
24. Sam Wagner, "2D Kirchhoff Migration for Ground Penetrating Radar Tutorial", YouTube, 3 July, 2020. [Video file]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=-Af9bwKNPfk&t=4347s&ab_channel=SamWagner

Стаття надійшла до редакції: 27 лютого 2025

Рекомендовано до друку: 8 квітня 2025

KIRCHHOFF MIGRATION METHOD IN THE PROBLEM OF DETECTING HIDDEN METAL OBJECTS USING ULTRA-WIDEBAND GPR

V.A. PLAKHTII, R.D. AKHMEDOV, O.M. DUMIN

V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

Background: Ultra-wideband (UWB) GPR systems are widely used to detect hidden objects. However, efficient data processing, especially in complex environments with heterogeneities, remains a pressing problem. The accuracy of determining the depth of such objects largely depends on the correct application of migration methods and signal preprocessing.

Objectives: To solve the model problem of determining the depth of a metal pipe in a homogeneous and heterogeneous environment using the Kirchhoff migration method for further application of the approach to real GPR data.

Materials and method: The environment model included a homogeneous region and a region with a trench containing a metal pipe. The FDTD method with a Gaussian pulse of 0.6 ns duration was used to model signal propagation. B-scan images were generated from 15 antenna positions, and the data were subjected to pre-processing and Kirchhoff migration. In the case of an inhomogeneous medium, the change in dielectric constant was taken into account.

Results: A clear image of the pipe was obtained after applying the migration method, which coincides with the actual depth of the object in both homogeneous and inhomogeneous media. In case of ignoring local changes in the dielectric constant, an error is observed that can reach a value close to the pipe diameter.

Conclusions: The Kirchhoff migration method is effective for determining the depth of metal objects in a model environment, provided that the parameters of the environment are correctly estimated

KEY WORDS: Subsurface object, georadar, ultra-wideband pulsed electromagnetic waves, Kirchhoff migration.

The article was received by the editors: February 27 2025

The article is recommended for printing: April 8 2025

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-03>

УДК 537.811, 537.621

Д. І. ГАВРИЛЕНКО, аспірант.

e-mail: m380669254126@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-6498-887X>

О. М. ДУМІН, д. ф.-м. наук, доц.

e-mail: dumin@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5067-9689>

С. Л. БЕРДНИК, д. ф.-м. наук, с. н. с.

e-mail: berdnik@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-0037-6935>

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

ЕНЕРГЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ НЕСТАЦІОНАРНОГО ХВИЛЬОВОГО ПРОЦЕСУ, ЗБУДЖЕНОГО ПРЯМОКУТНИМ ІМПУЛЬСОМ

Актуальність. В умовах активного розвитку надширокопasmових технологій імпульсні антени стають дедалі важливішим інструментом у задачах радіозв'язку, локації та дистанційного зондування. На відміну від гармонічних джерел, динаміка яких добре описується у частотній області, реальні імпульсні випромінювачі мають скінченну тривалість збудження, що суттєво змінює як характер поля, так і процес переносу енергії. Одним із фізично адекватних сценаріїв збудження є прямокутний імпульс, який дозволяє змодельовувати ситуацію, коли джерело активується на обмежений проміжок часу, а потім вимикається. Такий імпульс краще відображає реальні умови роботи імпульсних систем, ніж ідеалізоване стрибкоподібне збудження. Дослідження енергетичних характеристик у часовому просторі дозволяє не лише глибше зрозуміти механізми випромінювання, а й покращити проектування ефективних антен та джерел. Це має безпосередній вплив на підвищення дальності, завадостійкості та точності у системах зв'язку і спостереження, а також зменшення енергетичних втрат і опромінення у ближній зоні. Аналіз перетворення імпульсної енергії на різних стадіях збудження, від утворення хвильових фронтів до їх поширення, є ключем до створення високоточних моделей електромагнітного поля.

Мета роботи. Отримати аналітичні та числові залежності, які описують енергетичні характеристики електромагнітного поля, збудженого прямокутним імпульсом. Зокрема, вивести вирази для потоку енергії через поперечну площину на довільній відстані від апертури, а також визначити повну енергію хвилі на різних стадіях її просторово-часової еволюції. У випадках, де аналітичне розв'язання неможливе, застосувати числові методи. Надати фізичну інтерпретацію отриманим результатам, оцінити вплив тривалості імпульсу на поведінку хвилі.

Матеріали та методи. Задача формулюється як нестационарна тривимірна проблема поширення H -хвилі, збудженої прямокутним імпульсом з круглої апертури у вільний напівпростір. Загальні розв'язки для полів будуються на основі еволюційного підходу. Вони визначаються через еволюційні коефіцієнти, які є розв'язком неоднорідного рівняння Клейна-Гордона, що знаходиться методом функції Рімана. Для визначення потоку енергії використовується похідна компонента вектора Пойнтінга. Числові розрахунки виконуються за допомогою методу Гауса-Кронрода.

Результати. Отримано точні аналітичні вирази для потоку енергії та повної енергії на апертурі з прямокутним збудженням. Для довільних площин побудовано узагальнені вирази, що враховують часову та просторову еволюцію поля. Проведено порівняння з наближенням дальньої зони та продемонстровано, що воно може завищувати енергетичні оцінки у ближній зоні. Побудовано тривимірну картину просторово-часової динаміки, яка наочно демонструє формування хвильових фронтів і їх взаємодію. Досліджено процес накопичення енергії у ближній зоні та прояв ефекту «електромагнітного снаряду», коли збудження існує у вигляді компактного енергетичного імпульсу.

Висновки. У роботі було вперше побудовано аналітичні та числові моделі для прямокутного збудження H -хвилі апертурного випромінювача у часовому просторі. Показано, що у випадку скінченного імпульсу поле має більш складну часову динаміку, ніж при стрибкоподібному збудженні. Встановлено, що потік енергії поблизу апертури формується як результат взаємодії статичних і хвильових компонент, і саме через це наближення дальньої зони є неточним при малих значеннях подовжньої координати. Повільне спадання енергії з відстанню вказує на те, що значна її частина зосереджена у компактному фронті, що зберігає свою структуру під час поширення. Проведений аналіз дозволяє уточнити умови застосування наближених моделей, а також дає основу для подальших досліджень у напрямку оптимізації імпульсних антен та систем випромінювання.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: метод еволюційних рівнянь, прямокутний імпульс, солітоноподібний розв'язок, енергетичне перетворення

Як цитувати: Гавриленко ДІ, Думін ОМ, Бердник СЛ. Енергетичні характеристики нестационарного хвильового процесу, збудженого прямокутним імпульсом. Вісник Харківського національного

© Гавриленко Д.І., Думін О.М., Бердник С.Л., 2025.

Open access. This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2025;42,24-37. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-03>

In cites: Havrylenko DI, Dumin OM, Berdnyk SL. Energy analysis of a transient wave process excited by a rectangular pulse. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series "Radiophysics and Electronics". 2025;42, 24-37 (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-03>

ВСТУП

Інтерес до нестационарних електромагнітних хвиль зумовлений підвищеними вимогами до сучасних радіолокаційних пристроїв, систем зв'язку, надширококутних радарів [1]. Точність визначення координат об'єктів за допомогою відеоімпульсів суттєво зростає. У деяких випадках стає можливим навіть відновлення їхньої форми.

Розвиваються нові перспективні напрями, пов'язані з використанням відомих властивостей електромагнітних полів. Одним із таких напрямів є дослідження солітоноподібних розв'язків хвильового рівняння, які описують передачу електромагнітної енергії на великі відстані з її повільнішим загасанням, ніж обернено-квадратична. Перший такий розв'язок, відомий як «фокусні хвильові моди» (focus wave modes), було представлено в роботі [2]. Подібно до розв'язку для плоскої хвилі, він описує електромагнітне поле з нескінченною енергією та повільно затухаючою амплітудою на відстані. Згодом були отримані інші типи солітоноподібних розв'язків, зокрема хвилі зі скінченною енергією [3, 4]. Найповніший огляд і аналіз таких розв'язків подано в роботах [5, 6]. Деякі теоретичні результати були експериментально підтверджені шляхом вимірювання ультразвукових хвиль, що випромінювались ґраткою [7]. Розв'язки, які описують бездисперсійні хвильові пакети, також були отримані для рівнянь Клейна-Гордона та Дірака [8].

Більшість відомих солітоноподібних розв'язків містять нероздільні просторово-часові комплексні змінні. «Електромагнітний снаряд» є одним із винятків [9]. Воно має місце у прожекторній зоні випромінювача під час опромінення джерела, збудженого нестационарним сигналом. Це явище полягає в тому, що енергія електромагнітного поля загасає повільніше, ніж обернено пропорційно до квадрата відстані [10], завдяки її концентрації в одному напрямку. Для експериментального моделювання цього ефекту використовували діелектричні лінзи, опромінені ТЕМ-хвилею з хвилеводу [11]. Математичний опис явища було отримано незалежно в різних дослідженнях як методами у частотному просторі [12], так і за допомогою еволюційних рівнянь у часовому просторі [13]. Також цю задачу розв'язували числовими методами [14].

Останнім часом з'явилися нові підходи до побудови солітоноподібних розв'язків рівнянь Максвелла, зокрема в контексті нелінійної взаємодії з середовищем або іншими полями. Було показано, що у випадку збудження у середовищах з когерентною атомною структурою (наприклад, у моделях на основі скорочених рівнянь Максвелла-Блоха) існують нові типи солітонних і періодичних хвильових розв'язків, зокрема хвилі взаємодії солітонів із кноідальними хвилями [15]. Крім того, нещодавно запропоновано модель, де рівняння Максвелла застосовують до нелінійного скалярного поля, що описується рівнянням Клейна-Гордона. Це дозволяє сформулювати стійкі локалізовані розв'язки типу «гіломорфних солітонів», які проявляють себе як заряджені частинки на великих часових масштабах [16]. Ще одне сучасне дослідження підтверджує асимптотичну стійкість солітонів у двовимірних рівняннях Максвелла-Лоренца, демонструючи, що на великих часових масштабах розв'язок розкладається на солітон і дисперсійну компоненту [17]. Крім аналітичних методів, з'являються також гібридні підходи, а саме поєднання перетворення Дарбу і штучних нейронних мереж для виявлення і валідації солітонних розв'язків у зменшеній моделі Максвелла-Блоха [18].

Знаючи аналітичний розв'язок опромінення імпульсною електромагнітною хвилею зі стрибкоподібною часовою залежністю [13], можна знайти розв'язок для сигналу у формі прямокутного імпульсу шляхом застосування принципу суперпозиції. У цій роботі отримано та проаналізовано енергетичні характеристики такого типу хвиль.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Досліджується нестационарний процес збудження електромагнітної Н-хвилі під дією прямокутного імпульсу. На відміну від попередньої роботи [19], де аналіз обмежувався стрибкоподібним збудженням, тут розглядається більш складна й фізично наближена модель, у якій джерело активується та деактивується у фіксовані моменти часу.

Випромінювач задається круглою апертурою із заданим струмом. Розв'язання проводиться у циліндричній системі координат. Простір навколо випромінювача вважається вільним. В межах цієї роботи розгляд обмежується поздовжньою складовою вектора Пойнтінга, яка характеризує густину потоку електромагнітної енергії вздовж напрямку поширення хвилі:

$$\vec{z}_0 S_z(\rho, \varphi, z, t) = [\vec{E}(\rho, \varphi, z, t) \times \vec{H}(\rho, \varphi, z, t)]. \quad (1)$$

Збуджуюча функція прямокутного імпульсу записується у вигляді

$$f(\tau) = H(\tau) - H(\tau - t_0), \quad (2)$$

де t_0 – тривалість імпульсу, а $H(\tau)$ – функція Хевісайда. Відповідно до принципу суперпозиції, результуюче поле можна подати як різницю двох відгуків на стрибкоподібне збудження:

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z, t) = \vec{E}_0(\rho, \varphi, z, t)H(t) - \vec{E}_0(\rho, \varphi, z, t - t_0)H(t - t_0), \quad (3)$$

де $\vec{E}_0$ – поперечна компонента електричного поля, відповідь системи на миттєвий імпульс (одиничне збудження) у момент часу $t = 0$. Перший доданок описує ввімкнення джерела у момент часу $t = 0$, другий – вимкнення в момент часу $t = t_0$. Таким чином, поле існує впродовж інтервалу $0 \leq t \leq t_0$ і після нього, протягом перехідного процесу, тривалість якого залежить від точки спостереження. Аналогічна форма справедлива і для інших складових поля.

Поперечні компоненти електричного та магнітного полів визначаються в рамках методу еволюційних рівнянь [13, 20]:

$$\begin{cases} \vec{E}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi (V_m^h(z, t, \chi)H(t) - V_m^h(z, t - t_0, \chi)H(t - t_0)) [\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0]; \\ \vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' (I_{m'}^h(z, t, \chi')H(t) - I_{m'}^h(z, t - t_0, \chi')H(t - t_0)) \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi'). \end{cases} \quad (4)$$

Вирази (4) отримано шляхом підстановки полів $\vec{E}_0$ і $\vec{H}_0$ у формулу (3) і відповідну до неї формулу для магнітного поля, з урахуванням їх модового представлення. Під функціями V_m^h , $I_{m'}^h$ розуміються еволюційні коефіцієнти, які витікають з розв'язання неоднорідного рівняння Клейна-Гордона методом функції Рімана. Вони описують часово-просторову динаміку поперечних складових поля, збудженого одиничним імпульсом. Вирази для цих коефіцієнтів мають вигляд [13, 20–22]:

$$\begin{cases} V_m^h(z, t - t_0, \chi) = iA_0 R \frac{\sqrt{\mu_0} J_1(\chi R)}{4 \sqrt{\chi}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) J_0(\chi \sqrt{c^2(t - t_0)^2 - z^2}); \\ I_{m'}^h(z, t - t_0, \chi') = iA_0 R \frac{\sqrt{\mu_0} J_1(\chi' R)}{4 \sqrt{\chi'}} (\delta_{-m',1} + \delta_{-m',-1}) \cdot \\ \cdot \left(J_0(\chi' \sqrt{c^2(t - t_0)^2 - z^2}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c(t - t_0) - z}{c(t - t_0) + z} \right)^k J_{2k}(\chi' \sqrt{c^2(t - t_0)^2 - z^2}) \right). \end{cases} \quad (5)$$

Величини, що входять до виразів (4)-(5) мають таку інтерпретацію: $\psi_m(\rho, \varphi, \chi)$ – базисна функція, яка є розв'язком рівняння Гельмгольца в поперечній площині (оператор ∇ також діє лише в цій площині); χ, χ' – спектральні параметри, за якими виконується інтегрування; m, m' – кутові моди, за якими здійснюється сумування; J_n – функція Бесселя n -го порядку; t_0 – параметр зсуву часу. Зазначимо, що різні позначення спектральних параметрів та кутових мод в еволюційних коефіцієнтах (5) введено для поліпшення подальшого розрахунку і аналізу, і на фізичний сенс впливу не матимуть.

У межах цього дослідження проводиться аналіз енергетичних характеристик хвилі, збудженої прямокутним імпульсом. Основна увага приділяється потоку енергії через нескінченну площину, перпендикулярну до осі поширення хвилі, а також оцінці повної енергії, перенесеної в просторі. Частину проміжних результатів за цією темою вже було оприлюднено в роботі [23]. У даній статті здійснюється розширене та деталізоване дослідження впливу скінченності імпульсу на перенесення енергії у вільному просторі.

ВИВЕДЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

Підставимо вирази для поперечних складових електричного і магнітного полів (4) у поздовжню компоненту вектора Пойнтінга (1):

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 S_z(\rho, \varphi, z, t) = & \left[\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi (V_m^h(z, t, \chi) H(t) - V_m^h(z, t - t_0, \chi) H(t - t_0)) [\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0] \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{\mu_0} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' (I_{m'}^h(z, t, \chi') H(t) - I_{m'}^h(z, t - t_0, \chi') H(t - t_0)) \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi') \right] \end{aligned}$$

Електричну і магнітну сталі винесемо з-під векторного добутку та виразимо через квадрат швидкості світла. Винесемо оператори сумування та інтегрування з-під цього добутку, зберігши порядок їх виконання. Залишається векторний добуток, що містить градієнти базисних функцій та орт поздовжньої осі, який зводиться до скалярного добутку градієнтів базисних функцій:

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 S_z(\rho, \varphi, z, t) = & c^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' (V_m^h(z, t, \chi) H(t) - V_m^h(z, t - t_0, \chi) H(t - t_0)) \\ & (I_{m'}^h(z, t, \chi') H(t) - I_{m'}^h(z, t - t_0, \chi') H(t - t_0)) \vec{z}_0 (\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi')) \end{aligned} \quad (6)$$

Запишемо визначення потоку енергії через поперечний переріз:

$$P_z(z, t) = \int_S S_z(\rho, \varphi, z, t) ds, \quad (7)$$

де $ds = \rho d\rho d\varphi$ – елемент площі у циліндричних координатах, де полярний радіус змінюється від нуля до нескінченності, а кут – в межах одного оберту кола. Орієнтація зовнішньої нормалі до площини s збігається з вектором $\vec{z}_0$, що визначає поздовжній напрямок хвильового процесу. Підставимо вираз (6) у (7) та скористаємося ортогональністю базисних функцій:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho (\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi')) = 2\pi (-1)^m \delta_{m, -m'} \delta(\chi - \chi').$$

Це дозволяє аналітично виконати інтегрування за спектральним параметром χ' і звести суму за модами до одного доданку з $m' = -m$. Таким чином, отримуємо вираз для повного потоку енергії, перенесеної через нескінченну поперечну площину, якщо збуджуючий струм має прямокутну форму:

$$\begin{aligned} P_z(z, t) = & 2\pi c^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} d\chi (V_m^h(z, t, \chi) H(t) - V_m^h(z, t - t_0, \chi) H(t - t_0)) \\ & (I_{-m}^h(z, t, \chi) H(t) - I_{-m}^h(z, t - t_0, \chi) H(t - t_0)) \end{aligned} \quad (8)$$

Зазначимо, що якщо вектор Пойнтінга (1) є результатом векторного добутку полів, які є суперпозицією збуджень у різні моменти часу, то вираз (8) уже подає потік енергії через відповідні еволюційні коефіцієнти, що описують реакції системи на імпульсні джерела в моменти $t = 0$ та $t = t_0$.

Підставимо відомі аналітичні вирази для еволюційних коефіцієнтів (5) у рівність (8). Через символи Кронекера, що в них наявні, вдається спростити нескінченну суму по модам, записавши, що

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) (\delta_{-m,1} + \delta_{-m,-1}) = -2.$$

Після винесення сталих за знак інтегралу та незначних спрощень отримуємо остаточний вираз для потоку енергії

$$\begin{aligned}
P_z(z, t) = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^\infty d\chi \frac{1}{\chi} J_1(\chi R) J_1(\chi R) & \left(J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) H(t) - J_0(\chi \sqrt{c^2 (t - t_0)^2 - z^2}) H(t - t_0) \right) \\
& \left(\left(J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) + 2 \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right)^k J_{2k}(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \right) H(t) - \right. \\
& \left. - \left(J_0(\chi \sqrt{c^2 (t - t_0)^2 - z^2}) + 2 \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{c(t - t_0) - z}{c(t - t_0) + z} \right)^k J_{2k}(\chi \sqrt{c^2 (t - t_0)^2 - z^2}) \right) H(t - t_0) \right), \quad (9)
\end{aligned}$$

який далі аналізуватимемо.

Для кращого розуміння фізичної картини явищ розглянемо випадки поведінки енергетичних параметрів поблизу джерела та в дальній зоні. Лише після цього перейдемо до загального аналізу потоку (9).

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Випадок 1. $z = 0$

Тут вдається отримати точний аналітичний розв'язок, а, отже, і зрозуміти можливу фізику процесів. Вираз для потоку енергії (9) на площині апертури значно спрощується, оскільки зникає залежність аргументів функцій Бесселя від просторової координати. Крім того, скористаємося тотожністю [24]

$$J_0(\chi c(t - t_0)) + 2 \sum_{k=1}^\infty J_{2k}(\chi c(t - t_0)) = 1,$$

яка істотно спрощує другу дужку в (9). Прийдемо до такого виразу:

$$\begin{aligned}
P_z(z, t)|_{z=0} = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^\infty d\chi \frac{1}{\chi} J_1(\chi R) J_1(\chi R) \\
\left(J_0(\chi c t) H(t) - J_0(\chi c(t - t_0)) H(t - t_0) \right) (H(t) - H(t - t_0)).
\end{aligned}$$

Далі скористаємося довідковим результатом [25] для інтегралу, попередньо уточнивши його запис у зв'язку з виявленою помилкою у джерелі, пов'язаною з відсутністю дужки перед арккосинусом:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty d\chi \frac{1}{\chi} J_1(\chi R) J_1(\chi R) J_0(\chi c(t - t_0)) = \\
& = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{c(t - t_0)}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2(t - t_0)^2} \right), & 0 < c(t - t_0) < 2R; \\ 0, & 0 < 2R < c(t - t_0). \end{cases}
\end{aligned}$$

Після підстановки й обчислення отримаємо аналітичний вираз потоку енергії у площині апертури:

$$\begin{aligned}
P_z(z, t)|_{z=0} = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} & \left(\left\{ \frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{ct}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} \right), \quad 0 < ct < 2R; \right. \right. \\
& \left. \left. 0, \quad 0 < 2R < ct. \right\} H(t) - \right. \\
& \left. - \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{c(t - t_0)}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2(t - t_0)^2} \right), \quad ct_0 < ct < 2R + ct_0; \right. \right. \\
& \left. \left. 0, \quad ct_0 < 2R + ct_0 < ct. \right\} H(t - t_0) \right) (H(t) - H(t - t_0)). \quad (10)
\end{aligned}$$

Перший доданок у виразі (10) описує потік енергії, зумовлений стрибкоподібним збудженням у момент часу $t = 0$, який було досліджено в попередній роботі [19]. Другий доданок – це та сама відповідь, але запізнена на час t_0 . Таким чином, підсумковий результат відповідає відніманню двох стрибкоподібних збуджень, що і формує ефект прямокутного імпульсу. На Рис. 1 наведено побудовані графіки (10) для фіксованих значень тривалості імпульсу ct_0 . Як видно, з його збільшенням ширина імпульсу у потоці

енергії також зростає. У разі малих значень тривалості ($ct_0 < 2R$) відбувається різке обривання потоку в момент $ct = ct_0$, що пояснюється тим, що фронт хвилі ще перебуває в зоні дії джерела, і вимкнення імпульсу миттєво позначається на динаміці. Натомість для випадку $ct_0 \geq 2R$ спостерігається поступовий спад потоку за однаковим законом, подібний до випадку стрибкоподібного збудження. У цьому режимі вимкнення джерела вже не може «наздогнати» хвилю, яка відійшла на достатню відстань. Таким чином, у межах апертури формується усталений потік енергії, що вказує на завершення дії збудження.

У подальших розрахунках, якщо не зазначено інше, використовуються такі параметри: амплітуда поверхневого струму на апертурі $A_0 = 1$ А/м, її радіус $R = 1$ м.

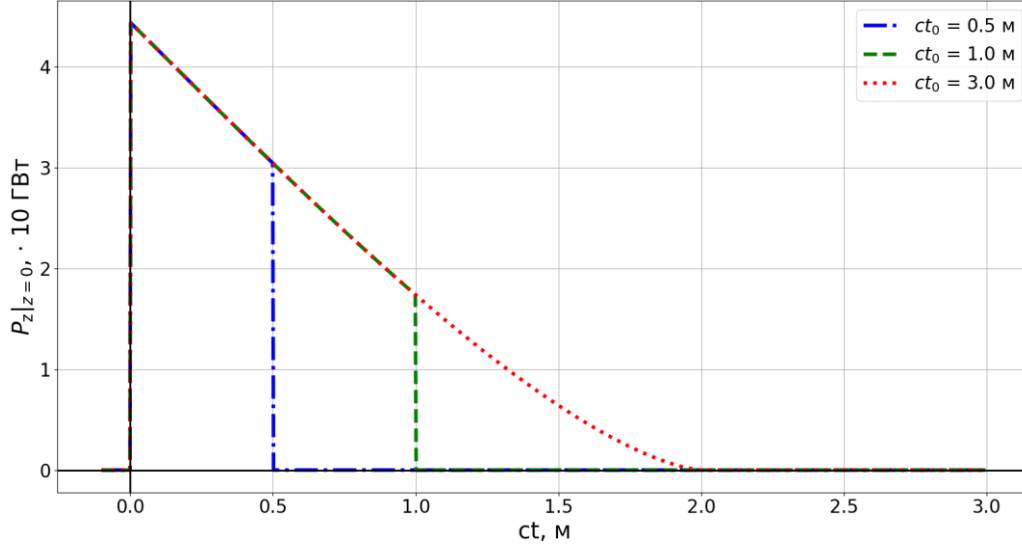


Рис. 1. Часова залежність потоку енергії хвилі, збудженої прямокутним імпульсом, для різних значень тривалості збудження ct_0

Fig. 1. Time dependence of the energy flux of a wave excited by a rectangular pulse for different values of excitation duration ct_0

Розглянемо повну енергію, що випромінюється з апертури. Відповідно до класичного визначення

$$W_z(z) = \int_0^{\infty} P_z(z, t) dt. \quad (11)$$

Підставимо сюди вираз (10). Завдяки наявності в ньому функцій Хевісайда, верхню межу можна обмежити значенням t_0 . Отже, маємо:

$$W_z(z)|_{z=0} = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^{t_0} dt \left(\left\{ \frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{ct}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} \right), \quad \begin{matrix} 0 < ct < 2R; \\ 0, & 0 < 2R < ct. \end{matrix} \right\} - \right. \\ \left. - \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{c(t-t_0)}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2(t-t_0)^2} \right), \quad \begin{matrix} ct_0 < ct < 2R + ct_0; \\ 0, & ct_0 < 2R + ct_0 < ct. \end{matrix} \right\} \right)$$

Виявляється, що залежно від співвідношення між тривалістю імпульсу та геометричними розмірами апертури існує дві якісно різні ситуації. Якщо $t_0 < 2R/c$, то фронт хвилі ще не вийшов за межі випромінювача, і накопичення енергії триває до моменту вимкнення джерела (тобто верхня межа інтегрування залишається рівною t_0). Якщо ж $t_0 \geq 2R/c$, то хвиля вже повністю сформувалася й залишила апертуру. У цьому випадку подальше збудження не впливає на потік через випромінювальну площину, і енергія досягає сталого значення вже при $t = 2R/c$. У кожному з випадків другий доданок у виразі для енергії в момент $t = t_0$ не лежить у межах інтервалу інтегрування, і тому дорівнює нулю. Подамо ці міркування математично:

$$W_z(z)|_{z=0} = c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \begin{cases} \int_0^{t_0} dt \left(\arccos \frac{ct}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} \right), & t_0 < \frac{2R}{c}; \\ \int_0^{2R/c} dt \left(\arccos \frac{ct}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} \right), & t_0 \geq \frac{2R}{c}. \end{cases}$$

Ці інтеграли можна обчислити аналітично. Перший доданок інтегрується частинами, а другий – за допомогою підстановки з внесенням множника під знак диференціала. Результати мають вигляд:

$$\int_0^{t'} dt \arccos \frac{ct}{2R} = \frac{2R}{c} \left(\frac{ct'}{2R} \arccos \frac{ct'}{2R} + 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{ct'}{2R} \right)^2} \right);$$

$$\int_0^{t'} dt \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t'^2} = \frac{2R}{3c} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{ct'}{2R} \right)^2 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{ct'}{2R} \right)^2} \right).$$

Кінцевий вираз для випроміненої енергії:

$$W_z(z)|_{z=0} = \begin{cases} c A_0^2 R^3 \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{ct_0}{2R} \arccos \frac{ct_0}{2R} - \sqrt{1 - \left(\frac{ct_0}{2R} \right)^2} + \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{ct_0}{2R} \right)^2 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{ct_0}{2R} \right)^2} \right), & ct_0 < 2R; \\ c A_0^2 R^3 \frac{\mu_0}{3}, & ct_0 \geq 2R. \end{cases} \quad (12)$$

На Рис. 2 зображено залежність випроміненої енергії (12) від тривалості прямокутного імпульсу ct_0 . При малих його значеннях, енергія поступово зростає, оскільки хвиля ще не повністю вийшла з апертури. У момент, коли $ct_0 = 2R$, хвиля повністю сформована і вийшла за межі джерела. Після цього енергія досягає насичення і зберігається на постійному рівні, який дорівнює енергії стрибкоподібного збудження. Цей результат демонструє зв'язок між тривалістю збудження та ступенем енергетичної насиченості поля у межах апертури. Відзначимо, що функція (12) є неперервною і перехід до усталеного режиму відбувається без розривів.

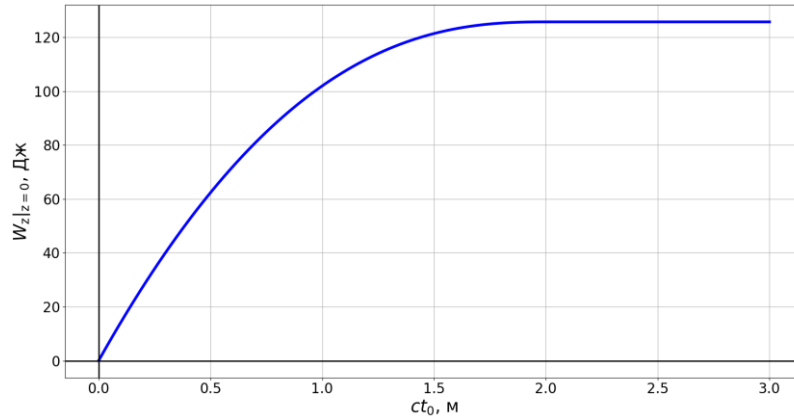


Рис. 2. Залежність енергії, накопиченої на апертурі, від тривалості прямокутного імпульсу
Fig. 2. Dependence of the energy accumulated at the aperture on the duration of the rectangular pulse

Випадок 2. Наближення дальньої зони

Припустимо, що точка спостереження знаходиться на значній відстані від апертури. Тоді можна припустити, що основний внесок у поле, а отже й у потік енергії, дають лише функції Бесселя нульового порядку, в той час як вплив рядів по парних циліндричних функціях є незначним:

$$J_0 \left(\chi \sqrt{c^2(t-t_0)^2 - z^2} \right) \gg 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c(t-t_0) - z}{c(t-t_0) + z} \right)^k J_{2k} \left(\chi \sqrt{c^2(t-t_0)^2 - z^2} \right).$$

Це наближення дозволяє спростити повний вираз (9) до більш компактно форми:

$$P_z^{A.3.}(z, t) = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^{\infty} d\chi \frac{1}{\chi} J_1(\chi R) J_1(\chi R) \left(J_0 \left(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) H(t) - J_0 \left(\chi \sqrt{c^2(t-t_0)^2 - z^2} \right) H(t-t_0) \right)^2. \quad (13)$$

Аналітичне інтегрування результату (13) не є можливим через складну структуру підінтегрального виразу. Тому подальший аналіз виконується числовим методом Гауса-Кронрода. На Рис. 3 наведено два сімейства графіків потоку енергії як функції часової затримки $ct - z$ для фіксованих значень відстані z дальньої зони. Розглядаються два режими: імпульс із тривалістю $ct_0 < 2R$ (лівий графік) та $ct_0 \geq 2R$ (правий графік). Незалежно від випадку, спостерігається однакова поведінка кривих. На початку усі вони демонструють поступове загасання. У момент, коли $ct - z = ct_0$, відбувається різкий стрибок амплітуди потоку, після якого він знову входить у фазу загасання, немов би хвиля «відновлюється». Такий ефект можна інтерпретувати накладанням другого хвильового фронту, зумовленого вимкненням джерела, на перший – фронт увімкнення. Це своєрідне накладання, яке тимчасово підсилює амплітуду в певній точці простору.

На лівому графіку видно, що кінці всіх трьох кривих прямують до однакових значень. Аналогічна поведінка характерна і правому, хоча там сплеск виникає на більш віддаленому фронті. При збільшенні ct_0 сплеск віддаляється у часі, і характер функції до нього все більше нагадує випадок стрибкоподібного збудження. Проте повного переходу до нього не відбувається навіть при значних значеннях ct_0 . Це свідчить про те, що формула (13), хоч і враховує часові зсуви, залишається наближеним представленням хвильового процесу.

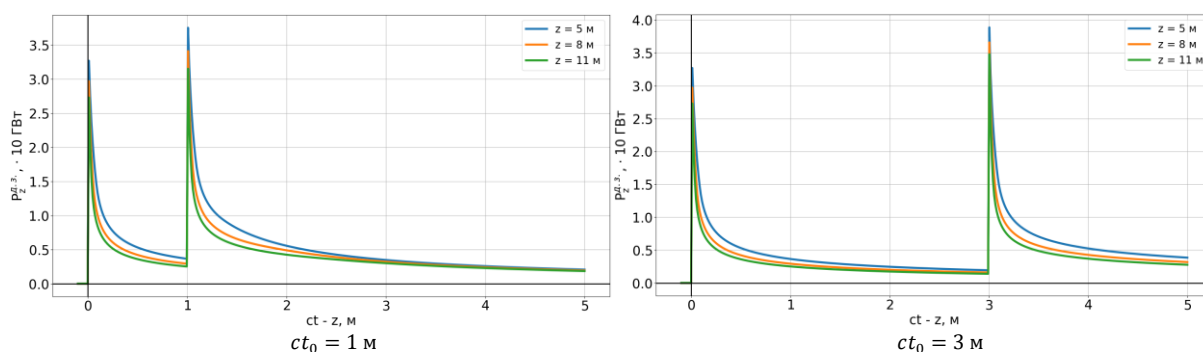


Рис. 3. Залежність потоку енергії в дальній зоні від часової затримки $ct - z$ для кількох фіксованих відстаней z і різних значень тривалості імпульсу ct_0

Fig. 3. Dependence of the energy flux in the far zone on the time delay $ct - z$ for several fixed distances z and different values of the pulse duration ct_0

На Рис. 4 зображено залежності потоку енергії в дальній зоні від часової затримки $ct - z$ для фіксованої відстані $z = 11$ м, при різних значеннях тривалості імпульсу ct_0 . З її збільшенням сплеск амплітуди потоку відбувається на все пізніших фронтах – у точках $ct - z = ct_0$. При цьому поведінка графіка до моменту сплеску поступово наближається до залежності, характерної для стрибкоподібного збудження.

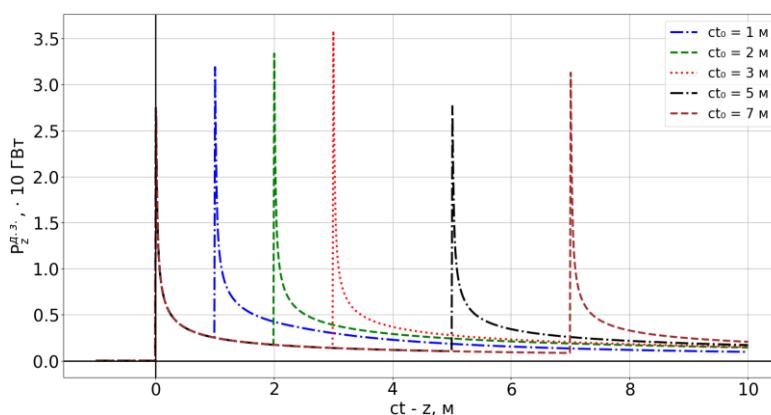


Рис. 4. Залежність потоку енергії в дальній зоні від часової затримки $ct - z$ для фіксованої відстані $z = 11$ м при різних значеннях тривалості імпульсу ct_0

Fig. 4. Dependence of the energy flux in the far zone on the time delay $ct - z$ for a fixed distance $z = 11$ м at different values of the pulse duration ct_0

Перейдемо до аналізу повної енергії хвилі (11) у наближенні дальньої зони. Інтегрування виконується числовим методом. На Рис. 5 показано залежність цієї енергії від координати z при фіксованій тривалості імпульсу $ct_0 = 1$ м. На малих відстанях від апертури енергія зменшується швидше. Це пояснюється тим,

що частина енергії імпульсу витрачається на формування статичного поля в ближній зоні, яке швидко загасає з відстанню. Таким чином, первинна енергія перетворюється не лише у хвильову компоненту, а й у локальне статичне поле. На більших відстанях це поле вже не помітне, і хвильовий імпульс продовжує поширюватися, що відповідає повільному зменшенню повної енергії з відстанню. Це загасання частково пов'язане із розширенням фронту хвилі та концентрацією її енергії вздовж нормалі.

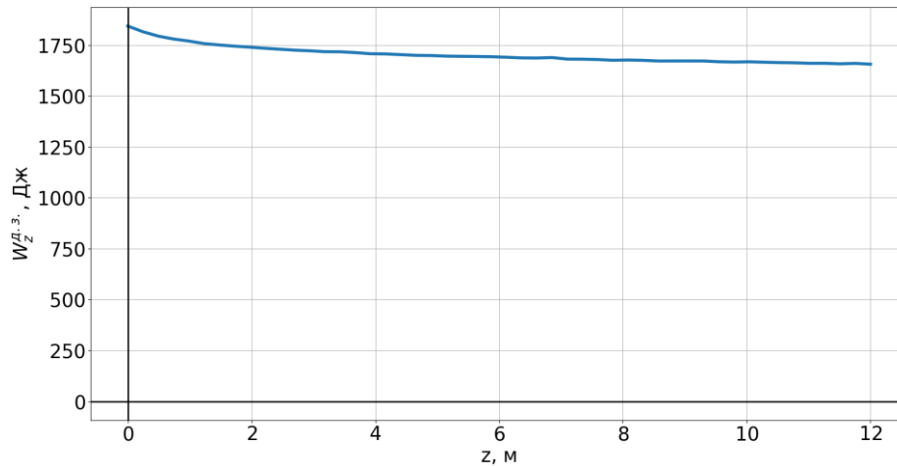


Рис. 5. Залежність повної енергії хвилі в дальній зоні від координати для фіксованої тривалості імпульсу $ct_0 = 1$ м

Fig. 5. Dependence of the total wave energy in the far zone on the coordinate for a fixed pulse duration $ct_0 = 1$ м

Цікаво також дослідити, як повна енергія залежить від самої тривалості збуджуючого імпульсу. На Рис. 6 представлено графік цієї залежності, якщо відстань дальньої зони становить 11 м. Поведінка енергії тут якісно відповідає тій, що спостерігалась у випадку $z = 0$ м (Рис. 2), що дає узгодженість енергетичних характеристик. Зазначимо, що незначні осциляції на графіках (Рис. 5 та Рис. 6), ймовірно, пов'язані з похибками числового інтегрування для швидкоосцилюючих підінтегральних виразів. Вони не мають фізичного значення і не впливають на загальні закономірності.

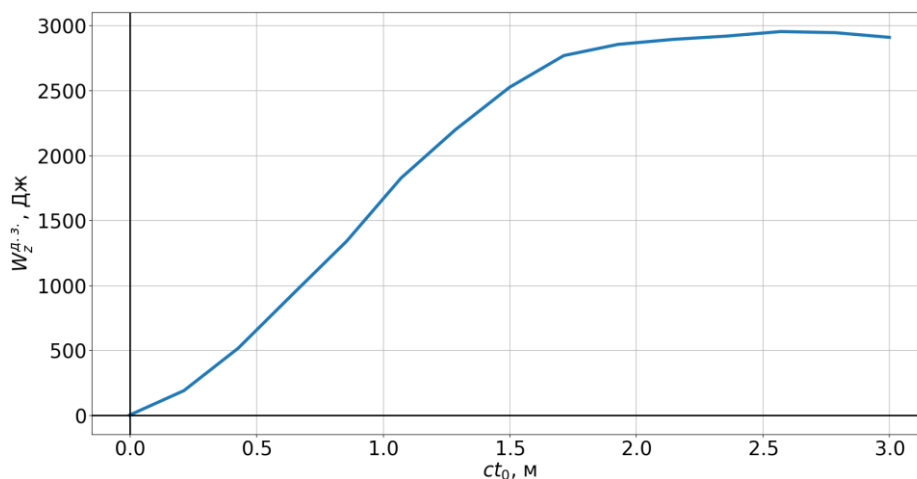


Рис. 6. Залежність повної енергії хвилі в дальній зоні від тривалості імпульсу для фіксованої відстані $z = 11$ м

Fig. 6. Dependence of the total wave energy in the far zone on the pulse duration for a fixed distance $z=11$ м

Випадок 3. Загальний

Повернемося до повного виразу для потоку енергії (9), без жодних спрощень, і проведемо його аналіз. У числовому розрахунку було враховано перші 10 членів ряду. На Рис. 7 зображено дві серії графіків потоку енергії як функції часової затримки, для фіксованих значень відстані від апертури z , що дає змогу порівняти, як змінюється динаміка фронту в ближній і дальній зонах, та двох різних значень тривалостей імпульсу, що характеризують різні режими випромінювання. В обох серіях графіків криві для $z = 0$ м

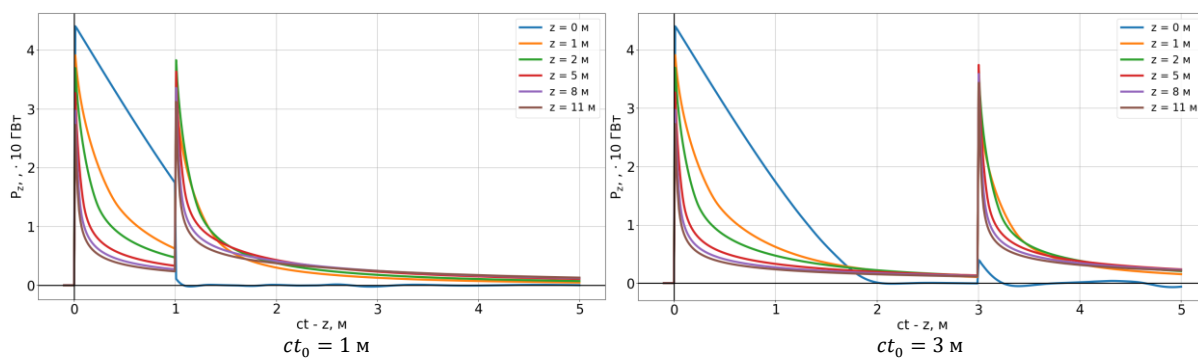


Рис. 7. Залежність потоку енергії від часової затримки $ct - z$ для кількох фіксованих відстаней z і різних значень тривалості імпульсу ct_0

Fig. 7. Dependence of energy flow on time delay $ct - z$ for several fixed distances z and different values of pulse duration ct_0

практично повторюють аналітичний розв'язок (Рис. 1). Єдине відхилення – малий стрибок амплітуди в момент $ct - z = ct_0$, який з'являється вже після того, як крива вийшла на нуль (правий графік). Цей ефект не має фізичної природи, а є наслідком числового наближення: при обмеженій кількості членів ряду повне скасування парних Бесселів не відбувається, що дає спектральну похибку типу Гібса. При збільшенні кількості доданків цей сплеск поступово зникає. Для інших значень відстані $z > 0$, як для ближньої, так і дальньої зони, навпаки, подібні стрибки мають фізичне походження, оскільки відображають інтерференцію двох фронтів: від вмикання та від вимикання імпульсу. Таке накладання формує характерний енергетичний «удар», який не зникає при збільшенні кількості доданків рядів, та що узгоджується з результатом, представленим на Рис. 3.

На Рис. 8 подано два сімейства графіків залежності потоку енергії від часової затримки. Аналіз проводиться для двох фіксованих відстаней $z = 0$ м та $z = 2$ м, при різних значеннях тривалості імпульсу $ct_0 = 0,5; 2; 3$ м. Як і з Рис. 7, тут для нульової відстані (лівий графік) отримані результати майже повністю збігаються з аналітичним розв'язком, представленим на Рис. 1, за винятком невеликого стрибка при $ct - z = ct_0$ для третьої (точкової) кривої. Для ненульового z (правий графік), від ближньої до дальньої зони, поведінка графіків якісно не змінюється. Точка стрибка зсувається вправо, відповідно до часу дії збудження, а форма хвильового фронту до моменту вимкнення все більше нагадує випадок стрибкоподібного збудження, повторюючи логіку, вже описану для Рис. 4.

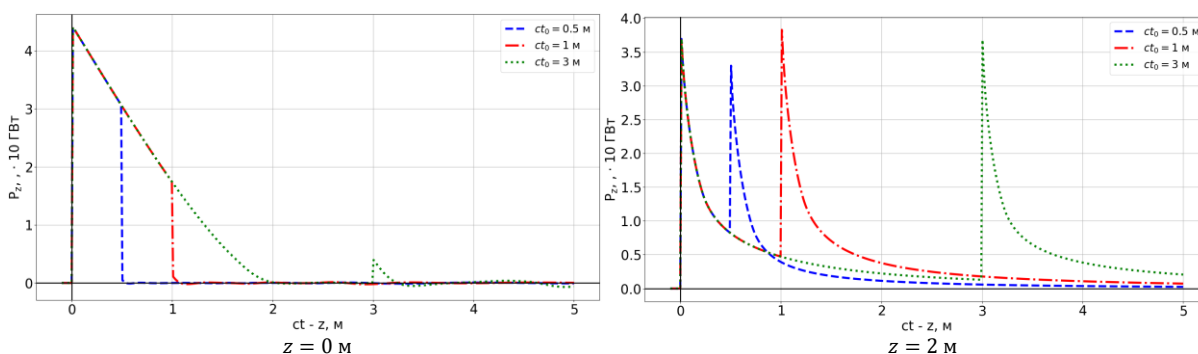


Рис. 8. Залежність потоку енергії від часової затримки $ct - z$ для фіксованих відстаней при різних значеннях тривалості імпульсу ct_0

Fig. 8. Dependence of energy flow on time delay $ct - z$ for fixed distances at different values of pulse duration ct_0

На Рис. 9 представлено тривимірну картину залежності потоку енергії як від часової затримки, так і від координати від випромінювача, яка демонструє просторово-часову динаміку поширення імпульсу у вільному просторі. Тривалість прямокутного імпульсу обрано $ct_0 = 3$ м. Якщо фіксувати координату z та розглядати часову залежність, то побачимо поведінку, ідентичну до двовимірних графіків, наведених на Рис. 3 і Рис. 7. Додамо, що зі збільшенням z сплески амплітуд дещо згладжуються, але залишаються вираженими. Якщо розглядати інший зріз, коли фіксується часова змінна, а просторова змінюється, то можна виділити дві суттєві області. У зоні початкового фронту (в околі площини $ct - z = 0$ м) помітний різкий максимум поблизу $z = 0$ м, який поступово загасає з ростом відстані. Цей пік пов'язаний з високою концентрацією енергії у ближній зоні одразу після увімкнення джерела. Математично він обумовлений

особливістю підінтегрального виразу, зокрема тим, що для малих z аргумент функції Бесселя нульового порядку досягає максимального значення. Доданок у вигляді ряду в такому випадку матиме дробові коефіцієнти, що наближаються до 1, та функції Бесселя парних порядків, які прямують до 0. У результаті спостерігається посилення інтегрального внеску за рахунок функції Бесселя нульового порядку. Друга область (окіл площини $ct - z = ct_0$), що пов'язана з фронтом вимкнення імпульсу, не породжує настільки гострого піку, а сам фронт плавніше спадає з ростом z . Цей ефект пов'язаний з тим, що після поширення у просторі хвильовий імпульс частково інтерферує із самим собою, внаслідок чого частина високочастотних коливань згладжується. Крім того, на момент вимкнення імпульсу поле вже заповнило значну частину простору, і його геометрія змінює локальну інтенсивність потоку. Як результат, фінальний стрибок є менш концентрованим.

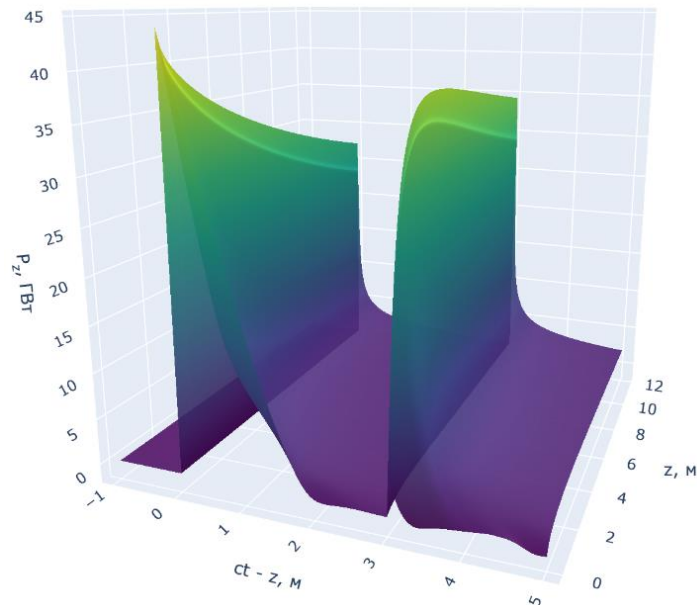


Рис. 9. Залежність потоку енергії від часової затримки $ct - z$ і відстані від апертури z для тривалості імпульсу $ct_0 = 3$ м

Fig. 9. Dependence of energy flux on time delay $ct - z$ and distance from aperture z for pulse duration $ct_0 = 3$ м

Наостанок розглянемо енергію збудження прямокутним імпульсом (11). На Рис. 10 показано залежність повної енергії як функції відстані, якщо тривалість імпульсу $ct_0 = 3$ м. Проведено порівняння результатів, отриманих за допомогою інтегрування по часу загального виразу (9), з наближенням дальньої зони (13). Крива, побудована за загальним виразом, дає менші значення енергії, ніж у наближенні дальньої зони. Цей ефект пояснюється тим, що в загальному випадку поле формується не лише хвильовою частиною, а й нестационарними складовими, пов'язаними з локалізованим збуренням поблизу апертури. У момент збудження джерело генерує статичне поле, яке частково «заповнює» ближню зону і не сприяє поширенню енергії у напрямку осі. Натомість у наближенні дальньої зони враховується лише синхронне поширення фронтів, що дає завищену оцінку енергетичного потоку. На великих відстанях обидві криві поступово вирівнюються, що вказує на зникнення енергетичних складових ближнього поля. Повільне загасання енергії з відстанню нагадує поведінку, характерну для «електромагнітного снаряду»: зосереджений імпульс переносить скінченну кількість енергії яка зберігається в його структурі на великій відстані [9].

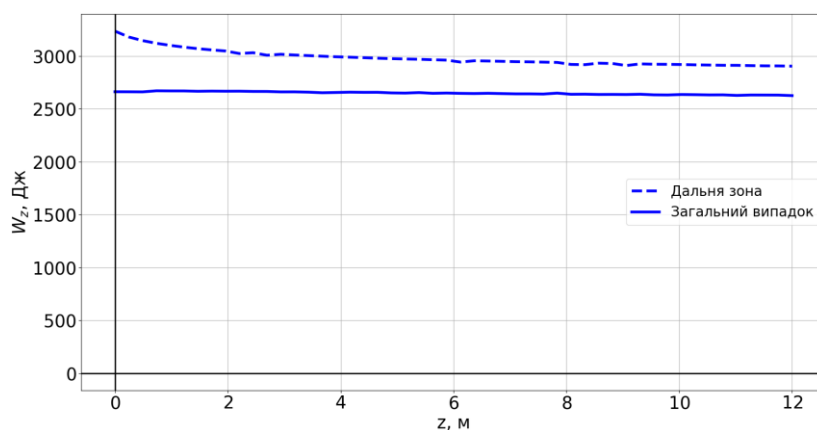


Рис. 10. Залежність повної енергії хвилі від координати для випадків випромінювання у дальній зоні та загального, якщо тривалість імпульсу $ct_0 = 3$ м

Fig. 10. Dependence of the total wave energy on the coordinate for cases of radiation in the far zone and total radiation, if the pulse duration $ct_0 = 3$ m

На Рис. 11 подано залежність енергії, що проходить через площину $z = \text{const}$, від тривалості прямокутного імпульсу ct_0 . Для малого часу спостереження $ct \leq 2R$ і випромінювання через апертурну площину $z = 0$ було розглянуто три криві: точний розв'язок, дальню зону і загальний випадок (лівий графік). Помітно, що точний розв'язок і загальний випадок ідеально збігаються, тоді як наближення дальньої зони дещо неправильно оцінює енергію, хоча якісно відтворює поведінку залежності, зокрема насичення при $ct_0 \geq 2R$. Якщо узяти віддалену поперечну площину ($z = 5$ м, правий графік) і великий час спостереження, то крива дальньої зони знаходиться вже вище, ніж для загального випадку. Пояснення цього ідентичне як і до Рис. 10. Якісна фізична картина між кривими є однаковою.

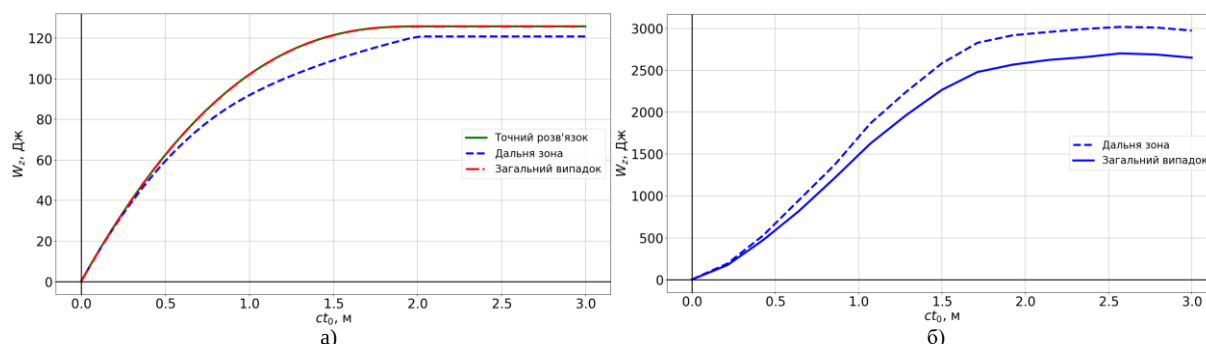


Рис. 11. а) Залежність енергії на апертурі ($z = 0$ м) від тривалості імпульсу при обмеженому часі спостереження ($ct \leq 2R$) для трьох випадків аналізу формули (12); б) залежність повної енергії від тривалості імпульсу на відстані $z = 5$ м до випромінювача для двох випадків аналізу формули (12)

Fig. 11. a) Dependence of energy at the aperture ($z=0$ m) on pulse duration with limited observation time $ct \leq 2R$ for three cases of analysis of formula (12); b) dependence of total energy on pulse duration at a distance $z=5$ m from the emitter for two cases of analysis of formula (12)

ВИСНОВКИ

Показано, що наближення дальньої зони у разі прямокутного імпульсного збудження задовільно відтворює якісну фізичну картину поширення хвилі, однак має обмежену точність у кількісному описі енергетичних характеристик. Зокрема, для малих часів спостереження воно недооцінює повну енергію, тоді як для великих значень часу суттєво її переоцінює в ближній зоні, що зумовлено ігноруванням статичних компонент поля. Простежується ефект «електромагнітного снаряду», за якого імпульсна енергія поширюється у вигляді компактної структури зі сталою формою. Встановлено також наявність початкового енергетичного потоку, необхідного для формування статичного поля, і його вплив на процес випромінювання.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

REFERENCES

1. Taylor JD. Ultrawideband radar: applications and design. Boca Raton, London, New York: CRC Press; 2012. 536 p. <https://doi.org/10.1201/b12356>.
2. Brittingham IN. Focus wave modes in homogeneous Maxwell's equations: Transverse electric mode. J. Appl. Phys. 1983;54(3): 1179–1189. <https://doi.org/10.1063/1.332196>.
3. Belanger PA. Packetlike solutions of the homogeneous-wave equation. J. Opt. Soc. Am. A. 1984;1(7):723–724. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.1.000723>.
4. Heyman E, Felsen LB. Propagating pulsed beam solutions by complex source parameter substitution. IEEE Trans. Antennas Propag. 1986;34(8):1062–1065. <https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143934>.
5. Ziolkowski RW. Localized transmission of electromagnetic energy. Phys. Rev. A. 1989;39(4):2005–2033. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.39.2005>.
6. Ziolkowski RW. Localized wave physics and engineering. Phys. Rev. A. 1991;44(6):3960–3984. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.44.3960>.
7. Ziolkowski RW. Properties of electromagnetic beams generated by ultra-wide bandwidth pulse-driven arrays. IEEE Trans. Antennas Propag. 1992; 40(8):888–905. <https://doi.org/10.1109/8.163426>.
8. Shaarawi AM, Besieris IM, Ziolkowski RW. A novel approach to the synthesis of nondispersive wave packet solutions to the Klein–Gordon and Dirac equations. J. Math. Phys. 1990;31(10):2511–2519. <https://doi.org/10.1063/1.528995>.
9. Wu TT. Electromagnetic missiles. J. Appl. Phys. 1985;57(7):2370–2373. <https://doi.org/10.1063/1.335465>.
10. Sodin LG. Characteristics of pulsed radiation from antennas (An electromagnetic missile). Radiotekhnika i elektronika. 1992;5(37):849–857. (in Russian)
11. Shen HM, Wu TT, Myers JM. Experimental study of electromagnetic missiles from a hyperboloidal lens. Proc. SPIE. 1991;1407:286–294. <https://doi.org/10.1117/12.43506>.
12. Wu TT, King RWP, Shen HM. Spherical lens as a launcher of electromagnetic missiles. J. Appl. Phys. 1987;62:4036–4040. <https://doi.org/10.1063/1.339115>.
13. Dumin OM, Tretyakov OO. Radiation of arbitrary signals by plane disk. Proc. 6th Int. Conf. Math. Methods Electromagn. Theory. 1996:248–251. <https://doi.org/10.1109/MMET.1996.565704>.
14. Butrym AY, Zheng Y, Dumin OM, Tretyakov OO. Transient wave beam diffraction by lossy dielectric half space. Proc. 10th Int. Conf. Math. Methods Electromagn. Theory. 2004:321–323. <https://doi.org/10.1109/MMET.2004.1397025>.
15. Huang L, Qiao Z, Chen Y. Soliton-cnoidal interactional wave solutions for the reduced Maxwell-Bloch equations. Chin. Phys. B. 2018;27(2):020201. 8 p. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/27/2/020201>.
16. Benci V. A model for the Maxwell equations coupled with matter based on solitons. Symmetry. 2021;13(5):760. 29 p. <https://doi.org/10.3390/sym13050760>.
17. Kopylova EA, Komech AI. On asymptotic stability of solitons for 2D Maxwell-Lorentz equations. J. Math. Phys. 2023;64(10):101504. <https://doi.org/10.1063/5.0134272>.
18. Riaz HW, Farooq A. Solitonic solutions for the reduced Maxwell-Bloch equations via the Darboux transformation and artificial neural network in nonlinear wave dynamics. Phys. Scr. 2024;99(12):126010. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad9420>.
19. Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA., Katrich VO. Energy Transformation of Transient Radiation of Plane Source with Step-Like Excitation. Proc. 2023 IEEE XXVIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). 2023;20–23. <https://doi.org/10.1109/DIPED59408.2023.10269461>.
20. Tretyakov OO, Dumin OM. Emission of Nonstationary Electromagnetic Fields by a Plane Radiator. Telecommun. Radio Eng. 2000;54(1):2–15. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v54.il.10>.
21. Akhmedov RD, Dumin OM, Katrich VO. Impulse radiation of antenna with circular aperture. Telecommun. Radio Eng. 2018;77(20):1767–1784. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v77.i20.10>.
22. Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA. Time domain analysis of impulse electromagnetic field at the interface of two media. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series “Radio Physics and Electronics”. 2021;35:41–55. (In Ukrainian) <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-04>.
23. Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA, Katrich VO. Evolutionary Approach to Energy Transformation of Short Rectangular Pulse Radiated from Aperture. Proc. 2023 IEEE International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics (UkrMiCo). 2023;228–232. <https://doi.org/10.1109/UkrMiCo61577.2023.10380340>.
24. Abramowitz M, Stegun I. Handbook of Mathematical Functions. 1964. 832 p.
25. Prudnikov AP, Bychkov YuA, Marichev OI. Integrals and Series, Vol. 2: Special Functions. Gordon and Breach Science Publishers. New York. 1986. 750 p.

Стаття надійшла до редакції: 12 березня 2025

Рекомендовано до друку: 23 квітня 2025

ENERGY ANALYSIS OF A TRANSIENT WAVE PROCESS EXCITED BY A RECTANGULAR PULSE

D. I. HAVRYLENKO, O. M. DUMIN, S. L. BERDNYK

V. N. Karazin Kharkiv National University, 4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, Ukraine

Background. With the rapid advancement of ultrawideband technologies, pulsed antennas are becoming increasingly essential tools in applications involving radio communication, location, and remote sensing. Unlike harmonic sources, whose dynamics are well-described in the frequency domain, real pulsed emitters operate with finite-duration excitations, which significantly alter both the nature of the electromagnetic field and the process of energy transfer. One of the physically realistic excitation scenarios is the rectangular pulse, which models a situation where the source is active for a limited time interval and then turned off. This type of pulse more accurately reflects the actual operating conditions of pulsed systems than idealized step-like excitation. Investigating the energy characteristics in the time domain not only deepens the understanding of radiation mechanisms but also contributes to the improved design of efficient antennas and sources. Such insights directly impact the enhancement of range, noise immunity, and accuracy in communication and observation systems, as well as the reduction of energy losses and near-field exposure. Analyzing the transformation of pulsed energy at different stages of excitation, from the formation of wavefronts to their propagation, is key to developing high-fidelity models of the electromagnetic field.

Objectives. To derive analytical and numerical dependencies that describe the energy characteristics of the electromagnetic field excited by a rectangular pulse. Specifically, the aim is to obtain expressions for the energy flux through the transverse plane at an arbitrary distance from the aperture, as well as to determine the total wave energy at different stages of its spatiotemporal evolution. Where analytical solutions are unattainable, apply numerical methods. Provide a physical interpretation of the obtained results, and assess the influence of pulse duration on wave behavior.

Materials and methods. The problem is formulated as a transient three-dimensional propagation scenario of an H -wave excited by a rectangular pulse from a circular aperture into the free half-space. General field solutions are constructed using the evolutionary approach. These solutions are expressed through the evolutionary coefficients, which are obtained as solutions of the inhomogeneous Klein-Gordon equation using the Riemann function method. To determine the energy flux, the longitudinal component of the Poynting vector is used. Numerical computations are carried out via the Gauss-Kronrod method.

Results. Exact analytical expressions for the energy flux and total energy at the aperture under rectangular excitation have been obtained. Generalized formulas have been derived for arbitrary planes, taking into account the temporal and spatial evolution of the field. A comparison with the far-field approximation shows that it may overestimate energy values in the near zone. A three-dimensional visualization of the spatiotemporal dynamics has been constructed, clearly demonstrating the formation and interaction of wavefronts. The process of energy accumulation in the near field has been analyzed, along with the manifestation of the “electromagnetic missile” effect, where the excitation exists in the form of a compact energy pulse.

Conclusions. This study presents, for the first time, analytical and numerical models for rectangular excitation of an H -wave from an aperture radiator in the time domain. It is shown that, in the case of finite-duration pulses, the field exhibits more complex temporal dynamics than under step-like excitation. It is established that the energy flux near the aperture arises from the interaction of static and wave components, which render far-field approximations inaccurate at low values of the longitudinal coordinate. The slow decay of energy with distance indicates that a significant portion is concentrated in a compact front that retains its structure during propagation. The analysis refines the applicability conditions of approximate models and provides a foundation for further research aimed at optimizing pulsed antennas and radiation systems.

KEY WORDS: Evolutionary Equations Method, rectangular pulse, soliton-like solution, energy transformation

The article was received by the editors: March 12 2025

The article is recommended for printing: April 23 2025

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-04>

УДК 537.8

М.М. ЛЕГЕНЬКИЙ, к.ф.-м.н., доцент

e-mail: mlegenkiy@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5945-4002>

М.А. БУГАЙ, аспірант

e-mail: maksym.buhai@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5897-1705>

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

ПРОГНОЗУВАННЯ РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА СКЛАДНИХ ВЕЛИКОГАБАРИТНИХ ОБ'ЄКТАХ

Актуальність. Нині постає питання моделювання ефективної поверхні розсіяння (ЕПР) реальних цілей. Експериментальне вимірювання є складним для реалізації, а існуючі методи теоретичного обчислення зазвичай потребують багато часу. Тому необхідно розробити нові методи збору й обробки експериментальних даних та теоретичного моделювання, що дозволить пришвидшити оцінку ЕПР різних об'єктів. Важливою наразі задачею є створення радару, який буде добре помічати навіть гарно замасковані цілі. З іншого боку, постає необхідність замаскувати власні об'єкти. Враховуючи новітні тенденції з використання малопомітних цілей, відбитий сигнал від яких може бути майже на рівні шуму, необхідно навчитися виділяти його з поміж сигналів інших об'єктів. Таким чином, актуальною наразі задачею є створення ефективних методів для прогнозування розсіяння на типових радіолокаційних цілях, використання яких не буде потребувати дуже багато часу на моделювання.

Мета роботи. Отримання рівняння для обчислення ефективної поверхні розсіяння системи яскравих точкових відбивачів із різною діаграмою спрямованості.

Методи і методологія. Використання методів фізичної та геометричної оптики для отримання рівняння ефективної поверхні розсіяння систем яскравих точкових відбивачів. Застосування мови програмування Python, а також бібліотек до неї NumPy та Matplotlib для обчислень та побудови графіків.

Результати. Отримано рівняння для обчислення ефективної поверхні розсіяння системи яскравих точкових відбивачів для випадків ізотропної та різної кутової залежності ефективної поверхні розсіяння. Побудовано графіки для випадків, коли ЕПР кожного розсіювача постійна та змінюється за певними законами.

Висновки. Отримано кінцеву формулу для обчислення ЕПР системи яскравих точкових відбивачів, а також знайдено закономірності для різних значень ЕПР відбивачів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ефективна поверхня розсіяння, ЕПР, система яскравих точок, радіолокація, помітність цілі, інтерференція.

Як цитувати: Легенький ММ., Бугай МА Прогнозування розсіяння електромагнітних хвиль на складних великогабаритних об'єктах. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2025;42,38-46. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-04>

In cites: Legenkiy MM, Buhai MA. Prediction of electromagnetic waves scattering on complex shape large objects. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, Series "Radiophysics and Electronics". 2025;42,38-46 (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-04>

ВСТУП

Основою активної радіолокації є відбиття електромагнітних хвиль від перешкод (об'єктів) або неоднорідностей - області простору, магнітні та електричні властивості яких суттєво відрізняються від властивостей середовища, в якому поширюється хвиля. Падаюча електромагнітна хвиля викликає вимушені коливання вільних і зв'язаних зарядів, когерентні до коливань падаючого випромінювання. Вони створюють вторинне поле всередині і ззовні об'єкту. В результаті цього енергія падаючого випромінювання розсіюється у всіх напрямках, в тому числі і в напрямку до радіолокаційної станції. Випромінювання, яке створюється через розсіяння енергії електромагнітної хвилі на неоднорідностях, перешкодах чи об'єктах, називається вторинним випромінюванням, а об'єкти називаються пасивними вторинними випромінювачами. Параметрами неоднорідностей можуть бути діелектрична проникність ϵ та магнітна проникність μ . Якщо вони не співпадають із параметрами середовища, то відбувається випромінювання вторинних хвиль. Поле вторинного випромінювання залежить від поляризації та частоти електромагнітної хвилі, а також від параметрів самого середовища та об'єкта, на якому розсіюється хвиля. Відбитий ціллю сигнал – відбита хвиля, яка прийшла назад у напрямку до радару. Інтенсивність такої хвилі залежить від дальності до цілі, її геометричного розміру а також форми відбиваючої поверхні. Для оцінки енергетичних властивостей вторинного випромінювання вводиться поняття ефективної поверхні

розсіяння (ЕПР). Для розрахунку параметрів радіолокаційних станцій і визначення їх можливостей щодо виявлення цілей значну роль відіграє знання властивостей вторинного випромінювання [4].

Зазвичай радіолокаційні властивості об'єктів визначаються для дальньої зони, тобто для відстаней, на яких випромінено (якщо мова йде про дальню зону для випромінювача) або розсіяну (якщо мова йде про дальню зону для розсіювача) хвилю можна вважати плоскою. Саме для такого випадку сформульоване наведене нижче визначення ЕПР[3].

В даній роботі отримано формули для сумарної ЕПР системи із таких розсіювачів, які розташовані в різних просторових точках у дальній зоні відносно передавача та приймача. Завдяки цьому сумарна ЕПР системи точок залежить лише від відстані між ними та різниці фаз хвиль, відбитих від цих розсіювачів. Із простих геометричних міркувань вдається отримати цю різницю та виключити із отриманих формул відстані до передавача та приймача.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Поняття ефективної поверхні розсіяння (ЕПР) широко використовується в у різних областях фізики: розсіяння світла, когерентна оптика тощо.

ЕПР – характеристика тіла, що розсіює. За допомогою неї визначають здатність тіла розсіювати падаючу хвилю.

Необхідно знайти формулу, за якою можна буде визначити ефективну поверхню розсіяння (ЕПР) системи точкових розсіювачів з урахуванням інтерференції хвиль. Вважати, що розсіювачі розташовані поблизу початку координат, а приймальна та передавальна антени на нескінченній відстані від нього, тобто в дальній зоні. Врахувати, що ЕПР кожного розсіювача є функцією від кутів сферичної системи координат.

Необхідно розрахувати ЕПР:

- системи двох ізотропних розсіювачів за різних довжин хвилі λ ;
- системи двох вищевказаних розсіювачів, за умови що ЕПР кожного змінюється за законом

$$\sigma(\varphi) = \cos^2(\varphi), \quad \sigma(\varphi) = \cos^2(2\varphi), \quad \sigma(\varphi) = \cos^2(3\varphi).$$

МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ

Для обчислення ЕПР використано методи фізичної та геометричної оптики. [1,4-5]

Для чисельних обчислень застосовано мову програмування Python, а також бібліотеки NumPy та Matplotlib [10-11].

ЕПР СИСТЕМИ ЯСКРАВИХ ТОЧОК

Поняття ЕПР

Ефективна поверхня розсіяння (ЕПР) – характеристика тіла, яка визначає його здатність розсіювати випромінювання. Розсіяна хвиля має певну поляризацію та поширюється у напрямі до приймача. В такому випадку ЕПР пропорційна відношенню інтенсивності розсіяного поля біля приймача до інтенсивності падаючого поля на об'єкт (Рис. 1). Для бістатичного випадку передавач і приймач розділені, на рисунку β – кут між напрямом від передавача до тіла і напрямом від тіла до приймача, R – відстань до них. Для моностатичного випадку приймач і передавач знаходяться близько один до одного або об'єднані, тобто кут $\beta = 0$.

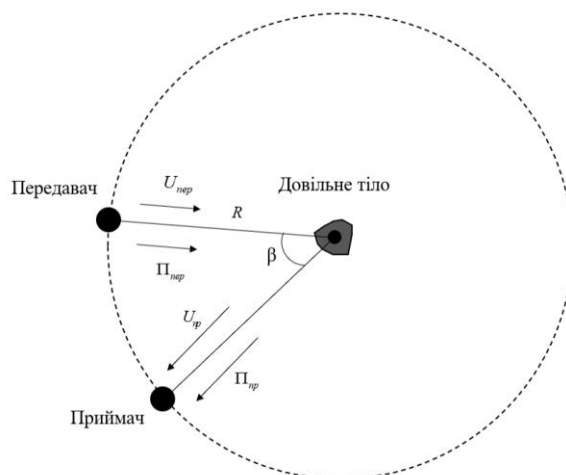


Рис. 1. Довільне тіло, що розсіює.

Fig. 1. Arbitrary scattering body.

Нехай як тіло, що розсіює виступає ідеальне ізотропне тіло. В такому випадку енергія буде розсіюватися в усіх напрямках однаково. Вважаючи, що відстань R достатньо велика, щоб вважати, що падаюча хвиля плоска, можна обчислити потужність, яку розсіює таке тіло:

$$P_{np} = \lim_{R_{nep} \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \Pi_{np}, \quad (1)$$

де Π_{np} – густина потоку потужності хвилі, яку випромінює передавач. З іншого боку:

$$P_{np} = \sigma \Pi_{nep}, \quad (2)$$

де σ – ЕПР – площа поверхні ідеального ізотропного тіла, Π_{nep} – густина потоку потужності хвилі, яка прийшла до приймача. Із рівнянь (1) та (2) випливає, що:

$$\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{\Pi_{np}}{\Pi_{nep}} = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \left(\frac{U_{nep}}{U_{np}} \right)^2. \quad (3)$$

Рівняння (3) справедливе для великих значень R , де густини потоків падаючої і розсіяної хвиль Π_{nep} та Π_{np} пропорційні квадратам амплітуд падаючої та відбитої хвиль U_{nep} та U_{np} [8].

Із наведених розрахунків зрозуміло, що ЕПР (σ) представляє собою площу такого ідеального ізотропного розсіювача, який, у випадку його розташування за місцем знаходження цілі, при падінні на нього густини потоку потужності 1 Вт/м^2 створить у точці, де знаходиться приймальна антена, таку ж густину потоку потужності, що і реальна ціль [3-4].

ЕПР системи яскравих точок

Нехай задано систему з N точок. Відстань від початку координат до передавальної антени становить R_1 , а до приймальної – R_2 . $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ – одиничні вектори, які задають напрями від початку координат до передавальної і приймальної антени, відповідно. Координати кожної точки задаються відповідними радіус-векторами $\vec{r}_i$, а їх ЕПР – σ_i (Рис. 2).

Вважаємо, що кожна із вказаних точок однаково розсіює падаючу на неї електромагнітну енергію в усіх напрямках, тобто є так званим ізотропним розсіювачем. Через це падаючий та відбитий сигнал для кожної із таких точок пов'язані один із одним співвідношенням (3).

Нижче отримаємо ЕПР для системи із таких розсіювачів, тобто співвідношення між сигналом, що падає на такі розсіювачі та сумарним сигналом, що потрапляє до приймальної антени від кожного із таких розсіювачів, з урахуванням інтерференції відбитих від кожного із розсіювачів сигналів.

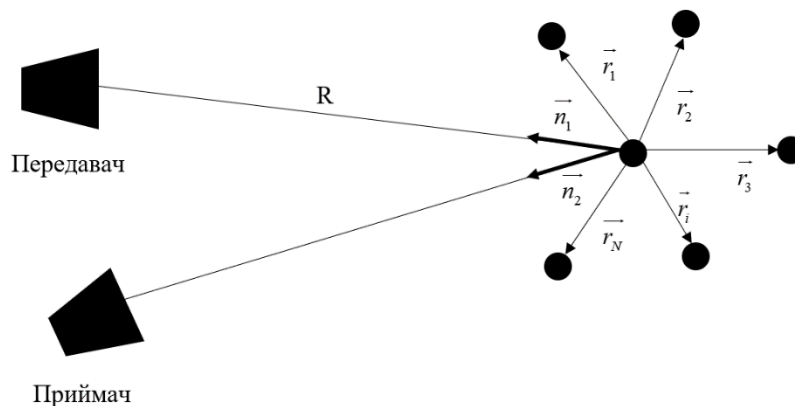


Рис. 2. Система розсіювачів.

Fig. 2. System of scatters.

Для дальньої зони можна вважати, що $R_1 \rightarrow \infty$ та $R_2 \rightarrow \infty$. Тому промені від розсіювача до приймальної антени та від розсіювача до передавальної антени можна вважати паралельними і різниця між ними буде проявлятися лише поблизу початку координат через різні напрямки на приймач та розсіювач. Аналогічним

чином і фаза сигналу в приймачі буде залежати лише від різниці ходу променя між двома точками вздовж напрямку на передавальну й приймальну антени.

Вважатимемо, що різниця ходу від передавача до i -го розсіювача становить ΔR_{1i} , а до приймача – ΔR_{2i} . Їх можна виразити через скалярні добутки радіус-вектору i -го розсіювача та одиничних векторів, які задають напрямок від початку координат та передавача і приймача.

$$\Delta R_{1i} = \vec{n}_1 \vec{r}_i, \quad (4)$$

$$\Delta R_{2i} = \vec{n}_2 \vec{r}_i. \quad (5)$$

Нехай на вході приймача отримуємо гармонічний сигнал:

$$U_{\text{вх}} = U_{m\Sigma} \cos(\omega t - \varphi_\Sigma - \varphi_0), \quad (6)$$

де $U_{m\Sigma}$ – сумарна амплітуда випромінювання, що відбилася від всіх розсіювачів. Застосувавши до рівняння (6) формулу для косинуса різниці, отримуємо:

$$U_{\text{вх}} = U_{m\Sigma} \cos(\omega t - \varphi_0) \cos(\varphi_\Sigma) + U_{m\Sigma} \sin(\omega t - \varphi_0) \sin(\varphi_\Sigma). \quad (7)$$

Будемо вважати, що у дальній зоні набіг фази для кожного розсіювача $\omega t = \text{const}$ та $\varphi_0 = \text{const}$, тоді $U_{\text{вх}}$ буде залежати лише різниці фаз від φ_Σ , яка зумовлена взаємним розташуванням розсіювачів:

$$U_{m\Sigma}^2 \cos^2 \varphi_\Sigma = \left(\sum_i^N \cos \Delta \varphi_i \right)^2 = \sum_i^N \cos \Delta \varphi_i \sum_j^N \cos \Delta \varphi_j, \quad (8)$$

$$U_{m\Sigma}^2 \sin^2 \varphi_\Sigma = \left(\sum_i^N \sin \Delta \varphi_i \right)^2 = \sum_i^N \sin \Delta \varphi_i \sum_j^N \sin \Delta \varphi_j. \quad (9)$$

Враховуючи геометричні міркування, описані вище, різниця фаз $\Delta \varphi_i$ у рівняннях (8) та (9) може бути записана у наступному вигляді:

$$\Delta \varphi_i = \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta R_{1i} + \Delta R_{2i}) = \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{n}_1 \vec{r}_i + \vec{n}_2 \vec{r}_i). \quad (10)$$

Тоді квадрат амплітуди сумарного сигналу в приймальній антені становитиме:

$$U_{m\Sigma}^2 = \sum_{i,j}^N (U_{mi} U_{mj} \cos \Delta \varphi_i \cos \Delta \varphi_j + U_{mi} U_{mj} \sin \Delta \varphi_i \sin \Delta \varphi_j). \quad (11)$$

Враховуючи, що амплітуда сигналу пов'язана з ЕПР розсіювача як $\sigma = U^2$, рівняння (11) матиме наступний вигляд:

$$\sigma_{m\Sigma} = \sum_{i,j}^N (\sqrt{\sigma_i \sigma_j} \cos \Delta \varphi_i \cos \Delta \varphi_j + \sqrt{\sigma_i \sigma_j} \sin \Delta \varphi_i \sin \Delta \varphi_j). \quad (12)$$

Після підстановки (10) в (12) отримуємо формулу для визначення сумарної ЕПР системи розсіювачів:

$$\sigma_{m\Sigma} = \sum_{i,j}^N \left(\sqrt{\sigma_i \sigma_j} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{n}_1 \vec{r}_i + \vec{n}_2 \vec{r}_i) \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{n}_1 \vec{r}_j + \vec{n}_2 \vec{r}_j) + \sqrt{\sigma_i \sigma_j} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{n}_1 \vec{r}_i + \vec{n}_2 \vec{r}_i) \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{n}_1 \vec{r}_j + \vec{n}_2 \vec{r}_j) \right). \quad (13)$$

Спростивши рівняння (13) за допомогою формули для косинуса різниці, отримуємо:

$$\sigma_{m\Sigma} = \sum_{i,j}^N \sqrt{\sigma_i \sigma_j} \cos \frac{2\pi}{\lambda} [(\vec{n}_1 + \vec{n}_2)(\vec{r}_i - \vec{r}_j)]. \quad (14)$$

Таким чином, отримана формула дозволяє обчислити ЕПР систем точок. При цьому може бути задана різна їх кількість, а також враховано вплив положення точок та значення ЕПР кожної точки на сумарну ЕПР системи.

Ефективна поверхня розсіювачів у формулі (14) може не залежати від кута падіння та спостереження (ізотропні розсіювачі), а може бути функцією від них. Це може бути корисно при моделюванні реальних об'єктів за допомогою систем яскравих точок (як простих, таких як пластини різної форми, так і складніших, як поверхні вищих порядків, а також реальні радіолокаційні цілі).

Нижче наведено приклади обчислень ЕПР системи двох розсіювачів, ЕПР яких залежить або не залежить від кута спостереження за різного їх положення у просторі.

ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДЛЯ ДЕЯКИХ СИСТЕМ ТОЧОК

ЕПР системи двох ізотропних розсіювачів

За допомогою формули (14) можна обчислити ЕПР системи двох ізотропних розсіювачів за різних відношень довжини хвилі до відстані між точками $\frac{\lambda}{d}$ (Рис. 3- 6). Для спрощення порівняння ЕПР кожної точки $\sigma_{1,2} = 1$, значення сумарної ЕПР на рисунках нормоване, розсіювачі знаходяться на початку координат, а передавач та приймач - на нескінченній відстані від нього.

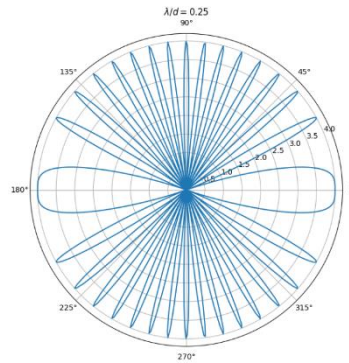


Рис. 3. ЕПР системи двох ізотропних розсіювачів для відношення $\frac{\lambda}{d} = 0.25$.

Fig. 3. RCS of the system of two scatterers at the ratio $\frac{\lambda}{d} = 0.25$.

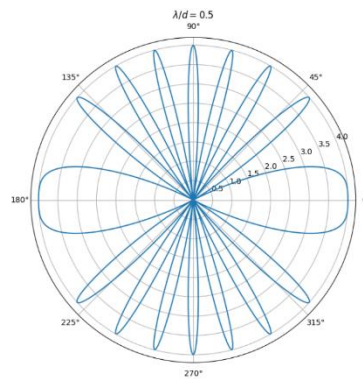


Рис .4. ЕПР системи двох ізотропних розсіювачів для відношення $\frac{\lambda}{d} = 0.5$

Fig. 4. RCS of the system of two scatterers at the ratio $\frac{\lambda}{d} = 0.5$.

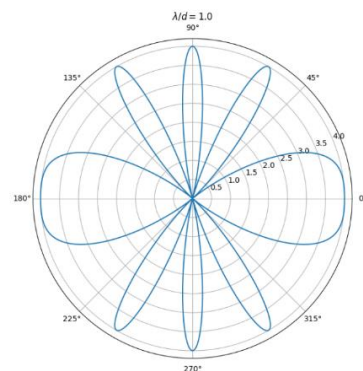


Рис .5. ЕПР системи двох ізотропних розсіювачів для відношення $\frac{\lambda}{d} = 1$.

Fig. 5. RCS of the system of two scatterers at the ratio $\frac{\lambda}{d} = 1$.

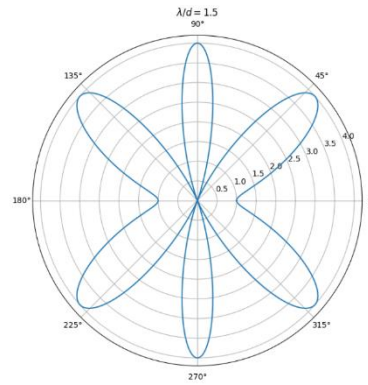


Рис .6. ЕПР системи двох ізотропних розсіювачів для відношення $\frac{\lambda}{d} = 1.5$.

Fig. 6. RCS of the system of two scatters at the ratio $\frac{\lambda}{d} = 1.5$.

Із аналізу Рис. 3-6 можна зробити висновок, що при збільшенні відношення $\frac{\lambda}{d}$ зменшується кількість бокових пелюсток, а ширина головних поступово збільшується, доки вони не розділяються на декілька пелюсток.

ЕПР системи двох точок зі змінною ЕПР

Для знаходження ЕПР системи двох розсіювачів, для яких ЕПР змінюється за певним законом, можна скористатися рівнянням (14). Для спрощення максимальна сумарна ЕПР системи точок нормована, розсіювачі знаходяться на початку координат, а приймач та передавач на нескінченній відстані від нього (тобто у дальній зоні).

Нехай ЕПР точок залежить від азимутального кута φ як:

$$\sigma = \cos^2(\varphi), \quad (15)$$

$$\sigma = \cos^2(2\varphi), \quad (16)$$

$$\sigma = \cos^2(3\varphi). \quad (17)$$

Після підстановки (15), (16) та (17) у (14) отримано наступні результати для різних відношень довжини хвилі до відстані між точками $\frac{\lambda}{d}$ (Рис. 7- 10):

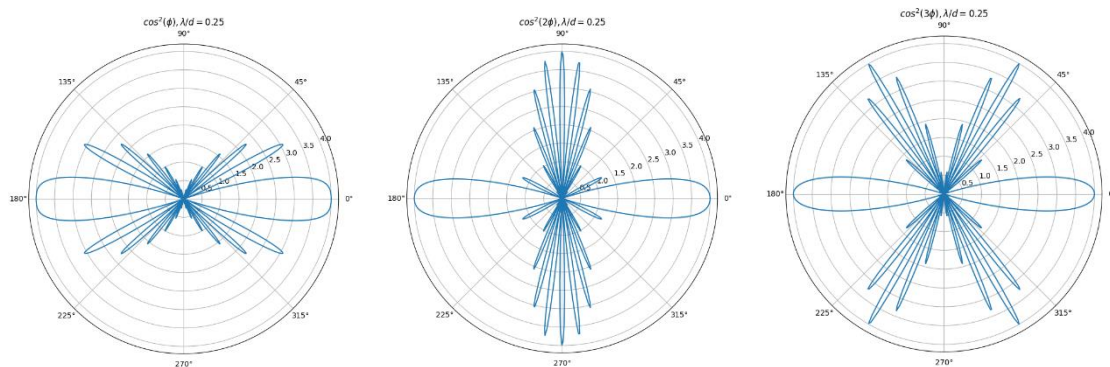


Рис. 7. ЕПР системи трьох розсіювачів, зміна ЕПР яких відбувається за формулами (15), (16) та (17) для відношення

$$\frac{\lambda}{d} = 0.25 .$$

Fig. 7. RCS of systems of three scatters, whose RCS changes by equations (15), (16) та (17) at the ratio $\frac{\lambda}{d} = 0.25$.

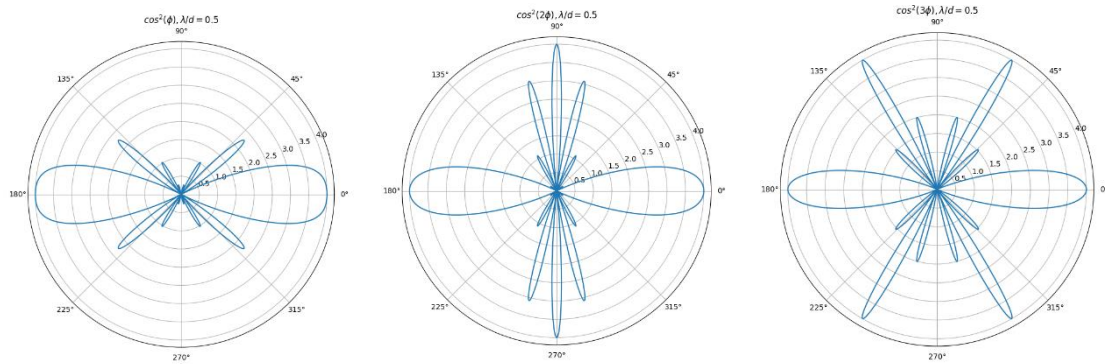


Рис. 8. ЕПР систем трьох розсіювачів, зміна ЕПР яких відбувається за формулами (15), (16) та (17) для відношення $\frac{\lambda}{d} = 0.5$.

Fig. 8. RCS of systems of three scatterers, whose RCS changes by equations (15), (16) та (17) at the ratio $\frac{\lambda}{d} = 0.5$.

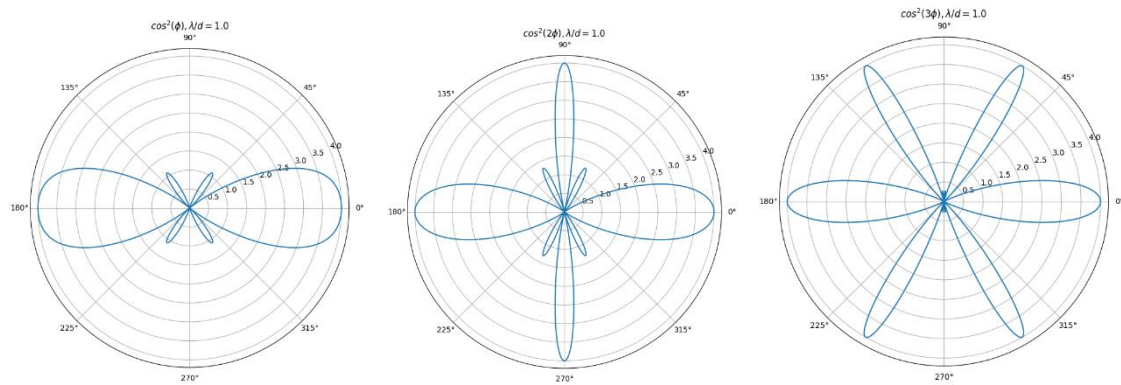


Рис. 9. ЕПР системи трьох розсіювачів, зміна ЕПР яких відбувається за формулами (15), (16) та (17) для відношення $\frac{\lambda}{d} = 1$.

Fig. 9. RCS of systems of three scatterers, whose RCS changes by equations (15), (16) та (17) at the ratio $\frac{\lambda}{d} = 1$.

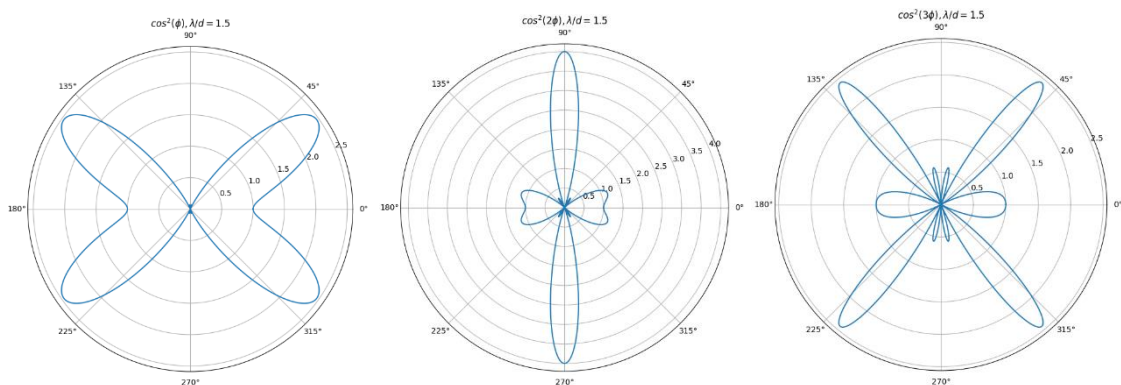


Рис. 10. ЕПР системи трьох розсіювачів, зміна ЕПР яких відбувається за формулами (15), (16) та (17) для відношення $\frac{\lambda}{d} = 1.5$.

Fig. 10. RCS of systems of three scatterers, whose RCS changes by equations (15), (16) та (17) at the ratio $\frac{\lambda}{d} = 1.5$.

Отже, при збільшенні відношення $\frac{\lambda}{d}$ зменшується кількість бічних пелюсток, а головні пелюстки при цьому поступово розділяються на декілька. Також при зміні кутової залежності для ЕПР кожного

розсіювача спостерігається зміна напрямку і кількості бічних пелюсток. Діаграма ЕПР, яка визначається рівняннями (15) та (17), має 4 основні зони із бічними пелюстками, а також вони знаходяться ближче до основних пелюсток. Для ЕПР, яка визначається рівнянням (16) спостерігаються лише дві основні зони із бічними пелюстками, які знаходяться посередині між основними пелюстками.

ВИСНОВКИ

Для ефективного створення радіолокаційних систем необхідно, зокрема, знати ефективну поверхню розсіювання цілей, які вона має виявляти. Але найчастіше такі об'єкти мають складну, велику порівняно з довжиною хвилі, форму поверхні, що призводить до збільшення складності обчислень ЕПР, яка має багатопелюсткову форму, а також залежить від поляризації, частоти хвилі та інших факторів. Таким чином моделювання розсіювання електромагнітних хвиль на реальних об'єктах стає складною задачею.

Для спрощення обчислень ЕПР реальних об'єктів пропонується використовувати модель у вигляді низки яскравих розсіювачів, які можуть бути ізотропними чи анізотропними (по різному розсіювати хвилі в різних напрямках). За різного положення таких точок у просторі, а також зміни ЕПР самих точок сумарна поверхня розсіювання має стати близькою або аналогічною до ЕПР реальних об'єктів.

Задля виконання поставленої задачі було досліджено зв'язок між ЕПР системи та її параметрами, такими як розташування їх у просторі та ЕПР кожної точки. Зокрема було отримано діаграми ЕПР для двох розсіювачів в залежності від відношення $\frac{\lambda}{d}$ (Рис. 3-6), а також ЕПР системи розсіювачів для ізотропних точок та точок зі змінною ЕПР. Моделювання для таких систем показало, що діаграми зворотного розсіювання мають складну кутову залежність та багатопелюстковий характер. При цьому, для всіх випадків при наближенні відстані між точками до довжини хвилі кількість бічних пелюсток зменшувалася, а дві головні пелюстки збільшувалися в ширині, потім розділялися на декілька. При цьому для випадку зміни ЕПР точок за закономірностями (15), (16) та (17) при збільшенні коефіцієнта в закономірності зміни ЕПР точки при φ^2 також спостерігалася змінення положення зон із бічними пелюстками (для непарних коефіцієнтів 4 зони, наближених до основних пелюсток, та для парних коефіцієнтів - 2 зони посередині між основними пелюстками).

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bassem R. Mahafza. Introduction to Radar Analysis. 2nd Edition. New York: Chapman and Hall/CRC. 2017. 460 с.
2. Mirabel Cerqueira Rezende, Malmonge Martin, Roselena Faez, Marcelo Alexandre Souza Miacci, Evandro Luis Nohara. Radar Cross Section Measurements (8-12 GHz) of Magnetic and Dielectric Microwave Absorbing Thin Sheets. Revista de Física Aplicada e Instrumentação, vol. 15, no. 1, December, 2002
3. Сайт «radartutorial.eu» - Режим доступу: <https://www.radartutorial.eu/01.basics/Radar%20Cross%20Section.en.html>. 21.09.
4. Eugene F. Knott, John F. Shaeffer ; Michael T. Tuley. Radar Cross Section (2nd Edition). 2004. 626 с.
5. Eugene F. Knott . Radar cross-section measurements. New York: Springer New York. 2012. 546 с.
6. Andreas Wessling. Radar Target Modelling Based on RCS Measurements. Linköping 2002-05-17.
7. Merrill I. Skolnik. Radar handbook – 2nd ed. 1990
8. E.F. Knott. A progression of high-frequency RCS prediction techniques. Proceedings of the IEEE. vol. 73, no. 2, February 1985
9. Oleg I. Sukharevsky. Electromagnetic Wave Scattering by Aerial and Ground Radar Objects. 2014. 337 с.
10. Сайт “NumPy” – Режим доступу: - <https://numpy.org>
11. Сайт “Matplotlib” – Режим доступу: - <https://matplotlib.org>

REFERENCES

1. Bassem R. Mahafza. Introduction to Radar Analysis. 2nd Edition. New York: Chapman and Hall/CRC. 2017. 460 с.
2. Mirabel Cerqueira Rezende, Malmonge Martin, Roselena Faez, Marcelo Alexandre Souza Miacci, Evandro Luis Nohara. Radar Cross Section Measurements (8-12 GHz) of Magnetic and Dielectric Microwave Absorbing Thin Sheets. Revista de Física Aplicada e Instrumentac, ao, vol. 15, no. 1.Dec., 2002
3. Website «radartutorial.eu» - Access mode: <https://www.radartutorial.eu/01.basics/Radar%20Cross%20Section.en.html>. 21.09.
4. Eugene F. Knott, John F. Shaeffer ; Michael T. Tuley. Radar Cross Section (2nd Edition). 2004. 626 с.
5. Eugene F. Knott . Radar cross-section measurements. New York: Springer New York. 2012. 546 с.
6. Andreas Wessling. Radar Target Modelling Based on RCS Measurements. Linköping 2002-05-17.
7. Merrill I. Skolnik. Radar handbook – 2nd ed. 1990
8. E.F. Knott. A progression of high-frequency RCS prediction techniques. Proceedings of the IEEE. vol. 73, no. 2, February 1985
9. Oleg I. Sukharevsky. Electromagnetic Wave Scattering by Aerial and Ground Radar Objects. 2014. 337 с.
10. Website “NumPy” – Access mode: - <https://numpy.org>
11. Website “Matplotlib” – Access mode: - <https://matplotlib.org>

Стаття надійшла до редакції: 5 березня 2025 р.

Рекомендовано до друку: 23 квітня 2025 р.

PREDICTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES SCATTERING ON COMPLEX LARGE OBJECTS

M.M.LEGENKIY, M.A.BUHAI

V. N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine, 61022, Kharkiv, Svoboda Square, 4

Relevance. Currently, the question radar cross-section (RCS) modelling of real targets arises. Experimental measurement is difficult to implement, and existing methods of theoretical calculation usually require a lot of time. Therefore, it is necessary to develop new methods of collecting and processing experimental data and theoretical modeling, which will allow to speed up the assessment of the RCS of various objects. An important task now is to create a radar that will be able to detect even well-camouflaged targets. On the other hand, there is a need to mask one's own objects. Given the latest trends in the use of low-visibility targets, the reflected signal from which can be almost at the noise level, it is necessary to learn how to distinguish it from the signals of other objects. Thus, the current task is to create effective methods for predicting scattering on typical radar targets, the use of which will not require a lot of time for modeling.

Objective Obtaining an equation for calculating the effective scattering surface of a system of bright point reflectors with different radiation patterns.

Methods. Using physical and geometric optics methods to obtain the equation of the radar cross-section of bright point reflector systems. Using the Python programming language, as well as its libraries NumPy and Matplotlib for calculations and plotting.

Results. An equation for calculating the radar cross-section of bright point reflector systems has been obtained for the cases of isotropic reflectors and different angular dependence of the effective scattering surface. Graphs have been constructed for cases where the RCS of each scatter is constant and varies according to certain laws.

Conclusions. The final formula for calculating the RCS of bright point reflector systems was obtained, and regularities were found for different RCS values of the reflectors.

KEY WORDS: radar cross-section, RCS, bright point system, radiolocation, target visibility, interference.

The article was received by the editors: March 5 2025

The article is recommended for printing: April 23 2025

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-05>

УДК 621.3

¹**N.G. KOKODII**, doctor of physics and mathematics .

e-mail: kokodiyng@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-1325-4563>

²**A.O. NATAROVA**, PhD

e-mail: anastasiia.natarova@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-0856-3356>

¹**S.Yu. MOVENKO**, postgraduate

e-mail: g1lmer2712@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0009-5823-4567>

¹**D.V. GURINA**, postgraduate

e-mail: dgaryachevskaya@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7357-1275>

¹**I.V. GARYACHEVSKA**, PhD

e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4630-9519>

³**D.M. NATAROV**, PhD

e-mail: den.natarov@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-4170-9211>

¹**M.V. RUDNEVA**, student

e-mail fef@univer.kharkov.ua ORCID ID:

¹V.N. Karazin Kharkiv National University, 61022, Kharkiv, Ukraine

²I. Kozhedub Kharkiv National Air Force University, 61023, Kharkiv, Ukraine

³O. Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics NASU, 61085, Kharkiv, Ukraine

PRESSURE OF ELECTROMAGNETIC RADIATION ON VERY THIN CONDUCTORS

Background.. We use the mechanical action of laser radiation in the optical range for levitation, holding and moving of microparticles. We use that fact that the radiation beam presses on the particle, pulls it into a region of high field intensity and holds it there. We use the effect of strong absorption and scattering of microwave radiation by very thin conductors - metal wires, graphite and semiconductor fibers, to overcome difficulties caused by comparable large focal spot of the beam in the microwave range.

Objectives. To provide an analysis of the possibility of levitation and control of the movement of thin metal targets, which can be metal conductors with a diameter of several micrometers and a length of several millimeters, using microwave radiation without focusing on the target.

Results. We provide a theoretical analysis of the effect of microwave radiation strong pressure on thin conductors. We derive a condition for the maximum of radiation pressure - the relationship between the radiation wavelength, the diameter of wire and its conductivity. Also, we provide results of measurement of forces acting on thin conductors. For such purpose, we have used a torsion bar scales with a wire suspension with a diameter of several micrometers and an optical rotation angle reading. We show the good agreement between the calculation and experimental results.

KEY WORDS: radiation beam pressure, thin fiber, wire, levitation

Як цитувати: Kokodii NG, Natarova AO, Movenko SYu, Gurina DV, Garyachevskaya IV, Natarov DM, Rudneva MV. Pressure of electromagnetic radiation on very thin conductors. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2025;42:47-54.

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-05>

In cites: Kokodii NG, Natarova AO, Movenko SYu, Gurina DV, Garyachevskaya IV, Natarov DM, Rudneva MV. Pressure of electromagnetic radiation on very thin conductors. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series "Radiophysics and Electronics". 2025;42:47-54. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-05>

INTRODUCTION

The pressure of electromagnetic radiation on material bodies (ponderomotive effect) was predicted by J. Maxwell in his treatise on electromagnetism (Maxwell 1873). It was first measured by P.N. Lebedev (Lebedev 1901), and his experiments had a strong influence on the development of physics in the late 19th - early 20th centuries.

For a long time, it seemed that the smallness of light pressure, in the words of J. Poynting, "excludes it from consideration in earthly affairs" (Poynting 1910). But in the 1950s, intensive research began on the use of microwave radiation pressure to measure power in waveguide paths. As a result, there were created instruments

for high accuracy radiation power measurement in the centimeter and millimeter ranges (Cullen 1952, Barlow 1966, Barlow et al. 1970, Valitov 1959, Orlov 1962). Then there were developed instruments for measurement of laser radiation (Kokodii et al. 1988).

An engine was built - a device where a carousel with flat wings rotates under the influence of microwave radiation pressure in a waveguide (Valitov et al. 1961). It was the world's first device that used radiation pressure to perform work and move bodies in space.

Ponderomotive devices did not become widespread, and the pressure of electromagnetic radiation remained as some interesting physical effect without much practical application.

The situation changed radically with the advent of lasers with high radiation coherence and the ability to focus the beam into a spot whose dimensions are comparable to the light wavelength (sharp focusing). A. Ashkin, Nobel Prize winner in 2018, in experiments conducted in the 1970s, showed that the light pressure produced by a laser beam is sufficient to capture, hold and move micron-sized particles (Ashkin 1970, Ashkin 1973).

Ashkin exposed green light from argon laser ($\lambda = 514.5$ nm) onto transparent polymer spheres with a diameter of $0.59 - 2.68$ μm , suspended in water. A focused beam of light on a sphere with a diameter of 2.68 μm creates a force $F \approx 6.67 \times 10^{-10}$ N. This force in the biological microcosm is very large. According to Newton's law, it creates an acceleration of a biological cell of 9.5×10^{-18} kg mass equal to 7×10^7 m/s², which is million times greater than the acceleration of free fall on Earth ($g = 9.8$ m/s²)!

He has also showed that there is a transverse force that draws a refractive particle into a region of high light intensity - towards the axis of the beam from its periphery. His research became the basis for the creation of now widely known optical (laser) tweezers, which can be used to hold or move of microparticles, biological cells and individual atoms (Shwarz et al. 2021, Andriyanov et al. 2019, Tashtimirova et al. 2021, Jones et al. 2015, Padgett et al. 2010).

He has also made experiments on optical levitation, where the force of light pressure lifted and held micron-sized particles in the air.

The success of these experiments is explained by the fact that the focal region of the laser beam has dimensions comparable to the wavelength of visible light (several micrometers). The radiation intensity there is very high even with a beam power of several milliwatts, and the light pressure force is sufficient to manipulate micron-sized particles, which in such case receive all the power of the light beam.

The same research has begun in the microwave range, which is also interesting for use in science and technology. But in this range, solving the problem of manipulation objects using radiation pressure encountered great difficulties. This is due to the fact that the size of the focal spot is of the same order as the radiation wavelength. In the microwave range, this size is about 1 cm. It is impossible to focus a microwave beam more strongly under normal conditions. In order for the entire beam energy to reach the object, it must have the same dimensions. But objects of such dimensions have large mass, and it is difficult to manipulate them using radiation pressure. If the objects are small, just a small part of the beam power hits them, and therefore the effect on them is weak. To obtain fields whose magnitude is sufficient to manipulate objects, very high radiation powers are required.

But in works (Pettit et al. 2019, Kuzmichev et al. 2003, Akhmeteli et al. 2015, Kokodii et al. 2017, 2023, 2023, Kalambet et al. 2020) it was discovered that in the microwave range there is an effect of strong absorption and scattering of radiation by thin wires, which diameter is much smaller than the incident radiation wavelength. The values of absorption and scattering efficiency factors characterizing the interaction between wave and object can reach several hundreds and thousands. It can be expected that the radiation pressure efficiency factor in these cases will also be large. This will be described in detail in subsequent sections of such paper.

TASK STATEMENT

The force with which electromagnetic radiation presses on an object can be determined by the formula

$$F_{pr} = \frac{P}{c} Q_{pr}. \quad (1)$$

Here P is the radiation power, which hits the object, c is the light velocity, Q_{pr} is the radiation pressure efficiency factor. For example, for a completely absorbing surface $Q_{pr} = 1$, for an absolutely reflective plate $Q_{pr} = 2$.

For a circular cylinder on which a plane electromagnetic wave is incident normal to its axis, the radiation pressure efficiency factor is determined by the formulas (Kerker 1969, Van de Hulst 1981):

$$Q_{pr}^E = \frac{2}{\rho} \sum_{l=0}^{\infty} \text{Re} \left(b_l + b_{l+1}^* - 2b_l b_{l+1}^* \right), \quad (2)$$

$$Q_{pr}^H = \frac{2}{\rho} \sum_{l=0}^{\infty} \text{Re} \left(a_l + a_{l+1}^* - 2a_l a_{l+1}^* \right). \quad (3)$$

The superscripts E and H indicate the direction of polarization of the wave - along the axis of the cylinder (E-wave) or perpendicular to it (H-wave).

Coefficients b_l and a_l depend on the cylinder diameter D , wavelength λ and complex refractive index $m = n - ik$:

$$b_l = \frac{m J_l'(m\rho) J_l(\rho) - J_l(m\rho) J_l'(\rho)}{m J_l'(m\rho) H_l^{(2)}(\rho) - J_l(m\rho) H_l^{(2)'}(\rho)}, \quad (4)$$

$$a_l = \frac{m J_l(m\rho) J_l'(\rho) - J_l'(m\rho) J_l(\rho)}{m J_l(m\rho) H_l^{(2)'}(\rho) - J_l'(m\rho) H_l^{(2)}(\rho)}, \quad (5)$$

Here $\rho = \frac{\pi D}{\lambda}$, $J_l(z)$ is the Bessel function, $H_l^{(2)}(z)$ is the Hankel function of the 2nd kind, the prime denotes the derivative of the function with respect to the entire argument.

RADIATION PRESSURE ON A THIN METAL CYLINDER

A feature of the dependencies presented in Fig. 1 is a strong increase of the radiation pressure efficiency factor in the case of E-polarization on thin conducting cylinders - metal wires and semiconductor fibers. In the microwave range for wires of nano- and micrometer diameters, its value reaches several hundreds and thousands.

In Fig. 2 presented is the dependence of the radiation pressure efficiency factor for a copper wire on the parameter ρ (curve 1). One can see that at a certain value of this parameter, at the maximum, it is greater than 2000. It is interesting, that it can be greater than the radiation pressure efficiency factor for an absolutely reflective cylinder (curve 2), although the radiation pressure on a flat surface with a finite reflection coefficient always less than the pressure on absolutely reflective surface.

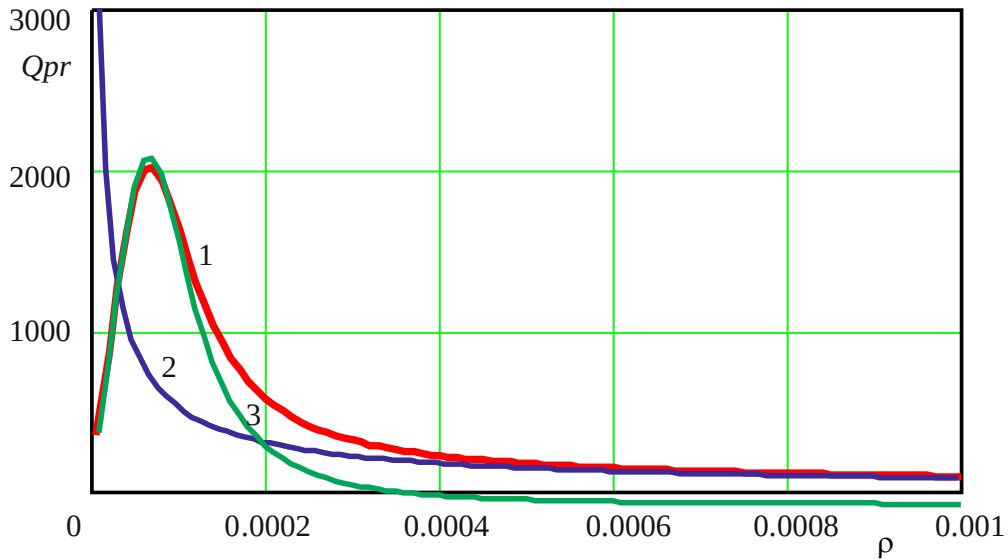


Fig. 2. Radiation pressure efficiency factor dependencies on ρ for:
in the microwave range

- 1) thin copper wire, 2) absolutely reflective wire,
3) thin copper wire, calculated using approximate formula.

Let us find the coordinate and value of the maximum of the radiation pressure efficiency factor. For this, one can use the fact that for a very thin wire the conditions $\rho \ll 1$, $|m\rho| \ll 1$ are satisfied, and in series (2) and (3) one can use only the first term, and in the coefficients b_l – the first term of the expansion into series of Bessel and Hankel functions. Let us describe the case of the E-wave. After some transformations, we obtain the following expression for the radiation pressure efficiency factor, which well describes the trajectory of the function $Q_{pr}^E(\rho)$ in the region of its maximum (curve 3 in Fig. 2):

$$Q_{pr}^E = \frac{\pi n^2 \rho}{1 + (n^2 \rho^2 \ln \rho)^2} \quad (6)$$

Here n is the real part of the complex refractive index. According to Drude theory, the complex refractive index of a metal in the infrared and microwave regions of the spectrum is determined as

$$m = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}} (1 - i), \quad (7)$$

where σ is conductivity, ω is circular frequency, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m is the dielectric constant of free space.

Position of the maximum can be found by differentiating of the expression (6). As result we obtain the following equation for determining the coordinates of the maximum,

$$1 - 3n^4 \rho^4 \ln(\rho)^2 - 2n^4 \rho^4 \ln(\rho) = 0.$$

The last term in this equation is much smaller than the other and can be neglected. Thus, the equation becomes the following form:

$$1 - 3n^4 \rho^4 \ln(\rho)^2 = 0 \quad (8)$$

It has three roots:

$$\begin{aligned} \rho_{1max} &= \exp\left(\frac{1}{2} \text{LambertW}\left(\frac{2}{\sqrt{3}n^2}\right)\right), \\ \rho_{2max} &= \exp\left(\frac{1}{2} \text{LambertW}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}n^2}\right)\right), \\ \rho_{3max} &= \exp\left(-1, -\frac{1}{2} \text{LambertW}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}n^2}\right)\right), \end{aligned}$$

where LambertW(x) is the Lambert function. It was introduced into the MAPLE mathematical computer system by the developers of this program (Corless et al. 1996), and then into the MATHCAD, MATLAB, MATHEMATICA programs. Three roots correspond to three branches of this function. The physical meaning in our problem has a third root. It shows the exact value of the position of the maximum on curve 3 of the $Q_{pr}(\rho)$ dependence in Fig. 2. But it is difficult to use the LambertW(x) function due to its lack of knowledge. Therefore, we have found an approximate solution of equation (8). One can use a fact that it is easy to construct a graph of $n(\rho)$, which covers the range of refractive index values for conductors in the infrared and microwave regions of the spectrum. From it one can find the inverse function $\rho(n)$, which is very simple,

$$\rho_{max} = \frac{1}{4n}. \quad (9)$$

This formula well describes the position of the radiation pressure efficiency factor maximum for conductors in the microwave range. It can be rewritten in the following form,

$$D_{max} = \frac{\lambda}{4\pi n} \approx 0.1\lambda_i, \quad (10)$$

where D is the diameter of the conductor, λ is the radiation wavelength in free space, and $\lambda_i = \lambda / n$ is the wavelength inside the conductor. Thus, the condition for maximum is a diameter value that is approximately 10 times smaller than the radiation wavelength in the conductor. For example, for copper at a wavelength of $\lambda = 8$ mm, the maximum will be for a conductor diameter of 170 nm. For graphite, the maximum will be for a conductor diameter of 3.5 microns.

The graph shows that the effect of microwave radiation on cylindrical metal nanoparticles is very strong. This can be used to retain and transportation such particles using microwave radiation, similar to laser tweezers in the optical range (Kokodii et al. 2020).

Putting expression (9) into (6) gives the value of the radiation pressure efficiency factor maximum,

$$Q_{abs\ max} \approx \frac{n}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\sigma \lambda}{\pi c \epsilon_0}}.$$

In our example, the value of the radiation pressure efficiency factor at the maximum is large – about 2000. The maximum is at very small diameter values – about 200 nm. But even in the micrometer range of diameter

values, the radiation pressure efficiency factor is large. For a copper cylinder with a diameter of 30 microns, it is equal to 28, which is also a large value.

The cylinder as an object of interaction with electromagnetic radiation is unique. The effect of strong interaction of thin cylinders with radiation was studied in detail in (Kokodii et al. 2024).

EXPERIMENT

We have made an experiment, where a target made of several metal wires has been moved in space. We have also measured the force of the electromagnetic radiation which moved a target.

We have used a torsion bar scale as the measuring transformer. The scheme of the experimental setup is presented in Fig. 4. A rocker arm 2 of a 50 mm length is suspended on tungsten wire 1 with a diameter of 8 microns and a length of 150 mm. At the edges of the rocker there are located receiving elements 3 and 4. One of them is an aluminum foil plate with dimensions $15 \times 15 \times 0.15$ mm. Its radiation pressure efficiency factor is $Q_{pr} = 2$. It was used for reference measurements. Another receiving element is a grating from copper wires with a diameter of 300 microns, located at distance 1 mm from one another. To measure the movement of the mobile system under the influence of radiation pressure, a laser beam 6 was directed at mirror 5. After reflection, the beam fell on scale 7. The beam offset l on the scale is related to the rotation angle α of the mobile system by the relation,

$$l = 2\alpha L,$$

where L is the distance from the mirror to the scale.

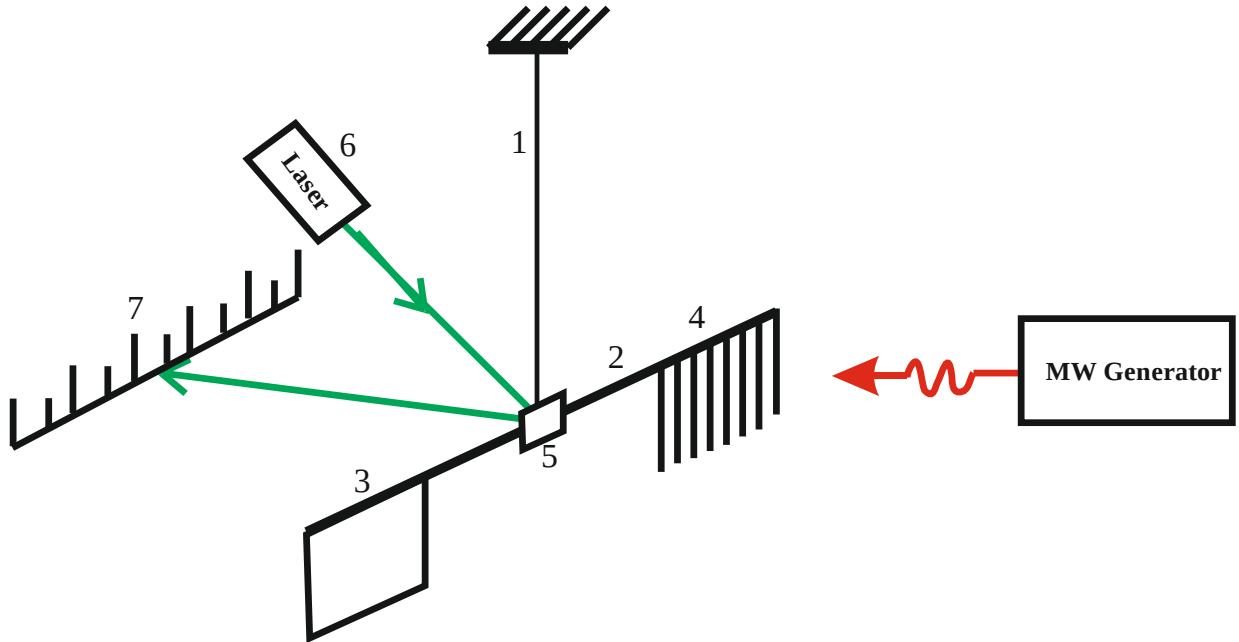


Fig. 4. Scheme of the experimental setup
1 – suspension, 2 – rocker arm, 3 – flat receiving element,
4 – grating receiving element, 5 – indicator mirror, 6 – laser,
7 – scale

Radiation with 8 mm wavelength was directed to the receiving element. The power of incident radiation on the receiver was $P = 32$ mW. Under the influence of the pressure of this radiation, the system has been rotated through an angle $\alpha = 1.54^\circ$. This angle can be determined by the formula

$$\alpha = \frac{M}{W}, \quad (13)$$

where $M = Fr$ is the torque acting on the system, F is the force applied to the receiving element, r is the arm of the force (the distance from the suspension to the middle of the receiving element), W is the specific counteracting moment of the suspension.

The specific counteracting moment of the suspension is determined by the relation following from solid mechanics,

$$W = \frac{\pi d^4 G}{32h} = 3.58 \cdot 10^{-10} \frac{N \cdot m}{rad},$$

where $d = 8 \text{ } \mu\text{m}$ is the diameter of the suspension, $h = 150 \text{ mm}$ is its length, $G = 151 \text{ GPa}$ is the shear modulus of tungsten.

The torque acting on the mobile system, according to (13), is equal to

$$M = \alpha W = 9.62 \cdot 10^{-12} \text{ N} \cdot \text{m} / \text{rad}.$$

A force acting on the receiving element is,

$$F = \frac{M}{r} = 5.50 \cdot 10^{-10} \text{ N}.$$

Here $r = 17.5 \text{ mm}$ is the arm of the force, that is, the distance from the suspension to the middle of the receiving element.

A force acting on each wire is,

$$F_1 = \frac{F}{N} = 3.44 \cdot 10^{-11} \text{ N},$$

where $N = 16$ is number of wires.

According to equation (1), the radiation pressure efficiency factor is equal to

$$Q_{pr} = \frac{F_1 c}{P_1} = 5.16.$$

Here $P_1 = F_1/N = 0.002 \text{ W}$ is the power incident on each wire.

Calculations using equation (2) give the value $Q_{pr} = 5.39$. The difference between theory and experiment is 4%. This is a good coincidence, considering the inaccuracy of estimating the power incident on each wire, the theoretical determining of the mechanical parameters of the suspension, and other factors.

CONCLUSIONS

We have studied the effect of very strong microwave radiation pressure on thin metal conductors. The radiation pressure efficiency factor on them can reach several hundreds and thousands.

We have determined the conditions for maximum radiation pressure - the relationship between the radiation wavelength, the diameter of the conductor and its conductivity.

We have shown a possibility of a levitation of targets in the form of metal wires with a diameter of several microns and a length of several millimetres, as well as control of their movement in space for the radiation power of several watts.

We have also measured the force acting on a thin metal wire by microwave radiation.

STATEMENTS AND DECLARATIONS

The authors declare that no funds, grants, or other support were received during the preparation of this manuscript.

The authors have no relevant financial or non-financial interests to disclose.

REFERENCES

1. Maxwell, J.C.: A treatise on electricity and magnetism. Oxford, Clarendon Press (1873).
2. Lebedev, P.: Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichtes. Annalen der Physik (in German) **4**(6), 433-458 (1901). <https://doi.org/10.1002/andp.19013111102>
DOI: <https://dx.doi.org/10.1002/andp.19013111102>
3. Poynting, J.H.: The pressure of light. London, Society for Promoting Christian Knowledge (1910). <https://doi.org/10.5962/bhl.title.31216>
4. Cullen, A.L.: A general method for the absolute measurement of microwave power. Proc. IEE. **99**(4), 112-120 (1952). <https://doi.org/10.1049/pi-4.1952.0013>
5. Barlow, H.E.M.: A new propositions on measurement of microwave power by radiation pressure. Proc. IEE. **113**(7), 1243-1247 (1966).
6. Barlow, H.E.M., Cross, P.H.: Device for measuring of absolute power 35 GHz by radiation pressure. Proc. IEE. **117**(4), 853-856 (1970).
7. Valitov R.A. Ponderomotive forces of electromagnetic waves and the possibilities of their application. Proc. Faculty of Radiophysics Kharkiv National Univ. vol. 3, 1959.
8. Orlov, V.G.: New types of ponderomotive measuring instruments on microwaves. Proc. Faculty of Radiophysics Kharkiv National Univ. **7**, 122-134 (1962).
9. Kokodii, N.G., Yefimov, V.F., Timoshenko, V.N., Susenko, L.N., Krysiuk V.Ya.: Measuring the spatial-energy characteristics of high-power laser radiation using the ponderomotive method. Proc. Inst. Radiophysics and Electronics AS USSR **33**, 194-206 (1988).
10. Valitov, R.A., Kukush, V.D., Orlov V.G.: Experiment on direct conversion of microwave electromagnetic field energy into mechanical work. Proc. Faculty of Radiophysics Kharkiv National Univ. **5** (1961).

11. Ashkin, A.: Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.* 24(4), 156-159 (1970). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.24.156>
12. Ashkin, A.: The pressure of laser radiation. *Advances in Physical Sciences* 110(11), 156-159 (1973).
13. Shwarz, K., Dauletbekova, A., Sorokin, M.: Light pressure: optical tweezer and biology. *Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Physics, Astronomy series* 135(2), 69-73 (2021).
14. Andriyanov, V.Yu., Chadiuk, V.O.: A model of capture of a dielectric nanoparticle by laser tweezer. *Proc. XI Conf. Promising directions of modern electronics, NTU KPI* (2019).
15. Tashtimirova, G.D.U., Savchenko, E.A., Aksenov, E.T., Kuptsov, V.D.: Optical tweezers based on Bessel beams. *Saint-Petersburg Polytechnic University. Photonics and informatic Optics.*, pp. 521-523 (2021).
16. Jones, P.H., Marago, O.M., Volpe, J.: *Optical tweezers: principle of work and applications. Introduction.* Cambridge University Press (2015). <https://doi.org/10.1017/CBO9781107279711.002>
17. Padgett, M.J., Molloy, J.E., McGloin, D.: *Optical Tweezers: Methods and Applications.* CRC Press London, New York, (2010).
18. Pettit, R.M., Ge, W., Kumar, P. et al. An optical tweezer phonon laser. *Nat. Photonics* 13, 402–405 (2019). <https://doi.org/10.1038/s41566-019-0395-5>
19. Kuzmichev, V.M., Kokodii, N.G., Safronov, B.V., Balkashin, V.P.: Values of the absorption efficiency factor of a thin metal cylinder in the microwave band. *Journal of Communications Technology and Electronics* 48(11), 1240–1242 (2003).
20. Akhmeteli, A., Kokodii, N., Safronov, B., Balkashin, V., Priz, I., Tarasevich, A.: Efficient non-resonant absorption of electromagnetic radiation in thin cylindrical targets: experimental evidence. *Bulletin of the American Physical Society* (2015) <https://doi.org/10.1117/12.2053482>.
21. Kokodii, N.G., Kaydash, M.V., Timaniuk, V.A., Priz, I.A.: Interaction of electromagnetic radiation with a thin metal wire in the case of a glancing incident wave. *Journal of Communications Technology and Electronics* (2017). <https://doi.org/10.1134/S1064226917130010>.
22. Kokodii, M.G., Natarova, A.O., Genzarovskiy, A.V. et al. Interaction between thin conductive fibers and microwave radiation. *Opt Quant Electron* 55, 256 (2023). <https://doi.org/10.1007/s11082-022-04389-x>
23. Kokodii, N., Maslov, V., Gurina, D. et. al. On the possibility of efficient energy transfer of electromagnetic radiation to very thin wires. *Proc. 6th Int. Conf. on Optics, Photonics and Lasers (OPAL'2023)*, pp. 71-74 (2023).
24. Kalambet, M.S., Kokodii, N.G., Maslov, V.A., Muntean, K.I.: Diffraction resonances and absorption of electromagnetic radiation in conducting cylinders. *Proc. 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW), Kharkiv*, pp. 720-725 (2020). <https://doi.org/10.1109/UkrMW49653.2020.9252765>
25. Van de Hulst, H.C.: *Light scattering by small particles.* NY, Wiley, 1981.
26. Kerker, M.: *The scattering of light and other electromagnetic radiation.* N.Y. and London, Academic Press (1969).
27. Corless, R.M., Gonnet, G.H., Hare, D.E.G. et al. On the LambertW function. *Adv Comput Math* 5, 329–359 (1996). <https://doi.org/10.1007/BF02124750>
28. Kokodii, N.G., Pogorelov, S.V., Timaniuk, V.A., Krasovskyi, I.V.: The laser radiation pressure on nanocapsule (the ability to move). *Proc. Int. Conf. Laser Optics (ILCO-2020)*, 9285825 (2020).
29. Debye, P.: *Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material.* *Annalen der Physik*, Vierte Folge (in German), 30(1), 57-136 (1909). <https://doi.org/10.1002/andp.19093351103>
30. Kokodii, N.G., Natarova, A.O., Gurina, D. et. al. The effect of anomaly strong absorption of electromagnetic radiation by thin conductive fibers. *Radiophysics and Radioastronomy*, 29(1), 76–82 (2024). <https://doi.org/10.15407/rpra29.01.76>

The article was received by the editors: March 27 2025

The article is recommended for printing: May 6 2025

ТИСК ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ НА ДУЖЕ ТОНКІ ПРОВІДНИКИ

М. КОКОДІЙ¹, А. НАТАРОВА², С. МОВЕНКО¹, Д. ГУРІНА¹,
І. ГАРЯЧЕВСЬКА¹, Д. НАТАРОВ³, М. РУДНЕВА¹

¹Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 61022, Харків, Україна

²Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, 61023, Харків, Україна

³Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України, 61085, Харків, Україна

Актуальність. Механічна дія лазерного випромінювання в оптичному діапазоні використовується для левітації, утримання і транспортування мікрочастинок. Тут використовується те, що пучок випромінювання тисне на частинку, втягує її в область великої інтенсивності поля й утримує її там. У мікрохвильовому діапазоні створення подібних пристроїв зустрічає великі труднощі, пов'язані з тим, що дифракція не дає змоги здійснити гостре фокусування пучка, тому діаметр фокальної плями виходить не меншим за 1 сантиметр. Неможливо отримати таку велику концентрацію енергії випромінювання, як в оптичному діапазоні, де діаметр фокальної плями може бути не більшим за 1 мікрометр.

Мета роботи Ці труднощі можна подолати, якщо використовувати ефект сильного поглинання і розсіювання мікрохвильового випромінювання дуже тонкими провідниками - металевими дротами, графітовими і напівпровідниковими волокнами.

Матеріали та методи. У статті проведено теоретичний аналіз ефекту сильного тиску мікрохвильового випромінювання на тонкі провідники. Виведено умову максимуму тиску випромінювання - співвідношення між довжиною хвилі випромінювання, діаметром провідника та його провідністю. У максимумі фактор ефективності тиску мікрохвильового випромінювання дуже великий - сотні й тисячі.

Результати. Проведено аналіз можливості левітації та керування рухом тонких металевих мішеней за допомогою мікрохвильового випромінювання. Мішенями можуть бути металеві провідники діаметром кілька мікрометрів і довжиною кілька міліметрів. Фокусувати випромінювання на мішень немає необхідності. Проведено вимірювання сил, що діють на тонкі провідники. Для цього використано торсіонні ваги з підвісом із дроту діаметром кілька мікрометрів і оптичним відліком кута повороту. Результати розрахунків і результати експерименту добре збігаються один з одним.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тиск пучка випромінювання, тонке волокно, дріт, левітація.

Стаття надійшла до редакції: 27 березня 2025 р.

Рекомендовано до друку: 6 травня 2025 р.

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-06>

УДК 535.326

РОЗВИТОК МЕТОДОЛОГІЇ ПЕРЕХОДУ ВІД СПЕКТРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВІДНОСНО ПРОСТОРОВОЇ ЗМІННОЇ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВІДНОСНО СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА У ПРОБЛЕМІ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ ДЛЯ ОДНОВИМІРНО-ПЕРІОДИЧНОГО ДВОШАРОВОГО ФОТОННОГО КРИСТАЛА

О. В. КАЗАНКО, асистент

e-mail: a_kazanko@i.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9202-8008>

О. Е. ПЕНКІНА, ст. викл.

e-mail: penkina@kart.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9804-6685>

О. В. ГОЛОВКО, канд. техн. наук, доц.

e-mail: golovko.aleksandra1@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9958-3960>

*Український державний університет залізничного транспорту,
м. Харків, майдан Фейєрбаха, 7, Україна*

Актуальність. У зв'язку із розв'язанням задачі про розсіяння електромагнітних хвиль (дифракційної задачі) на таких об'єктах як фотонні кристали (одновимірні-періодичні необмежені) важливим є дослідження дисперсійного співвідношення. Йдеться про розв'язання хвильового рівняння з подальшим застосуванням методу розділення змінних (для дифракційних структур, які розглядаються у роботі, зазначений метод розділення змінних дозволяє отримати розв'язок хвильового рівняння, котре у такому разі виявляється рівнянням з періодичними коефіцієнтами, у явному вигляді) та переходом до проблеми Штурма-Ліувілля на необмеженому інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Дисперсійне співвідношення дає змогу зрозуміти умови, при яких проблема Штурма-Ліувілля підлягає вирішенню та пов'язує ці умови з параметрами дифракційної задачі, і тому стає неодмінним щаблем на шляху до отримання розв'язків даного хвильового рівняння. Цей труд продовжує серію виданих раніше робіт з розвитку підходів до вивчення зазначеного дисперсійного співвідношення через розуміння поведінки розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля. Метод матриці перенесення (Transfer matrix method) для хвильового рівняння з періодичними коефіцієнтами дає змогу врахувати специфіку його розв'язання на необмеженому інтервалі $(-\infty, +\infty)$, та досягти виконання складової умови, при якій проблема Штурма-Ліувілля підлягає вирішенню – умови про самоспряженість диференціального оператора в цій проблемі. Це з одного боку, а з іншого – такий метод наочно указує на місце, яке займає розв'язок спектрального рівняння у дисперсійному співвідношенні.

Мета роботи спрощення одержаного раніше рівняння, що є наслідком спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля для одновимірні-періодичного двошарового фотонного кристала. Зокрема, інтегрування деяких складових членів лінійного представлення 1-ї й 2-ї похідних від розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля.

Методи. Метод розділення змінних використовується для розв'язання хвильового рівняння. Метод матриці перенесення (Transfer matrix method) для хвильового рівняння з періодичними коефіцієнтами дає змогу врахувати специфіку його розв'язання на необмеженому інтервалі $(-\infty, +\infty)$ та досягти виконання складової умови, при якій проблема Штурма-Ліувілля підлягає вирішенню – умови про самоспряженість диференціального оператора в цій проблемі. Для взяття інтеграла від окремих складових членів лінійного представлення 1-ї й 2-ї похідної від розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля використовується метод інтегрування частинами.

Результати. У роботі було показано, що в ході ряду послідовних перетворень, коефіцієнт при нульовій похідній у зведеному диференціальному рівнянні (рівнянні відносно спектрального параметра, до якого здійснюється перехід – згідно з назвою роботи) підлягає спрощенню. Зокрема, було проінтегровано квадрат коефіцієнта лінійного представлення 1-ї похідної від розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: фотонний кристал, розсіяння електромагнітних хвиль, похідна за спектральним параметром, проблема Штурма-Ліувілля, спектральне рівняння, дисперсійне рівняння, власна функція, фотона заборонена зона, хвильове рівняння шаруватого середовища.

Як цитувати: Казанко В, Пенкіна ОЕ, Головка ОВ. Розвиток методології переходу від спектрального рівняння відносно просторової змінної до диференціального рівняння відносно спектрального параметра у проблемі Штурма-Ліувілля для одновимірні-періодичного двошарового фотонного кристала. Вісник

Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2025;42:55-63. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-06>

In cites: Kazanko OV, Penkina OE, Golovko OV. Development of a methodology for transitioning from a spectral equation relative to a spatial variable to a differential equation relative to a spectral parameter in the Sturm-Liouville problem for a one-dimensional periodic two-layer photonic crystal. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series "Radiophysics and Electronics". 2025;42:55-63 (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-06>

ВСТУП

Сьогодні, як свідчить аналіз даних наукометричних порталів, фотоніка є галуззю науки та техніки, що стрімко розвивається, отже, приваблює інтерес багатьох учених, дослідників різних кваліфікаційних рівнів та напрямів, а також наукових, інститутів по цілому світі [1-2]. Важко, мабуть, уявити сучасну промисловість без усіляких електронних приладів. Проте, добре відомий емпіричний закон Мура передбачає обмеженість у можливостях накопичувати і разом із тим зменшувати електронні чіпи. Отож, подальший розвиток комп'ютерної галузі (продовження тенденції Мура) потребує значних та революційних науково-технічних рішень. Тому, опинившись на порозі виникнення кризи Мура в науковому суспільстві почали говорити про можливі й одночасно реалістичні шляхи розвитку всієї інформаційної технології. На тлі таких подій деякі наукові аналітики схилилися до думки, що найбільш реалістичною та підхожою галуззю, яка зможе подолати кризу Мура стане фотоніка, інші – передрікають стрибкоподібне зростання у розвідці комп'ютерної техніки саме за рахунок впровадження технологій на основі фотонних кристалів [3-4].

У даній роботі розглядається плоский одновимірний-періодичний двошаровий фотонний кристал необмежений вздовж періодичності (далі, *основна дифракційна структура*), для якого записується хвильове рівняння та здійснюється вихід на проблему Штурма-Ліувілля на нескінченному проміжку $(-\infty, +\infty)$. Умовам розв'язання проблеми Штурма-Ліувілля приділяється чималий розділ у теорії рівнянь з частковими похідними, яким є хвильове рівняння. Звідти відомі ключові прийоми забезпечення цих умов при розв'язанні найвідоміших рівнянь з частковими похідними. Для рівнянь з періодичними коефіцієнтами, яким виявляється хвильове рівняння, може використовуватися метод матриці перенесення (Transfer matrix method), завдяки якому стає зрозумілим складова умова розв'язання проблеми Штурма-Ліувілля – умова про самопряженість диференціального оператора у цій проблемі. Метод передбачає виведення дисперсійного рівняння, яке відіграє сполучувачу роль між умовами вихідної дифракційної задачі та щойновказаною складовою умовою розв'язання проблеми Штурма-Ліувілля. Протягом досить довготривалого часу автори мали змогу теоретично та частково чисельно досліджувати функцію Z – розв'язок спектрального рівняння – як функцію спектрального параметра (окрім просторової залежності функція Z , будучи розв'язком спектрального рівняння, звісно, має залежність ще й від спектрального параметра). Ця функція Z може розглядатися як складовий член дисперсійного співвідношення для фотонного кристала (основної дифракційної структури). Метод матриці перенесення наочно показує значущість цієї функції у складі дисперсійного співвідношення. Як неодноразово зазначалося у попередніх роботах, чисельне дослідження дисперсійного рівняння розглядуваного фотонного кристала здійснювалося багатьма авторами [4-8], проте дослідження на предмет розуміння аналітичних властивостей складових членів, судячи з доступної літератури, не проводилося. Одна очевидна складність при аналізі та розв'язанні такого співвідношення виражається у багаточисельності параметрів вихідної дифракційної задачі: матеріальних, геометричних та хвильових параметрів. Інша, менш очевидна складність, пов'язана з обчисленням власних чисел спектральної проблеми Штурма-Ліувілля – розв'язанням дисперсійного співвідношення відносно спектрального параметра. А саме, ця складність полягає у близько дистанційованому розташуванні коренів (сильними осциляціями). Тут, при застосуванні чисельного апарату виникає необхідність реалізовувати табулювання з досить мілким кроком, відділення проміжків монотонності – процедура, що звісно, потребує машинного часу. Можливе виявлення емерджентних властивостей (властивості, які не притаманні окремим складовим членам рівняння, а притаманні лише кінцевому рівнянню) може суттєво посприяти кількісному розумінню зазначених проблем. На думку авторів, дослідження функції Z як функції спектрального параметра може у цілому посприяти розвитку поглядів на дисперсійне співвідношення.

У попередніх роботах були записані лінійні представлення для 1-ї, 2-ї похідних від розв'язку спектрального рівняння за спектральним параметром, що дало змогу перейти до лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку – *зведеного рівняння* [9]. У теперішній роботі здійснюється ряд послідовних перетворень коефіцієнта при нульовій похідній у такому зведеному рівнянні, зокрема, інтегрується квадрат функції ξ , де ξ – складовий член коефіцієнтів лінійного представлення для 1-ї й 2-ї

похідної за спектральним параметром від розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля (лінійне представлення через саму функцію та свою похідну, але за просторовою змінною). Як відомо з попередніх робіт, ξ задовольняє диференціальному рівнянню, власне, це головним чином, й послугувало можливості звільнитися від знаку інтеграла у послідовному перетворенні коефіцієнтів зведеного рівняння при 0-й похідній. На думку авторів, такі перетворення сприятимуть спрощенню самого коефіцієнта, та розумінню поведінки відносно спектрального параметра, а також розумінню степені вкладу цього коефіцієнту у зведене рівняння.

Нехай $LZ = -\beta^2 Z$ – спектральне рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля, L – лінійний диференціальний оператор 2-го порядку, β – спектральний параметр. Метод матриці перенесення передбачає постановку іншої спектральної проблеми для квадратної матриці розміром 2×2 (матриці перенесення) [5]. Суть методу ґрунтується на побудові лінійного оператора T , що діє у двовимірному просторі розв'язків (площині розв'язків) спектрального рівняння $LZ = -\beta^2 Z$ та розв'язку $Z(z-l)$ ставить у відповідність розв'язок $Z(z)$: $T: Z(z-l) \rightarrow Z(z)$, l – період кристала, $z \in (-\infty, +\infty)$ – незалежна просторова змінна (лінійність оператора T перевіряється безпосередньо за визначенням). Оскільки, у кінцевовимірних просторах лінійний оператор однозначно задається деякою матрицею, то T є квадратна матриця розміром 2×2 (тобто оператор T отожднюється з матрицею) [7-8]. Отже, маємо задачу на власні числа для квадратної матриці T : $TZ = \Lambda Z = \Lambda Z$ – розв'язок спектрального рівняння, Λ – спектральний параметр. Ця задача еквівалентна розв'язанню наступного квадратного рівняння відносно параметра Λ : $\det(TZ - \Lambda I) = 0$. Звідки маємо два (та лише два) власних числа Λ_1, Λ_2 .

Нехай, далі, Λ_1, Λ_2 – власні числа матриці перенесення T , тоді для будь-якого β виконується тотожність $\Lambda_1 Z(z-l) = Z(z)$, $z \in (-\infty, +\infty)$. Вище зазначалось, що із загальної теорії рівнянь у часткових похідних відомі ключові прийоми забезпечення умов, завдяки яким проблема Штурма-Ліувілля підлягає вирішенню. При застосуванні методу матриці перенесення до рівнянь з періодичними коефіцієнтами для власних чисел Λ_1, Λ_2 має виконуватись умова $\Lambda_1 \overline{\Lambda_2} = 1$ (у просторі функцій, що задовольняють цій умові диференціальний оператор Штурма-Ліувілля є самоспряженим).

ПОСТАНОВКА ДИФРАКЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ

Будемо розглядати дифракційну задачу для двошарового нескінченного одновимірного періодичного фотонного кристала з періодом l . Нехай ε_j, μ_j – діелектрична та магнітна проникності відповідно 1-го й другого шарів ($j = 1, 2$), d – розмір першого шару, $l-d$ – другого шару. Уведемо прямокутну декартову систему координат ZOY таким чином, щоб періодичність структури була направлена вздовж вісі OZ . Скалярне рівняння плоских монохроматичних Е-поляризованої хвилі (хвильове рівняння) для двовимірного середовища, заповненого даним кристалом, має наступний вигляд (модифіковане рівняння Гельмгольца):

$$\Delta_\mu u + k^2 n^2 u = 0, \quad (1)$$

тут $\Delta_\mu = \mu \nabla_\mu^2$ – модифікований оператор Лапласа, $u = u(z, y)$ – шукана скалярна функція, $z, y \in (-\infty, +\infty)$, $n(z) = \sqrt{\varepsilon \mu}$ – коефіцієнт заломлення – кусково-стала функція, $\varepsilon = \varepsilon(z)$ – діелектрична проникність, $\mu = \mu(z)$ – магнітна проникність – кусково-сталі:

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & z \in (\frac{d}{2}-l+ml, \frac{d}{2}+ml] \\ \varepsilon_2, & z \in (-\frac{d}{2}+ml, \frac{d}{2}+ml] \end{cases}, \quad \mu(z) = \begin{cases} \mu_1, & z \in (\frac{d}{2}-l+ml, \frac{d}{2}+ml] \\ \mu_2, & z \in (-\frac{d}{2}+ml, \frac{d}{2}+ml] \end{cases},$$

m – ціле, l – період шаруватого кристала, $k = \frac{\omega}{c}$ – хвильове число, ω – циклічна частота плоского монохроматичної хвилі, c – швидкість світла у порожнечі [10].

Згідно з методом розділення змінних, загальний розв'язок рівняння (1) представляється у вигляді ряду Фур'є:

$$u = \sum_n Y_{\beta_n} Z_{\beta_n}, \quad (2)$$

де $Y_{\beta_n} = Y_{\beta_n}(y)$ – задовольняє такому рівнянню $\ddot{Y}_{\beta_n} + \beta_n^2 Y = 0$ (звичайному лінійному диференціальному рівнянню 2-го порядку), та відповідно має вигляд, $Y_{\beta_n}(y) = C_{\beta_n} e^{\beta_n y} + D_{\beta_n} e^{-\beta_n y}$, C_{β_n}, D_{β_n} – довільні константи, $\{Z_{\beta_n}\}_{n=0, \pm 1, \dots}$ – повна ортогональна система функцій, причому, $Z_{\beta_n} = Z_{\beta_n}(z)$ задовольняє рівнянню $\mu(\frac{1}{\mu} \ddot{Z}) + (k^2 n^2 + \beta_n^2) Z = 0$ [8-9]. Специфіка розв'язання задачі, зокрема, виявляється у тому, що розв'язок відшукується на всій числовій осі.

Як відомо, побудова повної ортогональної системи функцій, кожен елемент якої задовольняє деякому лінійному диференціальному рівнянню 2-го порядку – проблема Штурма-Ліувілля – може здійснюватись шляхом розв'язання наступної спектральної проблеми

$$LZ = -\beta^2 Z, \quad (3)$$

де β – спектральний параметр, L – лінійний диференціальний оператор 2-го порядку, заданий у певному функціональному просторі Гільберта H – в опорному просторі. Стосовно рівняння (1), диференціальний оператор має вигляд $LZ \equiv \mu \left(\frac{1}{\mu} \dot{Z} \right) + k^2 n^2 Z$, а у якості опорного простору H вибирається простір майже-періодичних функцій з наступним скалярним добутком (майже-періодичні функції утворюють повний простір, що їй потрібно для застосування апарату рядів Фур'є та розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля):

$$(u, v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{z_0}^{z_0+T} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz, \quad (4)$$

де $u, v \in H$, $\mu = \mu(z)$ – магнітна проникність – кусково-стала функція, $z_0 \in (-\infty, +\infty)$ – довільна точка. Скалярний добуток (4) не залежить від вибору точки z_0 .

ОГЛЯД

У даній роботі продовжує розвиватися інтерес до функції Z – до розв'язку спектрального рівняння – як до функції спектрального параметра β . Раніше опубліковані роботи присвячувалися розвитку методики визначення норми власних функцій проблеми Штурма-Ліувілля, де розбиралось ціле коло питань, пов'язаних з інтегруванням квадрата модуля власної функції проблеми Штурма-Ліувілля. Паралельно виник інтерес до 1-ї, згодом й до 2-ї похідних від такого розв'язку спектрального рівняння за спектральним параметром. У даній роботі знову зачіпаються питання подібні до питань з визначення норми, адже норма задається скалярним добутком, тобто інтегральним перетворенням з квадратом даної функції, яка є розв'язком неоднорідного рівняння з кусково-сталою правою частиною та обертається в нуль (за просторовою змінною) на межі розподілу середовищ кристала.

Якщо Z – розв'язок спектрального рівняння (3) – задовольняє циклічній умові $\Lambda Z(z-l) = Z(z)$ з деяким комплексним числом Λ (необов'язково з таким, що $\Lambda \bar{\Lambda} = 1$), то 1-ша, й 2-га похідні за спектральним параметром β представляються лінійно через саму функцію та свою похідну, але за просторовою змінною: $\psi = -\frac{1}{2} \xi Z + \xi \dot{Z}$, $\varphi = -\left(\frac{1}{2} \xi' + 2\beta \int \xi\right) Z + \xi \dot{Z}$, ξ – відома функція [4-7]. 1-а похідна визначається як розв'язок неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку (таке рівняння отримується диференціюванням спектрального рівняння за спектральним параметром: $LZ = -\rho Z \Leftrightarrow LZ' = -Z - \rho Z' \Leftrightarrow LZ' + \rho Z' = -Z$):

$$\left(\frac{1}{\mu} \dot{\psi}\right) + \frac{\zeta^2}{\mu} \psi = -2 \frac{\beta}{\mu} Z,$$

тут ψ – шукана функція. Розв'язуючи, рівняння (5) маємо

$$\psi = -\frac{1}{2} \xi Z + \xi \dot{Z},$$

тут ξ – обертається в нуль на межі розподілу шарів кристала [11]. Для знаходження 2-ї похідної маємо також лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку ($LZ = -\rho Z \Leftrightarrow LZ'' + Z' + \rho Z'' = -Z' \Leftrightarrow LZ'' + Z' + \rho Z'' = -Z'$):

$$\left(\frac{1}{\mu} \dot{\phi}\right) + \frac{\zeta^2}{\mu} \phi = -\frac{2}{\mu} Z'.$$

Функція задовольняє рівнянню для будь-якого ξ [12]. На шляху до чого розвився інтерес до визначення 1-ї, 2-ї похідної за спектральним параметром.

$$\varphi = -\left(\frac{1}{2} \xi' + 2\beta \int \xi\right) Z + \xi \dot{Z},$$

де функція ξ є тією ж функцією, що й у 1-й похідній та виражається через наступне неоднорідне диференціальне рівняння

$$\left(\phi \frac{1}{\mu}\right) + 4 \frac{\zeta^2}{\mu} \phi = \frac{2}{\mu}, \quad (5)$$

тут

$$\xi = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \phi.$$

Врешті, у роботі [13] записується лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку відносно функції Z як функції спектрального параметра β :

$$-\left(\frac{Z'}{\xi}\right)' = \ln' \xi Z. \quad (6)$$

Таким чином, прагнення розуміти поведінку розв'язку спектрального рівняння за спектральним параметром, виходячи з попередніх авторських робіт, приводить до лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку. Звідки виникає задача вивчати таке диференціальне рівняння. Функція ξ має досить глибоку складність, оскільки виражається як розв'язок неоднорідного рівняння (5), котрий зі своїм інтервалом задовольняє циклічним умовам на періоді. На думку авторів, розумно задатися питанням про можливість існування емерджентних властивостей такої функції ξ , тобто властивостей, які ця функція ξ виявляє на більш високих рівнях складності (властивості, які не притаманні складовим членам цієї функції).

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Запишемо похідну від коефіцієнта при 0-й похідній рівняння (6):

$$(\xi' \xi - \xi \xi') = \xi' \xi + \xi' \xi - \xi \xi' - \xi \xi' = \xi' \xi - \xi \xi'.$$

Далі, скористуємося тим, що функції ξ , ξ' є розв'язки рівняння (5),

$$\begin{aligned} \xi' \xi - \xi \xi' &= \left[-4 \frac{\zeta_p^2}{\mu} \xi' - \frac{4}{\mu} \xi - \frac{1}{\mu} \xi' \right]_{-\frac{d}{2}} \xi + \left[-4 \frac{\zeta_p^2}{\mu} \xi + \frac{2}{\mu} \left(z + \frac{d}{2} \right) - \frac{1}{\mu} \xi \right]_{-\frac{d}{2}} \xi' \\ &= -4 \frac{\zeta_p^2}{\mu} \xi' \xi - \frac{4}{\mu} \xi \xi - \frac{1}{\mu} \xi' \xi + 4 \frac{\zeta_p^2}{\mu} \xi' \xi + \left[\frac{2}{\mu} \left(z + \frac{d}{2} \right) - \frac{1}{\mu} \xi \right]_{-\frac{d}{2}} \xi' \\ &= -\frac{4}{\mu} \xi^2 - \frac{1}{\mu} \xi' \xi + \left[\frac{2}{\mu} \left(z + \frac{d}{2} \right) - \frac{1}{\mu} \xi \right]_{-\frac{d}{2}} \xi' \end{aligned}$$

(підкреслені доданки взаємознищуються). З останнього перетворення, вирисовується потреба в інтегруванні квадрата функції ξ .

У випадку, коли шарує середовище вироджується в суцільне однорідне середовище (матеріальні параметри є сталими: $\varepsilon_{1,2}$, $\mu_{1,2} = \text{const}$) для квадрата розв'язку спектрального рівняння має місце формула (взагалі кажучи, формула має місце для лінійного однорідного рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами):

$$\left(\frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \right)^2 + \left(\frac{\zeta}{\mu} \kappa \right)^2 = C, \quad (7)$$

тут κ – розв'язок спектрального рівняння, $C = \text{const}$. Якщо функція κ є розв'язком спектрального рівняння (3), то похідна від цієї функції $\dot{\kappa}$ також є розв'язком даного рівняння (взагалі кажучи, такі розв'язки не обов'язково мають бути лінійно незалежні). Тож, записуючи визначник Вронського для функцій κ , $\dot{\kappa}$ у випадку суцільного середовища, приходимо до вище записаного співвідношення – (7). Остання формула може бути перенесена на шарує середовище у припущеннях, що за просторовою змінною розв'язок κ обертається в нуль на межі розподілу середовищ кристала. Ці міркування покладено в основу перетворень коефіцієнта зведеного рівняння при 0-й похідній у рівнянні (5). Проінтегруємо (6):

$$\int_{-\frac{d}{2}}^z \left(\frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \right)^2 + \int_{-\frac{d}{2}}^z \left(\frac{\zeta}{\mu} \kappa \right)^2 = C \left(z + \frac{d}{2} \right) \Big|_{-\frac{d}{2}}^z.$$

Далі, інтегруємо частинами,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{d}{2}}^z \left(\frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \right)^2 d\tau &= \int_{-\frac{d}{2}}^z \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} d\tau = \int_{-\frac{d}{2}}^z \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} d \frac{1}{\mu} \kappa = \\ &= \frac{1}{\mu} \kappa \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \Big|_{-\frac{d}{2}}^z - \int_{-\frac{d}{2}}^z \frac{1}{\mu} \kappa \left(\frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \right) dt = \frac{1}{\mu} \kappa \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \Big|_{-\frac{d}{2}}^z + \int_{-\frac{d}{2}}^z \frac{1}{\mu} \frac{\zeta^2}{\mu} \kappa^2 dt = \frac{1}{\mu} \kappa \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \Big|_{-\frac{d}{2}}^z + \int_{-\frac{d}{2}}^z \left(\frac{\zeta}{\mu} \kappa \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Повертаючись до (6) маємо,

$$\frac{1}{\mu} \kappa \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \Big|_{-\frac{d}{2}}^z + 2 \int_{-\frac{d}{2}}^z \left(\frac{\zeta}{\mu} \kappa \right)^2 dt = C \left(z + \frac{d}{2} \right) \Big|_{-\frac{d}{2}}^z \Leftrightarrow 2 \int_{-\frac{d}{2}}^z \left(\frac{\zeta}{\mu} \kappa \right)^2 dt = C \left(z + \frac{d}{2} \right) \Big|_{-\frac{d}{2}}^z - \frac{1}{\mu} \kappa \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \Big|_{-\frac{d}{2}}^z.$$

Отже, отримали вираз для інтеграла, подібний до інтеграла від квадрата функції κ . Перенесемо ці міркування на функцію ξ . Проінтегруємо рівняння (5):

$$\frac{1}{\mu} \dot{\phi} - \frac{1}{\mu} \dot{\phi} \Big|_{-\frac{d}{2}} + 4 \frac{\zeta_{\rho}^2}{\mu} \int_{-\frac{d}{2}}^z \phi = -\frac{2}{\mu} \left(z + \frac{d}{2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\mu} \dot{\xi} - \frac{1}{\mu} \dot{\xi} \Big|_{-\frac{d}{2}} + 4 \frac{\zeta_{\rho}^2}{\mu} = -\frac{2}{\mu} \left(z + \frac{d}{2} \right)$$

$$\frac{1}{\mu} \dot{\phi}' - \frac{1}{\mu} \dot{\phi}' \Big|_{-\frac{d}{2}} + 4 \frac{\zeta_{\rho}^2}{\mu} \int_{-\frac{d}{2}}^z \phi' = -\frac{4}{\mu} \int_{-\frac{d}{2}}^z \phi = \Rightarrow \frac{1}{\mu} \dot{\xi}' - \frac{1}{\mu} \dot{\xi}' \Big|_{-\frac{d}{2}} + 4 \frac{\zeta_{\rho}^2}{\mu} \xi' = -\frac{4}{\mu} \xi,$$

або

$$\dot{\xi}' = \frac{1}{\mu} \dot{\xi}' \Big|_{-\frac{d}{2}} \mu - 4 \zeta_{\rho}^2 \xi' + 4 \xi \Leftrightarrow \dot{\xi}' \xi = \frac{1}{\mu} \dot{\xi}' \Big|_{-\frac{d}{2}} \mu \xi - 4 \zeta_{\rho}^2 \xi' \xi - 4 \xi^2.$$

Це перетворення наштовхнуло на думку, що ці розв'язки задовольняють лінійному однорідному рівнянню виду (5). Спроби виписати похідні від останнього представлення дали змогу зробити висновок про можливість інтегрувати квадрат, але за умови, що розв'язок обертається в нуль на межі розподілу шарів кристала. Хвильове рівняння для одновимірно-періодичного двошарового фотонного кристала є лінійним диференціальним рівнянням у часткових похідних 2-го порядку з кусково-сталім коефіцієнтом та може розв'язуватися методом розділення змінних [14-17]. Запишемо 1-шу похідну:

$$\frac{1}{\mu} \left(\xi \frac{1}{\mu} \dot{\xi} \right) = \frac{1}{\mu} \times \xi \frac{1}{\mu} \dot{\xi} + \xi \left(\frac{1}{\mu} \dot{\xi} \right) = \left(\frac{1}{\mu} \dot{\xi} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \xi \left(-\frac{\zeta^2}{\mu} \xi + \frac{2}{\mu} \right) = \left(\frac{1}{\mu} \dot{\xi} \right)^2 - \left(\frac{\zeta}{\mu} \xi \right)^2 + \frac{2}{\mu^2} \xi.$$

Далі, інтегруємо обидві частини останнього перетворення,

$$\frac{1}{\mu} \left(\kappa \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \right) - \frac{1}{\mu} \left(\kappa \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \right) \Big|_{-\frac{d}{2}} + 4 \frac{\zeta^2}{\mu} \int_{-\frac{d}{2}}^z \kappa \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \right)^2 - \left(\frac{\zeta}{\mu} \kappa \right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{\mu} \kappa \right)^2 = \frac{1}{\mu} \left(\kappa \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \right) \Big|_{-\frac{d}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \right)^2 + \left(\frac{\zeta}{\mu} \kappa \right)^2 = C.$$

Зрозуміло, що якщо функція κ обертається в нуль на межі розподілу шарів кристала, то ця функція κ задовольняє спектральному рівнянню (3), справді,

$$\int_{-\frac{d}{2}}^z \left(\frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \right)^2 dt = \int_{-\frac{d}{2}}^z \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} dt = \int_{-\frac{d}{2}}^z \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} d \frac{1}{\mu} \kappa =$$

$$= \frac{1}{\mu} \kappa \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \Big|_{-\frac{d}{2}}^z - \int_{-\frac{d}{2}}^z \frac{1}{\mu} \kappa \left(\frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \right) dt = \frac{1}{\mu} \kappa \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \Big|_{-\frac{d}{2}}^z + \int_{-\frac{d}{2}}^z \frac{1}{\mu} \frac{\zeta^2}{\mu} \kappa^2 dt = \frac{1}{\mu} \kappa \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \Big|_{-\frac{d}{2}}^z + \int_{-\frac{d}{2}}^z \left(\frac{\zeta}{\mu} \kappa \right)^2 dt.$$

Тобто, запишемо (інтегруємо частинами)

$$\left(\frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \right)^2 + \left(\frac{\zeta}{\mu} \kappa \right)^2 = C \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \kappa \frac{1}{\mu} \dot{\kappa} \Big|_{-\frac{d}{2}}^z + 2 \int_{-\frac{d}{2}}^z \left(\frac{\zeta}{\mu} \kappa \right)^2 dt = \left(z + \frac{d}{2} \right).$$

Отже, стає зрозумілим, що умова про обертання в нуль функції κ (так й функції ξ) на межі розділу шарів основного фотонного кристала [17-18] дає змогу інтегрувати квадрат цієї функції (мається схожість з обчисленням норми) та, врешті, спростити член при 0-й похідній у зведеному диференціальному рівнянні відносно спектрального параметра β – (6).

ВИСНОВКИ

Дослідження та спроби розвивати підходи до вивчення дисперсійного співвідношення для плоского двошарового одновимірно-періодичного фотонного кристала (основної дифракційної структури) представляється важливою задачею, оскільки останнє встановлює зв'язок між умовами розв'язання проблеми Штурма-Ліувілля (точніше, складовою умовою розв'язання – умову про самоспряженість диференціального оператора) та параметрами дифракційної задачі [19-22]. Як неодноразово зауважувалось у теперішній та попередніх авторських роботах чисельне дослідження дисперсійного рівняння здійснювалося багатьма авторами. Втім, на протипагу щойно зазначеним трудам роботам, автори даної роботи вдаються до спроб зрозуміти можливі властивості цього дисперсійного рівняння через розуміння поведінки розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля як функції спектрального параметра. Попередні авторські роботи присвячувалися пошукам 1-ї, 2-ї похідних й урешті привели до лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку відносно спектрального параметра – (6).

Змога записати рівняння для досліджуваного об'єкта може привести до розгалуження напрямів його вивчення. З метою спрощення зведеного рівняння автори теперішньої роботи перетворюють коефіцієнт при 0-й похідній у цьому рівнянні – рівнянні відносно спектрального параметра, яке отримане при переході від диференціального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля (відносно незалежної просторової змінної). Ключовим аспектом, для здійснення зазначеного перетворення стає рівність нулю 1-го коефіцієнту лінійного представлення 1-ї похідної на межі розділу шарів основного кристала. Спрощення коефіцієнту при 0-й похідній є кроком до виявлення властивостей розв'язку рівняння відносно спектрального параметра, які у кінцевому рахунку дають уявлення про характер розподілу заборонних та дозволених зон у діапазоні частотного хвильового числа, а також оцінку власних чисел проблеми Штурма-Ліувілля для магніто-діелектричного одновимірно-періодичного двошарового фотонного кристала.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кожем'яко ВП, Іванов ОА, Іванов ІА. Перспективи застосування фотонних кристалів у сучасних системах обробки даних //Наукові праці ВНТУ, № 4, Інформаційні технології та комп'ютерна техніка 2012 р.
2. Yablonovitch E. Photonic Crystals – Journal of Modern Optics, vol. 41, № 2., 505 – 513 p.
3. Pendry J. B., Holden A. J., Stewart W. J., and Youngs I. and Troschylo O. S. Absorbing properties of a negative permittivity layer placed on a reflecting grating // Prog.Electromagn. Res. – 2006. – Vol. PIER 64. – P. 135-148.
4. Brovenko A., Melezhik P. N., Poyedinchuk A. Y., Yashina N. P., and Granet G. Surface resonances of metal stripe grating on the plane boundary of metamaterial //Prog. Electromagn. Res. – 2006. – Vol. PIER 63. – P. 209-222.
5. A. Shmat'ko, A. V. Kazanko, V. N. Mizernik, E. N. Odarenko, V. A. Yampol'skii, T. N. Rokshanova. «Proc. 8th Int. Conf.» Extraordinary reflecton from photonic crystal with metamaterials. Odessa: UWBUSIS, 2016. 160-162 p.
6. G. V. Morozov, D. W. L. Sprung. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystal. A Letters Journal Exploring Physics, EPL, 96, 2011: 54005:p1-p5.
7. G. N. Pandey, K. B. Thapa, S. K. Srivastava, S. P. Ojha «Band structures and abnormal behavior of one dimensional photonic crystal containing negative index materials» – Progress In Electromagnetics Research M, Vol. 2, 15–36, 2008
8. Yariv A, Yeh P. Optical waves in crystals – A Wiley inteprieses Publicatuon, New York: Jon Wiley & Sons, 1987 – 616 p.
9. Самойленко А М Перестюк М О, Парасюк ІО. Диференціальні рівняння: підручник для студентів матем. Спец-ей, посібник, 2-ге видання – Київ: Либідь, 2003 – 301 с.
10. Казанко ОВ, Пенкіна ОЄ. (2021). Норма власних функцій одновимірного фотонного кристала. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка», 35, 91-99.
11. Казанко ОВ, Пенкіна ОЄ. Диференціювання дисперсійного рівняння у дифракційній задачі для необмеженого двовимірного шаруватого середовища. //Експериментальні та теоретичні дослідження у сучасних науках.: Збірник наукових праць "Логос" (ЛОГОС) з матеріалами наук.-практ. конференції. Краків, Польща: Європейська наукова платформа; 2019. 36-42 с.
12. Казанко ОВ, Пенкіна ОЄ. Диференціювання поперечних розв'язків хвильового рівняння по повздовжньому хвильовому числу в дифракційній задачі для необмеженого періодичного шаруватого середовища з метаматеріалом. Збірник наукових праць "Логос" (ЛОГОС); 2020. 126-130 с.
13. Казанко ОВ & Пенкіна, ОЄ. (2021). Аналіз складових членів дисперсійного рівняння у задачі про дифракцію плоского монохроматичного коливання у двовимірному необмеженому двошаровому середовищі з метаматеріалом / О. В. Казанко, О. Є. Пенкіна //Збірник наукових праць "Грааль науки". – 2021. – № 6. - С. 210-216.
14. Маркович БМ. Рівняння математичної фізики: навчальний посібник – Львів: Видавництво політехніки, 2010 – 384 с.
15. Eastham M. S. P. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press [distributed by Chatto & Windus, London], 1975.
16. S. Winkler, W. Magnus. Hill's Equation. New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons, 1996.
17. Yakubovich V. A. and Starzhinskii V. M., Linear Differential Equations with Periodic Coefficients (Wiley, New York) 1975.

18. Казанко О. В., Пенкіна О. Є. Аналіз та методологія визначення норми власних функцій як граничний перехід у скалярному добутку в спектральній проблемі Штурма-Ліувілля для фотонного одновимірного кристала. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2023; вип. 39, с. 41-50.
19. G. Guida Introduction to photonic band gap materials – Progress In Electromagnetics Research, PIER 41, 1–20, 2003.
20. Gaughan Richard «Researchers Create Tunable Photonic Bandgap Crystal.» – Photonics Spectra, 2000, Jan. Vol. 34, №1.
21. G. N. Pandey, K. B. Thapa, S. K. Srivastava, S. P. Ojha Band structures and abnormal behavior of one dimensional photonic crystal containing negative index materials – Progress In Electromagnetics Research M, Vol. 2, 15–36, 2008
22. Sprung D. W. L., Wu H. and Martorell J., Am. J. Phys., 61 (1993) 1118.

REFERENCES

1. Kozhemyako V.P., Ivanov O.A., Ivanov I.A. Primary stalling of photonic crystals in modern average statistical data processing // Science of work of VNTU, No. 4, Information technologies and computer technology, 2012.
2. Yablonovitch E. Photonic Crystals – Journal of Modern Optics, vol. 41, № 2., 505 – 513 p.
3. Pendry J. B., Holden A. J., Stewart W. J., and Youngs I. and Troschylo O. S. Absorbing properties of a negative permittivity layer placed on a reflecting grating // Prog. Electromagn. Res. – 2006. – Vol. PIER 64. – P. 135-148.
4. Brovenko A., Melezhik P. N., Poyedinchuk A. Y., Yashina N. P., and Granet G. Surface resonances of metal stripe grating on the plane boundary of metamaterial // Prog. Electromagn. Res. – 2006. – Vol. PIER 63. – P. 209-222.
5. A. Shmat'ko, A. V. Kazanko, V. N. Mizernik, E. N. Odarenko, V. A. Yampol'skii, T. N. Rokshanova. «Proc. 8th Int. Conf.» *Extraordinary reflecton from photonic crystal with metamaterials*. Odessa: UWBUSIS, 2016. 160-162 p.
6. GV. Morozov, DWL. Sprung. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystal. A Letters Journal Exploring Physics, EPL, 96, 2011: 54005:p1-p5.
7. G. N. Pandey, K. B. Thapa, S. K. Srivastava, S. P. Ojha «Band structures and abnormal behavior of one dimensional photonic crystal containing negative index materials» – Progress In Electromagnetics Research M, Vol. 2, 15–36, 2008
8. Yariv A, Yeh P. Optical waves in crystals – A Wiley inteprieses Publicatuon, New York: Jon Wiley & Sons, 1987 – 616 p.
9. Samoilenko AM Perestyuk M O, Parasyuk IO. Differential equations: handy for students of mathematics. Special, manual, 2nd edition - Kiev: Libid, 2003 - 301 p.
10. Kazanko O. V., Penkina O. Y. "To differentiating dispersion equation in a diffraction problem for unlimited two-dimension media" // Experimental and theoretical reserches in a modern science Experimental and theoretical research in modern sciences. Collection of scientific papers ΛΟΓΟΣ, Krakiv , Polska: European Science Platform 2019, 36-42 pp.
11. Kazanko O. V., Penkina O. Y. "To differentiating shear solutions of wave equations by longitudinal wave number in a diffraction problem for unlimited band media with metamaterials" Collection of scientific papers ΛΟΓΟΣ, 2020. 126-130 pp.
12. Kazanko OV, Penkina OE. Norm of iegnfuction of one-dimension photonic crystal. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2021;35:91-99. (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-08>
13. Kazanko OV & Penkina, OC. (2021). Analysis of the storage terms of the dispersion level in the problem of diffraction of planar monochromatic collocation in a two-dimensional unbounded two-spherical medium with metamaterial / O. V. Kazanko, O. E. Penkina // Collection of scientific works "The Grail of Science". – 2021. – No. 6. - P. 210-216.
14. Markovich BM. History of mathematical physics: a basic textbook – Lviv: Department of Polytechnics, 2010 - 384 p.
15. Eastham MSP. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press [distributed by Chatto & Windus, London], 1975.
16. S. Winkler, W. Magnus. Hill's Equation. New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons, 1996.
17. Yakubovich V. A. and Starzhinskii V. M., Linear Differential Equations with Periodic Coefficients (Wiley, New York) 1975.
18. Kazanko OV & Penkina, OC. Analysis and methodology for determining the norm of eigenfunctions as a limit transition in the scalar product in the Sturm-Liouville spectral problem for a photonic one-dimensional

- crystal. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2023; 39, 41-50pp (In Ukrainian).
19. G. Guida Introduction to photonic band gap materials – Progress In Electromagnetics Research, PIER 41, 1–20, 2003.
 20. Gaughan Richard «Researchers Create Tunable Photonic Bandgap Crystal.» – Photonics Spectra, 2000, Jan. Vol. 34, №1.
 21. G. N. Pandey, K. B. Thapa, S. K. Srivastava, S. P. Ojha Band structures and abnormal behavior of one dimensional photonic crystal containing negative index materials – Progress In Electromagnetics Research M, Vol. 2, 15–36, 2008
 22. Sprung D. W. L., Wu H. and Martorell J., Am. J. Phys., 61 (1993) 1118.

Стаття надійшла до редакції: 19 лютого 2025 р.

Рекомендовано до друку: 14 травня 2025 р.

DEVELOPMENT OF A METHODOLOGY FOR TRANSITIONING FROM A SPECTRAL EQUATION RELATIVE TO A SPATIAL VARIABLE TO A DIFFERENTIAL EQUATION RELATIVE TO A SPECTRAL PARAMETER IN THE STURM-LIOUVILLE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL PERIODIC TWO-LAYER PHOTONIC CRYSTAL

O. V. KAZANKO, O. E. PENKINA, O. V. GOLOVKO

Ukrainian State University of Railway Transport, Department of Computer Engineering and Control Systems, Kharkiv, Feuerbach Square, 7, Ukraine

Relevance. In connection with solving the problem of scattering of electromagnetic waves (diffraction problem) on objects such as photonic crystals (one-dimensional periodic unbounded), it is important to study the dispersion relation. This involves solving the wave equation with subsequent application of the separation of variables method (For the diffraction structures considered in the paper, the specified method of separation of variables allows obtaining a solution to the wave equation, which in this case turns out to be an equation with periodic coefficients, in the explicit form) and transition to the Sturm-Liouville problem on an unbounded interval $(-\infty, +\infty)$. The dispersion relation allows us to understand the conditions under which the Sturm-Liouville problem can be solved and connects these conditions with the parameters of the diffraction problem, and therefore becomes an indispensable step on the way to obtaining solutions to this wave equation. This work continues a series of previously published works on the development of approaches to studying the specified dispersion relation through understanding the behavior of the solution of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem. The transfer matrix method for a wave equation with periodic coefficients makes it possible to take into account the specifics of its solution on an unlimited interval $(-\infty, +\infty)$, and to achieve the fulfillment of a component condition under which the Sturm-Liouville problem is solvable – the condition of self-adjointness of the differential operator in this problem. This is on the one hand, and on the other hand, such a method clearly indicates the place occupied by the solution of the spectral equation in the dispersion relation.

The aim of the work is to simplify the previously obtained equation, which is a consequence of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem for a one-dimensional periodic two-layer photonic crystal. In particular, to integrate some of the constituent terms of the linear representation of the 1st and 2nd derivatives of the solution of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem.

Methods. The separation of variables method is used to solve the wave equation. The transfer matrix method for a wave equation with periodic coefficients makes it possible to take into account the specifics of its solution on an unlimited interval $(-\infty, +\infty)$ and achieve the fulfillment of a component condition under which the Sturm-Liouville problem is solvable – the condition of self-adjointness of the differential operator in this problem. To take the integral of the individual component terms of the linear representation of the 1st and 2nd derivatives of the solution of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem, the method of integration by parts is used.

Results. The work showed that in the course of a series of successive transformations, the coefficient at zero derivative in the reduced differential equation (the equation relative to the spectral parameter to which the transition is made – according to the title of the work) is subject to simplification. In particular, the square of the coefficient of the linear representation of the 1st derivative of the solution of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem was integrated.

KEYWORDS: photonic crystal, scattering of electromagnetic waves, derivative with respect to the spectral parameter, Sturm-Liouville problem, spectral equation, dispersion equation, eigenfunction, photon band gap, wave equation of a layered medium.

The article was received by the editors: February 19 2025

The article is recommended for printing: May 14 2025

Наукове видання

ВІСНИК ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
імені В.Н. Каразіна

Серія
“Радіофізика та електроніка”

Випуск 42

Збірник наукових праць
Українською та англійською мовами

Підписано до друку 01.07. 2025. Формат 60х84/8.
Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 5,14. Обл.-вид. арк. 6,43. Наклад 50 пр. Зам.№ 29/25.

61022, Харків, майдан Свободи, 4,
Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна.
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.2009.