

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-01>

УДК 537.87

С. М. ШУЛЬГА, д. ф.-м. н., професор

e-mail: sergeyshulga@karazin.ua ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-9392-9366>

О. В. БАГАЦЬКА, к. ф.-м. н., доцент

e-mail: bagatska@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4078-4132>

С. О. ВІННІЧЕНКО, н.с.

e-mail: winnt1986@gmail.com

А. О. МАСЛЕННИКОВ, аспірант

e-mail: djanton2011@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7728-6559>

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

МОДОВІ РОЗКЛАДАННЯ ПОЛІВ У ВИГЛЯДІ СОЛЕНОЇДАЛЬНИХ І ПОТЕНЦІАЛЬНИХ СКЛАДОВИХ У ЗАКРИТОМУ ХВИЛЕВОДІ

Актуальність. Наприкінці минулого століття виникла необхідність у точному розв'язанні задачі про збудження нестационарних полів у закритих і відкритих електродинамічних структурах. На кафедрі теоретичної радіофізики у 80-х роках було запропоновано альтернативний до методу Фур'є метод модового базису для закритих порожнистих резонаторів. У запропонованій роботі розглянуто електродинамічну задачу про збудження нестационарного поля у відкритому циліндричному хвилеводі. При цьому з самого початку вихідну систему рівнянь Максвелла розбито на дві системи рівнянь для соленоїдальних і потенціальних векторів.

Мета роботи. Показати можливість застосування методу модового базису для суперпозиції соленоїдальних і потенціальних полів у хвилеводі з діелектричним заповненням.

Матеріали та методи. Під час розв'язання окремих спектральних електродинамічних задач для соленоїдальних і потенціальних складових векторів електромагнітного поля в роботі доведено ортогональність зазначених власних векторів в об'ємі хвилеводу з урахуванням умови обмеженості полів на торцях хвилеводу при прагненні поздовжньої компоненти циліндричного хвилеводу до плюс/мінус нескінченності.

Результати. У припущенні повноти знайдених власних функцій шукане поле представлено у вигляді суми розкладання за елементами модового базису для соленоїдальних і потенціальних полів з коефіцієнтами, що залежать від часу. Для часових коефіцієнтів отримано диференціальні рівняння першого порядку.

Висновки. У роботі на прикладі нескінченного циліндричного хвилеводу з діелектричним і діаманітним заповненням запропоновано різновид модового базису, коли на початковому етапі розв'язання рівнянь Максвелла векторні величини вихідної задачі подають у вигляді суми соленоїдальних і потенціальних складових. Після доведення ортогональності власних вектор-функцій для потенціальних і соленоїдальних полів і припущення їхньої повноти, у статті отримано розв'язки зі збудження хвилеводу нестационарними джерелами у вигляді розкладання за власними функціями з невідомими часовими коефіцієнтами.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: метод модового базису, соленоїдальні та потенціальні складові поля, задача на власні функції.

Як цитувати: Шульга СМ, Багацька ОВ. Модові розкладання полів у вигляді соленоїдальних і потенціальних складових у закритому хвилеводі. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2025;42:7-14. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-01>

In cites: Shulga SM, Bagatska OV. Mode decomposition of fields into solenoidal and potential components in a closed waveguide. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radiophysics and Electronics". 2025;42:7-14. (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-01>

ВСТУП

Довільне електромагнітне поле є сумою соленоїдального та потенціального полів. Через це виникає задача про представлення електромагнітного поля у хвилеводі у вигляді суперпозиції окремих модових розкладань за соленоїдальними і потенціальними складовими поля. Для її розв'язання ми будемо використовувати метод модового базису (ММБ) [1-4] для двох складових електромагнітного поля. Раніше в роботі [4] було розглянуто особливості побудови модового базису для відкритих електродинамічних структур. У запропонованій роботі розглянуто особливості побудови модового базису для відкритого

© Шульга С. М., Багацька О.В., 2025

Open access. This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

хвильоводу з використанням обмеженості напруженостей електричного і магнітного полів для соленоїдальних і потенціальних складових за умови прагнення поздовжньої координати хвильоводу до нескінченності. Розв'язання задачі проводиться на прикладі нескінченного циліндричного хвильоводу з діелектричним і діаманітним заповненням. Після доведення ортогональності власних вектор-функцій для потенціальних і соленоїдальних полів і припущення їхньої повноти у статті отримано розв'язки щодо збудження хвильоводу нестационарними джерелами у вигляді розкладання за власними функціями з невідомими часовими коефіцієнтами. Ці коефіцієнти для соленоїдальних векторних полів знаходяться із системи диференціальних рівнянь першого порядку, а коефіцієнти для потенціальних векторних полів – із двох незалежних диференціальних рівнянь також першого порядку.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо циліндричний хвильовід, вісь якого спрямована вздовж осі z . Нехай S – його поперечний переріз у площині $z = 0$, ∂S – контур, що обмежує S . Сформулюємо електродинамічну задачу про збудження нестационарного поля в такому хвильоводі

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}(\vec{R}, t) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}(\vec{R}, t)}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{M}(\vec{R}, t), \\ \nabla \times \vec{H}(\vec{R}, t) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{R}, t)}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{R}, t), \\ \operatorname{div} \varepsilon \vec{E}(\vec{R}, t) &= 4\pi \rho_e(\vec{R}, t), \\ \operatorname{div} \mu \vec{H}(\vec{R}, t) &= 4\pi \rho_h(\vec{R}, t), \quad 0 < t < +\infty, \vec{R} \in V\end{aligned}\quad (1)$$

з нульовими початковими даними та граничною умовою $\vec{E}_\tau(\vec{R}, t) = 0$ на бічних стінках хвильоводу. Тут $\vec{R} = (x, y, z)$, V – внутрішня область хвильоводу, $\vec{J}(\vec{R}, t)$ і $\vec{M}(\vec{R}, t)$ – густини струмів, а $\rho_e(\vec{R}, t)$ і $\rho_h(\vec{R}, t)$ – густини зарядів (електричного та магнітного типів відповідно), c – швидкість світла у вакуумі, ε і μ – діелектрична та магнітна проникності ($\varepsilon, \mu = \text{const}$); $\vec{E}_\tau(\vec{R}, t)$ – компонента поля, дотична до бічної поверхні Σ хвильоводу.

Представимо векторні величини вихідної задачі у вигляді суми соленоїдальних і потенціальних складових:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{R}, t) &= \vec{E}_s(\vec{R}, t) + \vec{E}_p(\vec{R}, t), \quad \vec{H}(\vec{R}, t) = \vec{H}_s(\vec{R}, t) + \vec{H}_p(\vec{R}, t); \\ \vec{J}(\vec{R}, t) &= \vec{J}_s(\vec{R}, t) + \vec{J}_p(\vec{R}, t), \quad \vec{M}(\vec{R}, t) = \vec{M}_s(\vec{R}, t) + \vec{M}_p(\vec{R}, t).\end{aligned}\quad (2)$$

Як результат рівняння Максвелла (1) розбиваються на дві задачі:

- для соленоїдальних векторів:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}_s(\vec{R}, t) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}_s(\vec{R}, t)}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{M}_s(\vec{R}, t), \\ \nabla \times \vec{H}_s(\vec{R}, t) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}_s(\vec{R}, t)}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}_s(\vec{R}, t), \\ \operatorname{div} \varepsilon \vec{E}_s(\vec{R}, t) &= 0, \\ \operatorname{div} \mu \vec{H}_s(\vec{R}, t) &= 0, \\ \vec{E}_{s\tau}(\vec{R}, t) &= 0, \quad \vec{H}_{sN}(\vec{R}, t) = 0, \quad \vec{R} \in \Sigma;\end{aligned}\quad (3)$$

- для потенціальних векторів:

$$\begin{aligned}
 \mu \frac{\partial \vec{H}_p(\vec{R}, t)}{\partial t} &= -4\pi \vec{M}_p(\vec{R}, t), \\
 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_p(\vec{R}, t)}{\partial t} &= 4\pi \vec{J}_p(\vec{R}, t), \\
 \operatorname{div} \varepsilon \vec{E}_p(\vec{R}, t) &= 4\pi \rho_e(\vec{R}, t), \\
 \operatorname{div} \mu \vec{H}_p(\vec{R}, t) &= 4\pi \rho_h(\vec{R}, t), \\
 \vec{E}_{p\tau}(\vec{R}, t) &= 0, \vec{H}_{pN}(\vec{R}, t) = 0, \vec{R} \in \Sigma;
 \end{aligned} \tag{4}$$

тут $\vec{H}_N$ – компонента магнітного поля, нормальна до бічної поверхні хвилеводу.

ЗАДАЧА НА ВЛАСНІ ФУНКЦІЇ ДЛЯ СОЛЕНОЇДАЛЬНИХ ВЕКТОРІВ

Рівняння (3) породжують таку задачу на власні функції:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{E}_s(\vec{R}, k_0) - ik_0 \mu \vec{H}_s(\vec{R}, k_0) &= 0, \\
 \nabla \times \vec{H}_s(\vec{R}, k_0) + ik_0 \varepsilon \vec{E}_s(\vec{R}, k_0) &= 0, \\
 \operatorname{div} \varepsilon \vec{E}_s(\vec{R}, k_0) &= 0, \\
 \operatorname{div} \mu \vec{H}_s(\vec{R}, k_0) &= 0;
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\vec{E}_{s\tau}(\vec{R}, k_0) = 0, \partial_N \vec{H}_s(\vec{R}, k_0) = 0, \vec{R} \in \Sigma; \tag{6}$$

$$\left| \vec{E}_s(\vec{R}, k_0) \right| < +\infty, \left| \vec{H}_s(\vec{R}, k_0) \right| < +\infty, z \rightarrow \pm\infty. \tag{7}$$

Нехай $k_0 \neq 0$, тоді розв'язок задачі (5-7) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_s^{v\beta}(\vec{R}, \omega) &= \vec{E}_{mn}^{v\beta}(\vec{r}, \omega) e^{\pm ig(\omega)z}, \\
 \vec{H}_s^{v\beta}(\vec{R}, \omega) &= \vec{H}_{mn}^{v\beta}(\vec{r}, \omega) e^{\pm ig(\omega)z}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

У цих співвідношеннях $\vec{r} = (x, y, 0)$, $v = \pm$; $\beta = e, h$; $\omega = k_0 c$; $g(\omega) = c^{-1} \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \omega_{mn}^2}$, $\operatorname{Im} \sqrt{} \geq 0$, $\omega_{mn} = \kappa_{mn} c$; κ_{mn} визначено нижче. Індекс $\beta = e$ відповідає ТМ, а $\beta = h$ – ТЕ-хвилям. Умова (7) накладає обмеження на спектр ω : $\omega \geq \omega_{mn} / \sqrt{\varepsilon \mu}$. Величини $\vec{E}_{mn}^{v\beta}(\vec{r}, \omega)$ і $\vec{H}_{mn}^{v\beta}(\vec{r}, \omega)$ виражаються через скалярні функції $\mathcal{E}_{mn}(\vec{r})$ та $\mathcal{H}_{mn}(\vec{r})$ [5]

$$\vec{E}_{mn}^{\pm e}(\vec{r}, \omega) = \pm \frac{ig(\omega)}{\kappa_{mn}^2} \nabla_{\perp} \mathcal{E}_{mn}(\vec{r}), \tag{9}$$

$$\vec{H}_{mn}^{\pm e}(\vec{r}, \omega) = \pm \frac{i\omega\varepsilon}{c\kappa_{mn}^2} \cdot \vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \mathcal{E}_{mn}(\vec{r});$$

$$\vec{E}_{mn}^{\pm h}(\vec{r}, \omega) = -\frac{i\omega\mu}{c\kappa_{mn}^2} \cdot \vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \mathcal{H}_{mn}(\vec{r}), \tag{10}$$

$$\vec{H}_{mn}^{\pm h}(\vec{r}, \omega) = \pm \frac{ig(\omega)}{\kappa_{mn}^2} \nabla_{\perp} \mathcal{H}_{mn}(\vec{r});$$

де $\mathcal{E}_{mn}(\vec{r})$ і $\mathcal{H}_{mn}(\vec{r})$ визначені як розв'язки задачі на власні значення

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\perp}^2 + \kappa_{mn}^2) \mathcal{E}_{mn}(\vec{r}) &= 0, \vec{r} \in S; \mathcal{E}_{mn_r}(\vec{r}) = 0 (\vec{r} \in \partial S); \\
(\nabla_{\perp}^2 + \kappa_{mn}^2) \mathcal{H}_{mn}(\vec{r}) &= 0, \vec{r} \in S; \mathcal{H}_{mn_n}(\vec{r}) = 0 (\vec{r} \in \partial S).
\end{aligned}
\tag{11}$$

У цих формулах $\nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, $\nabla_{\perp}$ - проекція оператора набла на площину $z = 0$.

Уведемо скалярний добуток для соленоїдальних власних вектор-функцій $\vec{E}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega)$ і $\vec{H}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega)$ в два способи:

$$\begin{aligned}
W_e^{\nu\beta\beta'}(\omega, \omega') &= \left\langle \varepsilon \vec{E}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega), \vec{E}_s^{-\nu\beta'}(\vec{R}, \omega') \right\rangle, \\
W_h^{\nu\beta\beta'}(\omega, \omega') &= \left\langle \mu \vec{H}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega), \vec{H}_s^{-\nu\beta'}(\vec{R}, \omega') \right\rangle.
\end{aligned}
\tag{12}$$

Кутові дужки позначають таку операцію для двох векторних функцій $\eta \vec{u}(\vec{R})$ та $\vec{v}(\vec{R})$:

$$\left\langle \eta \vec{u}(\vec{R}), \vec{v}(\vec{R}) \right\rangle = \int_V \eta \vec{u}(\vec{R}) \vec{v}(\vec{R}) dV.
\tag{13}$$

Використовуючи рівняння (5) і граничні умови (6, 7), перетворимо інтеграли за об'ємом хвилеводу на різницю двох інтегралів за його поперечними перерізами $z = L$ і $z = -L$:

$$\begin{aligned}
W_e^{\nu\beta\beta'}(\omega, \omega') &= \frac{c}{i(\omega - \omega')} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_S \vec{z}_0 [\vec{H}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega) \times \vec{E}_s^{-\nu\beta'}(\vec{R}, \omega') - \\
&\quad \vec{H}_s^{-\nu\beta'}(\vec{R}, \omega') \times \vec{E}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega)] dS \Big|_{z=-L}^{z=L},
\end{aligned}
\tag{14}$$

$$\begin{aligned}
W_h^{\nu\beta\beta'}(\omega, \omega') &= \frac{c}{i(\omega - \omega')} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_S \vec{z}_0 [\vec{E}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega) \times \vec{H}_s^{-\nu\beta'}(\vec{R}, \omega') - \\
&\quad \vec{E}_s^{-\nu\beta'}(\vec{R}, \omega') \times \vec{H}_s^{\nu\beta}(\vec{R}, \omega)] dS \Big|_{z=-L}^{z=L}.
\end{aligned}
\tag{15}$$

За допомогою цих виразів нескладно перевірити виконання співвідношень ортогональності в сенсі "скалярних" добутків (12)

$$\begin{aligned}
W_{e_{mnm'n'}}^{\nu\beta\beta'}(\omega, \omega') &= N_{mn}^{\nu\beta}(\omega) \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta_{\beta\beta'} \delta(\omega - \omega'); \\
W_{h_{mnm'n'}}^{\nu\beta\beta'}(\omega, \omega') &= -N_{mn}^{\nu\beta}(\omega) \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta_{\beta\beta'} \delta(\omega - \omega'),
\end{aligned}
\tag{16}$$

де

$$\begin{aligned}
N_{mn}^{\nu\beta}(\omega) &= 4\pi c \int_S \vec{z}_0 \cdot \vec{H}_{mv}^{\nu\beta}(\vec{r}, \omega) \times \vec{E}_{mn}^{-\nu\beta}(\vec{r}, \omega) dS, \\
N_{mn}^{\nu\beta}(\omega) &= -N_{mn}^{-\nu\beta}(\omega);
\end{aligned}
\tag{17}$$

при цьому для TM хвиль ($\beta = e$)

$$N_{mn}^{\nu\beta}(\omega) = \pm \frac{4\pi\omega\varepsilon g(\omega)}{\kappa_{mn}^2} \int_S \mathcal{E}_{mn}^2(\vec{r}) dS,$$

а для TE хвиль ($\beta = h$)

$$N_{mn}^{\nu h}(\omega) = \mp \frac{4\pi\omega\mu g(\omega)}{\kappa_{mn}^2} \int_S \mathcal{H}_{mn}^2(\vec{r}) dS.
\tag{18}$$

Для $k_0 = 0$ задача (5-7) не має нетривіальних розв'язків. Таким чином, значення $k_0 = 0$ в спектр задачі на власні функції для соленоїдальних функцій не входить.

ЗАДАЧА НА ВЛАСНІ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ПОТЕНЦІАЛЬНИХ ВЕКТОРІВ

Перейдемо до задачі на власні функції для потенціальних векторів (4). Вона має вигляд:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}_p(\vec{R}, \alpha) &= 0, \\ \nabla \times \vec{H}_p(\vec{R}, \gamma) &= 0, \\ \text{graddiv} \vec{E}_p(\vec{R}, \alpha) + \alpha \vec{E}_p(\vec{R}, \alpha) &= 0, \\ \text{graddiv} \vec{H}_p(\vec{R}, \gamma) + \gamma \vec{H}_p(\vec{R}, \gamma) &= 0;\end{aligned}\tag{19}$$

$$\vec{E}_{p\tau}(\vec{R}, \alpha) = 0, \vec{H}_{pN}(\vec{R}, \gamma) = 0, \vec{R} \in \Sigma;\tag{20}$$

$$|\vec{E}_p(\vec{R}, \alpha)| < +\infty, |\vec{H}_p(\vec{R}, \gamma)| < +\infty, z \rightarrow \pm\infty.\tag{21}$$

Її рішення дається виразами

$$\vec{E}_p(\vec{R}, \alpha) = -\nabla \psi_e(\vec{R}, \alpha);\tag{22}$$

$$\vec{H}_p(\vec{R}, \gamma) = -\nabla \psi_h(\vec{R}, \gamma),\tag{23}$$

де $\psi_e(\vec{R}, \alpha)$ і $\psi_h(\vec{R}, \gamma)$ - власні функції таких крайових задач:

$$\Delta \psi_e(\vec{R}, \alpha) + \alpha \psi_e(\vec{R}, \alpha) = 0, \vec{R} \in V,\tag{24}$$

$$\psi_e(\vec{R}, \alpha) = 0, \vec{R} \in \Sigma;$$

$$|\psi_e(\vec{R}, \alpha)| < +\infty, z \rightarrow \pm\infty.\tag{25}$$

$$\Delta \psi_h(\vec{R}, \gamma) + \gamma \psi_h(\vec{R}, \gamma) = 0, \vec{R} \in V,\tag{26}$$

$$\partial_N \psi_h(\vec{R}, \gamma) = 0, \vec{R} \in \Sigma;$$

$$|\psi_h(\vec{R}, \gamma)| < +\infty, z \rightarrow \pm\infty.\tag{27}$$

Ці власні функції записуються таким чином

$$\begin{aligned}\psi_e^\pm(\vec{R}, \alpha) &= \varphi_{e_{mn}}(\vec{r}) e^{\pm i \tilde{g}_{mn}(\alpha) z}; \\ \psi_h^\pm(\vec{R}, \gamma) &= \varphi_{h_{mn}}(\vec{r}) e^{\pm i \tilde{g}_{mn}(\gamma) z}.\end{aligned}\tag{28}$$

Тут $\varphi_{e_{mn}}(\vec{r})$ і $\varphi_{h_{mn}}(\vec{r})$ - мембранні функції, визначені в перерізі S хвилеводу рівняннями

$$\begin{aligned}(\nabla_\perp^2 + \chi_{e_{mn}}^2) \varphi_{e_{mn}}(\vec{r}) &= 0, \vec{r} \in S, \varphi_{e_{mn}}(\vec{r}) = 0 (\vec{r} \in \partial S); \\ (\nabla_\perp^2 + \chi_{h_{mn}}^2) \varphi_{h_{mn}}(\vec{r}) &= 0, \vec{r} \in S, \partial_N \varphi_{h_{mn}}(\vec{r}) = 0 (\vec{r} \in \partial S).\end{aligned}\tag{29}$$

У (28) $\tilde{g}_{mn}(\alpha) = \sqrt{\alpha - \chi_{e_{mn}}^2}$, $\tilde{g}_{mn}(\gamma) = \sqrt{\gamma - \chi_{h_{mn}}^2}$, ($\text{Im} \sqrt{\cdot} \geq 0$); умови (25), (27) накладають обмеження на спектр α і γ . Легко переконатися, що фіксованим m і n відповідають спектральні точки $\alpha \geq \chi_{e_{mn}}^2$ і $\gamma \geq \chi_{h_{mn}}^2$ (зауважимо, що значення $\alpha, \gamma = 0$ до спектра задачі не входять, оскільки вони

відповідають лише тривіальним розв'язкам (29)). Для $\psi_e(\vec{R}, \alpha)$ і $\psi_h(\vec{R}, \gamma)$ виконуються співвідношення ортогональності в сенсі скалярного добутку (13). З огляду на [6], легко показати, що співвідношення ортогональності для потенціальних полів записуються таким чином:

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon \vec{E}_{p_{mn}}^{(+)}(\vec{R}, \alpha), \vec{E}_{p_{m'n'}}^{(-)}(\vec{R}, \alpha') \rangle &= K_{mn}(\alpha) \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta(\alpha - \alpha'); \\ \langle \mu \vec{H}_{p_{mn}}^{(+)}(\vec{R}, \gamma), \vec{H}_{p_{m'n'}}^{(-)}(\vec{R}, \gamma') \rangle &= K_{mn}(\gamma) \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta(\gamma - \gamma').\end{aligned}\tag{30}$$

За такого визначення скалярних добутків нормувальні коефіцієнти $K_{mn}(\alpha)$ і $K_{mn}(\gamma)$ дорівнюють

$$\begin{aligned} K_{mn}(\alpha) &= 4\pi\epsilon\tilde{g}_{mn}(\alpha)\int_S \varphi_{e_{mn}}^2(\vec{r})dS; \\ K_{mn}(\gamma) &= 4\pi\mu\tilde{g}_{mn}(\gamma)\int_S \varphi_{h_{mn}}^2(\vec{r})dS. \end{aligned} \quad (31)$$

Можна показати, що сімейства соленоїдальних і потенціальних вектор-функцій тотожно ортогональні

$$\begin{aligned} \langle \epsilon\vec{E}_s^{\nu\beta}(\vec{R},\omega), \vec{E}_p^{-\nu}(\vec{R},\alpha) \rangle &\equiv 0; \\ \langle \mu\vec{H}_s^{\nu\beta}(\vec{R},\omega), \vec{H}_p^{-\nu}(\vec{R},\gamma) \rangle &\equiv 0. \end{aligned} \quad (32)$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ЧАСОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Припустимо, що системи власних вектор-функцій, які відповідають соленоїдальним і потенціальним полям, повні. Це дає змогу записати рішення про збудження хвилову нестационарними сторонніми джерелами у вигляді:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R},t) &= \sum_{\nu=\pm} \sum_{\beta=e,h} \sum_{m,n=1}^{+\infty} \left[\int_{\omega_{mn}/\sqrt{\epsilon\mu}}^{+\infty} d\omega a_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t) \vec{E}_s^{\nu\beta}(\vec{R},\omega) + \right. \\ &\quad \left. \int_{\chi_{e_{mn}}}^{+\infty} d\alpha a_{p_{mn\alpha}}^{\nu}(t) \vec{E}_p^{\nu}(\vec{R},\alpha) \right]; \\ \vec{H}(\vec{R},t) &= \sum_{\nu=\pm} \sum_{\beta=e,h} \sum_{m,n=1}^{+\infty} \left[\int_{\omega_{mn}/\sqrt{\epsilon\mu}}^{+\infty} d\omega b_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t) \vec{H}_s^{\nu\beta}(\vec{R},\omega) + \right. \\ &\quad \left. \int_{\chi_{h_{mn}}}^{+\infty} d\gamma b_{p_{mn\gamma}}^{\nu}(t) \vec{H}_p^{\nu}(\vec{R},\gamma) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Використовуючи співвідношення ортогональності (16)-(17) і (30)-(31) для часових коефіцієнтів $a_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t)$ і $b_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t)$, отримаємо систему диференціальних рівнянь першого порядку, а для $a_{p_{mn\alpha}}^{\nu}(t)$ і $b_{p_{mn\alpha}}^{\nu}(t)$ – незалежні диференціальні рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} i\omega a_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t) + \partial_t b_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t) = q_{sh_{mn}}^{\nu\beta}(\omega, t); \\ i\omega b_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t) + \partial_t a_{s_{mn\omega}}^{\nu}(t) = q_{se_{mn}}^{\nu\beta}(\omega, t); \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \partial_t a_{p_{mn\alpha}}^{\nu}(t) &= q_{pe_{mn}}^{\nu}(\alpha, t); \\ \partial_t b_{p_{mn\gamma}}^{\nu}(t) &= q_{ph_{mn}}^{\nu}(\gamma, t). \end{aligned} \quad (35)$$

Праві частини в (34), (35) дорівнюють:

$$\begin{aligned}
q_{Sh_{mn}}^{\nu\beta}(\omega, t) &= -\frac{4\pi}{N_{mn}^{\nu\beta}(\omega)} \int_V \vec{M}(\vec{R}, t) \vec{H}_S^{-\nu\beta}(\vec{R}, \omega) dV; \\
q_{Se_{mn}}^{\nu\beta}(\omega, t) &= -\frac{4\pi}{N_{mn}^{\nu\beta}(\omega)} \int_V \vec{J}(\vec{R}, t) \vec{E}_S^{-\nu\beta}(\vec{R}, \omega) dV; \\
q_{pe_{mn}}^{\nu}(\alpha, t) &= -\frac{4\pi}{K_{mn}(\alpha)} \int_V \vec{J}(\vec{R}, t) \vec{E}_p^{-\nu}(\vec{R}, \alpha) dV; \\
q_{ph_{mn}}^{\nu}(\gamma, t) &= -\frac{4\pi}{K_{mn}(\gamma)} \int_V \vec{M}(\vec{R}, t) \vec{H}_p^{-\nu}(\vec{R}, \gamma) dV.
\end{aligned} \tag{36}$$

Доповнивши звичайні диференціальні рівняння (34), (35) необхідними початковими умовами, приходимо до канонічної задачі Коші, розв'язок якої знаходять у явному вигляді за допомогою стандартних засобів [7], наприклад, із залученням часових функцій Гріна. Спосіб їхньої побудови є відомим, наприклад, [7], і ми його не обговорюємо.

ВИСНОВКИ

У роботі на прикладі нескінченного циліндричного хвильоводу з діелектричним і діаманітним заповненням запропоновано різновид модового базису, коли на початковому етапі розв'язання рівнянь Максвелла векторні величини вихідної задачі подають у вигляді суми соленоїдальних і потенціальних складових. Після доведення ортогональності власних вектор-функцій для потенціальних і соленоїдальних полів і припущення їхньої повноти у статті отримано розв'язки зі збудження хвильоводу нестационарними джерелами у вигляді розкладання за власними функціями з невідомими часовими коефіцієнтами. Для часових коефіцієнтів отримуємо диференціальні рівняння, які найчастіше називають еволюційними рівняннями. Рішення цих рівнянь з відповідними фізичними початковими умовами зазвичай знаходяться за допомогою стандартних методів математичної фізики.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Tretyakov Oleg, Kaya Mehmet. Time-Domain Real-Valued TM-Modal Waves in Lossy Waveguides // Progress In Electromagnetics Research. – 2013. - Vol. 138, P. 675-696.
2. Butrym A. Yu., Kochetov B. A. Mode Basis Method for Spherical TEM-Transmission Lines and Antennas // Proceedings of the 2007 6-th International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT'07). – Sevastopol (Ukraine). – 2007. –P. 243-245.
3. Бутрим О.Ю., Третьяков О.О. Модифікація методу еволюційних хвильоводних рівнянь для випадку поперечно неоднорідних хвильоводів // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. “Радіофізика та електроніка”. – 2002. - № 544. – С. 71-74.
4. Бутрим О.Ю., Легенький М.М. Метод модового базису для відкритих діелектричних хвильоводів // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. “Радіофізика та електроніка”. – 2008. - № 806. – С. 44-47.
5. Mathews, Jon; Walker, Robert L. (1970). Mathematical methods of physics (2nd ed.). New York: W. A. Benjamin.
6. Третьяков О. О., Шульга С. М. Аналогія в розв'язанні нестационарних задач збудження резонаторів і хвильоводів // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. “Радіофізика та електроніка”. – 1989. - № 336. – С. 23-26.
7. Barton, Gabriel (1989). Elements of Green's functions and propagation: potentials, diffusion, and waves. Oxford science publications. Oxford : New York: Clarendon Press ; Oxford University Press.

REFERENCES

1. Tretyakov Oleg, Kaya Mehmet. Time-Domain Real-Valued TM-Modal Waves in Lossy Waveguides // Progress In Electromagnetics Research. – 2013. - Vol. 138, P. 675-696.
2. Butrym A. Yu., Kochetov B. A. Mode Basis Method for Spherical TEM-Transmission Lines and Antennas // Proceedings of the 2007 6-th International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT'07). – Sevastopol (Ukraine). – 2007. –P. 243-245.
3. Butrym O.Y., Tretyakov O.O. Modification of the method of evolutionary waveguide equations for the case of transversely inhomogeneous waveguides // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. "Radiophysics and Electronics." – 2002. – No. 544. – pp. 71–74.
4. Butrym O.Y., Legenkyi M.M. Mode basis method for open dielectric waveguides // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. "Radiophysics and Electronics." – 2008. – No. 806. – pp. 44–47.
5. Mathews, Jon; Walker, Robert L. (1970). Mathematical methods of physics (2nd ed.). New York: W. A. Benjamin.
6. Tretyakov O. O., Shulga S. M. Analogy in solving non-stationary problems of excitation of resonators and waveguides // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. "Radiophysics and Electronics." – 1989. – No. 336. – pp. 23–26.
7. Barton, Gabriel (1989). Elements of Green's functions and propagation: potentials, diffusion, and waves. Oxford science publications. Oxford : New York: Clarendon Press ; Oxford University Press.

Стаття надійшла до редакції: 20 лютого 2025

Рекомендовано до друку: 25 березня 2025

MODE DECOMPOSITION OF FIELDS INTO SOLENOIDAL AND POTENTIAL COMPONENTS IN A CLOSED WAVEGUIDE

S. M. SHULGA, O. V. BAGATSKA, S. O. VINNICHENKO, A. O. MASLENNIKOV

*V. N. Karazin Kharkiv National University, Department of Theoretical Radiophysics,
4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, Ukraine*

Background. At the end of the last century, it became necessary to solve the problem of excitation of unsteady fields in closed and open electrodynamic structures. In the 1980s, the Department of Theoretical Radiophysics proposed an alternative to the Fourier method, the mode basis method for closed hollow resonators. In this paper, we consider an electrodynamic problem on the excitation of an unsteady field in an open cylindrical waveguide. At the very beginning, the original system of Maxwell's equations is divided into two systems of equations for solenoidal and potential vectors.

Objectives. To show the possibility of applying the mode basis method for superposition of solenoidal and potential fields in a waveguide with dielectric filling.

Materials and methods. When solving some spectral electrodynamic problems for solenoidal and potential components of the electromagnetic field vectors, the orthogonality of these eigenvectors in the waveguide volume is proved, taking into account the condition of field boundedness at the waveguide ends when the longitudinal component of a cylindrical waveguide tends to plus/minus infinity.

Results. Under the assumption of completeness of the found eigenfunctions, the desired field is represented as the sum of the expansion by the elements of the mode basis for solenoidal and potential fields with time-dependent coefficients. The first-order differential equations are obtained for the time coefficients.

Conclusions. In this paper, using the example of an infinite cylindrical waveguide with dielectric and diamagnetic filling, a type of mode basis is proposed, when at the initial stage of solving Maxwell's equations, the vector quantities of the initial problem are represented as the sum of solenoidal and potential components. After proving the orthogonality of the eigenvector functions for the potential and solenoidal fields and assuming their completeness, the paper presents the solutions for waveguide excitation by nonstationary sources in the form of an expansion by eigenfunctions with unknown time coefficients.

KEYWORDS: mode basis method, solenoidal and potential field components, eigenfunction problem.

The article was received by the editors: February 20 2025

The article is recommended for printing: March 25 2025