

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-03>

УДК 535.37.421

О. В. КАЗАНКО, асистент.

e-mail: a_kazanko@i.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9202-8008>

О. Є. ПЕНКІНА, старший викл.

e-mail: penkina@kart.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9804-6685>

В. М. БУТЕНКО, канд. техн. наук, доц.

e-mail: butenko@kart.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9958-3960>

О. В. ГОЛОВКО, канд. техн. наук, доц.

e-mail: golovko@kart.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9880-428X>

Український державний університет залізничного транспорту,
кафедра обчислювальної техніки та систем управління,
м. Харків, майдан Фейєрбаха, 7, Україна

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ЗНАХОДЖЕННЯ 1-ОЇ, 2-ОЇ ПОХІДНИХ ВІД СКЛАДОВИХ ЧЛЕНІВ ДИСПЕРСІЙНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ПЛОСКОГО ДВОШАРОВОГО ОДНОВИМІРНО- ПЕРІОДИЧНОГО ФОТОННОГО КРИСТАЛА

Актуальність. Останні десятиріччя спостерігається стрімкий розвиток фотоніки. Тому науковий інтерес до оптичного діапазону електромагнітного випромінювання продовжує зберігати актуальність. Як наслідок, задача про розсіяння електромагнітних хвиль (дифракційна задача) на таких об'єктах як фотонні кристали представляється актуальною задачею. Йдеться про розв'язання хвильового рівняння з подальшим застосуванням методу розділення змінних та переходом до проблеми Штурма-Ліувілля на необмеженому інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Для дифракційних структур, які розглядаються у роботі, зазначений метод розділення змінних дозволяє отримати розв'язок хвильового рівняння (котре у такому разі виявляється рівнянням з періодичними коефіцієнтами) у явному вигляді. Інший метод – метод матриці перенесення (Transfer matrix method) для хвильового рівняння з періодичними коефіцієнтами дає змогу врахувати специфіку його рішення на необмеженому інтервалі $(-\infty, +\infty)$, та досягти виконання складової умови розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля – умови про самоспряженість диференціального оператора в цій проблемі. Тож, метод матриці перенесення передбачає побудову та розв'язок так званого дисперсійного рівняння – рівняння, що пов'язує параметри дифракційної задачі з умовами розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля. У наслідок цього виникає необхідність у дослідженні складових членів такого дисперсійного рівняння. А саме, виникає необхідність розуміти поведінку розв'язку спектрального рівняння у даній проблемі Штурма-Ліувілля залежно від спектрального параметра. Тому, на думку авторів, пошук похідних від цього розв'язку має актуальність, оскільки апарат похідної у цілому відіграє доволі важливу роль у дослідженні будь-яких функціональних залежностей.

Мета роботи. Визначити першу та другу похідні за спектральним параметром від розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля для плоского двошарового одновимірно-періодичного фотонного кристала. А також, показати, що кожна із зазначених похідних лінійно виражається через сам розв'язок та свою похідну, але за просторовою змінною, а вже як наслідок, можливість мати дві лінійні залежності, що дає змогу отримати лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку відносно цього розв'язку. Подальше дослідження зазначеного рівняння у деякій перспективі може послужити розвитку альтернативного апарату розуміння поведінки даного розв'язку як функції спектрального параметра.

show that each of the specified derivatives is linearly expressed through the solution itself and its derivative, but in terms of a spatial variable, and as a consequence, the possibility of having two linear dependencies, which makes it possible to obtain a

Методи і методологія. Умова про самоспряженість диференціального оператора у проблемі Штурма-Ліувілля (складова умова розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля) для плоского двошарового нескінченного одновимірно-періодичного фотонного кристала досягається шляхом застосування методу матриці перенесення (Transfer matrix method). Спираючись на принцип невизначених коефіцієнтів, автори використовують підставлення (що запропоновано у роботі) та здійснюють перехід від лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку, розв'язком якого є шукана похідна (2-га похідна), до системи рівнянь, котра розглядається як матричне рівняння. Для розв'язання матричного рівняння використовується метод варіації.

Результати. У поданій роботі визначається друга похідна за спектральним параметром від розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля для плоского двошарового одновимірно-періодичного фотонного кристала (необмеженого вздовж періодичності). Визначена похідна лінійно виражається через сам

© О. В. Казанко, О. Є. Пенкіна, В.М. Бутенко, О.В. Головка, 2024

Open access. This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

розв'язок та свою похідну, але за просторовою змінною. Також у роботі розв'язується лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку, таким чином, власне, й отримується шукана похідна. Таке рівняння вдається розв'язати на основі досліджень та результатів попередніх робіт – робіт з визначення відповідної 1-ї похідної. Втім, варто зазначити, що прямої аналогії між методикою визначення 1-ї та 2-ї похідної вбачати не вдається у цьому, зокрема, й виражається змістовність даної роботи.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: фотонний кристал, розсіяння електромагнітних хвиль, похідна за спектральним параметром, проблема Штурма-Ліувілля, спектральне рівняння, дисперсійне рівняння, власна функція, фотона заборонена зона.

Як цитувати: Казанко ОВ, Пенкіна ОЄ, Бутенко ВМ, Головка ОВ. Дослідження та знаходження 1-ої, 2-ої похідних від складових членів дисперсійного рівняння для плоского двошарового одновимірно-періодичного фотонного кристала. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2024; 40:29-41. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-03>

In cites: Chernogor LF, Bessarabova VO, Holub MYu. Magnetic-ionospheric effects of partial solar eclipse of October 25, 2022 over Ukraine. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2024;40:29-41. (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2024-40-03>

ВСТУП

У зв'язку зі стрімким розвитком такої галузі науки й техніки як фотоніка, в останні десятиріччя (приблизно з 90-х років ХХ-го століття), науковий інтерес до оптичного діапазону електромагнітного випромінювання продовжує зберігати актуальність. А разом з тим, задача про розсіяння електромагнітних хвиль (дифракційна задача) на таких об'єктах як фотонні кристали представляється актуальною [1-3]. Тобто йдеться про розв'язання скалярного хвильового рівняння (*вихідне хвильове рівняння*) з подальшим застосуванням методу розділення змінних та переходом до проблеми Штурма-Ліувілля на необмеженому інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Для структур, які розглядаються у роботі, зазначений метод розділення змінних дозволяє отримати розв'язок хвильового рівняння, (яке в такому разі виявляється рівнянням з періодичними коефіцієнтами), у явному вигляді.

Втім, варто зазначити, що окрім фотонних кристалів, періодичні дифракційні структури, загалом, є важливою складовою пасивних та активних пристроїв мікрохвильової та терагерцової радіофізики. Періодичні дифракційні структури використовуються у приладах електронної техніки як уповільнювачі, а також канали входу та виходу у пристроях прийому та передачі енергії, в спектроскопії, радіолокації, антенофідерних приладах.

Із загальної теорії рівнянь з частковими похідними відомо, що розв'язання хвильового рівняння методом розділення змінних приводить до проблеми Штурма-Ліувілля (проблеми про побудову повної ортогональної системи функцій, кожний елемент якої задовольняє деякому лінійному диференціальному рівнянню 2-го порядку) – спектральної проблеми (проблеми на власні функції) для лінійного диференціального оператора 2-го порядку. Умови повноти й ортогональності шуканих власних функцій цієї проблеми складають предмет доволі чималої теорії. Іншою мовою, чим більш конкретними є вимоги щодо вихідної дифракційної задачі, тим сильніше увиразнюються умови існування розв'язку проблеми Штурма-Ліувілля. Серед відомих умов розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля справедливо виділити умову про самоспряженість диференціального оператора (власні функції утворюють повну ортогональну систему у такому функціональному просторі де даний диференціальний оператор є самоспряженим), оскільки така умова, на думку авторів, є однією з найбільш складно забезпечуваних умов.

При розв'язанні хвильового рівняння на нескінченному інтервалі $(-\infty, +\infty)$ для одновимірно-періодичних дифракційних структур (необмежених уздовж періодичності) умова самопов'язаності диференціального оператора Штурма-Ліувілля може досягатися шляхом застосування методу матриці перенесення (Transfer matrix method) [4-5]. Цей метод передбачає підняття іншої спектральної проблеми, параметр якої, взагалі кажучи, виявляється залежним від спектрального параметра проблеми Штурма-Ліувілля. Нововказана проблема ставиться для квадратної матриці 2-го порядку (матриці перенесення), та, як відомо, з загальної теорії матриць еквівалентна розв'язанню квадратного рівняння. Тож, якщо $LZ = -\beta^2 Z$ – спектральне рівняння у проблеми Штурма-Ліувілля (β – спектральний параметр, L – диференціальний оператор, $Z \in H$ – функції деякого простору Гільберта H – опорного простору), то, за методом матриці перенесення, виникає інше спектральне рівняння, у параметрі якого присутня залежність від параметра β : $Tu = \Lambda_\beta u$, T – квадратна матриця 2-го порядку, Λ_β – спектральний параметр, u – двовимірний вектор. Отже, власні числа Λ_β квадратної матриці T є розв'язками квадратного рівняння $\det(T - \Lambda_\beta I) = 0$ (I – квадратна одинична матриця).

З іншого боку, для виділення простору самоспряження диференціального оператора L має виконуватись $\Lambda_\beta \overline{\Lambda_\beta} = 1$ (докладніше до цього питання торкатимемося нижче при постановці дифракційної

задачі, вибору опорного простору, скалярного добутку, системи координат, матеріальних та інших параметрів вихідної дифракційної задачі). Підкреслимо, що простір розв'язків спектрального рівняння $LZ = -\beta^2 Z$, як простір лінійного диференціального рівняння 2-го порядку, являє собою двовимірний підпростір опорного простору: $U_\beta \subset H$ [6]. А також зазначимо, що через періодичність коефіцієнтів оператора L , функція $u(z-l)$ є розв'язком, якщо $u(z)$ є розв'язком: $Lu(z) \equiv -\beta^2 u(z) \Leftrightarrow Lu(z-l) \equiv -\beta^2 u(z-l)$, l – період розглядуваного кристала (періодичність коефіцієнтів оператора L є наслідком періодичності коефіцієнтів вихідного хвильового рівняння – про це зазначалось вище). Підґрунтям для методу матриці перенесення стає лінійність оператора, який діє у двовимірному просторі U_β та який розв'язку $u(z)$ ставить у відповідність розв'язок $u(z-l)$ (лінійність цього оператора перевіряється безпосередньо за визначенням). Отже, такий оператор однозначно задається квадратною матрицею, яку й називають *матрицею перенесення*. Нехай $T = T_\beta$ – матриця перенесення: $T_\beta: u(z) \rightarrow u(z-l)$. Спектральна проблема для матриці перенесення приводить до сумісного розв'язання двох наступних рівнянь $\det(T_\beta - \Lambda_\beta I) = 0$, $\Lambda_\beta \overline{\Lambda_\beta} = 1$. Це рівняння, як рівняння незалежного параметра β (спектрального параметра проблеми Штурма-Ліувілля), називають *дисперсійним рівнянням* фотонного кристала. (точніше, *дисперсійним рівнянням* плоского двошарового одновимірно-періодичного необмеженого вздовж періодичності фотонного кристала).

Нехай тепер Λ_β – власне число матриці перенесення T_β , яке задовольняє умові $\Lambda_\beta \overline{\Lambda_\beta} = 1$, тоді дисперсійне рівняння $\det(T_\beta - \Lambda_\beta I) = 0$ еквівалентне рівнянню $\Lambda_\beta Z_\beta(z-l) = Z_\beta(z)$, де $Z_\beta(z) \in U_\beta$ – розв'язок спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля. Зрозуміло, що про таку еквівалентність слід говорити тоді, коли існує відповідність між β та Z_β , за якою для будь-якого β існує одна (та лише одна) функція $Z_\beta \in U_\beta$ (таку відповідність нескладно вказати, оскільки структура простору розв'язків спектрального рівняння $LZ = -\beta^2 Z$, як простору розв'язків рівняння з кусково-сталими періодичними коефіцієнтами піддається глибокому розумінню). Отже, видно, що складовим членом дисперсійного рівняння є функція Z_β . Тому властивості дисперсійного рівняння здебільше визначаються характером поведінки функції Z_β як функції спектрального параметра β .

У роботах [7-9] була виявлена можливість лінійно представити похідну від функції Z – розв'язку спектрального рівняння $LZ = -\beta^2 Z$ (точніше, похідну за спектральним параметром β), через саму функцію та свою похідну, але за просторою змінною: $\frac{\partial}{\partial \beta} Z = Z' = -\frac{1}{2} \xi Z + \xi Z'$, тут $\xi = \xi(z)$ – відома функція [8]. Цей результат наводить на думку про існування можливості представити й 2-гу похідну в аналогічному вигляді: $\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} Z = Z'' = \eta Z + \chi Z'$, $\eta = \eta(z)$, $\chi = \chi(z)$ – деякі функції. Своєю чергою, можливість мати дві такі лінійні залежності дає змогу отримати лінійне рівняння відносно функції Z , дослідження якого у перспективі може послужити створенню альтернативного апарату, що дозволяє розуміти загальні властивості розв'язка Z (точніше, йдеться про можливість отримати лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку відносно функції Z). Новозазначене рівняння безпосередньо впливає з двох лінійних залежностей $Z' = -\frac{1}{2} \xi Z + \xi Z'$, $Z'' = \eta Z + \chi Z'$, інша річ полягає у тому, чи буде отримане рівняння піддаватися подальшому вивченню. Втім, не дивлячись на такий стан речей зрозумілим є те, що 1-ша й 2-га похідні, загалом, відіграють доволі важливу роль у дослідженні будь-яких функціональних залежностей. Тому натеper пошуки 2-ї похідної, як видається авторам, становлять інтерес у зв'язку з прагненням розуміти поведінку розв'язка Z як функції спектрального параметра β .

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо дифракційну задачу для двошарового нескінченного одновимірного періодичного фотонного кристала з періодом l . Нехай ϵ_j , μ_j – діелектрична та магнітна проникності відповідно першого й другого шарів ($j = 1, 2$), d – розмір першого шару, $l-d$ – другого шару. Уведемо прямокутну декартову систему координат ZOY таким чином, щоб періодичність структури була направлена вздовж вісі OZ . Скалярне рівняння плоскої монохроматичної Е-поляризованої хвилі для двовимірного середовища, заповненого даним кристалом, має наступний вигляд (модифіковане рівняння Гельмгольца):

$$\Delta_\mu u + k^2 n^2 u = 0, \quad (1)$$

тут $\Delta_\mu = \mu \nabla_\mu^2$ – модифікований оператор Лапласа, $u = u(z, y)$ – шукана скалярна функція, $z, y \in (-\infty, +\infty)$, $n(z) = \sqrt{\epsilon \mu}$ – коефіцієнт заломлення – кусково-стала функція, $\epsilon = \epsilon(z)$ – діелектрична проникність, $\mu = \mu(z)$ – магнітна проникність – кусково-стала:

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & z \in (\frac{d}{2}-l+ml, -\frac{d}{2}+ml] \\ \varepsilon_2, & z \in (-\frac{d}{2}+ml, \frac{d}{2}+ml] \end{cases}, \quad \mu(z) = \begin{cases} \mu_1, & z \in (\frac{d}{2}-l+ml, -\frac{d}{2}+ml] \\ \mu_2, & z \in (-\frac{d}{2}+ml, \frac{d}{2}+ml] \end{cases}$$

m – ціле, l – період шаруватого середовища, $k = \frac{\omega}{c}$ – хвильове число, ω – циклічна частота плоскої монохроматичної хвилі, c – швидкість світла у порожнечі [10].

За методом розділення змінних, загальний розв'язок рівняння (1) представляється у вигляді ряду Фур'є

$$u = \sum_n Y_{\beta_n} Z_{\beta_n}, \quad (2)$$

де $Y_{\beta_n} = Y_{\beta_n}(y)$ – задовольняє такому рівнянню $\ddot{Y}_{\beta_n} + \beta_n^2 Y = 0$ (звичайному лінійному диференціальному рівнянню 2-го порядку), та відповідно має вигляд, $Y_{\beta_n}(y) = C_{\beta_n} e^{\beta_n y} + D_{\beta_n} e^{-\beta_n y}$, C_{β_n} , D_{β_n} – довільні константи, $\{Z_{\beta_n}\}_{n=0, \pm 1, \dots}$ – повна ортогональна система функцій, причому, $Z_{\beta_n} = Z_{\beta_n}(z)$ задовольняє рівнянню $\mu(\frac{1}{\mu} \dot{Z}) + (k^2 n^2 + \beta_n^2) Z = 0$ [11]. Специфіка розв'язання задачі, зокрема, виявляється у тому, що розв'язок відшукується на всій числовій вісі.

Як відомо, побудова повної ортогональної системи функцій, кожен елемент якої задовольняє деякому лінійному диференціальному рівнянню 2-го порядку – проблема Штурма-Ліувілля – може здійснюється шляхом розв'язання наступної спектральної проблеми

$$LZ = -\beta^2 Z, \quad (3)$$

де β – спектральний параметр, L – лінійний диференціальний оператор 2-го порядку, заданий у певному функціональному просторі Гільберта H – в опорному просторі. Стосовно рівняння (1) та ряду Фур'є (2), диференціальний оператор має вигляд $LZ \equiv \mu(\frac{1}{\mu} \dot{Z}) + k^2 n^2 Z$, а у якості опорного простора H вибирається простір майже-періодичних функцій з наступним скалярним добутком (майже-періодичні функції утворюють повний простір, що й потрібно для застосування апарату рядів Фур'є та розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля):

$$(u, v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{z_0}^{z_0+T} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz, \quad (4)$$

де $u, v \in H$, $\mu = \mu(z)$ – магнітна проникність – кусково-стала функція, $z_0 \in (-\infty, +\infty)$ – довільна точка. Скалярний добуток (4) не залежить від вибору точки z_0 .

Як вже неодноразово відмічалось раніше (в теперішній роботі), складовою умовою розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля є умова самоспряження диференціального оператора L , тому з опорного простору H необхідно виділити такий підпростір $H_0 \subset H$ у якому диференціальний оператор L буде самоспряженим (симметрическим). Таким простором є простір функцій $u \in H$ таких, що $\frac{1}{\mu} \dot{u}$ – неперервна, $Lu(z-l) = u(z)$, $L\bar{L} = 1$ (L – деяке комплексне число):

$$H_0 = \left\{ u \in H: \frac{1}{\mu} \dot{u} - \text{неперервна}, Lu(z-l) = u(z) \right\}.$$

Для функцій простору H_0 скалярний добуток (4) еквівалентний наступному скалярному добутку

$$(u, v) = \int_{z_0-l}^{z_0} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz,$$

де $u, v \in H_0$, а самоспряжність оператору L перевіряється безпосередньо за визначенням виконання $(Lu, v) = (u, Lv)$ [12-13]. Для функцій простору H_0 незалежність вибору точки $z_0 \in (-\infty, +\infty)$ нескладно показати. Справді, задамо точки z_0 приріст Δz , тоді

$$\int_{z_0+\Delta z-l}^{z_0+\Delta z} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz = \int_{z_0-l+\Delta\Delta z}^{z_0} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz + \int_{z_0}^{z_0+\Delta\Delta z} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz.$$

У другому доданку правої частини останнього перетворень виконуємо заміну змінної z на $z-l$:

$$\begin{aligned}
\int_{z_0-l+\Delta Z}^{z_0+\Delta Z} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz &= \int_{z_0-l+\Delta Z}^{z_0} \dots \int_{z_0-l}^{z_0-l+\Delta Z} \frac{1}{\mu(z-l)} u(z-l) \overline{v(z-l)} d(z-l) \\
&= \int_{z_0-l+\Delta Z}^{z_0} \dots + \int_{z_0-l}^{z_0-l+\Delta Z} \frac{1}{\mu(z)} \Lambda u(z) \overline{\Lambda v(z)} dz = \int_{z_0-l}^{z_0-l+\Delta Z} \frac{1}{\mu(z)} u(z) \overline{v(z)} dz + \int_{z_0-l+\Delta Z}^{z_0} \dots .
\end{aligned}$$

За адитивністю, поєднуємо останні інтеграли

$$\int_{z_0-l+\Delta Z}^{z_0+\Delta Z} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz = \int_{z_0-l}^{z_0} \frac{1}{\mu} u \bar{v} dz .$$

ОГЛЯД

Один зі шляхів, що допомагає формувати кількісний погляд на розуміння поведінки складових членів дисперсійного рівняння для плоского однорізно-періодичного фотонного кристала (необмеженого вздовж періодичності), як стає зрозумілим з переднього розділу, лежить через дослідження розв'язка спектрального рівняння (3). Перші спроби розвивати такий погляд автори намагалися здійснювати у роботах [7-9, 11]. Були розглянуті питання про характер осциляцій та можливість виділення проміжків монотонності, також була з'ясована асимптотика рівняння на нескінченності ($\beta \rightarrow \infty$). Зокрема, такі дослідження є важливими для побудови фотонних заборонених зон, наявність яких є основною властивістю дифракційних ефектів на кристалах, та завдяки якій, фотонні кристали здебільш й зарекомендували своє практичне застосування. Поряд із побудовою фотонних заборонених зон важливим також представляється виявлення різниці у поведінки складових членів дисперсійного рівняння в залежності від знаку (додатних та від'ємних) значень матеріальних параметрів, впливу частотного хвильового числа $k = \frac{\omega}{c}$, (ω – циклічна частота плоского монохроматичної хвилі, c – швидкість світла у порожнечі) та інших параметрів кристала. Й наостанок, зазначимо, що пошуки коренів, дисперсійного рівняння відносно спектрального параметра β безпосередньо пов'язані з визначенням власних чисел та відповідних власних функцій.

Перша похідна Z'_β відшукується як розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку [6] (рівняння отримується шляхом взяття похідної від спектрального рівняння за спектральним параметром):

$$\left(\frac{1}{\mu} \dot{\psi}\right) + \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} \psi = -2 \frac{\beta}{\mu} Z_\beta. \quad (5)$$

Свою чергою, розв'язок такого рівняння на кінцевому проміжку $[\frac{d}{2}-l, \frac{d}{2})$ записується у наступному вигляді

$$\psi_0 = -\frac{1}{2} \xi Z_\beta + \xi \dot{Z}_\beta, \quad (6)$$

Як було показано де функція ξ обертається в нуль на межі розподілу середовищ: $\xi|_{\frac{d}{2}} = 0$ (цією вимогою забезпечується неперервність розв'язку ψ_0 , оскільки похідна $\dot{Z}_\beta$ може потерпати стрибок). $\xi = \int_{\frac{d}{2}}^l \phi$, ϕ – розв'язок рівняння

$$\left(\frac{1}{\mu} \dot{\phi}\right) + 4 \frac{\zeta_\beta^2}{\mu} \phi = 4 \frac{\beta}{\mu}. \quad (7)$$

У протиставлення рівнянню (3), рівняння (5) розв'язується на обмеженому проміжку $[\frac{d}{2}-l, \frac{d}{2})$. Річ у тому, що можливість інтегрувати рівняння на кінцевому проміжку дає змогу знизити диференціальні якості розв'язків при виході на границю й таким чином ставить дослідника у більш вигідне становище у порівнянні з ситуацією, коли розв'язки відшукуються на нескінченному інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Розв'язання спектрального диференціального рівняння (3) та відповідно хвильового рівняння (1) на нескінченному інтервалі $(-\infty, +\infty)$ зрозуміло, що немає граничних точок у цьому, власне, й виражається специфіка в підході та залучення методу матриці перенесення (Transfer matrix method) дозволяє зрозуміти та виділити простір у якому диференціальний оператор L є самоспряженим й таким чином досягти

складової умову розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля. Авторам роботи видається важливим дослідити питання щодо існування можливості записати 2-гу похідну від функції Z_β – розв'язку спектрального диференціального рівняння (3), але не як функції просторової змінної z , а як функції спектрального параметра β .

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Перейдемо до знаходження 2-ї похідної. Тож, диференціюючи спектральне диференціальне рівняння (3) за спектральним параметром β , маємо

$$\left(\frac{1}{\mu}\dot{Z}\right)'' + \frac{\zeta_\beta^2}{\mu}Z'' = -2\frac{1}{\mu}Z - 2\frac{2\beta}{\mu}Z'.$$

Або, здійснюючи підставлення $Z'' = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}Z = \varphi$, отримуємо

$$\left(\frac{1}{\mu}\dot{\varphi}\right) + \frac{\zeta_\beta^2}{\mu}\varphi = -2\frac{1}{\mu}Z - 4\frac{\beta}{\mu}Z'. \quad (8)$$

Таким чином, було записано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку відносно функції φ . З погляду математичної строгості, класична похідна (якою є похідна за спектральним параметром) та узагальнена похідна за Соболевим (відносно якої вибудовані хвильове, спектральне та всі інші диференціальні рівняння у даній роботі) не є тотожними поняттями, тому питання про рівність мішаних похідних у принципі потребує пояснень, тобто питання про рівність $\left(\frac{1}{\mu}\dot{Z}\right)'' = \left(\frac{1}{\mu}\dot{Z}''\right)$. Подібна проблема вже висвітлювалась у роботах [7-9, 11] при пошуку 1-ї похідної – тут існування та рівність мішаних похідних пояснюється аналогічно.

Спираючись на досвід розв'язання рівнянь виду (5) – рівнянь, що виникають при знаходженні 1-ї похідної (за спектральним параметром β) від розв'язку Z , приходять на думку наступна логіка. Спершу зробити підставлення (6) у (8) та виключити член Z' , а тоді звести доданки у правій частині та знайти розв'язок у вигляді $\varphi = \eta Z + \chi \dot{Z}$, тобто розв'язок зведеного рівняння (7) відшукувати у такому ж вигляді як й розв'язок рівняння (5). На цьому шляху приходимо до неоднорідного рівняння з правою частиною, що містить функцію ξ . Тобто, цей шлях не приводить до суттєвого спрощення відповідного рівняння (7). Справді,

$$L\varphi = -2\frac{1}{\mu}Z - 4\frac{\beta}{\mu}\left(-\frac{1}{2}\xi Z_\beta + \xi \dot{Z}_\beta\right) \equiv -2\frac{1}{\mu}Z + 4\frac{\beta}{\mu} \cdot \frac{1}{2}\xi Z_\beta - 4\frac{\beta}{\mu}\xi \dot{Z}_\beta,$$

робимо підставлення (6) у (8) та зводимо доданки при функціях $Z, \dot{Z}$:

$$L\varphi = 2(\beta\xi - 1)\frac{1}{\mu}Z_\beta - 4\frac{\beta}{\mu}\xi \dot{Z}_\beta.$$

Для знаходження 2-ї похідної маємо наступне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку:

$$\left(\frac{1}{\mu}\dot{\varphi}\right) + \frac{\zeta_\beta^2}{\mu}\varphi = 2(\beta\xi - 1)\frac{1}{\mu}Z_\beta - 4\beta\xi\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta.$$

Далі, діємо диференціальним оператором L на функцію $\varphi = \eta Z + \chi \dot{Z}$, та записуємо (аналогія з пошуками 1-ї похідної [5-7]):

$$L\varphi \equiv \left(\dot{\eta}\frac{1}{\mu} - 2\frac{\zeta_\beta^2}{\mu}\chi\right)Z + (\ddot{\chi} + 2\dot{\eta})\frac{1}{\mu}\dot{Z} = 2(-1 + \beta\xi)\frac{1}{\mu}Z - 4\frac{\beta}{\mu}\xi \dot{Z}_\beta,$$

$$\ddot{\chi} + 2\dot{\eta} = -4\beta\xi \Rightarrow \dot{\eta} = -\frac{1}{2}\ddot{\chi} - 2\beta\xi \Rightarrow \{\vartheta = \dot{\chi}\}, \eta = -\frac{1}{2}\vartheta - 2\beta \int \xi + \eta_0,$$

$$\left(\dot{\eta}\frac{1}{\mu} - 2\frac{\zeta_\beta^2}{\mu}\chi\right) = 2(\beta\xi - 1)\frac{1}{\mu}.$$

Звідки, дістаємось

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\dot{\vartheta}\right) - 2\frac{\zeta_\beta^2}{\mu}\vartheta = 2\beta\xi\frac{1}{\mu} + 2(\beta\xi - 1)\frac{1}{\mu} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\mu}\dot{\vartheta}\right) + 4\frac{\zeta_\beta^2}{\mu}\vartheta = 4(2\beta\xi - 1)\frac{1}{\mu}.$$

Отож, дія диференціального оператора L на функцію $\varphi = \eta Z + \chi \dot{Z}$ приводить до неоднорідного диференціального рівняння з правою частиною, що містить функцію ξ , тобто приходимо до рівняння, яке істотно не спрощує вихідне рівняння – (7). Це є ознакою того, що дана задача скоріш ускладнюється ніж розв'язується. Внаслідок цього й доводиться поглиблювати дослідження та вдаватися в пошуки шляхів отримати розв'язок (7) у прийнятному вигляді. Тож, розімкнати коло, на думку авторів, допомагає підхід, який полягає у спробах відшукувати розв'язки у наступному вигляді

$$\varphi = \eta Z' + \chi \dot{Z}' + \nu Z + \tau \dot{Z}, \quad (9)$$

де η, χ, ν, τ – шукані функції. (питання щодо існування похідних розглядалися у роботах [7-9], підкреслимо, що коефіцієнти χ, τ обертаються в нуль на межі розподілу середовищ й таким чином забезпечують неперервність шуканого розв'язку φ). Хоча прямої аналогії між підходом на основі (9) та розв'язанням рівняння (5) не вбачається, втім, було б розумно сподіватися, що деякі збіжності у методах, застосованих до рівнянь виду (5) [7-9], можуть посприяти пошуку розв'язку (7) у прийнятному вигляді. Справді, функція Z' задовольняє неоднорідному рівнянню (5), тому під дією диференціального оператора L у сполучені з деяким коефіцієнтом $\eta = \eta(z)$, буде переходити у функцію $\dot{Z}'$, й навпаки, функція $\dot{Z}'$ під дією оператора L у сполучені з іншим коефіцієнтом $\chi = \chi(z)$, переходить у функцію Z' , створюючи таким чином зв'язок між цими коефіцієнтами η, χ (виявляється, що такий зв'язок є лінійним). Власне так, й відбувається при пошуках 1-ї похідної, тобто при розв'язанні рівняння (5), у цьому рівнянні у якості несучих лінійність функцій виступали функції $Z, \dot{Z}$, а тут – $Z', \dot{Z}'$.

Втім, перетворення подібне до (9) може отримуватися шляхом безпосереднього взяття похідної за спектральним параметром β від представлення (6). Але у такому разі маємо невідомі функції ξ', ξ'' , пошук яких приводить до рівнянь, що за складністю не поступаються вихідному рівнянню (7).

Нижче показується, що підставлення розв'язку у вигляді (9) приводить до системи 4-х рівнянь, яку своєю чергою, вдається звести до системи 2-х лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку та може розв'язуватися у матрицях (дві шукані функції з двох інших рівнянь виключаються). Тож, розглянемо окремо кожен член представлення (9). Запишемо 1-шу, 2-гу похідні (за просторовою змінною z):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}(\eta Z') &= \dot{\eta} \frac{1}{\mu} Z' + \eta \frac{1}{\mu} \dot{Z}' \Rightarrow \left(\dot{\eta} \frac{1}{\mu} Z' + \eta \frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)' = \left(\dot{\eta} \frac{1}{\mu} \right)' Z' + \dot{\eta} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' + \dot{\eta} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' + \eta \left(\frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)' \\ &= \left(\dot{\eta} \frac{1}{\mu} \right)' Z' + 2 \dot{\eta} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - \eta \frac{\zeta_{\beta}^2}{\mu} Z' - 2 \eta \frac{\beta}{\mu} Z. \end{aligned}$$

(тут скористалися тим, що функція Z' є розв'язком неоднорідного рівняння (4): $\left(\frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)' = -\frac{\zeta_{\beta}^2}{\mu} Z' - 2 \frac{\beta}{\mu} Z$). Застосуємо диференціальний оператор L до $\eta Z'$:

$$L \eta Z' = \left(\dot{\eta} \frac{1}{\mu} \right)' Z' + 2 \dot{\eta} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - \eta \frac{\zeta_{\beta}^2}{\mu} Z' - 2 \eta \frac{\beta}{\mu} Z + \frac{\zeta_{\beta}^2}{\mu} \eta Z' = \left(\dot{\eta} \frac{1}{\mu} \right)' Z' + 2 \dot{\eta} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - 2 \eta \frac{\beta}{\mu} Z.$$

Переходимо до наступного члена представлення (9). Запишемо 1-шу похідну від $\chi \dot{Z}'$:

$$\frac{1}{\mu}(\chi \dot{Z}')' = \dot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' + \chi \left(\frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)' = \dot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - \chi \frac{\zeta_{\beta}^2}{\mu} Z' - 2 \frac{\beta}{\mu} \chi Z.$$

тут, як й вище, $\left(\frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)' = -\frac{\zeta_{\beta}^2}{\mu} Z' - 2 \frac{\beta}{\mu} Z$. Відповідно, 2-га похідна від $\chi \dot{Z}'$:

$$\begin{aligned} \left(\dot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - \chi \frac{\zeta_{\beta}^2}{\mu} Z' - 2 \frac{\beta}{\mu} \chi Z \right)' &= \ddot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' + \dot{\chi} \left(\frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)' - \dot{\chi} \frac{\zeta_{\beta}^2}{\mu} Z' - \chi \frac{\zeta_{\beta}^2}{\mu} \dot{Z}' - 2 \frac{\beta}{\mu} (\chi Z)' \\ &= \ddot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - \chi \frac{\zeta_{\beta}^2}{\mu} Z' - 2 \frac{\beta}{\mu} \dot{\chi} Z - \dot{\chi} \frac{\zeta_{\beta}^2}{\mu} Z' - \chi \frac{\zeta_{\beta}^2}{\mu} \dot{Z}' - 2 \frac{\beta}{\mu} (\chi Z)' \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=\dot{\chi} \left(\frac{1}{\mu} \dot{Z}' \right)} \end{aligned}$$

(підкреслені доданки є подібними). Застосуємо диференціальний оператор L до $\chi \dot{Z}'$:

$$L \chi \dot{Z}' = \ddot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - 2\dot{\chi} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} Z' - 2\frac{\beta}{\mu} \dot{\chi} Z - 2\frac{\beta}{\mu} (\chi Z) - \underbrace{\chi \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} \dot{Z}' + \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} \chi \dot{Z}'}_{=0} = \ddot{\chi} \frac{1}{\mu} \dot{Z}' - 2\dot{\chi} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} Z' - 2\frac{\beta}{\mu} \dot{\chi} Z - 2\frac{\beta}{\mu} (\chi Z).$$

Як видно, дія диференціального оператора L на члени $\eta Z'$, $\chi \dot{Z}'$ представлення (9) лінійно пов'язує коефіцієнти η , χ . Але окрім несучих лінійності функцій Z' , $\dot{Z}'$, таке застосування оператора L , зумовлює виникнення й ще функцій Z , $\dot{Z}$. Іншою мовою, перші два члени представлення (9) дають два невідомих коефіцієнти, але разом з тим й чотири рівняння. Але за результатами робіт [7-9, 11] стає зрозумілим, що характер дії диференціального оператора L на 2-а інших члени vZ , $\tau \dot{Z}$ не призводить до появи нових невідомих, тому маємо чотири несучих лінійності функції Z' , $\dot{Z}'$, Z , $\dot{Z}$ та чотири шукані коефіцієнти η , χ , v , τ . Перегрупуємо та зводимо доданки:

$$Z': (\dot{\eta} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\chi} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} = -2\frac{2\beta}{\mu}, \dot{Z}': \ddot{\chi} + 2\dot{\eta} = 0,$$

$$L(\eta Z' + \chi \dot{Z}') = \dots - 2\frac{\beta}{\mu} (\eta + \dot{\chi}) Z - 2\frac{\beta}{\mu} (\dot{\chi} Z + \chi \dot{Z}) = \dots - 2\frac{\beta}{\mu} (\eta + 2\dot{\chi}) Z - 2\frac{\beta}{\mu} \chi \dot{Z}.$$

при підстановці двох інших членів представлення (9) матимемо наступні лінійні співвідношення між функціями Z , $\dot{Z}$:

$$L(vZ + \tau \dot{Z}) = (\dot{v} \frac{1}{\mu}) Z + 2\dot{v} \frac{1}{\mu} \dot{Z} + \ddot{\tau} \frac{1}{\mu} \dot{Z} - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} Z = \left((\dot{v} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} \right) Z + (\ddot{\tau} + 2\dot{v}) \frac{1}{\mu} \dot{Z}.$$

Далі, продовжуємо перегрупувати доданки,

$$Z: (\dot{v} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} - 2\frac{\beta}{\mu} (\eta + 2\dot{\chi}) \equiv (\dot{v} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} - 2\frac{\beta}{\mu} \left(-\frac{1}{2}\dot{\chi} + 2\dot{\chi} \right) \equiv (\dot{v} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} - 3\frac{\beta}{\mu} \dot{\chi} = -2\frac{1}{\mu},$$

$$\frac{1}{\mu} \dot{Z}: \ddot{\tau} + 2\dot{v} - 2\beta\chi = 0 \Rightarrow \dot{v} = -\frac{1}{2}\ddot{\tau} + \beta\chi.$$

Виключаємо η , v :

$$-\frac{1}{2}(\ddot{\tau} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} + \frac{\beta}{\mu} \dot{\chi} - 3\frac{\beta}{\mu} \dot{\chi} = -4\frac{\beta}{\mu},$$

$$(\dot{\eta} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\chi} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} \equiv -\frac{1}{2}(\ddot{\chi} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\chi} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} \equiv -\frac{1}{2}(\ddot{\tau} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} - 2\frac{\beta}{\mu} \dot{\chi} = -4\frac{1}{\mu},$$

або,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}(\ddot{\chi} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\chi} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} = -2\frac{2\beta}{\mu} \\ -\frac{1}{2}(\ddot{\tau} \frac{1}{\mu}) - 2\dot{\tau} \frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} - 2\frac{\beta}{\mu} \dot{\chi} = -4\frac{1}{\mu} \end{cases} = \begin{cases} (\ddot{\chi} \frac{1}{\mu}) + 4\frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} \dot{\chi} & = 2 \cdot 4\frac{\beta}{\mu} \\ (\ddot{\tau} \frac{1}{\mu}) + 4\frac{\beta}{\mu} \dot{\chi} + 4\frac{\varsigma_{\beta}^2}{\mu} \dot{\tau} & = 2 \cdot 4\frac{1}{\mu} \end{cases}.$$

Таким чином, отримуємо систему з двох лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку відносно функцій $\dot{\chi}$, $\dot{\tau}$. Запишемо цю систему у векторно-матричній формі:

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} \right] + \frac{4}{\mu} \begin{pmatrix} \varsigma_{\beta}^2 & 0 \\ \beta & \varsigma_{\beta}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} = \frac{8}{\mu} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix},$$

або,

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} \right] + \frac{4}{\mu} \begin{pmatrix} \varsigma_{\beta} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_{\beta}} & \varsigma_{\beta} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} = \frac{8}{\mu} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varsigma_\beta^2 & 0 \\ \beta & \varsigma_\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Тож, маємо наступне матричне рівняння

$$\left[\frac{1}{\mu} I \dot{X} \right] + \frac{4}{\mu} \mathbf{\varsigma}^2 X = 8 \frac{1}{\mu} F, \quad (10)$$

тут

$$\mathbf{\varsigma} = \begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

X – шукана матриця. За аналогією зі скалярним рівнянням, останнє має два матричні (фундаментальні) розв'язки (точніше, відповідне однорідне рівняння має два матричні розв'язки). Безпосереднім підставленням переконуємось, що такі розв'язки матимуть наступний вигляд:

$$X_1(z) = \cos 2\mathbf{\varsigma}(z + \frac{d}{2}), X_2(z) = \mu \mathbf{\varsigma}^{-1} \sin \mathbf{\varsigma}(z + \frac{d}{2}). \quad (11)$$

Розв'язки самого матричного рівняння (10), як розв'язки лінійного неоднорідного диференціального рівняння, можуть відшукуватися за методом варіації (проглядається очевидна аналогія зі скалярним рівнянням, яке відповідно, розв'язувалося при пошуку 1-ї похідної [7-9]). Запишемо розкладення матричних функцій, що входять до розв'язків X_1, X_2 , у степеневий ряд (при цьому, матрицю $\mathbf{\varsigma}$ вважаємо сталою – кускова сталість матриці $\mathbf{\varsigma}$ та диференціальні якості функцій, до складу яких входить ця матриця $\mathbf{\varsigma}$, враховуються після отримання розкладень):

$$\begin{aligned} \cos 2\mathbf{\varsigma}(z + \frac{d}{2}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{\varsigma}^{2n}}{(2n)!} 2^{2n} (z + \frac{d}{2})^{2n}, \\ \sin 2\mathbf{\varsigma}(z + \frac{d}{2}) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\mathbf{\varsigma}^{2n-1}}{(2n-1)!} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-1}. \end{aligned}$$

Нижче отримуємо розкладання останніх матричних функцій. Безпосереднім перемноженням матриць встановлюємо парні степені:

$$\mathbf{\varsigma}^{2n} = \begin{pmatrix} \varsigma_\beta^{2n} & 0 \\ n\beta \varsigma_\beta^{2(n-1)} & \varsigma_\beta^{2n} \end{pmatrix} = \varsigma_\beta^{2n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} & 1 \end{pmatrix}, n = 0, 1, 2 \dots$$

Звідки,

$$\cos 2\mathbf{\varsigma}(z + \frac{d}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{\varsigma}^{2n}}{(2n)!} 2^{2n} (z + \frac{d}{2})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varsigma_\beta^{2n}}{(2n)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} & 1 \end{pmatrix} 2^{2n} (z + \frac{d}{2})^{2n}.$$

З останнього стає зрозумілим вигляд діагональних елементів – такі являють собою скалярне розкладення функції косинус: $\cos 2\varsigma_\beta(z + \frac{d}{2})$, один з недіагональних є нуль, а інший недіагональний елемент обчислюється наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \frac{\varsigma_\beta^{2n}}{(2n)!} 2^{2n} (z + \frac{d}{2})^{2n} &= 0 \Big|_{n=0} + \frac{\beta}{2} \frac{1}{\varsigma_\beta} \frac{1}{\varsigma_\beta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n \frac{\varsigma_\beta^{2n}}{(2n)!} 2^{2n} (z + \frac{d}{2})^{2n} \\ &= -\frac{\beta}{2} \frac{1}{\varsigma_\beta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2n \frac{\varsigma_\beta^{2n-1}}{(2n)!} 2^{2n} (z + \frac{d}{2})^{2n} \\ &= 2 \frac{\beta}{2\varsigma_\beta} (z + \frac{d}{2}) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\varsigma_\beta^{2n-1}}{(2n-1)!} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-1} = -\frac{\beta}{\varsigma_\beta} (z + \frac{d}{2}) \sin 2\varsigma_\beta(z + \frac{d}{2}). \end{aligned}$$

Висилаючи на кускову сталість функції ς_β , та відповідно, враховуючи диференціальні властивості матриці $\mathfrak{S}$, отриманий при підсумовуванні елемент системи (10) слід модифікувати наступним чином (додати множник μ – у правомочності модифікації переконуємося безпосереднім підставленням у рівняння):

$$\dot{t} = -\beta \frac{\mu}{\varsigma_\beta} (z + \frac{d}{2}) \sin 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}).$$

Тож, маємо

$$X_1 = \begin{pmatrix} \cos 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}) & 0 \\ -\beta \frac{\mu}{2\varsigma_\beta} (z + \frac{d}{2}) \sin \varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}) & \cos 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}) \end{pmatrix}.$$

Аналогічно встановлюємо непарні степені матриці $\mathfrak{S}$ ($n = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^{2n-1} = \mathfrak{S}^{2n} \mathfrak{S}^{-1} &= \begin{pmatrix} \varsigma_\beta^{2n} & 0 \\ n\beta \varsigma_\beta^{2(n-1)} & \varsigma_\beta^{2n} \end{pmatrix} \frac{1}{\varsigma_\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varsigma_\beta} \begin{pmatrix} \varsigma_\beta^{2n} & 0 \\ n\beta \varsigma_\beta^{2(n-1)} - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} \varsigma_\beta^{2n} & \varsigma_\beta^{2n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\varsigma_\beta} \begin{pmatrix} \varsigma_\beta^{2n} & 0 \\ (n - \frac{1}{2})\beta \varsigma_\beta^{2(n-1)} & \varsigma_\beta^{2n} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

тут $\mathfrak{S}^{-1}$ – обернена матриця: $\mathfrak{S}\mathfrak{S}^{-1} = I$, тобто,

$$\begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix} \frac{1}{\varsigma_\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідки маємо,

$$\begin{aligned} &\sin 2\mathfrak{S}(z + \frac{d}{2}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\mathfrak{S}^{2n-1}}{(2n-1)!} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-1} = \frac{1}{\varsigma_\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \begin{pmatrix} \varsigma_\beta^{2n} & 0 \\ \beta(n - \frac{1}{2})\varsigma_\beta^{2(n-1)} & \varsigma_\beta^{2n} \end{pmatrix} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-1}. \end{aligned}$$

Знов дістаємось висновку про вигляд діагональних елементів, один з недіагональних є нуль, а інший недіагональний елемент вичислюється наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\varsigma_\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} (n - \frac{1}{2}) \varsigma_\beta^{2(n-1)} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-1} &= \frac{\beta}{2\varsigma_\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} (2n-1) \frac{\varsigma_\beta^{2n-2+1}}{\varsigma_\beta} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-1} \\ &= \frac{\beta}{2\varsigma_\beta^2} (z + \frac{d}{2}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} (2n-1) \varsigma_\beta^{2n-1} 2^{2n-1} (z + \frac{d}{2})^{2n-2} = \frac{\beta}{2\varsigma_\beta^2} (z + \frac{d}{2}) \varsigma_\beta \cos 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}). \end{aligned}$$

Тут, як й вище, слід модифікувати, враховуючи диференціальні властивості матриці $\mathfrak{S}$, отриманий при сумуванні елемент системи (10) слід модифікувати наступним чином (додати множник μ – у правомочності модифікації переконуємося безпосередньою підстановкою у рівняння. Тож, маємо:

$$X_2 = \mu \mathfrak{S}^{-1} \sin 2\mathfrak{S}(z + \frac{d}{2}) = \frac{1}{\varsigma_\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\beta}{\varsigma_\beta^2} & 1 \end{pmatrix} \frac{\mu}{\varsigma_\beta} \begin{pmatrix} \sin 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}) & 0 \\ -\beta \frac{\mu}{2\varsigma_\beta} (z + \frac{d}{2}) \cos 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}) & \sin 2\varsigma_\beta (z + \frac{d}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin 2\zeta_\beta(z + \frac{d}{2}) & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\beta}{\zeta_\beta} \sin \zeta_\beta(z + \frac{d}{2}) - \beta \frac{\mu}{2\zeta_\beta} (z + \frac{d}{2}) \cos \zeta_\beta(z + \frac{d}{2}) & \sin 2\zeta_\beta(z + \frac{d}{2}) \end{pmatrix}.$$

Таким чином було виписано розв'язки однорідного матричного рівняння, що відповідає неоднорідному рівнянню (10). Розв'язки неоднорідного рівняння можуть відшукуватися за методом варіацій як розв'язки лінійного неоднорідного диференціального рівняння [6].

ВИСНОВКИ

Теоретичне та чисельне дослідження як у цілому, так й окремих членів дисперсійного рівняння, записаного для плоского двошарового одновимірної-періодичного фотонного кристала (необмеженого вздовж періодичності), являє важливість для побудови фотонних заборонених зон, пошуку власних чисел проблеми Штурма-Ліувілля (знаходження коренів відносно спектрального параметра) а також для виявлення характеру впливу хвильового частотного числа $k = \frac{\omega}{c}$ (ω – частота, c – швидкість світла) на ці члени та впливу інших параметрів падаючої хвилі та кристала.

Один зі шляхів, що допомагає розвивати апарат кількісного розуміння властивостей дисперсійного рівняння лежить через розуміння поведінки функції Z_β – розв'язка спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля (як функції спектрального параметра β). У роботі було визначено та показано, що 2-га, як й 1-ша похідні від цього розв'язку Z_β представляються лінійно через саму функцію та свою похідну, але за просторовою змінною: $Z' = -\frac{1}{2}\xi Z + \xi Z$, $Z'' = \eta Z + \chi Z$, тут $\eta = \eta(z)$, $\chi = \chi(z)$, $\xi = \xi(z)$ – знайдені функції. Запропонованою у роботі підстановкою було розв'язано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку, при здійсненні чого був задіяний апарат матричного числення. Власне, розв'язком такого рівняння і є шукана похідна.

Значущість теперішньої роботи, зокрема, виявляється у тому, що між скалярним рівнянням (5), відомим з попередніх робіт (робіт з пошуків 1-ї похідної) та рівнянням (8), отриманим у цій роботі, не вдається вбачати пряму аналогію. Але між матричним рівнянням, яке отримується шляхом використання запропонованої підстановки, та щойно зазначеним скалярним рівнянням, вже проглядається очевидна аналогія. У зв'язку з можливістю вбачати таку аналогію зрозумілим стає й вигляд розв'язків матричного рівняння. Втім, на відміну від скалярного рівняння останнє містить матричні функції. У роботі вдається отримати розкладення у степеневі ряди цих матричних функцій та мати скалярну форму розв'язку. Також у роботі неодноразово звертається увага на те, що лінійні представлення, записані відповідно для 1-ї та 2-ї похідних, дозволяють отримати рівняння відносно розв'язку Z_β (точніше, отримати лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку). Подальші роботи у цьому напрямку можуть орієнтуватися на виведення та спроби вивчати зазначене рівняння.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кожем'яко ВП, Іванов ОА, Іванов ІА. Перспективи застосування фотонних кристалів у сучасних системах обробки даних //Наукові праці ВНТУ, № 4, Інформаційні технології та комп'ютерна техніка 2012 р.
2. Yablonovitch E. Photonic Crystals – Journal of Modern Optics, vol. 41, № 2., 505 – 513 p.
3. A. Shmat'ko, A. V. Kazanko, V. N. Mizernik, E. N. Odarenko, V. A. Yampol'skii, T. N. Rokshanova. «Proc. 8th Int. Conf.» Exterordinary reflecton from photonic crystal with metamaterials. Odessa: UWBUSIS, 2016. 160-162 p.
4. G. V. Morozov, D. W. L. Sprung. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystal. A Letters Journal Exploring Physics, EPL, 96, 2011: 54005:p1-p5.
5. Yariv A, Yeh P. Optical waves in crystals – A Wiley inteprieses Publicatuon, New York: Jon Wiley & Sons, 1987 – 616 p.
6. Самойленко А М Перестюк М О, Парасюк ІО. Диференціальні рівняння: підручних для студентів матем. Спец-ей, посobie, 2-ге видання – Київ: Либідь, 2003 – 301 с.
7. Казанко ОВ, Пенкіна ОЄ. (2021). Норма власних функцій одновимірного фотонного кристала. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка», 35, 91-99.
8. Казанко ОВ, Пенкіна ОЄ. Диференціювання дисперсійного рівняння у дифракційній задачі для необмеженого двовимірного шаруватого середовища. //Експериментальні та теоретичні дослідження у

сучасних науках.: Збірник наукових праць "Логос" (ΛΟΓΟΣ) з матеріалами наук.-практ. конференції. Краків, Польща: Європейська наукова платформа; 2019. 36-42 с.

9. Казанко ОВ, Пенкіна ОЄ. Диференціювання поперечних розв'язків хвильового рівняння по повздовжньому хвильовому числу в дифракційній задачі для необмеженого періодичного шаруватого середовища з метаматеріалом. Збірник наукових праць "Логос" (ΛΟΓΟΣ); 2020. 126-130 с.
10. Казанко ОВ & Пенкіна, ОЄ. (2021). Аналіз складових членів дисперсійного рівняння у задачі про дифракцію плоского монохроматичного коливання у двовимірному необмеженому двошаровому середовищі з метаматеріалом / О. В. Казанко, О. Є. Пенкіна //Збірник наукових праць "Грааль науки". – 2021. – № 6. - С. 210-216.
11. Маркович БМ. Рівняння математичної фізики: навчальний посібник – Львів: Видавництво політехніки, 2010 – 384 с.
12. Eastham M. S. P. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press [distributed by Chatto & Windus, London], 1975.
13. S. Winkler, W. Magnus. Hill's Equation. New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons, 1996.

REFERENCES

1. Kozhemyako V.P., Ivanov O.A., Ivanov I.A. Primary stalling of photonic crystals in modern average statistical data processing // Science of work of VNTU, No. 4, Information technologies and computer technology, 2012.
2. Yablonovitch E. Photonic Crystals – Journal of Modern Optics, vol. 41, № 2., 505 – 513 p.
3. A. Shmat'ko, A. V. Kazanko, V. N. Mizernik, E. N. Odarenko, V. A. Yampol'skii, T. N. Rokshanova. «Proc. 8th Int. Conf.» Exterordinary reflecton from photonic crystal with metamaterials. Odessa: UWBUSIS, 2016. 160-162 p.
4. GV. Morozov, DWL. Sprung. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystal. A Letters Journal Exploring Physics, EPL, 96, 2011: 54005:p1-p5.
5. Yariv A, Yeh P. Optical waves in crystals – A Wiley inteprieses Publicatuon, New York: Jon Wiley & Sons, 1987 – 616 p.
6. Samoilenko AM Perestyuk M O, Parasyuk IO. Differential equations: handy for students of mathematics. Special, manual, 2nd edition - Kiev: Libid, 2003 - 301 p.
7. Kazanko OV, Penkina OE. Norm of iegnfunction of one-dimension photonic crystal. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2021;35:91-99. (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-08>
8. Kazanko O. V., Penkina O. Y. "To differentiating dispersion equation in a diffraction problem for unlimited two-dimension media" Collection of scientific papers ΛΟΓΟΣ, 2019, 36-42 pp.
9. Kazanko O. V., Penkina O. Y. "To differentiating shear solutions of wave equations by longitudinal wave number in a diffraction problem for unlimited band media with metamaterials" Collection of scientific papers ΛΟΓΟΣ, 2020. 126-130 pp.
10. Kazanko OV & Penkina, ОЄ. (2021). Analysis of the storage terms of the dispersion level in the problem of diffraction of planar monochromatic collocation in a two-dimensional unbounded two-spherical medium with metamaterial / О. V. Kazanko, О. E. Penkina // Collection of scientific works "The Grail of Science". – 2021. – No. 6. - P. 210-216.
11. Markovich BM. History of mathematical physics: a basic textbook - Lviv: Department of Polytechnics, 2010 - 384 p.
12. Eastham MSP. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press [distributed by Chatto & Windus, London], 1975.
13. S. Winkler, W. Magnus. Hill's Equation. New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons, 1996.

Стаття надійшла до редакції: 6 лютого 2024 р.

Рекомендовано до друку: 22 березня 2024 р.

RESEARCH AND DETERMINATION OF THE 1ST AND 2ND DERIVATIVES OF THE COMPONENT TERMS OF THE DISPERSION EQUATION FOR A FLAT TWO-LAYER ONE-DIMENSIONAL PERIODIC PHOTONIC CRYSTAL

O.V. Kazanko, O.E. Penkina, V.M. Butenko, O.V. Holovko

Ukrainian State University of Railway Transport, Ukraine, Kharkiv, 7 Feuerbach Square

Actuality. Recent decades have seen a rapid development of photonics. Therefore, scientific interest in the optical range of electromagnetic radiation continues to be relevant. As a result, the problem of the scattering of

electromagnetic waves (diffraction problem) on such objects as photonic crystals is presented as an urgent problem. It is about the solution of the wave equation with the subsequent application of the method of separation of variables and the transition to the Sturm-Liouville problem on the unbounded interval $(-\infty, +\infty)$. For the diffraction structures considered in the paper, the specified method of separation of variables allows obtaining the solution of the wave equation (which in this case turns out to be an equation with periodic coefficients) in an explicit form. Another method - the method of the transfer matrix for the wave equation with periodic coefficients makes it possible to take into account the specificity of its solution on the unlimited interval $(-\infty, +\infty)$ and to achieve the fulfillment of the component condition for the solvability of the Sturm-Liouville problem - the condition for the self-conjugation of the differential operator in this problem. Therefore, the transfer matrix method involves the construction and solution of the so-called dispersion equation - the equation that connects the parameters of the diffraction problem with the solvability conditions of the Sturm-Liouville problem. As a result, there is a need to study the components of such a dispersion equation. Namely, there is a need to understand the behavior of the solution of the spectral equation in this Sturm-Liouville problem depending on the spectral parameter. Therefore, according to the authors, the search for derivatives of this solution is relevant, since the derivative apparatus as a whole plays a rather important role in the study of any functional dependencies.

The purpose of the work. Determine the first and second derivatives of the spectral parameter from the solution of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem for a flat two-layer one-dimensional periodic photonic crystal. And also show that each of the specified derivatives is linearly expressed through the solution itself and its derivative, but in terms of a spatial variable, and as a consequence, the possibility of having two linear dependencies, which makes it possible to obtain a linear homogeneous differential equation of the 2nd order with respect to of this solution. Further research of the specified equation in some perspective may serve the development of an alternative apparatus for understanding the behavior of this solution as a function of the spectral parameter.

Методи і методологія. Умова про самоспряженість диференціального оператора у проблемі Штурма-Ліувілля (складова умова розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля) для плоского двошарового нескінченного одновимірно-періодичного фотонного кристала досягається шляхом застосування методу матриці перенесення (Transfer matrix method). Спираючись на принцип невизначених коефіцієнтів, автори використовують підставлення (що запропоновано у роботі) та здійснюють перехід від лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку, розв'язком якого є шукана похідна (2-га похідна), до системи рівнянь, котра розглядається як матричне рівняння. Для розв'язання матричного рівняння використовується метод варіації.

Methods and methodology. The condition for the self-conjugation of the differential operator in the Sturm-Liouville problem (a constituent condition for the solvability of the Sturm-Liouville problem) for a flat two-layer infinite one-dimensional periodic photonic crystal is achieved by applying the transfer matrix method. Based on the principle of undetermined coefficients, the authors use substitution (which is proposed in the paper) and make the transition from a linear inhomogeneous differential equation of the 2nd order, the solution of which is the sought derivative (2nd derivative), to a system of equations, which is considered as a matrix equation. The variational method is used to solve the matrix equation.

The results. In this work, the second derivative of the spectral parameter is determined from the solution of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem for a flat two-layer one-dimensional periodic photonic crystal (unlimited along the periodicity). The defined derivative is linearly expressed in terms of the solution itself and its derivative, but in terms of the spatial variable. Also, in the work, a linear inhomogeneous differential equation of the 2nd order is solved, thus, in fact, the desired derivative is obtained. Such an equation can be solved on the basis of research and the results of previous works - works on the definition of the corresponding 1st derivative. However, it should be noted that a direct analogy between the method of determining the 1st and 2nd derivatives cannot be seen in this, in particular, and the meaningfulness of this paper is expressed.

KEY WORDS: *photonic crystal, scattering of electromagnetic waves, derivative of the spectral parameter, Sturm-Liouville problem, spectral equation, dispersion equation, eigenfunction, photon forbidden zone.*

The article was received by the editors: February 6 2024

The article is recommended for printing: March 22 2024