

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-41-03>

УДК 537.811, 537.621

Д. І. ГАВРИЛЕНКО, аспірант.

e-mail: [m380669254126@gmail.com](mailto:m380669254126@gmail.com) ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-6498-887X>

О. М. ДУМІН, д. ф.-м. наук, доц.

e-mail: [dumin@karazin.ua](mailto:dumin@karazin.ua) ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5067-9689>

В.А. ПЛАХТІЙ, доктор філософії, старший викладач

e-mail: [plakhtii@karazin.ua](mailto:plakhtii@karazin.ua) ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-0442-2716>

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,  
майдан Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

## ЕНЕРГЕТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ, ЗБУДЖЕНОГО СТРУМОМ У ФОРМІ СТРИБКА

**Актуальність.** На відміну від класичних випромінювачів із гармонічним збудженням, напрямлені характеристики яких добре вивчені й визначаються амплітудним та фазовим розподілом на поверхні джерела, імпульсні антени демонструють значно складнішу залежність, що враховує як амплітудний розподіл, так і часову динаміку джерела. Відомо, що різкий стрибок амплітуди здатен сформувати хвилю великої амплітуди та надзвичайно високої спрямованості. Тому аналіз таких процесів є надзвичайно актуальним, особливо у часовому просторі, що дозволяє більш наочно та послідовно простежити всі процеси перетворення енергії в області, що оточує випромінювач. Подібні дослідження мають не лише теоретичне значення для розуміння фізики випромінювання прямокутних імпульсів без несучої частоти, а й практичну важливість. Вони відкривають можливості для розробки ефективних методів збільшення дальності передачі інформаційних сигналів, підвищення їхньої завадостійкості та роздільної здатності радарних і радіолокаційних систем на основі імпульсних надширококутових хвиль. Окрім цього, застосування таких підходів сприяє оптимізації енергетичних ресурсів, необхідних для організації радіозв'язку або радарних досліджень, а також дозволяє мінімізувати небажане опромінення суміжних об'єктів і персоналу.

**Мета роботи.** Виведення аналітичних виразів для потоку імпульсного електромагнітного поля апертурного випромінювача через поперечний переріз, розрахунок повної енергії імпульсу, а також застосування числових методів у тих випадках, коли аналітичні розв'язки отримати не вдається. Проведення фізичного аналізу отриманих результатів та дослідження впливу різних складових отриманих розв'язків. Окрім цього, побудова графічних залежностей енергетичних параметрів від часу та координат дозволить перевірити коректність аналітичних і числових результатів, а також забезпечити глибше розуміння фізичних процесів, що протікають у ближній зоні імпульсних випромінювачів.

**Матеріали та методи.** Тривимірна нестационарна задача розв'язується аналітично у часовому просторі методом еволюційних рівнянь та функції Рімана. Для отримання енергетичних характеристик виконуються інтегральні перетворення спеціальних функцій, що дозволяють спростити їх аналітичний вигляд.

**Результати.** Отримано аналітичні вирази для вектора Пойнтінга імпульсного поля апертурного випромінювача з рівномірним розподілом амплітуди струму на його поверхні. Визначено повну енергію випроміненого поля через нескінченну поперечну площину в наближенні дальньої зони, яка у нестационарному випадку відповідає полю при великих значеннях поздовжньої координати. Числовими методами розраховано енергетичні характеристики на довільних відстанях від випромінювача, що дозволило провести детальний аналіз їх залежності від просторово-часових координат.

**Висновки.** Отримані залежності ілюструють процес перетворення статичних компонент поля у хвильові. Це чітко проявляється у тому, що наближення дальньої зони поблизу випромінювача дає значення енергії, що помітно перевищує її істинну величину. Це явище демонструє, що хвильова складова випроміненого поля запозичує енергію з квазістатичних компонентів, які швидко загасають з віддаленням від джерела. Слід також відзначити, що швидше спадання потоку енергії поля з відстанню вказує на більшу концентрацію енергії поблизу поздовжньої осі. Майже ідеальне лінійне зменшення потоку енергії на поверхні випромінювача підтверджує, що після досягнення поля, яке приходить з найвіддаленішої точки на апертурі, подальшої передачі енергії від апертури не може бути. Однак, у випадках, коли не враховано всі члени ряду, спостерігається відхилення цієї залежності від ідеальної трикутної форми. Це може призвести до ситуації, в якій енергія у певний момент часу повертатиметься назад до апертури. Ці хибні результати дуже подібні до явища Гібса, яке інколи спостерігають, отримуючи швидкість передачі інформації, більшу за швидкість світла. Врахування достатньої кількості необхідних членів ряду запобігає виникненню подібних похибок та забезпечує коректність отриманих результатів.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** метод еволюційних рівнянь, імпульсна електромагнітна хвиля, електромагнітний снаряд, енергетичне перетворення

**Як цитувати:** Гавриленко ДІ, Думін ОМ, Плахтій ВА. Енергетичні характеристики нестационарного електромагнітного поля, збудженого струмом у формі стрибка. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2024; 41:23-36.

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-41-03>

**In cites:** Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA. Energetical characteristics of transient electromagnetic field excited by step-like current. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series "Radio Physics and Electronics". 2024; 41:23-36 (In Ukrainian)

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-41-03>

## ВСТУП

Однією з найпростіших задач моделювання нестационарного випромінювання апертурного випромінювача є задача випромінювання плоского диску з рівномірним розподілом електричного струму, збудженого синхронно по всій площині диску. Ця задача була вперше сформульована у такому вигляді в роботі [1] і розв'язана за допомогою спектральних перетворень у частотному просторі. Винятковою особливістю отриманого розв'язку є аномально висока концентрація енергії випромінюваної хвилі в напрямку зовнішньої нормалі до апертури. Через неочікувану поведінку наведеного теоретичного розв'язку, цей ефект отримав назву «електромагнітний снаряд». Схожа задача також була розв'язана у [2], однак детальний аналіз незвичайної поведінки розв'язку не проводився. Хоча залежність енергетичних параметрів випромінюваного поля від відстані може здаватися такою, що суперечить закону збереження енергії, автор у [1] надав чітке пояснення цього ефекту як явища, що супроводжує випромінювання модельного джерела поля, чия межа поля дальньої зони знаходиться на нескінченності.

Пізніше, в роботі [3] було показано, що таку аномально високу концентрацію випромінюваної енергії можна отримати у випадку нерівномірного розподілу нестационарного струму. Ще цікавіше те, що якщо часова залежність джерела збудження не є ідеальним стрибком, а має більш згладжену форму, то аномально висока концентрація енергії спостерігається лише до певної відстані від джерела, а потім, на великій відстані, відбувається класичне спадання енергії, пропорційне оберненому квадрату відстані. Спираючись на ці результати, автор навіть вводить нове визначення відстані дальньої зони у випадку збудження апертури джерелом, що генерує короткий імпульс скінченної тривалості.

У роботі [4] ця задача була розв'язана у часовому просторі, а фізичне пояснення незвичайної природи цього розв'язку, надане в [1], було проілюстровано на рівні аналітичних формул. А саме, такий розв'язок поводить аномально, оскільки в початкові моменти часу спостерігач не може відрізнити поведінку випромінюваного поля цього випромінювача від випромінювання схожого плоского джерела, але нескінченного розміру. І випромінювання останнього фізично не може спадати з відстанню. Наявність зовнішнього краю випромінювача буде виявлена спостерігачем пізніше, і саме з цього моменту починається спад поля з відстанню. Часова залежність джерела окремо і незалежно призводить до додаткового загасання поля, що було досліджено в [3].

Можна припустити, що така модель розв'язку, коли часова залежність джерела має вигляд одиничного стрибка (функція Хевісайда) [5], може слугувати основою для побудови довільних розв'язків, де узагальнення за часом досягається за допомогою інтегралу Дюамеля, як це було виконано в [6]. Насправді, це можна розглядати як альтернативу у часовому просторі класичному підходу, де одиничним розв'язком є поле, отримане шляхом збудження джерела гармонічним сигналом фіксованої частоти, а узагальнення для довільної часової залежності виконується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є.

Екзотична поведінка випромінюваного поля дозволяє отримати значні енергетичні переваги під час передачі інформації імпульсним електромагнітним полем. Тому можливість створення таких систем постійно досліджується [7]. Метою цієї роботи є вивчення енергетичного перетворення поля, випромінюваного круглою апертурою з заданим рівномірним розподілом струму, часова залежність якого має вигляд одиничного стрибка.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу збудження електромагнітної Н-хвилі нестационарним струмом, що має форму стрибка. Випромінювач має круглу апертуру і задається у циліндричній системі координат [4]. Основні енергетичні характеристики утвореної хвилі визначаються через вектор Пойнтінга, який описує густину потоку енергії електромагнітного поля:

$$\vec{S}(\rho, \varphi, z, t) = [\vec{E}(\rho, \varphi, z, t) \times \vec{H}(\rho, \varphi, z, t)]. \quad (1)$$

Тут жирним шрифтом підкреслюється тривимірний характер векторів. Будь-який вектор  $\vec{A}$  можна розкласти на поперечну та поздовжню складові:

$$\vec{A}(\rho, \varphi, z, t) = \vec{A}(\rho, \varphi, z, t) + \vec{z}_0 A_z(\rho, \varphi, z, t). \quad (2)$$

Підставимо (2) до (1) та скористаємося лінійністю векторного добутку. Таким чином, отримуємо вирази для вектора Пойнтінга вздовж напрямку поширення хвилі та у поперечній площині:

$$\vec{z}_0 S_z(\rho, \varphi, z, t) = [\vec{E}(\rho, \varphi, z, t) \times \vec{H}(\rho, \varphi, z, t)]; \quad \vec{S}(\rho, \varphi, z, t) = [\vec{E}(\rho, \varphi, z, t) \times \vec{z}_0 H_z(\rho, \varphi, z, t)]. \quad (3)$$

У даній роботі увагу буде приділено поздовжній компоненті вектору Пойнтінга. Ми отримаємо аналітичні вирази та побудуємо графічні залежності для різних випадків випромінювання.

Згідно з методом еволюційних рівнянь, поперечні компоненти електромагнітного поля, які визначають поздовжній вектор Пойнтінга, можна записати у такому вигляді [8]:

$$\begin{cases} \vec{E}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi V_m^h(\chi, z, t) [\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0]; \\ \vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' I_{m'}^h(\chi, z, t) \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi). \end{cases} \quad (4)$$

Тут  $\psi_m$  – базисна функція, яка є розв'язком рівняння Гельмгольца у циліндричних координатах. Оператор  $\nabla$  береться у поперечній площині цієї координатної системи. У виразах для поперечних компонент полів (4) інтегрування здійснюється за спектральним параметром  $\chi$ , а сумування – за кутовими модами  $m$ . Зазначимо, що незалежно від того, чи проводиться інтегрування за параметрами  $\chi$  або  $\chi'$ , а сумування за модами  $m$  або  $m'$ , результат розрахунків від цього не зміниться. Це дозволить спростити подальші математичні перетворення, не впливаючи на фізичний зміст досліджуваних хвильових процесів.  $V_m^h, I_{m'}^h$  – еволюційні коефіцієнти поперечних електричної та магнітної компонент поля, які вже були отримані для цієї задачі [4, 9]:

$$\begin{cases} V_m^h(z, t, \chi) = iA_0 R \frac{\sqrt{\mu_0} J_1(\chi R)}{4 \sqrt{\chi}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}); \\ \begin{cases} I_{m'}^h(z, t, \chi) = iA_0 R \frac{\sqrt{\mu_0} J_1(\chi R)}{4 \sqrt{\chi}} (\delta_{-m',1} + \delta_{-m',-1}) \cdot \\ \cdot \left( J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{ct - z}{ct + z} \right)^k J_{2k}(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \right). \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

Ці співвідношення дозволяють досліджувати переміщення енергії, спричинене випромінюваною хвилею [14].

## ОТРИМАННЯ АНАЛІТИЧНИХ ВИРАЗІВ

Підставимо модові розклади електромагнітних полів (4) до поздовжньої компоненти вектора Пойнтінга (1):

$$\vec{z}_0 S_z(\rho, \varphi, z, t) = \left[ \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi V_m^h(z, t, \chi) [\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0] \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\mu_0} \left( \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' I_{m'}^h(z, t, \chi') \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi') \right) \right].$$

Константи вільного простору  $\varepsilon_0, \mu_0$  винесемо з-під векторного добутку. Далі здійснимо коректне винесення наявних операторів та скалярних функцій з-під цього добутку: спочатку виносимо операції сумування та інтегрування окремо для виразів для електричного поля і для магнітного поля. Після них дописуємо добуток еволюційних коефіцієнтів, і на останньому місці залишиться подвійний векторний добуток, що складається з двох градієнтів від базисних функцій та поздовжнього орта:

$$\vec{z}_0 S_z(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' V_m^h(z, t, \chi) I_{m'}^h(z, t, \chi') \\ [[\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0] \times \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi')].$$

Величина, що обернена добутку сталих вільного простору, дає квадрат швидкості електромагнітної хвилі у вакуумі  $c^2$ . Розкриття подвійного векторного добутку дає поздовжній орт, біля якого приписується скалярний добуток градієнтів від базисних функцій. Маємо такий вираз для подальшої роботи:

$$\vec{z}_0 S_z(\rho, \varphi, z, t) = c^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' V_m^h(z, t, \chi) I_{m'}^h(z, t, \chi') \\ \vec{z}_0 (\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi')).$$

Запишемо визначення потоку енергії через нескінченну поперечну площину  $S$

$$P_z(z, t) = \int_S \vec{z}_0 S_z(\rho, \varphi, z, t) ds \cdot \vec{z}_0. \quad (6)$$

Тут зовнішньою нормаллю виступає орт  $\vec{z}_0$ , який перемножується з іншим таким самим вектором, звідки отримуємо скалярну величину. Інтегрування проводиться за полярним кутом у межах одного оберту кола та за радіусом, що може змінюватися до нескінченної верхньої межі в силу поширення енергії у вільному просторі [14]:

$$P_z(z, t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho S_z(\rho, \varphi, z, t). \quad (7)$$

Підставимо до визначення потоку енергії (7) вираз для поздовжньої компоненти вектора Пойнтінга:

$$P_z(z, t) = c^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' V_m^h(z, t, \chi) I_{m'}^h(z, t, \chi') \\ (\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi')).$$

Враховуючи збіжність інтегралів та рядів, що характеризують електромагнітні поля, перенесемо подвійний інтеграл у циліндричній системі через усі наявні операції.

$$P_z(z, t) = c^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' V_m^h(z, t, \chi) I_{m'}^h(z, t, \chi') \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho (\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi')).$$

Скориставшись ортогональністю базисних функцій

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho (\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla \psi_{m'}(\rho, \varphi, \chi')) = 2\pi(-1)^m \delta_{m,-m'} \delta(\chi - \chi'),$$

а також властивостями дельта-функції та символу Кронекера, приходимо до кінцевої формули для потоку енергії нестационарного електромагнітного поля у вільному просторі, якщо збудження відбувається стрибкоподібним струмом:

$$P_z(z, t) = 2\pi c^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} d\chi V_m^h(z, t, \chi) I_{-m}^h(z, t, \chi). \quad (8)$$

Цікаво відмітити, що у той час, як вектор Пойнтінга містить добуток векторів електричного та магнітного полів, потік енергії характеризується добутком відповідних еволюційних коефіцієнтів, що характеризують ці поля.

Підставимо до формули (8) явні вирази для еволюційних коефіцієнтів (5), здійснивши поправку над модовим індексом поперечної магнітної компоненти. Кутові моди присутні лише у символах Кронекера, тому, враховуючи, що

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1})(\delta_{-m,1} + \delta_{-m,-1}) = -2,$$

остаточно прийдемо до такого виразу для подальшого фізичного аналізу:

$$P_z(z, t) = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^{\infty} d\chi \frac{1}{\chi} J_1^2(\chi R) J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \cdot \left( J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{ct - z}{ct + z} \right)^k J_{2k}(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \right). \quad (9)$$

## АНАЛІТИЧНІ РОЗРАХУНКИ ТА ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ

### Випадок 1. $z = 0$

Він цікавий тим, що вдається знайти точний аналітичний вираз для потоку енергії та енергії випромінювання [14]. Тут у формулі (9) вираз у дужках дорівнює одиниці згідно з властивостями функцій Бесселя [10]. Тоді

$$P_z(z, t)|_{z=0} = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^{\infty} d\chi \frac{1}{\chi} J_1^2(\chi R) J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}). \quad (10)$$

Застосовуючи результат інтегрування [11, 2.12.42.31] після виправлення в ній помилкової відсутності дужок

$$\int_0^{\infty} d\chi \frac{1}{\chi} J_1^2(\chi R) J_0(\chi ct) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left( \arccos \frac{ct}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} \right), & 0 < ct < 2R; \\ 0, & 0 < 2R < ct. \end{cases}$$

отримуємо такий вираз для потоку енергії від випромінювача:

$$P_z(z, t)|_{z=0} = \begin{cases} c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \left( \arccos \frac{ct}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} \right), & 0 < ct < 2R; \\ 0, & 0 < 2R < ct. \end{cases} \quad (11)$$

На Рис. 1 представлено графік залежності потоку енергії (10) через нескінченну поперечну площину в залежності від часу. Тут і далі для побудови застосовувалися такі параметри: амплітуда поверхневого струму на апертурі  $A_0 = 1$  А/м, радіус диску  $R = 1$  м. Видно, що в початковий момент часу відбувається включення потоку енергії, і далі, він, з його плином, зменшується.

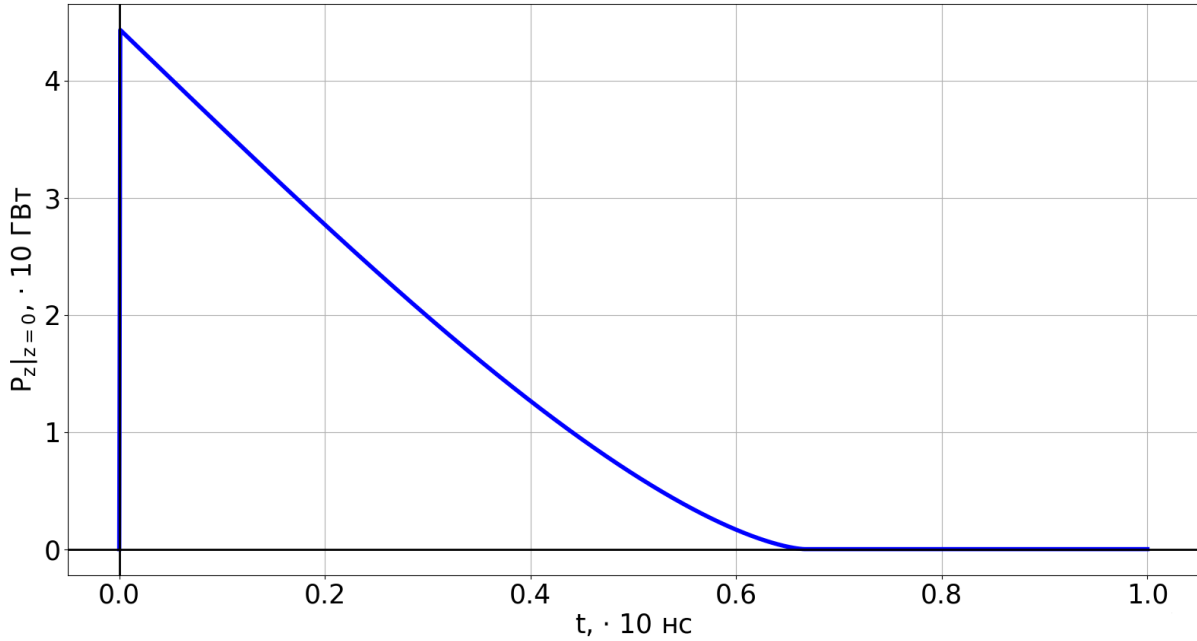


Рис 1. Потік енергії нестационарного електромагнітного поля, збудженого у формі стрибка, через нескінченну поперечну площину для випадку  $z = 0$

Fig. 1. Energy flux of a non-stationary electromagnetic field excited in the form of a jump through an infinite transverse plane for the case  $z=0$

Також має сенс розглянути повну енергію нестационарної електромагнітної хвилі. Її загальне визначення:

$$W_z(z) = \int_0^{\infty} P_z(z, t) dt. \quad (12)$$

У нашому випадку вона буде константою, оскільки розглядається фіксоване значення координати  $z$ . Її так само можна розрахувати аналітично, узявши до уваги, що

$$\int_0^{\frac{2R}{c}} \arccos \frac{ct}{2R} dt = \frac{2R}{c}; \quad \int_0^{\frac{2R}{c}} \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} dt = \frac{2R}{3c}.$$

Наведемо кінцевий результат розрахунку:

$$W_z|_{z=0} = c A_0^2 R^3 \frac{\mu_0}{3}. \quad (13)$$

**Випадок 2. Наближення дальньої зони**

Тут ми припускаємо, що основний внесок до потоку енергії дає перший доданок у формулі (9), який трактуємо як єдину складову, що визначає амплітуду хвилі в дальній зоні:

$$J_0(\chi\sqrt{c^2t^2 - z^2}) \gg 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{ct-z}{ct+z}\right)^k J_{2k}(\chi\sqrt{c^2t^2 - z^2}). \quad (14)$$

Тоді потік енергії (9) визначатиметься таким виразом:

$$P_z^{(д.з.)}(z, t) = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^{\infty} d\chi \frac{1}{\chi} J_0^2(\chi\sqrt{c^2t^2 - z^2}) J_1^2(\chi R). \quad (15)$$

Інтеграл у виразі (15) містить добуток чотирьох функцій Бесселя. Його обчислення в узагальненому вигляді було запропоновано в роботі [12], де розглядається інтеграл виду

$$a^{-\mu-1} \int_0^{\infty} d\eta \eta^{\mu} J_{\alpha}(\eta) J_{\beta}(\eta) J_{\gamma}(\tau\eta) J_{\delta}(\tau\eta).$$

У нашому випадку цей інтеграл є дещо простішим, оскільки серед функцій Бесселя присутні пари з однаковими нижніми індексами. Параметри, при яких було проведено розрахунок:

$$\begin{aligned} \eta &= \chi R, \quad \tau = \frac{\sqrt{c^2t^2 - z^2}}{R}, \quad \mu = -1; \\ \alpha &= 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0. \end{aligned}$$

Також перед обчисленням необхідно перевірити виконання таких умов збіжності [12]:

$$\operatorname{Re}(\mu) < 2; \quad \operatorname{Re}(\mu + \alpha + \beta + \gamma + \delta) > 0.$$

Інтеграл (15) задовольняє обидві зазначені умови. Розрахунок проводиться для двох областей:  $\sqrt{c^2t^2 - z^2} < R$  та  $\sqrt{c^2t^2 - z^2} > R$ . У кожному з цих випадків результатом інтегрування є сума трьох доданків, що містять гіпергеометричні функції. У першій області, один із доданків дорівнює нулю, оскільки його знаменник включає гамма-функції від нуля, які асимптотично прямують до нескінченності. Інший з доданків спрощується до константи  $\pi/2$ , а останній зводиться до спрощеної гіпергеометричної функції, яку можна виразити через спеціальні функції математичної фізики згідно з [13, 7.4.2.7]. У другій області два доданки обертаються в нуль завдяки гамма-функціям нульового аргументу, а третій містить гіпергеометричну функцію, яку можна спростити завдяки [13, 7.4.2.210]. Кінцевий результат обчислень матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} P_z(z, t) &= \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \times \\ &\times \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{\sqrt{c^2t^2 - z^2}}{R} + \frac{R^2 - (c^2t^2 - z^2)}{2R^2} \ln \left( \frac{R + \sqrt{c^2t^2 - z^2}}{R - \sqrt{c^2t^2 - z^2}} \right) + 2\chi_2 \left( \frac{\sqrt{c^2t^2 - z^2}}{R} \right) \right), & \sqrt{c^2t^2 - z^2} < R; \\ \frac{1}{\pi^2} \frac{\sqrt{c^2t^2 - z^2}}{R} \left( \frac{c^2t^2 - z^2 - R^2}{R\sqrt{c^2t^2 - z^2}} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{c^2t^2 - z^2} + R}{\sqrt{c^2t^2 - z^2} - R} \right) + \frac{R}{\sqrt{c^2t^2 - z^2}} 2\chi_2 \left( \frac{\sqrt{c^2t^2 - z^2}}{R} \right) - 1 \right), & \sqrt{c^2t^2 - z^2} > R. \end{cases} \end{aligned}$$

Тут  $\chi_2(\alpha) = 0,5(\operatorname{Li}_2(\alpha) - \operatorname{Li}_2(-\alpha))$  – хі-функція Лежандра другого порядку, яка виражається через половину різниці дилוגарифмів. На даному етапі, побудувати графік на основі аналітичного результату не вдалося. Однак інтеграл (15) можна розрахувати числовими методами для різних відстаней від джерела. Для цього застосуємо метод Сімпсона з циклічним уточненням верхньої межі інтегрування за правилом Рунге, щоб отримати результати із заданою точністю (5 %).

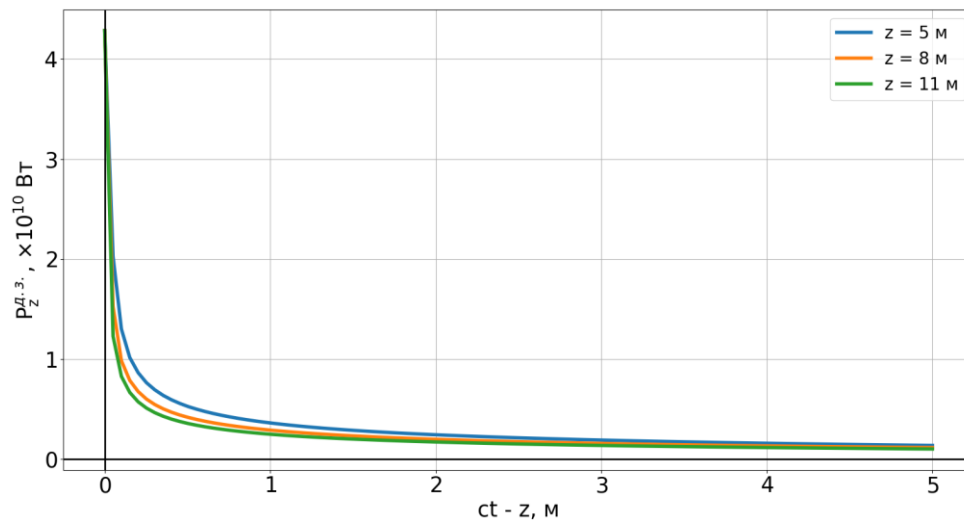


Рис. 2. Потік енергії нестационарного електромагнітного поля, збудженого у формі стрибка, через нескінченну поперечну площину для наближення дальньої зони при фіксованих значеннях відстані до точки спостереження

Fig. 2. Energy flux of a non-stationary electromagnetic field excited in the form of a jump through an infinite transverse plane for the approximation of the far zone at fixed values of the distance to the observation point

На Рис. 2 показано поведінку потоку енергії для декількох можливих відстаней дальньої зони. Видно, що з часом відбувається його загасання. Цікаво, що він асимптотично наближається до нуля. На Рис. 3 представлено тривимірну залежність, де враховується неперервна зміна поздовжньої координати. Якщо зафіксувати час та збільшувати відстань до джерела, енергія, що туди надходить, буде меншою. Так само, з плином часу, енергетичний потік зменшуватиметься при фіксованій координаті. Тривале загасання потоку енергії можна пояснити нескінченним часом, необхідним для досягнення віддалених точок на площині  $z = \text{const}$  при великих значеннях радіальних координат у циліндричній системі.

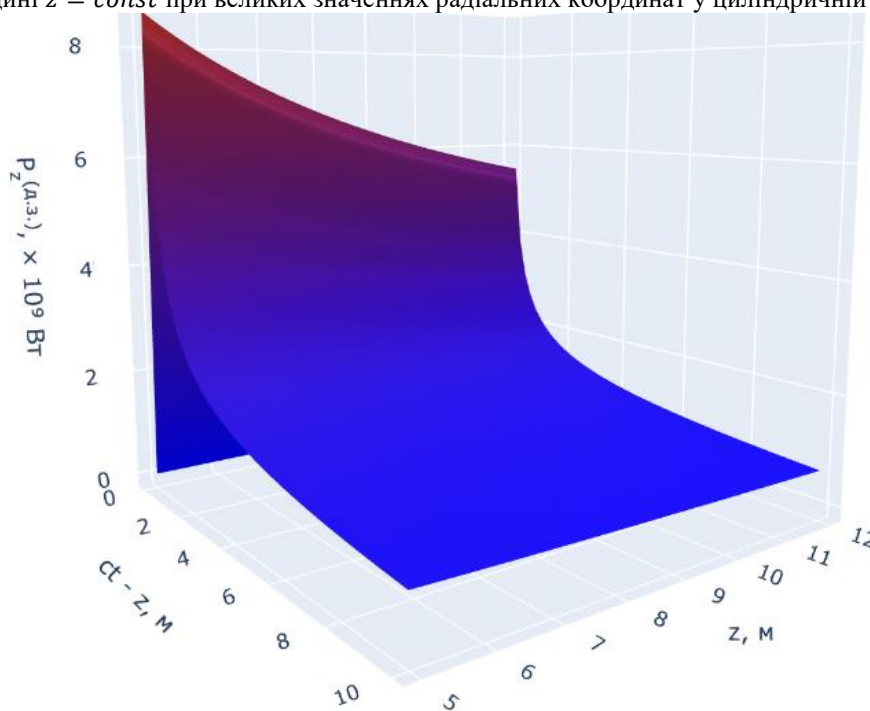


Рис. 3. Потік енергії в наближенні дальньої зони в залежності від часу та відстані до точки спостереження

Рис. 2. Потік енергії нестационарного електромагнітного поля, збудженого у вигляді стрибка через нескінченну поперечну площину для наближення далекої зони при фіксованих значеннях відстані до точки спостереження

На Рис. 4 показано загасання енергії в залежності від позовжньої відстані.

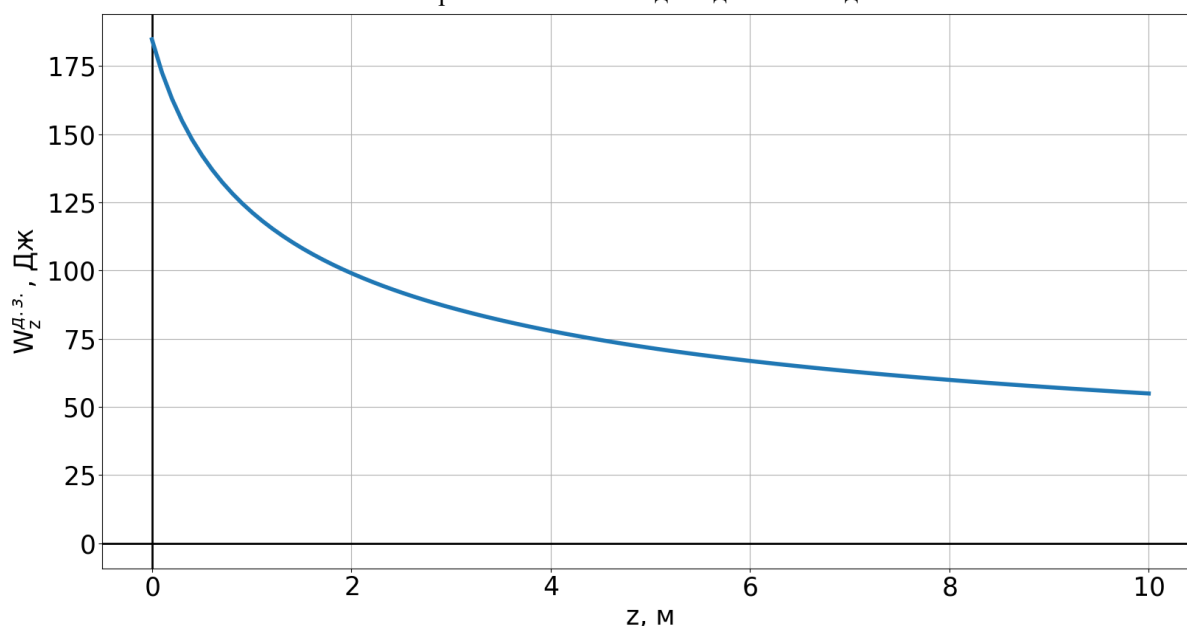


Рис. 4. Енергія нестационарного поля у формі стрибка в наближенні дальньої зони  
Fig. 4. Energy of a non-stationary field in the form of a jump in the far-field approximation

### Випадок 3. Загальний

Тут ми працюватимемо із загальною формулою (9). Ряд аналітично розрахувати не вдається, тому проведимо уточнення розрахунків, враховуючи більшу кількість доданків. На Рис. 5 та 6 можна бачити залежності потоку енергії від часу, причому фіксуються координати як поруч з випромінювачем, так і в дальній зоні. Чим більше враховується доданків, тим ближчим випадок на осі стає схожим на аналітичний розв'язок.

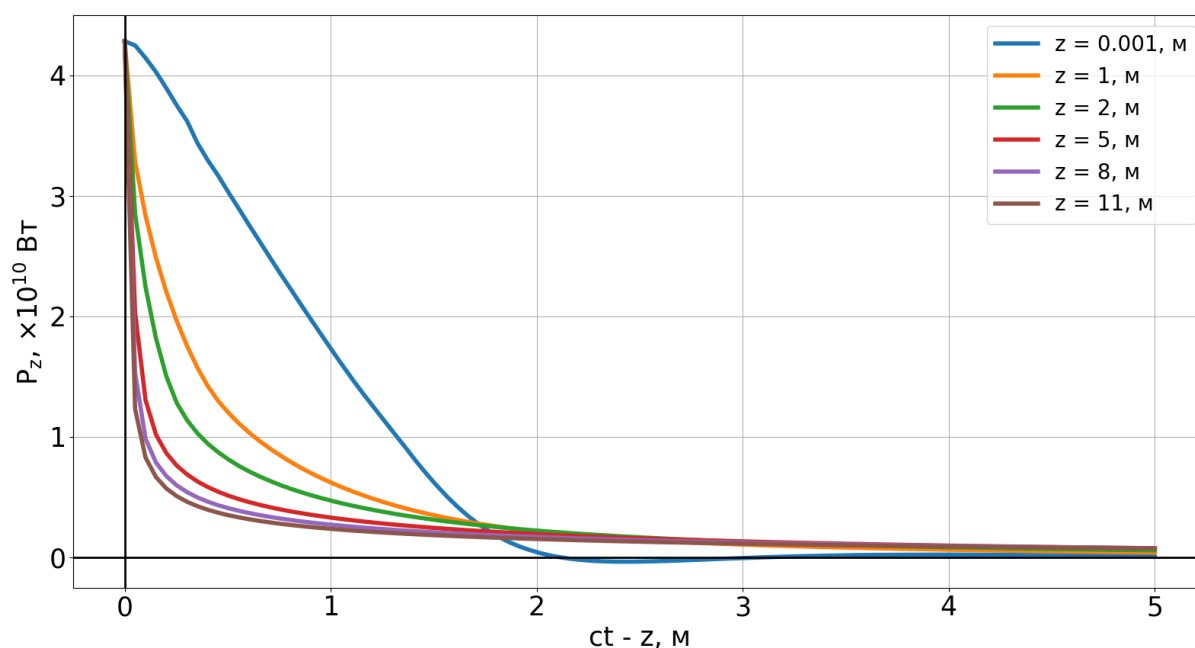


Рис. 5. Потік енергії для фіксованих значень z з урахуванням перших п'яти доданків ряду  
Fig. 5. Energy flow for fixed values of z, taking into account the first five terms of the series

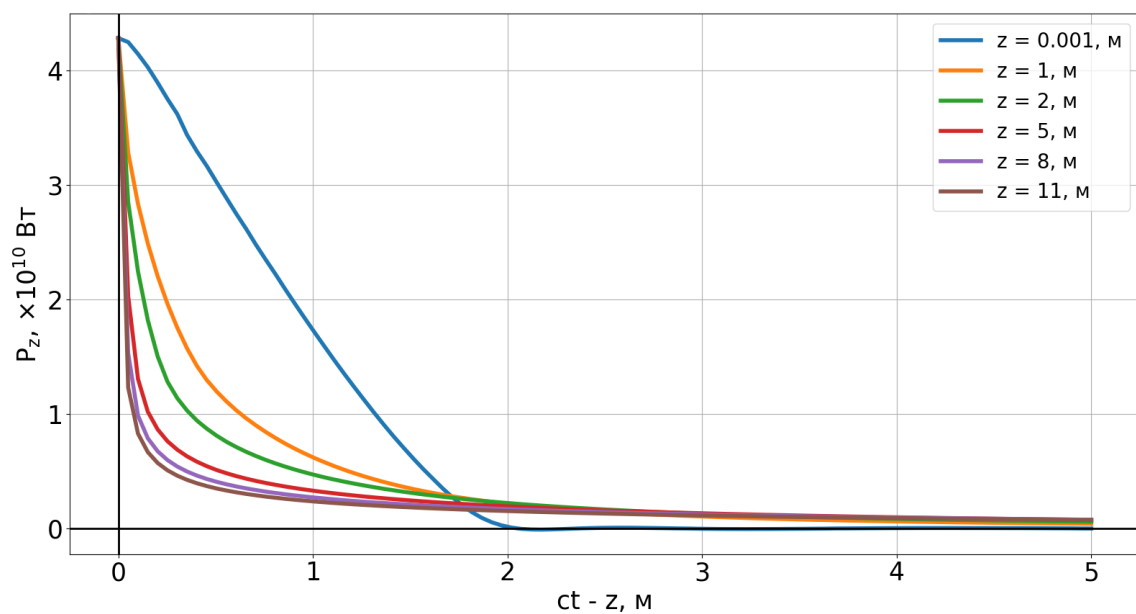


Рис. 6. Потік енергії для фіксованих значень  $z$  з урахуванням перших десяти доданків ряду  
 Fig. 6. Energy flow for fixed values of  $z$ , taking into account the first ten terms of the series

Рис. 7, що ілюструє у тривимірному випадку потік енергії через нескінченну поперечну площину, своїм сильним вигином при великих віддаленнях демонструє, що енергія хвилі все сильніше концентрується біля поздовжньої осі.

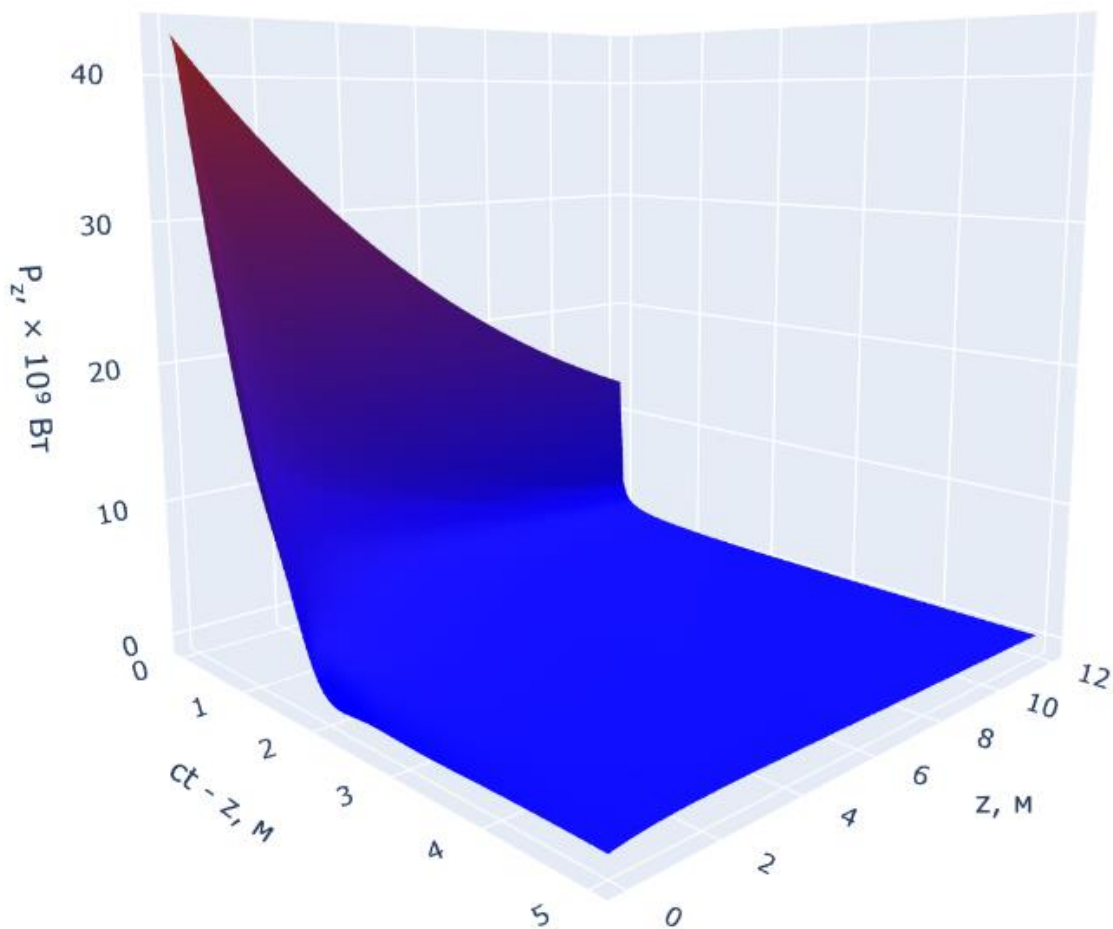


Рис. 7. Потік енергії для фіксованих значень  $z$  з урахуванням перших десяти доданків ряду  
 Fig. 7. Energy flow for fixed values of  $z$ , taking into account the first ten terms of the series

На Рис. 8 зображена повна енергія електромагнітного поля для різних відстаней, що порахована, беручи до уваги два або десять членів ряду. Видно, що вони мало відрізняються. Але, порівнюючи цю залежність із енергією, порахованою у наближенні дальньої зони, що зроблено на Рис. 9, можна зробити висновок, що кардинальне уточнення забезпечує саме другий член ряду, тому на Рис. 8 дві криві майже не відрізняються, тоді як наближення дальньої зони дає дуже велику похибку у розрахунку енергії поля вже на відстані 4 метра і ближче.

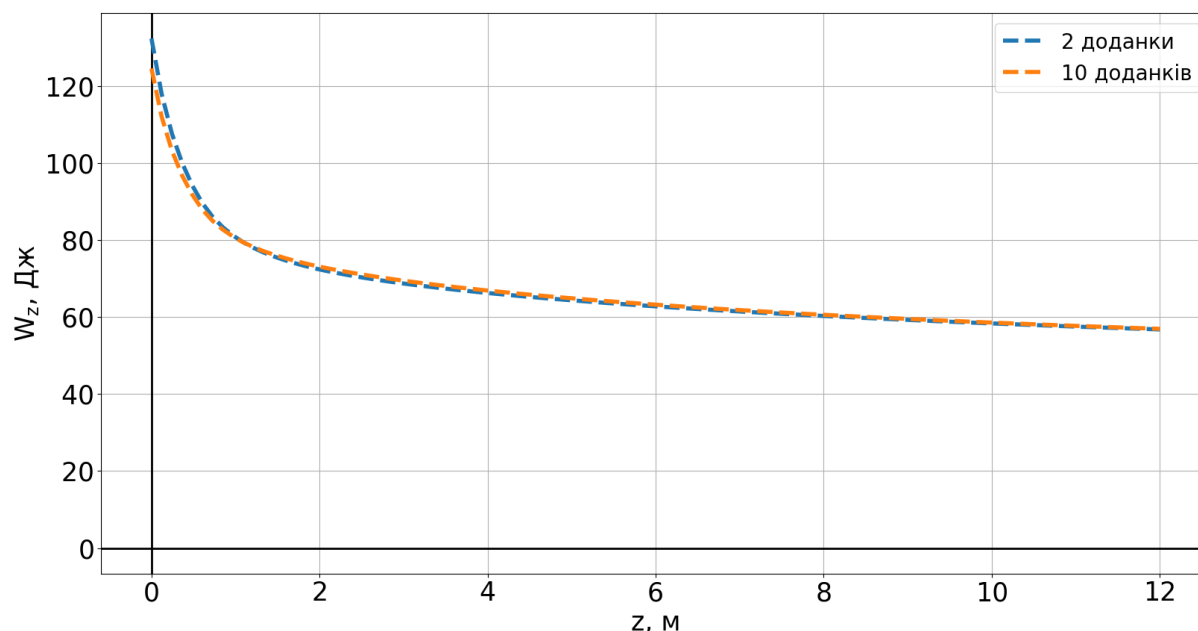


Рис. 8. Порівняння енергії за двох варіантів кількості доданків ряду  
Fig. 8. Comparison of energy for two variants of the number of terms in the series

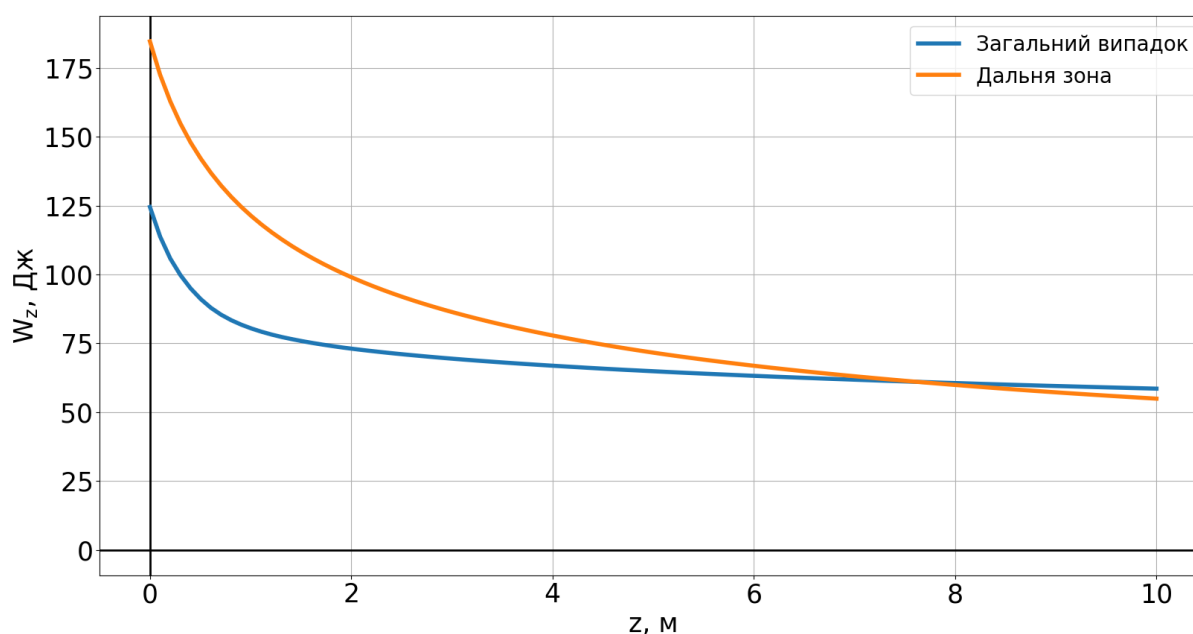


Рис. 9. Енергія в наближенні дальньої зони та загальному випадку з урахуванням перших десяти доданків ряду  
Fig. 9. Energy in the far zone approximation and in the general case, taking into account the first ten terms of the series

### ВИСНОВКИ

Отримані залежності ілюструють процес перетворення статичних компонент поля у хвильові. Це добре видно з того факту, що наближення дальньої зони дає поблизу випромінювача енергію, що

помітно перевищує істинну. Це явище показує, що хвильова складова випроміненого поля запозичує енергію з квазістатичних компонентів полів, що швидко згасають при віддаленні від джерела. Також варто відзначити, що більш швидке спадання потоку енергії поля з відстанню свідчить про те, що енергія в цьому випадку все більше концентрується біля поздовжньої осі. Майже ідеальне лінійне спадання потоку енергії на поверхні випромінювача підтверджує, що після досягнення поля, що приходить з найвіддаленішої точки на апертурі, подальшої передачі енергії від апертури не може бути. Але якщо враховувати не всі члени ряду, то ця залежність відхиляється від ідеальної трикутної, що інколи маємо ситуацію, коли енергія в якийсь момент часу повертається назад в апертуру. Ці хибні результати дуже подібні до явища Гібса, яке інколи спостерігають, отримуючи швидкість передачі інформації, більшу ніж швидкість світла. Врахування достатньої кількості необхідних членів ряду запобігає виникненню подібних похибок.

### КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Wu TT. Electromagnetic missiles. J. Appl. Phys. 1985;57(7):2370–2373.
2. Dumin O, Tretyakov O. Radiation of arbitrary signals by plane disk. MMET '96 VIth International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory Proceedings. <https://doi.org/10.1109/MMET.1996.565704>.
3. Shen HM, Wu TT, Myers JM. Experimental study of electromagnetic missiles from a hyperboloidal lens. Brandt HE, editor. SPIE Proceedings. 1991 Apr 1;1407:286–94. <https://doi.org/10.1117/12.43506>
4. Dumin OM, Tretyakov OO. Radiation of arbitrary signals by plane disk. MMET '96 VIth International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory Proceedings; Lviv, Ukraine. pp. 248–251. <https://doi.org/10.1109/MMET.1996.565704>.
5. Shen HM, Wu TT, Myers JM. Experimental study of electromagnetic missiles from a hyperboloidal lens. Brandt HE, editor. SPIE Proceedings. 1991 Apr 1;1407:286–94. <https://doi.org/10.1117/12.43506>
6. Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA, Katrich VO, Nesterenko MV. Time Domain Analysis of Impulse Electromagnetic Field on the Interface of Two Media. 2022 IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET). 2022 Feb 22. pp. 698–703. <https://doi.org/10.1109/TCSET55632.2022.9766855>.
7. Wu TT, King RWP, Shen HM. Circular cylindrical lens as a line-source electromagnetic missile launcher. IEEE Trans. Ant. Prop. 1989;37(1):39–44.
8. Tretyakov OA, Dumin AN. Emission of Nonstationary Electromagnetic Fields by a Plane Radiator. Telecommunications and Radio Engineering. 2000;54(1):2–15. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v54.il.10>.
9. Гавриленко ДІ, Думін ОМ, Плахтій ВА. Аналіз імпульсного електромагнітного поля у часовому просторі на границі розділу двох середовищ. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2021;35:41-55. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-04>.
10. Abramowitz M, Stegun I. Handbook of Mathematical Functions. 1964. 832 p.
11. Prudnikov AP, Bychkov YuA, Marichev OI. Integrals and Series, Vol. 2: Special Functions. Gordon and Breach Science Publishers. New York. 1986. 750 p.
12. Crucean C. An integral containing the product of four Bessel functions. 2009 Dec 18. pp. 1–8.
13. Prudnikov AP, Bychkov YuA, Marichev OI., Integrals and Series, Vol. 3: More Special Functions. Gordon and Breach Science Publishers. New York. 1989. 800 p.
14. Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA., Katrich VO. Energy Transformation of Transient Radiation of Plane Source with Step-Like Excitation. 2023 IEEE XXVIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). 2023, pp.20-23, <https://doi.org/10.1109/DIPED59408.2023.10269461>.

### REFERENCES

1. Wu TT. Electromagnetic missiles. J. Appl. Phys. 1985;57(7):2370–2373.
2. Dumin O, Tretyakov O. Radiation of arbitrary signals by plane disk. MMET '96 VIth International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory Proceedings. <https://doi.org/10.1109/MMET.1996.565704>.
3. Shen HM, Wu TT, Myers JM. Experimental study of electromagnetic missiles from a hyperboloidal lens. Brandt HE, editor. SPIE Proceedings. 1991 Apr 1;1407:286–94. <https://doi.org/10.1117/12.43506>

4. Dumin OM, Tretyakov OO. Radiation of arbitrary signals by plane disk. MMET '96 VIth International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory Proceedings; Lviv, Ukraine. pp. 248–251. <https://doi.org/10.1109/MMET.1996.565704>.
5. Shen HM, Wu TT, Myers JM. Experimental study of electromagnetic missiles from a hyperboloidal lens. Brandt HE, editor. SPIE Proceedings. 1991 Apr 1;1407:286–94. <https://doi.org/10.1117/12.43506>
6. Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA, Katrich VO, Nesterenko MV. Time Domain Analysis of Impulse Electromagnetic Field on the Interface of Two Media. 2022 IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET). 2022 Feb 22. pp. 698–703. <https://doi.org/10.1109/TCSET55632.2022.9766855>.
7. Wu TT, King RWP, Shen HM. Circular cylindrical lens as a line-source electromagnetic missile launcher. IEEE Trans. Ant. Prop. 1989;37(1):39–44.
8. Tretyakov OA, Dumin AN. Emission of Nonstationary Electromagnetic Fields by a Plane Radiator. Telecommunications and Radio Engineering. 2000;54(1):2–15. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v54.il.10>.
9. Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA. Time domain analysis of impulse electromagnetic field at the interface of two media. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series “Radio Physics and Electronics”. 2021;35:41–55. (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-04>.
10. Abramowitz M, Stegun I. Handbook of Mathematical Functions. 1964. 832 p.
11. Prudnikov AP, Bychkov YuA, Marichev OI. Integrals and Series, Vol. 2: Special Functions. Gordon and Breach Science Publishers. New York. 1986. 750 p.
12. Crucean C. An integral containing the product of four Bessel functions. 2009 Dec 18. pp. 1–8.
13. Prudnikov AP, Bychkov YuA, Marichev OI., Integrals and Series, Vol. 3: More Special Functions. Gordon and Breach Science Publishers. New York. 1989. 800 p.
14. Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA., Katrich VO. Energy Transformation of Transient Radiation of Plane Source with Step-Like Excitation. 2023 IEEE XXVIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). 2023, pp.20-23, <https://doi.org/10.1109/DIPED59408.2023.10269461>.

Стаття надійшла до редакції: 23 жовтня 2024 р.

Рекомендовано до друку: 04 грудня 2024 р.

## ENERGETICAL CHARACTERISTICS OF TRANSIENT ELECTROMAGNETIC FIELD EXCITED BY STEP-LIKE CURRENT

<sup>1</sup>D. I. Havrylenko, <sup>1</sup>O. M. Dumin, <sup>1</sup>V. A. Plakhtii

<sup>1</sup>V. N. Karazin Kharkiv National University, 4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, Ukraine

**Background.** In contrast to classical radiators with harmonic excitation, whose directional characteristics are well studied and determined by the amplitude and phase distribution on the source surface, pulsed antennas exhibit a significantly more complex dependence that considers both the amplitude distribution and the time dynamics of the source. It is known that a sharp amplitude jump can generate a wave with large amplitude and extremely high directivity. Therefore, the analysis of such processes is highly relevant, particularly in the time domain, as it allows for a more consistent and explicit observation of all energy conversion processes in the area surrounding the radiator. Such studies are not only of theoretical significance for understanding the physics of rectangular pulses radiation without carrier frequency but are also of practical importance. They enable the development of effective methods for increasing the transmission range of information signals, improving their noise immunity, and enhancing the resolution of radar and radiolocation systems based on pulsed ultrawideband waves. Furthermore, the application of such approaches facilitates the optimization of energy resources required for organizing radio communication or radar research, while also minimizing unwanted exposure to nearby objects and personnel.

**Objectives.** To derive analytical expressions for the flux of a pulsed electromagnetic field generated by an aperture radiator through the transverse cross-section, to calculate the total energy of the pulse, and to apply numerical methods in cases where analytical solutions cannot be obtained. To perform a physical analysis of the results and investigate the contribution of various components of the derived solutions. Moreover, the construction of graphical dependencies of energy parameters on time and spatial coordinates will verify the accuracy of both analytical and numerical results and provide a deeper understanding of the physical processes occurring in the near zone of pulsed radiators.

**Materials and methods.** The three-dimensional transient problem is solved analytically in the time domain using the evolutionary equations method and the Riemann function. To determine the energy characteristics, integral transformations of special functions are performed to simplify their analytical representation.

**Results.** Analytical expressions are obtained for the Poynting vector of the pulsed electromagnetic field of an aperture radiator with a uniform current amplitude distribution on its surface. The total energy of the radiated field through an infinite transverse plane is derived in the far-field approximation, which, in the transient case, corresponds to the field at large values of the longitudinal coordinate. Using numerical methods, the energy characteristics are calculated at arbitrary distances from the radiator, enabling a detailed analysis of their dependence on spatial and temporal coordinates.

**Conclusions.** The obtained dependencies illustrate the process of transforming static field components into wave components. This is clearly demonstrated by the fact that the far-field approximation yields an energy value near the radiator that significantly exceeds the true magnitude. This phenomenon indicates that the wave component of the radiated field borrows energy from the quasi-static field components, which rapidly decay as the distance from the source increases. It is also worth noting that the faster attenuation of the field energy flux with distance implies a greater concentration of energy near the longitudinal axis. The almost perfectly linear decrease in the energy flux on the radiator's surface confirms that, after reaching the field originating from the farthest point on the aperture, no further energy transfer from the aperture is possible. However, when not all terms of the series are accounted for, this dependence deviates from the ideal triangular form, sometimes leading to situations where energy returns to the aperture at some point in time. These erroneous results are very similar to the Gibbs phenomenon, which is sometimes observed when information transmission speeds greater than the speed of light are obtained. Taking into account a sufficient number of necessary series terms prevents these inaccuracies and ensures the correctness of the obtained results.

**KEY WORDS:** *Evolutionary Equations Method, impulse electromagnetic wave, electromagnetic missile, energy transformation*

The article was received by the editors: October 23 2024

The article is recommended for printing: December 04 2024