

УДК 537.86

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО МАГНИТОФОТОННОГО  
КРИСТАЛЛА С ФЕРРИТОВЫМ СЛОЕМА. А. Шматько<sup>1</sup>, В. Н. Мизерник<sup>1,2</sup>, Е. Н. Одаренко<sup>1,3</sup>, А. Ю. Галенко<sup>1</sup><sup>1</sup>Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 4,  
e-mail: alexandr.a.shmatko@univer.kharkov.ua<sup>2</sup>Научный физико-технологический центр, 61077, Харьков, пл. Свободы, 2,<sup>3</sup>Харьковский национальный университет радиозлектроники, 61166, Харьков, пр. Науки, 14

Поступила в редакцию 3 июня 2016 г.

В работе получено в аналитическом виде дисперсионное уравнение для магнитофотонного одномерного кристалла с гиротропным ферритовым слоем. Проведен анализ численных результатов расчета дисперсионных характеристик кристалла для различных параметров эффективной магнитной проницаемости ферритового слоя. Показано существование объемных быстрых и медленных волн в такой структуре. Установлено наличие полос пропускания и запираения на дисперсионной диаграмме в области поверхностных плазменных волн.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** магнитофотонные одномерные кристаллы, гиромангнитные среды, феррит с поперечным магнитным полем, дисперсионные характеристики, полосы пропускания и запираения.

У роботі отримано в аналітичному вигляді дисперсійне рівняння для магнітофотонного одновимірного кристалу з гіротропним феритовим шаром. Проведено аналіз чисельних результатів розрахунку дисперсійних характеристик кристалу для різних параметрів ефективною магнітної проникності феритового шару. Показано існування об'ємних швидких і повільних хвиль у такій структурі. Встановлено наявність смуг пропускання й запирання на дисперсійній діаграмі в області поверхневих плазмових хвиль.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** магнітофотонні одновимірні кристали, гиромангнітні середовища, ферит з поперечним магнітним полем, дисперсійні характеристики, смуги пропускання й запирання.

In this work we obtain the dispersion relation for magnetophotonic one-dimensional crystal with a gyrotropic ferrite layer in the analytical form. The numerical analysis of the dispersion relation for waves in the crystal at different parameters of the effective permeability of the ferrite layer is carried out. We predict the propagation of bulk fast and slow waves in such structures. The transmission and forbidden bands in the dispersion diagram for the bulk waves are presented in the area of surface ferrite waves.

**KEY WORDS:** magnetophotonic one-dimensional crystals; gyrotropic media; ferrite with transversal magnetic field; dispersion characteristics; transmission and forbidden bands.

## ВВЕДЕНИЕ

Фотонные кристаллы получили широкое распространение в технике терагерцового, микроволнового и оптического диапазонов. Особенности распространения электромагнитных полей в одномерных фотонно-кристаллических структурах определяются геометрическими размерами слоев и зависимостью их материальных параметров от частоты. Свойства структур с изотропными слоями достаточно хорошо изучены на основе решения дисперсионных уравнений как для ТЕ, так и для ТМ волн [1, 2]. К числу наиболее перспективных применений относятся магнитофотонные кристаллы при наличии гиротропии одного из слоев структуры. Наличие гиротропного слоя позволяет относительно просто за счет приложенного магнитного поля изменять значения материальных параметров среды и, в конечном счете, управлять электрическим способом характеристиками распространения волн. Для таких структур отсутствуют аналитические дисперсионные уравнения, позволяющие исследовать основные их свойства в зависимости от направления приложенного магнитного поля в гиромангнитных средах наблюдаются различные эффекты: эффект Фарадея, магнитное двулучепреломление, вращение плоскости поляризации, взаимные явления для прямых и обратных волн, наличие поверхностных волн. При наличии гиротропии материальные параметры являются тензорными величинами. Это приводит к усложнению анализа закономерностей распространения электромагнитных волн в магнитофотонных кристаллах.

В данной работе рассматривается одномерный магнитофотонный кристалл с внешним поперечным магнитным полем  $\vec{H}_0 = \vec{z}_0 H_0$ . Один слой на периоде структуры представляет собой феррит, магнитная проницаемость которого является тензором, а второй слой – изотропный магнитодиэлектрик. Получим дисперсионное уравнение, определяющее основные свойства распространения ТЕ волн в таких магнитофотонных одномерных кристаллах.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЕ**

Будем рассматривать распространение волн в стратифицированной двухслойной периодической структуре с гиротропным слоем (в одномерном магнитофотонном кристалле) (рис. 1). Один из слоев на периоде структуры  $\Lambda = a + b$  является магнитоэлектриком с материальными параметрами  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и шириной слоя  $b$ , а другой – представляет собой гиротропную ферритовую среду с материальными параметрами  $\mu_g$ ,  $\tilde{\varepsilon}_g$  и шириной слоя  $a$ , где эффективная магнитная проницаемость феррита  $\tilde{\mu}$  - тензор стандартного типа [3] (магнитное поле  $\vec{H}_0$  направлено вдоль оси  $Oz$ ).

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_g & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Известно [3], что при наличии гиромагнитной среды в двумерном случае  $\left(\frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$  в среде существует два независимых типа волн –  $H_z$  и  $E_z$ . Решение для  $H_z$  типа волн ничем не отличается от случая одномерного фотонного кристалла из диэлектрических слоев [2]. Поэтому ограничимся рассмотрением  $E_z$  поляризации. Уравнение Гельмгольца для выбранной поляризации (ТЕ волны) имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 \mu_{\perp} \varepsilon_g E_z = 0 \tag{2}$$

где  $\mu_{\perp} = \mu_g \left(1 - \frac{\mu_a^2}{\mu_g^2}\right)$  – эффективная магнитная проницаемость феррита,  $\varepsilon_g$  – диэлектрическая проницаемость феррита. Из уравнений Максвелла следует связь между тангенциальной компонентой напряженности магнитного поля  $H_y$  и электрической компонентой поля  $E_z$ , а именно:

$$H_y = \left(\frac{1}{-ik\mu_{\perp}}\right) \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} + i\frac{\mu_a}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y}\right), \tag{3}$$

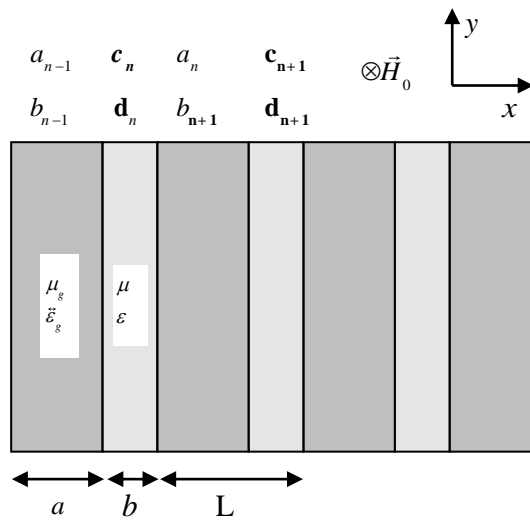


Рис. 1. Модель двухслойного магнитофотонного кристалла

Решение уравнения Гельмгольца (2) для двух слоев периодической структуры представим в виде:

$$\begin{aligned} E_z^{(1)}(x, y) &= \left( a_n e^{i\xi_1(x-n\Lambda)} + b_n e^{-i\xi_1(x-n\Lambda)} \right) e^{i\beta y}, & b < x - n\Lambda < \Lambda \\ H_y^{(1)}(x, y) &= \frac{1}{-k\mu_\perp} \left( a_n \left( \xi_1 + i \frac{\mu_a}{\mu_g} \beta \right) e^{i\xi_1(x-n\Lambda)} - b_n \left( \xi_1 - i \frac{\mu_a}{\mu_g} \beta \right) e^{-i\xi_1(x-n\Lambda)} \right) e^{i\beta y}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} E_z^{(2)}(x, y) &= \left( c_n e^{i\xi_2(x-n\Lambda)} + d_n e^{-i\xi_2(x-n\Lambda)} \right) e^{i\beta y}, & 0 < x - n\Lambda < b \\ H_y^{(2)}(x, y) &= \frac{\xi_2}{k\mu} \left( a_n e^{i\xi_2(x-n\Lambda)} - b_n e^{-i\xi_2(x-n\Lambda)} \right) e^{i\beta y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $n$  – номер ячейки периодической структуры,  $\xi_1 = \sqrt{k^2 \mu_\perp \varepsilon_g - \beta^2}$  и  $\xi_2 = \sqrt{k^2 \varepsilon \mu - \beta^2}$  – поперечные волновые числа в слоях в направлении оси  $Ox$ ,  $\beta$  – продольное волновое число вдоль слоев магнитофотонного кристалла,  $a_n, b_n, c_n, d_n$  – неизвестные амплитуды волн в слоях. Для получения дисперсионного уравнения необходимо воспользоваться граничными условиями на границах раздела слоев, а также теоремой Блоха-Флоке для периодической структуры. Воспользуемся граничными условиями на поверхностях раздела  $x - n\Lambda = 0$  и  $x - n\Lambda = b$ . Тогда получим с учетом (3)-(5):

$$(a_{n-1} + b_{n-1}) = (c_n e^{-i\xi_2 \Lambda} + d_n e^{i\xi_2 \Lambda}), \quad (6)$$

$$\frac{1}{\mu_\perp} \left[ \left( \xi_1 + i \frac{\mu_a}{\mu_g} \beta \right) a_{n-1} - \left( \xi_1 - i \frac{\mu_a}{\mu_g} \beta \right) b_{n-1} \right] = \frac{1}{\mu_2} \xi_2 (c_n e^{-i\xi_2 \Lambda} - d_n e^{i\xi_2 \Lambda}), \quad (7)$$

$$c_n e^{-i\xi_2 a} + d_n e^{i\xi_2 a} = a_n e^{-i\xi_1 a} + b_n e^{i\xi_1 a}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \xi_2 (c_n e^{-i\xi_2 a} - d_n e^{i\xi_2 a}) = \frac{1}{\mu_\perp} \left[ \left( \xi_1 + i \frac{\mu_a}{\mu_g} \beta \right) a_n e^{-i\xi_2 a} - \left( \xi_1 - i \frac{\mu_a}{\mu_g} \beta \right) b_n e^{i\xi_2 a} \right]. \quad (9)$$

Эти четыре уравнения запишем в виде двух матричных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\mu_\perp} \left( \xi_1 + i \frac{\mu_a}{\mu_g} \beta \right) & -\frac{1}{\mu_\perp} \left( \xi_1 - i \frac{\mu_a}{\mu_g} \beta \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\xi_2 \Lambda} & e^{i\xi_2 \Lambda} \\ \frac{1}{\mu_2} \xi_2 e^{-i\xi_2 \Lambda} & -\frac{1}{\mu_2} \xi_2 e^{i\xi_2 \Lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} e^{-i\xi_2 a} & e^{i\xi_2 a} \\ \frac{1}{\mu_2} \xi_2 e^{-i\xi_2 a} & \frac{1}{\mu_2} \xi_2 e^{i\xi_2 a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\xi_1 a} & e^{i\xi_1 a} \\ \frac{1}{\mu_\perp} \left( \xi_1 + i \frac{\mu_a}{\mu_g} \beta \right) e^{-i\xi_2 a} & -\frac{1}{\mu_\perp} \left( \xi_1 - i \frac{\mu_a}{\mu_g} \beta \right) e^{i\xi_2 a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

Используя свойства матриц (обращение и перемножение матриц), получим из представленных матричных уравнений одно матричное уравнение относительно неизвестных коэффициентов  $a_n, b_n$ :

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В этом уравнении элементы матрицы передачи  $A, B, C, D$  имеют следующий вид:

$$A = e^{-i\xi_1 a} \left\{ \cos \xi_2 b - i \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_{\perp}} \left[ \frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi_2}{\xi_1} \left( \frac{\mu_{\perp}}{\mu} \right)^2 + \left( \frac{\beta^2}{\xi_1 \xi_2} \right) \left( \frac{\mu_a}{\mu_g} \right)^2 \right] \sin \xi_2 b \right\}, \quad (13)$$

$$B = i e^{i\xi_1 a} \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_{\perp}} \left[ \frac{\xi_1}{\xi_2} - \frac{\xi_2}{\xi_1} \left( \frac{\mu_{\perp}}{\mu} \right)^2 - 2i \frac{\mu_a}{\mu_g} \frac{\beta}{\xi_2} \right] \sin \xi_2 b, \quad (13a)$$

$$D = A^*, \quad C = B^*. \quad (14)$$

Легко показать, что матрица передачи является унимодулярной:  $AD - BC = 1$ . Отметим, что в случае обычной диэлектрической структуры выражения (13), (14) переходят в известные [1, 2].

Используя свойство унимодулярности для матрицы передачи из уравнения (12), и применяя его последовательно  $n$  раз, получим:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-n} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Для получения дисперсионного уравнения воспользуемся формулой Блоха-Флоке для представления полей в периодических структурах, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = e^{iK\Lambda} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где  $K$  – блоховское волновое число вдоль направления периодичности (ось  $Ox$ ).

Используя (12) и (16), получим следующее уравнение для собственных значений матрицы:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = e^{-iK\Lambda} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Отсюда следует, что величина  $e^{-iK\Lambda}$  является собственным значением матрицы передачи  $ABCD$  и удовлетворяет характеристическому матричному уравнению:

$$\begin{pmatrix} A - e^{-iK\Lambda} & B \\ C & D - e^{-iK\Lambda} \end{pmatrix} = 0, \quad (18)$$

решение которого имеет вид:

$$e^{-iK\Lambda} = \frac{1}{2} (A + D) \pm \left\{ \left[ \frac{1}{2} (A + D) \right]^2 - 1 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

$$A + D = 2 \cos \xi_1 a \cos \xi_2 b - \frac{\mu}{\mu_{\perp}} \left[ \frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi_2}{\xi_1} \left( \frac{\mu_{\perp}}{\mu} \right)^2 + \left( \frac{\beta^2}{\xi_1 \xi_2} \right) \left( \frac{\mu_a}{\mu_g} \right)^2 \right] \sin \xi_1 a \sin \xi_2 b.$$

Два собственных значения характеристического уравнения являются взаимно обратными ввиду унимодулярности матрицы передачи. Собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям (амплитуды  $a_n$ ,  $b_n$  в  $n$ -й ячейке периодической структуры), определяются с точностью до постоянного множителя из выражения:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = e^{inK\Lambda} \begin{pmatrix} B \\ e^{-iK\Lambda} - A \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Из уравнения (19) можно получить прямую формулу для вычисления блоховского волнового числа  $K(k, \beta)$  при произвольных параметрах задачи, а именно:

$$K(k, \beta) = \frac{1}{\Lambda} \arccos \left\{ \cos \xi_1 a \cos \xi_2 b - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_{\perp}} \left[ \frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi_2}{\xi_1} \left( \frac{\mu_{\perp}}{\mu} \right)^2 + \left( \frac{\beta^2}{\xi_1 \xi_2} \right) \left( \frac{\mu_a}{\mu_g} \right)^2 \right] \sin \xi_1 a \sin \xi_2 b \right\}. \quad (21)$$

Заметим, что в отсутствии гиротропии среды ( $\mu_a = 0$ ), уравнение (21) переходит в известное уравнение для двухслойной периодической структуры [1, 2].

### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Анализ дисперсионного соотношения (21) показывает, что существует два типа волн в рассматриваемой периодической структуре в зависимости от знака эффективной магнитной проницаемости  $\mu_{\perp}$  ферритового слоя в магнитофотонном кристалле. Если величина  $\mu_{\perp} > 0$ , то в фотонном кристалле для распространяющихся волн существует несколько полос пропускания и запираения. Количество этих полос зависит от диэлектрических и магнитных проницаемостей каждого из слоев. Наличие гиротропии в одном из слоев ( $\mu_a \neq 0$ ) приводит к тому, что можно управлять шириной этих полос, их местоположением и количеством в заданном диапазоне частот и волновых чисел. Для случая  $\mu_{\perp} > 0$  существует два вида дисперсии, которые соответствуют быстрым и медленным волнам относительно скорости света  $c$  в среде. Быстрые волны находятся в области  $k^2 \varepsilon \mu > \beta^2$  и  $k^2 \varepsilon_g \mu_{\perp} > \beta^2$  для соответствующего слоя, а медленные, когда эти условия противоположных знаков. Возможны различные комбинации этих режимов.

Если параметры гиротропного слоя таковы, что величина эффективной магнитной проницаемости  $\mu_{\perp} < 0$ , то существует замедленная поверхностная ферритовая волна, распространяющаяся вдоль границы раздела двух соседних слоев кристалла и затухает вдоль периодичности кристалла. Отметим также еще одну особенность. Из решения дисперсионного уравнения (21) и вида пространственного распределения полей (4), (5) следует, что прямая ( $\beta = +\text{Re}|\beta|$ ) и обратная ( $\beta = -\text{Re}|\beta|$ ) волны, распространяющиеся вдоль слоев (вдоль оси  $Oy$ ), имеют одинаковую скорость распространения, но разную поперечную структуру полей (вдоль оси  $Ox$ ). Как видно из вида величин для поперечных волновых чисел  $\xi_1 = \sqrt{k^2 \varepsilon_g \mu_{\perp} - \beta^2}$  и  $\xi_2 = \sqrt{k^2 \varepsilon \mu - \beta^2}$  в зависимости от значений материальных параметров слоев и волновых чисел  $k$  и  $\beta$  в слоях могут распространяться как объемные (быстрые), так и поверхностные (медленные) волны в различных комбинациях.

### ВЫВОДЫ

В работе решена задача на собственные волны одномерного магнитофотонного кристалла с анизотропным гиромангнитным ферритовым слоем. Получены в аналитическом виде элементы матрицы передачи с учетом анизотропии ферритового слоя. Проведен анализ дисперсионных свойств таких структур в зависимости от материальных параметров слоев. Установлено существование полос пропускания и запираения для распространяющихся волн в зависимости от материальных параметров слоев структуры с учетом гиротропии. Обнаружено для отрицательной магнитной проницаемости ферритового слоя существование полос пропускания для поверхностной ферритовой волны и выяснена зависимость ее ширины от параметра гиротропии ферритового слоя.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yariv A., Yeh P. Photonics: Optical Electronics in Modern Communications. – Oxford University press, 2007. – 848 p.
2. Yeh P., Yariv A., Hong C.-S. Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory // J. Opt. Soc. Am. – 1977. – Vol. 67, No. 4. – P. 423-438.
3. Gurevich A. G. Ferrites at Microwave Frequencies. – New York: Consultants Bureau, 1963. – 329 p.