

УДК 621.372

## ФЕРРИТОВИЙ РЕЗОНАТОР В ПРЯМОУГОЛЬНОМУ ВОЛНОВОДЕ С ПОПЕРЕЧНИМ МАГНІТНИМ ПОЛЕМ

А. А. Шматько<sup>1</sup>, В. Н. Мизерник<sup>1, 2, i</sup>, Е. Н. Одаренко<sup>1, 3</sup>

<sup>1</sup> Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 61077, Харків, пл. Свободи, 4,  
E-mail: alexandr.a.shmatko@univer.kharkov.ua

<sup>2</sup> Научний фізико-технологічний центр, 61077, Харків, пл. Свободи, 2,

<sup>3</sup> Kharkiv National University of Radioelectronics, Lenin av., 14, Kharkov, 61166, Ukraine  
phone: (057) 7021057, e-mail: oen@kture.kharkov.ua

Поступила в редакцію 15 мая 2014 г.

Проведен анализ собственных и вынужденных колебаний ферритового резонатора в прямоугольном волноводе с поперечным магнитным полем на основе полученного строгого аналитического решения граничной электродинамической задачи. Установлено существование нескольких режимов колебаний ферритового резонатора: режим на запертых объемных модах и режим на запертых поверхностных модах с вещественными корнями дисперсионного уравнения и режим на вытекающих модах с комплексными корнями дисперсионного уравнения. Для вынужденных колебаний найдены аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения волноводной волны. Показано, что, изменяя величину эффективной магнитной проницаемости феррита за счет магнитного поля, можно обеспечить полное прохождение или отражение волноводной волны в широком частотном диапазоне.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** собственные колебания, дифракция, ферритовый резонатор, запертые моды, формула Лагранжа.

Проведено аналіз власних і вимушених коливань феритового резонатора в прямокутному хвилеводі з поперечним магнітним полем на основі отриманого строгого аналітичного рішення граничної електродинамічної задачі. Встановлено існування декількох режимів коливань феритового резонатора: режим на замкнених об'ємних модах і режим на замкнених поверхневих модах з реальними значеннями корнів дисперсійного рівняння й режим на витікаючих модах з комплексними значеннями корнів дисперсійного рівняння. Для вимушених коливань знайдені аналітичні вирази для коефіцієнтів відбиття й проходження хвилеводної хвилі. Показано, що змінюючи величину ефективної магнітної проникності ферита за рахунок магнітного поля, можна забезпечити повне проходження або відбиття хвилеводної хвилі в широкому частотному діапазоні.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** власні коливання, дифракція, феритовий резонатор, замкнені моді, формула Лагранжа.

The analysis natural and forced oscillations of the ferrite resonator in a rectangular wave guide with a traversal magnetic field on the basis of the gained rigorous analytical solution of a boundary electrodynamic problem is lead. Existence of several modes of oscillations of the ferrite resonator is erected: a mode on the ungated volumetric modes and a mode on the ungated surface modes with material roots of the dispersion equation and a mode on leaking modes with complex roots of the dispersion equation. For forced oscillations analytical expressions for reflectivities and passage waveguide waves are found. It is shown, that changing quantity of an effective magnetic conductivity of ferrite due to a magnetic field it is possible to provide the full passage or reflection waveguided waves in frequency broadband.

**KEYWORDS:** own modes, diffraction, the ferrite resonator, trapped modes, formule Lagrange

### ВВЕДЕНИЕ

Ферритовые резонаторы довольно широко используются в пассивных и активных приборах микроволнового та терагерцового диапазонов волн для электрического управления их выходными характеристиками. К числу вазовых элементов приборов относится наиболее его простой вид прямоугольного резонатора, помещенного в прямоугольный волновод с поперечным магнитным полем. Такая конструкция может выполнять роль управляемого фильтра частот и использоваться, например, в качестве волноводного окна активных приборов электроники. Естественно, для полного понимания физики процессов в таком микроволновом устройстве необходимо решение соответствующей электродинамической задачи на собственные или вынужденные колебания такого устройства. До последнего времени начиная с работы Эпштейна [1] при расчете таких резонаторов использовались, как правило, численные методы [2], [3] на основе систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье-разложения полей в методе частичных областей. Аналитическое решение было получено в приближении одной волны. В работах [4], [5] предложено новый подход для

нахождения аналитического решения граничной задачи на основе теории целых аналитических функций, теории вычетов и интерполяционной формулы Лагранжа. В результате применения такого подхода удалось решить аналитически систему линейных алгебраических уравнений в замкнутом виде для произвольных параметров задачи и найти в аналитическом виде дисперсионное уравнение для нахождения собственных режимов ферритового резонатора в волноводе, а также получить простые выражения для коэффициентов отражения и прохождения волноводной волны.

### ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассматривается двумерная модель ферритового резонатора (рис. 1). Магнитная проницаемость феррита  $\vec{\mu}$  описывается тензором стандартного типа. Элементы тензора  $\mu$ ,  $\mu_a$  зависят от приложенного магнитного поля  $\vec{H}_0 = \vec{z}_0 H_0$  и частоты сигнала  $\omega$  по известным формулам [6], [7]:

$$\leftrightarrow \mu = \begin{pmatrix} \mu & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \mu = \frac{\omega_H(\omega_H + \omega_M) - \omega^2}{\omega_H^2 + \omega^2}; \mu_a = \frac{\omega\omega_M}{\omega_H^2 - \omega^2}; \omega_M = \gamma 4\pi M_0; \omega_H = \gamma H_0.$$

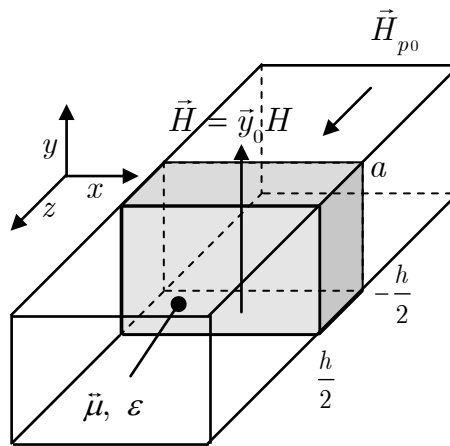


Рис. 1. Ферритовый резонатор в волноводе с поперечным магнитным полем  $\vec{H} = \vec{y}_0 H$

Для нахождения собственных и вынужденных колебаний в ферритовом резонаторе необходимо решить граничную электродинамическую задачу с соответствующими граничными условиями на поверхностях резонатора. При данной конфигурации резонатора с поперечным магнитным полем такая задача сводится к нахождению решения уравнения Гельмгольца относительно компоненты поля  $E_z$ , а именно:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k^2 \varepsilon \mu_{\perp} E_z = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\mu_{\perp} = \mu \left( 1 - \frac{\mu_a^2}{\mu^2} \right)$ ,  $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость гиромангнитной среды,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Для нахождения вынужденных колебаний необходимо рассматривать задачу дифракции волноводной волны на ферритовом резонаторе. Собственные колебания определяются из решения задачи в отсутствие падающей волны. Используя метод Фурье в сочетании с методом частичных областей выпишем решения уравнения Гельмгольца в виде [4], [5]:

$$E_z^1 = \sin \frac{\pi p}{b} y e^{+i\gamma_p x} + \sum_{n=1} R_n e^{-i\gamma_n x} \sin \frac{\pi n}{b} y, \quad (2)$$

$$E_z^2 = \sum_{n=1} \left( D_n^+ e^{i\zeta_{na} x} + D_n^- e^{-i\zeta_{na} x} \right) \sin \frac{\pi n}{a} y, \quad (3)$$

$$E_z^3 = \sum_{n=1} T_n e^{i\gamma_n x} \sin \frac{\pi n}{b} y b \quad (4)$$

Здесь  $\gamma_n^2 = k^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$ ,  $\zeta_{na}^2 = k^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$ .

Тангенциальные компоненты магнитного поля определяются из уравнений Максвелла по формуле

$$H_x = - \left( \frac{1}{ik\mu_{\perp}} \right) \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - i \frac{\mu_a}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Используя граничные условия на поверхностях резонатора можно получить связанную систему двух систем линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов (2)-(4)

$$W_m^{\mp} X_m^{\pm} - \frac{\mu_a}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{\mp} \left( \frac{\pi m}{a} \right) L_{nm} = \mu_{\perp} \gamma_p e^{-i\gamma_p \frac{h}{2}} \delta_{mp}, \quad (6)$$

где  $2X_n^{\pm} = (R_n \pm T_n) e^{i\gamma_n \frac{h}{2}} + \delta_{np} e^{-i\gamma_n \frac{h}{2}}$ ,  $L_{nm} = -\sin \pi \frac{(n-m)}{2} \frac{\sin \pi \frac{(n-m)}{2}}{\pi \frac{(n-m)}{2}} \left[ \frac{2n}{(n+m)} \right]$ ,

$$W_m^+ = \mu_{\perp} \gamma_m + i \zeta_{ma} \operatorname{ctg} \zeta_{ma} \frac{h}{2}, \quad W_m^- = \mu_{\perp} \gamma_m - i \zeta_{ma} \operatorname{tg} \zeta_{ma} \frac{h}{2},$$

Как показано в работах [4], [5] система линейных алгебраических уравнений может быть решена аналитически с помощью разработанного метода на основе интеграла Коши и интерполяционной формулы Лагранжа [8]. В результате его применения функциональные ряды в (6) суммируются и выражаются через один из неизвестных коэффициентов. В результате бесконечная связанная система уравнений сводится к двум алгебраическим уравнениям относительно коэффициентов  $X_n^{\pm}$

$$W_m^+ X_m^- - i \frac{\mu_a}{\mu} \left( \frac{\pi m}{a} \right) X_m^+ = \mu_{\perp} \gamma_p e^{-i\gamma_p \frac{h}{2}} \delta_{mp}, \quad (7)$$

$$-i \frac{\mu_a}{\mu} \left( \frac{\pi m}{a} \right) X_m^- + W_m^- X_m^+ = \mu_{\perp} \gamma_p e^{-i\gamma_p \frac{h}{2}} \delta_{mp}. \quad (8)$$

Решение полученной системы находится в аналитическом виде, а именно:

$$X_m^+ = \mu_{\perp} \gamma_p e^{-i\gamma_p \frac{h}{2}} \delta_{mp} \left( W_m^+ + i \frac{\mu_a}{\mu} \left( \frac{\pi m}{a} \right) \right) \left\{ W_m^+ W_m^- + \left[ \frac{\mu_a}{\mu} \left( \frac{\pi m}{a} \right) \right]^2 \right\}^{-1}, \quad (9)$$

$$X_m^- = \mu_{\perp} \gamma_p e^{-i\gamma_p \frac{h}{2}} \delta_{mp} \left( W_m^- + i \frac{\mu_a}{\mu} \left( \frac{\pi m}{a} \right) \right) \left\{ W_m^+ W_m^- + \left[ \frac{\mu_a}{\mu} \left( \frac{\pi m}{a} \right) \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (10)$$

Равенство нулю детерминанта системы уравнений (7), (8) определяет дисперсионное уравнение для нахождения собственных режимов ферритового резонатора, которое принимает следующий вид:

$$\left( \mu_{\perp} \gamma_m + i \zeta_{ma} \operatorname{ctg} \zeta_{ma} \frac{h}{2} \right) \left( \mu_{\perp} \gamma_m - i \zeta_{ma} \operatorname{tg} \zeta_{ma} \frac{h}{2} \right) + \left[ \frac{\mu_a}{\mu} \left( \frac{\pi m}{a} \right) \right]^2 = 0. \quad (11)$$

Неизвестные коэффициенты отражения и прохождения в выражениях для полей (2)-(4) находятся через коэффициенты  $X_m^{\pm}$  (9), (10) по простым формулам пересчета

$$R_m = (X_m^+ + X_m^-) e^{-i\gamma_m \frac{h}{2}} + \delta_{mp} e^{-i\gamma_m h}, \quad T_m = (X_m^+ - X_m^-) e^{-i\gamma_m \frac{h}{2}}. \quad (12)$$

Перейдем к анализу собственных и вынужденных режимов ферритового резонатора.

### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Первоначально рассмотрим свободные колебания в ферритовом резонаторе в отсутствие падающей волноводной волны. Проанализируем полученное дисперсионное уравнение (11).

Анализ дисперсионного уравнения показывает, что при отсутствии гиротропии ( $\mu_a = 0$ ) дисперсионное уравнение (37) распадается на два независимых уравнения  $\left(\mu_{\perp}\gamma_m + i\zeta_{ma} \operatorname{ctg}\zeta_{ma} \frac{h}{2}\right) = 0$ ,  $\left(\mu_{\perp}\gamma_m - i\zeta_{ma} \operatorname{tg}\zeta_{ma} \frac{h}{2}\right) = 0$ , определяющие в одном случае симметричные, а в другом – несимметричные колебания по толщине пластины  $h$  из магнитоэлектрика. Ясно, что количество дисперсионных кривых для каждого целого индекса колебаний  $m$  будет зависеть от значения величины  $\zeta_{ma} \frac{h}{2}$ . При наличии гиротропии ( $\mu_a \neq 0$ ) колебания в ферритовом резонаторе являются связанными и не происходит разделения колебаний на симметричные и несимметричные колебания для любого индекса  $m$ . В зависимости от материальных параметров феррита, толщины пластины  $h$  и ширины волновода  $a$  для каждого конкретного индекса колебания  $m$  следует выделить несколько режимов существования свободных колебаний.

Рассмотрим случай, когда величина поперечного волнового числа в пустом волноводе  $\gamma_m$  чисто мнимое число, т.е.  $(\gamma_m)^2 = k^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 < 0$ . Этому случаю соответствует запертый режим – амплитуда волны затухает по экспоненциальному закону вглубь пустого волновода. Однако в области ферритовой пластины может реализовываться два случая: режим объемных запертых мод и режим поверхностных мод. Объемные запертые моды могут существовать в случае, когда поперечное волновое число в области ферритовой пластины  $\zeta_{ma}$  вещественная величина, т.е. для выбранного индекса  $m$  величина  $\zeta_{ma}$  удовлетворяет условию  $(\zeta_{ma})^2 = k^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 > 0$ . Поверхностные моды реализуются при противоположном условии  $(\zeta_{ma})^2 = k^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 < 0$ . Ясно, что реализация одного из выделенных режимов зависит от соотношений параметров, входящих в величину  $\zeta_{ma}$ . Для отрицательных значений эффективной проницаемости ферритового слоя  $\mu_{\perp} < 0$  поперечное волновое число  $\zeta_{ma}$  чисто мнимое для любого индекса колебаний  $m$ , и поэтому для таких значений величины  $\mu_{\perp}$  всегда реализуется поверхностный режим, т.е.  $(\zeta_{ma})^2 < 0$ . Если выполняются одновременно два условия  $(\gamma_m)^2 = k^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 < 0$ ,  $(\zeta_{ma})^2 = k^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 < 0$ , то амплитуды полей в двух областях экспоненциально затухают от поверхности раздела сред. Такие поверхностные моды можно отождествить с магнитополяритонными поверхностными колебаниями [9] характерными для случая, когда эффективная магнитная проницаемость среды  $\mu_{\perp}$  является отрицательной величиной. В данном случае такие колебания возможны не только при отрицательных значениях параметра  $\mu_{\perp}$ , но и при его положительных значениях, когда выполняется условие  $k^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 < 0$  и поперечное волновое число  $\zeta_{ma}$  является мнимой величиной. Все корни исходного дисперсионного уравнения (11), для которых выполняется это условие, будут соответствовать *магнитополяритонным поверхностным колебаниям*.

На рис. 2 изображены дисперсионные характеристики (зависимость частотного параметра  $\varkappa$  от магнитной проницаемости феррита  $\mu_a$   $\varkappa = f(\mu_a)$ ) для основного колебания  $m = 1$  при следующих значениях материальных параметров  $\varepsilon = 7$ ,  $\mu = 0.7$ ,  $\theta = \frac{a}{b} = 0.8$ . Выделенная закрашенная область разделяет область параметров на две области. Те значения величин  $\varkappa$  и  $\mu_a$ , которые находятся внутри

этой области, соответствуют режиму существования *магнонполяритонных поверхностных мод* в ферритовой пластине. Вне этой области в ферритовой пластине наблюдаются объемные колебания. Их пространственное распределение зависит от параметра гиротропии  $\mu_a$ . Дисперсионная кривая, находящаяся в выделенной закрашенной области и ниже прямой  $\alpha = 0.5$  (пунктирная линия), соответствует поверхностным колебаниям в пустом волноводе. Режим объемных мод и поверхностных мод разделены точкой пересечения огибающей выделенной области  $k^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 = 0$  и

дисперсионной кривой (кривая 1). Прямая пунктирная линия  $\alpha = 0.5$  разделяет область параметров на две области. В области значений параметров ниже этой линии реализуется режим поверхностных колебаний со стороны пустого волновода и режим объемных (запертые моды) или поверхностных мод внутри ферритовой пластины. В этом случае корни дисперсионного уравнения (11) вещественны. Выше этой прямой корни дисперсионного уравнения (11) комплексны. На рис.2 представлены только вещественные значения комплексных корней дисперсионного уравнения. Если параметры задачи таковы, что выполняется условие  $\alpha > 0.5$ , то может реализовываться режим вынужденных колебаний при возбуждении ферритовой пластины основной волноводной волной. Для этого случая рассчитывались модули коэффициента прохождения  $|T_1|$  и отражения  $|R_1|$  в зависимости от частотного параметра  $\alpha$  для

заданных значений величин  $\varepsilon = 7$ ,  $\mu = 0.7$ ,  $\mu_a = 0.5$ ,  $\theta = \frac{a}{b} = 0.8$ .

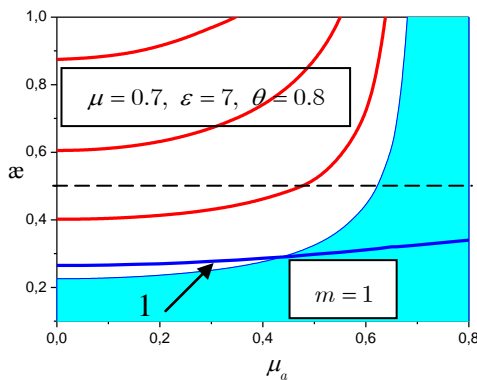


Рис.2. Зависимость частотного параметра  $\alpha$  от величины  $\mu_a$

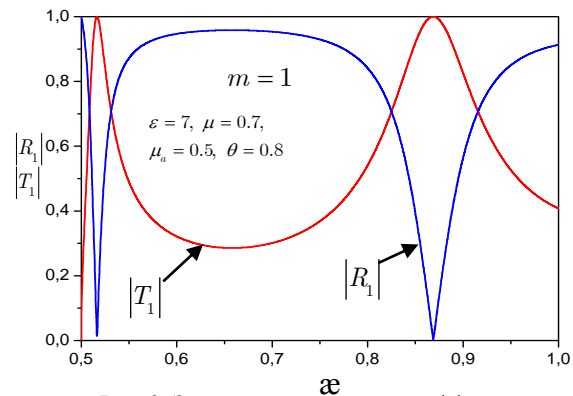


Рис. 3. Зависимость модулей коэффициентов прохождения  $|T_1|$  и отражения  $|R_1|$  от частотного параметра  $\alpha$

Результаты вычислений приведены на рис. 3. Расстояние на частотной шкале между резонансами близко к полуволновому резонансу в гиротропной среде ферритовой пластины. Следует отметить, что коэффициент отражения  $|R_1|$  не достигает своего максимального значения равного 1 в отличие от коэффициента прохождения, который при резонансных значениях частоты достигает этого значения. Изменяя величину поперечного магнитного поля можно менять эффективную магнитную проницаемость феррита и согласно дисперсионным характеристикам (рис. 2) будет изменяться резонансная частота вынужденных колебаний. Это и приводит к возможности электрической перестройки частоты, при которой наблюдается полное прохождение волноводной волны.

### ВЫВОДЫ

На основе разработанного нового метода аналитического решения граничной задачи о собственных и вынужденных колебаниях ферритового резонатора в прямоугольном волноводе с поперечным магнитным полем найдены в явном виде дисперсионное уравнение и выражения для коэффициентов отражения и прохождения волноводной волны. Проанализированы различные режимы возбуждения объемных и поверхностных запертых колебаний в ферритовом резонаторе.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Эпштейн П.. Теория распространения электромагнитных волн в гиромагнитной среде. УФН, Т. LXV, вып. 2, 1958. С.283 -311, (Rev. Mod. Phys. 28, 3, 1956).
2. С.В. Sharp and D. S. Heim, A ferrite boundary—value problem in a rectangular waveguide, IRE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-6, pp. 42–46, January, 1958.
3. К. С. O'Brien, Microwave properties of Slabs of Uniformly Magnetized Material Filling the Cross Section of a Rectangular Waveguide Operating in TE<sub>no</sub> Modes, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-18, N.7, pp. 377–382, July 1970.
4. Мизерник В.Н., Шматько А.А. Возбуждение волноводной волной ферритового резонатора (аналитическое решение). 22-я Международная Крымск. конф. “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”. КрыМиКо’2012. Материалы конференции. 10-14 сентября, Севастополь, Крым, Украина, 2012. – С.575-576.
5. Мизерник В.Н., Шматько А.А., Одаренко Е.Н. Новый подход для решения электродинамической задачи возбуждения волноводной волной ферритового резонатора // Радиотехника. – 2013. – Вып. 175. – С. 73–77.
6. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. – М.: Физматлит, 1994. - 464 с.
7. Микаэлян А.Л. Теория применения ферритов на сверхвысоких частотах, М-Л, Госэнергоиздат, 1963, 664 с.
8. А.А. Привалов. Теория\_интерполирования\_функций. Изд-во Саратов. ун-та, Кн.\_1(1990). – 230 с.
9. V.N. Mizernik, A.A. Shmat'ko. Spurious Resonances in Electrodynamics Problems on the Waveguide Discontinues. 20nd Int. Crimean Conf. “Microwave & Telecommunication Technology” (CriMiCo’2010). Sevastopol, Ukraine, 2010, pp. 645-646.