

ISSN 2311-0872

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІСНИК
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
імені В.Н. КАРАЗІНА

Серія “ РАДІОФІЗИКА ТА ЕЛЕКТРОНІКА ”

Випуск 40

Започаткована 1971 р.

Харків 2024

У збірнику представлені результати теоретичних та експериментальних досліджень, що спрямовані на розв'язання актуальних задач сучасної радіофізики. До них відносяться: поширення радіохвиль в навколоземному просторі, його діагностика з використанням радіофізичних методів, поширення і дифракція електромагнітних хвиль у електродинамічних структурах, взаємодія лазерного випромінювання з речовиною та біологічними об'єктами, фізичні принципи у напівпровідникових приладах та ін.

Місія журналу полягає в тому, щоб представити свіжі досягнення в області радіофізики та природничих наук для наукових працівників, аспірантів, студентів старших курсів радіофізичних спеціальностей.

Журнал публікує наукові статті, короткі повідомлення та огляди з усіх проблем радіофізики та суміжних галузей.

Наукове фахове видання України, категорії «Б», галузь знань: 10 Природничі науки, спеціальність: 104 Фізика та астрономія, 105 Прикладна фізика та наноматеріали.
Наказ МОН України №1188 від 24.09.2020 р.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол № 11 від 21 червня 2024 року).

Редакційна колегія

Відповідальний редактор – д.ф.-м.н., проф. Шульга С.М.

д.ф.-м.н., проф. Аркуша Ю.В., Україна

проф. Блаунштейн Н., Ізраїль

д.ф.-м.н., проф. Горобець М.М., Україна

д.ф.-м.н., проф. Дюбко С.П., Україна

д.ф.-м.н., проф. Катрич В.О., Україна

д.ф.-м.н., проф. Шматько О.О., Україна

д.ф.-м.н., проф. Чорногор Л.Ф., Україна

проф. Цян Го, Китай

проф. Ю Джин, Китай

Заступник відповідального редактора – к.ф.-м.н., доц. Цимбал А.М.

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, факультет радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем

e-mail: radiovisnic@karazin.ua
A.Tsymbal@karazin.ua

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування

Ідентифікатор медіа у Реєстрі суб'єктів у сфері медіа: R30-04466

(Рішення № 1538 від 09.05.2024 р. Національної ради України

з питань телебачення і радіомовлення. Протокол № 15)

Засновник журналу Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна. Рік заснування 1971. Періодичність виходу 2 рази на рік.

ISSN 2311-0872

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

**Visnyk
of V.N. Karazin Kharkiv
National University**

series “Radio Physics and Electronics”

Issue 40

Founded in 1971.

Kharkiv 2024

The goal of the Journal is to publish articles, reports and reviews containing original results of theoretical and experimental research aimed at solving the current problems of modern Radio Physics. These include: the propagation of radio waves in the near-Earth space, its diagnosis using radio physical methods, the propagation and diffraction of electromagnetic waves in electrodynamic structures, the interaction of laser radiation with matter and biological objects, physical principles in semiconductor devices etc.

The mission of the journal is to present the latest achievements in the field of radiophysics and natural sciences for researchers, postgraduate students, and senior students of radiophysical specialties. The journal publishes research articles, short communications and reviews regarding all problems of Radio Physics and related fields.

Scientific professional publication of Ukraine, **category "B"**, branch of knowledge: 10 Natural sciences, specialty: **104 Physics and astronomy, 105 Applied physics and nanomaterials**. The Decree N 1188 of the Ministry of Education and Science Ukraine of 24.09.2020.

Approved for publication by the decision of the Academic Council of V.N. Karazin Kharkiv National University (protocol № 11 dated 21.06.2024).

Editorial Team

The responsible editor – Dr.Sc., Prof. **Shulga S.N.**

Dr.Sc., Prof. Arkusha Yu.V., Ukraine

Prof. Blaunstein N., Israel

Dr.Sc., Prof. Gorobets N.N., Ukraine

Dr.Sc., Prof. Dubko S.P., Ukraine

Dr.Sc., Prof. Katrich V.A., Ukraine

Dr.Sc., Prof. Shmatko A.A., Ukraine

Dr.Sc., Prof. Chernogor L.F., Ukraine

Prof. Qiang Guo, China

Prof. Yu Zheng, China

Deputy Editor-in-Chief – Ph.D., Assoc. **Tsymbol A.M.**, A.Tsymbol@karazin.ua

Address: 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

V.N. Karazin Kharkiv National University, School of Radio Physics, Biomedical Electronics and Computer Systems

e-mail: radiovisnic@karazin.ua

A.Tsymbol@karazin.ua

Articles have been reviewed internally and externally

Media identifier in the Register of the field of Media Entities: R30-04466

(Decision № 1538 dated May 9, 2024 of the National Council of

Television and Radio Broadcasting of Ukraine, Protocol № 15)

The founder of the Journal is V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine. Year of foundation 1971. The journal is published twice a year.

ЗМІСТ

Чорногор Л.Ф., Бессарабова В.О., Голуб М.Ю., Милованов Ю.Б., Шевелев М.Б.	7
Магніто-іоносферні ефекти часткового сонячного затемнення 25 жовтня 2022 р. над Україною	
Жила О.В., Стогній Н.П.	18
Обчислення електромагнітних полів на рухомій межі середовища, опроміненого імпульсом Ейрі	
Казанко О. В., Пенкіна О. Є., Бутенко В.М., Головка О.В.	29
Дослідження та знаходження 1-ої, 2-ої похідних від складових членів дисперсійного рівняння для плоского двошарового одновимірно-періодичного фотонного кристала	
Легенький М.М, Хричов В.С.	42
Моделювання взаємодії антен у ближній зоні	
Дегтярьов А.В., Дубінін М.М., Маслов В.О., Мунтян К.І., Свистунов О.О.	57
Поширення вихрових лазерних пучків металевого резонатора	
Боцула О.В., Приходько К.Г., Зозуля В.О.	68
Вплив температури на характеристики шумових діодів з гетерокатодом	

CONTENTS

<i>Chernogor L. F., Bessarabova V. O., Holub M. Yu., Mylovanov Yu. B., Shevelev M. B.</i>	7
Magnetic-ionospheric effects of partial solar eclipse of October 25, 2022 over Ukraine	
<i>Zhyla O.V., Stognii N.P.</i>	18
Electromagnetic fields calculation on the moving boundary of the medium irradiated by Airy pulse	
<i>Kazanko O.V., Penkina O.E., Butenko V.M., Golovko A.V.</i>	29
Research and determination of the 1st and 2nd derivatives of the component terms of the dispersion equation for a flat two-layer one-dimensional periodic photonic crystal	
<i>Legenkiy M.M., Khrychov V.</i>	42
Simulation of interaction of antennas in the near zone	
<i>Degtyarev A. V., Dubinin M. M., Maslov V. A., Muntean K. I., Svystunov O. O.</i>	57
Propagation of vortex laser beams of a metal resonator	
<i>Botsula O. V., Prykhodko K. H., Zozulia V. O.</i>	68
The impact of temperature on heterocathode noise diodes characteristics	

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-01>

УДК 550.388

Л. Ф. ЧОРНОГОР, д. ф.-м. наук, проф.

e-mail: Leonid.F.Chernogor@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5777-2392>

В. О. БЕССАРАБОВА

e-mail: valeriabess24@gmail.com

М. Ю. ГОЛУБ

e-mail: marya160588@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7900-1484>

Ю. Б. МИЛОВАНОВ, к. ф.-м. наук, с.н.с.

e-mail: hobit1957@gmail.com

М. Б. ШЕВЕЛЕВ, доктор філософії, с.н.с.

e-mail: mykyta.b.shevelev@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0006-9841-0789>

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
м. Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

МАГНІТО-ІОНОСФЕРНІ ЕФЕКТИ ЧАСТКОВОГО СОНЯЧНОГО ЗАТЕМНЕННЯ 25 ЖОВТНЯ 2022 Р. НАД УКРАЇНОЮ

Актуальність. Навколоземне середовище, що входить до системи Земля – атмосфера – іоносфера – магнітосфера (ЗАІМ), є основним функціонуючим радіоканалом. Він використовується системами радіозв'язку, радіонавігації, радіолокації, дистанційного радіозондування, радіоастрономії. Система ЗАІМ і радіоканал рідко знаходяться у спокійному стані. Час від часу вони збурюються високоенергетичними джерелами. Одним із них є сонячне затемнення (СЗ). І хоча збурення системи ЗАІМ сонячним затемненням досліджується більше ста років, вивчення всієї сукупності ефектів у цій системі залишається актуальною задачею. Це пов'язано з тим, що ефекти СЗ суттєво залежать від фази затемнення, стану космічної погоди, положення у циклі сонячної активності, пори року, часу доби, географічних координат тощо.

Мета роботи – опис результатів дослідження часових варіацій компонент геомагнітного поля та повного електронного вмісту (ПЕВ) у іоносфері, що супроводжували часткове СЗ 25 жовтня 2022 р. над Україною.

Методи і методологія. У якості вихідних даних використано результати реєстрації X-, Y- і Z-компонент геомагнітного поля на станції Львів і результати вимірювання параметрів радіосигналів Глобальної навігаційної супутникової системи (ГНСС) у Харкові. Часове розрізнення складало 1 хв. Похибка вимірювання рівня геомагнітних компонент – 0.1 нТл, а ПЕВ – 0.1 TECU.

Результати. СЗ над Україною викликало аперіодичні збурення компонент геомагнітного поля, які сягали 2 – 3 нТл. Найбільше збурення спостерігалось у X-компоненті, а найменше – у Z-компоненті. Тривалість збурення складала 80 – 100 хв. СЗ супроводжувалося квазіперіодичними збуреннями компонент геомагнітного поля. Амплітуда коливань з періодом 30 ± 5 хв тривалістю 70 – 80 хв сягала 2 нТл. СЗ викликало зменшення ПЕВ від ~24 до ~18 TECU. Час запізнювання реакції ПЕВ на СЗ складав близько 14 хв. Лінійний коефіцієнт рекомбінації в середньому був близьким до $1.2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Результати оцінки магнітного та іоносферного ефектів добре узгоджуються з результатами спостережень.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: сонячне затемнення, геомагнітний ефект, аперіодичне збурення, квазіперіодичне збурення, іоносферний ефект, час запізнювання, тривалість збурення

Як цитувати: Чорногор ЛФ, Бессарабова ВО, Голуб МЮ, Милованов ЮБ, Шевелев МБ. Магніто-іоносферні ефекти часткового сонячного затемнення 25 жовтня 2022 р. над Україною. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2024, 40. 7-17
<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-01>

In cites: Chernogor LF, Bessarabova VO, Holub MYu, Mylovanov YuB, Shevelev MB. Magnetic-ionospheric effects of partial solar eclipse of October 25, 2022 over Ukraine. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series “Radio Physics and Electronics”. 2024, 40, 7-17 (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-01>

ВСТУП

Навколоземне середовище, що входить до системи Земля – атмосфера – іоносфера – магнітосфера (ЗАІМ), є основним функціонуючим радіоканалом. Він використовується системами радіозв'язку, радіонавігації, радіолокації, дистанційного радіозондування, радіоастрономії. Система ЗАІМ і радіоканал рідко знаходяться у спокійному стані. Час від часу вони збурюються високоенергетичними джерелами. Одним із них є сонячне затемнення (СЗ). Сонячне затемнення (СЗ) належить до рідкісних, але таких, що систематично повторюються,

явищ природи [1]. Воно здатне викликати значні збурення всіх підсистем у системі Земля – атмосфера – іоносфера – магнітосфера (ЗАІМ) та геофізичних полів.

Ефекти ЗАІМ у геомагнітному полі досліджуються з 1901 р. [2]. Короткий огляд геомагнітних ефектів наведено у роботі [3].

У геофізиків немає одностайної думки про ефекти СЗ в геомагнітному полі. Дехто з дослідників вважає, що геомагнітний ефект СЗ взагалі не проявляється [4].

Іоносферні ефекти СЗ вивчалися близько 100 років. Цим ефектам присвячена велика кількість робіт і монографія [1].

У цілому іоносферні ефекти СЗ подібні ефектам, що супроводжують настання ночі, але суттєво відрізняються за своїми просторово-часовими параметрами. Доведено, що реакція іоносфери суттєво залежить від фази СЗ, положення у циклі сонячної активності, географічних координат, стану космічної погоди, часу доби, пори року тощо. Можна впевнено стверджувати, що немає однакової реакції середовища на два подібних СЗ [1].

Все це обумовлює актуальність дослідження реакції системи ЗАІМ та географічних полів на кожне нове СЗ.

Мета роботи – опис результатів дослідження часових варіацій компонент геомагнітного поля та повного електронного вмісту (ПЕВ), що супроводжували часткове СЗ 25 жовтня 2022 р. над Україною.

Ефектам СЗ 25 жовтня 2022 р. присвячено окремі роботи [5–8]. У роботі [5] з використанням іонозондових вимірювань досліджено часові варіації частоти f_oF_2 та концентрації електронів N шару F_2 іоносфери. Обґрунтовано, що СЗ призвело до активізації іоносферно-плазмосферної взаємодії.

Особливості ефектів СЗ 25 жовтня 2022 р. у ранковий час у високоширотній іоносфері описано авторами [6]. Встановлено, що мала місце очікувана тенденція до збільшення дефіциту ПЕВ при збільшенні відносної площі покриття диску Сонця.

У роботі [7] обговорюються особливості СЗ 25 жовтня 2022 р., що мали місце у період проходження вечірнього сонячного термінатору. Встановлено, що затемнення запускає фізично-хімічні та динамічні процеси у системі ЗАІМ, які забезпечують продовження реакції іоносфери і після закінчення СЗ та заходу Сонця на поверхні Землі.

Геомагнітний ефект СЗ 25 жовтня 2022 р. описано в роботі [8]. Встановлено, що затемнення призвело до збурень рівня всіх компонент геомагнітного поля. Підтверджено, що мала місце тенденція до збільшення варіацій рівня при збільшенні площі покриття диску Сонця.

ВІДОМОСТІ ПРО СОНЯЧНЕ ЗАТЕМНЕННЯ

СЗ 124 сароса спостерігалось 25 жовтня 2022 р. в Європі, на Близькому Сході, у Центральній Азії, Західному Сибіру та на Північному Заході Африки [<https://science.nasa.gov/eclipses/future-eclipses/>]. Розпочалося СЗ в Ісландії (географічні координати: 66°28' пн.ш., 18°57' з.д.) о 08:58:20 UT, а закінчилося в районі Аравійського моря (17°35' пн.ш., 66°31' сх.д.) о 13:02:16 UT (UT – тут і далі всесвітній час). Найбільша фаза часткового СЗ $M_{\max} \approx 0.8623$ відмічалася у місцевості з координатами 61°36' пн.ш., 77°24' сх.д.

На території України $M_{\max} \approx 0.53 - 0.73$, а відносна площа покриття диску Сонця $A_{\max} \approx 43 - 66\%$.

СТАН КОСМІЧНОЇ ПОГОДИ

Для коректного виділення ефектів СЗ необхідним є ретельний аналіз стану космічної погоди. Такий аналіз виконано у роботах [4–8]. Тут лише відмітимо, 25 жовтня 2022 р., у день СЗ, стан космічної погоди був незбуреним і цілком сприятливим для спостереження геомагнітного та іоносферного ефектів СЗ. В той же час дні з 21 до 24 жовтня 2022 р. були дещо збуреними. Тому у якості контрольних днів обрано 20 та 26 жовтня 2022 р.

МЕТОДИ ТА МЕТОДОЛОГІЯ

Для виявлення геомагнітного ефекту СЗ використовувалися часові варіації рівня X -, Y - і Z -компонент геомагнітного поля, зареєстровані на українській станції Львів і представлені у базі даних світової мережі INTERMAGNET [<https://www.intermagnet.org/>]. Географічні координати станції: 49°54' пн.ш., 23°45' сх.д. Розрізнявальна здатність за часом – 1 хв, а за амплітудою – 0.1 нТл. СЗ розпочалося о 09:20, а закінчилося об 11:42. Максимальна фаза затемнення на станції Львів $M_{\max} \approx 0.530$, а $A_{\max} \approx 43\%$ мали місце о 10:31. Аналізу часових варіацій рівня усіх трьох компонент передувало видалення постійної складової та отримання варіацій $X(t)$, $Y(t)$ і $Z(t)$. Потім обчислювався на інтервалі часу 60 хв ковзний тренд $\bar{X}$, $\bar{Y}$ і $\bar{Z}$, крок ковзання – 1 хв. Ці дані використовувалися для виявлення аперіодичного ефекту СЗ. Для пошуку квазіперіодичних збурень обчислювалася різниця $\delta X = X - \bar{X}$, $\delta Y = Y - \bar{Y}$, $\delta Z = Z - \bar{Z}$. Залежності $\delta X(t)$, $\delta Y(t)$ і $\delta Z(t)$ далі підлягали системному спектральному аналізу.

Для виявлення іоносферного ефекту СЗ використано ГНСС-технології. Вимірювання виконано у Харкові, на території ХНУ імені В. Н. Каразіна, та у Радіофізичній обсерваторії. Географічні координати пункту

вимірювань: $50^{\circ}00'$ пн.ш., $36^{\circ}10'$ сх.д., обсерваторії – $50^{\circ}00'$ пн.ш., $36^{\circ}13'$ сх.д. Аналізу підлягали часові варіації ПЕВ $N_v(t)$, очікуване незбурене значення $N_{v0}(t)$, дефіцит ПЕВ $\Delta N_v = N_v - N_{v0}$, відносне зменшення ПЕВ $\delta_v = \Delta N_v / N_{v0}$, тривалість реакції ПЕВ ΔT та час запізнювання Δt реакції ПЕВ на затемнення. Параметри СЗ обчислені для висоти 350 км. Розрізнявальна здатність за часом – 1 хв, похибка оцінки ПЕВ – 0.1 TECU.

МАГНІТНИЙ ЕФЕКТ СЗ

Аперіодичний ефект. Часові варіації X -, Y - і Z -компонент для дня з СЗ та контрольних днів показано на Рис. 1. Із рисунку видно, що згладжені значення рівня (тренд) X -компоненти у інтервалі часу 09:45 – 11:35 зменшилися до 3 нТл. Повторне зменшення $\bar{X}$ до 2 нТл спостерігалось з 11:35 – 12:30.

Рівень тренду $\bar{Y}$ зменшувався двічі. Спочатку до 2 нТл з 08:00 до 10:00, а потім до 8 нТл з 10:00 до 12:30.

Зменшення рівня Z -компонента до 2 нТл спостерігалось в інтервалі часу з 10:00 до 11:45.

Квазіперіодичні збурення. Часові варіації флуктуацій $\delta X(t) = X(t) - \bar{X}(t)$ наведено на Рис. 2. Видно, що й у день СЗ, й у контрольні дні часові варіації були переважно хаотичними. Теж саме можна сказати і про варіації $\delta Y(t)$ і $\delta Z(t)$. Про наявність ефекту СЗ у варіаціях δX , δY і δZ можуть свідчити результати системного спектрального аналізу (ССА).

Результати ССА. Спектральний аналіз у діапазоні періодів $T = 2 - 180$ хв показав, що 25 жовтня 2022 р. у спектрі $\Delta X(t)$ найбільшу амплітуду X_a (до 2 нТл) мало коливання з $T = 30 \pm 5$ хв. Це коливання розпочалося після початку СЗ на рівні Землі. Дещо меншу (до 1 нТл) амплітуду мало коливання з періодом 70 ± 10 хв (Рис. 3). Воно розпочалося приблизно о 09:25 та тривало впродовж часу $\Delta T \approx 70$ хв.

Коливання з періодом 30 ± 5 хв мало амплітуду $Y_a \approx 1.5 - 2$ нТл та тривалість близько 70 – 80 хв. Воно спостерігалось з 09:25.

Варіації рівня Z -компонента зі змінною амплітудою від 1 до 3 нТл мало місце з 09:25 до 11:00.

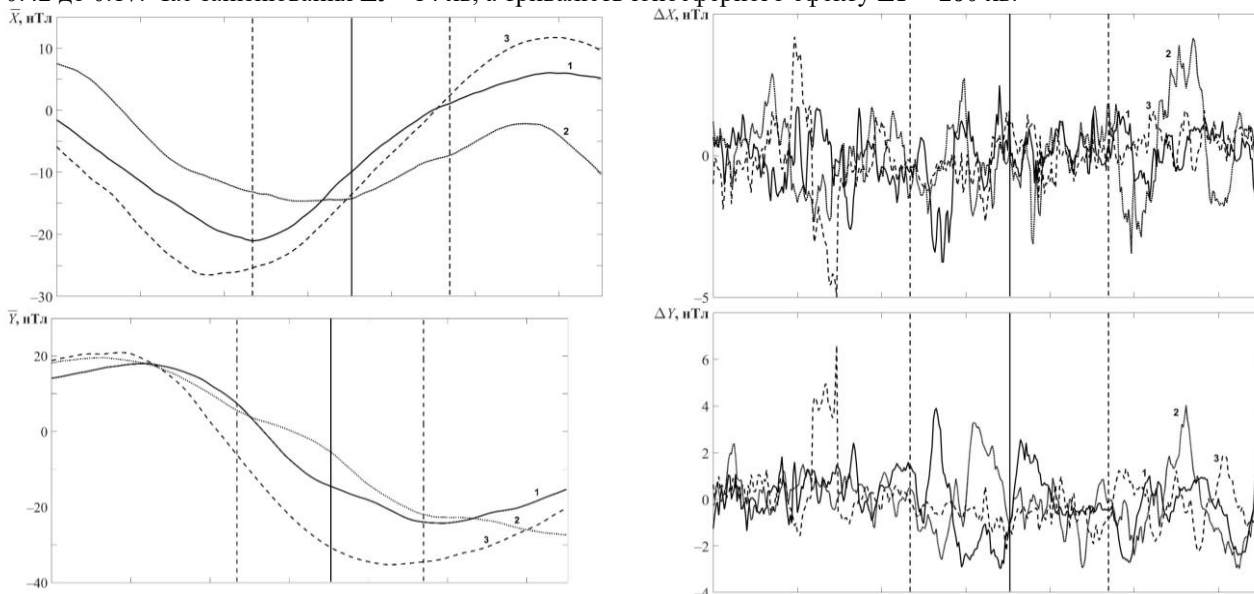
Додамо, що у контрольні дні подібні коливання не спостерігалися (Рис. 4, 5).

ІОНОСФЕРНИЙ ЕФЕКТ СЗ

Спочатку розглянемо часові варіації ПЕВ на станції BFN1, супутник G09 (Рис. 6). Траєкторія супутника показана на Рис. 7. СЗ мало місце поблизу опівдня. Із Рис. 6 видно, що зменшення ПЕВ від 27.5 TECU до 18 TECU розпочалося практично в момент настання затемнення. Точками на Рис. 6 показано очікувані варіації $N_v(t)$ за відсутності СЗ. Якщо $N_{v0} \approx 24$ TECU, то $\Delta N_v \approx 6$ TECU, а $\delta_v = \Delta N_v / N_{v0} \approx -0.25$. Значення N_{vmin} спостерігалось з часом запізнювання $\Delta t \approx 17$ хв після настання фази затемнення $M_{max} \approx 0.729$ та $A_{max} \approx 65.9\%$. При цьому відносна освітленість зменшувалася від 0.42 до 0.18, тобто більше ніж вдвічі. Тривалість збурення ПЕВ $\Delta T = 180$ хв.

Додамо, що у контрольні дні 24, 26 та 27 жовтня 2022 р. варіації $N_v(t)$ були більш-менш монотонними (див. Рис. 6).

Часові варіації ПЕВ на станції BMHR, супутник G09 наведено на Рис. 8. Видно, що за $M_{max} \approx 0.729$ та $A_{max} \approx 65.9\%$, розрахованих для місця вимірювання ПЕВ у F_2 іоносфери N шару. Дефіцит $\Delta N_v \approx -6.2$ TECU, $N_v \approx 18$ TECU, а очікуване значення $N_{v0} \approx -0.242$ TECU. Тоді $\delta_v \approx -0.256$. Відносна освітленість за M_{max} зменшувалася від 0.42 до 0.17. Час запізнювання $\Delta t \approx 14$ хв, а тривалість іоносферного ефекту $\Delta T = 200$ хв.



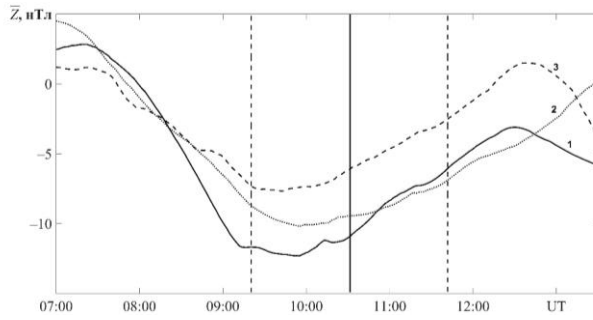


Рис. 1. Часові варіації рівня X-, Y- і Z-компонент геомагнітного поля. Штрихові вертикальні лінії вказують на моменти початку і закінчення СЗ, суцільна вертикальна лінія – на момент максимальної фази СЗ. Моменти СЗ розраховані для поверхні Землі. (1–день СЗ 25.10.2022 р, 2–контрольний день 20.10.2022 р, 3–контрольний день 26. 10.2023 р).

Fig. 1. Temporal variations in the level of the X-, Y- and Z-components of the geomagnetic field. The dashed vertical lines indicate the moments of beginning and end of SE, the solid vertical line – at the moment of the maximum phase of SE. The SE moments are calculated for the Earth's surface. (1–day of SE 10.25.2022, 2– reference day 10.20.2022, 3– reference day 10.26.2022).

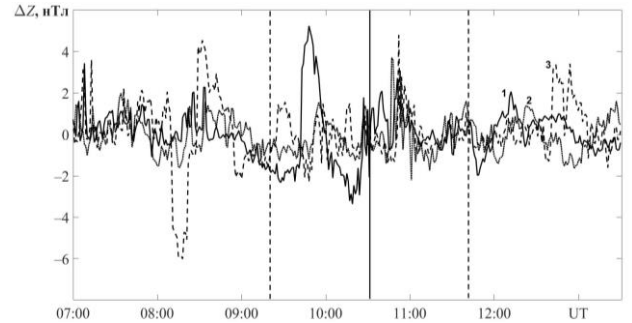
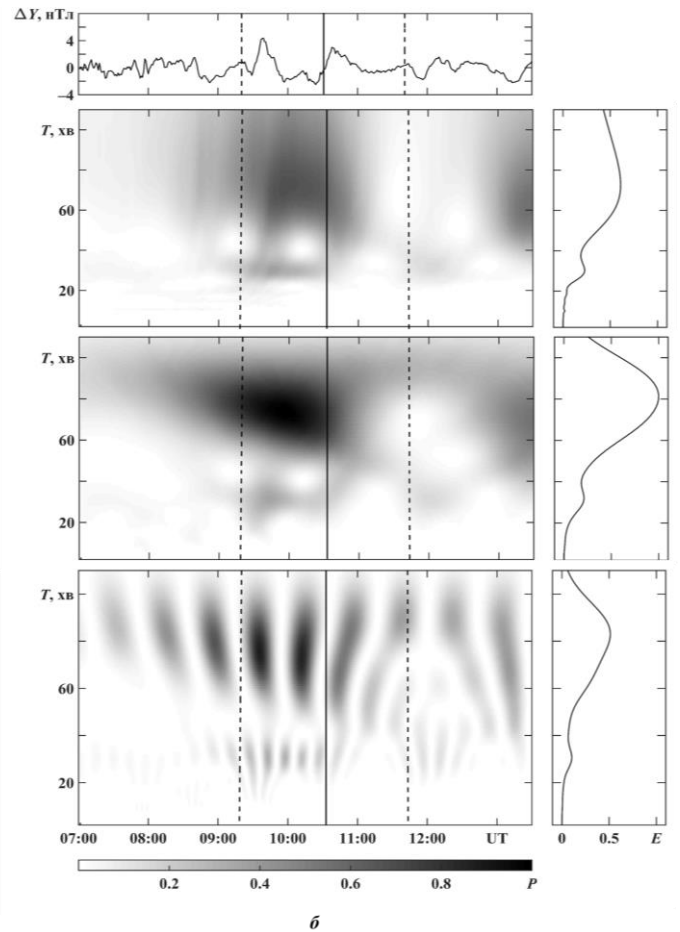
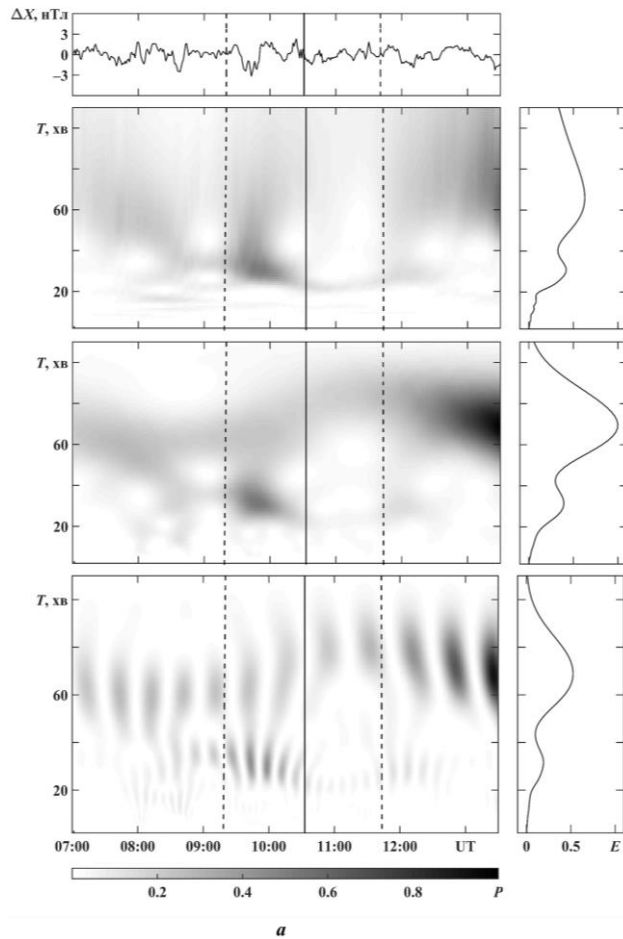


Рис. 2. Часові варіації рівня флуктуацій X-, Y- і Z-компонент геомагнітного поля. Штрихові вертикальні лінії вказують на моменти початку і закінчення СЗ, суцільна вертикальна лінія – на момент максимальної фази СЗ. Моменти СЗ розраховані для поверхні Землі. (1–день СЗ 25.10.2022 р, 2–контрольний день 20.10.2022 р, 3–контрольний день 26. 10.2023 р).

Fig. 2. Temporal variations in the fluctuation level of the X-, Y- and Z-components of the geomagnetic field. The dashed vertical lines indicate the moments of beginning and end of SE, the solid vertical line – at the moment of the maximum phase of SE. The SE moments are calculated for the Earth's surface. (1–day of SE 10.25.2022, 2– reference day 10.20.2022, 3– reference day 10.26.2022).



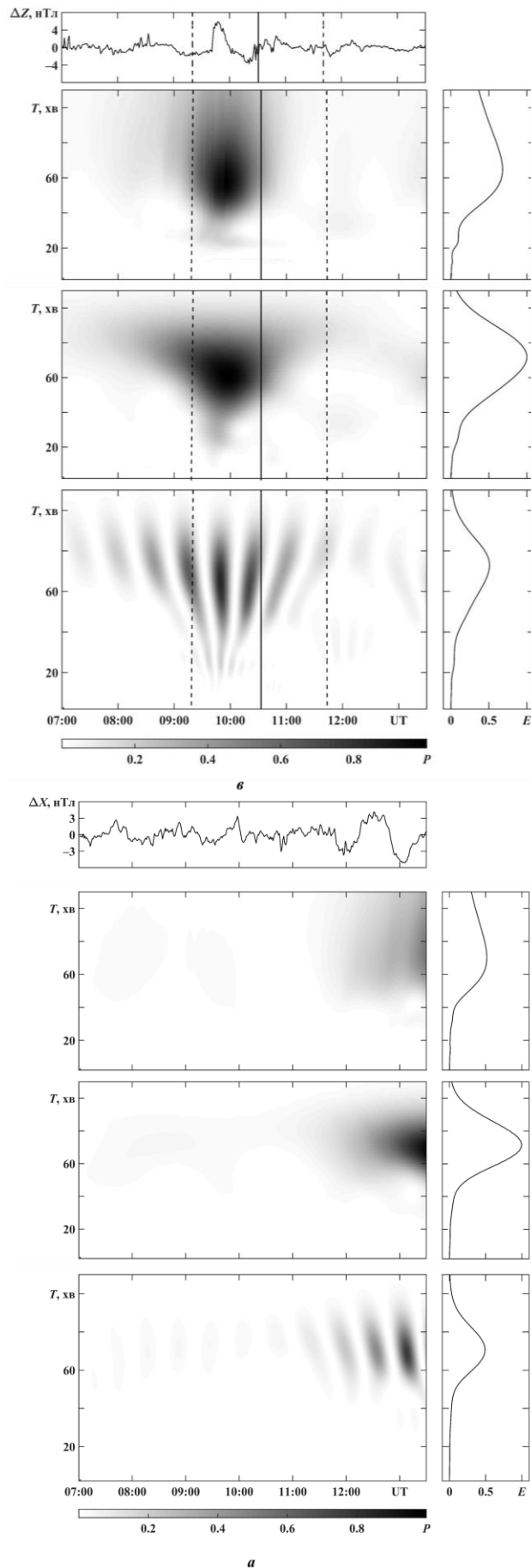


Рис. 3. Результати системного спектрального аналізу часових залежностей компонент геомагнітного поля протягом сонячного затемнення 25 жовтня 2022 р., отриманих після видалення тренду на інтервалі 90 хв, фільтрації на інтервалі від 2 до 90 хв:

a – X-компонента; b – Y-компонента; c – Z-компонента.

Тут і далі панелі зверху вниз: хвильова форма, результати віконного,

адаптивного перетворень Фур'є та вейвлет-перетворення.

Праворуч показано енергограми (розподіл нормованої енергії E за періодами). P – інтенсивність сигналу.

Штриховані вертикальні лінії – моменти початку й закінчення СЗ;

суцільна вертикальна лінія – максимальна фаза СЗ.

Моменти СЗ розраховані для поверхні Землі.

Fig. 3. The results of the system spectral analysis of the time dependences

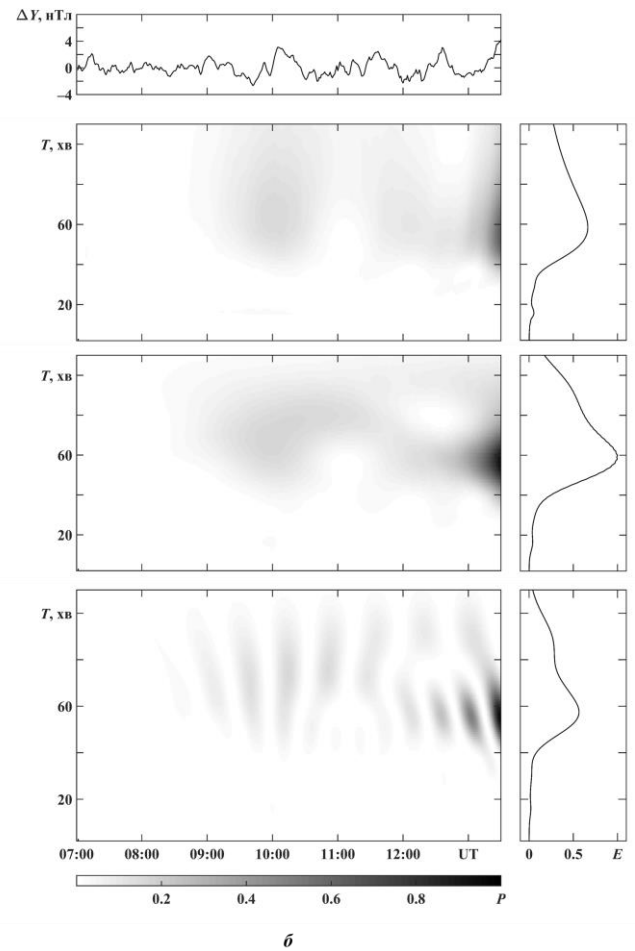
of the components of the geomagnetic field during the solar eclipse on October 25, 2022,

obtained after removing the trend at an interval of 90 min, filtering at an interval from 2 to 90 min:

a – X-component; b – Y-component; c – Z-component.

Here and then panels from top to bottom: waveform, short-time Fourier transform, adaptive Fourier and wavelet transforms.

Energy diagrams are shown on the right (distribution of normalized energy E by periods). P is signal intensity. The dashed vertical lines are the moments of the beginning and end of the SE; solid vertical line – maximum SE phase. SE moments are calculated for the Earth's surface.



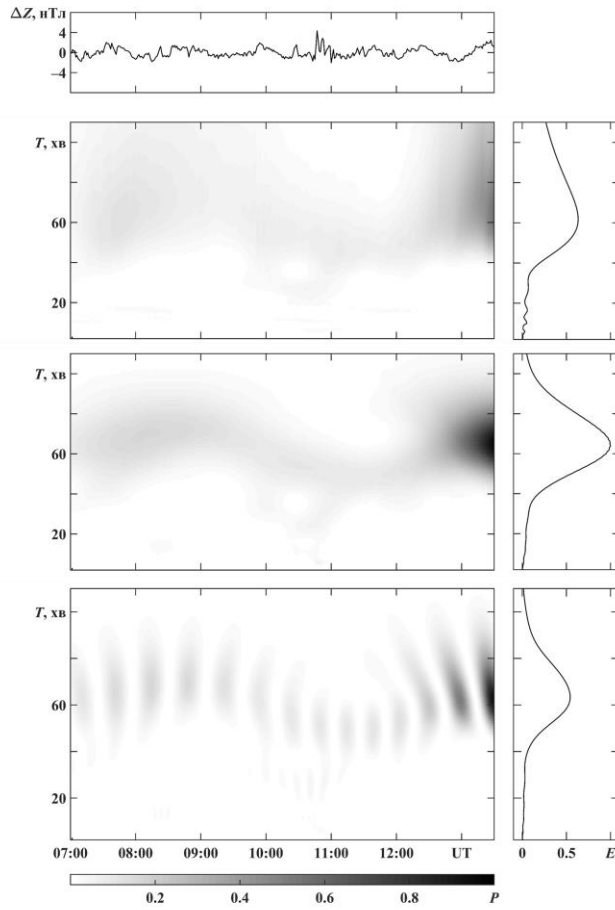
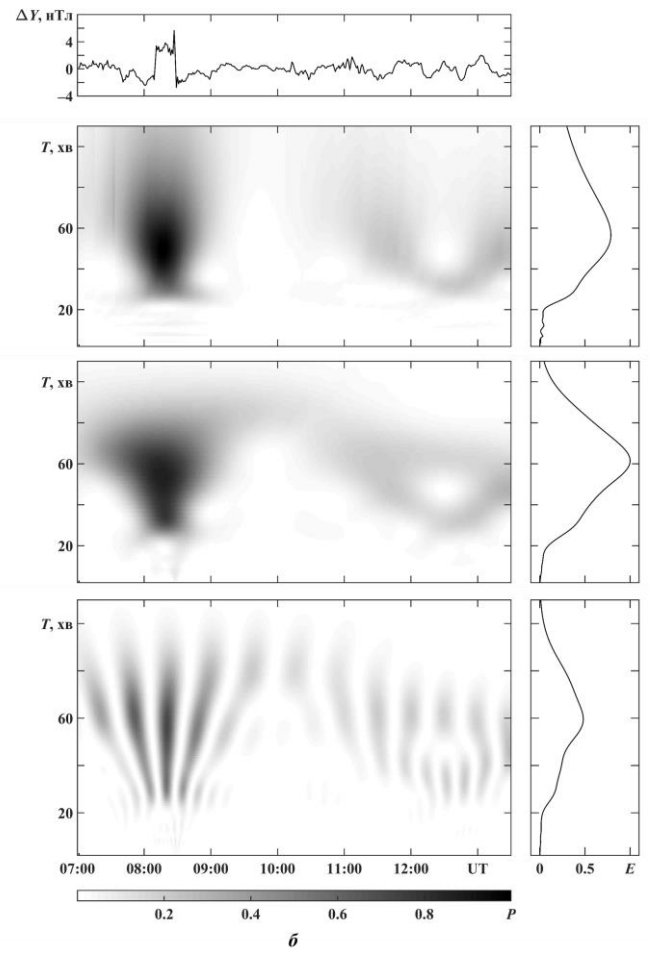
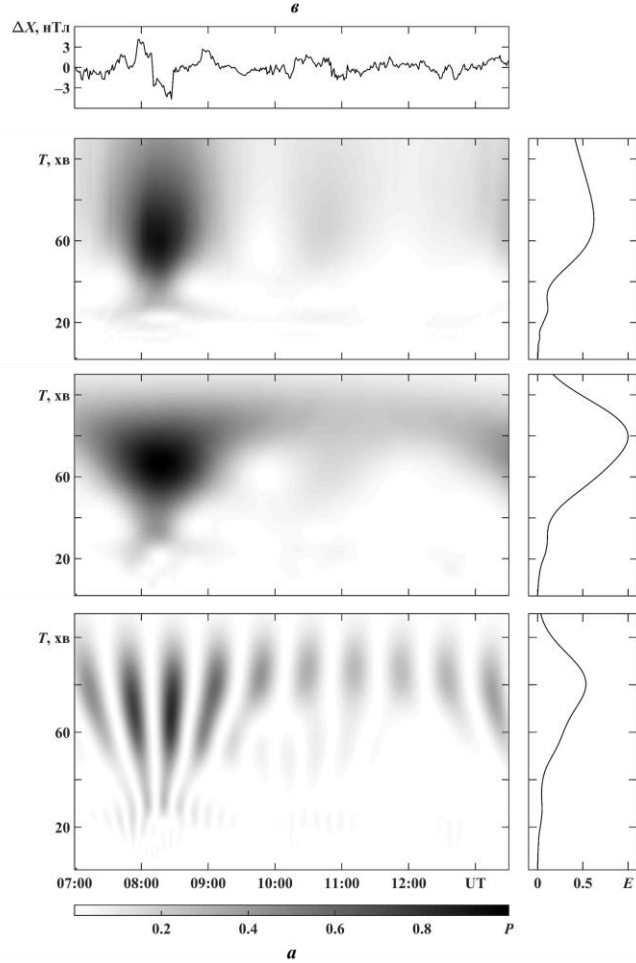


Рис. 4. Те саме, що й на Рис. 3,
для 20 жовтня 2022 р.

Fig. 4. The same as in Fig. 3,
for October 20, 2022.



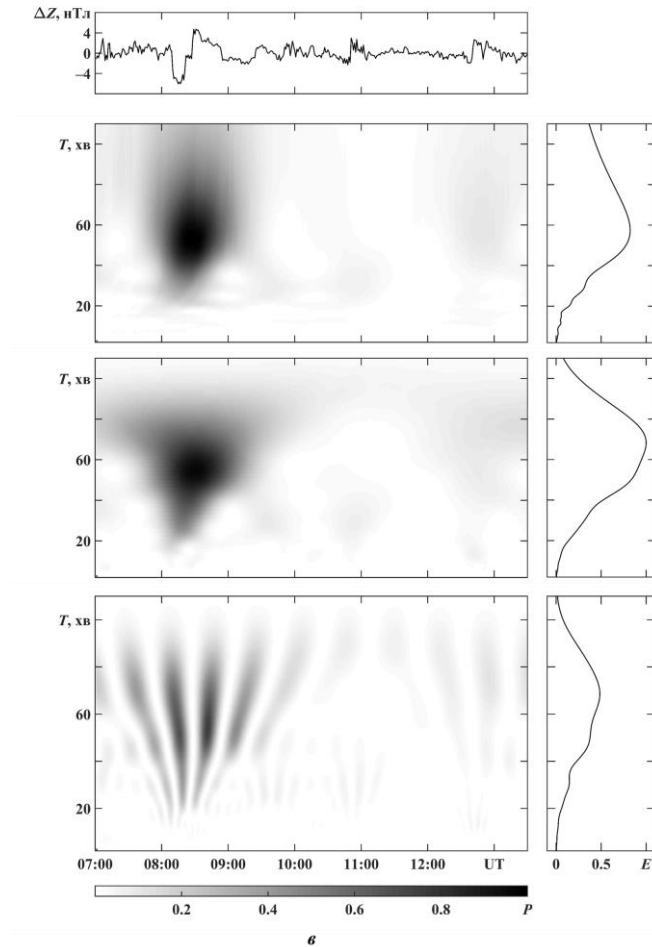


Рис. 5. Те саме, що й на Рис. 3, для 26 жовтня 2022 р.

Fig. 5. The same as in Fig. 3, for October 26, 2022.

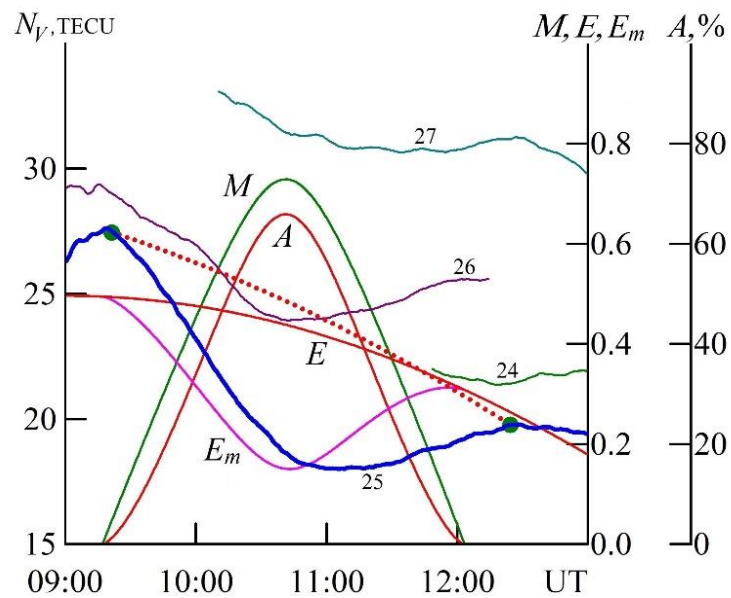


Рис. 6. Часові варіації ПЕВ для станції BFN1, супутник G09. Числами біля кривих позначено дні жовтня 2022 р. M , E , E_m , та A – фаза затемнення, відносна освітленість, відносна освітленість з урахуванням затемнення та площа покриття, відповідно.

Fig. 6. TEC temporal variations for the BFN1 station, G09 satellite. Numbers near the curves represent the days of October 2022. M , E , E_m , and A are the eclipse magnitude, relative illumination, relative illumination with the obscuration taken into account and obscuration area, respectively.

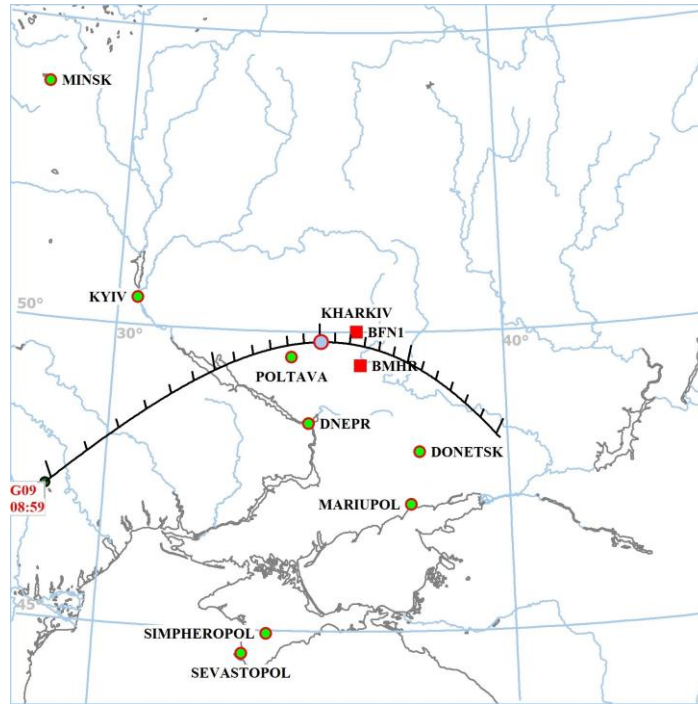


Рис. 7. Карта прольоту супутника G09 відносно станцій BFN1 та BMHR. Номер супутника та час початку прольоту показано у квадраті. Сірий кружок позначає точку вимірювання. Риски вздовж траєкторії відмічають час з кроком 10 хв.

Fig. 7. Map of the satellite G09 overflight with respect to the BFN1 and BMHR stations. Satellite number and overflight start time are shown in a square. Gray circle indicates the measurement point. The marks on the trajectory line show the time in 10 minute increments.

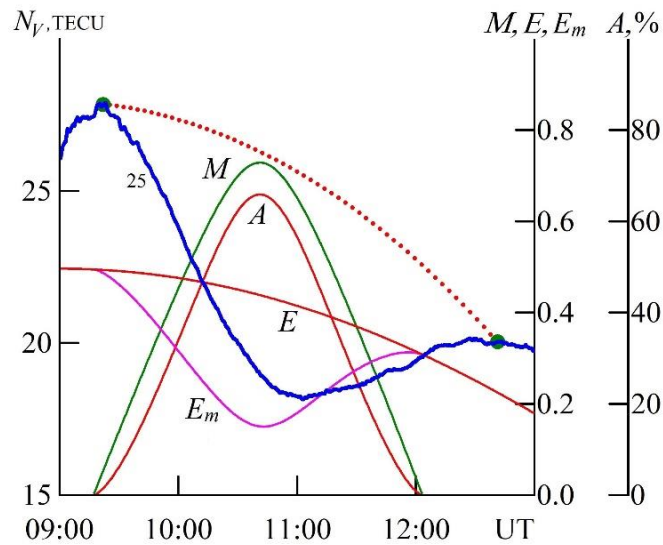


Рис. 8. Часові варіації ПЕВ для станції BMHR, супутник G09. Синя крива відповідає 25 жовтня 2022 р. M , E , E_m , та A – фаза затемнення, відносна освітленість, відносна освітленість з урахуванням затемнення та площа покриття, відповідно.

Fig. 8. TEC temporal variations for the BMHR station, G09 satellite. Blue curve corresponds to October 25, 2022. M , E , E_m , and A are the eclipse magnitude, relative illumination, relative illumination with the obscuration taken into account and obscuration area, respectively.

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ

Збурення концентрації електронів. Як і у роботі [3] відносно збурення концентрації електронів N у динамо-області за $A_{\max}$ дається наступним співвідношенням

$$\frac{N_{\min}}{N_0} = \sqrt{1 - A_{\max}}. \quad (1)$$

Тут N_0 – незбурене значення концентрації електронів. За $A_{\max} = 43\%$ для Львова маємо $N_{\min}/N_0 \approx 0.75$, а $\delta_{N_{\max}} = N_{\min}/N_0 - 1 \approx -0.25$.

Геомагнітний ефект. Аперіодичне збурення компонент геомагнітного поля викликається аперіодичним збуренням компонент тензора електропровідності на висотах динамо-області атмосфери, який залежить від збурення N . Варіації компонент тензора призводять до варіацій густини іоносферного струму j , який є джерелом збурення геомагнітного поля.

Наприклад, для збурення X -компоненти справедливе наступне співвідношення [3]:

$$\Delta X_{cal} = \mu_0 \Delta J_y = \mu_0 j_{y0} \delta_{Nmax} H, \quad (2)$$

де μ_0 – магнітна стала, ΔJ_y – інтегральна густина y -компоненти іоносферного струму, J_{y0} – незбурене значення y -компоненти густини струму, H – висота однорідної атмосфери на висоті $z \approx 150$ км. За типового значення у денний час $j_{y0} \approx (4 - 6) \cdot 10^{-7}$ А/м² із (2) маємо $\Delta X_{cal} \approx -(1.9 - 2.8)$ нТл. Це значення дуже близьке до вимірюваного $-(2 - 3)$ нТл.

Далі розглянемо квазіперіодичний ефект СЗ у геомагнітному полі. Джерелом цього ефекту є квазіперіодичні збурення системи іоносферних струмів під дією атмосферних гравітаційних хвиль (АГХ). Ця хвиля захоплює іони, які коливаються у полі хвилі, електрони при цьому замагнічені. Амплітуда швидкості коливань

$$v = v_s \frac{\Delta p}{p_0} \approx v_s \delta_{Na}, \quad (3)$$

де $\Delta p/p_0$ – відносне збурення тиску у полі АГХ, v_s – швидкість звуку на висотах динамо-області атмосфери, δ_{Na} – відносна амплітуда збурень N . Тоді амплітуда квазіперіодичних збурень з урахуванням (3):

$$X_a = \frac{1}{2} \mu_0 e N_0 \delta_{Na} v_s H. \quad (4)$$

Тут e – заряд електрона. За типових значень $N_0 \approx 10^{11}$ м⁻³, $v_s \approx 360$ м/с, $H \approx 15$ км та $\delta_{Na} \approx 1.5 - 2.5\%$ із (4) маємо $X_a \approx 0.8 - 1.4$ нТл, що близько до результату, отриманого із спостережень (~ 1 нТл).

Іоносферний ефект. Із виразу (1) для $A_{max} \approx 66\%$ отримаємо, що $N_{min}/N_0 \approx 0.58$, а $\delta_{Nmax} \approx -0.42$. Для δ_v маємо оцінку:

$$\delta_{vcal} = \frac{\Delta N_v}{N_{v0}} \approx \left(\frac{\Delta N}{N_0} \right) \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1}, \quad (5)$$

де $\left(\frac{\Delta N}{N_0} \right) \approx \delta_{Nmax}$, Δz_1 – товщина шару іоносфери, що дає основний внесок у ПЕВ N_{v0} ,

Δz_2 – товщина шару іоносфери, збуреної СЗ. За $\delta_{Nmax} \approx -0.42$, $\Delta z_1 \approx 300$ км, $\Delta z_2 \approx 200$ км маємо $\delta_{vcal} \approx -0.28$.

При цьому $\Delta N_{vcal} \approx -6.7$ TECU, тобто $\Delta N_{vcal} < \Delta N_v$, а $\delta_{vcal} < \delta_v$. Це може бути пов'язано з тим, що при оцінках не враховувалася іоносферно-плазмосферна взаємодія, описана у роботі [5]. Ця взаємодія призводить до часткової компенсації зменшення N і N_v під час СЗ за рахунок потоків електронів у F-область іоносфери із плазмосфери.

Знаючи час запізнювання ПЕВ $\Delta t \approx 14$ хв, можна оцінити середнє значення лінійного коефіцієнта рекомбінації: $\beta = \Delta t^{-1} \approx 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Таке значення добре узгоджується з відомими результатами [9, 10].

ОБГОВОРЕННЯ

Аналіз часових варіацій усіх компонент геомагнітного поля показав, що СЗ супроводжувалося зменшенням рівня цих компонент на декілька нанотесла. Ефект СЗ найбільше виражено у X -компоненті, а найменше – у Z -компоненті. Така поведінка була подібною до поведінки під час інших затемнень [3].

Крім аперіодичного геомагнітного ефекту, мав місце квазіперіодичний ефект. Значення квазіперіоду було близько 30 хв, $\delta_{Na} \approx 1.5 - 2.5\%$. Є всі підстави вважати, що квазіперіодичний ефект викликався генерацією та поширенням АГХ. Саме АГХ мають такі періоди та амплітуди [11].

Результати оцінки геомагнітного ефекту близькі до результатів спостережень. Це свідчить про те, що геомагнітний ефект був результатом збурення системи іоносферних струмів на висотах $\sim 100 - 150$ км [12].

Результатами оцінки іоносферного ефекту також добре погодилися з результатами спостережень.

ГОЛОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Аналіз часових варіацій рівня трьох компонент геомагнітного поля та ПЕВ дозволив зробити наступні висновки.

1. СЗ над Україною викликало аперіодичні збурення компонент геомагнітного поля, які сягали $2 - 3$ нТл. Найбільше збурення спостерігалось у X -компоненті, а найменше – у Z -компоненті. Тривалість збурення складала $80 - 100$ хв.

2. СЗ супроводжувалося квазіперіодичними збуреннями компонент геомагнітного поля. Амплітуда коливань з періодом 30 ± 5 хв тривалістю 70 – 80 хв сягала 2 нТл.
3. СЗ викликало зменшення ПЕВ від ~ 24 до ~ 18 TECU. Час запізнювання реакції ПЕВ на СЗ складав близько 14 хв. Лінійний коефіцієнт рекомбінації в середньому був близьким до $1.2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$.
4. Результати оцінки магнітного та іоносферного ефектів добре узгоджуються з результатами спостережень.

ФІНАНСУВАННЯ РОБОТИ

Дослідження Л. Ф. Чорногора, М. Ю. Голуб, Ю. Б. Милованова та М. Б. Шевелева виконувались за часткової підтримки держбюджетних НДР, заданих МОН України (номери держреєстрації 0122U001476, 0124U000478, 0124U000461).

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Chernogor LF., Holub MYu., Rozumenko VT. Main Features of the Geomagnetic Effect of the October 14, 2023 Annular Solar Eclipse over the Americas // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. – 2024. – Volume 265. – id:106354. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2024.106354>
2. Bauer LA, Results of international magnetic observations made during the total solar eclipse of May 18, 1901, including results obtained during previous solar eclipses. Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity. 1902, 7 (4): 155–192. <https://doi.org/10.1029/TE007i004p00155>
3. Чорногор ЛФ, Геомагнітний ефект сонячного затемнення 10 червня 2021 р. Кінематика і фізика небесних тіл. 2022, 38(1): 16–34. <https://doi.org/10.15407/kfnt2022.01.016>
4. Korte M, Lühr H, Förster M, Haak V, Bencze P. Did the solar eclipse of August 11, 1999, show a geomagnetic effect? Journal of Geophysical Research: Space Physics. 2001, 106 (A9): 18563–18575. <https://doi.org/10.1029/2001JA900006>
5. Emelyanov LYa, Bogomaz OV, Chernogor LF, Domnin IF, Response of the mid-latitude ionosphere to the solar eclipse on 25 October 2022: Results of F2-layer vertical sounding. Advances in Space Research. 2024, 73 (5): 2338–2354. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2023.12.034>
6. Чорногор ЛФ, Милованов ЮБ, Особливості високоширотних іоносферних ефектів сонячного затемнення 25 жовтня 2022 р. у ранковий час. Кінематика і фізика небесних тіл. 2024. [У друці].
7. Чорногор ЛФ, Дорохов ВЛ, Жданко ЄГ, Милованов ЮБ, Цимбал АМ. Особливості іоносферних ефектів часткового сонячного затемнення 25 жовтня 2022 р. поблизу вечірнього термінатора. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2023, 39:69–78
8. Чорногор ЛФ, Голуб МЮ, Геомагнітний ефект сонячного затемнення 25 жовтня 2022 р. в Євразійському регіоні. Кінематика і фізика небесних тіл. 2024, 40 [У друці].
9. Schunk RW, Nagy A, Ionospheres: physics, plasma physics, and chemistry. – Cambridge University Press. 2000, 554 p.
10. Gossard EE., Hooke WH, Waves in the Atmosphere: Atmospheric Infrasound and Gravity Waves: Their Generation and Propagation. Elsevier Scientific Publishing Company. 1975, 456 p.
11. Chapman S, The Effect of a Solar Eclipse on the Earth's Magnetic Field. Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity. 1933, 38(3): 175–183. <https://doi.org/10.1029/TE038i003p00175>

REFERENCES

1. Chernogor LF., Holub MYu., Rozumenko VT. Main Features of the Geomagnetic Effect of the October 14, 2023 Annular Solar Eclipse over the Americas // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. – 2024. – Volume 265. – id:106354. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2024.106354>
2. Bauer LA, Results of international magnetic observations made during the total solar eclipse of May 18, 1901, including results obtained during previous solar eclipses. Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity. 1902, 7 (4): 155–192. <https://doi.org/10.1029/TE007i004p00155>
3. Chernogor LF, Geomagnetic Effect of the Solar Eclipse on June 10, 2021. Kharkiv: V. N. Karazin Kharkiv National University, 2022, 38(1):16–34. <https://doi.org/10.15407/kfnt2022.01.016> [In Ukrainian].
4. Korte M, Lühr H, Förster M, Haak V, Bencze P. Did the solar eclipse of August 11, 1999, show a geomagnetic effect? Journal of Geophysical Research: Space Physics. 2001, 106 (A9): 18563–18575. <https://doi.org/10.1029/2001JA900006>
5. Emelyanov LYa, Bogomaz OV, Chernogor LF, Domnin IF, Response of the mid-latitude ionosphere to the solar eclipse on 25 October 2022: Results of F2-layer vertical sounding. Advances in Space Research. 2024, 73 (5): 2338–2354. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2023.12.034>

6. Chernogor LF, Mylovanov YuB, Features of the high-latitude ionospheric effects of the solar eclipse on October 25, 2022 in the morning. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2024. [In Press]. [In Ukrainian].
7. Chernogor LF, Dorokhov VL, Zhdanko YH, Mylovanov YuB, Tsymbal AM. Features of ionospheric effects from the partial solar eclipse of October 25, 2022, near the evening terminator. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics"*. 2023, 39: 69–78 [In Ukrainian].
8. Chernogor LF, Holub MYu, Geomagnetic effect of the October 25, 2022 solar eclipse in the Eurasian region. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2024. [In Press]. [In Ukrainian].
9. Schunk RW, Nagy A, *Ionospheres: physics, plasma physics, and chemistry*. – Cambridge University Press. 2000, 554 p.
10. Gossard EE., Hooke WH, *Waves in the Atmosphere: Atmospheric Infrasound and Gravity Waves: Their Generation and Propagation*. Elsevier Scientific Publishing Company. 1975, 456 p.
11. Chapman S, The Effect of a Solar Eclipse on the Earth's Magnetic Field. *Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity*. 1933, 38(3): 175–183. <https://doi.org/10.1029/TE038i003p00175>

Стаття надійшла до редакції: 5 березня 2024 р.

Рекомендовано до друку: 19 квітня 2024 р.

MAGNETIC-IONOSPHERIC EFFECTS OF PARTIAL SOLAR ECLIPSE OF OCTOBER 25, 2022 OVER UKRAINE

L. F. Chernogor, V. O. Bessarabova, M. Yu. Holub, Yu. B. Mylovanov, M. B. Shevelev
V. N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine, 61022, Kharkiv, Svoboda Square, 4

Urgency. The near-Earth environment, which is part of the Earth–atmosphere–ionosphere–magnetosphere (EAIM) system, is the main functioning radio channel. It is used by radio communications, radio navigation, radar, remote sensing, and radio astronomy systems. The EAIM system and radio channel are rarely in a quiet state. From time to time they become disturbed by high energy sources. One of them is a solar eclipse (SE). Although the disturbance of the EAIM system by a solar eclipse has been studied for more than a hundred years, the study of the entire set of effects in this system remains an urgent task. This is due to the fact that the effects of an SE significantly depend on the eclipse magnitude, the state of space weather, position in the solar activity cycle, time of year, time of day, geographic coordinates, etc.

The aim of this paper is to describe the results of the study of temporal variations in the components of the geomagnetic field and total electron content (TEC) in the ionosphere that accompanied the partial SE on October 25, 2022 over Ukraine.

Methods and Methodology. The registration results of X-, Y- and Z-components of the geomagnetic field at the Lviv station and the results of measuring the parameters of radio signals from the Global Navigation Satellite System in Kharkiv were used as initial data. Temporal resolution was 1 min. The error in measuring the level of geomagnetic components is 0.1 nT, and for TEC it is 0.1 TECU.

Results. The SE over Ukraine caused aperiodic disturbances in the components of the geomagnetic field, which reached 2–3 nT. The greatest disturbance was observed in the X-component, and the smallest in the Z-component. The duration of the disturbance was 80–100 min. The SE was accompanied by quasi-periodic disturbances of the geomagnetic field components. The amplitude of oscillations with a period of 30 ± 5 min and a duration of 70–80 min reached 2 nT. The SE caused a decrease in TEC from ~ 24 to ~ 18 TECU. The delay time of the TEC response to the SE was about 14 min. On average, the linear recombination coefficient was close to $1.2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. The results of the assessment of magnetic and ionospheric effects are in good agreement with the observational results.

KEY WORDS: solar eclipse, geomagnetic effect, aperiodic disturbance, quasi-periodic disturbance, ionospheric effect, delay time, disturbance duration.

The article was received by the editors: March 5 2024

The article is recommended for printing: April 19 2024

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-02>

УДК 537.86

О.В. ЖИЛА, к. ф.-м. наук

e-mail: olha.kuryzheva@nure.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-6888-8953>

Н.П. СТОГНІЙ, к. ф.-м. наук, доцент

e-mail: nadiia.stohnii@nure.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-6470-0717>

Харківський національний університет радіоелектроніки,
просп. Науки, 14, м. Харків, 61166, Україна

ОБЧИСЛЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ НА РУХОМІЙ МЕЖІ СЕРЕДОВИЩА, ОПРОМІНЕНОГО ІМПУЛЬСОМ ЕЙРІ

Актуальність. Нові ефекти поширення електромагнітного імпульсу Ейрі, отримані у результаті його взаємодії з рухомою межею, можуть активно застосовуватись при проходженні імпульсів через різні прилади та обладнання, такі як лінзи, дзеркала тощо. Результати такої взаємодії надзвичайно важливі в задачах нанооптики та нанофотоніки, у біохімії для сортування мікрочастинок ті відбору клітин у якості оптичного пінцета.

Мета роботи – дослідження та аналіз особливостей перетворення імпульсу Ейрі у результаті його взаємодії з межею, що рухається йому назустріч.

Матеріали та методи. Для дослідження, аналізу та імітаційного моделювання імпульсу Ейрі у нестационарних електромагнітних середовищах використовується метод інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. Перевага використання даного методу полягає в тому, що рішенням інтегральних рівнянь Вольтерра є аналітичні розв'язки, які отримані шляхом строгих математичних викладок. Окрім цього, метод інтегральних рівнянь Вольтерра універсальний відносно вільного члена рівняння, що дозволяє у якості первинного поля обирати будь-яке електромагнітне поле, у тому числі, і електромагнітний імпульс Ейрі. Розв'язання базового інтегрально рівняння у роботі проводиться методом резольвенти, що дозволяє отримати аналітичний вираз для поля імпульсу, що пройшов через межу. Перевага застосування резольвенти до розв'язку інтегрального рівняння полягає в тому, що даний метод дозволяє розглядати електромагнітні поля з довільною залежністю від часу.

Результати. Проведено дослідження впливу рухомої межі розділення двох діелектричних середовищ на несиметричний електромагнітний імпульс Ейрі. Отримано точні математичні вирази для поля імпульсу Ейрі, які описують його просторово-часову структуру після взаємодії з рухомою межею. Результати отриманих аналітичних виразів супроводжуються числовим імітаційним моделюванням вторинних імпульсів та їх аналізом.

Висновки. Досліджено складний випадок поширення електромагнітного імпульсу, а саме його взаємодію з нестационарною межею, що рухається, починаючи з нульового моменту часу. Встановлено, що у результаті зустрічного руху межі та імпульсу формуються вторинні імпульси в різних областях простору, які змінюють напрямок руху, швидкість та частоту модуляцій. За результатами імітаційного моделювання видно, що після взаємодії імпульсу Ейрі з межею, що рухається, підвищується частота та амплітуда вторинного поля, а розсіяне відбите від межі поле має зменшену енергію та різницеву частоту коливань у часі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: електромагнітні хвилі, імпульс Ейрі, інтегральне рівняння, резольвента, рухома межа.

Як цитувати: Жила ОВ, Стогній НП. Обчислення електромагнітних полів на рухомій межі середовища, опроміненого імпульсом Ейрі. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2024; 40: 18-28. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-02>

In cites: Zhyly O V, Stognii N P. Electromagnetic fields calculation on the moving boundary of the medium irradiated by Airy pulse. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2024; 40. 18-28. (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-02>

ВСТУП

Дослідження взаємодії електромагнітних полів з неоднорідними нестационарними середовищами має фундаментальне значення і являється базовим процесом у багатьох прикладних задачах електродинаміки. Це сприяє розвитку лазерних технологій, оптоволоконної техніки, фотоніки, а також формуванню широкого спектра їх застосувань в екології та медицині.

Вивчення нестационарних електромагнітних явищ диктується новими сучасними проблемами комунікації. Зокрема, активне використання оптичних мереж у гідроакустичних системах зв'язку, у пристроях для керування мікрочастинками – лазерних та оптичних пінцетах, квантових та оптичних комп'ютерах – стало потужним поштовхом для подальшого вивчення їх властивостей та нових застосувань. А після фізичної реалізації лазерних світлових пучків Ейрі розпочався наступний етап вивчення цих принципово нових та незвичних пучків, що розповсюджуються у просторі по параболічній траєкторії, зберігаючи при цьому свою форму.

Зацікавленість до вивчення взаємодії електромагнітних полів з неоднорідними нестационарними середовищами зумовлена низкою важливих фізичних явищ. На сучасному етапі сплеск зацікавленості диктується розвитком новітніх інформаційних та телекомунікаційних технологій і пристроїв, де використовуються надкороткі імпульсні сигнали для передачі та отримання інформації, розвитком методів дистанційного зондування середовищ, оптичного мікроконтролю та ін. Паралельно нанотехнологіям сьогодні активно розвивається лазерна оптика та генерація надкоротких імпульсів тривалістю в кілька фемтосекунд. Вражаючи успіхи досягнуто у застосуванні фемтосекундних лазерів у метрології. В 2014 р. на базі Національного наукового центру Харківського фізико-технічного інституту створено фемтосекундний лазер, який генерує імпульси тривалістю 17,3 фс на довжині хвилі 800 нм [1]. Головною особливістю роботи цього лазера у режимі самосинхронізації є отримання стабільної «гребінки» еквідистантних поздовжніх мод.

Характеристики фемтосекундних лазерів визначають широкий спектр їх застосування у різних галузях науки й техніки. Це зумовлює важливість питань про зміну форми і параметрів таких імпульсів у неоднорідних нестационарних середовищах. Окрім добре вивчених класичних імпульсів Гауса, актуальними стають дослідження більш складних імпульсів. Одним із таких імпульсів є електромагнітний імпульс Ейрі, який має складну структуру та демонструє унікальні властивості самоприскорення, самовідновлення та недиспергуюче поширення [2-3]. Властивості та застосування імпульсу Ейрі активно вивчаються вже багато років поспіль. Більшість досліджень особливостей поширення цього імпульсу проводилось із застосуванням чисельних методів, зокрема, різницевої схеми з умовами Куранта-Фрідрікса-Леві [4]. Дослідження особливостей поширення імпульсу Ейрі чисельним методом Фур'є з розділеним кроком у роботі [5] мало велике значення для вибору початкових умов вхідного імпульсу та оптимізації супер континууму. Продовжуються наукові дослідження солітонів від імпульсів Ейрі. Так, в роботі [6] чисельно продемонстровано поширення імпульсу Ейрі у нелінійному дисперсному середовищі з подальшим виділенням солітону від імпульсу Ейрі, динамікою якого можна керувати зовнішнім потенціалом. Отримано нові результати у теорії імпульсних плазмонів Ейрі. У роботі [7] і розглядаються багатопотонні вимірювання імпульсних плазмонів Ейрі, створених голографічною решіткою. Динаміку поширення просторово-часових імпульсів Ейрі, що мають поперечне прискорення тільки в локальному часовому діапазоні імпульсу, як показано в роботі [8].

Нещодавно було продемонстровано розрізання скляних листів товщиною 12 мм за допомогою оптимізованого променя Бесселя-Гауса. Проте, застосування такого променя не завжди є зручним, адже кінцева заготовка часто має округлу форму, і тому доцільно використовувати прискорений промінь для вирізання.

Серед найактуальніших досліджень у цьому напрямку є доцільність застосування імпульсів Ейрі для різання об'єктів, що мають випуклу форму [9].

У роботі [10] досліджуються акустичні пучки Ейрі, які використовуються для ультразвукового зображення. Результати наукових досліджень демонструють доцільність і переваги ультразвукової візуалізації на основі пучків Ейрі та забезпечують важливу основу для розробки методів візуалізації з використанням недифракційних акустичних променів.

Також актуальними є дослідження вихрових пучків Ейрі з фазованим синхронізуванням. За допомогою моделювання багатофазного екрана показано, що ефективність захисту від перешкод масиву променів Ейрі значно покращена.

Хоча структура імпульсу Ейрі та його різноманітні застосування досить добре висвітлені у сучасній науковій літературі, все ж більшість результатів аналізу його структури обмежується однорідними середовищами та результатами числових досліджень. Проте, особливий інтерес викликають застосування імпульсу Ейрі у неоднорідних, до того ж ще й нестационарних середовищах. Тому дослідження точної просторово-часової структури імпульсу Ейрі у таких середовищах є важливим і актуальним питанням, яке являє собою складну математичну задачу, що потребує розв'язання.

Метою даної роботи є дослідження особливостей взаємодії імпульсу Ейрі з плоскою межею розділення середовищ, яка рухається йому назустріч.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Цікаві особливості перетворення електромагнітних хвиль виникають при нестационарному переміщенні межі розділення середовищ, коли характер взаємодії електромагнітної хвилі із такою межею прямо залежить від співвідношення між їх швидкостями. Також цікаві особливості проявляються у випадку плавного нестационарного руху межі, коли її швидкість поступово досягає величини фазової швидкості хвилі.

Розглянемо задачу про перетворення імпульсу Ейрі межею, яка починає рухатись у певний момент часу. При цьому значення швидкості різко змінюється від нульових значень до значення u .

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОСТАВЛЕНОЇ ЗАДАЧІ

Поширення електромагнітних хвиль у неоднорідному нестационарному середовищі можна описати методом інтегральних рівнянь Вольтерра [12]. Універсальність цього методу відносно вільного члена інтегрального рівняння дозволяє використовувати у якості первинного поля імпульс Ейрі, і, таким чином, успішно розв'язувати задачі про перетворення цього імпульсу у неоднорідному нестационарному середовищі. В загальному випадку, коли середовище в області $x > 0$ може змінюватись у часі, електричне поле $E(t, x)$ зручно описувати інтегральним рівнянням (1):

$$E(t, x) = E_0(t, x) - \frac{v_1^2 - v^2}{2v_1v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^\infty dx' \theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right) E(t', x'), \quad (1)$$

де вільний член $E_0(t, x)$ описує первинне поле в однорідному середовищі. Ядро інтегрального рівняння (1) відмінно від нуля тільки усередині світлового конуса з вершиною в точці спостереження (t, x) , яке описується функцією Хевісайда $\theta(t - t' - |x - x'|/v)$.

Вид інтегрального рівняння (1) дозволяє розглядати первинне поле $E_0(t, x)$ у вигляді імпульсу Ейрі:

$$E_0(t, x) = \text{Ai}\left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{vT}\right) e^{\alpha(-t/T + x/vT)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\frac{(\omega + i\alpha)^3}{3}} e^{i\omega x/vT} e^{-i\omega t/T} d\omega. \quad (2)$$

Розглянемо задачу про перетворення імпульсу Ейрі плоскою межею, яка починає рух у певний (нульовий) момент часу і рухається зі швидкістю u . Положення межі визначається характеристичною функцією $\chi(t, x)$, яка дорівнює одиниці у півпросторі $x > 0$, та нулю у півпросторі $x < 0$.

Вважається, що до нульового моменту часу межа розділення середовищ була нерухомою, тобто $\chi^-(t', x') = \theta(x')$.

Розглянемо випадок, коли у нульовий момент часу межа починає свій рух $\chi^+(t', x') = \theta(x - x_s(t))$, але середовища по обидві сторони межі залишаються нерухомими. Змінюються межі інтегрування в рівнянні (1): частина області інтегрування належить півплощині $T = \{0 < t < \infty, -\infty < x < \infty\}$, а рівняння для минулого поля визначається «історією» поля до моменту зміни швидкості границі:

$$E = F - \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right) \chi^+(t', x') E(t', x'). \quad (3)$$

У формулі (3) вільний член F має вигляд:

$$F = E_0 - \frac{v^2 - v_1^2}{2vv_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^0 dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right) \chi^-(t', x') E_1(t', x'). \quad (4)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (1) отримаємо методом резольвенти [13], яка для даного рівняння має вигляд:

$$\hat{R} = -\chi(x - ut) \frac{v^2 - v_1}{2v_1v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v_1}\right) + \frac{v - v_1}{v + v_1} \frac{\partial}{\partial t} \theta\left(v_1 t - x - \frac{v_1 - u}{v_1 + u} (v_1 t' + x')\right) \right\} \chi(x' - ut'). \quad (5)$$

Підставивши резольвенту (5) в інтегральне рівняння (3), отримаємо вираз для електромагнітного поля у вигляді:

$$E(x) = F(x) - \frac{v^2 - v_1^2}{2vv_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^\infty dx' \hat{R} F(x'). \quad (6)$$

Резольвента (5) визначає поле в наступних областях: перша область описується нерівністю $0 \leq t < x/v_1$ й характеризується відсутністю впливу межі розділення середовищ, а друга область – нерівністю $ut \leq x < v_1 t$ й ураховує наявність межі.

Розглянемо випадок, коли рух межі розпочався у нескінченно далекому минулому, без прив'язки до певного моменту часу. У цьому випадку також можна використовувати вищеописану резольвенту (5), продовживши у рівнянні (5) значення часової змінної t на від'ємну піввісь. Вільний член тоді дорівнює виразу для падаючої хвилі $F = E_0$.

РЕЗУЛЬТАТИ Й ОБГОВОРЕННЯ

У результаті зустрічного руху імпульсу та межі з відповідним співвідношенням між швидкостями $|u| < v_1$ формується вторинний імпульс:

$$E_{T1}(t, x) = \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{2v_1}{v+v_1} \text{Ai} \left(-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{t}{T} + \frac{v-u}{v_1-u} \frac{x}{vT} \right). \quad (7)$$

Поле імпульсу $E_{T1}(t, x)$ існує тільки в області $x < v_1 t$, яка схематично показана на Рис. 1 горизонтальним штрихуванням.

У випадку зустрічного руху з надсвітловою швидкістю $-u > v_1$ формується два вторинні імпульси:

$$E_{T2}(t, x) = \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{v+v_1}{2v} \text{Ai} \left(-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{t}{T} + \frac{v-u}{v_1-u} \frac{x}{vT} \right) + \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \frac{2v}{v+v_1} \text{Ai} \left(-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \frac{t}{T} - \frac{v-u}{v_1+u} \frac{x}{vT} \right). \quad (8)$$

Області існування вторинних імпульсів показано на Рис. 2 горизонтальним та вертикальним штрихуванням відповідно.

Відбиті від межі імпульси знаходяться шляхом підстановки виразів (7) та (8) в оригінальне інтегральне рівняння, коли точка спостереження знаходиться в області $x < ut$. У випадку $-u > v_1, v$ відбиті імпульси не можуть обігнати межу в силу того, що швидкість межі перевищує швидкість поширення імпульсу.

При $-u > v_1, v$ відбитий імпульс має вигляд:

$$E_R(t, x) = -\frac{v-v_1}{v+v_1} \frac{v-u}{v+u} \text{Ai} \left(\frac{v-u}{v+u} \left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{vT} \right) \right). \quad (9)$$

Відбитий імпульс (9) існує тільки в області, обумовленій нерівністю $-ut < x < vt$.

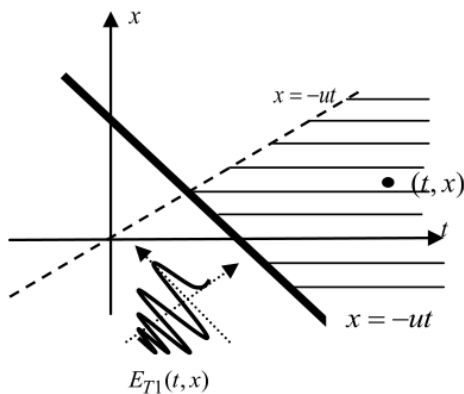


Рис. 1. Область існування поля вторинного імпульсу $E_{T1}(t, x)$ при $|u| < v_1$.

Fig. 1. The area of existence of the secondary pulse field $E_{T1}(t, x)$ at $|u| < v_1$.

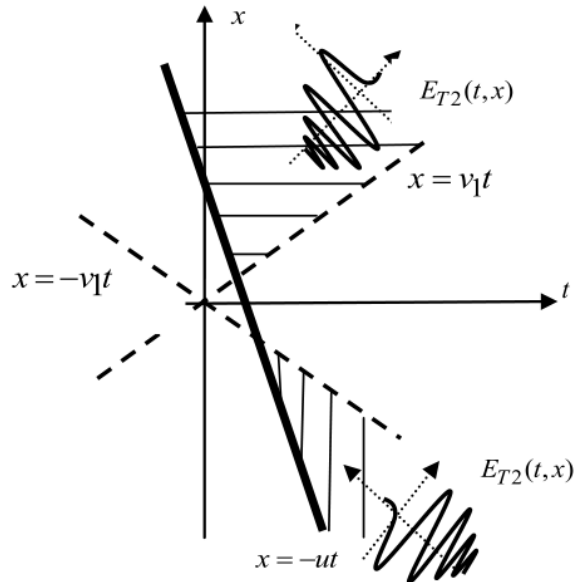


Рис. 2. Область існування імпульсу $E_{T2}(t, x)$ при $-u > v_1$: область $(v_1/v)t < x < -ut$ – горизонтальне штрихування, область $-ut < x < -v_1 t$ – вертикальне штрихування.

Fig. 2. The region of the pulse $E_{T2}(t, x)$ existence when $-u > v_1$: region $(v_1/v)t < x < -ut$ for horizontal hatching, region $-ut < x < -v_1 t$ for vertical hatching.

Розглянемо тепер ситуацію, у якій рівномірний рух границі почався не в нескінченно далекому минулому, а в нульовий момент часу. Це той випадок, коли межа почала свій рух після взаємодії з переднім фронтом імпульсу Ейрі. Як уже описувалося раніше, в області $x > v_1 t$ стан межі не змінюється і поле в цій області визначається виразом, який отримано для випадку нерухомої до нульового моменту часу межі.

У випадку, коли $u > -v_1$, тобто коли швидкість межі більша за швидкість імпульсу, поле збігається з виразом (7). У протилежному випадку, $u < -v_1$, уся просторово-часова область ділиться на дві підобласті $T_3(v_1 t \geq x \geq -v_1 t)$ й $T_4(-v_1 t \geq x \geq ut)$. У першій з них поле складається із двох імпульсів Ейрі:

$$E_{T3}(t, x) = \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{v+v_1}{2v} \text{Ai}\left(-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{t}{T} + \frac{v-u}{v_1-u} \frac{x}{vT}\right) + F_0 \frac{v-v_1}{2v} \frac{v+u}{v_1-u} \text{Ai}\left(\frac{v-u}{v_1-u} \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{v_1 T}\right)\right). \quad (10)$$

У нестационарному випадку формується такий же імпульс, як і в стаціонарному (перший імпульс Ейрі у формулах (8) і (10) збігається). Відмінність полягає в тому, що у нестационарному випадку утворюється імпульс, обумовлений доданком F_0 , тобто «історією» поля до нульового моменту часу. Даний процес є аналогією процесу розщеплення падаючої на межу хвилі в результаті стрибка діелектричної проникності. Тільки у випадку зміни швидкості межі необхідно враховувати тепер зв'язок між швидкостями імпульсу й межі. А саме: у випадку $u > -v_1$ розщеплення неможливе, тому що в полі імпульсу, що пройшов, не можуть існувати імпульси, які поширюються в напрямку до межі. Для $u < -v_1$ після обчислення поля в підобласті $T_4(t, x)$ одержимо імпульс:

$$E_{T4}(t, x) = \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{v+v_1}{2v} \text{Ai}\left(-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{t}{T} + \frac{v-u}{v_1-u} \frac{x}{vT}\right) + \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \frac{v-v_1}{2v} \text{Ai}\left(-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1 T}\right)\right) + F_0 \frac{v-v_1}{2v} \frac{v+u}{v_1-u} \text{Ai}\left(\frac{v-u}{v_1-u} \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{v_1 T}\right)\right) + F_0 \frac{v-v_1}{2v} \frac{v+u}{v_1+u} \text{Ai}\left(\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1 T}\right)\right). \quad (11)$$

Область існування поля імпульсу $E_{T3}(t, x)$ згідно формули (10) показана на Рис. 3 горизонтальним штрихуванням, а область існування поля імпульсу $E_{T4}(t, x)$ у формулі (11) – вертикальним.

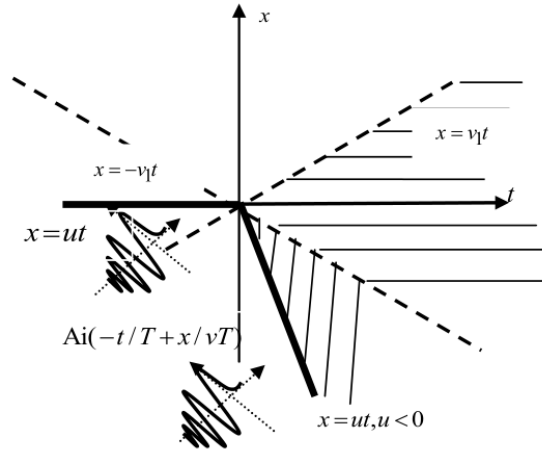


Рис. 3. Області існування вторинних імпульсів при $-u > v_1$: $T_3(v_1 t \geq x \geq -v_1 t)$ – горизонтальне штрихування, $T_4(-v_1 t \geq x \geq ut)$ – вертикальне штрихування.

Fig. 3. Regions of secondary pulses existence at $-u > v_1$: $T_3(v_1 t \geq x \geq -v_1 t)$ for horizontal hatching,

$T_4(-v_1 t \geq x \geq ut)$ for vertical hatching.

Таким чином, коли швидкість межі більше швидкості імпульсу, він досягне точки спостереження пізніше моменту початку руху межі. Це означає, що в цей момент відбудеться розщеплення імпульсу на два інших у результаті різкої зміни значення діелектричної проникності середовища. Після проходження імпульсом межі утворюється два імпульси, які поширюються з новою швидкістю v_1 в протилежних напрямках.

В області $T_3(t, x)$ формується поле, що складається із двох імпульсів. Перший імпульс у формулі (10) такий же, як і у формулі (8) у стаціонарному випадку. Він поширюється в тому ж напрямку, що й падаючий, але рухається з новою швидкістю в області $x > v_1 t$. Різка зміна швидкості межі в нульовий момент часу призводить до утворення нового імпульсу в зоні $x < v_1 t$. Якщо межа рухається з меншою швидкістю, ніж

імпульс, то розщеплення падаючого імпульсу неможливо, тому що в полі імпульсу, що пройшов, не можуть існувати імпульси, що рухаються в напрямку до межі.

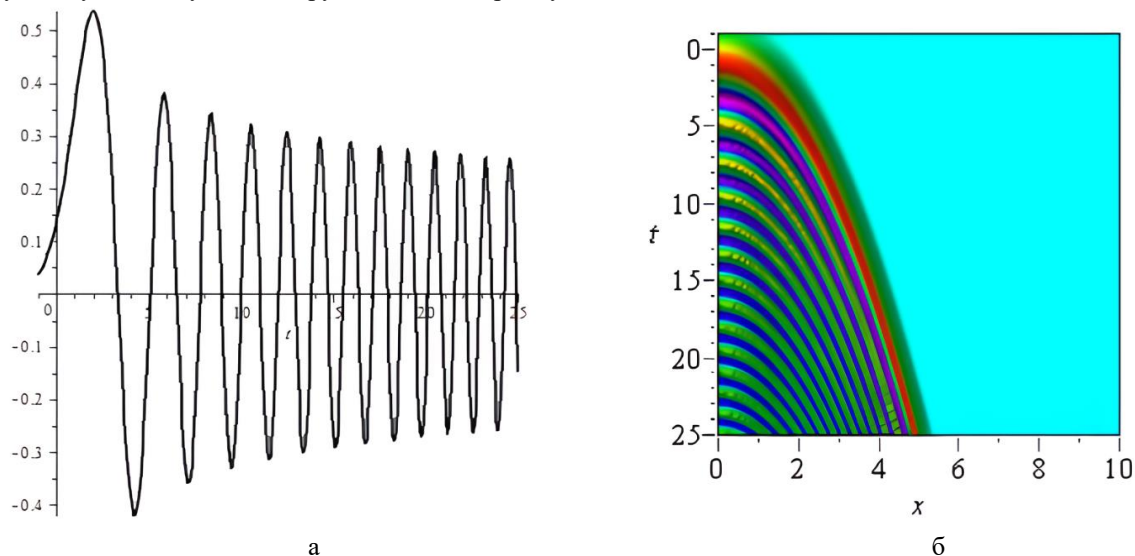


Рис. 4. Поле первинного імпульсу Ейрі $Ai(t, x)$: а – в точці $x=1$ та б – його просторово-часовий розподіл при $x=0..10$, $t=-1..25$.

Fig. 4. Initial Airy pulse (a) $Ai(t, x)$ at the point $x=1$ and its time-spatial distribution (b) at $x=0..10$, $t=-1..25$.

Отже, просторово-часова картина даного явища ділиться на дві частини: до нульового моменту часу, коли границя була нерухомою, і після нульового моменту, коли розпочався її рух. Нестационарність такої задачі ускладнюється асиметричною формою імпульсу Ейрі.

Просторово-часовий розподіл первинного імпульсу Ейрі зображено на Рис. 4. Видно, що імпульс Ейрі обмежений переднім фронтом і, відповідно, має несиметричну форму. Поведінка імпульсу Ейрі у протилежних напрямках визначається асимптотичною формулою:

$$Ai(t) \approx \begin{cases} 2^{-1} \pi^{-1/2} t^{-1/4} e^{-2t^{3/2}/3}, & t \rightarrow +\infty \\ \pi^{-1/2} |t|^{-1/4} \sin\left(2|t|^{3/2}/3 + \pi/4\right), & t \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (12)$$

Наступні зображення Рис. 5–Рис. 9 ілюструють характер поширення вторинних імпульсів у результаті взаємодії з межею, що рухається, та імпульсу, що відбився від рухомої межі.

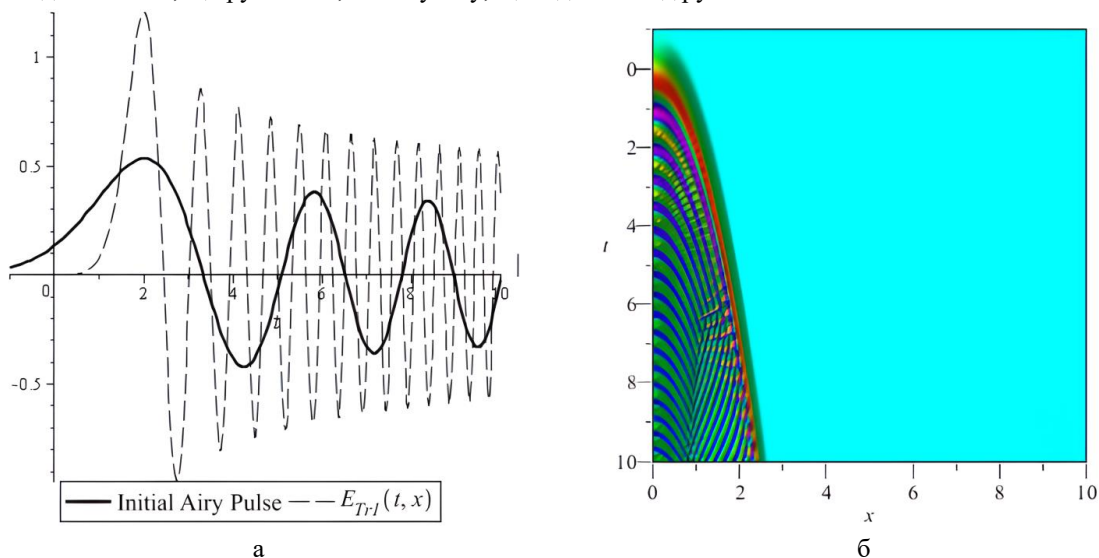


Рис. 5. Поле імпульсу Ейрі $E_{T1}(t, x)$: а – при $x=1$, $v=0,6$, $u=0,5$ та б – при $x=0..10$, $t=-10..12$.

Fig. 5. Airy pulse $E_{T1}(t, x)$ (a) at $x=1$, $v=0,6$, $u=0,5$ and (b) at $x=0..10$, $t=-10..12$.

Аналіз результатів імітаційного моделювання полів після взаємодії імпульсу і межі на рис. 5а показує, що вторинний імпульс має збільшену амплітуду та частоту. Це пов'язано з додаванням швидкостей руху імпульсу і межі та передачею кінетичної енергії від рухомого середовища імпульсу. На Рис. 5б спостерігається двовимірна картина описаних процесів при нелінійному розповсюдженні у просторі.

Припустивши ситуацію, що $u > v$, в результаті імітаційного моделювання розщепленого поля на рис. 6а отримуємо також підвищення частоти та незначного збільшення амплітуди в області, що протилежна до напрямку початкового руху імпульсу. Рухома межа з більшою швидкістю визначає подальший шлях існування імпульсу у просторі. Заповнюється більш широкий діапазон дальностей у протилежні моменти часу, що наочно видно на рис. 6б.

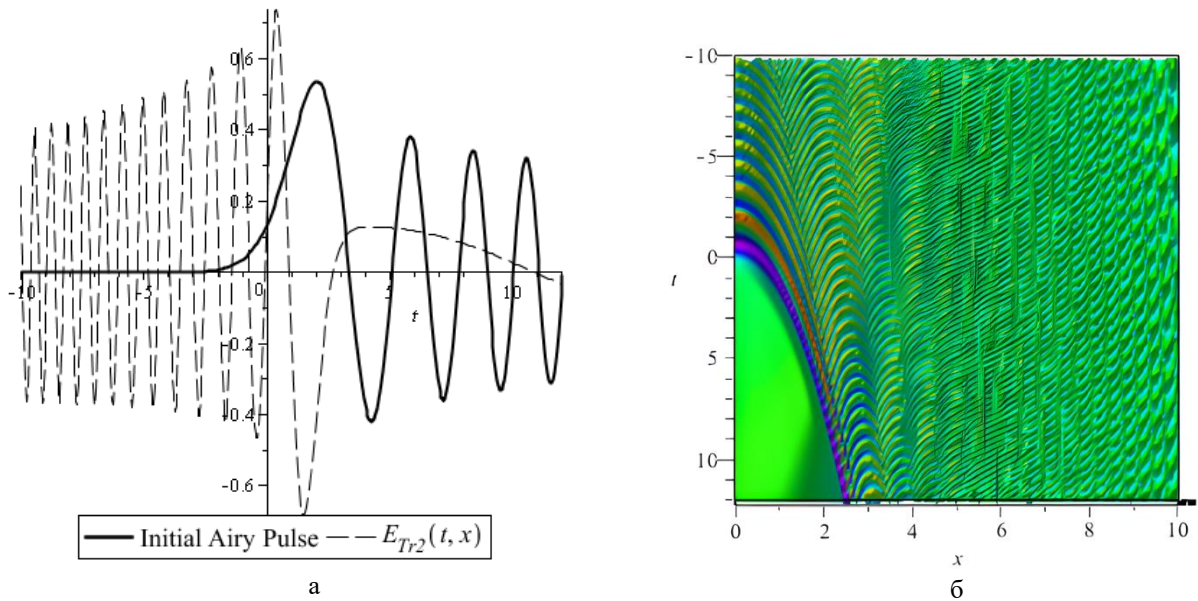


Рис. 6. Поле імпульсу Ейрі $E_{T2}(t, x)$: а – при $x=1$, $v=0,5$, $u=0,6$ та б – при $x=0..10$, $t=-1..10$.

Fig. 6. Airy pulse $E_{T2}(t, x)$ (a) at $x=1$, $v=0,5$, $u=0,6$ and (b) at $x=0..10$, $t=-1..10$.

Практичної ситуації такої взаємодії у вільному просторі бути не може, проте має фізичний сенс при розповсюдженні імпульсів у хвильоводах та уповільнюючих структурах, де значний ефект відіграє фазова швидкість, що може перевищувати швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль в вакуумі.

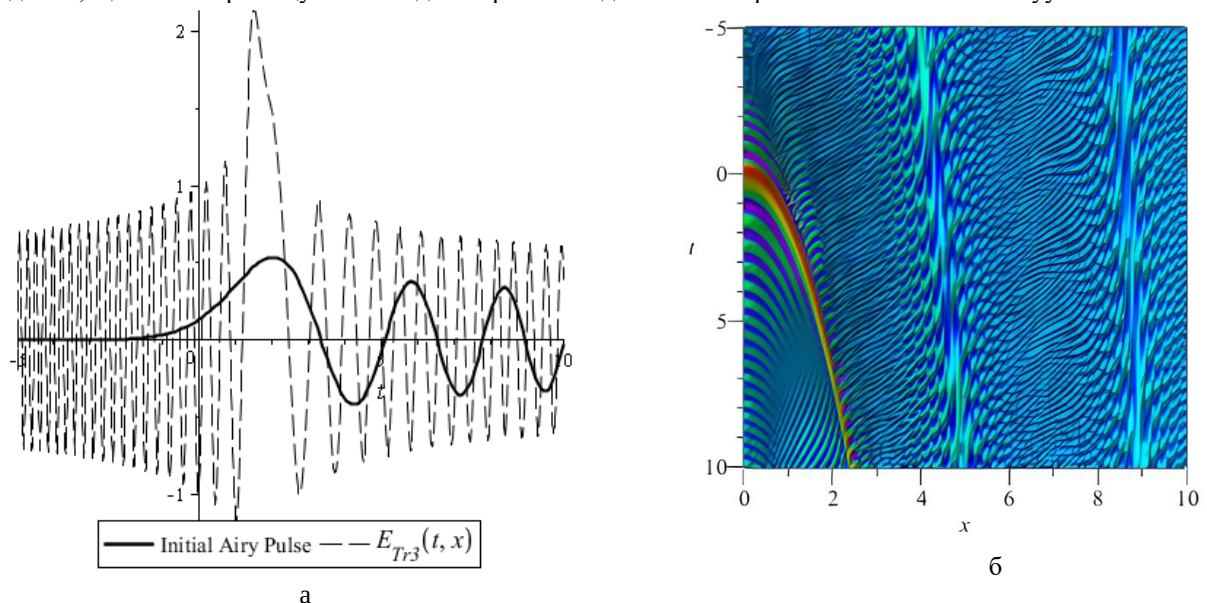


Рис. 7. Поле імпульсу Ейрі $E_{T3}(t, x)$: а – при $x=1$, $v=0,6$, $u=0,5$ та б – при $x=0..10$, $t=-5..10$.

Fig. 7. Airy pulse $E_{T3}(t, x)$ (a) at $x=1$, $v=0,6$, $u=0,5$ and (b) at $x=0..10$, $t=-5..10$.

Рис.7 показує результат імітаційного моделювання складової поля $E_{T3}(t, x)$, з якого випливає загальний випадок розщеплення імпульсу в координатах початкового руху імпульсу та в протилежному напрямку. В даному випадку отримуємо повну картину поля, що сформується після взаємодії імпульсу та межі. В обох просторово-часових зонах, вихідного діапазону нелінійного заломлення імпульсу та йому протилежному, маємо підвищення частоти та амплітуди результуючого поля. Ефект пов'язаний з додаванням швидкостей руху імпульсу і межі, згідно ефекту Доплера. Амплітуда поля збільшується як резонансне додавання хвильових коливань через узгоджені параметри руху.

Рис.8 демонструє повне узгодження компонент $E_{T3}(t, x)$ та $E_{T4}(t, x)$, що дозволяє в наступних аналізах досліджувати лише одну з них.

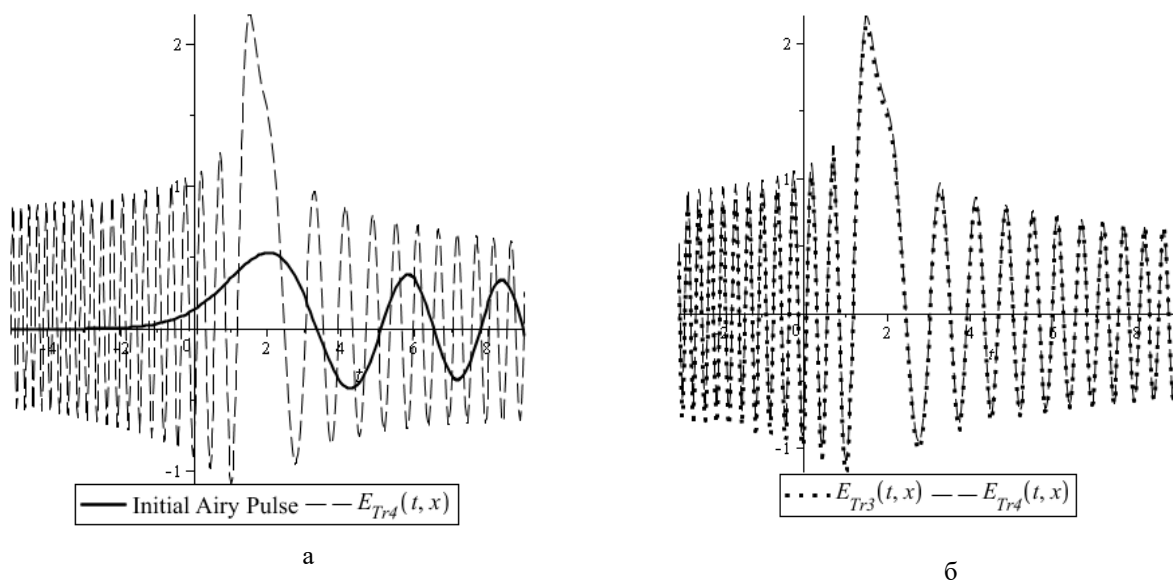


Рис. 8. а – поле імпульсу Ейрі $E_{T4}(t, x)$ при $x=1$, $v=0,6$, $u=0,5$ та б – порівняння поширення імпульсів $E_{T3}(t, x)$ та $E_{T4}(t, x)$ при $x=1$, $v=0,6$, $u=0,5$.

Fig. 8. Airy pulse $E_{T4}(t, x)$ (a) at $x=1$, $v=0,6$, $u=0,5$ and comparison of pulse propagation $E_{T3}(t, x)$ and $E_{T4}(t, x)$ (b) at $x=1$, $v=0,6$, $u=0,5$.

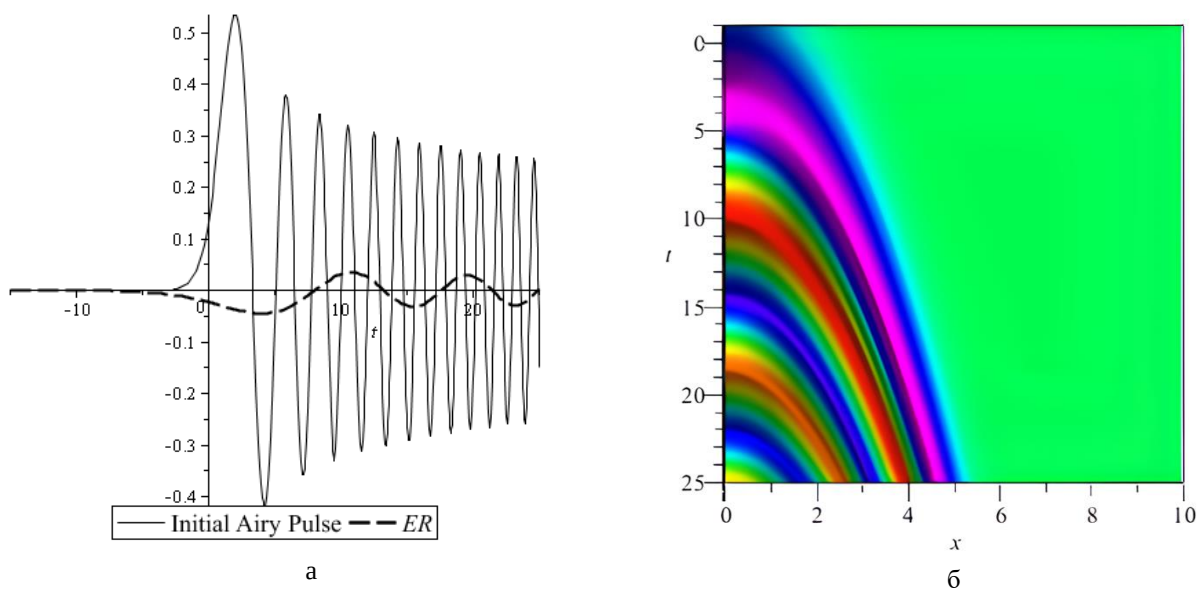


Рис. 9. Поле відбитого від межі імпульсу Ейрі $E_R(t, x)$: а – при $x=1$, $v=0,6$, $u=0,5$ та б – при $x=0..10$, $t=-1..25$.

Fig. 9. Reflected Airy pulse $E_R(t, x)$ (a) at $x=1$, $v=0,6$, $u=0,5$ and (b) at $x=0..10$, $t=-1..25$.

Віддзеркалене поле від рухомої межі середовища після його взаємодії з імпульсом Ейрі має протилежний фізичний ефект в порівнянні з попередніми дослідженнями. Бачимо, що розсіяне поверхнею поле має зменшену енергію та різницеву частоту коливань у часі. Різниця частот розраховується також за формулою частоти Доплера та пропорційна різниці швидкостей руху імпульсу та межі. Зменшення енергії обумовлено стрибком діелектричної проникності та неузгодженості у просторі руху імпульсу та межі. Просторова часова область, яку займає нелінійний рух імпульсу Ейрі, співпадає з вихідною.

ВИСНОВКИ

Таким чином, просторово-часова картина досліджуваного явища ділиться на дві частини: до нульового моменту часу, коли границя була нерухомою, та після нульового моменту, коли розпочався її рух.

Удосконалено алгоритм електродинамічної задачі про перетворення імпульсу Ейрі у неоднорідному нестационарному середовищі методом інтегральних рівнянь, який відрізняється від відомих точною постановкою задачі та аналітичними виразами для вторинного поля імпульсу. На основі отриманих аналітичних виразів для вторинних імпульсів Ейрі проаналізовано перехідні процеси в складному нестационарному середовищі. Вперше досліджені особливості зміни просторово-часової структури імпульсу Ейрі при взаємодії з рухомою межею.

Теоретична значимість отриманих результатів є основою для подальшого вивчення та застосування імпульсу Ейрі у більш складних неоднорідних структурах. Просторово-часові характеристики імпульсу, що отримані у результаті дослідження, можуть бути використані у біомедицині та біохімії, у якості лазерного пінцету та у системах зв'язку, у технічних системах для створення світлових куль.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Shynkarenko Y., Dmytruk A., Dmytruk I., Blonskyi I., Korenyuk P., Sönnichsen C., Kotko A. Transient absorption of gold nanorods induced by femtosecond laser irradiation. *Ukr. J. Phys.* 2014. 59 (3). p. 331–335. <https://doi.org/10.15407/ujpe59.03.0331>
2. Berry MV., Balazs NL. Nonspreading wave packets. *Am. J. Phys.* 1979. 47, p. 264–267. <https://doi.org/10.1119/1.11855>
3. Siviloglou GA., Christodoulides DN. Accelerating finite energy Airy beams. *Optics Letters*. 2007. 32. p. 979–981. <https://doi.org/10.1364/OL.32.000979>
4. Iordache D., Delsanto P.P., Scalerandi M. Pulse distortions in the FD simulation of elastic wave propagation. *Mathematical and Computer Modelling*. 1997. 25 (6). p. 31–43. [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(97\)00037-X](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(97)00037-X)
5. Ament C., Polynkin P., Moloney J.V. Supercontinuum generation with self-healing Airy pulses, *CLEO: 2011 - Laser Science to Photonic Applications*, Baltimore, MD, USA. 2011. p. 1–2. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.243901>
6. Gaur DS., Mishra AK. Ballistic soliton from Airy pulse. 2022 Workshop on Recent Advances in Photonics (WRAP), Mumbai, India. 2022. p. 1–2. <https://doi.org/10.1109/WRAP54064.2022.9758260>
7. Kaiser T., Falkner M., Singh AV., Zilk M., Steinert M., Pertsch T. Airy plasmon pulses investigated by multiphoton photoemission electron microscopy (PEEM). 2019 Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO), San Jose, CA, USA. 2019. p. 1–2. https://doi.org/10.1364/CLEO_QELS.2019.FTh1C.6
8. Kondakci HE., Abouraddy AF. Demonstration of diffraction-free, acceleration-free space-time Airy beams. 2017 IEEE Photonics Conference (IPC), Orlando, FL, USA. 2017. p. 143–144. <https://doi.org/10.1109/IPCon.2017.8116042>
9. Sohr D., Thomas JU., Skupin S. Airy beam enables single pass curved in-volume modifications and cutting of borosilicate glass. 2021 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe & European Quantum Electronics Conference (CLEO/Europe-EQEC), Munich, Germany. 2021. p. 1–1. <https://doi.org/10.1109/CLEO/Europe-EQEC52157.2021.9542323>
10. Chen X., Dong F., Yin C., Tu J., Zhang D., Guo X., Ultrasonic imaging based on pulsed Airy beams, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 2023. 70 (9). p. 1146–1156. <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2023.3298596>
11. Yan X., Guo L., Gong T., Cheng M. Study of propagation of Airy array vortex beams in turbulent atmosphere, 2018 Cross Strait Quad-Regional Radio Science and Wireless Technology Conference (CSQRWC), Xuzhou, China. 2018. p. 1–3. <https://doi.org/10.1109/CSQRWC.2018.8455265>
12. Khizhnyak MA. Integral equations of macroscopic electrodynamics. *Nauchnaya dumka*. 1968. 280 p.
13. Nerukh A., Sakhnenko N., Benson T., Sewell Ph. Non-stationary electromagnetic. Singapore: Pan Stanford Publishing Pte. 2013. 596 p.

REFERENCES

1. Shynkarenko Y., Dmytruk A., Dmitruk I., Blonskyi I., Korenyuk P., Sönnichsen C., Kotko A. Transient absorption of gold nanorods induced by femtosecond laser irradiation. *Ukr. J. Phys.* 2014. 59 (3). p. 331–335. <https://doi.org/10.15407/ujpe59.03.0331>
2. Berry MV., Balazs NL. Nonspreading wave packets. *Am. J. Phys.* 1979. 47, p. 264–267. <https://doi.org/10.1119/1.11855>
3. Siviloglou GA., Christodoulides DN. Accelerating finite energy Airy beams. *Optics Letters*. 2007. 32. p. 979–981. <https://doi.org/10.1364/OL.32.000979>
4. Iordache D., Delsanto P.P., Scalerandi M. Pulse distortions in the FD simulation of elastic wave propagation. *Mathematical and Computer Modelling*. 1997. 25 (6). p. 31–43. [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(97\)00037-X](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(97)00037-X)
5. Ament C., Polynkin P., Moloney J.V. Supercontinuum generation with self-healing Airy pulses, *CLEO: 2011 - Laser Science to Photonic Applications*, Baltimore, MD, USA. 2011. p. 1–2. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.243901>
6. Gaur DS., Mishra AK. Ballistic soliton from Airy pulse. 2022 Workshop on Recent Advances in Photonics (WRAP), Mumbai, India. 2022. p. 1–2. <https://doi.org/10.1109/WRAP54064.2022.9758260>
7. Kaiser T., Falkner M., Singh AV., Zilk M., Steinert M., Pertsch T. Airy plasmon pulses investigated by multiphoton photoemission electron microscopy (PEEM). 2019 Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO), San Jose, CA, USA. 2019. p. 1–2. https://doi.org/10.1364/CLEO_QELS.2019.FTh1C.6
8. Kondakci HE., Abouraddy AF. Demonstration of diffraction-free, acceleration-free space-time Airy beams. 2017 IEEE Photonics Conference (IPC), Orlando, FL, USA. 2017. p. 143–144. <https://doi.org/10.1109/IPCon.2017.8116042>
9. Sohr D., Thomas JU., Skupin S. Airy beam enables single pass curved in-volume modifications and cutting of borosilicate glass. 2021 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe & European Quantum Electronics Conference (CLEO/Europe-EQEC), Munich, Germany. 2021. p. 1–1. <https://doi.org/10.1109/CLEO/Europe-EQEC52157.2021.9542323>
10. Chen X., Dong F., Yin C., Tu J., Zhang D., Guo X., Ultrasonic imaging based on pulsed Airy beams, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 2023. 70 (9). p. 1146–1156. <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2023.3298596>
11. Yan X., Guo L., Gong T., Cheng M. Study of propagation of Airy array vortex beams in turbulent atmosphere, 2018 Cross Strait Quad-Regional Radio Science and Wireless Technology Conference (CSQRWC), Xuzhou, China. 2018. p. 1–3. <https://doi.org/10.1109/CSQRWC.2018.8455265>
12. Khizhnyak MA. Integral equations of macroscopic electrodynamics. *Nauchnaya dumka*. 1968. 280 p.
13. Nerukh A., Sakhnenko N., Benson T., Sewell Ph. *Non-stationary electromagnetic*. Singapore: Pan Stanford Publishing Pte. 2013. 596 p.

Стаття надійшла до редакції: 16 січня 2024 р.

Рекомендовано до друку: 16 лютого 2024 р.

ELECTROMAGNETIC FIELDS CALCULATION ON THE MOVING BOUNDARY OF THE MEDIUM IRRADIATED BY AIRY PULSE

O.V. Zhyla, N.P. Stognii

Kharkiv National University of Radio Electronics, 14, Nauky Ave., Kharkiv, 61166, Ukraine

Relevance. The new effects of electromagnetic pulse propagation obtained as a result of its interaction with a moving boundary can be actively used when pulses pass through various devices and equipment, such as lenses, mirrors, etc. The results of such interaction are extremely important in nano-optics and nanophotonics, in biochemistry for sorting microparticles and selecting cells as optical tweezers.

The purpose of the work is research and analysis the features of the Airy pulse transformation as a result of its interaction with the boundary moving towards it.

Materials and methods. The Volterra integral equations of the second kind method is used for research, analysis and simulation modeling of the Airy pulse in non-stationary electromagnetic media. The advantage of using this method is that the solution of Volterra's integral equations are analytical solutions, which are obtained by means of rigorous mathematical calculations. In addition, Volterra integral equations method is universal with respect to the free term of the equation, which allows you to choose any electromagnetic field, including the Airy electromagnetic pulse, as the primary field. The solution of the basic integral equation in the work is carried out by the resolvent method, which allows obtaining an analytical expression for the field pulse that has passed through the boundary. The advantage of using a resolvent to solve an integral equation is that this method allows considering electromagnetic fields with an arbitrary dependence on time.

Results. The moving boundary influence on an asymmetric electromagnetic Airy pulse is investigated. The exact mathematical expressions for the Airy pulse field describing its spatio-temporal structure after interaction with the

moving boundary are obtained. The results of the obtained analytical expressions are accompanied by numerical simulation of secondary pulses and their analysis.

Conclusion. The complex case of an electromagnetic pulse propagation, namely its interaction with a non-stationary moving boundary, starting from the zero moment of time, is studied. It was established that as a result of the boundary and the pulse movement, secondary pulses are formed in different regions of space, which change the direction of movement, speed and frequency of modulations. According to the simulation results, it can be seen that after the Airy pulse interaction with the moving boundary, the frequency and amplitude of the secondary field increases, and the scattered field reflected from the boundary has a reduced energy and a difference frequency of oscillations in time.

KEYWORDS: electromagnetic waves, Airy pulse, integral equation, resolvent, moving boundary.

The article was received by the editors: January 16 2024

The article is recommended for printing: February 16 2024

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-03>

УДК 535.37.421

О. В. КАЗАНКО, асистент.

e-mail: a_kazanko@i.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9202-8008>

О. Є. ПЕНКІНА, старший викл.

e-mail: penkina@kart.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9804-6685>

В. М. БУТЕНКО, канд. техн. наук, доц.

e-mail: butenko@kart.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9958-3960>

О. В. ГОЛОВКО, канд. техн. наук, доц.

e-mail: golovko@kart.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9880-428X>

Український державний університет залізничного транспорту,
кафедра обчислювальної техніки та систем управління,
м. Харків, майдан Фейєрбаха, 7, Україна

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ЗНАХОДЖЕННЯ 1-ОЇ, 2-ОЇ ПОХІДНИХ ВІД СКЛАДОВИХ ЧЛЕНІВ ДИСПЕРСІЙНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ПЛОСКОГО ДВОШАРОВОГО ОДНОВИМІРНО- ПЕРІОДИЧНОГО ФОТОННОГО КРИСТАЛА

Актуальність. Останні десятиріччя спостерігається стрімкий розвиток фотоніки. Тому науковий інтерес до оптичного діапазону електромагнітного випромінювання продовжує зберігати актуальність. Як наслідок, задача про розсіяння електромагнітних хвиль (дифракційна задача) на таких об'єктах як фотонні кристали представляється актуальною задачею. Йдеться про розв'язання хвильового рівняння з подальшим застосуванням методу розділення змінних та переходом до проблеми Штурма-Ліувілля на необмеженому інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Для дифракційних структур, які розглядаються у роботі, зазначений метод розділення змінних дозволяє отримати розв'язок хвильового рівняння (котре у такому разі виявляється рівнянням з періодичними коефіцієнтами) у явному вигляді. Інший метод – метод матриці перенесення (Transfer matrix method) для хвильового рівняння з періодичними коефіцієнтами дає змогу врахувати специфіку його рішення на необмеженому інтервалі $(-\infty, +\infty)$, та досягти виконання складової умови розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля – умови про самоспряженість диференціального оператора в цій проблемі. Тож, метод матриці перенесення передбачає побудову та розв'язок так званого дисперсійного рівняння – рівняння, що пов'язує параметри дифракційної задачі з умовами розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля. У наслідок цього виникає необхідність у дослідженні складових членів такого дисперсійного рівняння. А саме, виникає необхідність розуміти поведінку розв'язку спектрального рівняння у даній проблемі Штурма-Ліувілля залежно від спектрального параметра. Тому, на думку авторів, пошук похідних від цього розв'язку має актуальність, оскільки апарат похідної у цілому відіграє доволі важливу роль у дослідженні будь-яких функціональних залежностей.

Мета роботи. Визначити першу та другу похідні за спектральним параметром від розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля для плоского двошарового одновимірно-періодичного фотонного кристала. А також, показати, що кожна із зазначених похідних лінійно виражається через сам розв'язок та свою похідну, але за просторовою змінною, а вже як наслідок, можливість мати дві лінійні залежності, що дає змогу отримати лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку відносно цього розв'язку. Подальше дослідження зазначеного рівняння у деякій перспективі може послужити розвитку альтернативного апарату розуміння поведінки даного розв'язку як функції спектрального параметра.

show that each of the specified derivatives is linearly expressed through the solution itself and its derivative, but in terms of a spatial variable, and as a consequence, the possibility of having two linear dependencies, which makes it possible to obtain a

Методи і методологія. Умова про самоспряженість диференціального оператора у проблемі Штурма-Ліувілля (складова умова розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля) для плоского двошарового нескінченного одновимірно-періодичного фотонного кристала досягається шляхом застосування методу матриці перенесення (Transfer matrix method). Спираючись на принцип невизначених коефіцієнтів, автори використовують підставлення (що запропоновано у роботі) та здійснюють перехід від лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку, розв'язком якого є шукана похідна (2-га похідна), до системи рівнянь, котра розглядається як матричне рівняння. Для розв'язання матричного рівняння використовується метод варіації.

Результати. У поданій роботі визначається друга похідна за спектральним параметром від розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля для плоского двошарового одновимірно-періодичного фотонного кристала (необмеженого вздовж періодичності). Визначена похідна лінійно виражається через сам

© О. В. Казанко, О. Є. Пенкіна, В. М. Бутенко, О. В. Головка, 2024

Open access. This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

розв'язок та свою похідну, але за просторовою змінною. Також у роботі розв'язується лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку, таким чином, власне, й отримується шукана похідна. Таке рівняння вдається розв'язати на основі досліджень та результатів попередніх робіт – робіт з визначення відповідної 1-ї похідної. Втім, варто зазначити, що прямої аналогії між методикою визначення 1-ї та 2-ї похідної вбачати не вдається у цьому, зокрема, й виражається змістовність даної роботи.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: фотонний кристал, розсіяння електромагнітних хвиль, похідна за спектральним параметром, проблема Штурма-Ліувілля, спектральне рівняння, дисперсійне рівняння, власна функція, фотона заборонена зона.

Як цитувати: Казанко ОВ, Пенкіна ОЄ, Бутенко ВМ, Головка ОВ. Дослідження та знаходження 1-ої, 2-ої похідних від складових членів дисперсійного рівняння для плоского двошарового одновимірно-періодичного фотонного кристала. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2024; 40:29-41. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-03>

In cites: Chernogor LF, Bessarabova VO, Holub MYu. Magnetic-ionospheric effects of partial solar eclipse of October 25, 2022 over Ukraine. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2024;40:29-41. (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-03>

ВСТУП

У зв'язку зі стрімким розвитком такої галузі науки й техніки як фотоніка, в останні десятиріччя (приблизно з 90-х років ХХ-го століття), науковий інтерес до оптичного діапазону електромагнітного випромінювання продовжує зберігати актуальність. А разом з тим, задача про розсіяння електромагнітних хвиль (дифракційна задача) на таких об'єктах як фотонні кристали представляється актуальною [1-3]. Тобто йдеться про розв'язання скалярного хвильового рівняння (*вихідне хвильове рівняння*) з подальшим застосуванням методу розділення змінних та переходом до проблеми Штурма-Ліувілля на необмеженому інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Для структур, які розглядаються у роботі, зазначений метод розділення змінних дозволяє отримати розв'язок хвильового рівняння, (яке в такому разі виявляється рівнянням з періодичними коефіцієнтами), у явному вигляді.

Втім, варто зазначити, що окрім фотонних кристалів, періодичні дифракційні структури, загалом, є важливою складовою пасивних та активних пристроїв мікрохвильової та терагерцової радіофізики. Періодичні дифракційні структури використовуються у приладах електронної техніки як уповільнювачі, а також канали входу та виходу у пристроях прийому та передачі енергії, в спектроскопії, радіолокації, антеннофідерних приладах.

Із загальної теорії рівнянь з частковими похідними відомо, що розв'язання хвильового рівняння методом розділення змінних приводить до проблеми Штурма-Ліувілля (проблеми про побудову повної ортогональної системи функцій, кожний елемент якої задовольняє деякому лінійному диференціальному рівнянню 2-го порядку) – спектральної проблеми (проблеми на власні функції) для лінійного диференціального оператора 2-го порядку. Умови повноти й ортогональності шуканих власних функцій цієї проблеми складають предмет доволі чималої теорії. Іншою мовою, чим більш конкретними є вимоги щодо вихідної дифракційної задачі, тим сильніше увиразнюються умови існування розв'язку проблеми Штурма-Ліувілля. Серед відомих умов розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля справедливо виділити умову про самоспряженість диференціального оператора (власні функції утворюють повну ортогональну систему у такому функціональному просторі де даний диференціальний оператор є самоспряженим), оскільки така умова, на думку авторів, є однією з найбільш складно забезпечуваних умов.

При розв'язанні хвильового рівняння на нескінченному інтервалі $(-\infty, +\infty)$ для одновимірно-періодичних дифракційних структур (необмежених уздовж періодичності) умова самопов'язаності диференціального оператора Штурма-Ліувілля може досягатися шляхом застосування методу матриці перенесення (Transfer matrix method) [4-5]. Цей метод передбачає підняття іншої спектральної проблеми, параметр якої, взагалі кажучи, виявляється залежним від спектрального параметра проблеми Штурма-Ліувілля. Нововказана проблема ставиться для квадратної матриці 2-го порядку (матриці перенесення), та, як відомо, з загальної теорії матриць еквівалентна розв'язанню квадратного рівняння. Тож, якщо $LZ = -\beta^2 Z$ – спектральне рівняння у проблеми Штурма-Ліувілля (β – спектральний параметр, L – диференціальний оператор, $Z \in H$ – функції деякого простору Гільберта H – опорного простору), то, за методом матриці перенесення, виникає інше спектральне рівняння, у параметрі якого присутня залежність від параметра β : $Tu = \Lambda_\beta u$, T – квадратна матриця 2-го порядку, Λ_β – спектральний параметр, u – двовимірний вектор. Отже, власні числа Λ_β квадратної матриці T є розв'язками квадратного рівняння $\det(T - \Lambda_\beta I) = 0$ (I – квадратна одинична матриця).

З іншого боку, для виділення простору самоспряження диференціального оператора L має виконуватись $\Lambda_\beta \overline{\Lambda_\beta} = 1$ (докладніше до цього питання торкатиместь нижче при постановці дифракційної

задачі, вибору опорного простору, скалярного добутку, системи координат, матеріальних та інших параметрів вихідної дифракційної задачі). Підкреслимо, що простір розв'язків спектрального рівняння $LZ = -\beta^2 Z$, як простір лінійного диференціального рівняння 2-го порядку, являє собою двовимірний підпростір опорного простору: $U_\beta \subset H$ [6]. А також зазначимо, що через періодичність коефіцієнтів оператора L , функція $u(z-l)$ є розв'язком, якщо $u(z)$ є розв'язком: $Lu(z) \equiv -\beta^2 u(z) \Leftrightarrow L u(z-l) \equiv -\beta^2 u(z-l)$, l – період розглядуваного кристала (періодичність коефіцієнтів оператора L є наслідком періодичності коефіцієнтів вихідного хвильового рівняння – про це зазначалось вище). Підґрунтям для методу матриці перенесення стає лінійність оператора, який діє у двовимірному просторі U_β та який розв'язку $u(z)$ ставить у відповідність розв'язок $u(z-l)$ (лінійність цього оператора перевіряється безпосередньо за визначенням). Отже, такий оператор однозначно задається квадратною матрицею, яку й називають *матрицею перенесення*. Нехай $T = T_\beta$ – матриця перенесення: $T_\beta: u(z) \rightarrow u(z-l)$. Спектральна проблема для матриці перенесення приводить до сумісного розв'язання двох наступних рівнянь $\det(T_\beta - \Lambda_\beta I) = 0$, $\Lambda_\beta \overline{\Lambda_\beta} = 1$. Це рівняння, як рівняння незалежного параметра β (спектрального параметра проблеми Штурма-Ліувілля), називають *дисперсійним рівнянням* фотонного кристала. (точніше, *дисперсійним рівнянням* плоского двошарового одновимірно-періодичного необмеженого вздовж періодичності фотонного кристала).

Нехай тепер Λ_β – власне число матриці перенесення T_β , яке задовольняє умові $\Lambda_\beta \overline{\Lambda_\beta} = 1$, тоді дисперсійне рівняння $\det(T_\beta - \Lambda_\beta I) = 0$ еквівалентне рівнянню $\Lambda_\beta Z_\beta(z-l) = Z_\beta(z)$, де $Z_\beta(z) \in U_\beta$ – розв'язок спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля. Зрозуміло, що про таку еквівалентність слід говорити тоді, коли існує відповідність між β та Z_β , за якою для будь-якого β існує одна (та лише одна) функція $Z_\beta \in U_\beta$ (таку відповідність нескладно вказати, оскільки структура простору розв'язків спектрального рівняння $LZ = -\beta^2 Z$, як простору розв'язків рівняння з кусково-сталими періодичними коефіцієнтами піддається глибокому розумінню). Отже, видно, що складовим членом дисперсійного рівняння є функція Z_β . Тому властивості дисперсійного рівняння здебільше визначаються характером поведінки функції Z_β як функції спектрального параметра β .

У роботах [7-9] була виявлена можливість лінійно представити похідну від функції Z – розв'язку спектрального рівняння $LZ = -\beta^2 Z$ (точніше, похідну за спектральним параметром β), через саму функцію та свою похідну, але за просторою змінною: $\frac{\partial}{\partial \beta} Z = Z' = -\frac{1}{2} \xi Z + \xi Z'$, тут $\xi = \xi(z)$ – відома функція [8]. Цей результат наводить на думку про існування можливості представити й 2-гу похідну в аналогічному вигляді: $\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} Z = Z'' = \eta Z + \chi Z'$, $\eta = \eta(z)$, $\chi = \chi(z)$ – деякі функції. Своєю чергою, можливість мати дві такі лінійні залежності дає змогу отримати лінійне рівняння відносно функції Z , дослідження якого у перспективі може послужити створенню альтернативного апарату, що дозволяє розуміти загальні властивості розв'язка Z (точніше, йдеться про можливість отримати лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку відносно функції Z). Новозазначене рівняння безпосередньо впливає з двох лінійних залежностей $Z' = -\frac{1}{2} \xi Z + \xi Z'$, $Z'' = \eta Z + \chi Z'$, інша річ полягає у тому, чи буде отримане рівняння піддаватися подальшому вивченню. Втім, не дивлячись на такий стан речей зрозумілим є те, що 1-ша й 2-га похідні, загалом, відіграють доволі важливу роль у дослідженні будь-яких функціональних залежностей. Тому натеper пошуки 2-ї похідної, як видається авторам, становлять інтерес у зв'язку з прагненням розуміти поведінку розв'язка Z як функції спектрального параметра β .

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо дифракційну задачу для двошарового нескінченного одновимірного періодичного фотонного кристала з періодом l . Нехай ϵ_j , μ_j – діелектрична та магнітна проникності відповідно першого й другого шарів ($j = 1, 2$), d – розмір першого шару, $l-d$ – другого шару. Уведемо прямокутну декартову систему координат ZOY таким чином, щоб періодичність структури була направлена вздовж вісі OZ . Скалярне рівняння плоскої монохроматичної Е-поляризованої хвилі для двовимірного середовища, заповненого даним кристалом, має наступний вигляд (модифіковане рівняння Гельмгольца):

$$\Delta_\mu u + k^2 n^2 u = 0, \quad (1)$$

тут $\Delta_\mu = \mu \nabla_\mu^2$ – модифікований оператор Лапласа, $u = u(z, y)$ – шукана скалярна функція, $z, y \in (-\infty, +\infty)$, $n(z) = \sqrt{\epsilon \mu}$ – коефіцієнт заломлення – кусково-стала функція, $\epsilon = \epsilon(z)$ – діелектрична проникність, $\mu = \mu(z)$ – магнітна проникність – кусково-стала:

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & z \in (\frac{d}{2}-l+ml, -\frac{d}{2}+ml] \\ \varepsilon_2, & z \in (-\frac{d}{2}+ml, \frac{d}{2}+ml] \end{cases}, \quad \mu(z) = \begin{cases} \mu_1, & z \in (\frac{d}{2}-l+ml, -\frac{d}{2}+ml] \\ \mu_2, & z \in (-\frac{d}{2}+ml, \frac{d}{2}+ml] \end{cases}$$

m – ціле, l – період шаруватого середовища, $k = \frac{\omega}{c}$ – хвильове число, ω – циклічна частота плоскої монохроматичної хвилі, c – швидкість світла у порожнечі [10].

За методом розділення змінних, загальний розв'язок рівняння (1) представляється у вигляді ряду Фур'є

$$u = \sum_n Y_{\beta_n} Z_{\beta_n}, \quad (2)$$

де $Y_{\beta_n} = Y_{\beta_n}(y)$ – задовольняє такому рівнянню $\ddot{Y}_{\beta_n} + \beta_n^2 Y = 0$ (звичайному лінійному диференціальному рівнянню 2-го порядку), та відповідно має вигляд, $Y_{\beta_n}(y) = C_{\beta_n} e^{\beta_n y} + D_{\beta_n} e^{-\beta_n y}$, C_{β_n} , D_{β_n} – довільні константи, $\{Z_{\beta_n}\}_{n=0, \pm 1, \dots}$ – повна ортогональна система функцій, причому, $Z_{\beta_n} = Z_{\beta_n}(z)$ задовольняє рівнянню $\mu(\frac{1}{\mu} \dot{Z}) + (k^2 n^2 + \beta_n^2) Z = 0$ [11]. Специфіка розв'язання задачі, зокрема, виявляється у тому, що розв'язок відшукується на всій числовій вісі.

Як відомо, побудова повної ортогональної системи функцій, кожен елемент якої задовольняє деякому лінійному диференціальному рівнянню 2-го порядку – проблема Штурма-Ліувілля – може здійснюється шляхом розв'язання наступної спектральної проблеми

$$LZ = -\beta^2 Z, \quad (3)$$

де β – спектральний параметр, L – лінійний диференціальний оператор 2-го порядку, заданий у певному функціональному просторі Гільберта H – в опорному просторі. Стосовно рівняння (1) та ряду Фур'є (2), диференціальний оператор має вигляд $LZ \equiv \mu(\frac{1}{\mu} \dot{Z}) + k^2 n^2 Z$, а у якості опорного простора H вибирається простір майже-періодичних функцій з наступним скалярним добутком (майже-періодичні функції утворюють повний простір, що й потрібно для застосування апарату рядів Фур'є та розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля):

$$(u, v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{z_0}^{z_0+T} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz, \quad (4)$$

де $u, v \in H$, $\mu = \mu(z)$ – магнітна проникність – кусково-стала функція, $z_0 \in (-\infty, +\infty)$ – довільна точка. Скалярний добуток (4) не залежить від вибору точки z_0 .

Як вже неодноразово відмічалось раніше (в теперішній роботі), складовою умовою розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля є умова самоспряження диференціального оператора L , тому з опорного простору H необхідно виділити такий підпростір $H_0 \subset H$ у якому диференціальний оператор L буде самоспряженим (симметрическим). Таким простором є простір функцій $u \in H$ таких, що $\frac{1}{\mu} \dot{u}$ – неперервна, $Lu(z-l) = u(z)$, $L\bar{L} = 1$ (L – деяке комплексне число):

$$H_0 = \left\{ u \in H: \frac{1}{\mu} \dot{u} - \text{неперервна}, Lu(z-l) = u(z) \right\}.$$

Для функцій простору H_0 скалярний добуток (4) еквівалентний наступному скалярному добутку

$$(u, v) = \int_{z_0-l}^{z_0} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz,$$

де $u, v \in H_0$, а самоспряжність оператору L перевіряється безпосередньо за визначенням виконання $(Lu, v) = (u, Lv)$ [12-13]. Для функцій простору H_0 незалежність вибору точки $z_0 \in (-\infty, +\infty)$ нескладно показати. Справді, задамо точки z_0 приріст Δz , тоді

$$\int_{z_0+\Delta z-l}^{z_0+\Delta z} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz = \int_{z_0-l+\Delta z}^{z_0} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz + \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz.$$

У другому доданку правої частини останнього перетворень виконуємо заміну змінної z на $z-l$:

$$\begin{aligned}
\int_{z_0-l+\Delta Z}^{z_0+\Delta Z} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz &= \int_{z_0-l+\Delta Z}^{z_0} \dots \int_{z_0-l}^{z_0-l+\Delta Z} \frac{1}{\mu(z-l)} u(z-l) \overline{v(z-l)} d(z-l) \\
&= \int_{z_0-l+\Delta Z}^{z_0} \dots + \int_{z_0-l}^{z_0-l+\Delta Z} \frac{1}{\mu(z)} \Lambda u(z) \overline{\Lambda v(z)} dz = \int_{z_0-l}^{z_0-l+\Delta Z} \frac{1}{\mu(z)} u(z) \overline{v(z)} dz + \int_{z_0-l+\Delta Z}^{z_0} \dots .
\end{aligned}$$

За адитивністю, поєднуємо останні інтеграли

$$\int_{z_0-l+\Delta Z}^{z_0+\Delta Z} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz = \int_{z_0-l}^{z_0} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz .$$

ОГЛЯД

Один зі шляхів, що допомагає формувати кількісний погляд на розуміння поведінки складових членів дисперсійного рівняння для плоского однорізно-періодичного фотонного кристала (необмеженого вздовж періодичності), як стає зрозумілим з переднього розділу, лежить через дослідження розв'язка спектрального рівняння (3). Перші спроби розвивати такий погляд автори намагалися здійснювати у роботах [7-9, 11]. Були розглянуті питання про характер осциляцій та можливість виділення проміжків монотонності, також була з'ясована асимптотика рівняння на нескінченності ($\beta \rightarrow \infty$). Зокрема, такі дослідження є важливими для побудови фотонних заборонених зон, наявність яких є основною властивістю дифракційних ефектів на кристалах, та завдяки якій, фотонні кристали здебільш й зарекомендували своє практичне застосування. Поряд із побудовою фотонних заборонених зон важливим також представляється виявлення різниці у поведінки складових членів дисперсійного рівняння в залежності від знаку (додатних та від'ємних) значень матеріальних параметрів, впливу частотного хвильового числа $k = \frac{\omega}{c}$, (ω – циклічна частота плоского монохроматичної хвилі, c – швидкість світла у порожнечі) та інших параметрів кристала. Й наостанок, зазначимо, що пошуки коренів, дисперсійного рівняння відносно спектрального параметра β безпосередньо пов'язані з визначенням власних чисел та відповідних власних функцій.

Перша похідна Z'_β відшукується як розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку [6] (рівняння отримується шляхом взяття похідної від спектрального рівняння за спектральним параметром):

$$\left(\frac{1}{\mu} \dot{\psi}\right) + \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} \psi = -2 \frac{\beta}{\mu} Z_\beta. \quad (5)$$

Своєю чергою, розв'язок такого рівняння на кінцевому проміжку $[\frac{d}{2}-l, \frac{d}{2})$ записується у наступному вигляді

$$\psi_0 = -\frac{1}{2} \xi Z_\beta + \xi \dot{Z}_\beta, \quad (6)$$

Як було показано де функція ξ обертається в нуль на межі розподілу середовищ: $\xi|_{\frac{d}{2}} = 0$ (цією вимогою забезпечується неперервність розв'язку ψ_0 , оскільки похідна $\dot{Z}_\beta$ може потерпати стрибок). $\xi = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \phi$, ϕ – розв'язок рівняння

$$\left(\frac{1}{\mu} \dot{\phi}\right) + 4 \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} \phi = 4 \frac{\beta}{\mu}. \quad (7)$$

У протиставлення рівнянню (3), рівняння (5) розв'язується на обмеженому проміжку $[\frac{d}{2}-l, \frac{d}{2})$. Річ у тому, що можливість інтегрувати рівняння на кінцевому проміжку дає змогу знизити диференціальні якості розв'язків при виході на границю й таким чином ставить дослідника у більш вигідне становище у порівнянні з ситуацією, коли розв'язки відшукуються на нескінченному інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Розв'язання спектрального диференціального рівняння (3) та відповідно хвильового рівняння (1) на нескінченному інтервалі $(-\infty, +\infty)$ зрозуміло, що немає граничних точок у цьому, власне, й виражається специфіка в підході та залучення методу матриці перенесення (Transfer matrix method) дозволяє зрозуміти та виділити простір у якому диференціальний оператор L є самоспряженим й таким чином досягти

складової умову розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля. Авторам роботи видається важливим дослідити питання щодо існування можливості записати 2-гу похідну від функції Z_β – розв'язку спектрального диференціального рівняння (3), але не як функції просторової змінної z , а як функції спектрального параметра β .

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Перейдемо до знаходження 2-ї похідної. Тож, диференціюючи спектральне диференціальне рівняння (3) за спектральним параметром β , маємо

$$\left(\frac{1}{\mu}\dot{Z}\right)'' + \frac{\zeta_\beta^2}{\mu}Z'' = -2\frac{1}{\mu}Z - 2\frac{2\beta}{\mu}Z'.$$

Або, здійснюючи підставлення $Z'' = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}Z = \varphi$, отримуємо

$$\left(\frac{1}{\mu}\dot{\varphi}\right) + \frac{\zeta_\beta^2}{\mu}\varphi = -2\frac{1}{\mu}Z - 4\frac{\beta}{\mu}Z'. \quad (8)$$

Таким чином, було записано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку відносно функції φ . З погляду математичної строгості, класична похідна (якою є похідна за спектральним параметром) та узагальнена похідна за Соболевим (відносно якої вибудовані хвильове, спектральне та всі інші диференціальні рівняння у даній роботі) не є тотожними поняттями, тому питання про рівність мішаних похідних у принципі потребує пояснень, тобто питання про рівність $\left(\frac{1}{\mu}\dot{Z}\right)'' = \left(\frac{1}{\mu}\dot{Z}''\right)$. Подібна проблема вже висвітлювалась у роботах [7-9, 11] при пошуку 1-ї похідної – тут існування та рівність мішаних похідних пояснюється аналогічно.

Спираючись на досвід розв'язання рівнянь виду (5) – рівнянь, що виникають при знаходженні 1-ї похідної (за спектральним параметром β) від розв'язку Z , приходять на думку наступна логіка. Спершу зробити підставлення (6) у (8) та виключити член Z' , а тоді звести доданки у правій частині та знайти розв'язок у вигляді $\varphi = \eta Z + \chi \dot{Z}$, тобто розв'язок зведеного рівняння (7) відшукувати у такому ж вигляді як й розв'язок рівняння (5). На цьому шляху приходимо до неоднорідного рівняння з правою частиною, що містить функцію ξ . Тобто, цей шлях не приводить до суттєвого спрощення відповідного рівняння (7). Справді,

$$L\varphi = -2\frac{1}{\mu}Z - 4\frac{\beta}{\mu}\left(-\frac{1}{2}\xi Z_\beta + \xi \dot{Z}_\beta\right) \equiv -2\frac{1}{\mu}Z + 4\frac{\beta}{\mu} \cdot \frac{1}{2}\xi Z_\beta - 4\frac{\beta}{\mu}\xi \dot{Z}_\beta,$$

робимо підставлення (6) у (8) та зводимо доданки при функціях $Z, \dot{Z}$:

$$L\varphi = 2(\beta\xi - 1)\frac{1}{\mu}Z_\beta - 4\frac{\beta}{\mu}\xi \dot{Z}_\beta.$$

Для знаходження 2-ї похідної маємо наступне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку:

$$\left(\frac{1}{\mu}\dot{\varphi}\right) + \frac{\zeta_\beta^2}{\mu}\varphi = 2(\beta\xi - 1)\frac{1}{\mu}Z_\beta - 4\beta\xi\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta.$$

Далі, діємо диференціальним оператором L на функцію $\varphi = \eta Z + \chi \dot{Z}$, та записуємо (аналогія з пошуками 1-ї похідної [5-7]):

$$L\varphi \equiv \left(\dot{\eta}\frac{1}{\mu} - 2\frac{\zeta_\beta^2}{\mu}\chi\right)Z + (\ddot{\chi} + 2\dot{\eta})\frac{1}{\mu}\dot{Z} = 2(-1 + \beta\xi)\frac{1}{\mu}Z - 4\frac{\beta}{\mu}\xi \dot{Z}_\beta,$$

$$\ddot{\chi} + 2\dot{\eta} = -4\beta\xi \Rightarrow \dot{\eta} = -\frac{1}{2}\ddot{\chi} - 2\beta\xi \Rightarrow \{\vartheta = \dot{\chi}\}, \eta = -\frac{1}{2}\vartheta - 2\beta \int \xi + \eta_0,$$

$$\left(\dot{\eta}\frac{1}{\mu} - 2\frac{\zeta_\beta^2}{\mu}\chi\right) = 2(\beta\xi - 1)\frac{1}{\mu}.$$

Звідки, дістаємось

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\dot{\vartheta}\right) - 2\frac{\zeta_\beta^2}{\mu}\vartheta = 2\beta\xi\frac{1}{\mu} + 2(\beta\xi - 1)\frac{1}{\mu} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\mu}\dot{\vartheta}\right) + 4\frac{\zeta_\beta^2}{\mu}\vartheta = 4(2\beta\xi - 1)\frac{1}{\mu}.$$

Отож, дія диференціального оператора L на функцію $\varphi = \eta Z + \chi \dot{Z}$ приводить до неоднорідного диференціального рівняння з правою частиною, що містить функцію ξ , тобто приходимо до рівняння, яке істотно не спрощує вихідне рівняння – (7). Це є ознакою того, що дана задача скоріш ускладнюється ніж розв'язується. Внаслідок цього й доводиться поглиблювати дослідження та вдаватися в пошуки шляхів отримати розв'язок (7) у прийнятному вигляді. Тож, розімкнути коло, на думку авторів, допомагає підхід, який полягає у спробах відшукувати розв'язки у наступному вигляді

$$\varphi = \eta Z' + \chi \dot{Z}' + \nu Z + \tau \dot{Z}, \quad (9)$$

де η, χ, ν, τ – шукані функції. (питання щодо існування похідних розглядалися у роботах [7-9], підкреслимо, що коефіцієнти χ, τ обертаються в нуль на межі розподілу середовищ й таким чином забезпечують неперервність шуканого розв'язку φ). Хоча прямої аналогії між підходом на основі (9) та розв'язанням рівняння (5) не вбачається, втім, було б розумно сподіватися, що деякі збіжності у методах, застосованих до рівнянь виду (5) [7-9], можуть посприяти пошуку розв'язку (7) у прийнятному вигляді. Справді, функція Z' задовольняє неоднорідному рівнянню (5), тому під дією диференціального оператора L у сполученні з деяким коефіцієнтом $\eta = \eta(z)$, буде переходити у функцію $\dot{Z}'$, й навпаки, функція $\dot{Z}'$ під дією оператора L у сполученні з іншим коефіцієнтом $\chi = \chi(z)$, переходить у функцію Z' , створюючи таким чином зв'язок між цими коефіцієнтами η, χ (виявляється, що такий зв'язок є лінійним). Власне так, й відбувається при пошуках 1-ї похідної, тобто при розв'язанні рівняння (5), у цьому рівнянні у якості несучих лінійність функцій виступали функції $Z, \dot{Z}$, а тут – $Z', \dot{Z}'$.

Втім, перетворення подібне до (9) може отримуватися шляхом безпосереднього взяття похідної за спектральним параметром β від представлення (6). Але у такому разі маємо невідомі функції ξ', ξ'' , пошук яких приводить до рівнянь, що за складністю не поступаються вихідному рівнянню (7).

Нижче показується, що підставлення розв'язку у вигляді (9) приводить до системи 4-х рівнянь, яку своєю чергою, вдається звести до системи 2-х лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку та може розв'язуватися у матрицях (дві шукані функції з двох інших рівнянь виключаються). Тож, розглянемо окремо кожен член представлення (9). Запишемо 1-шу, 2-гу похідні (за просторовою змінною z):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}(\eta Z') &= \dot{\eta} \frac{1}{\mu} Z' + \eta \frac{1}{\mu} \dot{Z}' \Rightarrow \left(\dot{\eta} \frac{1}{\mu} Z' + \eta \frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)' = \left(\dot{\eta} \frac{1}{\mu} \right)' Z' + \dot{\eta} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' + \dot{\eta} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' + \eta \left(\frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)' \\ &= \left(\dot{\eta} \frac{1}{\mu} \right)' Z' + 2\dot{\eta} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - \eta \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} Z' - 2\eta \frac{\beta}{\mu} Z. \end{aligned}$$

(тут скористалися тим, що функція Z' є розв'язком неоднорідного рівняння (4): $\left(\frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)' = -\frac{\zeta_\beta^2}{\mu} Z' - 2\frac{\beta}{\mu} Z$). Застосуємо диференціальний оператор L до $\eta Z'$:

$$L \eta Z' = \left(\dot{\eta} \frac{1}{\mu} \right)' Z' + 2\dot{\eta} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - \eta \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} Z' - 2\eta \frac{\beta}{\mu} Z + \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} \eta Z' = \left(\dot{\eta} \frac{1}{\mu} \right)' Z' + 2\dot{\eta} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - 2\eta \frac{\beta}{\mu} Z.$$

Переходимо до наступного члена представлення (9). Запишемо 1-шу похідну від $\chi \dot{Z}'$:

$$\frac{1}{\mu}(\chi \dot{Z}')' = \dot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' + \chi \left(\frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)' = \dot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - \chi \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} Z' - 2\frac{\beta}{\mu} \chi Z.$$

тут, як й вище, $\left(\frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)' = -\frac{\zeta_\beta^2}{\mu} Z' - 2\frac{\beta}{\mu} Z$. Відповідно, 2-га похідна від $\chi \dot{Z}'$:

$$\begin{aligned} \left(\dot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - \chi \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} Z' - 2\frac{\beta}{\mu} \chi Z \right)' &= \ddot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' + \dot{\chi} \left(\frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)' - \dot{\chi} \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} Z' - \chi \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} \dot{Z}' - 2\frac{\beta}{\mu} (\chi Z)' \\ &= \ddot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - \chi \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} Z' - 2\frac{\beta}{\mu} \dot{\chi} Z - \dot{\chi} \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} Z' - \chi \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} \dot{Z}' - 2\frac{\beta}{\mu} (\chi Z)' \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=\dot{\chi} \left(\frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)} \end{aligned}$$

(підкреслені доданки є подібними). Застосуємо диференціальний оператор L до $\chi \dot{Z}'$:

$$L \chi \dot{Z}' = \ddot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - 2\dot{\chi} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} Z' - 2\frac{\beta}{\mu} \dot{\chi} Z - 2\frac{\beta}{\mu} (\chi Z) - \underbrace{\chi \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} \dot{Z}' + \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} \chi \dot{Z}'}_{=0} = \ddot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - 2\dot{\chi} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} Z' - 2\frac{\beta}{\mu} \dot{\chi} Z - 2\frac{\beta}{\mu} (\chi Z).$$

Як видно, дія диференціального оператора L на члени $\eta Z'$, $\chi \dot{Z}'$ представлення (9) лінійно пов'язує коефіцієнти η , χ . Але окрім несучих лінійності функцій Z' , $\dot{Z}'$, таке застосування оператора L , зумовлює виникнення й ще функцій Z , $\dot{Z}$. Іншою мовою, перші два члени представлення (9) дають два невідомих коефіцієнти, але разом з тим й чотири рівняння. Але за результатами робіт [7-9, 11] стає зрозумілим, що характер дії диференціального оператора L на 2-а інших члени vZ , $\tau \dot{Z}$ не призводить до появи нових невідомих, тому маємо чотири несучих лінійності функції Z' , $\dot{Z}'$, Z , $\dot{Z}$ та чотири шукані коефіцієнти η , χ , v , τ . Перегрупуємо та зводимо доданки:

$$Z': (\dot{\eta} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\chi} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} = -2\frac{2\beta}{\mu}, \dot{Z}': \ddot{\chi} + 2\dot{\eta} = 0,$$

$$L(\eta Z' + \chi \dot{Z}') = \dots - 2\frac{\beta}{\mu}(\eta + \dot{\chi})Z - 2\frac{\beta}{\mu}(\dot{\chi}Z + \chi \dot{Z}) = \dots - 2\frac{\beta}{\mu}(\eta + 2\dot{\chi})Z - 2\frac{\beta}{\mu}\chi \dot{Z}.$$

при підстановці двох інших членів представлення (9) матимемо наступні лінійні співвідношення між функціями Z , $\dot{Z}$:

$$L(vZ + \tau \dot{Z}) = (\dot{v} \frac{1}{\mu})Z + 2\dot{v} \frac{1}{\mu} \dot{Z} + \ddot{\tau} \frac{1}{\mu} \dot{Z} - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} Z = \left((\dot{v} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} \right) Z + (\ddot{\tau} + 2\dot{v}) \frac{1}{\mu} \dot{Z}.$$

Далі, продовжуємо перегрупувати доданки,

$$Z: (\dot{v} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} - 2\frac{\beta}{\mu}(\eta + 2\dot{\chi}) \equiv (\dot{v} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} - 2\frac{\beta}{\mu} \left(-\frac{1}{2}\dot{\chi} + 2\dot{\chi} \right) \equiv (\dot{v} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} - 3\frac{\beta}{\mu}\dot{\chi} = -2\frac{1}{\mu},$$

$$\frac{1}{\mu} \dot{Z}: \ddot{\tau} + 2\dot{v} - 2\beta\chi = 0 \Rightarrow \dot{v} = -\frac{1}{2}\ddot{\tau} + \beta\chi.$$

Виключаємо η , v :

$$-\frac{1}{2}(\ddot{\tau} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} + \frac{\beta}{\mu}\dot{\chi} - 3\frac{\beta}{\mu}\dot{\chi} = -4\frac{\beta}{\mu},$$

$$(\dot{\eta} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\chi} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} \equiv -\frac{1}{2}(\dot{\chi} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\chi} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} \equiv -\frac{1}{2}(\ddot{\tau} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} - 2\frac{\beta}{\mu}\dot{\chi} = -4\frac{1}{\mu},$$

або,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}(\dot{\chi} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\chi} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} = -2\frac{2\beta}{\mu} \\ -\frac{1}{2}(\ddot{\tau} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} - 2\frac{\beta}{\mu}\dot{\chi} = -4\frac{1}{\mu} \end{cases} = \begin{cases} (\dot{\chi} \frac{1}{\mu}) + 4\frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu}\dot{\chi} & = 2 \cdot 4\frac{\beta}{\mu} \\ (\ddot{\tau} \frac{1}{\mu}) + 4\frac{\beta}{\mu}\dot{\chi} + 4\frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu}\dot{\tau} & = 2 \cdot 4\frac{1}{\mu} \end{cases}.$$

Таким чином, отримуємо систему з двох лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку відносно функцій $\dot{\chi}$, $\dot{\tau}$. Запишемо цю систему у векторно-матричній формі:

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} \right] + \frac{4}{\mu} \begin{pmatrix} \varsigma_{\beta}^2 & 0 \\ \beta & \varsigma_{\beta}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} = \frac{8}{\mu} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix},$$

або,

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} \right] + \frac{4}{\mu} \begin{pmatrix} \varsigma_{\beta} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_{\beta}} & \varsigma_{\beta} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} = \frac{8}{\mu} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varsigma_\beta^2 & 0 \\ \beta & \varsigma_\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Тож, маємо наступне матричне рівняння

$$\left[\frac{1}{\mu} I \dot{X} \right] + \frac{4}{\mu} \mathbf{\varsigma}^2 X = 8 \frac{1}{\mu} F, \quad (10)$$

тут

$$\mathbf{\varsigma} = \begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

X – шукана матриця. За аналогією зі скалярним рівнянням, останнє має два матричні (фундаментальні) розв'язки (точніше, відповідне однорідне рівняння має два матричні розв'язки). Безпосереднім підставленням переконуємось, що такі розв'язки матимуть наступний вигляд:

$$X_1(z) = \cos 2\mathbf{\varsigma}(z + \frac{d}{2}), X_2(z) = \mu \mathbf{\varsigma}^{-1} \sin \mathbf{\varsigma}(z + \frac{d}{2}). \quad (11)$$

Розв'язки самого матричного рівняння (10), як розв'язки лінійного неоднорідного диференціального рівняння, можуть відшукуватися за методом варіації (проглядається очевидна аналогія зі скалярним рівнянням, яке відповідно, розв'язувалося при пошуку 1-ї похідної [7-9]). Запишемо розкладення матричних функцій, що входять до розв'язків X_1, X_2 , у степеневий ряд (при цьому, матрицю $\mathbf{\varsigma}$ вважаємо сталою – кускова сталість матриці $\mathbf{\varsigma}$ та диференціальні якості функцій, до складу яких входить ця матриця $\mathbf{\varsigma}$, враховуються після отримання розкладень):

$$\begin{aligned} \cos 2\mathbf{\varsigma}(z + \frac{d}{2}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{\varsigma}^{2n}}{(2n)!} 2^{2n} (z + \frac{d}{2})^{2n}, \\ \sin 2\mathbf{\varsigma}(z + \frac{d}{2}) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\mathbf{\varsigma}^{2n-1}}{(2n-1)!} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-1}. \end{aligned}$$

Нижче отримуємо розкладання останніх матричних функцій. Безпосереднім перемноженням матриць встановлюємо парні степені:

$$\mathbf{\varsigma}^{2n} = \begin{pmatrix} \varsigma_\beta^{2n} & 0 \\ n\beta \varsigma_\beta^{2(n-1)} & \varsigma_\beta^{2n} \end{pmatrix} = \varsigma_\beta^{2n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} & 1 \end{pmatrix}, n = 0, 1, 2 \dots$$

Звідки,

$$\cos 2\mathbf{\varsigma}(z + \frac{d}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{\varsigma}^{2n}}{(2n)!} 2^{2n} (z + \frac{d}{2})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varsigma_\beta^{2n}}{(2n)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} & 1 \end{pmatrix} 2^{2n} (z + \frac{d}{2})^{2n}.$$

З останнього стає зрозумілим вигляд діагональних елементів – такі являють собою скалярне розкладення функції косинус: $\cos 2\varsigma_\beta(z + \frac{d}{2})$, один з недіагональних є нуль, а інший недіагональний елемент обчислюється наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \frac{\varsigma_\beta^{2n}}{(2n)!} 2^{2n} (z + \frac{d}{2})^{2n} &= 0 \Big|_{n=0} + \frac{\beta}{2} \frac{1}{\varsigma_\beta} \frac{1}{\varsigma_\beta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n \frac{\varsigma_\beta^{2n}}{(2n)!} 2^{2n} (z + \frac{d}{2})^{2n} \\ &= -\frac{\beta}{2} \frac{1}{\varsigma_\beta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2n \frac{\varsigma_\beta^{2n-1}}{(2n)!} 2^{2n} (z + \frac{d}{2})^{2n} \\ &= 2 \frac{\beta}{2\varsigma_\beta} (z + \frac{d}{2}) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\varsigma_\beta^{2n-1}}{(2n-1)!} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-1} = -\frac{\beta}{\varsigma_\beta} (z + \frac{d}{2}) \sin 2\varsigma_\beta(z + \frac{d}{2}). \end{aligned}$$

Висилаючи на кускову сталість функції ς_β , та відповідно, враховуючи диференціальні властивості матриці $\mathfrak{S}$, отриманий при підсумовуванні елемент системи (10) слід модифікувати наступним чином (додати множник μ – у правомочності модифікації переконуємося безпосереднім підставленням у рівняння):

$$\dot{t} = -\beta \frac{\mu}{\varsigma_\beta} (z + \frac{d}{2}) \sin 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}).$$

Тож, маємо

$$X_1 = \begin{pmatrix} \cos 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}) & 0 \\ -\beta \frac{\mu}{2\varsigma_\beta} (z + \frac{d}{2}) \sin \varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}) & \cos 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}) \end{pmatrix}.$$

Аналогічно встановлюємо непарні степені матриці $\mathfrak{S}$ ($n = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^{2n-1} = \mathfrak{S}^{2n} \mathfrak{S}^{-1} &= \begin{pmatrix} \varsigma_\beta^{2n} & 0 \\ n\beta \varsigma_\beta^{2(n-1)} & \varsigma_\beta^{2n} \end{pmatrix} \frac{1}{\varsigma_\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varsigma_\beta} \begin{pmatrix} \varsigma_\beta^{2n} & 0 \\ n\beta \varsigma_\beta^{2(n-1)} - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} \varsigma_\beta^{2n} & \varsigma_\beta^{2n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\varsigma_\beta} \begin{pmatrix} \varsigma_\beta^{2n} & 0 \\ (n - \frac{1}{2})\beta \varsigma_\beta^{2(n-1)} & \varsigma_\beta^{2n} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

тут $\mathfrak{S}^{-1}$ – обернена матриця: $\mathfrak{S}\mathfrak{S}^{-1} = I$, тобто,

$$\begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix} \frac{1}{\varsigma_\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідки маємо,

$$\begin{aligned} &\sin 2\mathfrak{S}(z + \frac{d}{2}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\mathfrak{S}^{2n-1}}{(2n-1)!} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-1} = \frac{1}{\varsigma_\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \begin{pmatrix} \varsigma_\beta^{2n} & 0 \\ \beta(n - \frac{1}{2})\varsigma_\beta^{2(n-1)} & \varsigma_\beta^{2n} \end{pmatrix} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-1}. \end{aligned}$$

Знов дістаємось висновку про вигляд діагональних елементів, один з недиагональних є нуль, а інший недиагональний елемент вичислюється наступним чином:

$$\begin{aligned} &\frac{\beta}{\varsigma_\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} (n - \frac{1}{2}) \varsigma_\beta^{2(n-1)} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-1} = \frac{\beta}{2\varsigma_\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} (2n-1) \frac{\varsigma_\beta^{2n-2+1}}{\varsigma_\beta} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-1} \\ &= \frac{\beta}{2\varsigma_\beta^2} (z + \frac{d}{2}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} (2n-1) \varsigma_\beta^{2n-1} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-2} = \frac{\beta}{2\varsigma_\beta^2} (z + \frac{d}{2}) \varsigma_\beta \cos 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}). \end{aligned}$$

Тут, як й вище, слід модифікувати, враховуючи диференціальні властивості матриці $\mathfrak{S}$, отриманий при сумуванні елемент системи (10) слід модифікувати наступним чином (додати множник μ – у правомочності модифікації переконуємося безпосередньою підстановкою у рівняння. Тож, маємо:

$$X_2 = \mu \mathfrak{S}^{-1} \sin 2\mathfrak{S}(z + \frac{d}{2}) = \frac{1}{\varsigma_\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} & 1 \end{pmatrix} \frac{\mu}{\varsigma_\beta} \begin{pmatrix} \sin 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}) & 0 \\ -\beta \frac{\mu}{2\varsigma_\beta} (z + \frac{d}{2}) \cos 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}) & \sin 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin 2\zeta_\beta(z + \frac{d}{2}) & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\beta}{\zeta_\beta} \sin \zeta_\beta(z + \frac{d}{2}) - \beta \frac{\mu}{2\zeta_\beta} (z + \frac{d}{2}) \cos \zeta_\beta(z + \frac{d}{2}) & \sin 2\zeta_\beta(z + \frac{d}{2}) \end{pmatrix}.$$

Таким чином було виписано розв'язки однорідного матричного рівняння, що відповідає неоднорідному рівнянню (10). Розв'язки неоднорідного рівняння можуть відшукуватися за методом варіацій як розв'язки лінійного неоднорідного диференціального рівняння [6].

ВИСНОВКИ

Теоретичне та чисельне дослідження як у цілому, так й окремих членів дисперсійного рівняння, записаного для плоского двошарового одновимірно-періодичного фотонного кристала (необмеженого вздовж періодичності), являє важливість для побудови фотонних заборонених зон, пошуку власних чисел проблеми Штурма-Ліувілля (знаходження коренів відносно спектрального параметра) а також для виявлення характеру впливу хвильового частотного числа $k = \frac{\omega}{c}$ (ω – частота, c – швидкість світла) на ці члени та впливу інших параметрів падаючої хвилі та кристала.

Один зі шляхів, що допомагає розвивати апарат кількісного розуміння властивостей дисперсійного рівняння лежить через розуміння поведінки функції Z_β – розв'язка спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля (як функції спектрального параметра β). У роботі було визначено та показано, що 2-га, як й 1-ша похідні від цього розв'язку Z_β представляються лінійно через саму функцію та свою похідну, але за просторовою змінною: $Z' = -\frac{1}{2}\xi Z + \xi Z$, $Z'' = \eta Z + \chi Z$, тут $\eta = \eta(z)$, $\chi = \chi(z)$, $\xi = \xi(z)$ – знайдені функції. Запропонованою у роботі підстановкою було розв'язано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку, при здійсненні чого був задіяний апарат матричного числення. Власне, розв'язком такого рівняння і є шукана похідна.

Значущість теперішньої роботи, зокрема, виявляється у тому, що між скалярним рівнянням (5), відомим з попередніх робіт (робіт з пошуків 1-ї похідної) та рівнянням (8), отриманим у цій роботі, не вдається вбачати пряму аналогію. Але між матричним рівнянням, яке отримується шляхом використання запропонованої підстановки, та щойно зазначеним скалярним рівнянням, вже проглядається очевидна аналогія. У зв'язку з можливістю вбачати таку аналогію зрозумілим стає й вигляд розв'язків матричного рівняння. Втім, на відміну від скалярного рівняння останнє містить матричні функції. У роботі вдається отримати розкладення у степеневі ряди цих матричних функцій та мати скалярну форму розв'язку. Також у роботі неодноразово звертається увага на те, що лінійні представлення, записані відповідно для 1-ї та 2-ї похідних, дозволяють отримати рівняння відносно розв'язку Z_β (точніше, отримати лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку). Подальші роботи у цьому напрямку можуть орієнтуватися на виведення та спроби вивчати зазначене рівняння.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кожем'яко ВП, Іванов ОА, Іванов ІА. Перспективи застосування фотонних кристалів у сучасних системах обробки даних //Наукові праці ВНТУ, № 4, Інформаційні технології та комп'ютерна техніка 2012 р.
2. Yablonovitch E. Photonic Crystals – Journal of Modern Optics, vol. 41, № 2., 505 – 513 p.
3. A. Shmat'ko, A. V. Kazanko, V. N. Mizernik, E. N. Odarenko, V. A. Yampol'skii, T. N. Rokshanova. «Proc. 8th Int. Conf.» Exterordinary reflecton from photonic crystal with metamaterials. Odessa: UWBUSIS, 2016. 160-162 p.
4. G. V. Morozov, D. W. L. Sprung. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystal. A Letters Journal Exploring Physics, EPL, 96, 2011: 54005:p1-p5.
5. Yariv A, Yeh P. Optical waves in crystals – A Wiley inteprieses Publicatuon, New York: Jon Wiley & Sons, 1987 – 616 p.
6. Самойленко А М Перестюк М О, Парасюк ІО. Диференціальні рівняння: підручних для студентів матем. Спец-ей, посobie, 2-ге видання – Київ: Либідь, 2003 – 301 с.
7. Казанко ОВ, Пенкіна ОЄ. (2021). Норма власних функцій одновимірного фотонного кристала. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка», 35, 91-99.
8. Казанко ОВ, Пенкіна ОЄ. Диференціювання дисперсійного рівняння у дифракційній задачі для необмеженого двовимірного шаруватого середовища. //Експериментальні та теоретичні дослідження у

сучасних науках.: Збірник наукових праць "Логос" (ΛΟΓΟΣ) з матеріалами наук.-практ. конференції. Краків, Польща: Європейська наукова платформа; 2019. 36-42 с.

9. Казанко ОВ, Пенкіна ОЄ. Диференціювання поперечних розв'язків хвильового рівняння по поперечному хвильовому числу в дифракційній задачі для необмеженого періодичного шаруватого середовища з метаматеріалом. Збірник наукових праць "Логос" (ΛΟΓΟΣ); 2020. 126-130 с.
10. Казанко ОВ & Пенкіна, ОЄ. (2021). Аналіз складових членів дисперсійного рівняння у задачі про дифракцію плоского монохроматичного коливання у двовимірному необмеженому двошаровому середовищі з метаматеріалом / О. В. Казанко, О. Є. Пенкіна //Збірник наукових праць "Грааль науки". – 2021. – № 6. – С. 210-216.
11. Маркович БМ. Рівняння математичної фізики: навчальний посібник – Львів: Видавництво політехніки, 2010 – 384 с.
12. Eastham M. S. P. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press [distributed by Chatto & Windus, London], 1975.
13. S. Winkler, W. Magnus. Hill's Equation. New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons, 1996.

REFERENCES

1. Kozhemyako V.P., Ivanov O.A., Ivanov I.A. Primary stalling of photonic crystals in modern average statistical data processing // Science of work of VNTU, No. 4, Information technologies and computer technology, 2012.
2. Yablonovitch E. Photonic Crystals – Journal of Modern Optics, vol. 41, № 2., 505 – 513 p.
3. A. Shmat'ko, A. V. Kazanko, V. N. Mizernik, E. N. Odarenko, V. A. Yampol'skii, T. N. Rokshanova. «Proc. 8th Int. Conf.» Extraordinary reflection from photonic crystal with metamaterials. Odessa: UWBUSIS, 2016. 160-162 p.
4. G.V. Morozov, D.W.L. Sprung. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystal. A Letters Journal Exploring Physics, EPL, 96, 2011: 54005:p1-p5.
5. Yariv A, Yeh P. Optical waves in crystals – A Wiley Interscience Publication, New York: John Wiley & Sons, 1987 – 616 p.
6. Samoilenko AM Perestyuk M O, Parasyuk IO. Differential equations: handy for students of mathematics. Special, manual, 2nd edition - Kiev: Libid, 2003 - 301 p.
7. Kazanko OV, Penkina OE. Norm of eigenfunction of one-dimension photonic crystal. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2021;35:91-99. (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-08>
8. Kazanko O. V., Penkina O. Y. "To differentiating dispersion equation in a diffraction problem for unlimited two-dimension media" Collection of scientific papers ΛΟΓΟΣ, 2019, 36-42 pp.
9. Kazanko O. V., Penkina O. Y. "To differentiating shear solutions of wave equations by longitudinal wave number in a diffraction problem for unlimited band media with metamaterials" Collection of scientific papers ΛΟΓΟΣ, 2020. 126-130 pp.
10. Kazanko OV & Penkina, ОЄ. (2021). Analysis of the storage terms of the dispersion level in the problem of diffraction of planar monochromatic collocation in a two-dimensional unbounded two-spherical medium with metamaterial / О. V. Kazanko, О. E. Penkina // Collection of scientific works "The Grail of Science". – 2021. – No. 6. – P. 210-216.
11. Markovich BM. History of mathematical physics: a basic textbook - Lviv: Department of Polytechnics, 2010 - 384 p.
12. Eastham MSP. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press [distributed by Chatto & Windus, London], 1975.
13. S. Winkler, W. Magnus. Hill's Equation. New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons, 1996.

Стаття надійшла до редакції: 6 лютого 2024 р.

Рекомендовано до друку: 22 березня 2024 р.

RESEARCH AND DETERMINATION OF THE 1ST AND 2ND DERIVATIVES OF THE COMPONENT TERMS OF THE DISPERSION EQUATION FOR A FLAT TWO-LAYER ONE-DIMENSIONAL PERIODIC PHOTONIC CRYSTAL

O.V. Kazanko, O.E. Penkina, V.M. Butenko, O.V. Holovko

Ukrainian State University of Railway Transport, Ukraine, Kharkiv, 7 Feuerbach Square

Actuality. Recent decades have seen a rapid development of photonics. Therefore, scientific interest in the optical range of electromagnetic radiation continues to be relevant. As a result, the problem of the scattering of

electromagnetic waves (diffraction problem) on such objects as photonic crystals is presented as an urgent problem. It is about the solution of the wave equation with the subsequent application of the method of separation of variables and the transition to the Sturm-Liouville problem on the unbounded interval $(-\infty, +\infty)$. For the diffraction structures considered in the paper, the specified method of separation of variables allows obtaining the solution of the wave equation (which in this case turns out to be an equation with periodic coefficients) in an explicit form. Another method - the method of the transfer matrix for the wave equation with periodic coefficients makes it possible to take into account the specificity of its solution on the unlimited interval $(-\infty, +\infty)$ and to achieve the fulfillment of the component condition for the solvability of the Sturm-Liouville problem - the condition for the self-conjugation of the differential operator in this problem. Therefore, the transfer matrix method involves the construction and solution of the so-called dispersion equation - the equation that connects the parameters of the diffraction problem with the solvability conditions of the Sturm-Liouville problem. As a result, there is a need to study the components of such a dispersion equation. Namely, there is a need to understand the behavior of the solution of the spectral equation in this Sturm-Liouville problem depending on the spectral parameter. Therefore, according to the authors, the search for derivatives of this solution is relevant, since the derivative apparatus as a whole plays a rather important role in the study of any functional dependencies.

The purpose of the work. Determine the first and second derivatives of the spectral parameter from the solution of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem for a flat two-layer one-dimensional periodic photonic crystal. And also show that each of the specified derivatives is linearly expressed through the solution itself and its derivative, but in terms of a spatial variable, and as a consequence, the possibility of having two linear dependencies, which makes it possible to obtain a linear homogeneous differential equation of the 2nd order with respect to of this solution. Further research of the specified equation in some perspective may serve the development of an alternative apparatus for understanding the behavior of this solution as a function of the spectral parameter.

Методи і методологія. Умова про самоспряженість диференціального оператора у проблемі Штурма-Ліувілля (складова умова розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля) для плоского двошарового нескінченного одновимірно-періодичного фотонного кристала досягається шляхом застосування методу матриці перенесення (Transfer matrix method). Спираючись на принцип невизначених коефіцієнтів, автори використовують підставлення (що запропоновано у роботі) та здійснюють перехід від лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку, розв'язком якого є шукана похідна (2-га похідна), до системи рівнянь, котра розглядається як матричне рівняння. Для розв'язання матричного рівняння використовується метод варіації.

Methods and methodology. The condition for the self-conjugation of the differential operator in the Sturm-Liouville problem (a constituent condition for the solvability of the Sturm-Liouville problem) for a flat two-layer infinite one-dimensional periodic photonic crystal is achieved by applying the transfer matrix method. Based on the principle of undetermined coefficients, the authors use substitution (which is proposed in the paper) and make the transition from a linear inhomogeneous differential equation of the 2nd order, the solution of which is the sought derivative (2nd derivative), to a system of equations, which is considered as a matrix equation. The variational method is used to solve the matrix equation.

The results. In this work, the second derivative of the spectral parameter is determined from the solution of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem for a flat two-layer one-dimensional periodic photonic crystal (unlimited along the periodicity). The defined derivative is linearly expressed in terms of the solution itself and its derivative, but in terms of the spatial variable. Also, in the work, a linear inhomogeneous differential equation of the 2nd order is solved, thus, in fact, the desired derivative is obtained. Such an equation can be solved on the basis of research and the results of previous works - works on the definition of the corresponding 1st derivative. However, it should be noted that a direct analogy between the method of determining the 1st and 2nd derivatives cannot be seen in this, in particular, and the meaningfulness of this paper is expressed.

KEY WORDS: *photonic crystal, scattering of electromagnetic waves, derivative of the spectral parameter, Sturm-Liouville problem, spectral equation, dispersion equation, eigenfunction, photon forbidden zone.*

The article was received by the editors: February 6 2024

The article is recommended for printing: March 22 2024

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-04>

УДК 621.396.67.012

М.М. ЛЕГЕНЬКИЙ, к. ф.-м. наук, доцент.

e-mail: mlegenkiy@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5945-4002>

В.С. ХРИЧОВ, Ph.D., н.с.

e-mail: v.khrychov@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-1033-1714>

*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
майдан Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна*

МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ АНТЕН У БЛИЖНІЙ ЗОНІ

Актуальність. Аналізується отримання мінімізації або максимізації взаємодії між випромінюючою та приймальною антенами (або приймальної антени з полями, відбитими від якоїсь перешкоди) за рахунок орієнтування та розташування антен на певній відстані та під певними кутами. Розв'язання таких задач дозволить створювати ефективні радіоелектронні прилади різного призначення, зокрема, радіолокаційні системи та алгоритми обробки інформації.

Мета роботи – провести моделювання імпульсного випромінювання дипольної антени, визначити закономірності такого випромінювання при різних розташуваннях приймальної антени відносно передавальної. Визначити сигнал у приймальній антені та виявити закономірності його формування.

Матеріали та методи. Для розв'язання поставленої задачі буде використаний метод скінченних різниць в часовій області (Finite Difference Time Domain, FDTD) з використанням алгоритму Yee для чисельного розв'язання рівнянь Максвелла. Спектри випромінюючої та приймальної антени аналізуються за допомогою алгоритму швидкого перетворення Фур'є (Fast Fourier Transform, FFT). Для отримання діаграм спрямованості антени в дальній зоні використовується алгоритм Near to Far Transformation.

Результати. Отримано сигнали у часовій формі для передавальної та приймальної антен. Аналіз спектрів, отриманих за допомогою FFT від часових форм сигналів в передавальній і приймальній антенах, продемонстрував, що у спектрі сигналу для випромінюючої антени присутні складові на низьких частотах нижче 250 МГц, для приймальних антен такі складові не спостерігаються. Отримано часову залежність струму в антені в кожний момент часу і спектр струму, отримано діаграму спрямованості антени в дальній зоні.

Висновки. Для приймальних антен, розташованих на відстані $r = 10\lambda_z$ від випромінюючої, маємо найбільшу складову поля на частоті, що відповідає першому резонансу, особливо суттєво це проявляється розташовані під кутами 70° та 80° , де сигнал в інших антенах (на більшій відстані від випромінюючої) є дуже малим. Для розташованих під прямим кутом, тобто для співвісних антен передача енергії із випромінюючої антени до прийомної є максимальною, але лише на невеликих відстанях, при збільшенні відстані між антенами зв'язок між ними швидко зменшується.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ближня зона, діаграма спрямованості, дипольна антена, FDTD, FFT.

Як цитувати: Легенький М.М., Хричов В.С. Моделювання взаємодії антен у ближній зоні. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2024; 40, 42-56. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-04>

In cites: Legenkiy M., Khrychov V. Modeling the interaction of antennas in the near zone. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2024; 40, 42-56 . (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-04>

ВСТУП

Задача створення ефективних радіолокаційних систем та алгоритмів обробки інформації в них нерозривно пов'язані із задачею ефективного вимірювання розсіяння хвиль на різноманітних об'єктах. Для ефективного вимірювання дифракційних характеристик різноманітних структур в ближній зоні досліджено можливість створення спеціальних приймально-передавальних антенних систем із гарною розв'язкою випромінювання. Проведено моделювання імпульсного випромінювання дипольної антени, визначити закономірності такого випромінювання. При різних розташуваннях приймальної антени відносно передавальної визначено сигнал у приймальній антені та виявити закономірності його формування.

Такі дослідження нададуть можливість досягнення мінімізації або максимізації взаємодії приймальної антени з полями, відбитими від якоїсь перешкоди, за рахунок орієнтування та розташування антен на певній відстані та під певними кутами.

Для розв'язання поставленої задачі необхідно визначити поля розсіювання в ближній та дальній зоні та, за їх допомогою, обчислити діаграму розсіювання. При цьому використовуються різні аспекти методу FDTD (Finite Difference in Time Domain) – розбиття обчислювальної області на сітку, запис рівнянь електродинаміки в скінченно-різничній формі, постановка граничних умов, опис джерел, перетворення поля з ближньої зони на дальню.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Як відомо, вся електродинаміка базується на рівняннях Максвелла. Спочатку ці рівняння були сформульовані у часовій області (TD – Time Domain) [1], [2], тобто з урахуванням очевидної залежності всіх функцій від часу. Однак донедавна в основній частині досліджень та навчальній літературі з електродинаміки розглядалися рівняння в частотній області (FD – Frequency Domain). У цьому випадку для всіх полів передбачається гармонічна залежність від часу у вигляді синуса чи косинуса певної частоти. Вважається, що така залежність справедлива для всіх значень часу від мінус до плюс нескінченності. Перехідні процеси (коли подібна часова залежність поля лише встановлюється) при цьому або не розглядаються, або представляються як суперпозиції полів з різною частотою. Перевагою цього підходу є те, що порядок задачі знижується: необхідно визначити лише просторову залежність полів. Причиною широкого використання частотної області є і те, що у докомп'ютерну епоху всі обчислення доводилося проводити аналітично, і тому значно простіше було вирішувати завдання з меншою кількістю змінних. Крім того, перевага на користь частотної області пояснюється тим, що більшість вимірювальної апаратури також орієнтована на роботу з полем певної частоти. Проте з появою комп'ютерів збільшилися можливості проводити складні обчислення, велику роль починають грати чисельні методи, і частіше розв'язуються задачі у часовій області. Подібні завдання стають важливими та актуальними: розробляються імпульсні радары, медичні прилади, що використовують імпульсні електромагнітні хвилі, знаходяться військові застосування імпульсних сигналів.

Розглянемо розв'язання рівнянь Максвелла за допомогою методу FDTD. Алгоритм Yee засновано на тому, що в рівняннях Максвелла зміна електричного поля $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ залежить від розподілу в просторі магнітного поля $\text{rot}(\vec{H})$. Аналогічно, зміна поля $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ залежить від розподілу в просторі поля $\text{rot}(\vec{E})$ [3]. Цей факт, а також використання скінченних різниць для апроксимації похідних дозволяє побудувати ефективну розрахункову схему. При цьому сітки для полів $\vec{E}$ та $\vec{H}$ зміщено одну по відношенню до іншої на половину кроку дискретизації по часу та по кожній із просторових змінних (це забезпечує другий порядок точності при апроксимації похідних). Отримані скінченно-різничні рівняння дозволяють визначити поля $\vec{E}$ та $\vec{H}$ на даному часовому кроці на основі відомих значень полів у попередні моменти часу. При заданих початкових умовах алгоритм Yee дає еволюційне в часі розв'язання від початку відліку часу ($t = 0$) із заданим часовим кроком Δt . Хід розв'язання електродинамічної задачі за допомогою FDTD має наступний вигляд.

1. Визначається розрахункова область, роздільна здатність сітки та граничні умови. Граничні умови можуть бути поглинаючими або періодичними.
2. Усередині розрахункової області розміщуються матеріальні тіла із заданими електродинамічними властивостями.
3. Визначається джерело. Найпростіший спосіб завдання джерела полягає у завданні часової залежності густини струму в рівнянні Ампера. Такий тип джерела зазвичай використовується для моделювання диполів. Для генерації плоскої хвилі зручніший інший тип джерела, що реалізується за допомогою методу повного та розсіяного поля TF/SF (Total Field / Scattered Field).
4. Джерело генерує скінченну в часі електромагнітну хвилю, спектральний склад якої повинен покривати діапазон частот, що цікавить. Далі хвиля падає на тіла, перерозсіюється на них, і, за наявності

граничних умов, що поглинають, через якийсь час виходить із розрахункової області. За необхідності може бути збережений просторовий або часовий розподіл поля у конкретних точках.

5. За необхідності розраховується перетворення Фур'є від записаних значень полів. Далі, обробляючи отримані результати (наприклад, інтегруючи потік енергії поля через будь-яку поверхню), можна отримати деякі інтегральні характеристики аналізованої структури. Використовуючи метод перетворення ближнього поля на дальнє (Near to Far Transformation), можна отримати значення полів за межами розрахункової області.

Проведемо моделювання випромінювання дипольної антени, що складається із двох металевих плечей довжиною $N_d / 2$, спрямованих вздовж вісі z . Задля отримання інформації відразу для діапазону частот будемо проводити моделювання в часовій області. Для моделювання використовуємо звичний FDTD алгоритм у тривимірному просторі, обмеженому Perfectly Matched Layer (PML-шарами) для моделювання вільного простору [4]. Для збудження антени використовується комірка між зазначеними плечами, там введено м'яке джерело: тобто окрім звичної формули оновлення E_z компоненти поля додається також часова функція. Фізично таке збудження еквіваленте до введення у зазначеній точці стороннього струму. Часову форму даного струму наведено на Рис. 1-а. Аналітично даний сигнал записується наступним чином (похідна від функції Гауса):

$$s(t) = (t - t_0) \exp\left(-0.5\left((t - t_0)/t_w\right)^2\right), \quad (1)$$

де $t_0 = 0.5$ нс, $t_w = 0.15$ нс.

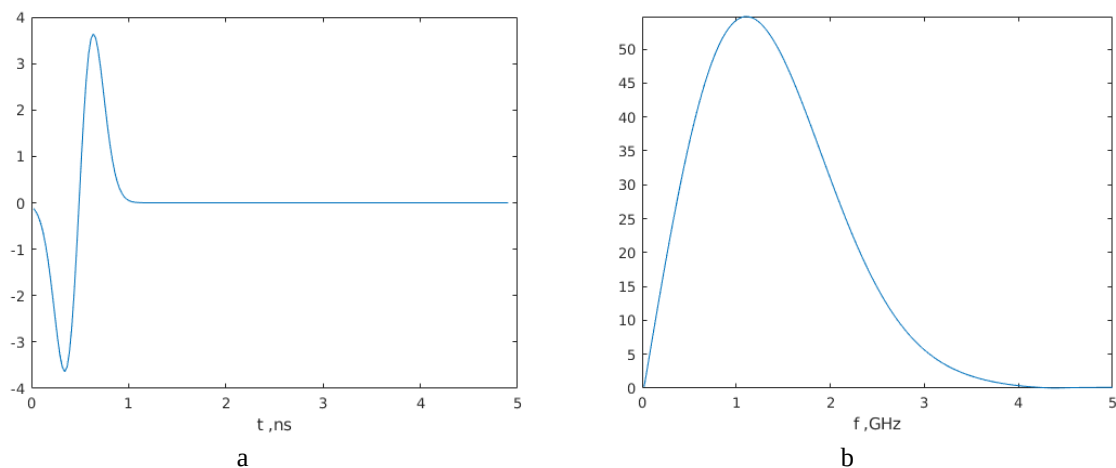


Рис. 1. Збуджуючий сигнал а - часова залежність; б - спектр

Fig. 1. Excitation signal a - time dependence; b - spectrum

Для моделювання металевих плечей антени на них задовольняються граничні умови на поверхні металевого провідника: рівність нулю тангенційної складової електричного поля: $E_z = 0$.

За допомогою алгоритму швидкого перетворення Фур'є (Fast Fourier Transform, FFT) [5] отримано спектр даного сигналу. Як видно з Рис. 1-б, спектр не має складової на нульовій частоті і простягається приблизно до 4 ГГц.

ВИПРОМІНЮВАННЯ СИГНАЛУ

Розглянемо процес випромінювання сигналу. Для цього розрахуємо густину енергії електромагнітного поля в різні моменти часу та наведемо просторовий розподіл цієї густини в різні моменти часу. Як відомо густина енергії електромагнітного поля складається із густини енергії електричного та магнітного поля відповідно

$$w = w_E + w_H, \quad (2)$$

які в свою чергу виражаються через напруженість електричного поля та вектор електричної індукції:

$$w_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2, \quad (3)$$

і напруженість магнітного поля та вектор магнітної індукції:

$$w_H = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{2} |\vec{H}|^2. \quad (4)$$

У формулах (3) та (4) густини енергії записано для вільного простору, враховано те, що для вільного простору вектор електричної індукції дорівнює добутку вектору напруженості електричного поля на електричну сталу ϵ_0 , аналогічно вектор магнітної індукції дорівнює добутку вектору напруженості магнітного поля на магнітну сталу μ_0 .

Таким чином, виявляється, що густина електричної енергії є пропорційною до квадрату модуля напруженості електричного поля, тобто до суми квадратів відповідних його компонент

$$w_E = \frac{\epsilon_0}{2} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2), \quad (5)$$

а густина магнітної енергії – до квадрату модуля напруженості магнітного поля (суми квадратів відповідних його компонент)

$$w_H = \frac{\mu_0}{2} (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2). \quad (6)$$

Таким чином, для отримання густини енергії необхідно додати квадрати різних компонент електромагнітного поля. У відповідності до схеми FDTD методу різні компоненти електромагнітного поля розраховуються в різних просторових точках (див. Рис. 2), а компоненти електричного і магнітного полів також і в різні моменти часу. Отже, для того щоб визначити густину енергії слід отримати всі компоненти електромагнітного поля в одній і тій самій просторовій точці в один момент часу. Будемо розраховувати густину енергії в середній точці нижнього куба з Рис. 2 або відповідно в нижній правій вершині з лицьового боку верхнього куба. Для цього треба усереднити чотири сусідніх значення компонент напруженості магнітного поля, отже щоб отримати густину магнітної енергії в точці (i, j, k) використовується формула

$$w_H|_{i+0.5, j+0.5, k+0.5} = \frac{\mu_0}{2} \frac{1}{16} \left[\left(H_x|_{i+0.5, j, k} + H_x|_{i+0.5, j+1, k} + H_x|_{i+0.5, j, k+1} + H_x|_{i+0.5, j+1, k+1} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(H_y|_{i, j+0.5, k} + H_y|_{i+1, j+0.5, k} + H_y|_{i, j+0.5, k+1} + H_y|_{i+1, j+0.5, k+1} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(H_z|_{i, j, k+0.5} + H_z|_{i+1, j, k+0.5} + H_z|_{i, j+1, k+0.5} + H_z|_{i+1, j+1, k+0.5} \right)^2 \right]. \quad (7)$$

В формулі (7) для усереднення кожна компонента поля множиться на коефіцієнт $1/4$, що після піднесення до квадрату дає множник $1/16$ на початку формули.

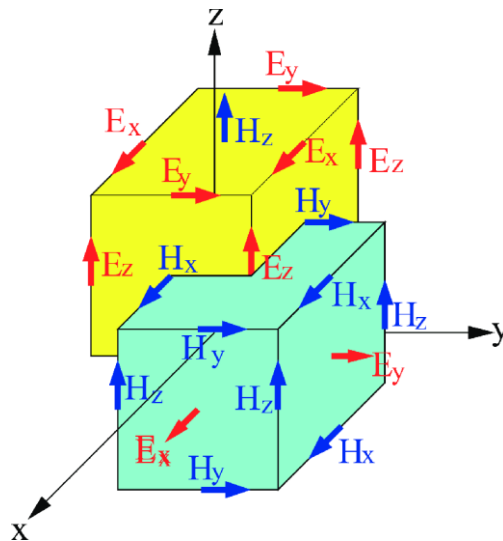


Рис. 2. Комірка Yee ([2]).

Fig. 2. Yee cell

Аналогічним чином усереднюється і напруженість електричного поля (тут усереднюються по два значення компонент напруженості електричного поля, тож після піднесення до квадрату маємо множник 1/4)

$$w_E|_{i+0.5, j+0.5, k+0.5} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{1}{4} \left[\left(E_x|_{i, j+0.5, k+0.5} + E_x|_{i+1, j+0.5, k+0.5} \right)^2 + \left(E_y|_{i+0.5, j, k+0.5} + E_y|_{i+0.5, j+1, k+0.5} \right)^2 + \left(E_z|_{i+0.5, j+0.5, k} + E_z|_{i+0.5, j+0.5, k+1} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Отже за допомогою формул (7) та (8) густини електричного та магнітного поля розраховуються в потрібних просторових точках, але через те, що напруженості електричного та магнітного полів визначаються також у різні моменти часу (вони є рознесеними на пів-кроку по часу $\Delta t/2$). Для того щоб додавати отримані за формулами (7) та (8) густини енергії, як у формулі (2) їх спочатку треба отримати для однакових моментів часу.

Для розрахунку густин енергії електричного та магнітного поля в один момент часу використаємо усереднення та врахуємо особливості схеми оновлення полів в алгоритмі Yee методу FDTD.

В алгоритмі Yee використовуються центральні скінченні різниці для апроксимації просторових і часових похідних, побудова комірки, показана на Рис. 2. Компоненти $\vec{E}$ і $\vec{H}$ полів можна розрахувати, що використовуючи «leap-frog» схему. Спочатку, із використанням раніше збережених даних для $\vec{H}$ поля, виконуються всі розрахунки $\vec{E}$ поля в усьому просторі, що моделюється, результати зберігаються в пам'яті замість значень $\vec{E}$ поля в попередній момент часу. Після цього, з використанням щойно отриманих даних для $\vec{E}$ поля, розраховуються нові значення $\vec{H}$ поля в усьому просторі, що моделюється, ці дані зберігаються в пам'яті на місці значень магнітного поля $\vec{H}$ в попередній момент часу. При цьому із значень електричного і магнітного поля в моменти часу, що розташовані на $\Delta t/2$ від поточного (наприклад: для i це будуть $i-1/2$ та $i+1/2$ відповідно), розраховуються значення електричного і магнітного поля в моменти часу більші на Δt (наприклад: i та $i+1/2$ відповідно). Таким чином, виконується один крок по часу. Цей процес продовжується до тих пір, доки це вимагається задачі, що розв'язується.

Розрахунок за допомогою описаної вище процедури називається явною схемою, його застосування дозволяє уникнути проблем пов'язаних з одночасним розв'язанням великої кількості рівнянь та знаходженням зворотніх матриць.

Таким чином, використовуючи для апроксимації описаний алгоритм маємо вирази для визначення нових значень компонентів векторів електромагнітного поля через отримані значення тих же компонент в попередні моменти часу і значення іншого поля в сусідніх точках в попередні моменти часу і джерела в попередній момент часу:

$$E_x|_{i, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} = A_{i, j+1/2, k+1/2} E_x|_{i, j+1/2, k+1/2}^{n-1/2} + B_{i, j+1/2, k+1/2} \left(\frac{H_z|_{i, j+1, k+1/2}^n - H_z|_{i, j, k+1/2}^n}{\Delta y} - \frac{H_y|_{i, j+1/2, k+1}^n - H_y|_{i, j+1/2, k}^n}{\Delta z} - J_x|_{i, j+1/2, k+1/2}^n \right), \quad (9)$$

$$E_y|_{i-1/2, j+1, k+1/2}^{n+1/2} = A_{i-1/2, j+1, k+1/2} E_y|_{i-1/2, j+1, k+1/2}^{n-1/2} + B_{i-1/2, j+1, k+1/2} \left(\frac{H_x|_{i-1/2, j+1, k+1}^n - H_x|_{i-1/2, j+1, k}^n}{\Delta z} - \frac{H_z|_{i, j+1, k+1/2}^n - H_z|_{i-1, j+1, k+1/2}^n}{\Delta x} - J_y|_{i-1/2, j+1, k+1/2}^n \right), \quad (10)$$

$$E_z|_{i-1/2, j+1/2, k+1}^{n+1/2} = A_{i-1/2, j+1/2, k+1} E_z|_{i-1/2, j+1/2, k+1}^{n-1/2} + B_{i-1/2, j+1/2, k+1} \left(\frac{H_y|_{i, j+1/2, k+1}^n - H_y|_{i-1, j+1/2, k+1}^n}{\Delta x} - \frac{H_x|_{i-1/2, j+1, k+1}^n - H_x|_{i-1/2, j, k+1}^n}{\Delta y} - J_z|_{i-1/2, j+1/2, k+1}^n \right), \quad (11)$$

$$H_x|_{i-1/2, j+1, k+1}^{n+1} = C_{i-1/2, j+1, k+1} H_x|_{i-1/2, j+1, k+1}^n + D_{i-1/2, j+1, k+1} \left(\frac{E_y|_{i-1/2, j+1, k+3/2}^{n+1/2} - E_y|_{i-1/2, j+1, k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{E_z|_{i-1/2, j+3/2, k+1}^{n+1/2} - E_z|_{i-1/2, j+1/2, k+1}^{n+1/2}}{\Delta y} - M_x|_{i-1/2, j+1, k+1}^{n+1/2} \right), \quad (12)$$

$$H_y|_{i, j+1/2, k+1}^{n+1} = C_{i, j+1/2, k+1} H_y|_{i, j+1/2, k+1}^n + D_{i, j+1/2, k+1} \left(\frac{E_z|_{i+1/2, j+1/2, k+1}^{n+1/2} - E_z|_{i-1/2, j+1/2, k+1}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{E_x|_{i+1/2, j+1, k+3/2}^{n+1/2} - E_x|_{i, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - M_y|_{i, j+1/2, k+1}^{n+1/2} \right), \quad (13)$$

$$H_z|_{i, j+1, k+1/2}^{n+1} = C_{i, j+1, k+1/2} H_z|_{i, j+1, k+1/2}^n + D_{i, j+1, k+1/2} \left(\frac{E_x|_{i+3/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - E_x|_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{E_y|_{i+1/2, j+1, k+1/2}^{n+1/2} - E_y|_{i-1/2, j+1, k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} - M_z|_{i, j+1, k+1/2}^{n+1/2} \right), \quad (14)$$

$$\text{де } A_{i,j,k} = \frac{2\varepsilon_{i,j,k} - \sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k} + \sigma_{i,j,k}\Delta t}, B_{i,j,k} = \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k} + \sigma_{i,j,k}\Delta t}, C_{i,j,k} = \frac{2\mu_{i,j,k} - \sigma_{i,j,k}^*\Delta t}{2\mu_{i,j,k} + \sigma_{i,j,k}^*\Delta t}, D_{i,j,k} = \frac{2\Delta t}{2\mu_{i,j,k} + \sigma_{i,j,k}^*\Delta t}.$$

При оновленні полів у часі спочатку через значення напруженостей електричного поля в момент часу n та значення напруженості магнітного поля в момент часу $n+1/2$ розраховується напруженість електричного поля в момент часу $n+1$. Після цього через значення напруженостей магнітного поля в момент часу $n+1/2$ та щойно отримані значення напруженості електричного поля в момент часу $n+1$ розраховується напруженість магнітного поля в момент часу $n+3/2$.

Зазначені дії виконуються на кожному часовому кроці, в результаті них отримуються значення напруженостей електричного та магнітного полів наступні (збільшені на часовий крок Δt) моменти часу. Тож для розрахунку густин енергії електричного та магнітного поля в однакові моменти часу використаємо наступний підхід. Будемо розраховувати густину енергії електромагнітного поля в момент часу $n+1$. В цей же момент часу розраховується і густина енергії електричного поля за формулою (7), але густина енергії магнітного поля розраховується за формулою (8) в моменти часу $n+1/2$ та $n+3/2$, відповідно.

Тож для отримання густини енергії магнітного поля в момент часу $n+1$ вказані значення слід усереднити. Для цього на кожному часовому кроці перед оновленням напруженості магнітного поля розраховуємо густину енергії магнітного поля в момент часу $n+1/2$, а після оновлення напруженості магнітного поля – густину енергії в момент часу $n+3/2$. Усереднення отриманих таким чином величин дає густину енергії магнітного поля у потрібний момент часу $n+1$ і її можна додавати до густини енергії електричного поля для отримання повної густини енергії електромагнітного поля (2).

Отриману таким чином густину енергії зображено на Рис. 3 - 5 для різних моментів часу.

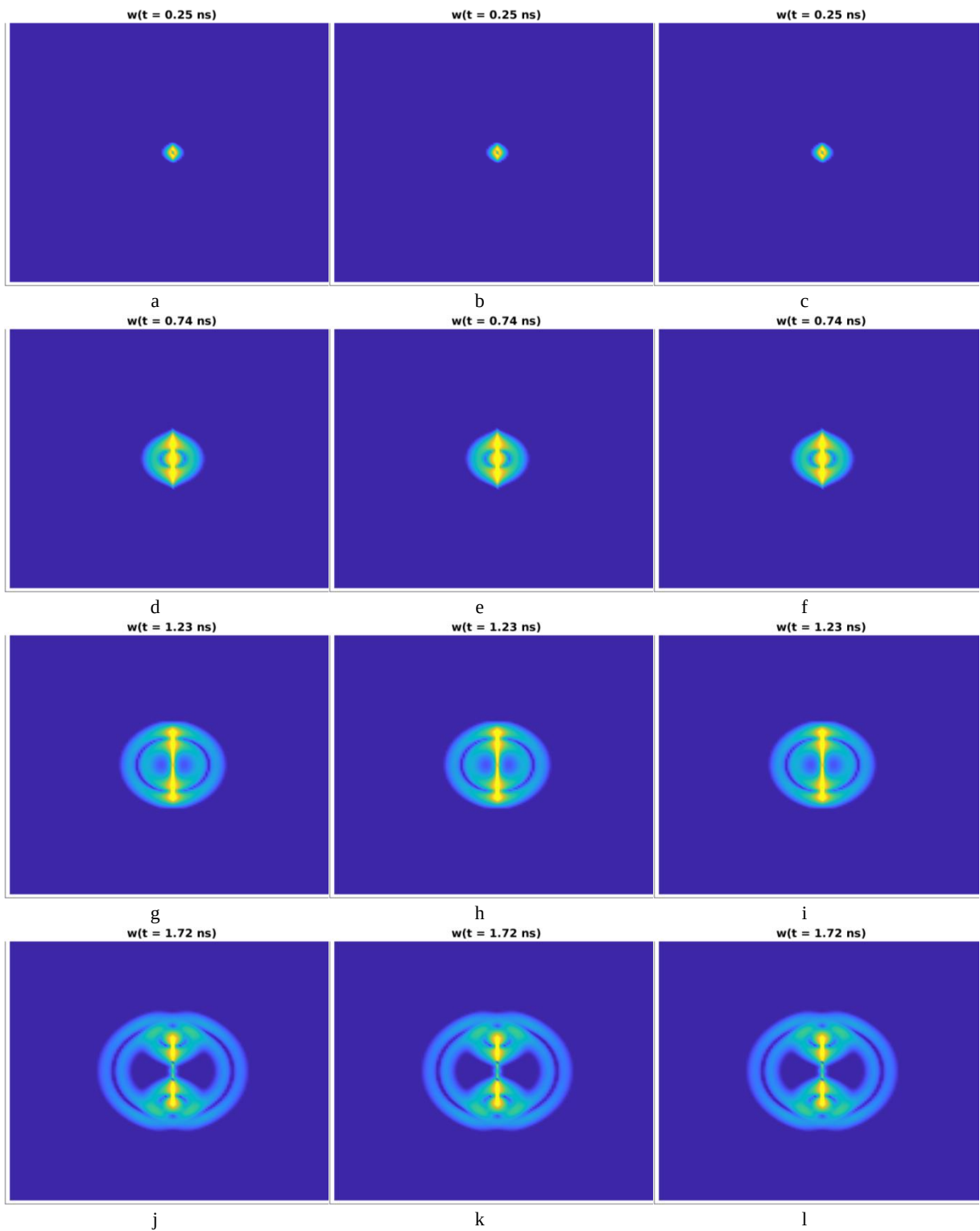


Рис. 3. Енергія електромагнітного поля в різні моменти часу.
 Fig. 3. The energy of the electromagnetic field at different moments of time

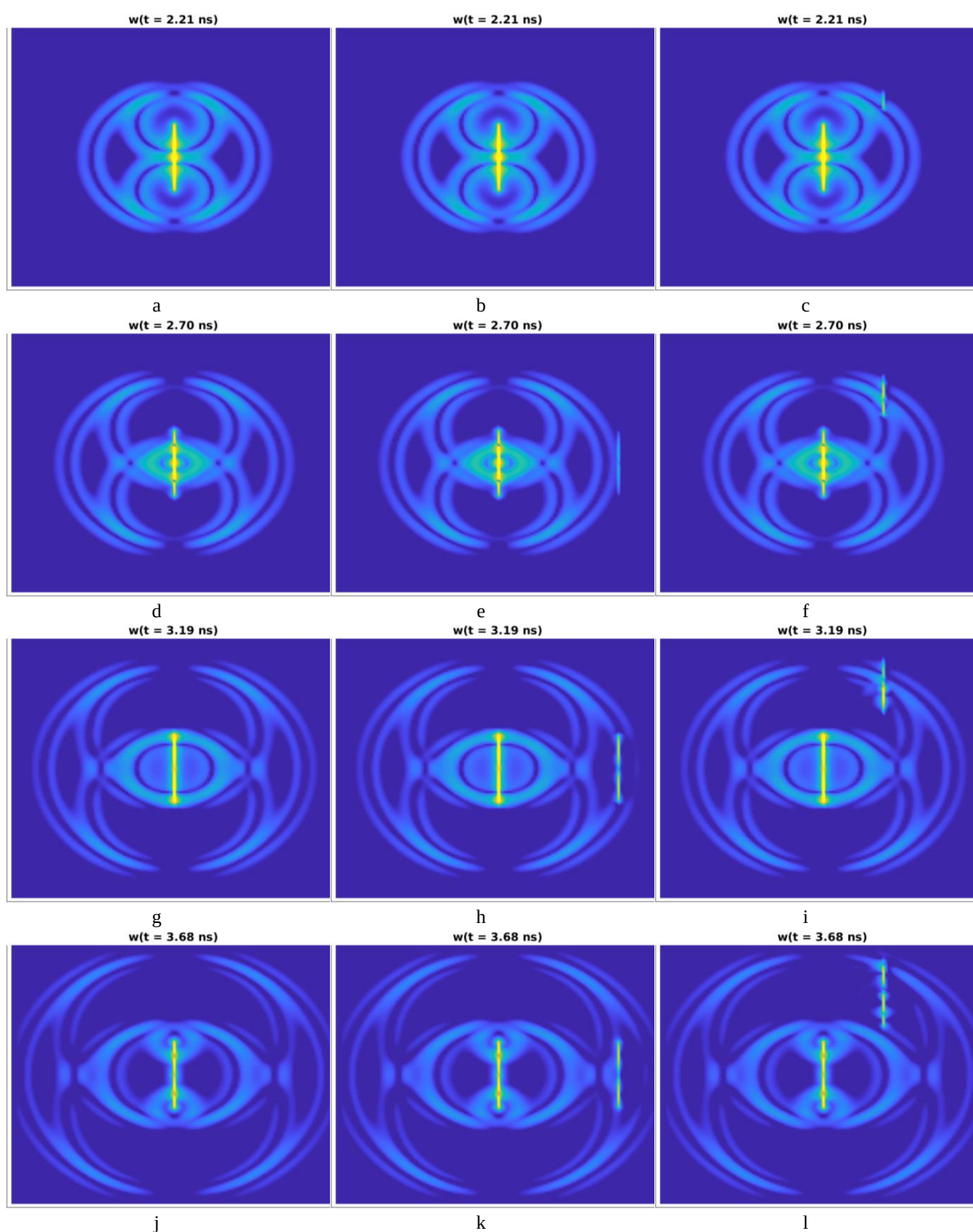


Рис.4. Енергія електромагнітного поля в різні моменти часу.
 Fig. 4. The energy of the electromagnetic field at different moments of time

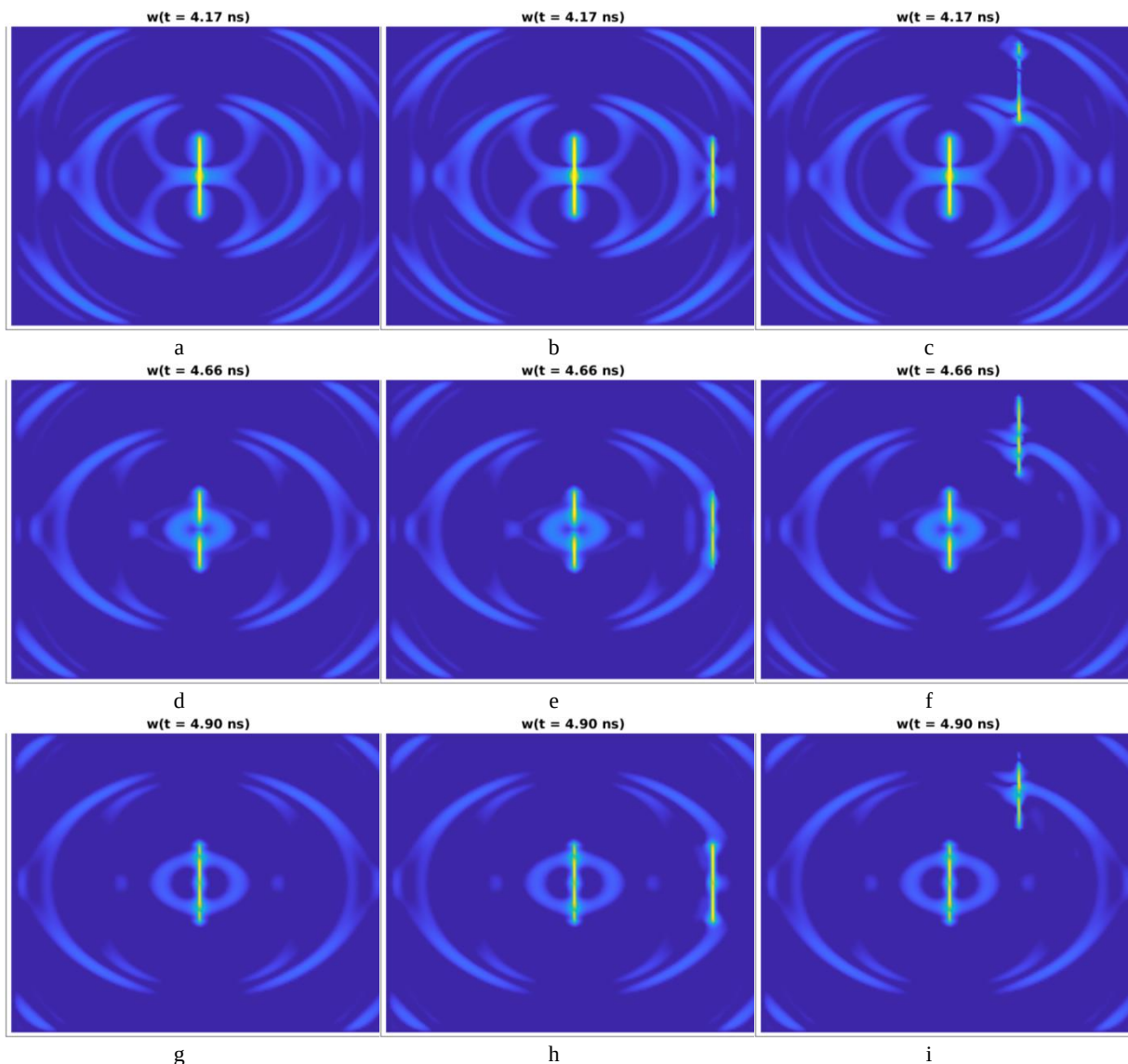


Рис. 5. Енергія електромагнітного поля в різні моменти часу.
 Fig. 5. The energy of the electromagnetic field at different moments of time

На Рис. 3 - 5 зображено просторовий розподіл густини енергії в площині XZ для трьох ситуацій:

- одиночна дипольна антена (рисунки a, d, g та j);
- дві дипольні антени на відстані $d = 50\Delta z$ вздовж вісі X (рисунки b, e, h та k);
- дві дипольні антени на відстані $d = 50\Delta z$ під кутом $\varphi = 60^\circ$ до вісі X (рисунки c, f, i та l).

При цьому перша антена, розташована в центрі малюнку, використовується як випромінююча – на її вхід, як описано вище, подається напруга у вигляді сигналу (1). Друга ж антена використовується як приймальна, на неї ніяка напруга не подається і вона моделюється як просто металевий стрижень, тобто у місці розташування цієї антени накладаються граничні умови на z –проекцію напруженості електричного поля.

Місця розташування антен на рисунках легко ідентифікувати, бо через збудження струмів вздовж плечей антен у відповідних місцях маємо поблизу антен випромінене цими струмами поле і (після описаної вище процедури усереднення при підрахунку густини енергії) більш високе у порівнянні з навколишнім простором значення густини енергії електромагнітного поля.

На Рис. 3 та Рис. 4 показано лише початкові моменти збудження випромінювальної антени, тож на них приймальні антени жодним чином себе не проявляють – до них поле ще не дійшло (лише на малюнку f з Рис. 4 поле починає «торкатися» другої приймальної антени). При цьому можна прослідити як

відбувається процес випромінювання електромагнітної хвилі. Хвиля випромінюється із локальних центрів, де струм стикається із неоднорідністю: це точка запитки антени та кінці її плечей, на рисунках добре видно, як накладаються хвилі, що виромінюються із цих точок. Навіть після вимкнення джерела тобто, коли збуджуючий сигнал зменшується до нуля (1), випромінююча антена залишається помітною на тлі навколишнього вільного простору – не вся енергія випромінюється. При поширенні випромінена електромагнітна хвиля досягає місця розташування приймальної антени і збуджує вздовж даної антени струм, який, в свою чергу, частинно перевипромінюється до вільного простору. Слід зазначити, що до антени 2 розташованої під кутом хвиля потрапляє з меншою амплітудою ніж до антени 1 через структуру випроміненого поля, а також через просторове розташування цієї антени вона збуджується нерівномірно (починаючи із нижнього плеча).

СИГНАЛИ В ПРИЙМАЛЬНИХ АНТЕНАХ

Для того щоб докладніше дослідити взаємодію між передавальною антеною та приймальною антеною, розташованою на різних відстанях від приймальної та зсунутою вбік на різні відстані, наведемо часові залежності поля в приймальній антені для різних відстаней між центром передавальної антени та приймальної антени r та різним кутом між напрямом від центру передавальної антени та приймальної антени та віссю $X - \varphi$. На Рис. 6 наведено відповідні часові залежності сигналу в приймальній антені.

Суцільна червона крива на Рис. 6 представляє собою часову залежність сигналу у передавальній антені. Ця залежність суттєво відрізняється від збуджуючого сигналу, зображеного на Рис. 1-а через взаємодію створеного таким джерелом електромагнітного поля із елементами антени. Сигнал частково відбивається від початку антени і випромінюється до вільного простору, частково збуджує струм, який поширюється вздовж плечей антени і при взаємодії із кінцями плечей також частково випромінюється до вільного простору, а частково відбивається і формує струм, що поширюється в зворотному напрямку і такий процес продовжується. Інші криві окрім суцільної червоної на Рис. 6 представляють собою часові залежності сигналу на вході приймальної антени при різних її положеннях (при різних r та φ). Зазначені криві мають меншу амплітуду ніж сигнал у випромінюючій антені, а також дещо запізнюються в часі у порівнянні із згаданим сигналом. Зменшення амплітуди пов'язане із взаємодією поля із плечами випромінюючої антени, а також з тим, що при випромінюванні сигнал зазнає дифракційних втрат (цим зокрема пояснюється зменшення амплітуди сигналу при збільшенні відстані від передавальної до приймальної антени). Часова затримка τ пояснюється скінченням часом поширення електромагнітної енергії у просторі $\tau = \frac{d}{c}$, де d - відстань між антенами, c - швидкість світла у вільному просторі, Також

зазначимо, що у приймальних антенах сигнал стає тривалішим у часі в порівнянні із сигналом у випромінюючій антені. Тобто випромінений сигнал зазнає дисперсії при поширенні – його часова форма змінюється. Те що сигнал у приймальній антені довго осцилює після збудження свідчить про те, що даний сигнал здебільшого має складову на одній (або декількох) окремих частотах. Тобто найбільш ефективно випромінюються та поширюються складові на окремих частотах.

Якщо прослідкувати часові залежності сигналів для приймальних антен, розташованих під кутами $\varphi = 50^\circ$ і більше, то можна помітити, що на близьких відстанях від випромінюючої антени амплітуда сигналу в приймальній антені збільшується, при збільшенні відстані амплітуда сигналу в приймальній антені швидко згасає. Це пояснюється випромінюванням від кінців плечей антени. Слід зазначити, що для кутів $\varphi = 70^\circ - 90^\circ$ при $r = 10\Delta z$ сигнал має близьку до гармонічної часову форму і згасає дуже повільно. Натомість, при збільшенні відстані r такого не спостерігається, отже, тут маємо реактивні поля.

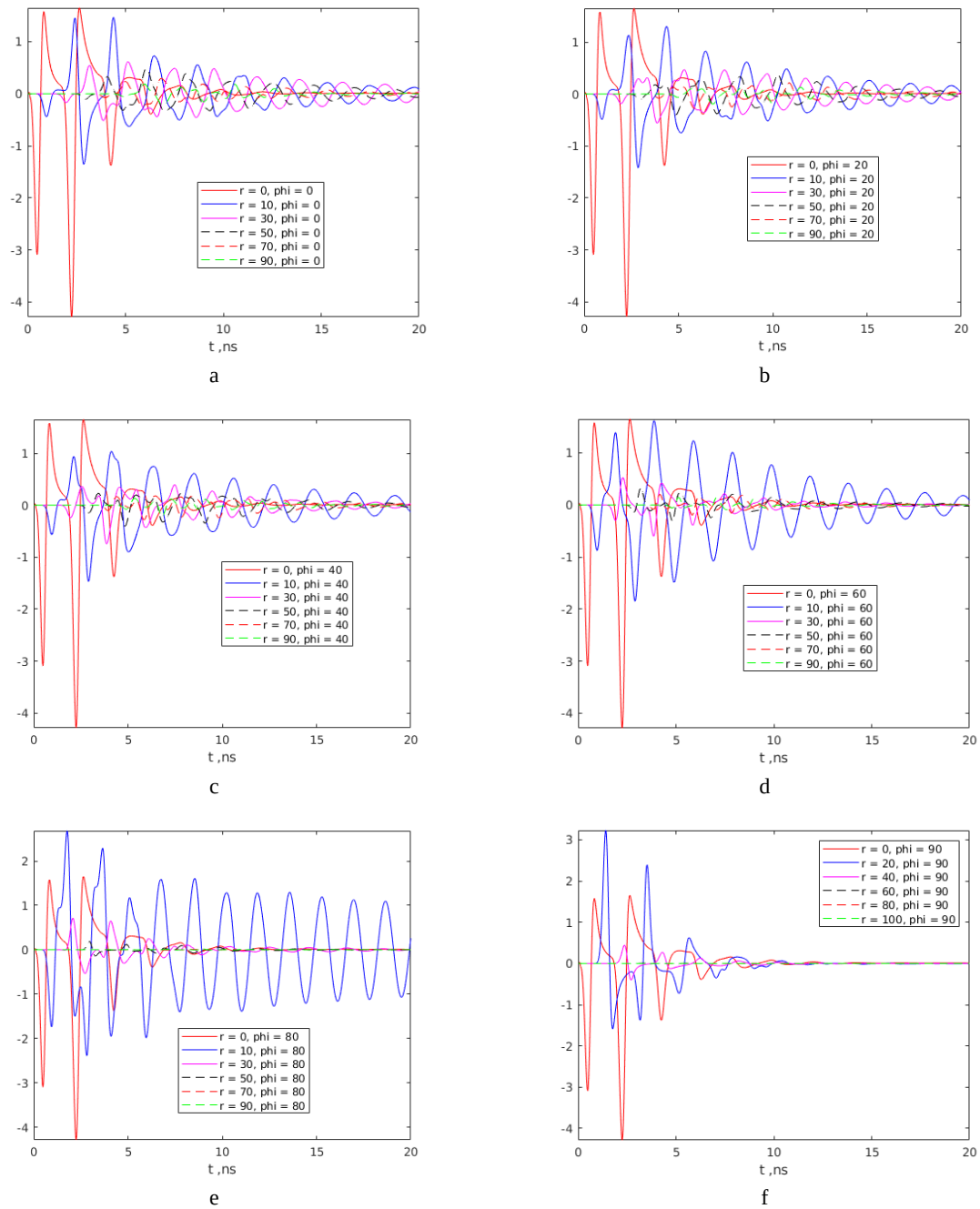


Рис. 6. Часова форма сигналу у випромінюючій та приймальній антені.

Fig. 6. The signal in the radiating and receiving antenna in time domain

Для того, щоб докладніше проаналізувати отримані часові форми сигналів в антенах розрахуємо їх спектри за допомогою FFT, відповідні залежності наведено на Рис. 7.

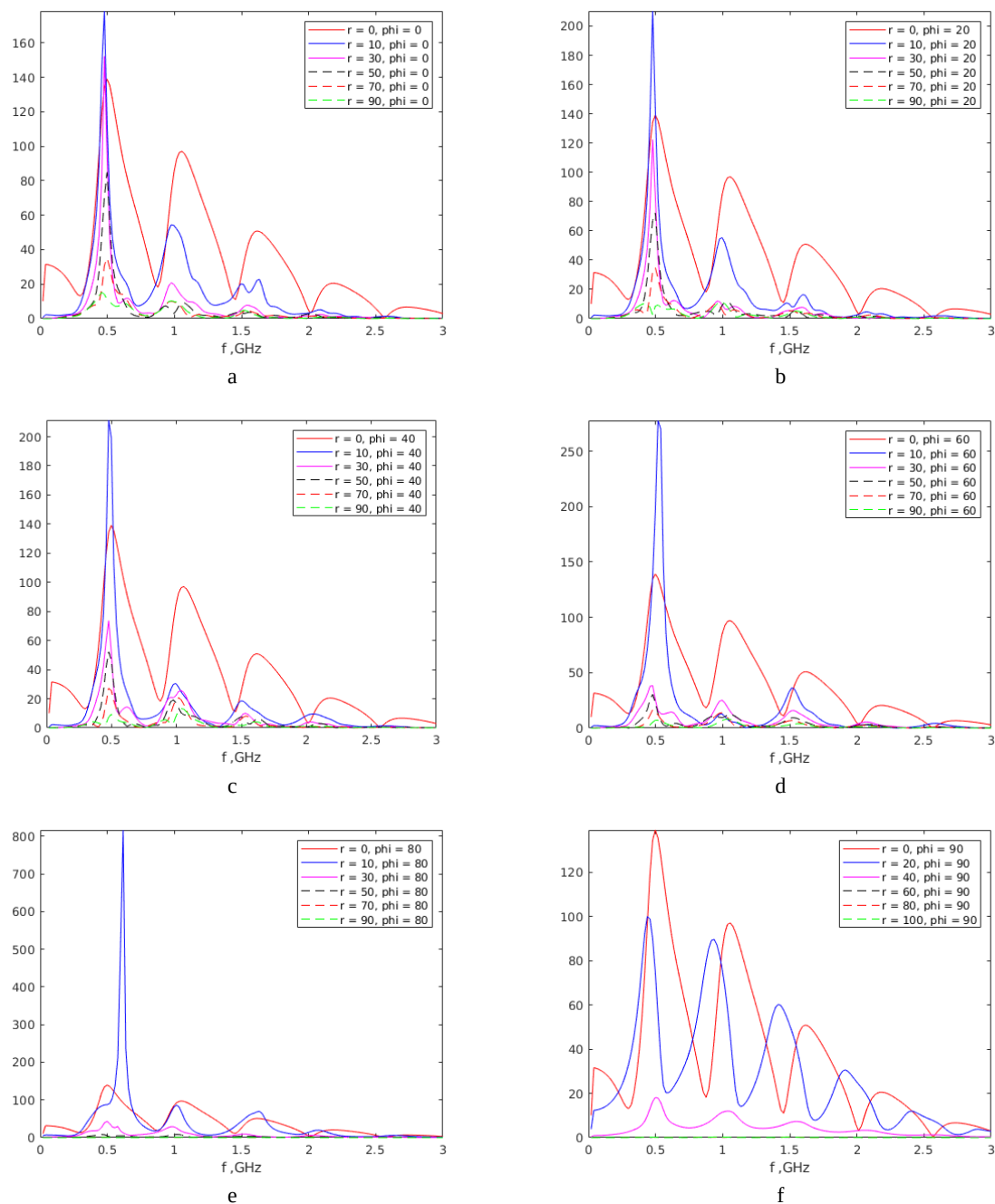


Рис. 7. Спектри сигналу у випромінюючій та приймальній антені.

Fig. 7. Signal spectra in the radiating and receiving antenna.

Слід зазначити, що дана випромінювальна структура (дипольна антена) є резонансною структурою, отже, на відповідних спектрах маємо піки, що відповідають різним частотам.

Червона суцільна лінія на Рис. 7 представляє собою спектр сигналу у випромінюючій антені, тут маємо резонансну залежність, що відповідає різному розподілу струму вздовж плечей антени. Для випадку, коли ціле число напівхвиль струму вкладається вздовж антени, маємо максимуми спектру, між ними (коли непарне число чвертин хвиль вкладається вздовж антени) – мінімуми, відповідно.

Слід зазначити, що максимуми та мінімуми на Рис. 7 не точно відповідають довжинам хвиль, де задовольняються вищевказані співвідношення. Це пов'язано з тим, що у випадку неідеального тонкого диполя на закономірності випромінювання також впливає сингулярність поля поблизу кінця плеча антени.

В результаті довжина диполя ніби збільшується і, зазвичай, замість довжини антени використовується її ефективна довжина [6].

Що стосується прийомних антен, спектри сигналів на цих антенах також мають схожу структуру, але положення максимумів та мінімумів спектрів відрізняються через те, що в приймальних антенах сингулярність поля поблизу кінців антени не так суттєво проявляється.

СТРУМ В АНТЕНІ ТА ДІАГРАМА СПРЯМОВАНOSTІ

Використовуючи алгоритм FDTD отримано сигнали у часовій формі для передавальної та приймальної антен. Аналіз спектрів, отриманих за допомогою FFT від часових форм сигналів в передавальній і приймальній антенах продемонстрував, що у спектрі сигналу для випромінюючої антени присутні складові на низьких частотах нижче 250 МГц, для приймальних антен такі складові не спостерігаються. Це пояснюється тим, що складові на низьких частотах погано випромінюються. Також слід відмітити, що для приймальних антен розташованих на відстані $r = 10\Delta z$ від випромінюючої маємо найбільшу складову поля на частоті, що відповідає першому резонансу, особливо суттєво це проявляється при $\varphi = 80^\circ$, де сигнал в інших антенах (на більшій відстані від випромінюючої) є дуже малим.

Слід зазначити, що для $\varphi = 90^\circ$, тобто для співвісних антен передача енергії із випромінюючої антени до прийомної є максимальною, але лише на невеликих відстанях, при збільшенні відстані між антенами зв'язок між ними швидко зменшується.

На поверхні антени можна визначити струм, що тече вздовж плеча. І рівняння Максвелла для ротора магнітного поля з урахуванням граничних умов для напруженості електричного поля на ідеальній металевій поверхні маємо

$$\vec{J} = \text{rot} \vec{H}. \quad (15)$$

Рівняння (15) дискретизується так само, як і звичні рівняння Максвелла на скінченно різничній сітці. Таким чином, отримуємо можливість розрахувати густину струму, що тече вздовж плеча антени в кожен момент часу.

На Рис. 8 показано густину струму в антені в різні моменти часу. При цьому нижня на малюнку вісь відповідає часу (там відкладено номери часових кроків, в ці моменти час відрізняється на значення Δt), інша горизонтальна вісь відповідає координатам відкладеним вздовж антени (точка запитки розташована посередині). На цьому рисунку видно, як струм поширюється із точки запитки вздовж плечей антени, потім відбивається від їх кінців і поширюється в зворотньому напрямку, після відбиття від точки запитки все повторюється. При цьому видно, як амплітуда струму в антені поступово згасає, дещо збільшуючись лише на кінцях антени.

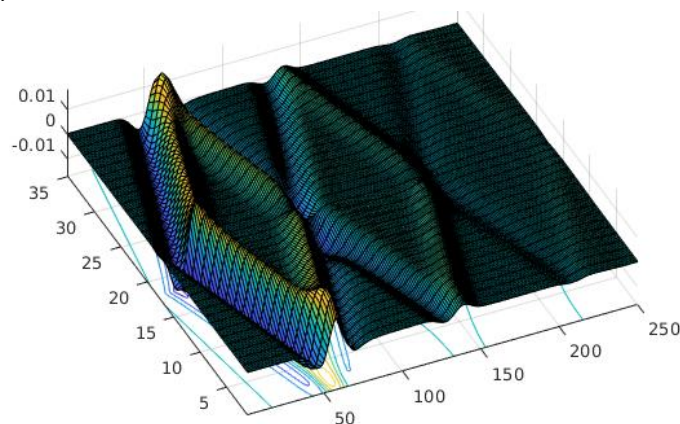


Рис. 8. Густина струму у випромінюючій антені в різні моменти часу.

Fig. 8 Current density in the radiating antenna at different times

Таким чином, можна отримати часову залежність струму в антені в кожний момент часу і, застосувавши FFT, - спектр струму, що тече вздовж антени, в кожній її точці. Застосувавши відомий алгоритм Near to Far Transformation [7] отримуємо діаграму спрямованості антени в дальній зоні. Приклад діаграми спрямованості випромінюючої антени для частоти 300 МГц наведено на Рис. 9.

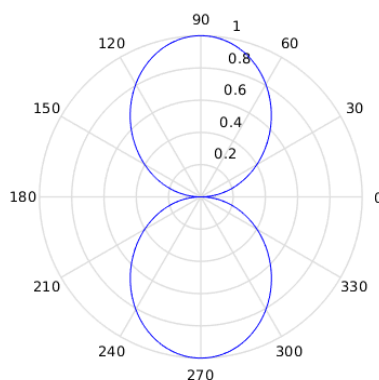


Рис. 9. Діаграма спрямованості випромінюючої антени.

Fig. 9. Radiation pattern of the radiating antenna.

ВИСНОВКИ

Для багатьох застосунків важливим є створення антенних систем із випромінюючої та приймальної антен, для яких електродинамічний зв'язок між ними є великим або малим. В цьому випадку обидві антени розташовано поблизу одна до одної, тож їх розташовано в ближній зоні. В даній роботі така взаємодія антен досліджується за допомогою метода скінченних різниць в часовій області (FDTD). Цей метод дозволяє отримати результати відразу для смуги частот, що містяться в спектрі збуджуючого сигналу. Проведено моделювання імпульсного випромінювання дипольної антени при різних просторових положеннях приймальної антени відносно випромінюючої. Отримано та проаналізовано часові форми та спектри сигналів, які при цьому виникають в передавальній та приймальній антенах. Також досліджено розподіл густини енергії електромагнітного поля у вільному просторі поблизу антен для різного просторового розташування приймальної антени відносно випромінюючої. Отримані часові та спектральні залежності дозволяють надати рекомендації щодо оптимального розташування приймальної антени відносно випромінюючої задля досягнення великого або малого електродинамічного зв'язку між ними

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

REFERENCES

1. Muller, Jérôme, et al. "Finite-difference time-domain and near-field-to-far-field transformation in the spectral domain: application to scattering objects with complex shapes in the vicinity of a semi-infinite dielectric medium." *JOSA A* 28.5 (2011): 868-878.
2. Kitsunezaki Naofumi. *Electro-magnetic Simulation Based on the Integral Form of Maxwell's Equations*. In: *Recent Advances in Integral Equations*. IntechOpen, 2018. p. 63.
3. Kane Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 14, no. 3, pp. 302-307, May 1966
4. Taflove, Allen, Ardavan Oskooi, and Steven G. Johnson, eds. *Advances in FDTD computational electrodynamics: photonics and nanotechnology*. Artech house, 2013
5. Heckbert, Paul. "Fourier transforms and the fast Fourier transform (FFT) algorithm." *Computer Graphics* 2.1995 (1995): 15-463.
6. Krishcke A. *Rothammel's Antenna Book*. – 2019.
7. Muller, Jérôme, et al. "Finite-difference time-domain and near-field-to-far-field transformation in the spectral domain: application to scattering objects with complex shapes in the vicinity of a semi-infinite dielectric medium." *JOSA A* 28.5 (2011): 868-878.

Стаття надійшла до редакції: 8 лютого 2024 р.

Рекомендовано до друку: 22 березня 2024 р.

SIMULATION OF INTERACTION OF ANTENNAS IN THE NEAR ZONE

M. Legenkiy, V. Khrychov

V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

Relevance. Obtaining the minimization or maximization of the interaction between the radiating and receiving antennas (or the receiving antenna with fields reflected from some obstacle) due to the orientation and location of the antennas at a certain distance and at certain angles is analyzed. Solving such problems will allow creating effective radio-electronic devices for various purposes, in particular, radar systems and information processing algorithms.

The purpose of the work is to carry out modeling of the pulsed radiation of a dipole antenna, determine the patterns of such radiation at different locations of the receiving antenna relative to the transmitting antenna. To determine the signal in the receiving antenna and identify the regularities of its formation.

Materials and methods. To solve the given problem, the Finite Difference Time Domain (FDTD) method was used with using the Yee algorithm for the numerical solution of Maxwell's equations. The spectra of the emitting and receiving antennas are analyzed using the Fast Fourier Transform (FFT) algorithm. The Near to Far Transformation algorithm is used to obtain antenna directional diagrams in the far zone.

Results. Received signals in time form for transmitting and receiving antennas. The analysis of the spectra obtained using FFT from the time forms of the signals in the transmitting and receiving antennas demonstrated that the signal spectrum for the radiating antenna contains components at low frequencies below 250 MHz, such components are not observed for the receiving antennas. The time dependence of the current in the antenna at each moment of time and the spectrum of the current were obtained, the directional diagram of the antenna in the far zone was obtained.

Conclusion. For receiving antennas located at a distance $r = 10\Delta z$ from the radiating one, we have the largest component of the field at the frequency corresponding to the first resonance, this is especially significantly manifested in those located at angle 80° , where the signal in other antennas (at a greater distance from the emitting one) is very small. For antennas located at a right angle, that is, for coaxial antennas, the energy transfer from the radiating antenna to the receiving antenna is maximal, but only at short distances, as the distance between the antennas increases, the connection between them quickly decreases.

KEYWORDS: *near zone, directional diagram, dipole antenna, FDTD, FFT.*

The article was received by the editors: February 8 2024

The article is recommended for printing: March 22 2024

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-05>

УДК 621.373.826+537.874.6+537.876.2

А. В. ДЕГТЯРЬОВ, к. ф.-м. наук, доц.

e-mail: a.v.degtyarev@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-0844-4282>

М. М. ДУБІНІН, Ph.D., с.н.с.

e-mail: mykola.dubinin@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7723-9592>

В. О. МАСЛОВ, д. ф.-м. наук, проф.

e-mail: v.a.maslov@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7743-7006>

К. І. МУНТЯН, н.с.

e-mail: k.i.muntean@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-6479-3511>

О. О. СВИСТУНОВ, аспірант

e-mail: oleg.svistunov.98@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4967-5944>

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
м. Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

ПОШИРЕННЯ ВИХРОВИХ ЛАЗЕРНИХ ПУЧКІВ МЕТАЛЕВОГО РЕЗОНАТОРА

Актуальність. Розглядається задача поширення випромінювання вихрових лазерних пучків, сформованих модами металевих хвильоводних резонаторів. Результати розрахунків поширення таких пучків мають широкий спектр потенційних застосувань, від отримання ТГц зображень і спектроскопії до зв'язку, зондування, біомедицини та розв'язання задач, які пов'язані з взаємодією електромагнітних хвиль з речовиною: діагностика тонких плівок, поверхні матеріалів, різних біологічних об'єктів, а також астрономії та космічних досліджень.

Мета роботи — отримати аналітичні вирази для опису непараксильної дифракції мод хвильоводних металевих резонаторів терагерцевого лазера при їх взаємодії зі спіральною фазовою пластинкою та шляхом чисельного моделювання вивчити фізичні особливості отриманих вихрових пучків при їх поширенні у вільному просторі.

Матеріали та методи. Для дослідження поширення у зоні Френеля вихрових лазерних пучків, які збуджувались модами металевих хвильоводних квазіоптичних резонаторів, була використана векторна теорія Релея-Зоммерфельда.

Результати. Для опису непараксильної дифракції мод металевих хвильоводних резонаторів терагерцевого лазера одержані аналітичні вирази. Також за допомогою чисельного моделювання досліджено фізичні особливості виникаючих вихрових пучків при їх поширенні у вільному просторі.

Висновки. У вільному просторі спіральна фазова пластина для збуджуючої моди TE_{11} з профілем з максимумом інтенсивності в центрі ($n = 0$) утворює асиметричне кільце з двома максимумами ($n = 1, 2$). Для збуджуючої моди TE_{01} початкова кільцева ($n = 0$) структура напруженості поля трансформується в структуру з максимальною інтенсивністю випромінювання в центрі ($n = 1$), а потім знову в кільцеву ($n = 2$). Фазовий фронт променю для компоненти E_y лінійно поляризованої вздовж осі у моди TE_{11} змінюється від сферичного до спірального з однією точкою сингулярності на осі. У фазовому профілі поперечних складових азимутально поляризованої моди TE_{01} з'являється ділянка з двома та трьома позаосьовими точками фазових сингулярностей.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: терагерцевий діапазон, металевий квазіоптичний резонатор, спіральна фазова пластина, лазерні вихрові пучки, хвильовідні моди, векторне поширення

Як цитувати: Дегтярьов АВ, Дубінін ММ, Маслов ВО, Мунтян КІ, Свистунов ОО. Поширення вихрових лазерних пучків металевих резонаторів. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2024; 40, 57-67. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-05>

In cites: Degtyarev AV, Dubinin MM, Maslov VA, Muntean KI, Svystunov OO. Propagation of vortex laser beams of a metal resonator. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2024; 40, 57-67. (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-05>

ВСТУП

В останнє десятиріччя стався помітний сплеск інтересу до формування терагерцових (ТГц) лазерних променів [1]. Вихрові пучки в цих хвильових полях займають чільне місце в дослідженнях. Їх унікальність обумовлена чітко вираженою спіральною структурою хвильового фронту, що забезпечує наявність орбітального імпульсу хвилі зі значною кількістю станів і, отже, додатковими ступенями свободи [2–4]. Вихрові лазерні промені демонструють значний потенціал для застосування у високошвидкісних мультиплексних терагерцових системах зв'язку, томографії, дослідженні лінійних і нелінійних характеристик різних матеріалів, прискоренні та маніпулюванні електронними згустками та виявленні астрофізичних джерел [5–9].

Вивчення генерації вихрових ТГц пучків головним чином зосереджується на двох принципах: модуляції хвильового фронту через спеціалізовані зовнішні пристрої та прямому збудженні вихрових пучків на виході резонатора. При принципі позарезонаторної модуляції хвильового фронту використовуються різні інструменти, такі як спіральні фазові пластини, q -пластини, ахроматичні поляризаційні елементи, дифракційні оптичні елементи, метаповерхні, рідкокристалічні розгалужені поляризаційні решітки, комп'ютерні голограми та просторові модулятори [10–17]. Для формування вихрових пучків на виході лазерного резонатора були запропоновані такі методи, як оптичне випрямлення, генерація різницевої частоти та лазерно-плазмові методи [18–20]. Однак у більшості цих досліджень використовується широку смугу випромінювання від генераторів субпікосекундних імпульсів на основі фемтосекундних лазерів, що призводить до складного виробництва лазерних систем і взаємодія з речовиною якого значно відрізняється від безперервного випромінювання.

Молекулярні лазери з оптичною накачкою поки що є єдиним відносно компактним джерелом безперервного терагерцового випромінювання, пропонуючи дискретну перестроюваність у всьому терагерцовому діапазоні та маючи вузьку ширину спектральної лінії. Нинішній сплеск інтересу до цих генераторів пояснюється потенційним використанням безперервно регульованих квантових каскадних лазерів середнього ІЧ-діапазону як джерел накачування [21]. Використання металевих хвилевідних квазіоптичних резонаторів є поширеним у більшості лазерів з оптичною накачкою, що дозволяє досягти потужностей до 1 Вт у безперервному режимі з відносно компактними розмірами резонатора [22]. Серед мод таких резонаторів найменші втрати мають моди TE_{11} і TE_{01} з лінійною та азимутальною поляризацією поля [23].

Одним із найвідоміших оптичних елементів для генерації вихрових пучків є спіральна фазова пластина зі змінною по азимуту товщиною [3, 24]. Цей елемент дозволяє безпосередньо застосовувати спіральний зсув фази до падаючого лазерного променя, перетворюючи майже 100 % енергії вхідного випромінювання у вихровий промінь.

Метою цієї роботи є отримання аналітичних виразів, які описують непараксіальну дифракцію мод металевих хвилевідних резонаторів терагерцового лазера при їх взаємодії зі спіральною фазовою пластиною, а також дослідження фізичних характеристик одержаних вихрових пучків під час їх поширення у вільному просторі.

ТЕОРЕТИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Для опису поширення лазерного випромінювання у вільному просторі вздовж осі z будемо використовувати відомі векторні інтеграли Релея-Зоммерфельда в декартовій системі координат [25–27]:

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}) &= -\frac{1}{2\pi} \int \int_{\Sigma_0} E_x^0(\vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikR)}{R} \right] dx_0 dy_0, \\ E_y(\vec{r}) &= -\frac{1}{2\pi} \int \int_{\Sigma_0} E_y^0(\vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikR)}{R} \right] dx_0 dy_0, \\ E_z(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int \int_{\Sigma_0} \left\{ E_x^0(\vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\exp(ikR)}{R} \right] + E_y^0(\vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\exp(ikR)}{R} \right] \right\} dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $E_x^0(\vec{r}_0)$ та $E_y^0(\vec{r}_0)$ є комплексними амплітудами x і y компонентів вхідного електричного поля, Σ_0 – область, у якій задано вхідне поле, $k = 2\pi / \lambda$ – хвильове число, λ – довжина хвилі, $\vec{r}_0 = x_0 \vec{e}_{x_0} + y_0 \vec{e}_{y_0}$, (x_0, y_0) – декартові координати в початковій площині, $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$, (x, y, z) –

декартові координати в площині спостереження, $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}$. Використовуючи непараксіальну апроксимацію в (1), розкладемо R в ряд, зберігши його перший і другий члени у вигляді

$$R \cong r + \frac{x_0^2 + y_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0}{2r}, \quad (2)$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

При підстановці (2) в підінтегральні швидкоосцилюючі експоненти в (1), а в інші місця $R \cong r$, а потім переходячи до циліндричних координат, отримуємо вирази для компонент поля в різних зонах дифракції:

$$E_x(\rho, \beta, z) = -\frac{iz}{\lambda r^2} \exp(ikr) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E_x^0(\vec{r}_0) \exp\left(ik \frac{\rho_0^2}{2r}\right) \exp\left(-ik \frac{\rho \rho_0 \cos(\varphi - \beta)}{r}\right) \rho_0 d\rho_0 d\varphi, \quad (3.1)$$

$$E_y(\rho, \beta, z) = -\frac{iz}{\lambda r^2} \exp(ikr) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E_y^0(\vec{r}_0) \exp\left(ik \frac{\rho_0^2}{2r}\right) \exp\left(-ik \frac{\rho \rho_0 \cos(\varphi - \beta)}{r}\right) \rho_0 d\rho_0 d\varphi, \quad (3.2)$$

$$E_z(\rho, \beta, z) = \frac{i}{\lambda r^2} \exp(ikr) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[E_x^0(\vec{r}_0)(\rho \cos \beta - \rho_0 \cos \varphi) + E_y^0(\rho \sin \beta - \rho_0 \sin \varphi) \right] \times \exp\left(ik \frac{\rho_0^2}{2r}\right) \exp\left(-ik \frac{\rho \rho_0 \cos(\varphi - \beta)}{r}\right) \rho_0 d\rho_0 d\varphi. \quad (3.3)$$

Тут (ρ, β, z) – циліндричні координати в площині спостереження та (ρ_0, φ) – полярні координати в області, де задано початкове поле, $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$.

Моди досліджуваного металевого хвильовідного резонатора збігаються з модами круглого металевого хвильоводу. Отже, у початковій площині характеризуємо випромінювання через лінійно та азимутально поляризовані моди TE_{11} та TE_{01} . Нормовані декартові компоненти електромагнітних полів для цих мод набувають такого вигляду в площині джерела ($z = 0$) [28]:

$$TE_{11} \text{ мода} \quad \begin{cases} E_x^0(\rho_0, \varphi) = A_{11} J_2(\chi_{11} \frac{\rho_0}{a}) \sin(2\varphi), \\ E_y^0(\rho_0, \varphi) = A_{11} [J_0(\chi_{11} \frac{\rho_0}{a}) - J_2(\chi_{11} \frac{\rho_0}{a}) \cos(2\varphi)], \end{cases} \quad (4)$$

$$TE_{01} \text{ мода} \quad \begin{cases} E_x^0(\rho_0, \varphi) = -A_{01} J_1(\chi_{01} \frac{\rho_0}{a}) \sin(\varphi), \\ E_y^0(\rho_0, \varphi) = A_{01} J_1(\chi_{01} \frac{\rho_0}{a}) \cos(\varphi), \end{cases} \quad (5)$$

де a – радіус хвильоводу, $A_{11} = \frac{\chi_{11}}{\left(a J_1(\chi_{11}) \sqrt{2\pi(\chi_{11}^2 - 1)}\right)}$, $A_{01} = \frac{1}{a \sqrt{\pi} J_0(\chi_{01})}$ є нормуючі множники, J_j є

функцією Бесселя 1-го порядку j ; χ_{mn} є n -м коренем рівняння $J_m(\chi) = 0$.

Дослідимо взаємодію між цими модами та спіральною фазовою пластиною (СФП) з довільним топологічним зарядом (n) [29]. СФП розташовано на виході хвильоводу з отвором такого ж діаметру як показано на Рис. 1. Комплексна функція пропускання СФП з радіусом a виражається в полярних координатах таким чином [3]:

$$T_n(\rho_0, \varphi) = \text{circ}\left(\frac{\rho_0}{a}\right) \exp(in\varphi) = \begin{cases} \exp(in\varphi), & \rho_0 \leq a, \\ 0, & \rho_0 > a, \end{cases} \quad (6)$$

де $\text{circ}(\cdot)$ це кругова функція.

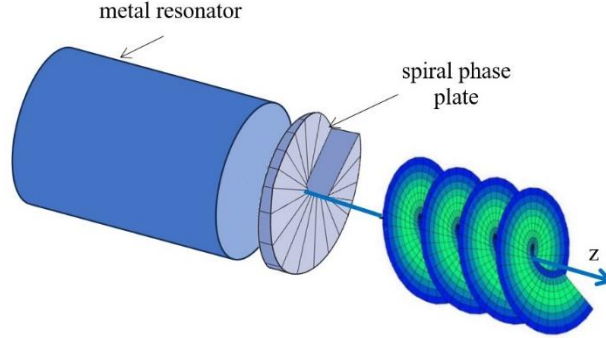


Рис. 1. Теоретична схема розрахункової моделі
Fig. 1. Theoretical scheme of the calculation model

Для спрощення обчислень інтегрування за кутом φ у рівнянні (3) можна здійснити, використовуючи встановлені співвідношення для цілого $m \geq 0$, як описано в [26]:

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\varphi + \varphi_0) \exp[-ix \cos(\varphi - \theta)] d\varphi = 2\pi(-i)^m J_m(x) \cos(m\theta + \varphi_0),$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi + \varphi_0) \exp[-ix \cos(\varphi - \theta)] d\varphi = 2\pi(-i)^m J_m(x) \sin(m\theta + \varphi_0).$$

Тоді звідси ми можемо отримати наступне співвідношення

$$\int_0^{2\pi} e^{-ix \cos(\varphi - \beta)} e^{in\varphi} d\varphi = 2\pi e^{in\beta} (-i)^n J_n(x). \quad (7)$$

Використовуючи формули Ейлера для тригонометричних функцій та враховуючи рівняння (7), отримуємо вирази для наступних інтегралів:

$$\int_0^{2\pi} e^{-ix \cos(\varphi - \beta)} e^{in\varphi} \sin(m\varphi + \varphi_0) d\varphi = \frac{\pi}{i} \{ e^{i[(n+m)\beta + \varphi_0]} (-i)^{n+m} J_{n+m}(x) - e^{i[(n-m)\beta - \varphi_0]} (-i)^{n-m} J_{n-m}(x) \}, \quad (8.1)$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-ix \cos(\varphi - \beta)} e^{in\varphi} \cos(m\varphi + \varphi_0) d\varphi = \pi \{ e^{i[(n+m)\beta + \varphi_0]} (-i)^{n+m} J_{n+m}(x) + e^{i[(n-m)\beta + \varphi_0]} (-i)^{n-m} J_{n-m}(x) \}. \quad (8.2)$$

Тоді, підставляючи в (3) вираз для комплексної функції пропускання СФП (6) і використовуючи формули (7) і (8.1), отримуємо вирази для компонент поля, які описують непараксіальну дифракцію моди TE_{11} на СФП з топологічним зарядом n у вільному просторі:

$$E_x(\rho, \beta, z) = \frac{(-i)^n k z}{2r^2} \exp[i(n\beta + kr)] A_{11} [\exp(i2\beta) H_{1, n+2}(\rho, z) - \exp(-i2\beta) H_{1, n-2}(\rho, z)], \quad (9.1)$$

$$E_y(\rho, \beta, z) = \frac{(-i)^{n+1} k z}{r^2} \exp[i(n\beta + kr)] A_{11} \{ H_{1, n}(\rho, z) + \frac{1}{2} [\exp(i2\beta) H_{1, n+2}(\rho, z) + \exp(-i2\beta) H_{1, n-2}(\rho, z)] \}, \quad (9.2)$$

$$E_z(\rho, \beta, z) = \frac{(-i)^{n+1} k}{2r^2} \exp[i(n\beta + kr)] A_{11} [G_1(\rho, \beta, z) + G_2(\rho, \beta, z) + 2\rho \sin(\beta) H_{1, n}(\rho, z)], \quad (9.3)$$

де введено наступні позначення

$$H_{1, n}(\rho, z) = \int_0^a J_0 \left(\chi_{11} \frac{\rho_0}{a} \right) \exp \left(ik \frac{\rho_0^2}{2r} \right) J_n \left(\frac{k \rho \rho_0}{r} \right) \rho_0 d\rho_0, \quad (10.1)$$

$$H_{1, n}(\rho, z) = \int_0^a J_2 \left(\chi_{11} \frac{\rho_0}{a} \right) \exp \left(ik \frac{\rho_0^2}{2r} \right) J_n \left(\frac{k \rho \rho_0}{r} \right) \rho_0 d\rho_0, \quad (10.2)$$

$$G_1(\rho, \beta, z) = \int_0^a J_2 \left(\chi_{11} \frac{\rho_0}{a} \right) \exp \left(ik \frac{\rho_0^2}{2r} \right) \times \left[\exp(i\beta) J_{n-2} \left(\frac{k \rho \rho_0}{r} \right) - \exp(-i\beta) J_{n+2} \left(\frac{k \rho \rho_0}{r} \right) \right] \rho_0 d\rho_0, \quad (10.3)$$

$$G_2(\rho, \beta, z) = \int_0^a \left[J_0 \left(\chi_{11} \frac{\rho_0}{a} \right) + J_2 \left(\chi_{11} \frac{\rho_0}{a} \right) \right] \exp \left(ik \frac{\rho_0^2}{2r} \right) \times \left[\exp(i\beta) J_{n+1} \left(\frac{k \rho \rho_0}{r} \right) - \exp(-i\beta) J_{n-1} \left(\frac{k \rho \rho_0}{r} \right) \right] \rho_0^2 d\rho_0. \quad (10.4)$$

Також, використовуючи формули (8.1) і (8.2), отримуємо вирази для компонент поля, які описують непараксіальну дифракцію моди TE_{01} на СФП. Вони виглядають наступним чином:

$$E_x(\rho, \beta, z) = \frac{(-i)^{n+1} k z}{2r^2} \exp[i(n\beta + kr)] B_{01} [\exp(i\beta) H_{2, n+1}(\rho, z) + \exp(-i\beta) H_{2, n-1}(\rho, z)], \quad (11.1)$$

$$E_y(\rho, \beta, z) = \frac{(-i)^{n+2} k z}{2r^2} \exp[i(n\beta + kr)] B_{01} [\exp(i\beta) H_{2, n+1}(\rho, z) - \exp(-i\beta) H_{2, n-1}(\rho, z)], \quad (11.2)$$

$$E_z(\rho, \beta, z) = \frac{(-i)^{n+1} k \rho}{2r^2} \exp[i(n\beta + kr)] B_{01} [H_{2, n+1}(\rho, z) + H_{2, n-1}(\rho, z)], \quad (11.3)$$

де введено наступні позначення

$$H_{2, n}(\rho, z) = \int_0^a J_1 \left(\chi_{01} \frac{\rho_0}{a} \right) \exp \left(ik \frac{\rho_0^2}{2r} \right) J_n \left(\frac{k \rho \rho_0}{r} \right) \rho_0 d\rho_0.$$

РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ ТА ЇХ АНАЛІЗ

За допомогою отриманих виразів проведено розрахунки поздовжнього та поперечного розподілів повної напруженості поля ($I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$), а також поперечні розподіли інтенсивності полів

$(I = |E_i|^2, i = x, y)$ та фази ($\varphi = \arctg(\text{Im}(E_i) / \text{Re}(E_i))$) для окремих x, y компонент пучків лазерного випромінювання, що збуджуються в зоні Френеля асиметричною лінійно поляризованою вздовж осі у TE_{11} модою та симетричною азимутально поляризованою TE_{01} модою металевого хвильовідного резонатора терагерцового лазера під час їх взаємодії з СФП. Поперечні розподіли інтенсивності та фази поля для поздовжньої складової не наведено через незначний її вплив на сумарну інтенсивність випромінювання. Довжину хвилі випромінювання вибирали в середній частині терагерцового діапазону $\lambda = 0,4326$ мм (лінія генерації оптично збудженої молекули мурашиної кислоти НСООН [30]). Діаметр хвильоводу вибрано $2a = 35$ мм. На виході хвильоводу розташовувалася СФП з отвором такого ж діаметру. При цьому топологічний заряд n змінювався від нуля до двох.

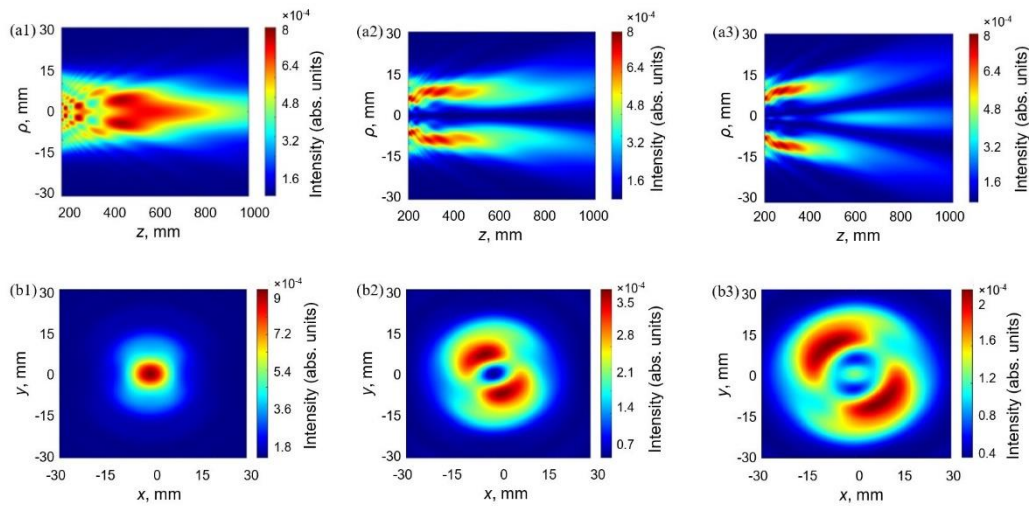


Рис. 2. Розрахункові поздовжній (a1–a3) та поперечний (b1–b3) сумарні розподіли інтенсивності поля лазерних променів, збуджених модою TE_{11} у зоні Френеля для різних значень топологічного заряду. Перший, другий і третій стовпці відповідають $n = 0, n = 1$ і $n = 2$ відповідно

Fig. 2. Calculated longitudinal (a1–a3) and transverse (b1–b3) total field intensity distributions of the laser beams excited by the TE_{11} mode in the Fresnel zone for different values of the topological charge. The first, second and third columns correspond to $n = 0, n = 1$ and $n = 2$, respectively

На Рис. 2 (a1), 2 (b1) показано результати чисельного моделювання поздовжнього розподілу інтенсивності поля в зоні Френеля ($z = 100 - 1000$ мм) і поперечного розподілу інтенсивності поля, збудженого модою TE_{11} для $z = 708$ мм (де число Френеля дорівнює 1). Результати отримані в припущенні про відсутність СФП на виході хвильоводу. З рисунків видно, що максимум у розподілі поздовжньої інтенсивності спостерігається при $z \approx 500$ мм. Зауважимо, що ефективний діаметр пучка на відстані 708 мм для моди TE_{11} розраховується за формулою [31]

$$d_{\sigma} = 2 \sqrt{\frac{2 \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho^2 I(\rho, \beta, z) \rho d\rho d\beta}{\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} I(\rho, \beta, z) \rho d\rho d\beta}} \quad (12)$$

і дорівнює $d_{\sigma} = 151,3 \lambda$. Поперечний профіль поля має добре відому гаусоподібну форму та сферичний фазовий фронт. Встановлення СФП на виході хвильоводу з ненульовим топологічним зарядом призводить в зоні Френеля до зміни профілю інтенсивності пучка на асиметричний кільцевий з двома максимумами (Рис. 2 (a2, a3, b2, b3)). Діаметр пучка збільшується до $d_{\sigma} = 164,6 \lambda$ при $n = 1$ і $d_{\sigma} = 192,0 \lambda$ при $n = 2$.

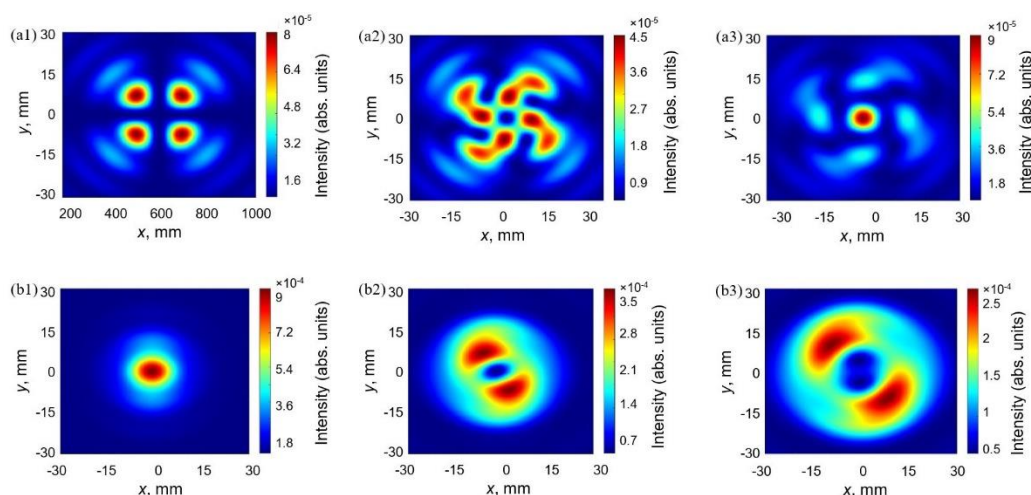


Рис. 3. Розрахункові розподіли інтенсивності поля E_x (a1–a3) та E_y (b1–b3) компонент лазерних променів, збуджених модою TE_{11} в зоні Френеля для різних значень топологічного заряду. Перший, другий і третій стовпці відповідають $n = 0$, $n = 1$ і $n = 2$ відповідно.

Fig. 3. Calculated field intensity distributions for E_x (a1–a3) and E_y (b1–b3) components of the laser beams excited by the TE_{11} mode in the Fresnel zone for different values of the topological charge. The first, second and third columns correspond to $n = 0$, $n = 1$ and $n = 2$, respectively.

На Рис. 3–4 наведено розрахункові розподіли інтенсивності та фази поля для окремих поперечних складових, що збуджуються в зоні Френеля асиметрично лінійно поляризованою вздовж осі y модою TE_{11} металевого хвильового резонатора терагерцового лазера під час його взаємодії з СФП. Ці результати наочно демонструють визначальну роль компоненти E_y лазерного променя у формуванні загального поперечного профілю інтенсивності на Рис. 2. Слід звернути увагу на спостережуване фокусування інтенсивності поля E_x компоненти лазерного променя при збільшенні величини топологічного заряду

Як видно з Рис.4, встановлення СФП на виході хвильоводу для моди TE_{11} призводить до перетворення фазового профілю пучка зі сферичного на вихровий. При цьому зі збільшенням величини топологічного заряду спостерігається утворення вираженої гвинтової структури фронту хвилі та точки сингулярності E_y компоненти лазерного променя.

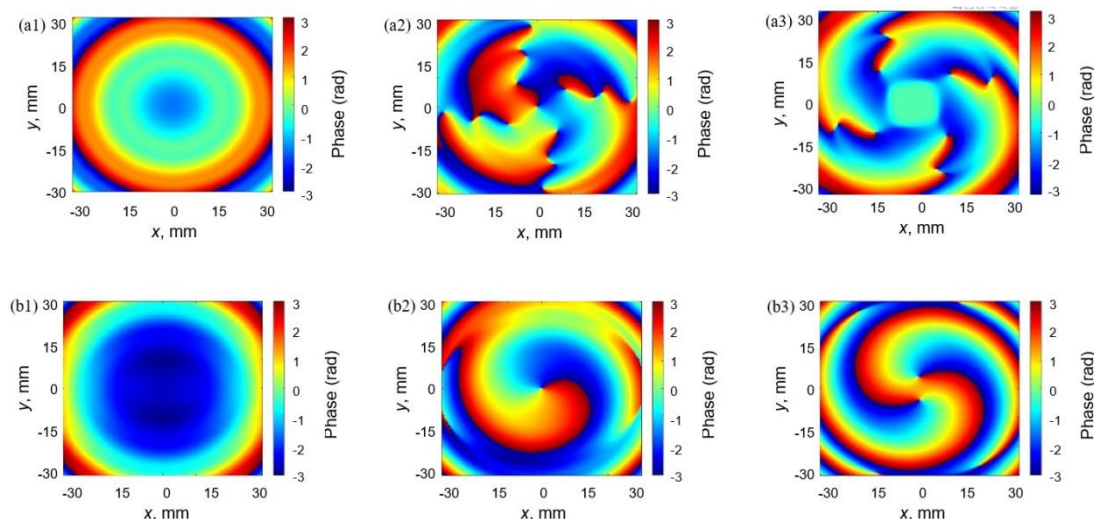


Рис. 4. Розрахункові розподіли фази поля для E_x (a1–a3) та E_y (b1–b3) компонент лазерних променів, що збуджуються модою TE_{11} у зоні Френеля для різних значень топологічного заряду. Перший, другий і третій стовпці відповідають $n = 0$, $n = 1$ і $n = 2$ відповідно.

Fig. 4. Calculated field phase distributions for E_x (a1–a3) and E_y (b1–b3) components of the laser beams excited by the TE_{11} mode in the Fresnel zone for different values of the topological charge. The first, second and third columns correspond to $n = 0$, $n = 1$ and $n = 2$, respectively.

Встановлення СФП на виході хвильоводу для моди TE_{01} призводить до трансформації профілю

інтенсивності пучка з кільцевого в гаусоподібний при зміні значення топологічного заряду від нуля до одиниці (Рис. 5). Подальше збільшення топологічного заряду повертає профіль променю до початкової кільцевої форми. Зазначимо, що ефективний діаметр пучка, розрахований за формулою (12), на відстані 708 мм для моди TE_{01} зростає від $d_\sigma = 67.5 \lambda$ при $n = 0$ (за відсутності топологічного заряду) до $d_\sigma = 89,1 \lambda$ при $n = 2$.

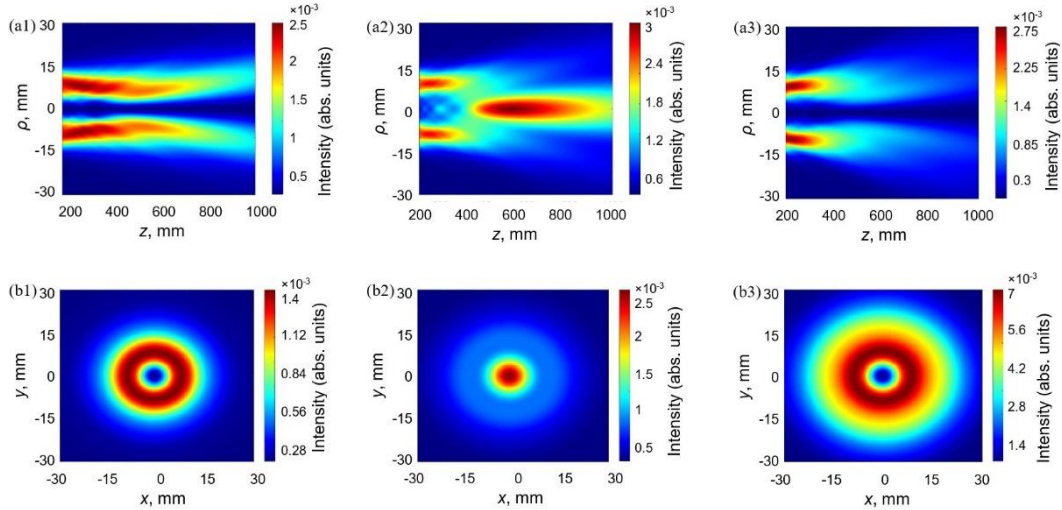


Рис. 5. Розраховані повздовжній (a1–a3) та поперечний (b1–b3) розподіли повної інтенсивності поля, збудженого модою TE_{01} у зоні Френеля для різних значень топологічного заряду. Перший, другий і третій стовпці відповідають $n = 0$, $n = 1$ і $n = 2$ відповідно.

Fig. 5. Calculated longitudinal (a1–a3) and transverse (b1–b3) total field intensity distributions excited by the TE_{01} mode in the Fresnel zone for different values of the topological charge. The first, second and third columns correspond to $n = 0$, $n = 1$ and $n = 2$, respectively.

На Рис. 6 наведено розраховані поперечні розподіли інтенсивності поля для окремих поперечних складових пучків лазерного випромінювання, що збуджуються в зоні Френеля симетричною азимутально поляризованою модою TE_{01} металевого хвильовідного резонатора терагерцового лазера під час його взаємодії з СФП. Ці результати показують однаковий внесок поперечних компонентів лазерного променя у формування загального профілю інтенсивності на Рис. 5. Маючи спочатку антисиметричну форму, ці компоненти, будучи доданими, утворюють симетричний промінь.

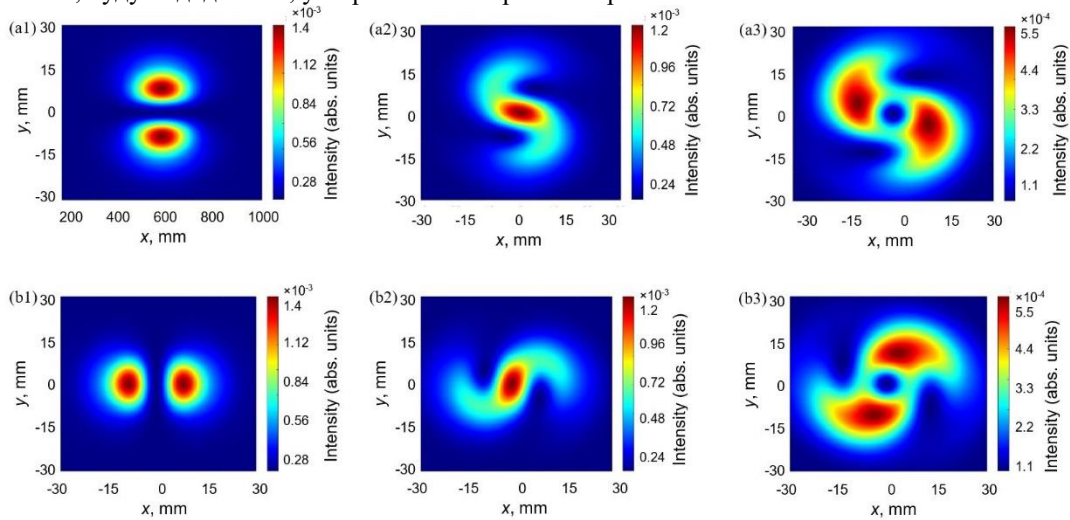


Рис. 6. Розрахункові розподіли інтенсивності поля E_x (a1–a3) та E_y (b1–b3) компонентів лазерних променів, що збуджуються модою TE_{01} у зоні Френеля для різних значень топологічного заряду. Перший, другий і третій стовпці відповідають $n = 0$, $n = 1$ і $n = 2$ відповідно.

Fig. 6. Calculated field intensity distributions for E_x (a1–a3) and E_y (b1–b3) components of the laser beams excited by the TE_{01} mode in the Fresnel zone for different values of the topological charge. The first, second and third columns correspond to $n = 0$, $n = 1$ and $n = 2$, respectively.

На Рис. 7 показано фазові розподіли для поперечних складових моди TE_{01} в зоні Френеля при зміні топологічного заряду. Встановлення СФП на виході хвильоводу, як і для моди TE_{11} , перетворює хвильовий фронт лазерних променів зі сферичного на вихровий. Зазначимо, що при $n = 1$ хвильовий фронт має дві спіральні поверхні, а при $n = 2$ – три.

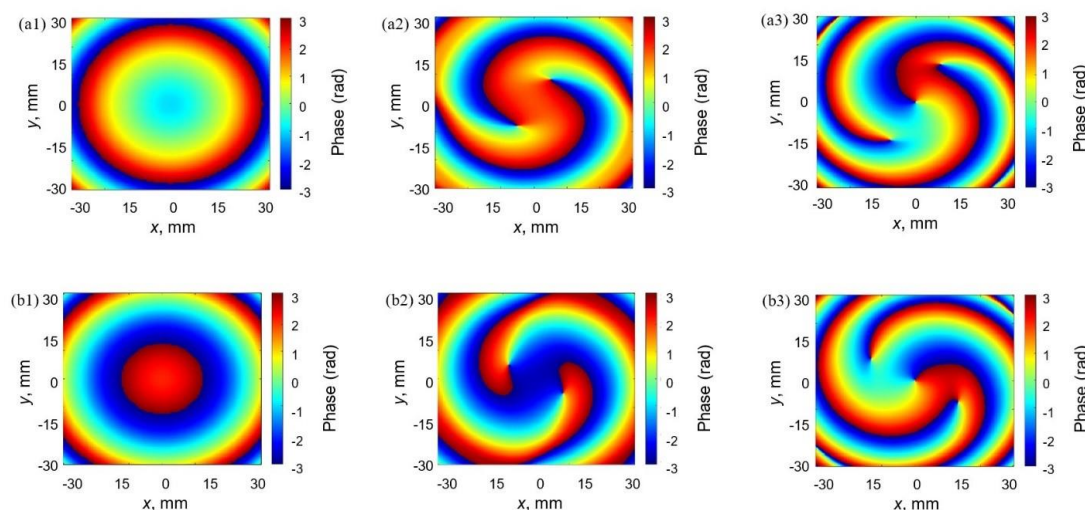


Рис. 7. Розрахункові розподіли фази поля для E_x (a1–a3) та E_y (b1–b3) компонент лазерних променів, що збуджуються модою TE_{01} в зоні Френеля для різних значень топологічного заряду. Перший, другий і третій стовпці відповідають $n = 0$, $n = 1$ і $n = 2$ відповідно.

Fig. 7. Calculated field phase distributions for E_x (a1–a3) and E_y (b1–b3) components of the laser beams excited by the TE_{01} mode in the Fresnel zone for different values of the topological charge. The first, second and third columns correspond to $n = 0$, $n = 1$ and $n = 2$, respectively.

ВИСНОВКИ

1. Отримано аналітичні вирази для опису непараксильної дифракції мод металевого хвильовідного резонатора терагерцового лазера під час їх взаємодії зі спіральною фазовою пластинкою з різними топологічними зарядами (n). Показана визначальна роль E_y компоненти лазерного променя для лінійно поляризованої вздовж осі y моди TE_{11} та рівнозначний внесок поперечних компонент для азимутально поляризованої моди TE_{01} у формування повного поперечного поля.

2. У вільному просторі спіральна фазова пластинка для моди TE_{11} з профілю з максимумом інтенсивності в центрі ($n = 0$) утворює асиметричне кільце з двома максимумами ($n = 1, 2$). Для моди TE_{01} початкова кільцева ($n = 0$) структура напруженості поля трансформується в структуру з максимальною інтенсивністю випромінювання в центрі ($n = 1$), а потім знову в кільцеву ($n = 2$).

3. Фазовий фронт променя для компоненти E_y моди TE_{11} змінюється зі сферичного на спіральний з однією точкою сингулярності на осі. І навпаки, у фазовому профілі поперечних складових азимутально поляризованої моди TE_{01} з'являється область із двома та трьома позаосьовими точками фазових сингулярностей.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

REFERENCES

- Headland DY, Monnai Abbott D, Fumeaux C, Withayachumnankul W. Tutorial: Terahertz beamforming, from concepts to realizations. *Apl. Photonics*. 2018 3: 051101. <https://doi.org/10.1063/1.5011063>
- Forbes A. Advances in orbital angular momentum lasers. *J. Light. Technol.* 2023; 41: 2079. <https://doi.org/10.1109/JLT.2022.3220509>
- Wang HQ, Song, Cai Y, Lin Q, Lu X, Shangguan H, Ai Y, Xu S. Recent advances in generation of terahertz vortex beams and their applications., *Chin. Phys. B*. 2020; 29: 097404. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/aba2df>
- Petrov NV, Sokolenko B, Kulya MS, Gorodetsky A, Chernykh AV. Design of broadband terahertz vector and vortex beams: I. Review of materials and components. *Light: Advanced Manufacturing*. 2022; 3(640). <https://doi.org/10.37188/lam.2022.043>

5. Nagatsuma T, Ducournau G, Renaud C. Advances in terahertz communications accelerated by photonics. *Nat. Photonics*. 2016; 10(371). <https://doi.org/10.1038/nphoton.2016.65>
6. Chen SC, Feng ZZ, Li J, Tan W, Du LH, Cai J, Zhu LG. Ghost spintronic THz-emitter-array microscope. *Light Sci. Appl.* 2020; 9(99). <https://doi.org/10.1038/s41377-020-0338-4>
7. Nobahar D, Khorram S. Terahertz vortex beam propagation through a magnetized plasma-ferrite structure. *Opt. Laser Technol.* 2022; 146:107522. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2021.107522>
8. Hibberd MT, Healy AL, Lake DS, Georgiadis V, Smith EJJ, Finlay OJ, Jamison SP. Acceleration of relativistic beams using laser generated terahertz pulses. *Nat. Photonics*. 2019; 14(755). <https://doi.org/10.1038/s41566-020-0674-1>
9. Klug A, Nape I, Forbes A. The orbital angular momentum of a turbulent atmosphere and its impact on propagating structured light fields. *New J. Phys.* 2021; 23: 093012. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/ac1fca>
10. Pinnock SW, Roh S, Biesner T, Pronin AV, Dressel M. Generation of THz vortex beams and interferometric determination of their topological charge. *IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.* 2022; 13(44). <https://doi.org/10.1109/TTHZ.2022.3221369>
11. Rubano A, Cardano F, Piccirillo B, Marrucci L. Q-plate technology: a progress review [Invited]. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2019; 36 (D70-D87). <https://doi.org/10.1364/JOSAB.36.000D70>
12. Imai R, Kanda N, Higuchi T, Konishi K, Kuwata-Gonokami M. Generation of broadband terahertz vortex beams. *Opt. Lett.* 2014; 39(3714). <https://doi.org/10.1364/OL.39.003714>
13. Yang Y, Ye X, Niu L, Wang K, Yang Z, Liu J. Generating terahertz perfect optical vortex beams by diffractive elements. *Opt. Express*. 2020; 28(1417). <https://doi.org/10.1364/OE.380076>
14. Zhang K, Wang Y, Burokur SN, Wu Q. Generating dual-polarized vortex beam by detour phase: from phase gradient metasurfaces to metagratings. *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 2022; 70(200). <https://doi.org/10.1109/TMTT.2021.3075251>
15. Zhang XD, Su YH, Ni JC, Wang ZY, Wang YL, Wang CW, Chu JR. Optical superimposed vortex beams generated by integrated holographic plates with blazed grating. *Appl. Phys. Lett.* 2017; 111: 061901. <https://doi.org/10.1063/1.4997590>
16. Ge SJ, Shen ZX, Chen P, Liang X, Wang XK, Hu W, Zhang Y, Lu YQ. Generating, separating and polarizing terahertz vortex beams via liquid crystals with gradient-rotation directors. *Crystals*. 2017; 7(314). <https://doi.org/10.3390/cryst7100314>
17. Guan S, Cheng J, Chang S. Recent progress of terahertz spatial light modulators: materials, principles and applications. *Micromachines*. 2022; 13(1637). <https://doi.org/10.3390/mi13101637>
18. Al Dhaybi A, Degert J, Brasselet E, Abraham E, Freysz E. Terahertz vortex beam generation by infrared vector beam rectification. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2019; 36(12). <https://doi.org/10.1364/JOSAB.36.000012>
19. Miyamoto K, Sano K, Miyakawa T, Niinomi H, Toyoda K, Vallés A, Omatsu T. Generation of high-quality terahertz OAM mode based on soft-aperture difference frequency generation. *Opt. Express*. 2019; 27: 31840. <https://doi.org/10.1364/OE.27.031840>
20. Sobhani H, Dadar E. Terahertz vortex generation methods in rippled and vortex plasmas. *J. Opt. Soc. Am. A*. 2019; 36(1187). <https://doi.org/10.1364/JOSAA.36.001187>
21. Chevalier P, Amirzhan A, Wang F, Piccardo M, Johnson SG, Capasso F, Everitt HO. Widely tunable compact terahertz gas lasers. *Science*. 2019; 366(856). <https://doi.org/10.1126/science.aay8683>
22. Farhoomand J, Pickett HM. Stable 1.25 watts CW far infrared laser radiation at the 119 μm methanol line. *Int. J. Infrared Millim. Waves*. 1987; 8(441). <https://doi.org/10.1007/BF01013257>
23. Röser HP, Yamanaka M, Wattenbach R, Schultz GV. Investigations of optically pumped submillimeter wave laser modes. *Int. J. Infrared Millim. Waves*. 1982; 3(839). <https://doi.org/10.1007/BF01008649>
24. Beijersbergen MW, Coerwinkel RPC, Kristensen M, Woerdman JP. Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phase plate. *Opt. Commun.* 1994; 112(321). [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(94\)90638-6](https://doi.org/10.1016/0030-4018(94)90638-6)
25. Kotlyar VV, Kovalev AA. Nonparaxial propagation of a Gaussian optical vortex with initial radial polarization. *J. Opt. Soc. Am. A*. 2010; 27(372). <https://doi.org/10.1364/JOSAA.27.000372>
26. Gu B, Cui Y. Nonparaxial and paraxial focusing of azimuthal-variant vector beams. *Opt. Express*. 2012; 20: 17684. <https://doi.org/10.1364/OE.20.017684>
27. Zhang Y, Wang L, Zheng C. Vector propagation of radially polarized Gaussian beams diffracted by an axicon. *J. Opt. Soc. Am. A*. 2005; 22(2542). <https://doi.org/10.1364/JOSAA.22.002542>
28. Gurin OV, Degtyarev AV, Maslov VA, Svich VA, Tkachenko VM, Topkov AN. Selection of transverse modes in laser cavities containing waveguides and open parts. *Quantum Electron.* 2001; 31(346). <https://doi.org/10.1070/QE2001v031n04ABEH001949>
29. Nye JF, Berry MV. Dislocations in wave trains. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. 1974; 336(165). <https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0012>

30. Gurin OV, Degtyarev AV, Dubinin MM, Legenkiy MN, Maslov VA, Muntean KI, Ryabykh VN, Senyuta VS. Formation of beams with nonuniform polarisation of radiation in a cw waveguide terahertz laser. Quantum Electron. 2021; 51(338). <https://doi.org/10.1070/QEL17511>
31. Degtyarev AV, Dubinin MM, Gurin OV, Maslov VA, Muntean KI, Ryabykh VM, Senyuta VS, Svystunov OO. Control over higher-order transverse modes in a waveguide-based quasi-optical resonator. Radio Physics and Radio Astronomy. 2022; 27(129). <https://doi.org/10.15407/rpra27.02.129>

Стаття надійшла до редакції: 1 березня 2024 р.

Рекомендовано до друку: 4 квітня 2024 р.

PROPAGATION OF VORTEX LASER BEAMS OF A METAL RESONATOR

A. V. Degtyarev, M. M. Dubinin, V. A. Maslov, K. I. Muntean, O. O. Svystunov

V. N. Karazin Kharkiv National University, 4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, Ukraine

Background: The problem of radiation propagation of vortex laser beams of a metal waveguide laser is considered. The results of the propagation of such beams have a wide range of potential applications, from imaging and spectroscopy to communication, sensing, biomedicine, and solving problems related to the interaction of electromagnetic waves with matter: diagnostics of thin films, surfaces of materials, various biological objects, as well as astronomy and space research.

The aim of the work is to obtain analytical expressions for the description of non-paraxial mode diffraction of the waveguide metal resonator of a terahertz laser during their interaction with a spiral phase plate and to study the physical features of the obtained vortex beams during their propagation in free space by means of numerical modeling.

Materials and methods: The Rayleigh-Sommerfeld vector theory was used to study the propagation of vortex laser beams in the Fresnel zone, which were excited by the modes of a metal waveguide quasi-optical resonator.

Results: Analytical expressions were obtained to describe the non-paraxial mode diffraction of the metal waveguide resonator of a terahertz laser. Also, with the help of numerical modeling, the physical features of emerging vortex beams during their propagation in free space were investigated.

Conclusion: In free space, the spiral phase plate for the excitation of the TE_{11} mode from the profile with the intensity maximum in the center ($n = 0$) forms an asymmetric ring with two maxima ($n = 1, 2$). For the TE_{01} excitation mode, the initial ring ($n = 0$) structure of the field strength is transformed into a structure with maximum radiation intensity in the center ($n = 1$), and then again into a ring ($n = 2$). The phase front of the beam for the E_y component linearly polarized along the y axis of the TE_{11} mode changes from spherical to helical with one singularity point on the axis. In the phase profile of the transverse components of the TE_{01} azimuthally polarized mode, a section with two and three off-axis points of phase singularities appears.

KEYWORDS: terahertz range, metal quasi-optical resonator, spiral phase plate, laser vortex beams, waveguide modes, vector propagation

The article was received by the editors: March 1 2024

The article is recommended for printing: April 11 2024

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-06>

УДК 621.382.2

О. В. БОЦУЛА, к. ф.-м. наук, доцент

e-mail: oleg.botsula@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-2809-9482>

К. Г. ПРИХОДЬКО, к. ф.-м. наук, доцент

e-mail: kyrylo.prykhodko@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7627-1171>

В. О. ЗОЗУЛЯ, Ph.D., н.с.

e-mail: v.zozulia@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7371-5424>

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
м. Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

ВПЛИВ ТЕМПЕРАТУРИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ШУМОВИХ ДІОДІВ З ГЕТЕРОКАТОДОМ

Актуальність. Створення компактних джерел шуму в широкому діапазоні частот, що здатні підтримувати незмінні в часі та від зовнішніх умов характеристики і формувати еталонні сигнали для вимірювання шумових характеристик підсилювачів та приймачів, є актуальною задачею в галузі телекомунікації та безпеки. Зразком приладів, які здатні задовольнити вимоги до джерел шуму, є діоди з катодним статичним доменом (ДКСД). Важливим фактором, який впливає на характеристики напівпровідникових приладів, є температура та ефект саморозігрівання.

Метою роботи є дослідження впливу температури та саморозігрівання на характеристики ДКСД на основі нітридних сполук, що містять варізонний шар на катоді.

Методи і методологія. Для отримання характеристик діода проводиться числове моделювання процесів переносу заряду в двовимірних напівпровідникових структурах з використанням багаточастинкового методу Монте-Карло. Враховуються всі суттєві механізми розсіяння носіїв заряду. У роботі обчислюються залежності густини струму, що протікає в діоді від величини постійної напруги на ньому, в умовах різної температури, в тому числі з урахуванням генерації тепла в ньому при протіканні електричного струму.

Результати. Отримано залежності густини струму від прикладеної напруги живлення для різних конструкцій ДКСД з варізонним AlGaIn - катодом за умов сталої температури різної величини та з урахуванням ефектів саморозігрівання. Показано, що підвищення температури призводить до зменшення густини струму, що протікає через діод, а ефекти саморозігрівання можуть суттєво обмежити діапазон робочих напруг діода.

Висновки. Продемонстровано вплив температури на роботу діодів на основі AlGaIn з варізонним гетерокатодом. Підвищення температури призводить до обмеження робочих напруг діода і в умовах виникнення ударної іонізації може привести до руйнування діода.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: катодний статичний домен, ефект міждолинного перенесення електронів, молярна частка, варізонний шар, ударна іонізація, розсіяння, числове моделювання.

Як цитувати: Боцула ОВ, Приходько КГ, Зозуля ВО. Вплив температури на характеристики шумових діодів з гетерокатодом. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2024; 40:68-73. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-06>

In cites: Botsula OV, Prykhodko KH, Zozulia VO. The impact of temperature on heterocathode noise diodes characteristics. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 024;40:68-73. (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-06>

ВСТУП

На сьогоднішній день значення терагерцевої електроніки стає все більш очевидним. Терагерцові частоти застосовуються в радіометричних системах, системах, пов'язаних з біологічними дослідженнями, для моніторингу стану об'єктів [1], для отримання тривимірних (3D) ТГц зображень, в ТГц томографії [2-4] та ін. Незважаючи на те, що основними діапазонами частот, що використовуються, все ще є діапазони НВЧ і КВЧ [5,6], очевидною перевагою застосування ТГц є широка доступна смуга пропускання.

Джерела височастотного шуму використовуються як елементи еталонного сигналу при вимірюванні шуму в деяких комплексних приймачах, таких як радари, базові станції, радіометри тощо. Через спектральне положення ТГц діапазону існує проблема розробки ТГц компактних твердотільних джерел, оскільки необхідною вимогою є отримання великої вихідної потужності і можливість

калібрування та налаштування в широкому діапазоні частот. Другою вимогою є незмінність і відтворюваність характеристик шуму в часі і при різних зовнішніх умовах.

Можливими кандидатами для використання на терагерцових частотах можуть бути твердотільні джерела шуму [7-9]. Одним з них є діод з катодним статичним доменом, який запропоновано в [10] як джерело шуму на частотах міліметрового діапазону. Було встановлено, що розмір катодного статичного домена сильно впливає на спектральні властивості діода та виявлено сильну залежність спектральної густини потужності шуму (СГПШ) від прикладеної напруги зміщення. Це явище можна використовувати для кількох корисних застосувань. Одним із них може бути створення активних електронних навантажень (АЕН) для радіометричного калібрування [11].

Особливістю діодів є їх робота в режимі близькому до початку ударної іонізації, що передбачає суттєво великі напруженості електричного поля. Відповідно, виникає питання щодо можливості отримання таких режимів і стабільності роботи діодів в них.

Перспективним варіантом ДКСД є діод з варізонним гетерошаром на катоді, в якому можна досить легко створити умови для виникнення шумової генерації і який досить легко масштабується для роботи в різних частотних діапазонах [12]. Тому метою роботи стало дослідження впливу температури як одного із важливих факторів, що може впливати на роботу діодів.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Розглянуто діодні $n^+ - n^- - n - n^+$ -структури довжиною 1 мкм. В області катодного n^+ -шару і $n^- - n$ -області сформовано варізонний шар $\text{Al}_z\text{Ga}_{(1-z)}\text{N}$, в якому склад напівпровідника змінюється від GaN на катоді до $\text{Al}_z\text{Ga}_{(1-z)}\text{N}$ з різною молярною часткою z , в n^- -області ($z=0.45$, $z=0.12$). Моделювання діода відбувалося за допомогою багаточастинкового методу Монте-Карло. При моделюванні кінетичних процесів в діодах було враховано найважливіші механізми розсіяння носіїв заряду, такі як: розсіяння на деформаційному потенціалі неполярних оптичних та акустичних фононів, полярне оптичне, міждолинне розсіяння, розсіяння на сплаві і домішці та ударна іонізація.

Для опису процесів розігріву в обраних діодах було використано фононну модель [13]. У рамках цієї моделі основним джерелом зміни теплової енергії є оптичні та акустичні фонони, що генеруються або поглинаються у даному одиничному об'ємі матеріалу. Загальна зміна тепла в цьому об'ємі визначається виразом:

$$H = \frac{n}{N_{sim} \Delta t} \sum (\hbar \omega_{ems} - \hbar \omega_{abs}), \quad (1)$$

де: n – концентрація електронів, N_{sim} – кількість мікрочастинок, що моделюються, Δt – часовий крок моделювання, $\hbar \omega_{ems}$ – енергія випромінювання та $\hbar \omega_{abs}$ – енергія поглинання фонона.

Здатність проводити тепло обумовлена середньою довжиною вільного пробігу фонона l_f , яку можна оцінити, використовуючи термічні параметри матеріалу у вигляді:

$$K = \frac{1}{3} C_v v_f l_f, \quad (2)$$

де: K – коефіцієнт теплопровідності, C_v – об'ємна теплоємність, v_f – швидкість фононів.

За нормальних умов середня довжина вільного пробігу фонона для GaN та AlN становить порядку ~ 200- 300 нм [14,15]. Зі збільшенням температури середня довжина вільного пробігу зменшується, що обумовлено збільшенням кількості фононів та частоти їх зіткнень і, відповідно, зниженням переносу енергії.

Такі значення l_f дозволяють знехтувати розмірними ефектами, які пов'язані з розігрівом, у приладах довжиною більшою 100 нм, а термічні властивості розраховувати шляхом розв'язання диференційного рівняння теплопровідності:

$$\nabla \cdot [K \nabla T(r, t)] + H(r, t) = \rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} \quad (3)$$

де: $H(r, t)$ - функція теплових джерел.

У роботі використовується залежність коефіцієнту теплопровідності від температури, яка описується виразом [16,17]:

$$K(T) = K_{300K} \cdot \left(\frac{T}{300K} \right)^{\alpha}. \quad (4)$$

У зв'язку з наявністю шару змінного складу у розглянутих діодах, виникає необхідність визначення коефіцієнту теплопровідності, який залежить від складу z напівпровідника та температури. Залежності параметрів $K_{\text{AlGaIn}}(z)$ і $c_{\text{AlGaIn}}(z)$ визначаються правилом Вегарта та введенням відповідних параметрів нелінійності [16,17]:

$$c_{\text{AlGaIn}}(z) = z \cdot c_{\text{AlN}} + (1 - z) c_{\text{GaN}}, \quad (5)$$

та

$$K_{AlGaN}(z) = \left(\frac{z}{K_{AlN}} + \frac{(1-z)}{k_{GaN}} + \frac{z \cdot (1-z)}{C_{K,AlGaN}} \right)^{-1}, \quad (6)$$

$$\alpha_{AlGaN}(z) = z \cdot \alpha_{AlN} + (1-z) \cdot \alpha_{GaN}, \quad (7)$$

де $C_{K,AlGaN}$ - параметр нелінійності.

При моделюванні температурних залежностей використовувались дані, які наведені в Табл. 1 [16,17].

Таблиця 1. Температурні параметри $Al_zGa_{1-z}N$

Table 1. Temperature parameters $Al_zGa_{1-z}N$

	$K, \text{Вт}/(\text{К}^*\text{м})$	α	$c, \text{Дж}/(\text{кг}^*\text{К})$	$C_{K,AlGaN}, \text{Вт}/(\text{К}^*\text{м})$
GaN	130	-0,43	491	6,95
AlN	285	-1,57	748	

Робота діода досліджувалась як з урахуванням ефекту саморозігрівання, так і без нього в наближенні постійної температури кристалічної решітки. На Рис. 1 зображені залежності коефіцієнту теплопровідності від температури при фіксованій частці AlN у твердому розчині $Al_zGa_{1-z}N$ (Рис.1 (а)) та в залежності від складу z сполуки $Al_zGa_{1-z}N$ при температурі 300 К (Рис.1 (б)).

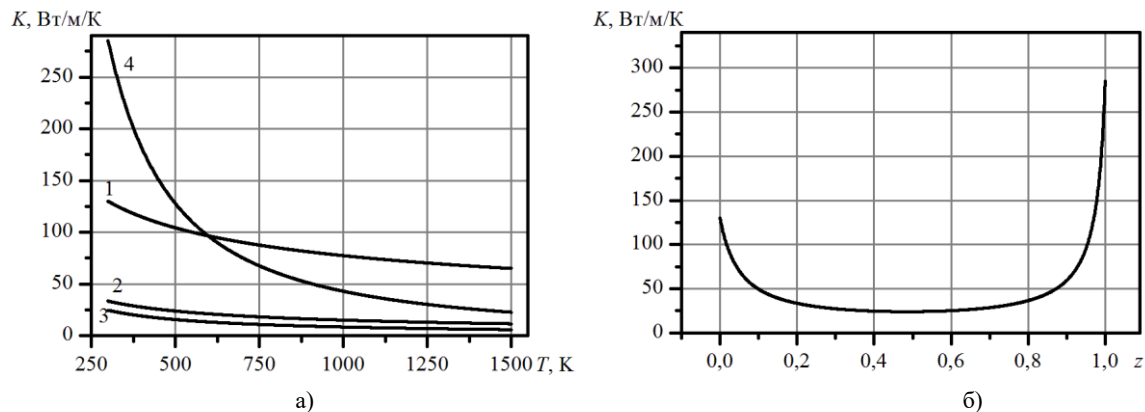


Рис. 1. Залежності коефіцієнту теплопровідності від температури (а), отримані при фіксованих частках AlN z в $Al_zGa_{1-z}N$: 1 – $z=0$; 2 – $z=0,2$; 3 – $z=0,4$; 4 – $z=1$. Залежності коефіцієнту теплопровідності від частки AlN z в $Al_zGa_{1-z}N$ при температурі 300K (б).

Fig. 1. Dependencies of the thermal conductivity coefficient on temperature (a) for fixit contain AlN(z) in $Al_zGa_{1-z}N$: 1 – $z=0$; 2 – $z=0.2$; 3 – $z=0.4$; 4 – $z=1$. Dependencies of the thermal conductivity coefficient on the contain AlN(z) in $Al_zGa_{1-z}N$ at a temperature of 300K (b).

З Рис. 1 видно, що з ростом температури коефіцієнт теплопровідності матеріалу суттєво знижується. В розглянутому температурному діапазоні для GaN коефіцієнт теплопровідності зменшується вдвічі (крива 1 на Рис 1 (а)), а для AlN більше, ніж в шість разів (крива 4 на Рис 1 (а)). Варто відзначити, що коефіцієнт теплопровідності для потрійних $Al_zGa_{1-z}N$ сполук менший, ніж для подвійних (Рис 1 (б)). Це свідчить про можливе зменшення інтенсивності теплової передачі, що може вплинути на теплові властивості варізонних шарів.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ДІОДІВ

Отримані в результаті моделювання характерні розподіли напруженості електричного поля та температури показані на Рис. 2. Вони відповідають постійній напрузі живлення 25 В, яка прикладена до діода довжиною 1 мкм, що містить варізонний шар GaN- $Al_{0,45}Ga_{0,55}N$.

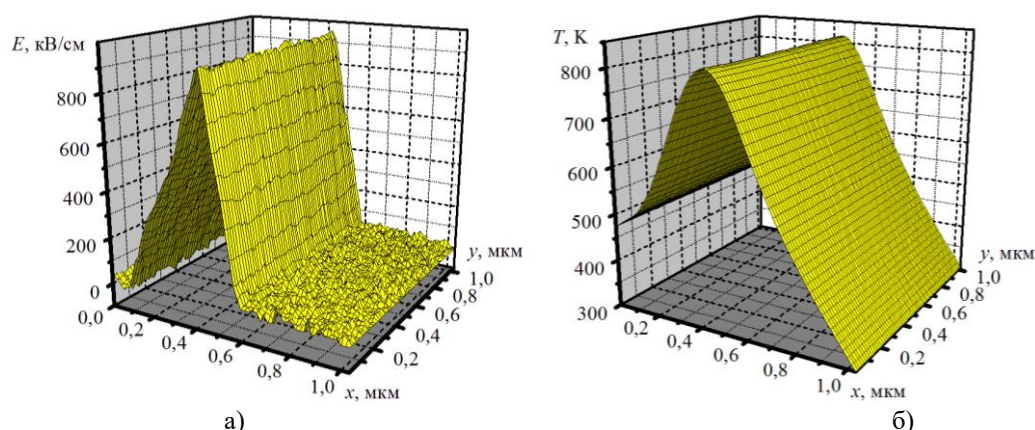


Рис. 2. Розподіл напруженості електричного поля (а) та температури (б) в діоді з варізонним шаром GaN- Al_{0,45}Ga_{0,55}N.
Fig. 2. Distribution of electric field strength (a) and temperature (b) in a diode with GaN- Al_{0,45}Ga_{0,55}N- graded-band layer.

З Рис. 2 (а) та Рис. 2 (б) видно, що максимальна температура відповідає області з максимальною напруженістю електричного поля, проте її положення дещо зміщене відносно області максимального поля на величину, близьку до довжини вільного пробігу носіїв (електронів). Саме в області високого поля носії заряду отримують додаткову кінетичну енергію, що передається кристалічній решітці. Зростання енергії носіїв збільшує імовірність їх розсіювання та збільшення кількості актів розсіювання на фонах, що призводить до локального підвищення температури кристалічної решітки. Наслідком цього є зниження рухливості носіїв заряду і, відповідно, зменшення величини струму, що протікає через діод. Розподіл потенціальної енергії в діоді і кінетичної енергії частинок, а також залежності густини струму від напруги за умови постійної температури діода та з урахуванням процесів саморозігрівання показані на Рис. 3.

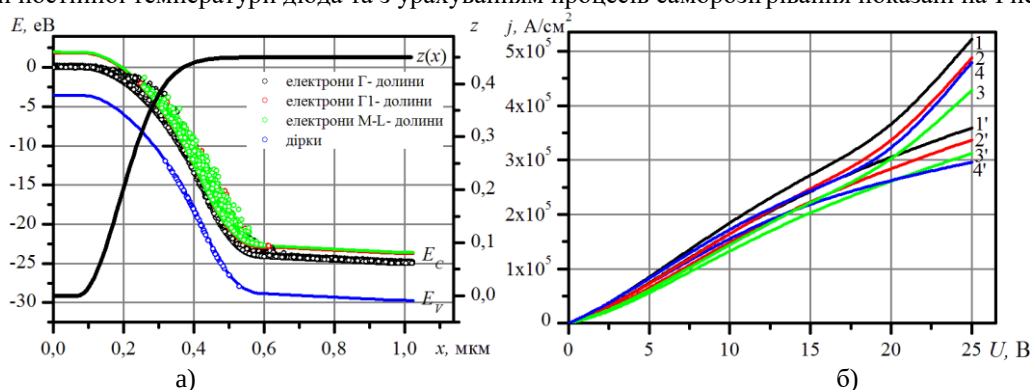


Рис. 3. Енергетична діаграма та розподіл молярної частки z а). Залежності густини струму від прикладеної напруги б): при фіксованих температурах кристалічної решітки 1, 1' – 300 K, 2, 2' – 400 K, 3, 3' – 500 K та 4, 4' – за температури 300 K з урахуванням процесу саморозігрівання для діода з варізонним шаром GaN- Al_{0,12}Ga_{0,88}N – 1-4, та GaN- Al_{0,45}Ga_{0,55}N – 1'-4'.

Fig. 3. Energy diagram and distribution of molar fraction z a). Dependencies of the current density on the applied voltage b): at fixed crystal lattice temperatures of 1, 1' – 300 K, 2, 2' – 400 K, 3, 3' – 500 K, and 4, 4' – at a temperature of 300 K obtaining with account the self-heating process for diode based on graded layer GaN- Al_{0,12}Ga_{0,88}N – 1-4 and GaN- Al_{0,45}Ga_{0,55}N – 1'-4'.

В умовах постійної високої температури в діоді спостерігається зменшення величини густини струму. Воно є найбільш суттєвим в області високих напруг, на ділянці насичення струму, що відповідає утворенню домену сильного поля на катоді. Характеристики діодів, які було отримано з урахуванням ефектів саморозігрівання мають схожу поведінку: спостерігається зменшення величини струму, яке виражене при великих напругах на діоді. Важливим моментом є суттєва неоднорідність розподілу температури, яка посилюється в момент виникнення ударної іонізації в ньому.

На Рис. 4 наведено залежності величини максимальної напруженості електричного поля та максимальної температури від постійної напруги, що прикладена до діода. Отримані величини відповідають станам, що сформувалися за час 12 нс від початку ввімкнення постійної напруги. Можна побачити, що температура в області домену може досягати величини більшої 800 K за умови високої напруги на діоді і початку розвитку ударної іонізації в ньому.

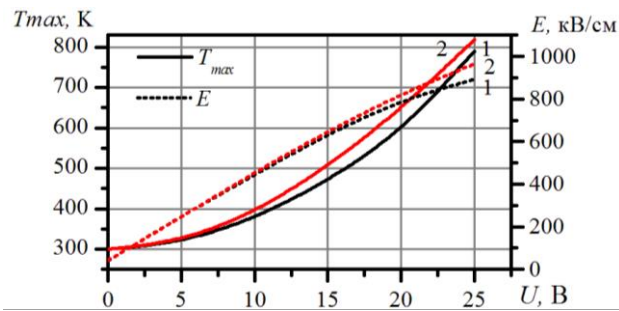


Рис. 4. Залежності максимальної температури та електричного поля від напруги в діоді з варізонним шаром: 1) GaN-Al_{0,12}Ga_{0,88}N; 2) GaN-Al_{0,45}Ga_{0,55}N.

Fig. 4. Dependencies of maximal temperature and electric field on applied voltage in a diode with graded-band layer: GaN-Al_{0,12}Ga_{0,88}N; 2) GaN-Al_{0,45}Ga_{0,55}N.

Слід зазначити, що отримані величини температури є критичними для роботи діодів. Для гетероструктур на основі GaN/AlGaIn найбільш поширеними є сплавні контакти на основі металічних шарів Ti/Al/X/Au, де X може бути Pt, Ni, Mo, та подібні до них [18,19]. Незважаючи на відмінні теплові властивості нітридів, температури, за яких відбувається формування контактів до діодів на їх основі, лежать в діапазоні 500 – 900°C, і підвищення температури на контактах вище вказаних значень може призвести до порушення їх стабільності та руйнування.

Отже, відповідно до отриманих результатів можна стверджувати про важливість врахування температурних ефектів, особливо, ефектів саморозігрівання, при конструюванні діодів з катодним доменом та їх суттєвий вплив на характеристики шумових діодів, навіть якщо мова йде про такі температурно стійкі матеріали як GaN і AlGaIn.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Основні результати зводяться до наступного:

1. У шумових діодах на основі AlGaIn, що містять варізонний гетеро катод, підвищення температури призводить до деградації характеристик – зменшення струму, що протікає через діод.
2. Аналіз ефекту саморозігрівання в діоді показує, що в умовах існування ударної іонізації у варізонному катодному шарі відбувається локальний розігрів діода до температур вищих 800 K, який може привести до його руйнування.
3. Врахування саморозігрівання повинно стати обов'язковим компонентом аналізу діодів, що містять стаціонарні області сильного поля і працюють в режимі ударної іонізації, не виключаючи діоди на основі нітридних сполук з розмірами порядку 1 мкм.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

REFERENCES

1. Crandall JP, O JH, Gajwani P, et al. Measurement of Brown Adipose Tissue Activity Using Microwave Radiometry and F-FDG PET/CT. *Journal of Nuclear Medicine*. 2018 Aug; 59(8): 1243–1248.
2. Song HJ, Tadao Nagatsuma. *Handbook of Terahertz Technologies*. CRC Press; 2015.
3. Isogawa T, Kumashiro T, Song HJ, Ajito K, Kukutsu N, Iwatsuki K, et al. Tomographic Imaging Using Photonically Generated Low-Coherence Terahertz Noise Sources. *IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology*. 2012 Sep;2(5): 485–492.
4. Chan WL, Deibel J, Mittleman DM. Imaging with terahertz radiation. *Reports on Progress in Physics*. 2007 Jul 12;70(8): 1325–1379.
5. Price DC, Greenhill LJ, Fialkov A, et al. Design and characterization of the Large-aperture Experiment to Detect the Dark Age (LEDA) radiometer systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2018 May; 478(3): 4193–4213.
6. Parashare CR, Kangaslahti PP, Brown ST, et al. Noise sources for internal calibration of millimeter-wave radiometers. 13th Specialist Meeting On Microwave Radiometry and Remote Sensing of the Environment (Microrad). 2014 Mar.
7. Ehsan N, Piepmeier J, Solly M, Macmurphy S, Lucey J, Wollack E. A robust waveguide millimeter-wave noise source. 2015 European Microwave Conference (EuMC). 2015 Sep 7.
8. Dunleavy L, Smith M, Lardizabal S, Fejzuli A, Roeder R. Design and characterization of fet based cold/hot noise sources. *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*. 1997 Jun 8.
9. Kantanen M, Weissbrodt E, Varis J, et al. Active cold load MMICs for Ka-, V-, and W-bands. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*. 2015 Jun, 9(8): 742–747.

10. Prokhorov ED, Botsula OV, Dyadchenko AV, Gorbunov IA. Monte Carlo simulation of diode with cathode static domain. 2013 23rd Int. Crimean Conference “Microwave & Telecommunication Technology” (CriMiCo). 2013 Sep 8.
11. Storozhenko IP. Static domain in a transferred-electron device based on graded-gap AlGaAs. Telecommunications and Radio Engineering. 2016; 75(12): 1101–1111.
12. Botsula O, Prykhodko K, Zozulia V. Modeling of Planar 2D/3D Semiconductor Heterostructures Based on MoS₂/GaN Junction. 2022 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW). 2022 Nov 14.
13. Fan A, Tarau C, Bonner R, Palacios T, Kaviani M. 2-D simulation of hot electron-phonon interactions in a submicron gallium nitride device using hydrodynamic transport approach. ASME 2012 Summer Heat Transfer Conference (HT2012). 2012 Jul 8.
14. Xu RL, Rojo MM, Islam SM, et. al. Thermal conductivity of crystalline AlN and the influence of atomic-scale defects. Journal of Applied Physics. 2019 Nov, 126: 185105-1–185105-6.
15. Tran DQ, Delgado-Carrascon R, Muth JF, et.al. Phonon-boundary scattering and thermal transport in Al_xGa_{1-x}N: Effect of layer thickness. Applied Physics Letters. 2021 Jan. 117: 252102-1–252102-5.
16. Adachi S. Properties of semiconductor alloys: Group-IV, III-V and II-VI Semiconductors. John Wiley & Sons; 2009.
17. Quay R. Gallium Nitride Electronics. Springer; 2008.
18. Malmros A, Blanck H, Rorsman N. Electrical properties, microstructure, and thermal stability of Ta-based ohmic contacts annealed at low temperature for GaN HEMTs. Semiconductor Science and Technology. 2011 Mar; 26(7): 075006-1–075006-7.
19. Li Q, Zhou Q, Gao S, Liu X, Wang H. Ti/Al/Ti/TiW Au-free low temperature ohmic contacts for un-doped AlGaIn/GaN HEMTs. Solid-State Electronics. 2018 Sep; 147: 1–5.

Стаття надійшла до редакції: 6 березня 2024 р.

Рекомендовано до друку: 11 квітня 2024 р.

THE IMPACT OF TEMPERATURE ON HETEROCATHODE NOISE DIODES CHARACTERISTICS

O. V. Botsula, K. H. Prykhodko, V. O. Zozulia

V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

Background. The creation of compact noise sources in a wide frequency range, capable of invariance and reproducibility characteristics over time and external conditions, is an urgent task in the telecommunications and security field, in particular, as reference signal sources for measuring the noise characteristics of amplifiers and receivers. One of the devices that can satisfy the requirements for noise sources are diodes with a cathode static domain (DCSD). An important factor that affects the characteristics of semiconductor devices is temperature and self-heating.

Purpose of Work. The aim of the work is to study the effect of temperature and self-heating on the characteristics of DCSDs containing a graded-band layer based on nitride compounds.

Techniques and Methodology. Diode characteristics are obtained by numerical modeling of carrier transfer processes in two-dimensional semiconductor structures using the ensemble Monte Carlo method. Substantial mechanisms of scattering of charge carriers are taken into account. The work calculates the dependences of the current density on different values of the constant bias voltage on the diode and on different temperatures with and without taking into account heating. The phonon model was used to describe the heating processes in the selected diodes.

Results. The dependences of the current density on the applied supply voltage were obtained for various DCSD diodes with a graded band AlGaIn cathode under the conditions of a different constant temperature and taking into account the effect of self-heating. It is shown that an increase in temperature leads to a decrease in the diode current density. The self-heating effect is shown can significantly limit the operating voltage range of the diode.

Conclusions: The effect of temperature on the operation of diodes based on AlGaIn with a graded gap heterocathode is demonstrated. An increase in temperature leads to a limitation of the working voltages of the diode and, under the conditions of impact ionization, can lead to the destruction of the diode.

KEY WORDS: static cathode domain, transferred electron effect, molar fraction, graded gap, impact ionization, scattering, numerical simulation.

The article was received by the editors: March 6 2024.

The article is recommended for printing: April 11 2024

Наукове видання

ВІСНИК ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
імені В.Н. Каразіна

Серія
“Радіофізика та електроніка”

Випуск 40

Збірник наукових праць
Українською та англійською мовами

Підписано до друку 24.06. 2024. Формат 60х84/8.
Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 6,97. Обл.-вид. арк. 8,7. Наклад 50 пр. Зам.№ 66/24.

61022, Харків, майдан Свободи, 4,
Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна.
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.2009.