

Оригінальна стаття<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-03>

УДК 537.811, 537.621

Д. І. ГАВРИЛЕНКО, аспірант.

e-mail: m380669254126@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-6498-887X>

О. М. ДУМІН, д. ф.-м. наук, доц.

e-mail: dumin@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5067-9689>

С. Л. БЕРДНИК, д. ф.-м. наук, с. н. с.

e-mail: berdnik@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-0037-6935>

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

ЕНЕРГЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ НЕСТАЦІОНАРНОГО ХВИЛЬОВОГО ПРОЦЕСУ, ЗБУДЖЕНОГО ПРЯМОКУТНИМ ІМПУЛЬСОМ

Актуальність. В умовах активного розвитку надширокосмугових технологій імпульсні антени стають дедалі важливішим інструментом у задачах радіозв'язку, локації та дистанційного зондування. На відміну від гармонічних джерел, динаміка яких добре описується у частотній області, реальні імпульсні випромінювачі мають скінченну тривалість збудження, що суттєво змінює як характер поля, так і процес переносу енергії. Одним із фізично адекватних сценаріїв збудження є прямокутний імпульс, який дозволяє змодельовувати ситуацію, коли джерело активується на обмежений проміжок часу, а потім вимикається. Такий імпульс краще відображає реальні умови роботи імпульсних систем, ніж ідеалізоване стрибкоподібне збудження. Дослідження енергетичних характеристик у часовому просторі дозволяє не лише глибше зрозуміти механізми випромінювання, а й покращити проектування ефективних антен та джерел. Це має безпосередній вплив на підвищення дальності, завадостійкості та точності у системах зв'язку і спостереження, а також зменшення енергетичних втрат і опромінення у ближній зоні. Аналіз перетворення імпульсної енергії на різних стадіях збудження, від утворення хвильових фронтів до їх поширення, є ключем до створення високоточних моделей електромагнітного поля.

Мета роботи. Отримати аналітичні та числові залежності, які описують енергетичні характеристики електромагнітного поля, збудженого прямокутним імпульсом. Зокрема, вивести вирази для потоку енергії через поперечну площину на довільній відстані від апертури, а також визначити повну енергію хвилі на різних стадіях її просторово-часової еволюції. У випадках, де аналітичне розв'язання неможливе, застосувати числові методи. Надати фізичну інтерпретацію отриманим результатам, оцінити вплив тривалості імпульсу на поведінку хвилі.

Матеріали та методи. Задача формулюється як нестационарна тривимірна проблема поширення H -хвилі, збудженої прямокутним імпульсом з круглої апертури у вільний напівпростір. Загальні розв'язки для полів будуються на основі еволюційного підходу. Вони визначаються через еволюційні коефіцієнти, які є розв'язком неоднорідного рівняння Клейна-Гордона, що знаходиться методом функції Рімана. Для визначення потоку енергії використовується похідна компонента вектора Пойнтінга. Числові розрахунки виконуються за допомогою методу Гауса-Кронрода.

Результати. Отримано точні аналітичні вирази для потоку енергії та повної енергії на апертурі з прямокутним збудженням. Для довільних площин побудовано узагальнені вирази, що враховують часову та просторову еволюцію поля. Проведено порівняння з наближенням дальньої зони та продемонстровано, що воно може завищувати енергетичні оцінки у ближній зоні. Побудовано тривимірну картину просторово-часової динаміки, яка наочно демонструє формування хвильових фронтів і їх взаємодію. Досліджено процес накопичення енергії у ближній зоні та прояв ефекту «електромагнітного снаряду», коли збудження існує у вигляді компактного енергетичного імпульсу.

Висновки. У роботі було вперше побудовано аналітичні та числові моделі для прямокутного збудження H -хвилі апертурного випромінювача у часовому просторі. Показано, що у випадку скінченного імпульсу поле має більш складну часову динаміку, ніж при стрибкоподібному збудженні. Встановлено, що потік енергії поблизу апертури формується як результат взаємодії статичних і хвильових компонент, і саме через це наближення дальньої зони є неточним при малих значеннях подовжньої координати. Повільне спадання енергії з відстанню вказує на те, що значна її частина зосереджена у компактному фронті, що зберігає свою структуру під час поширення. Проведений аналіз дозволяє уточнити умови застосування наближених моделей, а також дає основу для подальших досліджень у напрямку оптимізації імпульсних антен та систем випромінювання.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: метод еволюційних рівнянь, прямокутний імпульс, солітоноподібний розв'язок, енергетичне перетворення

Як цитувати: Гавриленко ДІ, Думін ОМ, Бердник СЛ. Енергетичні характеристики нестационарного хвильового процесу, збудженого прямокутним імпульсом. Вісник Харківського національного

© Гавриленко Д.І., Думін О.М., Бердник С.Л., 2025.

Open access. This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2025;42,24-37. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-03>

In cites: Havrylenko DI, Dumin OM, Berdnyk SL. Energy analysis of a transient wave process excited by a rectangular pulse. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series "Radiophysics and Electronics". 2025;42, 24-37 (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-03>

ВСТУП

Інтерес до нестаціонарних електромагнітних хвиль зумовлений підвищеними вимогами до сучасних радіолокаційних пристроїв, систем зв'язку, надширокосмугових радарів [1]. Точність визначення координат об'єктів за допомогою відеоімпульсів суттєво зростає. У деяких випадках стає можливим навіть відновлення їхньої форми.

Розвиваються нові перспективні напрями, пов'язані з використанням відомих властивостей електромагнітних полів. Одним із таких напрямів є дослідження солітоноподібних розв'язків хвильового рівняння, які описують передачу електромагнітної енергії на великі відстані з її повільнішим загасанням, ніж обернено-квадратична. Перший такий розв'язок, відомий як «фокусні хвильові моди» (focus wave modes), було представлено в роботі [2]. Подібно до розв'язку для плоскої хвилі, він описує електромагнітне поле з нескінченною енергією та повільно затухаючою амплітудою на відстані. Згодом були отримані інші типи солітоноподібних розв'язків, зокрема хвилі зі скінченною енергією [3, 4]. Найповніший огляд і аналіз таких розв'язків подано в роботах [5, 6]. Деякі теоретичні результати були експериментально підтверджені шляхом вимірювання ультразвукових хвиль, що випромінювались ґраткою [7]. Розв'язки, які описують бездисперсійні хвильові пакети, також були отримані для рівнянь Клейна-Гордона та Дірака [8].

Більшість відомих солітоноподібних розв'язків містять нероздільні просторово-часові комплексні змінні. «Електромагнітний снаряд» є одним із винятків [9]. Воно має місце у прожекторній зоні випромінювача під час опромінення джерела, збудженого нестаціонарним сигналом. Це явище полягає в тому, що енергія електромагнітного поля загасає повільніше, ніж обернено пропорційно до квадрата відстані [10], завдяки її концентрації в одному напрямку. Для експериментального моделювання цього ефекту використовували діелектричні лінзи, опромінені ТЕМ-хвилею з хвилеводу [11]. Математичний опис явища було отримано незалежно в різних дослідженнях як методами у частотному просторі [12], так і за допомогою еволюційних рівнянь у часовому просторі [13]. Також цю задачу розв'язували числовими методами [14].

Останнім часом з'явилися нові підходи до побудови солітоноподібних розв'язків рівнянь Максвелла, зокрема в контексті нелінійної взаємодії з середовищем або іншими полями. Було показано, що у випадку збудження у середовищах з когерентною атомною структурою (наприклад, у моделях на основі скорочених рівнянь Максвелла-Блоха) існують нові типи солітонних і періодичних хвильових розв'язків, зокрема хвилі взаємодії солітонів із кноідальними хвилями [15]. Крім того, нещодавно запропоновано модель, де рівняння Максвелла застосовують до нелінійного скалярного поля, що описується рівнянням Клейна-Гордона. Це дозволяє сформулювати стійкі локалізовані розв'язки типу «гіломорфних солітонів», які проявляють себе як заряджені частинки на великих часових масштабах [16]. Ще одне сучасне дослідження підтверджує асимптотичну стійкість солітонів у двовимірних рівняннях Максвелла-Лоренца, демонструючи, що на великих часових масштабах розв'язок розкладається на солітон і дисперсійну компоненту [17]. Крім аналітичних методів, з'являються також гібридні підходи, а саме поєднання перетворення Дарбу і штучних нейронних мереж для виявлення і валідації солітонних розв'язків у зменшеній моделі Максвелла-Блоха [18].

Знаючи аналітичний розв'язок опромінення імпульсною електромагнітною хвилею зі стрибкоподібною часовою залежністю [13], можна знайти розв'язок для сигналу у формі прямокутного імпульсу шляхом застосування принципу суперпозиції. У цій роботі отримано та проаналізовано енергетичні характеристики такого типу хвиль.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Досліджується нестаціонарний процес збудження електромагнітної Н-хвилі під дією прямокутного імпульсу. На відміну від попередньої роботи [19], де аналіз обмежувався стрибкоподібним збудженням, тут розглядається більш складна й фізично наближена модель, у якій джерело активується та деактивується у фіксовані моменти часу.

Випромінювач задається круглою апертурою із заданим струмом. Розв'язання проводиться у циліндричній системі координат. Простір навколо випромінювача вважається вільним. В межах цієї роботи розгляд обмежується поздовжньою складовою вектора Пойнтінга, яка характеризує густину потоку електромагнітної енергії вздовж напрямку поширення хвилі:

$$\vec{z}_0 S_z(\rho, \varphi, z, t) = [\vec{E}(\rho, \varphi, z, t) \times \vec{H}(\rho, \varphi, z, t)]. \quad (1)$$

Збуджуюча функція прямокутного імпульсу записується у вигляді

$$f(\tau) = H(\tau) - H(\tau - t_0), \quad (2)$$

де t_0 – тривалість імпульсу, а $H(\tau)$ – функція Хевісайда. Відповідно до принципу суперпозиції, результуюче поле можна подати як різницю двох відгуків на стрибкоподібне збудження:

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z, t) = \vec{E}_0(\rho, \varphi, z, t)H(t) - \vec{E}_0(\rho, \varphi, z, t - t_0)H(t - t_0), \quad (3)$$

де $\vec{E}_0$ – поперечна компонента електричного поля, відповідь системи на миттєвий імпульс (одиничне збудження) у момент часу $t = 0$. Перший доданок описує ввімкнення джерела у момент часу $t = 0$, другий – вимкнення в момент часу $t = t_0$. Таким чином, поле існує впродовж інтервалу $0 \leq t \leq t_0$ і після нього, протягом перехідного процесу, тривалість якого залежить від точки спостереження. Аналогічна форма справедлива і для інших складових поля.

Поперечні компоненти електричного та магнітного полів визначаються в рамках методу еволюційних рівнянь [13, 20]:

$$\begin{cases} \vec{E}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi (V_m^h(z, t, \chi)H(t) - V_m^h(z, t - t_0, \chi)H(t - t_0)) [\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0]; \\ \vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' (I_{m'}^h(z, t, \chi')H(t) - I_{m'}^h(z, t - t_0, \chi')H(t - t_0)) \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi'). \end{cases} \quad (4)$$

Вирази (4) отримано шляхом підстановки полів $\vec{E}_0$ і $\vec{H}_0$ у формулу (3) і відповідну до неї формулу для магнітного поля, з урахуванням їх модового представлення. Під функціями V_m^h , $I_{m'}^h$ розуміються еволюційні коефіцієнти, які витікають з розв'язання неоднорідного рівняння Клейна-Гордона методом функції Рімана. Вони описують часово-просторову динаміку поперечних складових поля, збудженого одиничним імпульсом. Вирази для цих коефіцієнтів мають вигляд [13, 20–22]:

$$\begin{cases} V_m^h(z, t - t_0, \chi) = iA_0 R \frac{\sqrt{\mu_0} J_1(\chi R)}{4 \sqrt{\chi}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) J_0(\chi \sqrt{c^2(t - t_0)^2 - z^2}); \\ I_{m'}^h(z, t - t_0, \chi') = iA_0 R \frac{\sqrt{\mu_0} J_1(\chi' R)}{4 \sqrt{\chi'}} (\delta_{-m',1} + \delta_{-m',-1}) \cdot \\ \cdot \left(J_0(\chi' \sqrt{c^2(t - t_0)^2 - z^2}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c(t - t_0) - z}{c(t - t_0) + z} \right)^k J_{2k}(\chi' \sqrt{c^2(t - t_0)^2 - z^2}) \right). \end{cases} \quad (5)$$

Величини, що входять до виразів (4)-(5) мають таку інтерпретацію: $\psi_m(\rho, \varphi, \chi)$ – базисна функція, яка є розв'язком рівняння Гельмгольца в поперечній площині (оператор ∇ також діє лише в цій площині); χ, χ' – спектральні параметри, за якими виконується інтегрування; m, m' – кутові моди, за якими здійснюється сумування; J_n – функція Бесселя n -го порядку; t_0 – параметр зсуву часу. Зазначимо, що різні позначення спектральних параметрів та кутових мод в еволюційних коефіцієнтах (5) введено для поліпшення подальшого розрахунку і аналізу, і на фізичний сенс впливу не матимуть.

У межах цього дослідження проводиться аналіз енергетичних характеристик хвилі, збудженої прямокутним імпульсом. Основна увага приділяється потоку енергії через нескінченну площину, перпендикулярну до осі поширення хвилі, а також оцінці повної енергії, перенесеної в просторі. Частину проміжних результатів за цією темою вже було оприлюднено в роботі [23]. У даній статті здійснюється розширене та деталізоване дослідження впливу скінченності імпульсу на перенесення енергії у вільному просторі.

ВИВЕДЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

Підставимо вирази для поперечних складових електричного і магнітного полів (4) у поздовжню компоненту вектора Пойнтінга (1):

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 S_z(\rho, \varphi, z, t) = & \left[\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi (V_m^h(z, t, \chi) H(t) - V_m^h(z, t - t_0, \chi) H(t - t_0)) [\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0] \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{\mu_0} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' (I_{m'}^h(z, t, \chi') H(t) - I_{m'}^h(z, t - t_0, \chi') H(t - t_0)) \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi') \right] \end{aligned}$$

Електричну і магнітну сталі винесемо з-під векторного добутку та виразимо через квадрат швидкості світла. Винесемо оператори сумування та інтегрування з-під цього добутку, зберігши порядок їх виконання. Залишається векторний добуток, що містить градієнти базисних функцій та орт поздовжньої осі, який зводиться до скалярного добутку градієнтів базисних функцій:

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 S_z(\rho, \varphi, z, t) = & c^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' (V_m^h(z, t, \chi) H(t) - V_m^h(z, t - t_0, \chi) H(t - t_0)) \\ & (I_{m'}^h(z, t, \chi') H(t) - I_{m'}^h(z, t - t_0, \chi') H(t - t_0)) \vec{z}_0 (\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi')) \end{aligned} \quad (6)$$

Запишемо визначення потоку енергії через поперечний переріз:

$$P_z(z, t) = \int_S S_z(\rho, \varphi, z, t) ds, \quad (7)$$

де $ds = \rho d\rho d\varphi$ – елемент площі у циліндричних координатах, де полярний радіус змінюється від нуля до нескінченності, а кут – в межах одного оберту кола. Орієнтація зовнішньої нормалі до площини s збігається з вектором $\vec{z}_0$, що визначає поздовжній напрямок хвильового процесу. Підставимо вираз (6) у (7) та скористаємося ортогональністю базисних функцій:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho (\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi')) = 2\pi (-1)^m \delta_{m, -m'} \delta(\chi - \chi').$$

Це дозволяє аналітично виконати інтегрування за спектральним параметром χ' і звести суму за модами до одного доданку з $m' = -m$. Таким чином, отримуємо вираз для повного потоку енергії, перенесеної через нескінченну поперечну площину, якщо збуджуючий струм має прямокутну форму:

$$\begin{aligned} P_z(z, t) = & 2\pi c^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} d\chi (V_m^h(z, t, \chi) H(t) - V_m^h(z, t - t_0, \chi) H(t - t_0)) \\ & (I_{-m}^h(z, t, \chi) H(t) - I_{-m}^h(z, t - t_0, \chi) H(t - t_0)) \end{aligned} \quad (8)$$

Зазначимо, що якщо вектор Пойнтінга (1) є результатом векторного добутку полів, які є суперпозицією збуджень у різні моменти часу, то вираз (8) уже подає потік енергії через відповідні еволюційні коефіцієнти, що описують реакції системи на імпульсні джерела в моменти $t = 0$ та $t = t_0$.

Підставимо відомі аналітичні вирази для еволюційних коефіцієнтів (5) у рівність (8). Через символи Кронекера, що в них наявні, вдається спростити нескінченну суму по модам, записавши, що

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) (\delta_{-m,1} + \delta_{-m,-1}) = -2.$$

Після винесення сталих за знак інтегралу та незначних спрощень отримуємо остаточний вираз для потоку енергії

$$\begin{aligned}
P_z(z, t) = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^\infty d\chi \frac{1}{\chi} J_1(\chi R) J_1(\chi R) & \left(J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) H(t) - J_0(\chi \sqrt{c^2 (t - t_0)^2 - z^2}) H(t - t_0) \right) \\
& \left(\left(J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) + 2 \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right)^k J_{2k}(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \right) H(t) - \right. \\
& \left. - \left(J_0(\chi \sqrt{c^2 (t - t_0)^2 - z^2}) + 2 \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{c(t - t_0) - z}{c(t - t_0) + z} \right)^k J_{2k}(\chi \sqrt{c^2 (t - t_0)^2 - z^2}) \right) H(t - t_0) \right), \quad (9)
\end{aligned}$$

який далі аналізуватимемо.

Для кращого розуміння фізичної картини явищ розглянемо випадки поведінки енергетичних параметрів поблизу джерела та в дальній зоні. Лише після цього перейдемо до загального аналізу потоку (9).

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Випадок 1. $z = 0$

Тут вдається отримати точний аналітичний розв'язок, а, отже, і зрозуміти можливу фізику процесів. Вираз для потоку енергії (9) на площині апертури значно спрощується, оскільки зникає залежність аргументів функцій Бесселя від просторової координати. Крім того, скористаємося тотожністю [24]

$$J_0(\chi c(t - t_0)) + 2 \sum_{k=1}^\infty J_{2k}(\chi c(t - t_0)) = 1,$$

яка істотно спрощує другу дужку в (9). Прийдемо до такого виразу:

$$\begin{aligned}
P_z(z, t)|_{z=0} = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^\infty d\chi \frac{1}{\chi} J_1(\chi R) J_1(\chi R) \\
\left(J_0(\chi c t) H(t) - J_0(\chi c(t - t_0)) H(t - t_0) \right) (H(t) - H(t - t_0)).
\end{aligned}$$

Далі скористаємося довідковим результатом [25] для інтегралу, попередньо уточнивши його запис у зв'язку з виявленою помилкою у джерелі, пов'язаною з відсутністю дужки перед арккосинусом:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty d\chi \frac{1}{\chi} J_1(\chi R) J_1(\chi R) J_0(\chi c(t - t_0)) = \\
& = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{c(t - t_0)}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2(t - t_0)^2} \right), & 0 < c(t - t_0) < 2R; \\ 0, & 0 < 2R < c(t - t_0). \end{cases}
\end{aligned}$$

Після підстановки й обчислення отримаємо аналітичний вираз потоку енергії у площині апертури:

$$\begin{aligned}
P_z(z, t)|_{z=0} = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} & \left(\left\{ \frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{ct}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} \right), \quad 0 < ct < 2R; \right. \right. \\
& \left. \left. 0, \quad 0 < 2R < ct. \right\} H(t) - \right. \\
& \left. - \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{c(t - t_0)}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2(t - t_0)^2} \right), \quad ct_0 < ct < 2R + ct_0; \right. \right. \\
& \left. \left. 0, \quad ct_0 < 2R + ct_0 < ct. \right\} H(t - t_0) \right) (H(t) - H(t - t_0)). \quad (10)
\end{aligned}$$

Перший доданок у виразі (10) описує потік енергії, зумовлений стрибкоподібним збудженням у момент часу $t = 0$, який було досліджено в попередній роботі [19]. Другий доданок – це та сама відповідь, але запізнена на час t_0 . Таким чином, підсумковий результат відповідає відніманню двох стрибкоподібних збуджень, що і формує ефект прямокутного імпульсу. На Рис. 1 наведено побудовані графіки (10) для фіксованих значень тривалості імпульсу ct_0 . Як видно, з його збільшенням ширина імпульсу у потоці

енергії також зростає. У разі малих значень тривалості ($ct_0 < 2R$) відбувається різке обривання потоку в момент $ct = ct_0$, що пояснюється тим, що фронт хвилі ще перебуває в зоні дії джерела, і вимкнення імпульсу миттєво позначається на динаміці. Натомість для випадку $ct_0 \geq 2R$ спостерігається поступовий спад потоку за однаковим законом, подібний до випадку стрибкоподібного збудження. У цьому режимі вимкнення джерела вже не може «наздогнати» хвилю, яка відійшла на достатню відстань. Таким чином, у межах апертури формується усталений потік енергії, що вказує на завершення дії збудження.

У подальших розрахунках, якщо не зазначено інше, використовуються такі параметри: амплітуда поверхневого струму на апертурі $A_0 = 1$ А/м, її радіус $R = 1$ м.

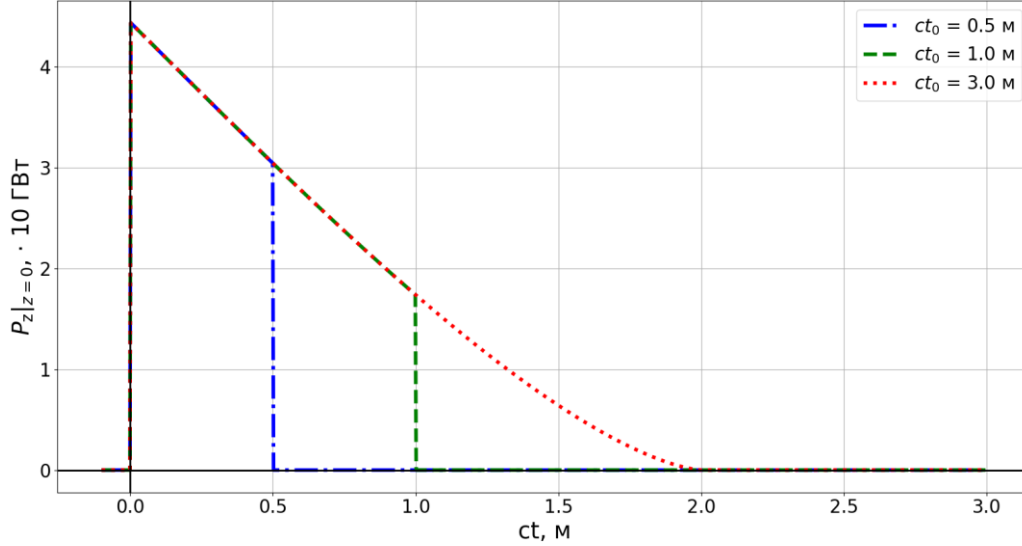


Рис. 1. Часова залежність потоку енергії хвилі, збудженої прямокутним імпульсом, для різних значень тривалості збудження ct_0

Fig. 1. Time dependence of the energy flux of a wave excited by a rectangular pulse for different values of excitation duration ct_0

Розглянемо повну енергію, що випромінюється з апертури. Відповідно до класичного визначення

$$W_z(z) = \int_0^{\infty} P_z(z, t) dt. \quad (11)$$

Підставимо сюди вираз (10). Завдяки наявності в ньому функцій Хевісайда, верхню межу можна обмежити значенням t_0 . Отже, маємо:

$$W_z(z)|_{z=0} = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^{t_0} dt \left(\left\{ \frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{ct}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} \right), \quad \begin{matrix} 0 < ct < 2R; \\ 0 < 2R < ct. \end{matrix} \right\} - \right. \\ \left. - \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{c(t-t_0)}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2(t-t_0)^2} \right), \quad \begin{matrix} ct_0 < ct < 2R + ct_0; \\ ct_0 < 2R + ct_0 < ct. \end{matrix} \right\} \right)$$

Виявляється, що залежно від співвідношення між тривалістю імпульсу та геометричними розмірами апертури існує дві якісно різні ситуації. Якщо $t_0 < 2R/c$, то фронт хвилі ще не вийшов за межі випромінювача, і накопичення енергії триває до моменту вимкнення джерела (тобто верхня межа інтегрування залишається рівною t_0). Якщо ж $t_0 \geq 2R/c$, то хвиля вже повністю сформувалася й залишила апертуру. У цьому випадку подальше збудження не впливає на потік через випромінювальну площину, і енергія досягає сталого значення вже при $t = 2R/c$. У кожному з випадків другий доданок у виразі для енергії в момент $t = t_0$ не лежить у межах інтервалу інтегрування, і тому дорівнює нулю. Подамо ці міркування математично:

$$W_z(z)|_{z=0} = c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \begin{cases} \int_0^{t_0} dt \left(\arccos \frac{ct}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} \right), & t_0 < \frac{2R}{c}; \\ \int_0^{2R/c} dt \left(\arccos \frac{ct}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} \right), & t_0 \geq \frac{2R}{c}. \end{cases}$$

Ці інтеграли можна обчислити аналітично. Перший доданок інтегрується частинами, а другий – за допомогою підстановки з внесенням множника під знак диференціала. Результати мають вигляд:

$$\int_0^{t'} dt \arccos \frac{ct}{2R} = \frac{2R}{c} \left(\frac{ct'}{2R} \arccos \frac{ct'}{2R} + 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{ct'}{2R} \right)^2} \right);$$

$$\int_0^{t'} dt \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t'^2} = \frac{2R}{3c} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{ct'}{2R} \right)^2 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{ct'}{2R} \right)^2} \right).$$

Кінцевий вираз для випроміненої енергії:

$$W_z(z)|_{z=0} = \begin{cases} c A_0^2 R^3 \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{ct_0}{2R} \arccos \frac{ct_0}{2R} - \sqrt{1 - \left(\frac{ct_0}{2R} \right)^2} + \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{ct_0}{2R} \right)^2 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{ct_0}{2R} \right)^2} \right), & ct_0 < 2R; \\ c A_0^2 R^3 \frac{\mu_0}{3}, & ct_0 \geq 2R. \end{cases} \quad (12)$$

На Рис. 2 зображено залежність випроміненої енергії (12) від тривалості прямокутного імпульсу ct_0 . При малих його значеннях, енергія поступово зростає, оскільки хвиля ще не повністю вийшла з апертури. У момент, коли $ct_0 = 2R$, хвиля повністю сформована і вийшла за межі джерела. Після цього енергія досягає насичення і зберігається на постійному рівні, який дорівнює енергії стрибкоподібного збудження. Цей результат демонструє зв'язок між тривалістю збудження та ступенем енергетичної насиченості поля у межах апертури. Відзначимо, що функція (12) є неперервною і перехід до усталеного режиму відбувається без розривів.

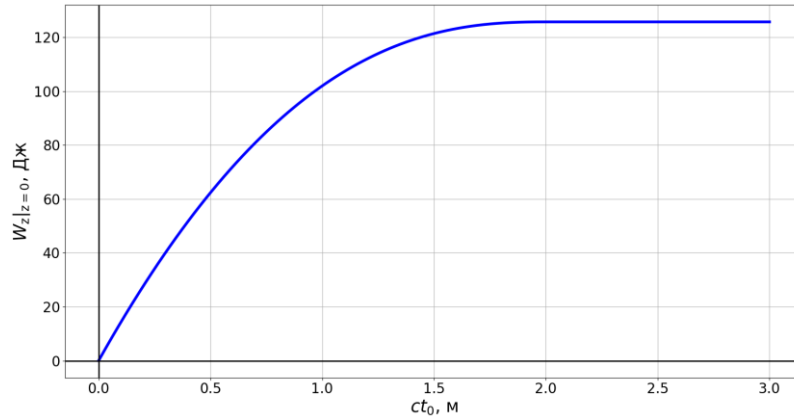


Рис. 2. Залежність енергії, накопиченої на апертурі, від тривалості прямокутного імпульсу
Fig. 2. Dependence of the energy accumulated at the aperture on the duration of the rectangular pulse

Випадок 2. Наближення дальньої зони

Припустимо, що точка спостереження знаходиться на значній відстані від апертури. Тоді можна припустити, що основний внесок у поле, а отже й у потік енергії, дають лише функції Бесселя нульового порядку, в той час як вплив рядів по парних циліндричних функціях є незначним:

$$J_0 \left(\chi \sqrt{c^2(t-t_0)^2 - z^2} \right) \gg 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c(t-t_0) - z}{c(t-t_0) + z} \right)^k J_{2k} \left(\chi \sqrt{c^2(t-t_0)^2 - z^2} \right).$$

Це наближення дозволяє спростити повний вираз (9) до більш компактно форми:

$$P_z^{A.3.}(z, t) = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^{\infty} d\chi \frac{1}{\chi} J_1(\chi R) J_1(\chi R) \left(J_0 \left(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) H(t) - J_0 \left(\chi \sqrt{c^2(t-t_0)^2 - z^2} \right) H(t-t_0) \right)^2. \quad (13)$$

Аналітичне інтегрування результату (13) не є можливим через складну структуру підінтегрального виразу. Тому подальший аналіз виконується числовим методом Гауса-Кронрода. На Рис. 3 наведено два сімейства графіків потоку енергії як функції часової затримки $ct - z$ для фіксованих значень відстані z дальньої зони. Розглядаються два режими: імпульс із тривалістю $ct_0 < 2R$ (лівий графік) та $ct_0 \geq 2R$ (правий графік). Незалежно від випадку, спостерігається однакова поведінка кривих. На початку усі вони демонструють поступове загасання. У момент, коли $ct - z = ct_0$, відбувається різкий стрибок амплітуди потоку, після якого він знову входить у фазу загасання, немов би хвиля «відновлюється». Такий ефект можна інтерпретувати накладанням другого хвильового фронту, зумовленого вимкненням джерела, на перший – фронт увімкнення. Це своєрідне накладання, яке тимчасово підсилює амплітуду в певній точці простору.

На лівому графіку видно, що кінці всіх трьох кривих прямують до однакових значень. Аналогічна поведінка характерна і правому, хоча там сплеск виникає на більш віддаленому фронті. При збільшенні ct_0 сплеск віддаляється у часі, і характер функції до нього все більше нагадує випадок стрибкоподібного збудження. Проте повного переходу до нього не відбувається навіть при значних значеннях ct_0 . Це свідчить про те, що формула (13), хоч і враховує часові зсуви, залишається наближеним представленням хвильового процесу.

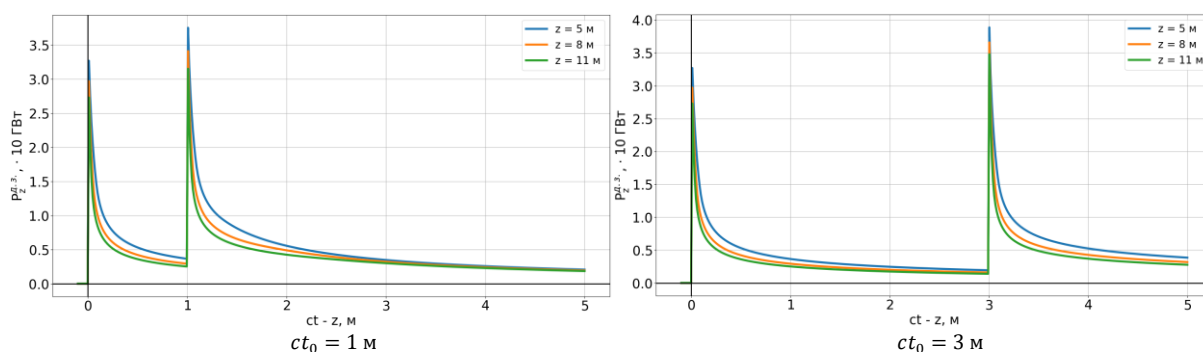


Рис. 3. Залежність потоку енергії в дальній зоні від часової затримки $ct - z$ для кількох фіксованих відстаней z і різних значень тривалості імпульсу ct_0

Fig. 3. Dependence of the energy flux in the far zone on the time delay $ct - z$ for several fixed distances z and different values of the pulse duration ct_0

На Рис. 4 зображено залежності потоку енергії в дальній зоні від часової затримки $ct - z$ для фіксованої відстані $z = 11$ м, при різних значеннях тривалості імпульсу ct_0 . З її збільшенням сплеск амплітуди потоку відбувається на все пізніших фронтах – у точках $ct - z = ct_0$. При цьому поведінка графіка до моменту сплеску поступово наближається до залежності, характерної для стрибкоподібного збудження.

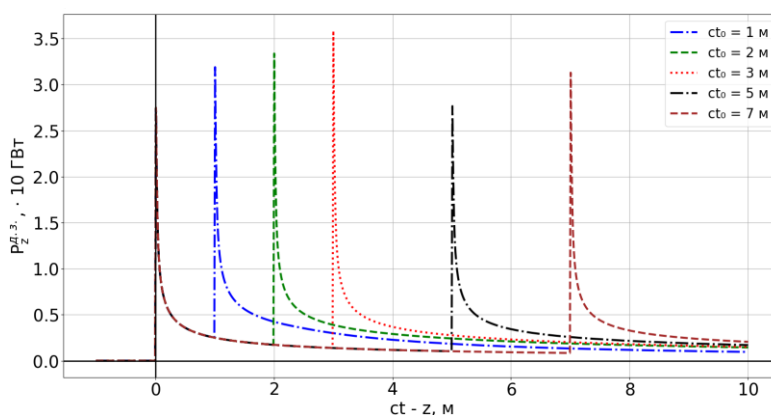


Рис. 4. Залежність потоку енергії в дальній зоні від часової затримки $ct - z$ для фіксованої відстані $z = 11$ м при різних значеннях тривалості імпульсу ct_0

Fig. 4. Dependence of the energy flux in the far zone on the time delay $ct - z$ for a fixed distance $z = 11$ m at different values of the pulse duration ct_0

Перейдемо до аналізу повної енергії хвилі (11) у наближенні дальньої зони. Інтегрування виконується числовим методом. На Рис. 5 показано залежність цієї енергії від координати z при фіксованій тривалості імпульсу $ct_0 = 1$ м. На малих відстанях від апертури енергія зменшується швидше. Це пояснюється тим,

що частина енергії імпульсу витрачається на формування статичного поля в ближній зоні, яке швидко загасає з відстанню. Таким чином, первинна енергія перетворюється не лише у хвильову компоненту, а й у локальне статичне поле. На більших відстанях це поле вже не помітне, і хвильовий імпульс продовжує поширюватися, що відповідає повільному зменшенню повної енергії з відстанню. Це загасання частково пов'язане із розширенням фронту хвилі та концентрацією її енергії вздовж нормалі.

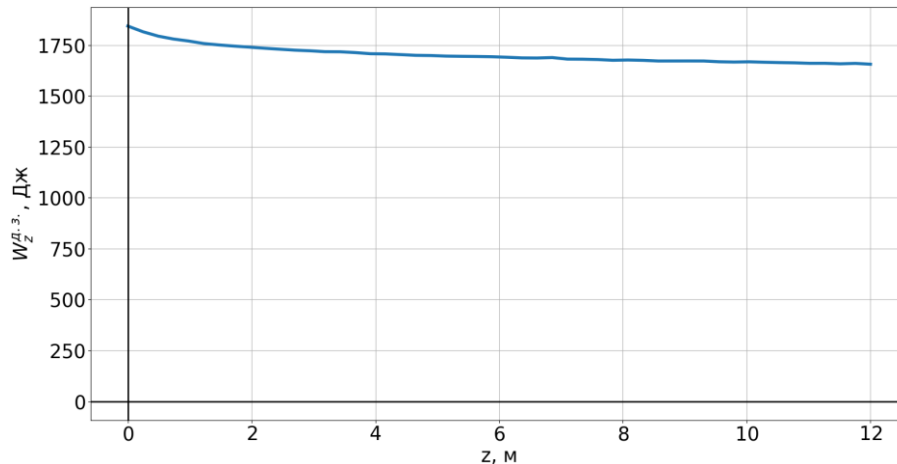


Рис. 5. Залежність повної енергії хвилі в дальній зоні від координати для фіксованої тривалості імпульсу $ct_0 = 1$ м
Fig. 5. Dependence of the total wave energy in the far zone on the coordinate for a fixed pulse duration $ct_0 = 1$ м

Цікаво також дослідити, як повна енергія залежить від самої тривалості збуджуючого імпульсу. На Рис. 6 представлено графік цієї залежності, якщо відстань дальньої зони становить 11 м. Поведінка енергії тут якісно відповідає тій, що спостерігалась у випадку $z = 0$ м (Рис. 2), що дає узгодженість енергетичних характеристик. Зазначимо, що незначні осциляції на графіках (Рис. 5 та Рис. 6), ймовірно, пов'язані з похибками числового інтегрування для швидкоосцилюючих підінтегральних виразів. Вони не мають фізичного значення і не впливають на загальні закономірності.

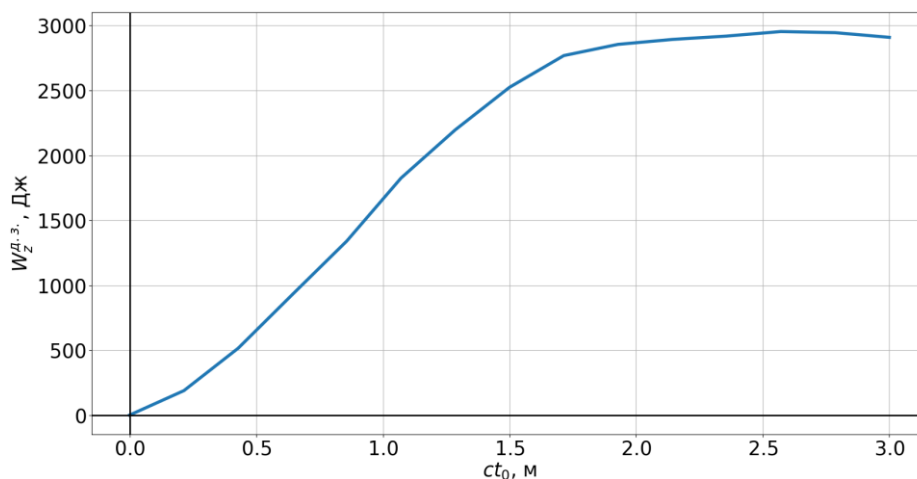


Рис. 6. Залежність повної енергії хвилі в дальній зоні від тривалості імпульсу для фіксованої відстані $z = 11$ м
Fig. 6. Dependence of the total wave energy in the far zone on the pulse duration for a fixed distance $z=11$ м

Випадок 3. Загальний

Повернемося до повного виразу для потоку енергії (9), без жодних спрощень, і проведемо його аналіз. У числовому розрахунку було враховано перші 10 членів ряду. На Рис. 7 зображено дві серії графіків потоку енергії як функції часової затримки, для фіксованих значень відстані від апертури z , що дає змогу порівняти, як змінюється динаміка фронту в ближній і дальній зонах, та двох різних значень тривалостей імпульсу, що характеризують різні режими випромінювання. В обох серіях графіків криві для $z = 0$ м

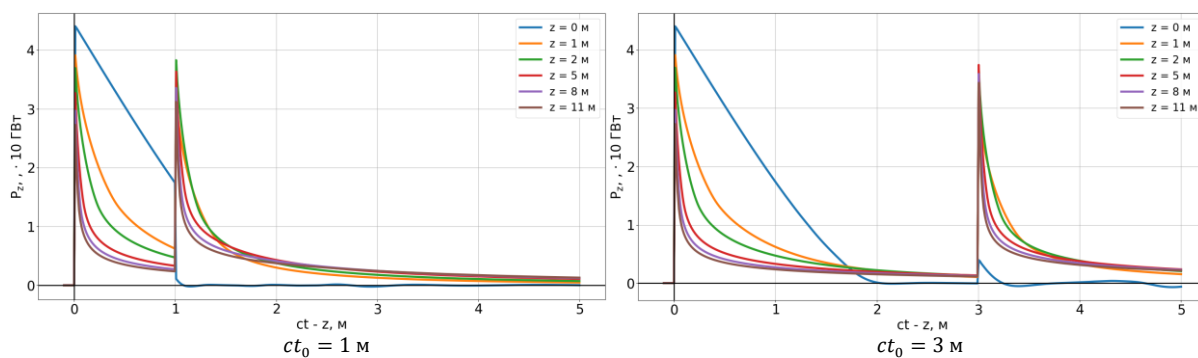


Рис. 7. Залежність потоку енергії від часової затримки $ct - z$ для кількох фіксованих відстаней z і різних значень тривалості імпульсу ct_0

Fig. 7. Dependence of energy flow on time delay $ct - z$ for several fixed distances z and different values of pulse duration ct_0

практично повторюють аналітичний розв'язок (Рис. 1). Єдине відхилення – малий стрибок амплітуди в момент $ct - z = ct_0$, який з'являється вже після того, як крива вийшла на нуль (правий графік). Цей ефект не має фізичної природи, а є наслідком числового наближення: при обмеженій кількості членів ряду повне скасування парних Бесселів не відбувається, що дає спектральну похибку типу Гібса. При збільшенні кількості доданків цей сплеск поступово зникає. Для інших значень відстані $z > 0$, як для ближньої, так і дальньої зони, навпаки, подібні стрибки мають фізичне походження, оскільки відображають інтерференцію двох фронтів: від вмикання та від вимикання імпульсу. Таке накладання формує характерний енергетичний «удар», який не зникає при збільшенні кількості доданків рядів, та що узгоджується з результатом, представленим на Рис. 3.

На Рис. 8 подано два сімейства графіків залежності потоку енергії від часової затримки. Аналіз проводиться для двох фіксованих відстаней $z = 0$ м та $z = 2$ м, при різних значеннях тривалості імпульсу $ct_0 = 0,5; 2; 3$ м. Як і з Рис. 7, тут для нульової відстані (лівий графік) отримані результати майже повністю збігаються з аналітичним розв'язком, представленим на Рис. 1, за винятком невеликого стрибка при $ct - z = ct_0$ для третьої (точкової) кривої. Для ненульового z (правий графік), від ближньої до дальньої зони, поведінка графіків якісно не змінюється. Точка стрибка зсувається вправо, відповідно до часу дії збудження, а форма хвильового фронту до моменту вимкнення все більше нагадує випадок стрибкоподібного збудження, повторюючи логіку, вже описану для Рис. 4.

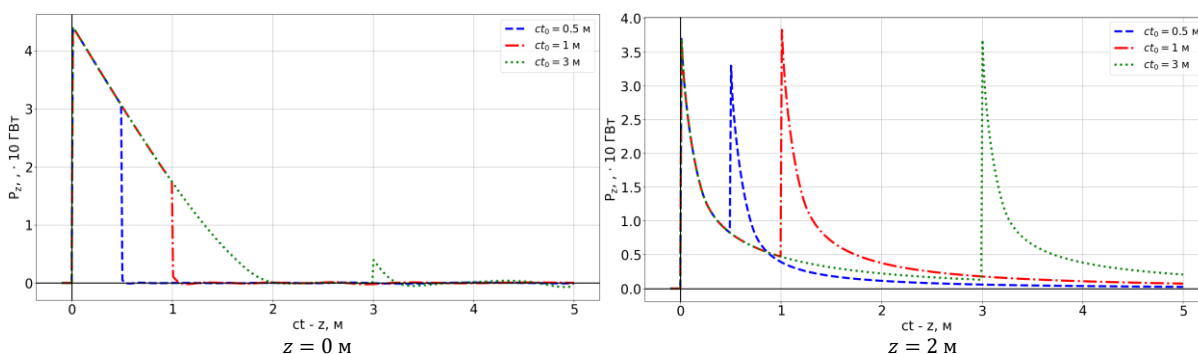


Рис. 8. Залежність потоку енергії від часової затримки $ct - z$ для фіксованих відстаней при різних значеннях тривалості імпульсу ct_0

Fig. 8. Dependence of energy flow on time delay $ct - z$ for fixed distances at different values of pulse duration ct_0

На Рис. 9 представлено тривимірну картину залежності потоку енергії як від часової затримки, так і від координати від випромінювача, яка демонструє просторово-часову динаміку поширення імпульсу у вільному просторі. Тривалість прямокутного імпульсу обрано $ct_0 = 3$ м. Якщо фіксувати координату z та розглядати часову залежність, то побачимо поведінку, ідентичну до двовимірних графіків, наведених на Рис. 3 і Рис. 7. Додамо, що зі збільшенням z сплески амплітуд дещо згладжуються, але залишаються вираженими. Якщо розглядати інший зріз, коли фіксується часова змінна, а просторова змінюється, то можна виділити дві суттєві області. У зоні початкового фронту (в околі площини $ct - z = 0$ м) помітний різкий максимум поблизу $z = 0$ м, який поступово загасає з ростом відстані. Цей пік пов'язаний з високою концентрацією енергії у ближній зоні одразу після увімкнення джерела. Математично він обумовлений

особливістю підінтегрального виразу, зокрема тим, що для малих z аргумент функції Бесселя нульового порядку досягає максимального значення. Доданок у вигляді ряду в такому випадку матиме дробові коефіцієнти, що наближаються до 1, та функції Бесселя парних порядків, які прямують до 0. У результаті спостерігається посилення інтегрального внеску за рахунок функції Бесселя нульового порядку. Друга область (окіл площини $ct - z = ct_0$), що пов'язана з фронтом вимкнення імпульсу, не породжує настільки гострого піку, а сам фронт плавніше спадає з ростом z . Цей ефект пов'язаний з тим, що після поширення у просторі хвильовий імпульс частково інтерферує із самим собою, внаслідок чого частина високочастотних коливань згладжується. Крім того, на момент вимкнення імпульсу поле вже заповнило значну частину простору, і його геометрія змінює локальну інтенсивність потоку. Як результат, фінальний стрибок є менш концентрованим.

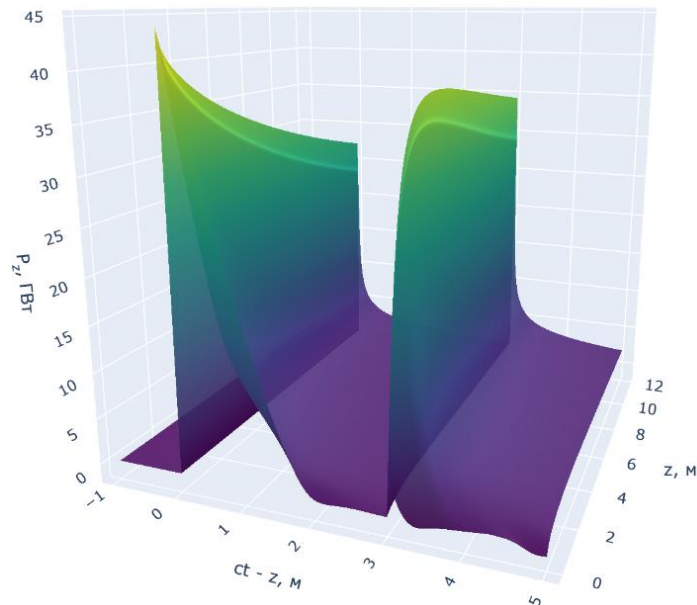


Рис. 9. Залежність потоку енергії від часової затримки $ct - z$ і відстані від апертури z для тривалості імпульсу $ct_0 = 3$ м

Fig. 9. Dependence of energy flux on time delay $ct - z$ and distance from aperture z for pulse duration $ct_0 = 3$ м

Наостанок розглянемо енергію збудження прямокутним імпульсом (11). На Рис. 10 показано залежність повної енергії як функції відстані, якщо тривалість імпульсу $ct_0 = 3$ м. Проведено порівняння результатів, отриманих за допомогою інтегрування по часу загального виразу (9), з наближенням дальньої зони (13). Крива, побудована за загальним виразом, дає менші значення енергії, ніж у наближенні дальньої зони. Цей ефект пояснюється тим, що в загальному випадку поле формується не лише хвильовою частиною, а й нестационарними складовими, пов'язаними з локалізованим збуренням поблизу апертури. У момент збудження джерело генерує статичне поле, яке частково «заповнює» ближню зону і не сприяє поширенню енергії у напрямку осі. Натомість у наближенні дальньої зони враховується лише синхронне поширення фронтів, що дає завищену оцінку енергетичного потоку. На великих відстанях обидві криві поступово вирівнюються, що вказує на зникнення енергетичних складових ближнього поля. Повільне загасання енергії з відстанню нагадує поведінку, характерну для «електромагнітного снаряду»: зосереджений імпульс переносить скінченну кількість енергії яка зберігається в його структурі на великій відстані [9].

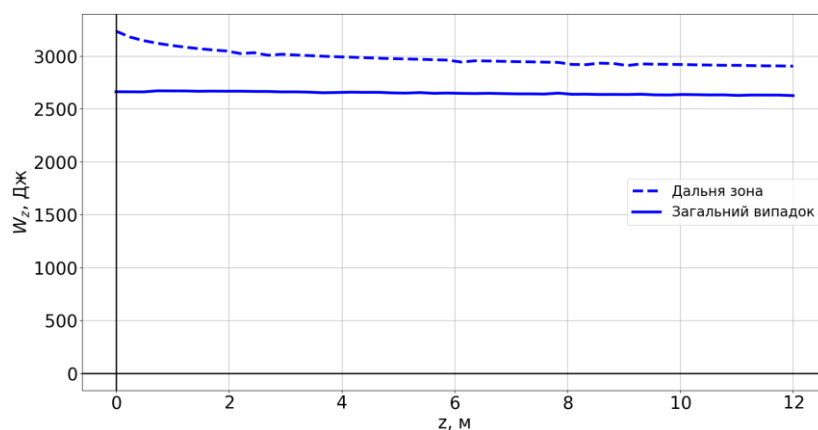


Рис. 10. Залежність повної енергії хвилі від координати для випадків випромінювання у дальній зоні та загального, якщо тривалість імпульсу $ct_0 = 3$ м

Fig. 10. Dependence of the total wave energy on the coordinate for cases of radiation in the far zone and total radiation, if the pulse duration $ct_0 = 3$ m

На Рис. 11 подано залежність енергії, що проходить через площину $z = \text{const}$, від тривалості прямокутного імпульсу ct_0 . Для малого часу спостереження $ct \leq 2R$ і випромінювання через апертурну площину $z = 0$ було розглянуто три криві: точний розв'язок, дальню зону і загальний випадок (лівий графік). Помітно, що точний розв'язок і загальний випадок ідеально збігаються, тоді як наближення дальньої зони дещо неправильно оцінює енергію, хоча якісно відтворює поведінку залежності, зокрема насичення при $ct_0 \geq 2R$. Якщо узяти віддалену поперечну площину ($z = 5$ м, правий графік) і великий час спостереження, то крива дальньої зони знаходиться вже вище, ніж для загального випадку. Пояснення цього ідентичне як і до Рис. 10. Якісна фізична картина між кривими є однаковою.

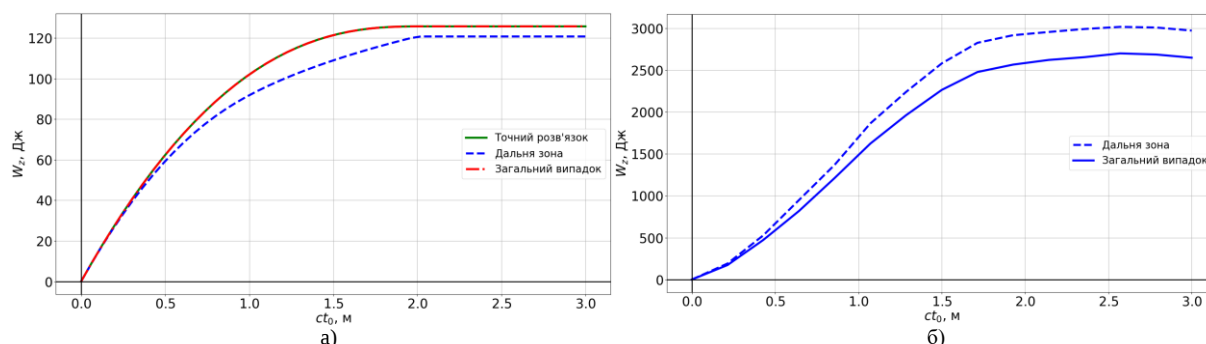


Рис. 11. а) Залежність енергії на апертурі ($z = 0$ м) від тривалості імпульсу при обмеженому часі спостереження ($ct \leq 2R$) для трьох випадків аналізу формули (12); б) залежність повної енергії від тривалості імпульсу на відстані $z = 5$ м до випромінювача для двох випадків аналізу формули (12)

Fig. 11. a) Dependence of energy at the aperture ($z=0$ m) on pulse duration with limited observation time $ct \leq 2R$ for three cases of analysis of formula (12); b) dependence of total energy on pulse duration at a distance $z=5$ m from the emitter for two cases of analysis of formula (12)

ВИСНОВКИ

Показано, що наближення дальньої зони у разі прямокутного імпульсного збудження задовільно відтворює якісну фізичну картину поширення хвилі, однак має обмежену точність у кількісному описі енергетичних характеристик. Зокрема, для малих часів спостереження воно недооцінює повну енергію, тоді як для великих значень часу суттєво її переоцінює в ближній зоні, що зумовлено ігноруванням статичних компонент поля. Простежується ефект «електромагнітного снаряду», за якого імпульсна енергія поширюється у вигляді компактної структури зі сталою формою. Встановлено також наявність початкового енергетичного потоку, необхідного для формування статичного поля, і його вплив на процес випромінювання.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

REFERENCES

1. Taylor JD. Ultrawideband radar: applications and design. Boca Raton, London, New York: CRC Press; 2012. 536 p. <https://doi.org/10.1201/b12356>.
2. Brittingham IN. Focus wave modes in homogeneous Maxwell's equations: Transverse electric mode. J. Appl. Phys. 1983;54(3): 1179–1189. <https://doi.org/10.1063/1.332196>.
3. Belanger PA. Packetlike solutions of the homogeneous-wave equation. J. Opt. Soc. Am. A. 1984;1(7):723–724. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.1.000723>.
4. Heyman E, Felsen LB. Propagating pulsed beam solutions by complex source parameter substitution. IEEE Trans. Antennas Propag. 1986;34(8):1062–1065. <https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143934>.
5. Ziolkowski RW. Localized transmission of electromagnetic energy. Phys. Rev. A. 1989;39(4):2005–2033. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.39.2005>.
6. Ziolkowski RW. Localized wave physics and engineering. Phys. Rev. A. 1991;44(6):3960–3984. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.44.3960>.
7. Ziolkowski RW. Properties of electromagnetic beams generated by ultra-wide bandwidth pulse-driven arrays. IEEE Trans. Antennas Propag. 1992; 40(8):888–905. <https://doi.org/10.1109/8.163426>.
8. Shaarawi AM, Besieris IM, Ziolkowski RW. A novel approach to the synthesis of nondispersive wave packet solutions to the Klein-Gordon and Dirac equations. J. Math. Phys. 1990;31(10):2511–2519. <https://doi.org/10.1063/1.528995>.
9. Wu TT. Electromagnetic missiles. J. Appl. Phys. 1985;57(7):2370–2373. <https://doi.org/10.1063/1.335465>.
10. Sodin LG. Characteristics of pulsed radiation from antennas (An electromagnetic missile). Radiotekhnika i elektronika. 1992;5(37):849–857. (in Russian)
11. Shen HM, Wu TT, Myers JM. Experimental study of electromagnetic missiles from a hyperboloidal lens. Proc. SPIE. 1991;1407:286–294. <https://doi.org/10.1117/12.43506>.
12. Wu TT, King RWP, Shen HM. Spherical lens as a launcher of electromagnetic missiles. J. Appl. Phys. 1987;62:4036–4040. <https://doi.org/10.1063/1.339115>.
13. Dumin OM, Tretyakov OO. Radiation of arbitrary signals by plane disk. Proc. 6th Int. Conf. Math. Methods Electromagn. Theory. 1996:248–251. <https://doi.org/10.1109/MMET.1996.565704>.
14. Butrym AY, Zheng Y, Dumin OM, Tretyakov OO. Transient wave beam diffraction by lossy dielectric half space. Proc. 10th Int. Conf. Math. Methods Electromagn. Theory. 2004:321–323. <https://doi.org/10.1109/MMET.2004.1397025>.
15. Huang L, Qiao Z, Chen Y. Soliton-cnoidal interactional wave solutions for the reduced Maxwell-Bloch equations. Chin. Phys. B. 2018;27(2):020201. 8 p. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/27/2/020201>.
16. Benci V. A model for the Maxwell equations coupled with matter based on solitons. Symmetry. 2021;13(5):760. 29 p. <https://doi.org/10.3390/sym13050760>.
17. Kopylova EA, Komech AI. On asymptotic stability of solitons for 2D Maxwell-Lorentz equations. J. Math. Phys. 2023;64(10):101504. <https://doi.org/10.1063/5.0134272>.
18. Riaz HW, Farooq A. Solitonic solutions for the reduced Maxwell-Bloch equations via the Darboux transformation and artificial neural network in nonlinear wave dynamics. Phys. Scr. 2024;99(12):126010. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad9420>.
19. Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA., Katrich VO. Energy Transformation of Transient Radiation of Plane Source with Step-Like Excitation. Proc. 2023 IEEE XXVIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). 2023;20–23. <https://doi.org/10.1109/DIPED59408.2023.10269461>.
20. Tretyakov OO, Dumin OM. Emission of Nonstationary Electromagnetic Fields by a Plane Radiator. Telecommun. Radio Eng. 2000;54(1):2–15. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v54.il.10>.
21. Akhmedov RD, Dumin OM, Katrich VO. Impulse radiation of antenna with circular aperture. Telecommun. Radio Eng. 2018;77(20):1767–1784. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v77.i20.10>.
22. Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA. Time domain analysis of impulse electromagnetic field at the interface of two media. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series “Radio Physics and Electronics”. 2021;35:41–55. (In Ukrainian) <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-04>.
23. Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA, Katrich VO. Evolutionary Approach to Energy Transformation of Short Rectangular Pulse Radiated from Aperture. Proc. 2023 IEEE International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics (UkrMiCo). 2023;228–232. <https://doi.org/10.1109/UkrMiCo61577.2023.10380340>.
24. Abramowitz M, Stegun I. Handbook of Mathematical Functions. 1964. 832 p.
25. Prudnikov AP, Bychkov YuA, Marichev OI. Integrals and Series, Vol. 2: Special Functions. Gordon and Breach Science Publishers. New York. 1986. 750 p.

Стаття надійшла до редакції: 12 березня 2025

Рекомендовано до друку: 23 квітня 2025

ENERGY ANALYSIS OF A TRANSIENT WAVE PROCESS EXCITED BY A RECTANGULAR PULSE

D. I. HAVRYLENKO, O. M. DUMIN, S. L. BERDNYK

V. N. Karazin Kharkiv National University, 4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, Ukraine

Background. With the rapid advancement of ultrawideband technologies, pulsed antennas are becoming increasingly essential tools in applications involving radio communication, location, and remote sensing. Unlike harmonic sources, whose dynamics are well-described in the frequency domain, real pulsed emitters operate with finite-duration excitations, which significantly alter both the nature of the electromagnetic field and the process of energy transfer. One of the physically realistic excitation scenarios is the rectangular pulse, which models a situation where the source is active for a limited time interval and then turned off. This type of pulse more accurately reflects the actual operating conditions of pulsed systems than idealized step-like excitation. Investigating the energy characteristics in the time domain not only deepens the understanding of radiation mechanisms but also contributes to the improved design of efficient antennas and sources. Such insights directly impact the enhancement of range, noise immunity, and accuracy in communication and observation systems, as well as the reduction of energy losses and near-field exposure. Analyzing the transformation of pulsed energy at different stages of excitation, from the formation of wavefronts to their propagation, is key to developing high-fidelity models of the electromagnetic field.

Objectives. To derive analytical and numerical dependencies that describe the energy characteristics of the electromagnetic field excited by a rectangular pulse. Specifically, the aim is to obtain expressions for the energy flux through the transverse plane at an arbitrary distance from the aperture, as well as to determine the total wave energy at different stages of its spatiotemporal evolution. Where analytical solutions are unattainable, apply numerical methods. Provide a physical interpretation of the obtained results, and assess the influence of pulse duration on wave behavior.

Materials and methods. The problem is formulated as a transient three-dimensional propagation scenario of an H -wave excited by a rectangular pulse from a circular aperture into the free half-space. General field solutions are constructed using the evolutionary approach. These solutions are expressed through the evolutionary coefficients, which are obtained as solutions of the inhomogeneous Klein-Gordon equation using the Riemann function method. To determine the energy flux, the longitudinal component of the Poynting vector is used. Numerical computations are carried out via the Gauss-Kronrod method.

Results. Exact analytical expressions for the energy flux and total energy at the aperture under rectangular excitation have been obtained. Generalized formulas have been derived for arbitrary planes, taking into account the temporal and spatial evolution of the field. A comparison with the far-field approximation shows that it may overestimate energy values in the near zone. A three-dimensional visualization of the spatiotemporal dynamics has been constructed, clearly demonstrating the formation and interaction of wavefronts. The process of energy accumulation in the near field has been analyzed, along with the manifestation of the “electromagnetic missile” effect, where the excitation exists in the form of a compact energy pulse.

Conclusions. This study presents, for the first time, analytical and numerical models for rectangular excitation of an H -wave from an aperture radiator in the time domain. It is shown that, in the case of finite-duration pulses, the field exhibits more complex temporal dynamics than under step-like excitation. It is established that the energy flux near the aperture arises from the interaction of static and wave components, which render far-field approximations inaccurate at low values of the longitudinal coordinate. The slow decay of energy with distance indicates that a significant portion is concentrated in a compact front that retains its structure during propagation. The analysis refines the applicability conditions of approximate models and provides a foundation for further research aimed at optimizing pulsed antennas and radiation systems.

KEY WORDS: Evolutionary Equations Method, rectangular pulse, soliton-like solution, energy transformation

The article was received by the editors: March 12 2025

The article is recommended for printing: April 23 2025