УДК 537.874

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ НА ТЕЛЕ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ НЕЛОКАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

С. Н. Шульга, О. В. Багацкая, А. В. Стрижаченко

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, Харьков, Украина, 61022.
Национальный фармацевтический университет,
ул. Пушкинская, 53, Харьков, Украина, 61002.
E-mail: sergeyshulga@yandex.ua

Поступила в редакцию 22 октября 2013 г.

Рассмотрена двумерная задача рассеяния E-поляризованной волны на диэлектрическом включении в однородной среде с применением метода нелокального граничного условия. С помощью теории логарифмического потенциала двойного слоя получено нелокальное граничное условие на контуре включения. Сформулирована замкнутая краевая задача для определения поля внутри включения и рассеянного поля.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: нелокальные граничные условия, функция Грина, логарифмический потенциал двойного слоя.

Розглянуто двовимірну задачу розсіювання E-поляризованої хвилі на діелектричному включенні в однорідному середовищі із застосуванням методу нелокальної граничної умови. За допомогою теорії логарифмічного потенціалу подвійного шару отримано нелокальну граничну умову на контуру включення. Сформульовано замкнену крайову задачу для визначення поля всередині включення та розсіяного поля.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелокальні граничні умови, функція Гріна, логарифмічний потенціал подвійного шару.

The 2D scattering problem for E-polarized wave on a dielectric inclusion in homogeneous medium is considered via the method of nonlocal boundary conditions. The nonlocal boundary condition on the circuit of the inclusion is obtained by the theory of the logarithmic potential of a double layer. The closed boundary value problem for the definition of the field inside the inclusion and scattered field is formulated.

KEY WORDS: nonlocal boundary conditions, Green's function, logarithmic potential of a double layer.

Теоретическое моделирование взаимодействия гармонических электромагнитных волн с проницаемыми для поля объектами представляет интерес во многих физико-технических приложениях, таких как оптика световодов, техника СВЧ, неразрушающий контроль, дистанционное зондирование [1-5]. Большинство известных работ теории дифракции на детерминированных проницаемых для поля включениях сводится к системе интегральных либо интегро-дифференциальных уравнений относительно искомого поля в сечении включения [6, 7]. В предлагаемой работе предложен альтернативный метод решения, основанный на интегральном граничном условии по контуру рассеивателя.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуемая структура (рис. 1) представляет собой неоднородное проницаемое для поля двумерное включение произвольной формы, характеризующееся магнитной проницаемостью $\mu_p(\vec{r})$, которое погружено в магнитную неоднородную среду с магнитной проницаемостью $\mu(\vec{r})$. Диэлектрическая проницаемость всех объектов полагается равной единице. В окружающей среде имеются сторонние источники электрического и магнитного типов $\vec{J}(\vec{r})$, $\vec{M}(\vec{r})$. Будем обозначать поверхность включения S_p, а внешнюю по отношению к включению область – S_e.

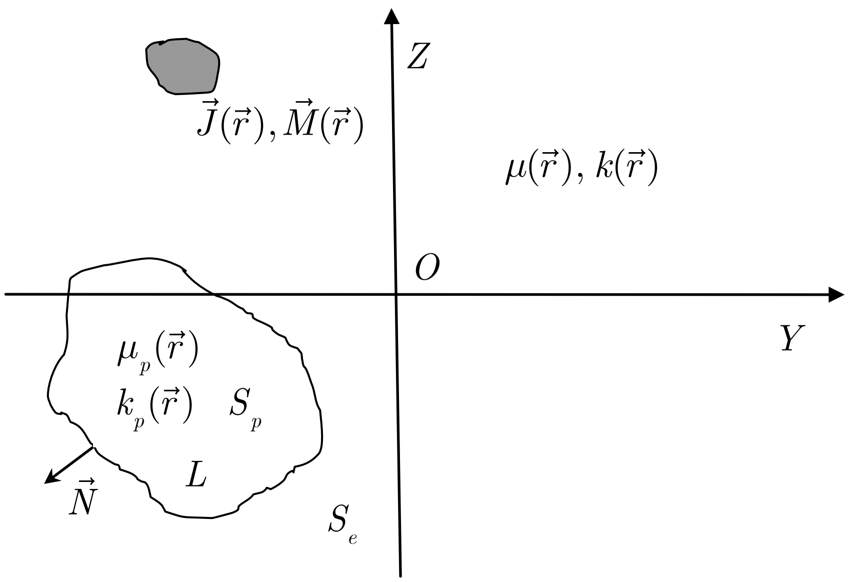

Рис. 1. Исследуемая структура.

ПЕРВИЧНОЕ ПОЛЕ И ФУНКЦИЯ ГРИНА В РЕГУЛЯРНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим регулярную (без включения) среду, электромагнитное поле в которой возбуждается источниками $\vec{J}(\vec{r})$, $\vec{M}(\vec{r})$. Уравнения Максвелла для монохроматических волн с зависимостью от времени пропорциональной $\exp(-i\omega t)$ в такой среде запишутся в виде

$$\nabla_\perp \times \vec{E}^{in}(\vec{r}) - ik_0\mu(\vec{r})\vec{H}^{in}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c}\vec{M}(\vec{r}),$$
$$\nabla_\perp \times \vec{H}^{in}(\vec{r}) + ik_0\vec{E}^{in}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{r}),$$

где индекс «*in*» указывают на то, что речь идет о первичном поле, то есть поле в среде в отсутствие включения, $\nabla_\perp = \vec{y}_0\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0\dfrac{\partial}{\partial z}$, $\vec{r} = (0, y, z)$, $k_0 = \omega / c$. Несложные преобразования, выполненные в этих уравнениях, позволяют получить следующее уравнение для вектора $\vec{E}^{in}(\vec{r})$:

$$\left[\mu(\vec{r})\nabla_\perp \cdot \frac{1}{\mu(\vec{r})}\nabla_\perp + k^2(\vec{r})\right]\vec{E}^{in}(\vec{r}) = \mu(\vec{r})\vec{f}(\vec{r}), \qquad (1)$$

где $k(\vec{r}) = \mu(\vec{r})k_0$ – волновое число рассматриваемой среды, а функция $\vec{f}(\vec{r})$ равна:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\left(\nabla_\perp \times \frac{1}{\mu(\vec{r})}\vec{M}(\vec{r}) - ik_0\vec{J}(\vec{r})\right).$$

Положим, что $\vec{E}^{in} = (E_x^{in}, 0, 0)$, $\vec{H}^{in} = (0, H_y^{in}, H_z^{in})$, $\vec{J} = (J_x, 0, 0)$, $\vec{M} = (0, M_y, M_z)$, то есть будем решать задачу для E-поляризованной волны. Тогда уравнение (1) для первичного поля в регулярной среде для компоненты E_x^{in} будет иметь вид

$$\left[\mu(\vec{r})\nabla_\perp \cdot \frac{1}{\mu(\vec{r})}\nabla_\perp + k^2(\vec{r})\right]E_x^{in}(\vec{r}) = \mu(\vec{r})f(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S_e + S_p \ . \qquad (2)$$

$f(\vec{r})$ – соответствующее скалярное выражение для функции, характеризующей сторонние источники:

$$f(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu(\vec{r})}M_z(\vec{r})\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu(\vec{r})}M_y(\vec{r})\right) - ik_0 J_x(\vec{r})\right\}.$$

Отметим, что поле E_x^{in} на бесконечности должно удовлетворять условию излучения.

Функция Грина однородной регулярной среды удовлетворяет уравнению

$$\left[\mu(\vec{r})\nabla_\perp \cdot \frac{1}{\mu(\vec{r})}\nabla_\perp + k^2(\vec{r})\right]G(\vec{r},\vec{r}') = \mu(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}'), \quad \vec{r},\vec{r}' \in S_e + S_p \ , \tag{3}$$

условию излучения на бесконечности, а также условию симметрии

$$G(\vec{r},\vec{r}') = G(\vec{r}',\vec{r}).$$

Тогда первичное поле будет определяться с помощью функции Грина в виде

$$E_x^{in}(\vec{r}) = \int G(\vec{r},\vec{r}')f(\vec{r}')d\vec{r}'. \tag{4}$$

Для однородной регулярной среды функция Грина известна (например, [8]):

$$G\left(\vec{r},\vec{r}'\right) = \frac{\mu}{4i}H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|\right).$$

Видно, что в этом случае функция Грина имеет логарифмическую особенность при $\vec{r} \to \vec{r}'$:

$$G\left(\vec{r},\vec{r}'\right) \simeq \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\vec{r}-\vec{r}'\right), \tag{5}$$

так как

$$H_0^{(1)}\left(t\right) \simeq \frac{2i}{\pi}\ln\left(t\right), \quad t \to 0.$$

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ В НЕРЕГУЛЯРНОЙ СРЕДЕ

Введем в рассмотрение поле E_x^p внутри включения (в области S_p) и поле E_x^e в окружающей включение среде (в области S_e). Поле E_x^e, очевидно, будет удовлетворять уравнению (2) в области S_e, а поле E_x^p – аналогичному уравнению с нулевой правой частью вследствие отсутствия источников в области включения S_p:

$$\left[\mu(\vec{r})\nabla_\perp \cdot \frac{1}{\mu(\vec{r})}\nabla_\perp + k^2(\vec{r})\right]E_x^e(\vec{r}) = \mu(\vec{r})f(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S_e, \tag{6}$$

$$\left[\mu_p(\vec{r})\nabla_\perp \cdot \frac{1}{\mu_p(\vec{r})}\nabla_\perp + k_p^2(\vec{r})\right]E_x^p(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in S_p. \tag{7}$$

При этом поле E_x^e должно удовлетворять условию излучения на бесконечности, а на границе включения L (см. рис.1) должны выполняться граничные условия:

$$\begin{gathered} E_x^e = E_x^p, \\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial E_x^e}{\partial N} = \frac{1}{\mu_p}\frac{\partial E_x^p}{\partial N}, \quad \vec{r} \in L. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $\vec{N}$ – единичный вектор нормали к границе включения L, $k_p(\vec{r}) = \mu_p(\vec{r})k_0$ – волновое число в области включения.

Для определения поля в нерегулярной среде рассмотрим уравнения (6) для поля E_x^e и функции Грина (3) в области внешней по отношению к включению ($\vec{r} \in S_e$):

$$\left[\mu(\vec{r})\nabla_\perp \cdot \frac{1}{\mu(\vec{r})}\nabla_\perp + k^2(\vec{r})\right]E_x^e(\vec{r}) = \mu(\vec{r})f(\vec{r}), \qquad ,$$

$$\left[\mu(\vec{r})\nabla_\perp \cdot \frac{1}{\mu(\vec{r})}\nabla_\perp + k^2(\vec{r})\right]G(\vec{r},\vec{r}') = \mu(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}').$$

При этом параметр $\vec{r}'$ может находиться как в пределах включения $\vec{r}' \in S_p$, так и вне его $\vec{r}' \in S_e$.

Домножив первое из уравнений на $G(\vec{r},\vec{r}')$, второе – на $E_x^e(\vec{r})$ и вычтя одно из другого, получим

$$\nabla_\perp \cdot \frac{1}{\mu(\vec{r})}\left[G(\vec{r},\vec{r}')\nabla_\perp E_x^e(\vec{r}) - E_x^e(\vec{r})\nabla_\perp G(\vec{r},\vec{r}')\right] = f(\vec{r})G(\vec{r},\vec{r}') - \delta(\vec{r}-\vec{r}')E_x^e(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S_e. \tag{9}$$

Интегрирование этого равенства по области S_e с учетом теоремы Остроградского-Гаусса и формулы Грина [9] для двумерного случая приводит к следующему результату:

$$\int_{S_e} G(\vec{r},\vec{r}')f(\vec{r}')d\vec{r} + \\ +\oint_L \frac{1}{\mu(\vec{r}_L)}\left[G(\vec{r}_L,\vec{r}')\frac{\partial E_x^e\ \vec{r}_L}{\partial N} - E_x^e\ \vec{r}_L\ \frac{\partial G(\vec{r}_L,\vec{r}')}{\partial N}\right]dl = \begin{cases} E_x^e\ \vec{r}'\ , \vec{r}' \in S_e; \\ 0, \qquad \vec{r}' \in S_p. \end{cases} \tag{10}$$

Поменяем местами штрихованные и нештрихованные аргументы. Тогда с учетом симметричности функции Грина и обозначения (4) получим

$$E_x^{in}\ \vec{r}\ + \oint_L \frac{1}{\mu(\vec{r}_L')}\left[G(\vec{r},\vec{r}_L')\frac{\partial E_x^e\ \vec{r}_L'}{\partial N'} - E_x^e\ \vec{r}_L'\ \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}_L')}{\partial N'}\right]dl' = \begin{cases} E_x^e\ \vec{r}\ , \vec{r} \in S_e; \\ 0, \qquad \vec{r} \in S_p. \end{cases} \tag{11}$$

Введем в рассмотрение поле, рассеянное включением и определенное в области $\vec{r} \in S_e$:

$$E_x^{sc}(\vec{r}) \equiv E_x^e(\vec{r}) - E_x^{in}(\vec{r})$$

и воспользуемся граничными условиями (8) на контуре L. Тогда

$$E_x^{sc}\ \vec{r}\ = \oint_L \left[G(\vec{r},\vec{r}_L')\frac{1}{\mu_p(\vec{r}_L')}\frac{\partial E_x^p\ \vec{r}_L'}{\partial N'} - \frac{E_x^p\ \vec{r}_L'}{\mu(\vec{r}_L')}\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}_L')}{\partial N'}\right]dl', \quad \vec{r} \in S_e. \tag{12}$$

Если взять $\vec{r} \in S_p$, то из (11) получим

$$0 \equiv E_x^{in}\ \vec{r}\ + \oint_L \left[G(\vec{r},\vec{r}_L')\frac{1}{\mu_p(\vec{r}_L')}\frac{\partial E_x^p\ \vec{r}_L'}{\partial N'} - \frac{E_x^p\ \vec{r}_L'}{\mu(\vec{r}_L')}\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}_L')}{\partial N'}\right]dl', \quad \vec{r} \in S_p.$$

Устремим в последнем выражении $\vec{r} \to \vec{r}_L$, $\vec{r}_L \in L$ и получим нелокальные граничные условия на контуре L:

$$0 \equiv E_x^{in}\ \vec{r}_L\ + \lim_{\vec{r}\to\vec{r}_L} \oint_L \left[G(\vec{r},\vec{r}_L') \frac{1}{\mu_p(\vec{r}_L')} \frac{\partial E_x^p\ \vec{r}_L'}{\partial N'} - \frac{E_x^p\ \vec{r}_L'}{\mu(\vec{r}_L')} \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}_L')}{\partial N'} \right] dl', \quad \vec{r} \in S_p \qquad (13)$$

Воспользуемся далее формулой теории логарифмического потенциала двойного слоя [9]:

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{r}_L} \oint_L \varphi\ \vec{r}_L'\ \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}_L')}{\partial N'} dl' = \oint_L \varphi\ \vec{r}_L'\ \frac{\partial G(\vec{r}_L,\vec{r}_L')}{\partial N'} dl' + \frac{1}{2}\varphi\ \vec{r}_L\ , \quad \vec{r} \in S_p. \qquad (14)$$

Здесь первое слагаемое в правой части представляет собой прямое значение потенциала двойного слоя, а подынтегральное выражение является непрерывной функцией.

С учетом этой формулы нелокальные граничные условия на контуре L примут вид

$$\frac{1}{2}\frac{E_x^p\ \vec{r}_L}{\mu(\vec{r}_L)} + \oint_L \left[\frac{E_x^p\ \vec{r}_L'}{\mu(\vec{r}_L')} \frac{\partial G(\vec{r}_L,\vec{r}_L')}{\partial N'} - G(\vec{r}_L,\vec{r}_L') \frac{1}{\mu_p(\vec{r}_L')} \frac{\partial E_x^p\ \vec{r}_L'}{\partial N'} \right] dl' = E_x^{in}\ \vec{r}_L\ . \qquad (15)$$

Отметим, что первое слагаемое в подынтегральном выражении представляет собой непрерывную функцию (на гладком контуре L), а функция Грина $G(\vec{r}_L,\vec{r}_L')$ во втором слагаемом имеет логарифмическую особенность.

Полученное нелокальное граничное условие совместно с уравнением (7) в области включения образует замкнутую задачу для поля внутри включения $E_x^p(\vec{r})$. Зная это поле, по прямой формуле (12) можно определить рассеянное поле $E_x^{sc}(\vec{r})$.

ВЫВОДЫ

В работе предложен алгоритм решения двумерной задачи рассеяния на проницаемом для поля включении получения методом нелокального граничного условия. Сформулирована замкнутая задача для определения поля внутри включения. Знание поля внутри включения позволяет определить рассеянное поле в любой точке пространства по прямой формуле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ярив А. Оптические волны в кристалах / А. Ярив А., П. Юх. – М. : Мир, 1987. – 616 с.
2. Тягай В. А. Электроотражение света в полупроводниках / В. А. Тягай, О. В. Снитко. – Киев : Наук. думка, 1980. – 302 с.
3. Хмелевский В. К. Электроразведка / В. К. Хмелевский. – М. : Изд. МГУ, 1984. – 422 с.
4. Арманд Н. А., Башаринов А. Е., Шутко А. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20, № 6. С. 809-841.
5. Slater Ph. N. Radiometric consideration in remote sensing / Ph. N. Slater // Proceeding of the IEEE. – 1985. – V. 73, № 6. – P. 997 – 1011.
6. Хижняк Н. А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики / Н. А. Хижняк. – Киев : Наук. думка, 1986. – 280 с.
7. Багацкая О.В. Двумерная задача рассеяния на неоднородном теле в среде с кососимметричным тензором диэлектрической проницаемости / О. В. Багацкая, Н. П. Жук, С. Н. Шульга // Радиотехника и электроника. – 1995. –Т. 40, № 6. – С. 869-875.
8. Фелсен Л. Излучение и рассеяние волн. Т. 1 / Л. Фелсен, Н. Маркувиц. – М. : Мир, 1978. – 551 с.
9. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 736 с.