

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2023-39-04>

УДК 550.3

**Ю. Б. МИЛОВАНОВ**, канд. фіз.-мат. наук, с.н.с.

e-mail: [hobit1957@gmail.com](mailto:hobit1957@gmail.com)

**В. Л. ДОРОХОВ**, н.с.

e-mail: [vasiliy.l.dorohov@karazin.ua](mailto:vasiliy.l.dorohov@karazin.ua)

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,  
майдан Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

## МЕТОД БЕССЕЛЯ В ДОСЛІДЖЕННІ ВПЛИВУ СОНЯЧНОГО ЗАТЕМНЕННЯ НА ІОНОСФЕРУ

**Актуальність.** Сонячне затемнення (СЗ) є глобальним збурюючим чинником, який суттєво змінює характеристики іоносфери. Як відомо, іоносфера впливає на поширення радіохвиль усіх діапазонів, а значить на роботу навігаційних і радіоастрономічних систем, радарів, на телекомунікацію, на дистанційне зондування навколосемного простору. Тому дослідження впливу СЗ на іоносферу є важливою задачею, яка у загальному вигляді складається з астрономічної і іоносферної частин роботи.

**Мета** цієї роботи – викладення елементів методик астрономічних розрахунків, розроблених для іоносферних досліджень, і опис результатів застосування цих методик для вивчення впливу СЗ на іоносферу.

**Методи і методологія.** Методики розроблені на базі методу Бесселя, який дозволяє істотно спростити розрахунки, використовуючи поняття фундаментальної площини.

**Результати.** Одержані аналітичні співвідношення для сліду місячної тіні на земній поверхні, фази затемнення, а також відносної освітленості в точці вимірювання. З використанням розроблених методик оптимально вибрані GPS-станції і прольоти супутників поточного угруповання супутників, встановлені час затримки основного відгуку іоносфери, який склав приблизно 30–40 хв, та залежність між величиною фази затемнення і зміною повного електронного вмісту (ПЕВ). Для фази затемнення 0.7 падіння ПЕВ склало 3.5 TECU або 19%.

**Висновки.** Розроблені методики дозволяють підвищити ефективність досліджень впливу СЗ на іоносферу.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** іоносфера, сонячне затемнення, метод Бесселя, повний електронний вміст, ПЕВ, фаза затемнення, дистанційне зондування, GPS, відносна освітленість.

**Як цитувати:** Милованов ЮБ, Дорохов ВЛ. Метод Бесселя в дослідженні впливу сонячного затемнення на іоносферу. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2023; 39:36-59. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2023-39-04>

**In cites:** Mylovanov YuB, Dorokhov VL. Bessel's method in study of solar eclipse influence on the ionosphere. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". (In Ukrainian). 2023; 39:36-59. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2023-39-04>

### ВСТУП

Впливу сонячного затемнення (СЗ) на іоносферу, тобто впливу перекриття потоку сонячного випромінювання, що падає на іоносферу, присвячено багато робіт, див., наприклад, [1–20] і бібліографію в них. Відгук іоносфери на СЗ проявляється різноманітно, оскільки залежить від багатьох чинників, і це різноманіття постійно розширюється при виконанні нових здійснюваних різними методами досліджень. Значущість вивчення іоносфери визначається її впливом на поширення радіохвиль усіх діапазонів, а значить впливом на роботу навігаційних і радіоастрономічних систем, радарів, на телекомунікацію, на дистанційне зондування навколосемного простору. СЗ є глобальним збурюючим чинником, який змінює характеристики іоносфери, і тому вивчення впливу СЗ на іоносферу є важливою задачею. У загальному вигляді дослідження реакції іоносфери на СЗ складається з астрономічної і іоносферної частин роботи.

Астрономічна частина забезпечує визначення просторово-часових характеристик СЗ, тобто геометрію СЗ і її змінення в часі. Набір основних характеристик СЗ включає в себе час початку і час закінчення СЗ, час настання і тривалість максимальної фази, залежність фази (magnitude) і відносної площі затемнення (obscuration) від часу, просторові і часові характеристики тіньового (umbra) і напівтіньового (penumbra) конусів місячної тіні, що пронизують атмосферу, впливають на її характеристики і дають тінь на поверхні Землі, мінімальну відстань осі конусів від центру Землі ( $\gamma$ ), лінії фази на поверхні Землі, найбільший діаметр місячної тіні і швидкість її руху по поверхні, висоту Сонця над горизонтом і його азимут, і ще багато інших параметрів [21–32]. Для випадків відсутності СЗ на поверхні Землі, але наявності в іоносфері, тобто для суто іоносферних СЗ, важливі також такі характеристики, як просторове

розташування конусів тіні над поверхнею Землі, величина об'єму і довжина області перетину конусів з іоносферою, інші специфічні параметри. У роботах [17–19] акцентується увага на важливість урахування геометрії СЗ для правильної інтерпретації дії СЗ на навколосемне середовище.

Іоносферна частина дослідження включає в себе визначення протягом затемнення просторових і часових характеристик іоносфери будь-яким поєднанням відомих методів, порівняння цих характеристик з результатами, отриманими в незбурені періоди і в періоди попередніх СЗ, прийняття до уваги геофізичних умов і космічної погоди, аналіз і узагальнення результатів, створення моделей іоносфери, що враховують вплив СЗ [1–20].

Астрономічне вивчення СЗ триває вже тисячоліття [33, 34]. Давні передбачення затемнень, до Кеплера, робилися на основі саросу або інших аналогічних періодів. Кеплер перший розробив метод, заснований на використанні положень Сонця і Місяця, що даються таблицями руху цих світил. До теперішнього часу розроблено багато методів передобчислення випадків затемнень і розрахунку їх характеристик. Умовно ці методи можна розділити на проєктивні, геометричні і аналітичні [21–32], в [26] у списку літератури до розділу 'Eclipses and transits' є посилання на присвячені теорії затемнень джерела, в яких наведені короткі огляди і порівняння методів розрахунку, викладені основи аналітичної теорії СЗ. У сьогоденні, у час комп'ютерних технологій, для обчислення сонячних затемнень найчастіше використовуються аналітичні методи, які дають повнішу картину, дозволяють з усіма подробицями прослідкувати пересування конусів місячної тіні і півтіні по земній поверхні і по іоносфері, забезпечують більшу точність в рішеннях, а якщо висока точність не потрібна, без утруднень допускають належні спрощення.

Дослідження впливу СЗ на іоносферу ведеться з початку двадцятого століття, але і досі в цьому питанні немає достатньої ясності, не створені адекватні загальноприйняті моделі іоносфери, що враховують вплив затемнень, у тому числі затемнень, які не дають тіні на поверхні Землі, але дають тіню в іоносфері [1–20]. Вивчення відгуку іоносфери на СЗ активно триває. При розробці власних методик обробки іоносферних експериментальних даних, які отримані в періоди СЗ, при складанні алгоритмів і написанні програм для аналізу впливу СЗ на іоносферу не потрібно знову повторювати усі відомі астрономічні викладення і виводи. Як відомо, максимальне використання готових рішень, це один з принципів основ наукових досліджень. Проте дуже важливо розуміти і уміти адаптувати до своїх завдань наявні готові методи, алгоритми і програми астрономічних розрахунків з урахуванням конкретних особливостей вирішуваної дослідницької задачі. Власні програмні реалізації готових алгоритмів створюються при необхідності в ході дослідження мати повний контроль над усіма деталями реалізації.

Велика кількість астрономічних методів конкретизована в опублікованих алгоритмах і програмах. Готові рішення, у тому числі для розрахунків СЗ, можна знайти, наприклад, в [29–32, 35–51]. На сайті [35] наведені алгоритми і тексти підпрограм астрономічної бібліотеки SOFA (Standards Of Fundamental Astronomy), що розробляється під керівництвом Міжнародного Астрономічного Союзу (International Astronomical Union, IAU). При створенні SOFA ставилося завдання підготовки набору точних, надійних, відкритих, простих у використанні, функціонально закінчених модулів, що не залежать від іншого програмного забезпечення, від операційних систем, від апаратного забезпечення, і що надаються з необхідною документацією. Підпрограми SOFA на сайті [35] доступні на двох мовах програмування – Fortran77 і ANSI C. Є і інші реалізації цієї бібліотеки, наприклад, на мові системи MATLAB [47]. Бібліотека призначена для використання при написанні власних закінчених астрономічних застосунків.

Для тестування астрономічних модулів в програмах, що створюються для вивчення впливу СЗ на іоносферу [18], також використовуються готові рішення, тобто дані із збірників, які заслуговують довіри, канонів сонячних затемнень, підготовлених в NASA [29–32]. У канонах, як правило, для певного інтервалу часу для кожного СЗ наводяться найбільш важливі характеристики, а також додаються карти з відображенням центральних ліній, ліній фази і інших елементів СЗ. Пояснення до таких карт можна знайти, наприклад, в [33], а також на сайтах [45, 46]. У роботі [29] ще знаходяться елементи Бесселя для усіх СЗ в інтервалі часу 1898–2510 рр., а в [32] для СЗ в інтервалі часу 1951–2200 рр.

Інтернет-ресурси слід зазначити окремо, як важливе і найбільш оперативне джерело інформації для досліджень, для отримання доступу до готових рішень. У [45, 46, 52, 53] наведені великі переліки Інтернет-ресурсів, що мають відношення до затемнень і інших астрономічних розрахунків.

Серед методів передобчислення випадків СЗ і розрахунку їх характеристик особливе місце займає метод, розроблений на початку дев'ятнадцятого століття видатним астрономом і математиком Бесселем. Надалі цей метод отримав розвиток у інших авторів [21–25]. Рішення виявилось настільки вдалим, що застосовується і нині [26–28], оскільки дозволяє істотно спростити розрахунки, використовуючи поняття так званої фундаментальної площини (ФП).

У сучасному використанні методу Бесселя при дослідженні реакції іоносфери на СЗ можна виділити три послідовні кроки: перший, це передбачення (передобчислення) випадку СЗ і визначення для цього випадку так званих елементів Бесселя у фундаментальній площині для моменту максимальної фази;

другий, це за результатами першого кроку розрахунок елементів Бесселя у ФП в необхідному інтервалі часу; третій, це по отриманим в другому кроці даним обчислення характеристик СЗ для довільних точок на поверхні Землі і в іоносфері.

Практично при дослідженні впливу СЗ на іоносферу можна застосовувати наступний підхід. Використовуючи готові результати виконання першого кроку, які можна знайти на сайті NASA [45] і на сайті EclipseWise [46], виконувати другий і третій кроки, а потім досліджувати іоносферу. Застосування вищеназваних готових результатів спрощує роботу, проте такий підхід має і істотний недолік: на цих сайтах наводяться результати розрахунків для СЗ на поверхні Землі, для чисто іоносферних СЗ дані не публікуються, а ці СЗ також викликають збурення іоносфери, причому при проходженні конусів місячної тіні повз поверхні Землі, конуси перетинаються з іоносферою на більшому протязі, і відображувати проекцію цього збуреного об'єму іоносфери на поверхню треба, мабуть, не лінією, а площею, і, відповідно, при необхідності, шукати не окремі магнітоспряжені точки, а область спряжених точок.

Використовуючи метод Бесселя та при розрахунках вибираючи відповідним чином радіус планети, можна знайти слід місячної тіні, розрахувати фази і відносної площі затемнення на довільній висоті в довільній точці навколосемного простору, зокрема, в точці вимірювання повного електронного вмісту (ПЕВ) на висоті  $F_2$ -шару іоносфери. Про важливість дослідження не лише тих СЗ, які дають тінь на поверхні Землі, але і суто іоносферних СЗ, а також про важливість урахування перекриття Місяцем потоку не лише видимого оптичного випромінювання Сонця, але і потоку ультрафіолетового випромінювання і потоку корпускул відомо дуже давно [1, 2, 26]. У роботі [26] наводяться посилання на джерела з даними про іоносферні і про корпускулярні СЗ, а в [17] для одного і того ж інтервалу часу 1986–2035 рр. по канону наведено кількість СЗ на поверхні Землі – 109, і кількість розрахованих додаткових суто іоносферних СЗ – 39. Для знаходження іоносферних СЗ верхня межа іоносфери вважалася рівною 1500 км, що в розрахунках відповідає збільшенню радіуса Землі на 23,5%. Чисто іоносферні СЗ дають додаткові можливості експериментальних досліджень реакції іоносфери на СЗ. Крім того, урахування суто іоносферних СЗ може допомогти правильно інтерпретувати результати вимірювання в інтервалах часу без СЗ на поверхні Землі. Щоб враховувати вплив на іоносферу СЗ обох видів, дослідникам іоносфери потрібно або мати доступ до джерела з даними для суто іоносферних СЗ, або виконувати астрономічні розрахунки самостійно.

Для виявлення реакції іоносфери на СЗ використовуються різні методи. У двадцять першому столітті отримали популярність методи вимірювання ПЕВ за допомогою сигналів навігаційних супутників, зокрема, супутників GPS, див., наприклад, [3–6, 12–14, 16, 18–20] і бібліографію в них. У цих методах вимірюється похилий ПЕВ уздовж променя супутник-приймач. Основний вклад в значення ПЕВ вносить відносно тонкий сферичний шар максимальної електронної концентрації,  $F_2$ -шар іоносфери, тому часто використовується так звана модель 'тонкого шару'. Оскільки ПЕВ є інтегральною характеристикою, то для зіставлення величини ПЕВ конкретній точці простору уся іоносфера розглядається як сферичний шар нульової товщини, розташований на фіксованій висоті, і вважається, що ПЕВ, виміряний уздовж променя, формується в одній точці, точці перетину цим променем сферичного шару. Цю точку називають точкою вимірювання або іоносферною точкою (Ionospheric Pierce Point, IPP). Проекція іоносферної точки на поверхню Землі визначає підіоносферну точку, географічні координати якої співпадають з координатами іоносферної точки. При русі супутників під час вимірювання іоносферні точки утворюють траєкторії, скорочено ці траєкторії назвемо прольотом. Методика розрахунку ПЕВ, використовувана на кафедрі космічної радіофізики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, наведена в [4].

Для дослідження причин і динаміки іоносферних збурень при СЗ корисно знати стан усіх доступних супутніх чинників, враховувати геофізичні умови і космічну погоду. Зокрема, при сонячному затемненні важливо знати в точці вимірювання рівень освітленості і фазу затемнення. Це істотно доповнює опис особливостей зміни ПЕВ впродовж СЗ.

Для інтерпретації результатів спостережень за іоносферними ефектами СЗ потрібні методики розрахунку фази затемнення і рівня освітленості в точках вимірювання, що покриваються тінню, методики розрахунку траєкторії і швидкості руху місячної тіні по поверхні планети, величини об'єму і протяжності збуреної області іоносфери, а також методики визначення багатьох інших характеристик.

Мета цієї роботи – викладення елементів методик астрономічних розрахунків, розроблених для іоносферних досліджень, і опис результатів застосування цих методик для вивчення впливу СЗ на іоносферу.

## ОПИС СОНЯЧНОГО ЗАТЕМНЕННЯ В МЕТОДІ БЕССЕЛЯ

### Модель Землі і елементи Бесселя

При вивченні впливу СЗ на іоносферу скористаємося методом Бесселя для розрахунку місця і часу затемнення [21–29]. Як вже відзначалося у вступі, в основі методу лежить фундаментальна площина (ФП), що є моделлю Землі у вигляді площини, і елементи Бесселя – набір величин, що є інваріантом по

відношенню до спостерігача, і які характеризують затемнення у власній бесселевій рухомій геоцентричній прямокутній системі координат  $X, Y, Z$ . Позначимо одиничні вектори осей як  $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$  (Рис. 1).

Планеті Земля в Сонячній системі в першому наближенні властиві два рухи: обертання навколо власної осі і рух навколо Сонця. ФП відслідковує рух Землі навколо Сонця і з часом змінює свою орієнтацію так, щоб завжди ‘дивитися на Сонце’. ФП, тобто площина  $XU$ , проходить через центр Землі, а її нормаль, вісь  $Z$ , позитивна у напрямі Місяця і завжди орієнтується так, щоб вісь залишалася паралельною осі конусів місячної тіні. Вісь  $Z$  завжди проходить близько від центру Сонця: для будь-якого моменту часу сферичні координати точки  $z$ , в якій ця вісь перетинає небесну сферу, відрізняються від геоцентричних координат центру Сонця не більш, ніж на  $14''$ . Вісь  $X$  є лінією перетину ФП з площиною земного екватора, тому завжди лежить в площині екватора. Спрямована вісь  $X$  на схід, а вісь  $Y$  – в північну півкулю.

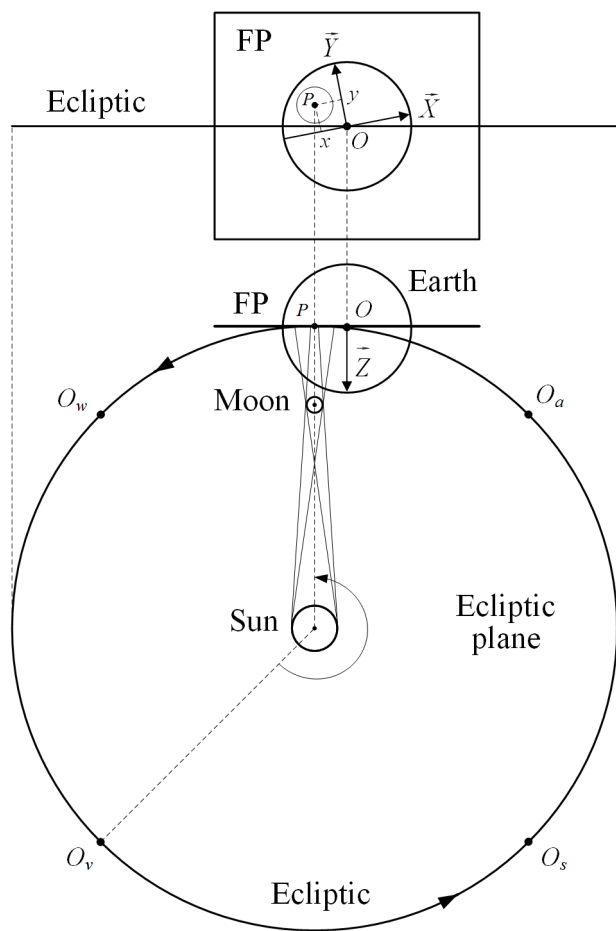


Рис. 1. Взаємне розташування Сонця, Місяця, Землі, фундаментальної площини і площини екліптики під час затемнення (не у масштабі); верхня частина рисунка – вид на фундаментальну площину з боку Сонця. Позначення: FP – фундаментальна площина; Ecliptic plane – площина екліптики; Ecliptic – екліптика; Sun – Сонце; Moon – Місяць; Earth – Земля;  $O_v, O_s, O_a, O_w$  – центр Землі в моменти часу весняного рівнодення, літнього сонцестояння, осіннього рівнодення, зимового сонцестояння відповідно;  $O$  – центр Землі під час затемнення;  $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$  – одиничні вектори бесселевої системи координат;  $P$  – точка перетину осі місячної тіні з фундаментальною площиною;  $x, y$  – декартові координати точки  $P$  в бесселевій системі координат

Fig. 1. Relative positions of the Sun, Moon, Earth, the fundamental plane, and the ecliptic plane during an eclipse (not to scale); top part of the figure is a view of the fundamental plane from the Sun. Abbreviations: FP - fundamental plane; Ecliptic plane - plane of the ecliptic; Ecliptic - ecliptic; Sun -

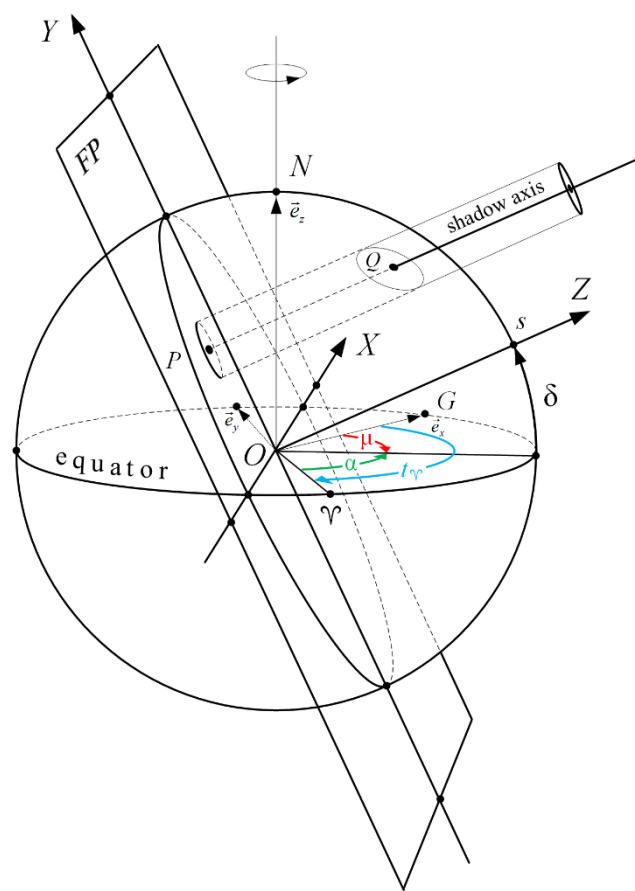


Рис. 2. Фундаментальна площина в екваторіальній системі координат. Позначення: FP – фундаментальна площина;  $O$  – центр Землі; equator – екватор Землі;  $N$  – Північний полюс;  $X, Y, Z$  – бесселева система координат;  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – одиничні вектори нерухомої геоцентричної декартової системи координат;  $G$  – точка перетину гринвіцького (нульового) меридіана з екватором;  $\gamma$  – точка перетину напрямку на точку весняного рівнодення з екватором Землі;  $\delta$  – схилання осі місячної тіні на небесній сфері;  $\alpha$  – пряме сходження осі місячної тіні на небесній сфері;  $\mu$  – годинний кут осі місячної тіні на небесній сфері;  $t_\gamma$  – гринвіцький годинний кут точки весняного рівнодення;  $s$  – точка перетину осі  $Z$  з поверхнею Землі; shadow axis – вісь місячної тіні;  $Q$  – точка перетину осі місячної тіні з поверхнею Землі;  $P$  – точка перетину осі місячної тіні з фундаментальною площиною

Fig. 2. The fundamental plane in the equatorial coordinate system. Notation: FP - fundamental plane;  $O$  - center of the Earth; equator - equator of the Earth;  $N$  - North Pole;  $X, Y, Z$  - Bessel coordinate

Sun; Moon - Moon; Earth - Earth;  $O_v, O_s, O_a, O_w$  - center of the Earth at the vernal equinox, summer solstice, autumnal equinox, winter solstice, respectively;  $O$  - the center of the Earth during an eclipse;  $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$  - unit vectors of the Bessel coordinate system;  $P$  - the point of intersection of the lunar shadow axis with the fundamental plane;  $x, y$  - Cartesian coordinates of point  $P$  in the Bessel coordinate system

Під час затемнення із-за невеликого нахилу орбіти місяця до площини екліптики, близько  $5^\circ$ , вісь конусів місячної тіні, що є продовженням лінії, яка сполучає центри Сонця і Місяця, може проходити вище і нижче площини екліптики, а також співпадати з цією площиною. У разі, якщо вісь конусів тіні лежить в площині екліптики, ФП перпендикулярна до цієї площини. У інших випадках ФП трохи нахилена до площини екліптики.

При сонячному затемненні Місяць відкидає два співвісні кругові конуси півтіні і тіні. Перетин конусів тіні з ФП утворює на площині  $XU$  два концентричні кола з центром в точці  $P$  з координатами  $x, y$  (Рис. 1, 2, 3а).

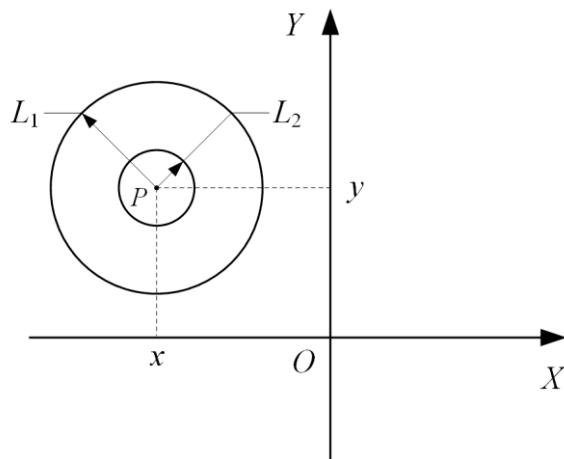


Рис.3а. Переріз місячної тіні фундаментальною площиною. Позначення:  $L_1$  – радіус півтіні;  $L_2$  – радіус тіні;  $P$  – точка перетину осі місячної тіні з фундаментальною площиною

Fig. 3a. Cross-section of the lunar shadow by the fundamental plane. Symbols:  $L_1$  - radius of penumbra;  $L_2$  - radius of shadow;  $P$  - point of intersection of the lunar shadow axis with the fundamental plane

system;  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  - unit vectors of the fixed geocentric Cartesian coordinate system;  $G$  is the point of intersection of the Greenwich (zero) meridian with the equator;  $\mathcal{V}$  is the point of intersection of the direction to the vernal equinox with the Earth's equator;  $\delta$  is the declination of the moon shadow axis on the celestial sphere;  $\alpha$  is the direct ascension of the lunar shadow axis on the celestial sphere;  $\mu$  is the hourly angle of the lunar shadow axis on the celestial sphere;  $t_\gamma$  is the Greenwich hourly angle of the vernal equinox;  $s$  is the point of intersection of the  $Z$  axis with the Earth's surface; shadow axis is the lunar shadow axis;  $Q$  is the point of intersection of the lunar shadow axis with the Earth's surface;  $P$  is the point of intersection of the lunar shadow axis with the fundamental plane

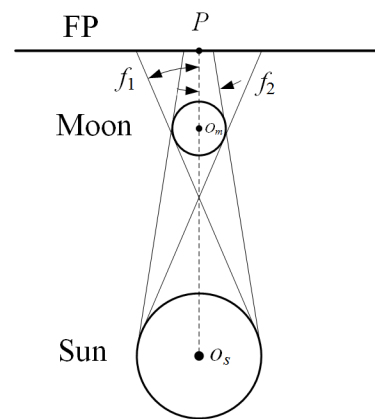


Рис. 3б. Взаємне розташування Сонця, Місяця, фундаментальної площини і конусів місячної тіні під час затемнення (не у масштабі). Позначення: ФП – фундаментальна площина; Moon – Місяць; Sun – Сонце;  $PO_mO_s$  – вісь місячної тіні;  $f_1, f_2$  – кути між твірними конусів півтіні і тіні і віссю місячної тіні

Fig. 3b. Relative positions of the Sun, Moon, fundamental plane, and lunar shadow cones during the eclipse (not to scale). Abbreviations: FP - fundamental plane; Moon - Moon; Sun - Sun;  $PO_mO_s$  - lunar shadow axis;  $f_1, f_2$  - angles between the cones of penumbra and shadow and the lunar shadow axis

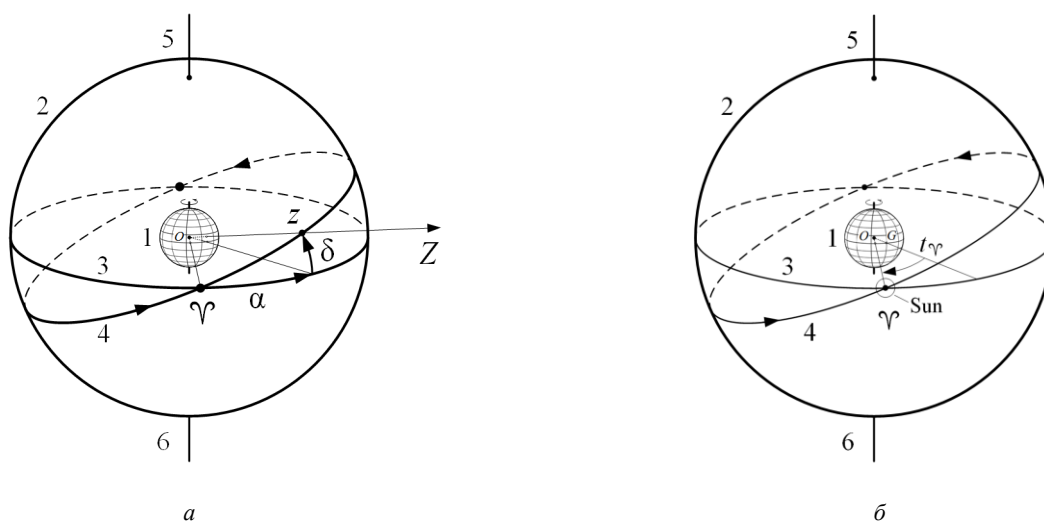


Рис. 4. а – взаємне розташування Землі, точки весняного рівнодення  $\mathcal{V}$  і точки  $z$  під час затемнення; б – схема проходження Сонцем точки весняного рівнодення, на рисунку цей момент,  $t_{\gamma}$ , зафіксований в кутових координатах. Позначення: 1 – Земля; 2 – небесна сфера; 3 – небесний екватор; 4 – екліптика; 5, 6 – вісь світу;  $\mathcal{V}$  – точка весняного рівнодення на небесній сфері;  $z$  – точка перетину осі  $Z$  бesselевої системи координат з небесною сферою;  $\alpha$  – пряме сходження точки  $z$ ;  $\delta$  – схилення точки  $z$ ;  $O$  – центр Землі;  $G$  – точка перетину гринвіцького (нульового) меридіана з екватором Землі. На екліптиці стрілками показаний напрям видимого річного руху Сонця по небесній сфері

Fig. 4. a - relative position of the Earth, the vernal equinox  $\mathcal{V}$  and the point  $z$  during the eclipse; b - diagram of the Sun's passage through the vernal equinox, in the figure this moment,  $t_{\gamma}$ , is fixed in angular coordinates. Notation: 1 - Earth; 2 - celestial sphere; 3 - celestial equator; 4 - ecliptic; 5, 6 - world axis;  $\mathcal{V}$  - the point of vernal equinox on the celestial sphere;  $z$  - the point of intersection of the  $Z$ -axis of the Bessel coordinate system with the celestial sphere;  $\alpha$  - direct ascension of the point  $z$ ;  $\delta$  - declination of the point  $z$ ;  $O$  - the center of the Earth;  $G$  - the point of intersection of the Greenwich (zero) meridian with the Earth's equator. On the ecliptic, arrows show the direction of the apparent annual motion of the Sun in the celestial sphere

Нехай  $R_{\oplus} = 6378$  км – екваторіальний радіус Землі [55]. Бesselеві елементи СЗ описують геометричне положення місячної тіні по відношенню до ФП і визначені таким чином:

$x, y$  – декартові координати точки  $P$ , точки перетину осі місячної тіні з фундаментальною площиною, в одиницях  $R_{\oplus}$ , Рис. 1, 2, 3а;

$\delta$  – схилення осі тіні Місяця на небесній сфері в градусах, Рис. 2, 4а;

$\mu$  – годинний кут осі тіні місяця на небесній сфері в градусах, Рис. 2, 6, 7;

$L_1, L_2$  – радіуси півтіні і тіні місяця на ФП в одиницях  $R_{\oplus}$ , Рис. 3а;

$f_1, f_2$  – кути між твірними конусів півтіні і тіні і віссю місячної тіні в градусах, Рис. 3б.

При публікації бesselевих елементів для практичного використання, зазвичай замість прямого сходження  $\alpha$  точки  $z$  (точки перетину осі  $Z$  бesselевої системи координат з небесною сферою), використовується гринвіцький годинний кут  $\mu$  цієї точки, пов'язаний з її прямим сходженням  $\alpha$  простим співвідношенням [27, 45, 46]:  $\mu = t_{\gamma} - \alpha$ , де  $t_{\gamma}$  – це гринвіцький годинний кут точки весняного рівнодення, виражений в годинній мірі;  $\alpha$  – пряме сходження точки  $z$ , яке дорівнює кутовій відстані по небесному екватору в годинній мірі від точки весняного рівнодення до кола схилення світила; як вже відзначалося вище, сферичні координати точки  $z$  відрізняються від геоцентричних координат центру Сонця не більш, ніж на  $14''$ , тому далі ми не розрізнятимемо напрям на точку  $z$  і напрям на Сонце.

Екваторіальні координати точки  $z$ , пряме сходження  $\alpha$  і схилення  $\delta$  (Рис. 4а), із-за добового обертання Землі не змінюються, проте вони безперервно змінюються внаслідок руху Сонця по екліптиці, що прямо впливає на орієнтацію фундаментальної площини, тобто площини  $XU$  бesselевої системи координат (Рис. 2). У точці весняного рівнодення пряме сходження і схилення Сонця дорівнюють нулю (Рис. 4б).

Бesselеві елементи визначають хід затемнення у фундаментальній площині, не залежать від положення спостерігача і можуть бути обчислені для кожного затемнення за часом. Часова залежність елементів Бесселя на протязі СЗ досить точно описується кубічними поліномами. Значення поліноміальних коефіцієнтів періодично публікуються в [45, 46].

Параметри  $x$ ,  $y$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  визначаються взаємним розташуванням небесних тіл: Землі, Місяця і Сонця, а також видимим розміром Місяця. Параметри  $\delta$  і  $\mu$  пов'язані з обертанням Землі навколо своєї осі, нахилом осі до площини екліптики і рухом Землі навколо Сонця.

Як приклад візьмемо часткове сонячне затемнення 124-го саросу, яке сталося 25 жовтня 2022 р. Значення поліноміальних коефіцієнтів для обчислення елементів Бесселя для цього СЗ наведені в Табл. 1 [46].

У момент часу  $t_1$  (десяткові години) кожен бesselев елемент  $a$  оцінюється кубічним поліномом

$$a = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3,$$

де:  $a = x, y, \delta, L_1, L_2$ , або  $\mu$ ;  $t = t_1 - t_0$  (десяткові години),  $t_0 = 11.000$  TDT.

Час задається в шкалі TDT (Terrestrial Dynamical Time), є атомним часом, вільним від нерівномірності сонячного часу; використовується в теоріях руху тіл в Сонячній системі.

Поправка TDT часу  $\Delta T$  до UT1 склала для цього затемнення 70.9 с.

Таблиця 1. Значення елементів Бесселя для СЗ 25 жовтня 2022 р.

Table 1: Values of the Bessel elements for the СЗ on October 25, 2022.

n	$x$	$y$	$\delta$	$L_1$	$L_2$	$\mu$
0	0.45479	0.96877	-12.1735	0.54990	0.00372	348.9823
1	0.49555	-0.23959	-0.0137	-0.00012	-0.00011	15.0024
2	0.00003	0.00002	0.0000	-0.00001	-0.00001	-0.0000
3	-0.00001	0.00000	0	0	0	0

Кути конусів  $f_1$  півтіні і  $f_2$  тіні/антумбральної тіні відносно осі місячної тіні вважаються постійними протягом усього затемнення і визначаються співвідношеннями:

$$\operatorname{tg} f_1 = 0.0047019,$$

$$\operatorname{tg} f_2 = 0.0046785.$$

### Зв'язок елементів Бесселя з геоцентричними координатами

У методі Бесселя використовується власна геоцентрична рухлива відносно земного спостерігача прямокутна система координат. Для опису СЗ на поверхні Землі і пояснення іоносферних ефектів більш відповідними є геоцентричні системи координат, що обертаються разом із Землею при її добовому русі в просторі. Широко використовуються прямокутні, сферичні, геодезичні, географічні системи координат. Тому рух місячної тіні на фундаментальній площині перетворимо в зручнішу систему координат.

Час весняного рівнодення фіксується у момент перетину Сонцем лінії небесного екватора при русі з південної півсфери в північну півсферу. У цей момент лінія від Землі в точці півдня проходить через центр Сонця і йде убік відносно нерухомих зірок, Рис. 4б. У епоху ранніх астрономічних спостережень – у напрямі сузір'я Овна  $\Upsilon$ . Напрямок на точку весняного рівнодення і момент часу весняного рівнодення служать початком відліку для усіх подій в Сонячній системі.

Земля робить повний оберт навколо своєї осі за час  $23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}}$  і це визначає тривалість зоряної доби. Інтервал часу між сусідніми моментами полуденного Сонця дорівнює тривалості сонячної доби, тобто 24 годинам, Рис. 5.

У момент весняного рівнодення нормаль до ФП, вісь  $Z$ , проходить через точку весняного рівнодення, Рис. 4б. Як вже відзначалося вище, кут  $\mu$  є результатом алгебричного складання гринвіцького годинного кута точки весняного рівнодення і кута прямого сходження  $\alpha$  точки  $z$ ,  $\mu = t_{\Upsilon} - \alpha$ .

Елементи Бесселя  $\mu$  і  $\delta$  однозначно задають нерухому геоцентричну систему координат послідовними перетвореннями:

1) Кут  $\mu$  задає  $\vec{Z}(\delta = 0)$  і, відповідно, напрям на Сонце з урахуванням прямого сходження  $\alpha$ , але без урахування схилення  $\delta$ , Рис. 2, 6; при цьому вісь  $\vec{X}$  утворює праву трійку векторів з векторами  $\vec{Y}$  і  $\vec{Z}(\delta = 0)$ .

2) Урахування схилення реалізуємо поворотом векторів  $\vec{Y}$  і  $\vec{Z}(\delta = 0)$  на кут  $\delta$  навколо осі  $\vec{X}$ . Отримуємо остаточне положення осей  $\vec{Y}$  і  $\vec{Z}$ , Рис. 7.

Осі нерухомої геоцентричної екваторіальної системи координат представимо ортами у вигляді

$$\vec{e}_x = (1,0,0); \vec{e}_y = (0,1,0); \vec{e}_z = (0,0,1),$$

де вісь  $\vec{e}_x$  вказує на нульовий, гринвіцький, меридіан, а  $\vec{e}_z$  є віссю обертання Землі, Рис. 2.

Виразимо осі координат Бесселя  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$  і  $\vec{Z}$  в екваторіальній системі координат. Відстані, як і в методі Бесселя, вимірюватимемо в екваторіальних радіусах.

Напрямок на Сонце, без урахування схилення  $\delta$ , визначається виразом

$$\vec{Z}_0 = \cos(-\mu) \cdot \vec{e}_x + \sin(-\mu) \cdot \vec{e}_y.$$

Інші осі відповідно набувають вид

$$\vec{X} = \sin \mu \cdot \vec{e}_x + \cos \mu \cdot \vec{e}_y,$$

$$\vec{Y} = \vec{e}_z.$$

Для урахування схилення повернемо систему координат навколо осі  $\vec{X}$  на кут  $\delta$ , Рис. 7.

У результаті отримаємо представлення для осей бесселевої системи координат  $X, Y, Z$  в екваторіальній системі координат

$$\vec{Z} = \cos \delta \cdot \vec{Z}_0 + \sin \delta \cdot \vec{Y}$$

$$\vec{Y} = [\vec{Z}, \vec{X}].$$

В цьому випадку точка перетину осі тінювих конусів з ФП в екваторіальній системі координат, Рис. 2, матиме вигляд

$$\vec{P} = x\vec{X} + y\vec{Y}. \quad (1)$$

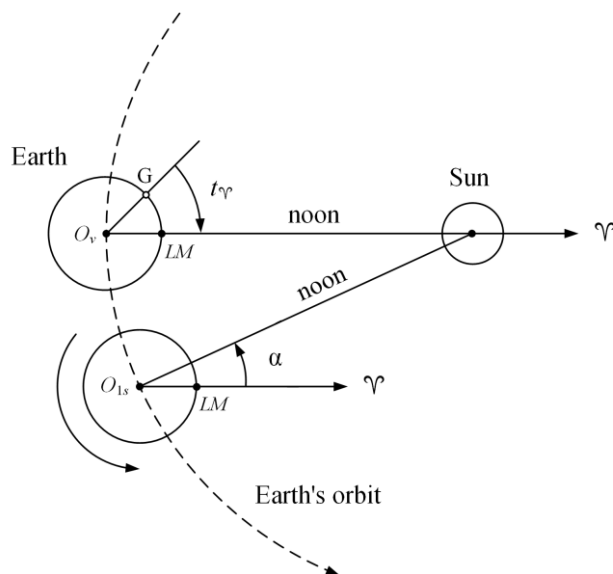


Рис. 5. Схема руху Землі навколо Сонця при проходженні точки весняного рівнодення. Позначення: Earth – Земля; Sun – Сонце;  $O_v$  – центр Землі у момент весняного рівнодення ( $\alpha = 0$ );  $O_{1s}$  – центр Землі через одну зоряну добу після весняного рівнодення;  $\gamma$  – напрям на точку весняного рівнодення на небесній сфері;  $G$  – точка перетину гринвіцького (нульового) меридіана з екватором Землі;  $LM$  – точка перетину локального меридіана з екватором Землі; noon – верхня кульмінація Сонця (південь) на локальному меридіані;  $\alpha$  – пряме сходження Сонця через одну зоряну добу після весняного рівнодення; Earth's orbit – орбіта Землі;  $t_\gamma$  – гринвіцький годинний кут точки весняного рівнодення

Fig. 5. Diagram of the Earth's motion around the Sun as it passes the vernal equinox. Symbols: Earth - the Earth; Sun - the Sun;  $O_v$  - the center of the Earth at the vernal equinox ( $\alpha = 0$ );  $O_{1s}$  - the center of the Earth one stellar day after the vernal equinox;  $\gamma$  - direction to the vernal equinox on the celestial sphere;  $G$  - the point of intersection of the Greenwich (zero) meridian with the Earth's equator;  $LM$  - the point of intersection of the local meridian with the Earth's equator; noon - the upper culmination of the Sun (south) on the local meridian;  $\alpha$  - direct sunrise one day after the vernal equinox; Earth's orbit - the Earth's orbit;  $t_\gamma$  - Greenwich hour angle of the vernal equinox



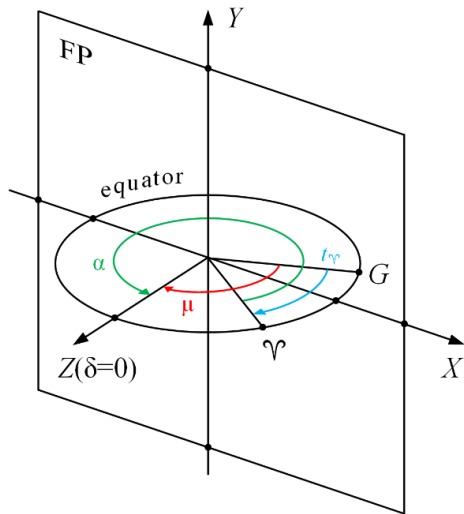


Рис. 6. Положення ФП з урахуванням тільки добових обертань без урахування схилення. Нульовий меридіан відмічений символом  $G$

Fig. 6. The position of the AF taking into account only diurnal rotation without taking into account declination. The zero meridian is marked with the symbol  $G$

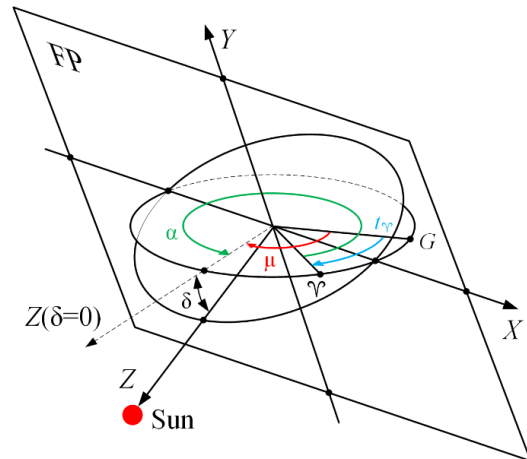


Рис. 7. Положення ФП з урахуванням схилення  $\delta$ .

Fig. 7. The position of the FP taking into account the declination  $\delta$ .

### ХАРАКТЕРИСТИКИ СОНЯЧНОГО ЗАТЕМНЕННЯ

Взаємний рух трьох космічних тіл – Сонця, Землі і Місяця, періодично призводить до ситуації, коли тінь або півтінь, що відкидає Місяць, падає на Землю і викликає СЗ на поверхні Землі. При цьому одночасно відбувається і затемнення іоносфери, в результаті якого із-за перекриття потоку сонячного випромінювання, що падає на іоносферу, змінюються характеристики іоносфери. Для дослідження впливу СЗ на іоносферу важливо вивчати не тільки такі затемнення, але і випадки чисто іоносферних СЗ, коли відсутнє затемнення на поверхні Землі, але є в іоносфері.

Вид затемнення залежить від взаємного розташування видимих дисків Місяця і Сонця і від співвідношення розмірів цих дисків. Розмір видимого диска Місяця залежить від відстані між Місяцем і Землею, яка змінюється в межах 356 410–406 697 км [55].

На поверхні Землі і в навколосемному просторі спостерігаються три основні види місячної тіні: umbra, antumbra і penumbra, Рис. 8. Варіанти розташування точки спостереження сонячного затемнення відмічені на рисунку маленькими круглими маркерами, цифрами позначені відповідні ілюстрації взаємного положення видимих дисків Місяця і Сонця: 1 – кільцеве затемнення, antumbra; 2 – часткове затемнення, penumbra; 3 – повне затемнення при точній рівності видимих дисків Місяця і Сонця, umbra; 4 – повне затемнення з більшим видимим диском Місяця, umbra.

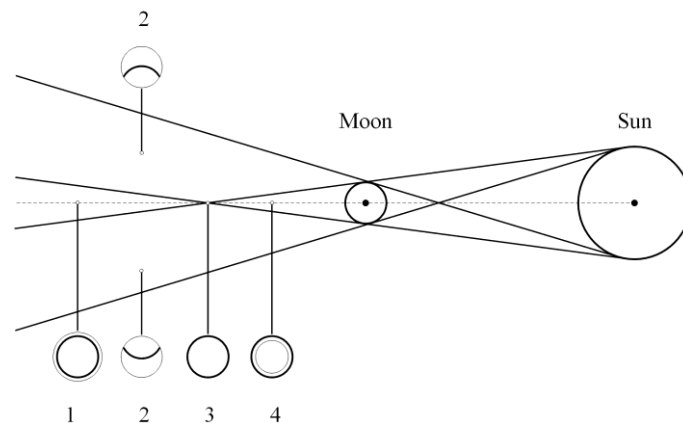


Рис. 8. Схема формування конусів місячної тіні  
Fig. 8. Scheme of formation of moon shadow cones

Далі вважатимемо сонячне затемнення повним, позиція 3 на Рис. 8. Позиція 1, antumbra, утворює сонячне кільце навколо диска місяця, але, як правило, воно настільки невелике, що в першому наближенні вважаємо затемнення повним. Назвемо слідом місячної тіні послідовність точок перетину осі тінювого конуса з поверхнею Землі.

При неповному перекритті видимих дисків Місяця і Сонця утворюється інший вид тіні – penumbra. Подібне явище називають частковим сонячним затемненням. У точці спостереження, позиція 2 на Рис. 8, ми можемо бачити край сонячного диска, що ‘виглядає’ із-за місячного диска. Фаза затемнення, залежить від величини видимої частини Сонця. Використовують два види фази [46]:

- 1) фаза затемнення ( $E_m$ , eclipse magnitude) – відносна частина діаметру Сонця, закрита місяцем;
- 2) відносна площа затемнення ( $E_{obs}$ , eclipse obscuration) – відносна частина площі диска Сонця, закрита Місяцем.

Фаза затемнення виражається десятковим дробом. У разі повного затемнення величина фази дорівнює або перевищує одиницю, позиції 3 і 4 на Рис. 8. Значення  $E_{obs}$  виражають у відсотках.

### МЕТОДИКИ РОЗРАХУНКІВ

За допомогою методу Бесселя розрахуємо слід місячної тіні на поверхні Землі, фазу затемнення, відносну площу затемнення і відносну долю освітленості в точці вимірювання.

#### Слід місячної тіні

Нехай для точки  $\vec{P}$  на ФП виконується нерівність  $\|\vec{P}\| < 1$ , тобто точка лежить усередині земної сфери (Рис. 9).

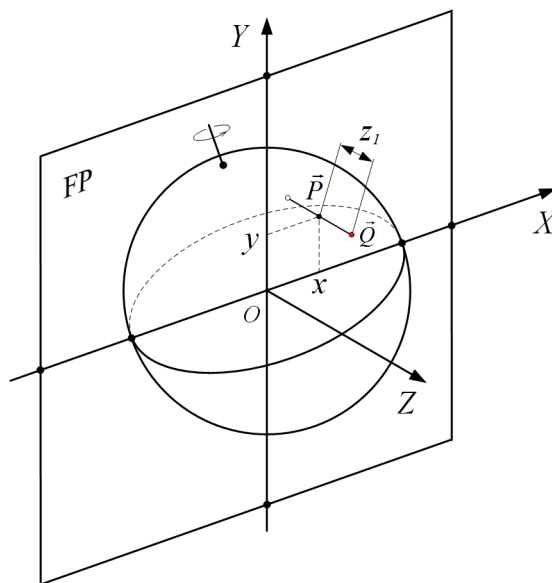


Рис. 9. Схема розрахунку сліду місячної тіні  
Fig. 9. Scheme for calculating the moon shadow trace

Нагадаємо, що одиничні вектори осей  $X, Y, Z$  позначені як  $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ . Розглянемо паралельну напрямку осі  $Z$  пряму лінію з точки  $\vec{P}$

$$\vec{Q} = \vec{P} + z\vec{Z}.$$

Ця пряма перетинає земну сферу в двох точках, які можуть бути знайдені з рівняння  $\|\vec{Q}\| = 1$  або

$$\|\vec{P} + z\vec{Z}\| = 1.$$

Підносимо обидві сторони рівняння в квадрат

$$\|\vec{P} + z\vec{Z}\|^2 = 1^2$$

і виразимо його ліву частину у вигляді скалярного добутку векторів

$$(\vec{P} + z\vec{Z}, \vec{P} + z\vec{Z}) = 1.$$

Після розкриття дужок, з урахуванням  $\|\vec{Z}\| = 1$  і  $\|\vec{P}\| = P$ , отримаємо

$$P^2 + 2(\vec{P}, \vec{Z})z + z^2(\vec{Z}, \vec{Z}) = 1$$

або

$$z^2 + 2(\vec{P}, \vec{Z})z + P^2 - 1 = 0.$$

Рішення отриманого квадратного рівняння має вигляд:

$$z_{1,2} = -(\vec{P}, \vec{Z}) \pm \sqrt{(\vec{P}, \vec{Z})^2 - P^2 + 1}.$$

З двох вибираємо той корінь, який лежить ближче до Сонця, в позитивному напрямі осі  $\vec{Z}$

$$z_1 = -(\vec{P}, \vec{Z}) + \sqrt{(\vec{P}, \vec{Z})^2 - P^2 + 1}.$$

У результаті отримуємо точку перетину осі тінювого конуса з поверхнею Землі, Рис. 9,

$$\vec{Q} = \vec{P} + z_1 \vec{Z}. \quad (2)$$

Для представлення точки місячного сліду в географічних (сферичних) координатах скористаємося компонентами одиничного вектора  $\vec{Q}$  із співвідношення (2)

$$\vec{Q} = (q_x, q_y, q_z)$$

звідки обчислюємо географічні координати, довготу  $\lambda$  і широту  $\varphi$  в радіанах

$$\lambda = \arctg \frac{q_y}{q_x},$$

$$\varphi = \arcsin(q_z). \quad (3)$$

Як приклад розрахунку місячного сліду скористаємося СЗ 25 жовтня 2022 р., Рис. 10. Слід зазначити, що повне затемнення проходило за межами Землі, а слід місячної тіні, координати із співвідношень (3), відносимо до максимальної фази затемнення на поверхні.

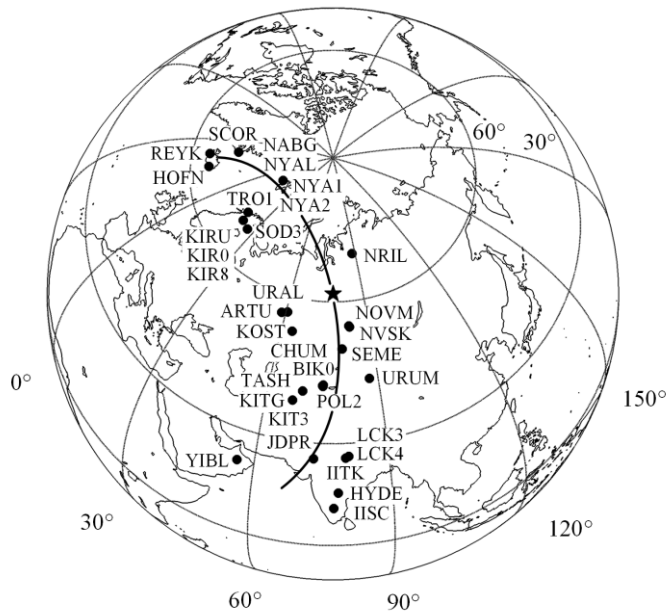


Рис. 10. Слід місячної тіні. Зірочкою відмічене місце максимальної фази затемнення. Також відмічені найближчі до сліду станції спостереження

Fig. 10. The trace of the lunar shadow. The place of the maximum phase of the eclipse is marked with an asterisk. The closest observation stations to the trail are also marked

### Фаза затемнення

Фаза затемнення  $E_m$  (eclipse magnitude) – це доля діаметра Сонця, закрита місяцем. Величиною фази затемнення прийнято називати дріб, який показує, яка частина діаметра сонячного диска закрита місяцем.

Точка вимірювання  $\vec{M}$  в  $F_2$ -шарі іоносфери визначається за навігаційними даними супутника. На Рис. 11 наведено загальний вигляд геометрії розрахунку фази затемнення в точці вимірювання.

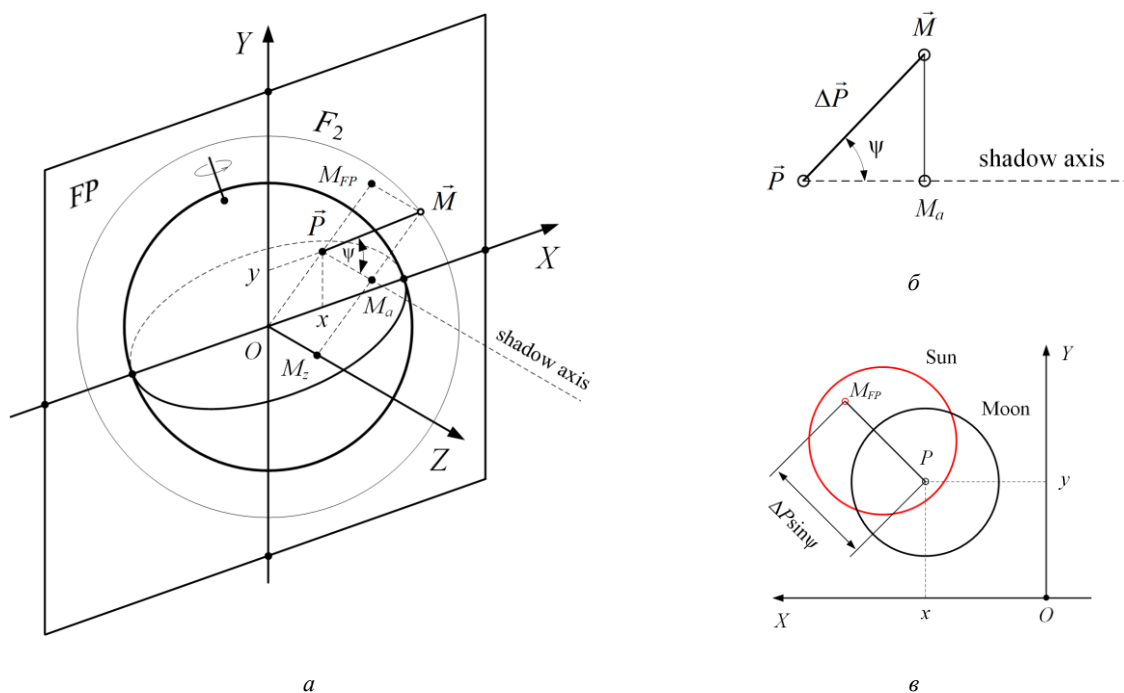


Рис. 11. Геометрія розрахунку фази затемнення в точці вимірювання  $\vec{M}$ : *a* – загальний вигляд; *b* – проекція точки  $\vec{M}$  на вісь місячної тіні; *c* – проекція точки  $\vec{M}$  на фундаментальну площину. Позначення: FP – фундаментальна площина;  $X, Y, Z$  – бесселева система координат;  $\vec{P}$  – точка перетину осі місячної тіні з ФП;  $F_2 - F_2$  шар іоносфери;  $\vec{M}$  – точка вимірювання;  $\psi$  – кут між напрямом на точку вимірювання і напрямом на Сонце; shadow axis – вісь конусів місячної тіні; Sun – Сонце; Moon – Місяць;  $MM_aM_z$  – лінія, перпендикулярна осі тіні і осі  $Z$ .

Fig. 11. The geometry of the eclipse phase calculation at the measurement point  $\vec{M}$ : *a* - general view; *b* - projection of the point  $\vec{M}$  on the lunar shadow axis; *c* - projection of the point  $\vec{M}$  on the fundamental plane. Notation: FP - fundamental plane;  $X, Y, Z$  - Bessel coordinate system;  $\vec{P}$  - point of intersection of the lunar shadow axis with FP;  $F_2 - F_2$  layer of the ionosphere;  $\vec{M}$  - measurement point;  $\psi$  - angle between the direction to the measurement point and the direction to the Sun; shadow axis - axis of lunar shadow cones; Sun - the Sun; Moon - the Moon;  $MM_aM_z$  - line perpendicular to the shadow axis and the  $Z$  axis.

На Рис. 12 на площині перерізу місячної тіні, перпендикулярної до осі тіні, проілюстровано взаємне положення видимих дисків Сонця і Місяця уздовж декількох напрямів, радіальних від точки перетину осі тіні з площиною перерізу. Концентричні кола, це геометричне місце точок спостереження з рівною фазою СЗ. Зовнішня межа півтіні відображена колом з найбільшим радіусом і відповідає фазі  $E_m = 0$ . У площині перерізу величина фази СЗ залежить тільки від відстані точки вимірювання від центру, тобто від точки перетину осі місячної тіні з площиною (Рис. 11, 12). На Рис. 11а, коли січна площина проходить і через точку вимірювання  $M$ , ця відстань  $M_aM$  дорівнює  $\Delta P \sin \psi$ .

У зв'язку з тим, що величина фази затемнення в точці  $M$  залежить тільки від кута  $\psi$  і відстані точки  $M$  від осі конусів місячної тіні, тобто від довжини відрізка  $M_aM$  (Рис. 11а), розрахунок виконуватимемо в прямокутній двомірній системі координат  $e_1, e_2$ , яка знаходиться в площині, що задається точками  $OPM_{FP}MM_aM_z$ , або, що те ж саме, двома векторами  $\vec{\Delta P} = \vec{M} - \vec{P}$  і  $\vec{Z}$ . Початок координат  $(0, 0)$  двомірної системи розташуємо в точці  $P$ , вісь ординат  $e_2$  направимо уздовж лінії  $OPM_{FP}$ , що лежить у фундаментальній площині FP і є паралельною лінії  $MM_aM_z$ . В принципі, напрям осі  $e_2$  може бути вибраний у ФП в довільному радіальному від точки  $P$  напрямі, оскільки місячна тінь є круглим конусом, який має осьову симетрію, вісь симетрії – вісь конуса. Перпендикулярний до осі тіні переріз конуса місячної тіні ілюструє Рис. 12. Вісь абсцис  $e_1$  направимо уздовж осі конусів місячної тіні, або, що практично те ж саме, уздовж осі  $Z$ . Як вже зазначалося вище, для будь-якого моменту часу сферичні координати точки, в якій вісь  $Z$  перетинає небесну сферу, відрізняються від геоцентричних координат центру Сонця не більш, ніж на  $14''$ . Позначимо одиничні вектори осей  $e_1, e_2$  як  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  і  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ .

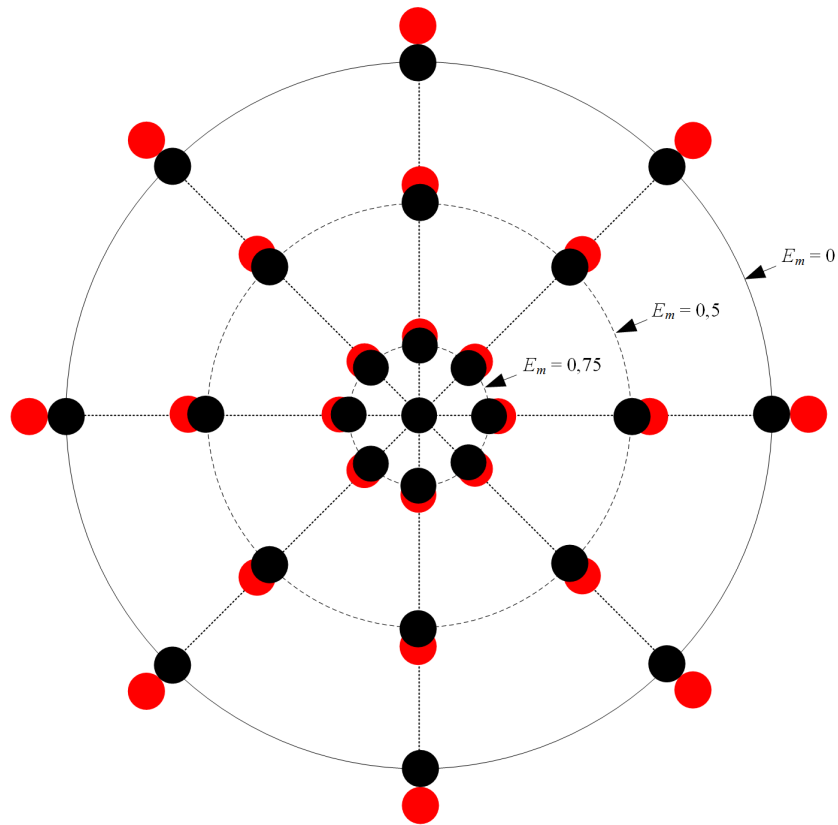


Рис. 12. Взаємне положення видимих дисків Сонця і Місяця при розташуванні точок спостереження в різних місцях площини, перпендикулярної до осі місячної тіні. Центр концентричних кіл відповідає точці перетину осі місячної тіні з січною площиною, а кола, це лінії рівної фази СЗ.

Fig. 12. Relative position of the visible disks of the Sun and Moon at the location of the observation points in different places of the plane perpendicular to the lunar shadow axis. The center of the concentric circles corresponds to the point of intersection of the lunar shadow axis with the cutting plane, and the circles are lines of equal NW phase. The circle with  $E_m = 0$  corresponds to the outer boundary of the penumbra

Далі усі відстані розраховуватимемо в кілометрах.

На схемі розрахунку фази затемнення, Рис. 13, наведені точки в двовірній системі координат

$$\vec{m} = (\Delta P \cos \psi, \Delta P \sin \psi),$$

$$\vec{P}_m = (D_m, R_m),$$

$$\vec{P}_\odot = (D_\odot, R_\odot),$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{P}_m - \vec{m}}{\|\vec{P}_m - \vec{m}\|},$$

де пара чисел в круглих дужках представляє координати в площині на осях  $\vec{e}_1$  і  $\vec{e}_2$ ,  $\Delta P = \|\vec{\Delta P}\|$  – норма вектора  $\vec{\Delta P}$ ,  $\vec{m}$  – точка вимірювання,

$D_m = 384400$  км – середня відстань від центру Землі до центру Місяця,

$R_m = 1738$  км – радіус Місяця,

$D_\odot = 149.6 \cdot 10^6$  км – відстань від центру Землі до центру Сонця,

$R_\odot = 0.696 \cdot 10^6$  км – радіус Сонця [55].

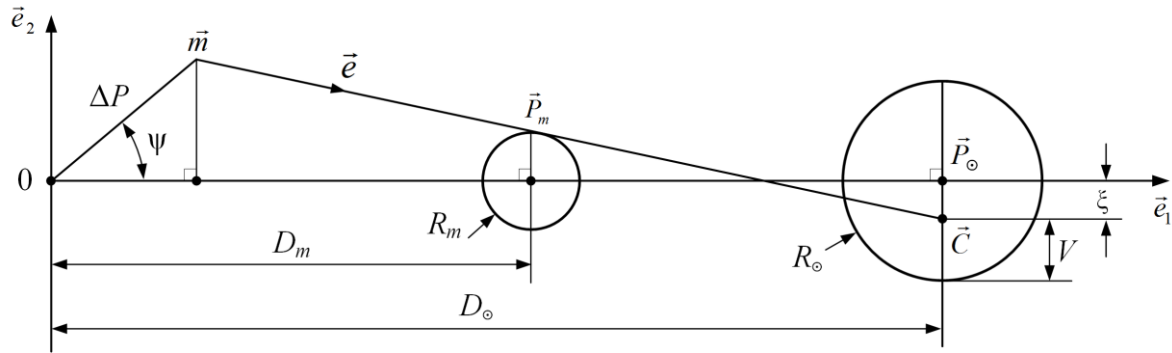


Рис. 13. Геометрія розрахунку фази затемнення в точці вимірювання  $\vec{m}$  в двовірній системі координат  
Fig. 13. The geometry of calculating the eclipse phase at the measurement point  $\vec{m}$  in a two-dimensional coordinate system

Частина діаметра Сонця, перекрита місяцем, позначена інтервалом  $V$ . Оцінімо довжину відрізка  $\vec{P}_{\odot}\vec{C}$ , для чого заздалегідь знайдемо точку  $\vec{C}$  як точку перетину двох параметричних прямих

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{m} + \theta\vec{e}, \\ \vec{C} &= \vec{P}_{\odot} + \xi\vec{e}_2,\end{aligned}$$

де параметри  $\theta$  і  $\xi$  лежать в межах від  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Умова перетину двох прямих має вигляд

$$\vec{m} + \theta\vec{e} = \vec{P}_{\odot} + \xi\vec{e}_2$$

чи після перенесень доданків

$$\vec{m} - \vec{P}_{\odot} = \xi\vec{e}_2 - \theta\vec{e}. \quad (4)$$

Скалярні добутки рівняння (4) з векторами  $\vec{e}$  і  $\vec{e}_2$  дають систему двох скалярних рівнянь з двома невідомими  $\theta$  і  $\xi$  з урахуванням  $(\vec{e}, \vec{e}) = \|\vec{e}\|^2 = 1$  і  $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \|\vec{e}_1\|^2 = 1$

$$\begin{aligned}(\vec{m} - \vec{P}_{\odot}, \vec{e}) &= \xi(\vec{e}_2, \vec{e}) - \theta, \\ (\vec{m} - \vec{P}_{\odot}, \vec{e}_2) &= \xi - \theta(\vec{e}_2, \vec{e}).\end{aligned}$$

Звідки знаходимо

$$\xi = \frac{(\vec{m} - \vec{P}_{\odot}, \vec{e}_2 - \vec{e}(\vec{e}_2, \vec{e}))}{1 - (\vec{e}_2, \vec{e})^2}. \quad (5)$$

Точка перетину прямих набере вигляд

$$\vec{C} = \vec{P}_{\odot} + \xi\vec{e}_2.$$

Точка  $\vec{C}$  знаходиться від центру Сонця  $\vec{P}_{\odot}$  на відстані  $\xi$ , Рис. 13, 14.

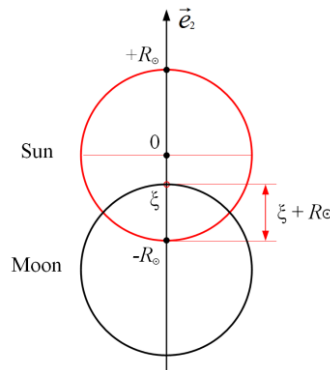


Рис. 14. Схема перекриття Сонця видимим диском Місяця  
Fig. 14. Scheme of the Sun's overlap with the Moon's visible disk

Частина діаметра Сонця, перекритого Місяцем, складе (див. Рис. 14)

$$\xi - (-R_{\odot}) = \xi + R_{\odot}.$$

Фаза затемнення  $E_m$ , як доля діаметру Сонця, закрита Місяцем, набирає остаточного вигляду

$$E_m = \frac{\xi + R_\odot}{2R_\odot} = \frac{\xi}{2R_\odot} + 0.5. \quad (6)$$

При уявному зміщенні точки  $\vec{M}$  в напрямі від осі тінювого конуса в площині, що проходить через точку  $\vec{M}$  і перпендикулярну до осі місячної тіні фаза затемнення зменшується, див. Рис. 14.

В межах конуса місячної півтіні методика дозволяє розраховувати фазу СЗ для будь-якої точки на поверхні Землі і на будь-якій висоті в навколосемному просторі, проте треба враховувати, що для точок спостереження, що потрапляють в тінь від Землі, розрахунок не має сенсу.

Точність розрахунку фази затемнення залежить від точності відстані до Місяця і Сонця. Відстань від центру Землі до місяця змінюється в межах 356 410–406 697 км [55]. Якщо використовується середня відстань 384 400 км, то погрішність розрахунку фази затемнення складе  $\approx 3.6\%$ . Відстань від Землі до Сонця змінюється від  $147.1 \cdot 10^6$  до  $152.1 \cdot 10^6$  км [55]. При використанні середньої відстані  $149.6 \cdot 10^6$  км погрішність обчислення фази затемнення складе  $\approx 1.2\%$ .

### Затемнення

Величина затемнення  $E_{obs}$  – це доля площі видимого диска Сонця, перекрита Місяцем. Затемнення менше 100% для часткових і кільцеподібних СЗ і дорівнює 100% для повних сонячних затемнень. Розрахункова схема для  $E_{obs}$  наведена на Рис. 15.

Нехай круг з центром  $O_M$  представляє видимий диск Місяця, а круг з центром  $O_S$  видимий диск Сонця. Вважаємо СЗ повним, отож радіуси цих кругів рівні між собою і дорівнюють деякій умовній величині  $R$ . Величина перекриття діаметра Сонця Місяцем дорівнює  $r$  в тій же умовній шкалі відстаней. З Рис. 15 витікає, що фаза затемнення дорівнює

$$E_m = \frac{r}{2R}.$$

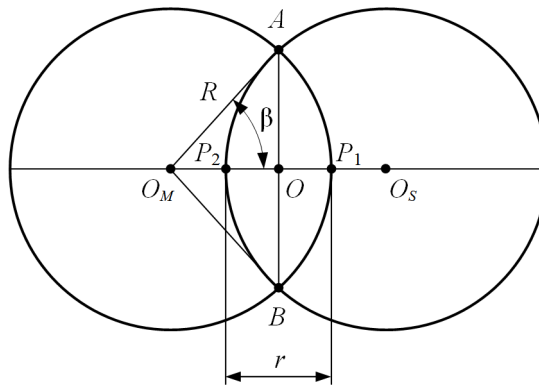


Рис. 15. Схема розрахунку затемнення  $E_{obs}$  по відомій фазі  $E_m$ . Точка  $O_M$  – центр місячного диска, а  $O_S$  – сонячного. Величина перекритого діаметра Сонця дорівнює довжини відрізка  $P_1P_2$

Fig. 15. Scheme of calculation of the eclipse  $E_{obs}$  by the known phase  $E_m$ . The point  $O_M$  is the center of the lunar disk, and  $O_S$  is the center of the solar disk. The value of the blocked diameter of the Sun is equal to the length of the segment  $P_1P_2$

Площа перекриття відповідає площі фігури  $AP_1BP_2$ , Рис. 15. Площа трикутника  $AOO_M$  дорівнює

$$S_\Delta = \frac{O_M O \times AO}{2} = 0.5 \left( R - \frac{r}{2} \right) \sqrt{R^2 - \left( R - \frac{r}{2} \right)^2} = 0.5 R^2 (1 - E_m) \sqrt{2E_m - E_m^2}.$$

Нехай  $S$  – площа кругового сектора  $AP_1BO_M$ , а кут  $\angle O O_M A$  дорівнює  $\beta$  радіан. Складемо пропорції кутів і площ з круга з центром  $O_M$

$$\frac{2\beta}{2\pi} = \frac{S}{\pi R^2},$$

звідки знаходимо площу сектора

$$S = R^2 \beta.$$

Кут  $\beta$  знаходимо із співвідношення

$$\cos \beta = \frac{O_M O}{O_M A} = \frac{R - r/2}{R} = 1 - \frac{r}{2R} = 1 - E_m.$$

Перекрита частина площі сонячного диска дорівнює подвоєній різниці площ сектора  $S$  і 2-х трикутників

$$S_{obs} = 2(S - 2S_\Delta) = 2(R^2 \beta - R^2 (1 - E_m) \sqrt{2E_m - E_m^2}).$$

Остаточна величина затемнення складе

$$E_{obs} = \frac{S_{obs}}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} \left( \arccos(1 - E_m) - (1 - E_m) \sqrt{2E_m - E_m^2} \right). \quad (7)$$

### Відносна освітленість

Різні частини поверхні Землі отримують різну кількість сонячної енергії із-за сферичної форми планети. Велику роль грають властивості поверхні до віддзеркалення і поглинання сонячних променів. Хмари, поверхня океанів і морів, сніговий покрив і льодовики відбивають значну частину випромінювання, що падає. Існування іоносфери, зокрема її  $F_2$ -шару, головним чином зобов'язано випромінюванню Сонця. З урахуванням руху Землі, на освітленість  $F_2$ -шару впливають сезон року і місцевий час доби, тобто є широтна і довготна залежність. Розглянемо спрощену методику для оцінки відносної освітленості в точках вимірювання в іоносфері з урахуванням тільки потоку сонячного випромінювання, що падає.

Як вже відзначалося вище, основний вклад в значення ПЕВ вносить відносно тонкий сферичний шар максимальної електронної концентрації,  $F_2$ -шар іоносфери, тому часто використовується модель тонкого іоносферного сферичного шару,  $F_2$ -сфери. У методі Бесселя вектор  $\vec{Z}$  спрямований з центру Землі на Сонце,

Рис. 16. Нормаль до  $F_2$ -сфери в точці вимірювання позначимо  $\vec{e}$ , а кут падіння сонячного потоку, зенітний кут, в цій точці  $\gamma$ .

Напрямок  $\vec{Z}$  задає потік паралельних сонячних променів до поверхні Землі, у тому числі і до точки вимірювання  $\vec{M}$  з географічними координатами  $\varphi$  і  $\lambda$ . Тоді нормаль до  $F_2$ -сфери в точці  $\vec{M}$  матиме вигляд  $\vec{e} = (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi)$ .

Приймемо рівень освітленості в найближчій до Сонця точці  $F_2$ -шару за одиницю, Рис. 16. Тоді рівень освітленості в точці  $\vec{M}$  визначимо як проекцію потоку на нормаль  $\vec{e}$

$$L = (\vec{e}, \vec{Z}).$$

Кут  $\gamma = \arccos L$  дорівнює куту падіння сонячного потоку на сферичну поверхню  $F_2$ -шару іоносфери. З урахуванням затемнення рівень освітленості зменшується і складе  $L_m = L(1 - E_{obs})$ . В розрахунках відносної освітленості в інтервалі затемнення вважаємо, що випромінювання Сонця розподілене рівномірно по усьому сонячному диску.

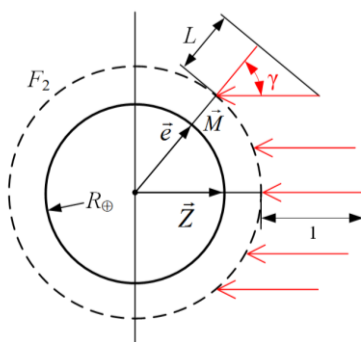


Рис. 16. Схема освітлення Землі Сонцем для оцінки відносної освітленості в точці вимірювання  $\vec{M}$  за спрощеною методикою

Fig. 16. Diagram of the Earth's illumination by the Sun for estimating the relative illumination at the measurement point  $\vec{M}$  using a simplified method

Освітленість в точці вимірювання в кожен момент часу залежить від потоку, що падає, і залежить від часу, наприклад, від зміни сонячної активності. Тому доцільно при дослідженні враховувати часові залежності параметрів сонячної активності, наприклад,  $F_{10.7}$ .

### ЧАСТКОВЕ СОНЯЧНЕ ЗАТЕМНЕННЯ 25 ЖОВТНЯ 2022 р.

Як приклад використання допоміжних функцій, які описано вище, наведемо результати вимірювання для часткового сонячного затемнення 25 жовтня 2022 р.

Затемнення почалося на території Ісландії, а завершилося в районі Аравійського моря. Найбільша фаза затемнення  $E_m = 0.86189$  зареєстрована в Росії в Ханті-Мансійському автономному окрузі в 11:00:09.1 UT1 [54]. По елементах Бесселя для моменту максимальної фази C3 з сайту [46] за допомогою описаних вище методик були обчислені для усього інтервалу C3 координати точки P, точки перетину місячної тіні з ФП, і вектор  $\vec{Z}$ , одиничний вектор осі Z бesselевої системи координат. Далі був



розрахований слід місячної тіні на поверхні Землі і вибрані GPS-станції для визначення ПЕВ, Рис. 10. З використанням отриманих даних в системі MATLAB з пакетом розширення Mapping Toolbox були побудовані тривимірні ілюстрації розташування конусів місячної тіні в просторі по відношенню до Землі. На Рис. 17 наведені ілюстрації розташування конусів у момент початку затемнення. Знання просторового розташування конусів протягом усього часу затемнення особливо важливе для правильної інтерпретації впливу СЗ на навколосезонне середовище для випадків часткових і чисто іоносферних СЗ. Порівняно із слідом місячної тіні, який описано в розділі 'Методики розрахунку', просторове розташування конусів дозволяє значно краще оцінити географічні межі області, над якою потрібно виконувати дослідження іоносфери, а також межі магнітоспряженої області для додаткових розширених досліджень.

На карті, Рис. 18, траєкторії точок вимірювання, прольоти, обмежені інтервалом часу перегляду або областю радіовидимості. На рисунку проліт починається з позначення номера супутника і часу початку вимірювання. На лініях прольотів нанесені мітки часу через 10 хв і 1 годину, а також для одного моменту часу, 09:20 UT, на всіх траєкторіях іоносферних точок відображені точки вимірювання ПЕВ у вигляді кругів для оцінки географічних меж області на поверхні Землі, над якою в цей момент досліджується іоносфера. Слід місячної тіні у верхній частині рисунку розмічений з кроком 10 хв. Положення приймача показане квадратом. Великі міста зображені кругами.

За шкалою часу уздовж сліду місячної тіні можна припустити, що для станції KIRU пошук реакції на затемнення бажано шукати в інтервалі часу 09:20 – 10:00 UT, Рис. 18. Швидкість переміщення точок спостереження в  $F_2$ -шарі іоносфери мінімальна при проходженні супутника поблизу зеніту станції. Крім того, точки вимірювання, найбільш близькі до Сонця, краще освітлені і отримують більше енергії, і, відповідно, збільшується ефект від затемнення. Тому для демонстрації результатів обробки були вибрані супутники G04 і G09.

На Рис. 19 наведені результати оцінки ПЕВ поблизу станції KIRU за даними GPS уздовж прольотів супутників G04 і G09. Станція KIRU розташована близько м. Кіруна, Швеція, географічні координати станції  $67^{\circ}52'$  пн.ш. і  $21^{\circ}10'$  сх.д. Також на Рис. 19 наведена фаза затемнення  $E_m$ , рівень відносної освітленості  $L$  без урахування затемнення і  $L_m$  з урахуванням затемнення. Цифрами 1 і 2 відмічені початок і закінчення передбачуваного відгуку іоносфери на СЗ. Точками в інтервалі між цифрами 1 і 2 позначена очікувана залежність ПЕВ без затемнення. У вказаному інтервалі вертикальними відрізками відображений максимальний дефіцит ПЕВ  $\Delta N$ , а горизонтальними – часова затримка відгуку на збурення  $\Delta t$ .

З Рис. 19а і Рис.19б видно, що помітне зменшення ПЕВ починається з моменту перевищення фазою затемнення значення 0.1. Тривалість реакції ПЕВ відповідає тривалості сонячного затемнення уздовж прольоту. Але максимальна реакція іоносфери зсунута відносно максимуму фази затемнення приблизно на 30 – 40 хв. На Рис. 19а і Рис.19б спостерігається загальне зниження освітленості. Для фази затемнення 0.7 падіння ПЕВ складало 3.5 TECU або 19%.

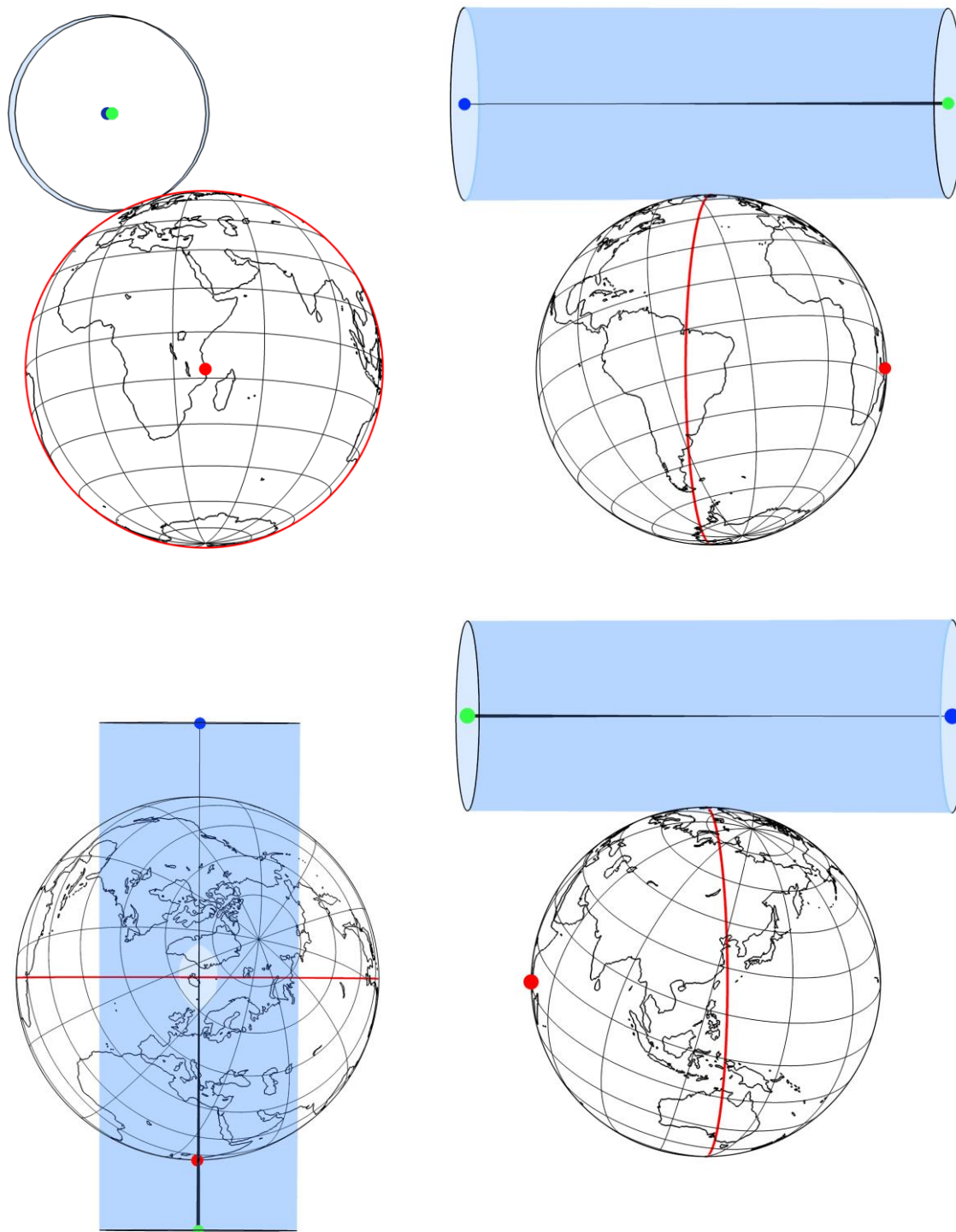


Рис. 17. Розташування конусів місячної тіні (umbra) і півтіні (penumbra) в просторі по відношенню до Землі для C3 25.10.2022 у момент початку затемнення. Червоним маркером позначена підсонячна точка, зеленим – початок фрагмента конусів місячної тіні, синім – кінець фрагмента. Червоне коло, це лінія перетину поверхні Землі з фундаментальною площиною. Зовнішня межа конуса півтіні виділена блакитним кольором

Fig. 17. The location of the lunar shadow cones (umbra) and penumbra in space with respect to the Earth for C3 25.10.2022 at the beginning of the eclipse. The red marker indicates the sub-solar point, the green marker indicates the beginning of the lunar shadow cone fragment, and the blue marker indicates the end of the fragment. The red circle is the line of intersection of the Earth's surface with the fundamental plane. The outer boundary of the penumbra cone is highlighted in blue



Рис. 18. Карта прольотів супутників відносно станції KIRU, м. Кируна в Швеції, в інтервалі часу з 08:00 до 11:00 UT. У 09:20 UT показані точки вимірювання у вигляді кругів

Fig. 18. Map of satellite overflights relative to the KIRU station, Kiruna, Sweden, in the time interval from 08:00 to 11:00 UT. At 09:20 UT, the measurement points are shown as circles

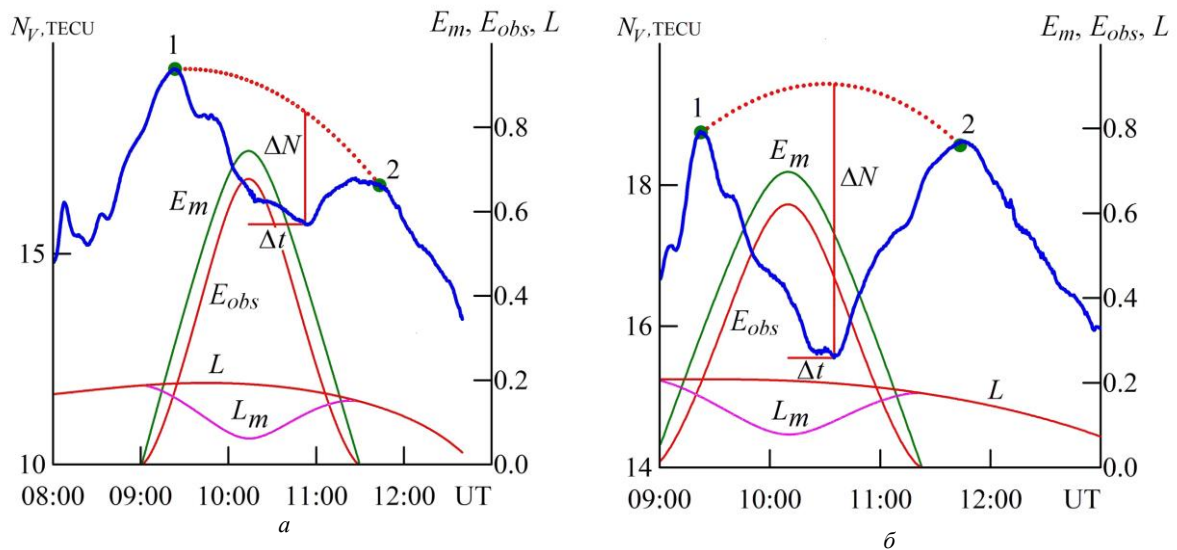


Рис. 19. Часові залежності ПЕВ уздовж прольоту для супутників поточного угруповання відносно станції KIRU. Графіки залежностей для супутників: а – G04, б – G09. Шкала для фази затемнення  $E_m$  і рівня освітленості  $L$ ,  $L_m$  в точці вимірювання розташована справа

Fig. 19. Time dependences of the PEV along the span for the satellites of the current constellation relative to the KIRU station. Graphs of dependencies for satellites: a - G04, b - G09. The scale for the eclipse phase  $E_m$  and the illumination level  $L$ ,  $L_m$  at the measurement point is located on the right

## ОБГОВОРЕННЯ

Власна програмна реалізація алгоритмів дозволила в ході дослідження мати повний контроль над деталями реалізації. Виконаний за розробленою методикою розрахунок сліду місячної тіні дозволив оптимально вибрати ланцюжок станцій спостереження і прольоти супутників поточного угруповання супутників. Ще краще оцінити географічні межі області, над якою слід виконувати дослідження іоносфери, дозволяють виконані тривимірні ілюстрації розташування конусів місячної тіні в просторі по відношенню до Землі.

Точність розрахунку фази затемнення при використанні середніх відстаней до Сонця і до Місяця складає 3.6% і 1.2% відповідно.

Чітко простежується час виникнення і закінчення ефекту затемнення по рівню фази затемнення не менше 0.1. Максимальна фаза затемнення,  $E_m$ , і мінімальні значення ПЕВ в інтервалі затемнення дозволили оцінити ефективний час затримки реакції іоносфери на СЗ, також встановити залежність між змінами фази затемнення  $E_m$  і значеннями ПЕВ.

Зменшення величини освітленості в період затемнення, відмінність значень в показниках  $L$  і  $L_m$ , призводить до помітного зменшення значення ПЕВ.

Доля поглиненої сонячної енергії в точці вимірювання ПЕВ вказує на вплив зовнішнього джерела іонізації в присутності і/або відсутності затемнення.

### ВИСНОВКИ

Впровадження допоміжних функцій, таких як слід місячної тіні, фаза затемнення, величина затемнення і відносна освітленість, отриманих з використанням методу Бесселя, істотно полегшило завдання пошуку і оцінки збурень іоносфери під час сонячного затемнення.

1. Отримані аналітичні співвідношення для сліду місячної тіні на земній поверхні, фази затемнення, величини затемнення, а також відносної освітленості в точці вимірювання. Методики дозволяють в межах конуса місячної півтіні розраховувати фазу СЗ для будь-якої точки на поверхні Землі і на будь-якій висоті в навколосферному просторі.

2. Розрахунок сліду місячної тіні дозволив оптимально вибрати ланцюжок станцій спостереження і прольоти супутників поточного угруповання. Виконані тривимірні ілюстрації розташування конусів місячної тіні в просторі по відношенню до Землі дозволяють ще краще оцінити межі області дослідження іоносфери.

3. За значенням фази затемнення в кожній точці вимірювання визначено час затримки основного відгуку іоносфери, який склав приблизно 30 – 40 хв.

4. Встановлена залежність між величиною фази затемнення  $E_m$  і зміною ПЕВ. Для фази затемнення 0.7 падіння ПЕС склало 3.5 TECU або 19%.

5. Дефіцит ПЕВ в точці вимірювання безпосередньо пов'язаний з відносною освітленістю і поглинанням сонячної енергії.

### ПОДЯКА

Автори виражають вдячність професорові Чорногору Леоніду Феоктистовичу, завідуючому кафедрою космічної радіофізики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, за запропоновану тему досліджень, численні обговорення і конструктивну критику, які значною мірою сприяли яснішому і точнішому викладенню матеріалу статті.

### КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Chapman S. The influence of a solar eclipse upon the upper atmospheric ionization. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 1932;92:413–420. <https://doi.org/10.1093/mnras/92.5.413>
2. Lewis I. M. Formulas for the ionosphere track in eclipses. The Astronomical J. 1940;49(1122):4–7. <https://doi.org/10.1086/105607>
3. Чорногор Л. Ф., Милованов Ю. Б. Іоносферні ефекти сонячного затемнення 10 червня 2021 р. в Заполяр'ї. Кінематика і фізика небесних тіл. 2022;38(4):29–52. <https://doi.org/10.15407/kfnt2022.04.029>
4. Чорногор Л. Ф., Милованов Ю. Б. Іоносферні ефекти сонячного затемнення 11 серпня 2018 року над Китаєм. Кінематика і фізика небесних тіл. 2020;36(6):37–64. <https://doi.org/10.15407/kfnt2020.06.037>
5. Чорногор Л. Ф., Милованов Ю. Б., Luo Y. Ефекти сонячного затемнення 10 червня 2021 р. в іоносфері високих широт: результати GPS-спостережень. Радіофізика і радіоастрономія. 2022;27(2):93–109. <https://doi.org/10.15407/rpra27.02.093>
6. Чорногор Л. Ф., Милованов Ю. Б., Дорохов В. Л., Поднос В. А., Цимбал А. М., Шевелев М. Б. Варіації повного електронного вмісту в екваторіальній іоносфері, викликані сонячним затемненням 21 червня 2020 р. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2022;36:49–65. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2022-36-04>
7. Чорногор Л. Ф., Гармаш К. П. Іоносферні процеси протягом часткового сонячного затемнення над Харковом 10 червня 2021 р. Кінематика і фізика небесних тіл. 2022;38(2):3–22. <https://doi.org/10.15407/kfnt2022.02.003>
8. Чорногор Л. Ф., Гармаш К. П., Жданко Є. Г., Леус С. Г., Luo Y. Особливості іоносферних ефектів часткового сонячного затемнення над Харковом 10 червня 2021 р. Радіофізика і радіоастрономія. 2021;26(4):326–343. <https://doi.org/10.15407/rpra26.04.326>

9. Черногор Л. Ф., Милованова Л. І., Милованов Ю. Б., Цимбал А. М., Люо У. Эффекты солнечного затемнения 10 червня 2021 р. в іоносфері над Харковом: результати вертикального зондування. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2021;35:60–78. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-06>
10. Huang F., Li Q., Shen X., Xiong C., Yan R., Zhang S.-R., et al. Ionospheric responses at low latitudes to the annular solar eclipse on 21 June 2020. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2020;125:1–16, e2020JA028483. <https://doi.org/10.1029/2020JA028483>
11. Tsai H. F., Liu J. Y. Ionospheric total electron content response to solar eclipses. *J. Geophys. Res.* 1999;104(A6):12657–12668. <https://doi.org/10.1029/1999JA900001>
12. Zhang R., Le H., Li W., Ma H., Yang Y., Huang H., et al. Multiple technique observations of the ionospheric responses to the 21 June 2020 solar eclipse. *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* 2020;125:1–15, e2020JA028450. <https://doi.org/10.1029/2020JA028450>
13. Gomez D. D. Ionospheric response to the December 14, 2020 total solar eclipse in South America. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2021;126:1–14, e2021JA029537. <https://doi.org/10.1029/2021JA029537>
14. Aa E., Zhang S.-R., Erickson P. J., Goncharenko L. P., Coster A. J., Jonah O. F., Lei J., Huang F., Dang T., Liu L. Coordinated ground-based and space-borne observations of ionospheric response to the annular solar eclipse on 26 December 2019. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2020;125(11):1–17, e2020JA028296. <https://doi.org/10.1029/2020JA028296>
15. Cheng W., Xu W., Gu X., Wang S., Wang Q., Ni B., Lu Z., Xiao B., Meng X. A Comparative Study of VLF Transmitter Signal Measurements and Simulations during Two Solar Eclipse Events. *Remote Sens.* 2023;15(3025):1–14. <https://doi.org/10.3390/rs15123025>
16. Harjosuwito J., Husin A., Dear V., Muhamad J., Faturahman A., Bahar A., Erlansyah, Syetiawan A., Pradipta R. Ionosonde and GPS total electron content observations during the 26 December 2019 annular solar eclipse over Indonesia. *Ann. Geophys.* 2023;41:147–172. <https://doi.org/10.5194/angeo-41-147-2023>
17. Verhulst T. G. W., Stankov S. M. The importance of the three-dimensional geometry of solar eclipses for analysis of the impact on the ionosphere. 2018 42nd COSPAR Scientific Assembly, Pasadena, California, USA, Abstract id. C1.1-79-18.
18. Verhulst T. G. W., Stankov S. M. Height dependency of solar eclipse effects: The ionospheric perspective. *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* 2020;125:1–20, e2020JA028088. <https://doi.org/10.1029/2020JA028088>
19. Stankov S. M., Bergeot N., Berghmans D., Bolsée D., Bruyninx C., et al. Multi-instrument observations of the solar eclipse on 20 March 2015 and its effects on the ionosphere over Belgium and Europe. *J. Space Weather Space Clim.* 2017; 7(A19):1–23. <https://doi.org/10.1051/swsc/2017017>
20. Sun Y.-Y., Chen C.-H., Su X., Wang J., Yu T., Xu H.-R., Liu, J.-Y. Occurrence of nighttime irregularities and their scale evolution in the ionosphere due to the solar eclipse over East Asia on 21 June 2020. *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* 2023;128:1–9. e2022JA030936. <https://doi.org/10.1029/2022JA030936>
21. Chauvenet W. *Manual of Spherical and Practical Astronomy*, 5-th ed. Vol.1. Philadelphia: J. B. Lippincott Co.; 1891. Reprinted 1960, New York: Dover Publications. 704 p.
22. Buchanan S. B. *The mathematical theory of eclipses*. Philadelphia and London: J. B. Lippincott Company; 1904. 292 p.
23. Smart W. M. *Textbook on spherical astronomy*, 6th ed. Cambridge: Cambridge University Press; 1977. 443 p.
24. Ball R. *A Treatise On Spherical Astronomy*. London: Cambridge University Press; 1908. 506 p.
25. Williams W. Jr. *Prediction and Analysis of Solar Eclipse Circumstances*. National Technical Information Service Technical Report NTIS No. AD726626, Springfield, Virginia; 1971. 131 p.
26. *Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*. London: H. M. Nautical Almanac Office; 1974. 547 p.
27. Seidelmann P. K., editor. *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. California: University Science Books; 1992. 752 p.
28. Urban S. E., Seidelmann P. K., editors. *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, 3d ed. Mill Valley, California: University Science Books; 2013. 768 p.
29. Meeus J., Grosjean C. C., Vanderleen W. *Canon of Solar Eclipses*. New York: Pergamon Press; 1966. 750 p.
30. Espenak F. *Fifty Year Canon of Solar Eclipses: 1986–2035*. Cambridge, Massachusetts: Sky Publishing Corp.; 1987. 278 p.
31. Espenak F., Meeus J. *Five Millennium Catalog of Solar Eclipses: –1999 to +3000 (2000 BCE to 3000 CE)*. Revised NASA/TP-2009-214174; 2009. 278 p.
32. Meeus J. *Elements of Solar Eclipses 1951–2200*. Virginia, USA: Willmann Bell; 1989. 105 p.
33. Littmann M., Espenak F., Willcox K. *Totality. Eclipses of the Sun*, 3rd ed. Oxford, New York: Oxford University Press; 2008. 358 p.
34. Steele J. M. *Observations and Predictions of Eclipse Times by Early Astronomers*. Springer-Science+Business Media. 2000. 321 p.



35. <https://www.iausofa.org>
36. Meeus J. *Astronomical Algorithms* second edition. Virginia, USA: Willmann Bell; 1998. 477 p.
37. Meeus J. *Mathematical Astronomy Morsels*. Richmond, Virginia: Willmann-Bell; 1997. 379 p.
38. Meeus J. *More Mathematical Astronomy Morsels*. Richmond, Virginia: Willmann-Bell; 2002. 429 p.
39. Meeus J. *Mathematical Astronomy Morsels III*. Richmond, Virginia: Willmann-Bell; 2004. 374 p.
40. Meeus J. *Mathematical Astronomy Morsels IV*. Richmond, Virginia: Willmann-Bell; 2007. 373 p.
41. Meeus J. *Mathematical Astronomy Morsels V*. Richmond, Virginia: Willmann-Bell; 2009. 373 p.
42. Montenbruck O., Pfleger T. *Astronomy on the Personal Computer*. 4th, Completely Revised Edition. New York: Springer; 2000. 300 p.
43. Duffett-Smith P. *Astronomy with your Personal Computer*, 2nd ed. New York: Cambridge University Press; 1997. 259 p.
44. Duffett-Smith P., Zwart J. *Practical Astronomy with your Calculator or Spreadsheet*, 4th ed. New York: Cambridge University Press; 2012. 216 p.
45. <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/>
46. <https://www.eclipsewise.com/>
47. Mahooti M. Standards of Fundamental Astronomy. MATLAB Central File Exchange. Retrieved June 30, 2023. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/74523-standards-of-fundamental-astronomy>
48. Eagle D. A MATLAB Implementation of Elements of Solar Eclipses. MATLAB Central File Exchange. Retrieved June 30, 2023. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/71132-a-matlab-implementation-of-elements-of-solar-eclipses>
49. Mahooti M. Solar Eclipse. MATLAB Central File Exchange. Retrieved June 30, 2023. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/55279-solar-eclipse>
50. Mahooti M. Local Circumstances of a Solar Eclipse. MATLAB Central File Exchange. Retrieved June 30, 2023. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/55609-local-circumstances-of-a-solar-eclipse>
51. Carton W. H. C. The speed of the lunar shadow on Earth during solar eclipses. *J. Br. Astron. Assoc.* 2011;121(2):105–108.
52. Pasachoff J. M., Fraknoi A. Resource Letter OSE-1: Observing Solar Eclipses. *American Journal of Physics.* 2017;85(7): 485–494. <http://dx.doi.org/10.1119/1.4985062>
53. Zillman M. P. *Astronomy Resources on the Internet 2022*. 2022;:1–28. <http://www.AstronomyResources.info/>
54. <https://www.eclipsewise.com/solar/SEprime/2001-2100/SE2022Oct25Pprime.html>
55. Moore P., Rees R. *Patrick Moore's Data Book of Astronomy*. New York: Cambridge University Press; 2011. 576 p.

#### REFERENCES

1. Chapman S. The influence of a solar eclipse upon the upper atmospheric ionization. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 1932;92:413–420. <https://doi.org/10.1093/mnras/92.5.413>
2. Lewis I. M. Formulas for the ionosphere track in eclipses. *The Astronomical J.* 1940;49(1122):4–7. <https://doi.org/10.1086/105607>
3. Chernogor LF., Mylovanov YuB. Ionospheric Effects from the June 10, 2021 Solar Eclipse in the Polar Region. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies.* 2022;38(4):29–52. <https://doi.org/10.15407/kfnt2022.04.029> [In Ukrainian].
4. Chernogor LF, Mylovanov, YuB. Ionospheric Effects of the August 11, 2018, Solar Eclipse over the People's Republic of China. *Kinemat. Phys. Celest. Bodies.* 2020;36(6):37–64. <https://doi.org/10.15407/kfnt2020.06.037>. [In Ukrainian].
5. Chernogor LF., Mylovanov YuB., Luo Y. Effects from the June 10, 2021 solar eclipse in the high-latitude ionosphere: results of GPS observations. *Radio Phys. Radio Astron.* 2022;27(2):93–109 <https://doi.org/10.15407/rpra27.02.093>. [In Ukrainian].
6. Chernogor LF, Mylovanov YuB, Dorokhov VL, Podnos VA, Tsymbal AM, Shevelev MB. TEC variations in equatorial ionosphere during June 21, 2020 solar eclipse. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics"*. 2022;36:49–65. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2022-36-04> [In Ukrainian].
7. Chernogor LF, Garmash KP. Ionospheric Processes during the Partial Solar Eclipse above Kharkiv on June 10, 2021. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies.* 2022;38(2):3–22. <https://doi.org/10.15407/kfnt2022.02.003>. [In Ukrainian]
8. Chernogor LF, Garmash KP, Zhdanko YH, Leus SG, Luo Y. Features of ionospheric effects from the partial solar eclipse over the city of Kharkiv on 10 June 2021. *Radio Phys. Radio Astron.* 2021;26(4):326–343. <https://doi.org/10.15407/rpra26.04.326> [In Ukrainian].
9. Chernogor LF, Mylovanova LI, Mylovanov YuB, Tsymbal AM, Luo Y. Effects from the June 10, 2021 solar eclipse in the ionosphere over Kharkiv: results from ionosonde measurements. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv*

- National University, series “Radio Physics and Electronics”. 2021;35:60–78. [In Ukrainian]. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-06>
10. Huang F., Li Q., Shen X., Xiong C., Yan R., Zhang S.-R., et al. Ionospheric responses at low latitudes to the annular solar eclipse on 21 June 2020. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2020;125:1–16, e2020JA028483. <https://doi.org/10.1029/2020JA028483>
  11. Tsai H. F., Liu J. Y. Ionospheric total electron content response to solar eclipses. *J. Geophys. Res.* 1999;104(A6):12657–12668. <https://doi.org/10.1029/1999JA900001>
  12. Zhang R., Le H., Li W., Ma H., Yang Y., Huang H., et al. Multiple technique observations of the ionospheric responses to the 21 June 2020 solar eclipse. *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* 2020;125:1–15, e2020JA028450. <https://doi.org/10.1029/2020JA028450>
  13. Gomez D. D. Ionospheric response to the December 14, 2020 total solar eclipse in South America. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2021;126:1–14, e2021JA029537. <https://doi.org/10.1029/2021JA029537>
  14. Aa E., Zhang S.-R., Erickson P. J., Goncharenko L. P., Coster A. J., Jonah O. F., Lei J., Huang F., Dang T., Liu L. Coordinated ground-based and space-borne observations of ionospheric response to the annular solar eclipse on 26 December 2019. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2020;125(11):1–17, e2020JA028296. <https://doi.org/10.1029/2020JA028296>
  15. Cheng W., Xu W., Gu X., Wang S., Wang Q., Ni B., Lu Z., Xiao B., Meng X. A Comparative Study of VLF Transmitter Signal Measurements and Simulations during Two Solar Eclipse Events. *Remote Sens.* 2023;15(3025):1–14. <https://doi.org/10.3390/rs15123025>
  16. Harjosuwito J., Husin A., Dear V., Muhamad J., Faturahman A., Bahar A., Erlansyah, Syetiawan A., Pradipta R. Ionosonde and GPS total electron content observations during the 26 December 2019 annular solar eclipse over Indonesia. *Ann. Geophys.* 2023;41:147–172. <https://doi.org/10.5194/angeo-41-147-2023>
  17. Verhulst T. G. W., Stankov S. M. The importance of the three-dimensional geometry of solar eclipses for analysis of the impact on the ionosphere. 2018 42nd COSPAR Scientific Assembly, Pasadena, California, USA, Abstract id. C1.1-79-18.
  18. Verhulst T. G. W., Stankov S. M. Height dependency of solar eclipse effects: The ionospheric perspective. *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* 2020;125:1–20, e2020JA028088. <https://doi.org/10.1029/2020JA028088>
  19. Stankov S. M., Bergeot N., Berghmans D., Bolsée D., Bruyninx C., et al. Multi-instrument observations of the solar eclipse on 20 March 2015 and its effects on the ionosphere over Belgium and Europe. *J. Space Weather Space Clim.* 2017; 7(A19):1–23. <https://doi.org/10.1051/swsc/2017017>
  20. Sun Y.-Y., Chen C.-H., Su X., Wang J., Yu T., Xu H.-R., Liu, J.-Y. Occurrence of nighttime irregularities and their scale evolution in the ionosphere due to the solar eclipse over East Asia on 21 June 2020. *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* 2023;128:1–9. e2022JA030936. <https://doi.org/10.1029/2022JA030936>
  21. Chauvenet W. *Manual of Spherical and Practical Astronomy*, 5-th ed. Vol.1. Philadelphia: J. B. Lippincott Co.; 1891. Reprinted 1960, New York: Dover Publications. 704 p.
  22. Buchanan S. B. *The mathematical theory of eclipses*. Philadelphia and London: J. B. Lippincott Company; 1904. 292 p.
  23. Smart W. M. *Textbook on spherical astronomy*, 6th ed. Cambridge: Cambridge University Press; 1977. 443 p.
  24. Ball R. *A Treatise On Spherical Astronomy*. London: Cambridge University Press; 1908. 506 p.
  25. Williams W. Jr. *Prediction and Analysis of Solar Eclipse Circumstances*. National Technical Information Service Technical Report NTIS No. AD726626, Springfield, Virginia; 1971. 131 p.
  26. *Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*. London: H. M. Nautical Almanac Office; 1974. 547 p.
  27. Seidelmann P. K., editor. *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. California: University Science Books; 1992. 752 p.
  28. Urban S. E., Seidelmann P. K., editors. *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, 3d ed. Mill Valley, California: University Science Books; 2013. 768 p.
  29. Meeus J., Grosjean C. C., Vanderleen W. *Canon of Solar Eclipses*. New York: Pergamon Press; 1966. 750 p.
  30. Espenak F. *Fifty Year Canon of Solar Eclipses: 1986–2035*. Cambridge, Massachusetts: Sky Publishing Corp.; 1987. 278 p.
  31. Espenak F., Meeus J. *Five Millennium Catalog of Solar Eclipses: –1999 to +3000 (2000 BCE to 3000 CE)*. Revised NASA/TP-2009-214174; 2009. 278 p.
  32. Meeus J. *Elements of Solar Eclipses 1951–2200*. Virginia, USA: Willmann Bell; 1989. 105 p.
  33. Littmann M., Espenak F., Willcox K. *Totality. Eclipses of the Sun*, 3rd ed. Oxford, New York: Oxford University Press; 2008. 358 p.
  34. Steele J. M. *Observations and Predictions of Eclipse Times by Early Astronomers*. Springer-Science+Business Media. 2000. 321 p.
  35. <https://www.iausofa.org>
  36. Meeus J. *Astronomical Algorithms second edition*. Virginia, USA: Willmann Bell; 1998. 477 p.

37. Meeus J. *Mathematical Astronomy Morsels*. Richmond, Virginia: Willmann-Bell; 1997. 379 p.
38. Meeus J. *More Mathematical Astronomy Morsels*. Richmond, Virginia: Willmann-Bell; 2002. 429 p.
39. Meeus J. *Mathematical Astronomy Morsels III*. Richmond, Virginia: Willmann-Bell; 2004. 374 p.
40. Meeus J. *Mathematical Astronomy Morsels IV*. Richmond, Virginia: Willmann-Bell; 2007. 373 p.
41. Meeus J. *Mathematical Astronomy Morsels V*. Richmond, Virginia: Willmann-Bell; 2009. 373 p.
42. Montenbruck O., Pfleger T. *Astronomy on the Personal Computer*. 4th, Completely Revised Edition. New York: Springer; 2000. 300 p.
43. Duffett-Smith P. *Astronomy with your Personal Computer*, 2nd ed. New York: Cambridge University Press; 1997. 259 p.
44. Duffett-Smith P., Zwart J. *Practical Astronomy with your Calculator or Spreadsheet*, 4th ed. New York: Cambridge University Press; 2012. 216 p.
45. <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/>
46. <https://www.eclipsewise.com/>
47. Mahooti M. Standards of Fundamental Astronomy. MATLAB Central File Exchange. Retrieved June 30, 2023. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/74523-standards-of-fundamental-astronomy>
48. Eagle D. A MATLAB Implementation of Elements of Solar Eclipses. MATLAB Central File Exchange. Retrieved June 30, 2023. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/71132-a-matlab-implementation-of-elements-of-solar-eclipses>
49. Mahooti M. Solar Eclipse. MATLAB Central File Exchange. Retrieved June 30, 2023. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/55279-solar-eclipse>
50. Mahooti M. Local Circumstances of a Solar Eclipse. MATLAB Central File Exchange. Retrieved June 30, 2023. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/55609-local-circumstances-of-a-solar-eclipse>
51. Carton W. H. C. The speed of the lunar shadow on Earth during solar eclipses. *J. Br. Astron. Assoc.* 2011;121(2):105–108.
52. Pasachoff J. M., Fraknoi A. Resource Letter OSE-1: Observing Solar Eclipses. *American Journal of Physics.* 2017;85(7); 485–494. <http://dx.doi.org/10.1119/1.4985062>
53. Zillman M. P. Astronomy Resources on the Internet 2022. 2022;:1–28. <http://www.AstronomyResources.info/>
54. <https://www.eclipsewise.com/solar/SEprime/2001-2100/SE2022Oct25Pprime.html>
55. Moore P., Rees R. *Patrick Moore's Data Book of Astronomy*. New York: Cambridge University Press; 2011. 576 p.

Стаття надійшла до редакції: 3 жовтня 2023 р.

Рекомендовано до друку: 2 листопада 2023 р.

## BESSEL'S METHOD IN STUDY OF SOLAR ECLIPSE INFLUENCE ON THE IONOSPHERE

Yu. B. Mylovanov, V. L. Dorokhov

*V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody sq., Kharkiv, 61022, Ukraine*

**Relevance.** A solar eclipse is a global disturbing factor that significantly changes the characteristics of the ionosphere. As is known, the ionosphere affects the propagation of radio waves of all ranges, that is, it affects the operation of navigation and radio astronomy systems, radars, telecommunications, and remote sensing of near-Earth space. Therefore, the study of the influence of solar eclipses on the ionosphere is an important task, which in general consists of astronomical and ionospheric parts of the work.

**The purpose** of this work is to present the elements of astronomical calculation methods developed for ionospheric research and to describe the results of using these methods to study the influence of solar eclipses on the ionosphere.

**Methods and methodology.** The methods are developed on the basis of the Bessel's method, which makes it possible to significantly simplify calculations using the concept of the fundamental plane.

**Results.** Analytical relationships are obtained for the trace of the lunar shadow on the earth's surface, the eclipse phase, the magnitude of the obscuration, as well as the relative illuminance at the measurement point. Using the developed methods, GPS stations and satellite flights of the current constellation of satellites were optimally selected, the delay time of the main ionospheric response, which was approximately 30-40 minutes, and the relationship between the magnitude of the eclipse phase and the change in total electron content (TEC) were established. For eclipse phase 0.7, the TEC decrease was 3.5 TECU or 19%.

**Conclusions.** The developed methods make it possible to study the influence of solar eclipses on the ionosphere.

**KEY WORDS:** ionosphere, solar eclipse, Bessel's method, total electron content, TEC, eclipse phase, remote sensing, GPS, relative illuminance

The article was received by the editors: October 3 2023

The article is recommended for printing: November 2 2023