

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2023-39-01>

УДК 537.87

**М. С. АНТЮФЄЄВА<sup>1,2</sup>**, к. ф.-м. наук, с.н.с.

e-mail: antyufeyeva@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-6654-4794>

**М. О. АНТЮФЄЄВ<sup>1</sup>**, студент

e-mail: kitant2001@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0007-8346-1150>

**Д. О. БАТРАКОВ<sup>1</sup>**, д. ф.-м. наук, професор

e-mail: batrakov@karazin.ua ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-6726-8162>

<sup>1</sup>Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків, м. Свободи, 4

<sup>2</sup>School of Mathematics, Statistics and Physics, Newcastle University, Newcastle upon Tyne, Herschel Building, NE1 7RU, United Kingdom

## ОСОБЛИВОСТІ ЗБУДЖЕНИХ ПОЛІВ У РЕЗОНАТОРІ, ЯКИЙ ЗАПОВНЕНО СЕРЕДОВИЩЕМ З ПОКАЗНИКОМ ЗАЛОМЛЕННЯ БЛИЗЬКИМ ДО НУЛЯ

**Актуальність.** Сучасні штучні середовища здатні відтворювати спеціально підібрані електрофізичні параметри, такі як від'ємний показник заломлення, або показник заломлення близький до нуля. Ці властивості широко використовуються в оптиці та фотоніці у новітніх розробках, а також для елементів та пристроїв мікрохвильового діапазону. Наприклад, такі середовища здатні приводити до суперзв'язку між хвилеводами з дуже невідповідними поперечними перерізами. Використання заповнюючого середовища з показником заломлення близьким до нуля може суттєво змінити картину щодо резонансних частот такого резонатора і розширити робочі діапазони мікрохвильових резонаторів.

**Мета роботи.** Метою роботи є теоретичне дослідження впливу параметрів дисперсійного середовища з показником заломлення близьким до нуля на резонансні частоти об'ємного мікрохвильового резонатора, що заповнений таким середовищем, і на характеристики вимушених коливань у такому резонаторі.

**Матеріали та методи.** Задача про вимушені електромагнітні поля в об'ємному резонаторі з ідеально провідними стінками, який заповнено однорідним ізотропним середовищем з дисперсією, завдяки чому його показник заломлення є близьким до нуля в певному діапазоні частот, розв'язується за допомогою еволюційного підходу до електродинаміки у часовій області. Цей підхід дозволяє повністю розділити часову та просторову частини задачі, що суттєво полегшує розв'язання і забезпечує отримання аналітично-числових розв'язків у випадку заповнення резонатора довільним однорідним середовищем з дисперсією. Для опису середовища, що заповнює резонатор використано модель, раніше запропоновану у літературі, показник заломлення якої є близьким до нуля у певному діапазоні частот, і одним з основних питань роботи є питання, як вплинуть властивості такого середовища на характеристики звичайного мікрохвильового резонатора та електромагнітні коливання, збуджені в такому резонаторі.

**Результати.** В роботі отримано аналітично-числові розв'язки еволюційних рівнянь для конкретного середовища, що моделює показник заломлення близький до нуля у певному діапазоні частот. Отримано характеристики такого заповненого резонатора і простежено вплив параметрів середовища на резонансні частоти заповненого резонатора та спектральний склад вимушених коливань.

**Висновки.** У роботі теоретично показано можливість розширити частотні характеристики та робочі режими об'ємних резонаторів за рахунок специфічного заповнення, значно підвищити робочу частоту мікрохвильового резонатора.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** НВЧ резонатор, метаматеріал, еволюційний підхід до електродинаміки у часовій області, середовище з дисперсією, показник заломлення близький до нуля.

**Як цитувати:** Антюфєєва МС, Антюфєєв МО, Батраков ДО. Особливості збуджених полів у резонаторі, який заповнено середовищем з показником заломлення близьким до нуля. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2023;39:7-17. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2023-39-01>

**In cites:** Antyufeyeva MC, Antyufeyev MO, Batrakov DO. Features of excited fields in a cavity resonator filled with a near-zero refractive index medium. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2023;39:7-17. (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2023-39-01>

### ВСТУП

Останнім часом наукова спільнота приділяє велику увагу розробці метаматеріалів та використанню їх особливостей у розв'язанні тих чи інших технічних завдань [1, 2]. Особливо привабливою є властивість штучних середовищ відтворювати спеціально підібрані електрофізичні параметри, такі як

© Антюфєєва М. С., Антюфєєв М. О., Батраков Д. О., 2023

**Open access.** This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

низькі, або взагалі негативні значення показника заломлення [1, 3]. Набуття таких властивостей є результатом субхвильової структури штучних матеріалів, а не їх хімічного складу. Серед метаматеріалів помітний інтерес викликають матеріали з ефективним показником заломлення близьким до нуля, їх застосування [4, 5, 6] та моделювання відповідної поведінки різними електродинамічними структурами [7, 8]. Розроблено та досліджено, як теоретично і за допомогою числового моделювання, так і експериментально, багато видів структур та штучних матеріалів, які мають ефективний показник заломлення близький до нуля (near-zero refractive index, NZI) [9]. На основі сучасних штучних середовищ можна сформувати такі явища та ефекти, як суперв'язок [7], посилені нелінійності [10, 11] і флуоресценція [12], геометрично-інваріантні резонансні порожнини [13] і керування диполь-дипольними взаємодіями [14], фотонне легування [15], поширення світлового енергетичного потоку, подібного до ідеальних рідин [16], формування запізнювального середовища для генераторів електромагнітного випромінювання [17] та інші. Дослідження у напрямку розробки та використання важливих властивостей метаматеріалів продовжуються та набувають нових горизонтів [18].

У цій роботі розглядається поведінка електромагнітних полів у резонаторі з ідеально провідними стінками, який заповнено штучним дисперсним середовищем, ефективні параметри якого залежать від частоти і ефективний показник заломлення якого у певному діапазоні частот має значення близькі до нуля. Представляють інтерес як власні електродинамічні характеристики такого резонатора, так і поведінка у часі збуджених за допомогою сторонніх струмів електромагнітних полів.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЇЇ РОЗВ'ЯЗОК

Поведінку електромагнітних полів в резонаторі довільної форми з ідеально провідними стінками ми аналізуємо за допомогою еволюційного підходу до задач електродинаміки у часовій області [19] і представляємо напруженості електричного  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$  і магнітного  $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$  поля у вигляді розкладань

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\alpha}(t) \nabla \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}); \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\beta=1}^{\infty} b_{\beta}(t) \nabla \Psi_{\beta}(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (1)$$

де базисні вихрові вектори розкладань  $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$  задовольняють добре відомим тривимірним крайовим задачам Діріхле та Неймана на власні значення, які визначають власні моди в порожньому об'ємному резонаторі, а невихрові функції  $\Phi_{\alpha}(\mathbf{r})$ ,  $\Psi_{\beta}(\mathbf{r})$  відповідним скалярним задачам на власні значення. Такий базис є повним та ортонормованим у просторі розв'язків внутрішніх електродинамічних задач; докладно опис модових розкладань у резонаторі можна знайти в [19], а також в [20]. Вихрові  $e_n(t)$ ,  $h_n(t)$  та невихрові  $a_{\alpha}(t)$ ,  $b_{\beta}(t)$  модові амплітуди розкладання задовольняють системі еволюційних рівнянь з початковими умовами та визначеними модовими амплітудами сторонніх струмів, отриманих у результаті проєкції рівнянь Максвелла, початкового розподілу полів та струмів сторонніх джерел на модовий базис [19]

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} e_n(t) + ik_n h_n(t) &= -j_n^e(t) - \frac{1}{V} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(\mathcal{E}) + \mathcal{J}_{\sigma}(\mathcal{E}, \mathcal{H}) \right\} \mathbf{E}_n^*(\mathbf{r}) dV, \quad e_n(0) = \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \mathbf{E}_n^*(\mathbf{r}) dV = e_n^0; \\ \frac{d}{dt} h_n(t) + ik_n e_n(t) &= -j_n^h(t) - \frac{\mu_0}{V} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}(\mathcal{H}) \right\} \mathbf{H}_n^*(\mathbf{r}) dV, \quad h_n(0) = \frac{\mu_0}{V} \int_V \mathcal{H}_0(\mathbf{r}) \mathbf{H}_n^*(\mathbf{r}) dV = h_n^0; \\ \frac{d}{dt} a_{\alpha}(t) &= -j_{\alpha}^e(t) + \frac{1}{V} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(\mathcal{E}) + \mathcal{J}_{\sigma}(\mathcal{E}, \mathcal{H}) \right\} \nabla \Phi_{\alpha}^*(\mathbf{r}) dV, \quad a_{\alpha}(0) = -\frac{\varepsilon_0}{V} \int_V \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \nabla \Phi_{\alpha}^*(\mathbf{r}) dV = a_{\alpha}^0; \\ \frac{d}{dt} b_{\beta}(t) &= -j_{\beta}^h(t) + \frac{\mu_0}{V} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}(\mathcal{H}) \right\} \nabla \Psi_{\beta}^*(\mathbf{r}) dV, \quad b_{\beta}(0) = -\frac{\mu_0}{V} \int_V \mathcal{H}_0(\mathbf{r}) \nabla \Psi_{\beta}^*(\mathbf{r}) dV = b_{\beta}^0; \end{aligned} \right. \quad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}j_n^e(t) &= \frac{1}{V} \int_V \mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_n^*(\mathbf{r}) dV, \quad j_n^h(t) = \frac{1}{V} \int_V \mathcal{J}_h(\mathbf{r}, t) \mathbf{H}_n^*(\mathbf{r}) dV; \\ j_{\alpha}^e(t) &= \frac{1}{V} \int_V \mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t) \nabla \Phi_{\alpha}^*(\mathbf{r}) dV, \quad j_{\beta}^h(t) = \frac{1}{V} \int_V \mathcal{J}_h(\mathbf{r}, t) \nabla \Psi_{\beta}^*(\mathbf{r}) dV,\end{aligned}$$

де  $k_n$  є власними значеннями крайової задачі, що визначає модові вектори  $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ , або  $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$ , визначається розмірами резонатора та номером збудженої у резонаторі моди і має сенс власної кругової частоти порожнього резонатора для цієї моди.  $\mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t)$  і  $\mathcal{J}_h(\mathbf{r}, t)$  в (2) є густиною струму сторонніх електричних та магнітних джерел, які в свою чергу також задовольняють розкладанням (1) з вихровими  $j_n^e(t)$ ,  $j_n^h(t)$  та невихровими  $j_{\alpha}^e(t)$ ,  $j_{\beta}^h(t)$  модовими амплітудами електричного та магнітного струмів відповідно,  $\mathcal{J}_{\sigma}(\mathcal{E}, \mathcal{H})$  – густина струму провідності середовища,  $\mathcal{E}_0(\mathbf{r})$ ,  $\mathcal{H}_0(\mathbf{r})$  – початковий розподіл напруженості електричного та магнітного полів відповідно,  $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathcal{E}(\mathbf{r}, t))$ ,  $\mathcal{M}(\mathcal{H}) = \mathcal{M}(\mathcal{H}(\mathbf{r}, t))$  – вектори електричної поляризації та намагніченості,  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  – діелектрична та магнітна проникність вільного простору,  $V$  – об'єм резонатора,  $i = \sqrt{-1}$ , зірочка позначає комплексне спряження.

Вектори електричної поляризації та намагніченості та їх похідні також можемо представити у вигляді розкладань подібних (1) з відповідними модовими амплітудами поляризації та намагніченості

[20, 21], і доповнити еволюційні рівняння описом відгуку середовища на дію електромагнітного поля. Середовище є дисперсним, тобто його діелектрична та магнітна проникності залежать від частоти, і вважається однорідним та ізотропним.

Частіше дисперсійні явища розглядаються у частотній області, і показник заломлення середовища може бути близьким до нуля в тих випадках, коли або ефективна діелектрична проникність  $\varepsilon(\omega)$ , або ефективна магнітна проникність  $\mu(\omega)$  штучного матеріала, або вони обидві мають значення близькі до нуля [3, 9]. За цією ознакою NZI-матеріали поділяються на три категорії: матеріали з  $\varepsilon$ , що наближається до нуля з ненульовим  $\mu$  (epsilon-near-zero, ENZ) [22], матеріали з  $\mu$ , що наближається до нуля з ненульовою діелектричною проникністю  $\varepsilon$  (mu-near-zero, MNZ) [23], або, відповідно, матеріали, де і  $\varepsilon$ , і  $\mu$  наближаються до нуля разом (epsilon-and-mu-near-zero, EMNZ) [13, 24]. Кожен тип має свої особливості і властивості, але ми будемо розглядати для опису заповнювача резонатора модель останнього типу середовища, EMNZ, яке має кінцеве значення ефективного хвильового імпедансу середовища  $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ , на відміну від ENZ ( $Z = \infty$ ) та MNZ ( $Z = 0$ ). Одним з найяскравіших прикладів такого середовища є метаматеріал, що демонструє діраківську дисперсію, [25], і модель якого складається з одного полюсу Друде для діелектричної проникності і одного полюсу Друде для магнітної проникності, які в частотній області описуються співвідношеннями :

$$\varepsilon_{eff}(\omega) = 1 + \frac{\chi_e \omega_e^2}{i\omega(\omega + \gamma_e)}, \quad \mu_{eff}(\omega) = 1 + \frac{\chi_h \omega_h^2}{i\omega(\omega + \gamma_h)}, \quad n_{eff}(\omega) = \sqrt{\varepsilon_{eff}(\omega)\mu_{eff}(\omega)}. \quad (3)$$

де  $\omega_e, \omega_h$  – характеристичні кругові частоти середовища,  $\gamma_e, \gamma_h$  – коефіцієнти втрат, а  $\chi_e, \chi_h$  – амплітуди полюсів. У часовій області виразам (3) відповідають диференційні рівняння другого порядку для векторів поляризації та намагніченості

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \chi_e \omega_e^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) + \gamma_h \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) &= \chi_h \omega_h^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Для випадку, що розглядається у даній статті і відповідає дисперсії Дірака [25], параметри електричного і магнітного полюсів однакові,  $\gamma_e = \gamma_h = \gamma$ ,  $\omega_e = \omega_h = \omega_p$  — плазмова частота електронів провідності середовища,  $\chi_e = \chi_h = \chi$ . Треба зазначити, що полюсна модель Друде для діелектричної проникності відповідає присутності електричної провідності в матеріалі, але для магнітної проникності такої відповідності в природі не існує, і таке середовище може бути виключно штучним. Такий опис моделі середовища носить дещо абстрактний характер і не заглиблюється у питання обміну імпульсом всередині таких матеріалів [26], але дає достатньо повні уявлення про процеси, що відбуваються.

Проекція на модовий базис рівнянь (4) дає додаткові рівняння для модових амплітуд поляризації та намагніченості. Вихрову та невихрові системи еволюційних рівнянь можна записати в матричному вигляді наступним чином

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} e_n(t) \\ ih_n(t) \\ \tilde{p}_n(t) \\ i\tilde{m}_n(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k_n & 1 & 0 \\ -k_n & 0 & 0 & 1 \\ -\chi\omega_p^2 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -\chi\omega_p^2 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}_{sol}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e_n(t) \\ ih_n(t) \\ \tilde{p}_n(t) \\ i\tilde{m}_n(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{sol}(t)} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -j_n^e(t) \\ -ij_n^h(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{sol}(t)}, \quad \mathbf{X}(t)|_{t=0} = \underbrace{\begin{pmatrix} e_n^0 \\ ih_n^0 \\ \tilde{p}_n^0 \\ i\tilde{m}_n^0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_0}, \quad (5) \\ \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} a_\alpha(t) \\ \tilde{d}_\alpha(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}^e(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\chi\omega_p^2 & \gamma \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}_{irr}^e} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_\alpha(t) \\ \tilde{d}_\alpha(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{irr}^e(t)} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -j_\alpha^e(t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{irr}^e(t)}, \quad \mathbf{Y}^e(t)|_{t=0} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_\alpha^0 \\ \tilde{d}_\alpha^0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}_0^e}, \\ \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} b_\beta(t) \\ \tilde{g}_\beta(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}^h(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\chi\omega_p^2 & \gamma \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}_{irr}^h} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_\beta(t) \\ \tilde{g}_\beta(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{irr}^h(t)} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -j_\beta^h(t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{irr}^h(t)}, \quad \mathbf{Y}^h(t)|_{t=0} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_\beta^0 \\ \tilde{g}_\beta^0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}_0^h}, \quad (6) \end{aligned}$$

де  $\tilde{p}_n(t), \tilde{m}_n(t), \tilde{d}_\alpha(t), \tilde{g}_\beta(t)$  відповідно вихрові та невихрові модові амплітуди розкладання часових похідних векторів об'ємної щільності поляризації та намагніченості за базисними векторами подібно розкладанням (1).

Загальний розв'язок цих систем шукаємо у вигляді [28, 21]:

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^{M_{sol}} \mathbf{K}(\lambda_k^{sol}) \left( e^{-\lambda_k^{sol} t} \mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{-(t-t') \lambda_k^{sol}} \mathbf{F}_{sol}(t') dt' \right), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^e(t) &= \sum_{k=1}^{M_{irr}^e} \mathbf{K}(\lambda_k^{irr(e)}) \left( e^{-\lambda_k^{irr(e)} t} \mathbf{Y}_0^e + \int_0^t e^{-(t-t') \lambda_k^{irr(e)}} \mathbf{F}_{irr}^e(t') dt' \right), \\ \mathbf{Y}^h(t) &= \sum_{k=1}^{M_{irr}^h} \mathbf{K}(\lambda_k^{irr(h)}) \left( e^{-\lambda_k^{irr(h)} t} \mathbf{Y}_0^h + \int_0^t e^{-(t-t') \lambda_k^{irr(h)}} \mathbf{F}_{irr}^h(t') dt' \right), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\lambda^{sol}$ ,  $\lambda^{irr(e,h)}$  є наборами власних чисел характеристичних матриць  $\mathbf{Q}_{sol}$ ,  $\mathbf{Q}_{irr}^{e,h}$  систем рівнянь (5), (6), порядок систем відповідно  $M_{sol} = 4$ ,  $M_{irr}^e = M_{irr}^h = 2$ , а допоміжні матриці  $\mathbf{K}(\lambda)$  визначаються за формулою [28] для знаходження експоненти від матричного аргументу  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{K}(\lambda_k) = \prod_{s \neq k}^{s=1..M} \frac{\lambda_s \mathbf{I} - \mathbf{Q}}{\lambda_s - \lambda_k}, \quad (9)$$

де  $\lambda_{s,k}$  – відповідні власні числа матриці  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{I}$  – діагональна одинична матриця, а під  $\mathbf{Q}$  для розв'язків (7) та (8) розуміємо відповідну характеристичну матрицю системи  $\mathbf{Q}_{sol}$ ,  $\mathbf{Q}_{irr}^e$ , чи  $\mathbf{Q}_{irr}^h$ .

Розв'язок (7) для вихрових модових амплітуд є загальним аналітично-числовим розв'язком, в якому власні числа  $\lambda_k^{sol}$  матриці  $\mathbf{Q}_{sol}$  та допоміжні матриці  $\mathbf{K}(\lambda)$  знаходяться за допомогою числових розрахунків. Власні числа є коренями рівняння 4-го порядку

$$\lambda^4 - 2\gamma\lambda^3 + (2\chi\omega_p^2 + \gamma^2 + k_n^2)\lambda^2 - 2\gamma(\chi\omega_p^2 + k_n^2)\lambda + \chi^2\omega_p^4 + \gamma^2 k_n^2 = 0. \quad (10)$$

Поведінка власних чисел характеристичної матриці системи описує поведінку власних характеристик резонатора, який заповнений середовищем, що розглядається.

Невихрові системи еволюційних рівнянь (6) мають лише другий порядок і їх власні характеристичні числа та матриці  $\mathbf{K}(\lambda)$  отримуються аналітично, причому числа  $\lambda_k^{irr(e,h)}$  є дійсними:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{irr(e,h)} &= \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad \lambda_2^{irr(e,h)} = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \\ \mathbf{K}(\lambda_1^{irr(e,h)}) &= \frac{\begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}} & -1 \\ -\chi\omega_p^2 & \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \end{pmatrix}}{2\sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}}}, \quad \mathbf{K}(\lambda_2^{irr(e,h)}) = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}} & 1 \\ \chi\omega_p^2 & \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \end{pmatrix}}{2\sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}}}. \end{aligned}$$

Далі ми зосередимося на вимушених коливаннях поля у резонаторі, тому початкові умови визначаємо нульовими. Сторонні струми, які збуджують резонатор, будемо вважати такими, що тільки модова амплітуда  $j_n^e(t)$  однієї резонаторної моди є ненульовою, це дасть змогу обмежитися тільки одним відповідним доданком розкладання (1). Таким чином, маємо  $j_n^e(t) = A_n \sin \Omega_n t$ ,  $j_n^h(t) = j_\beta^h(t) = j_\alpha^e(t) = 0$ , в даному контексті  $n$  просто позначає номер власного вектору  $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$  або  $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$ , для якого модова амплітуда сторонніх струмів ненульова. В такому випадку невихрові модові амплітуди є нульовими і невихрові поля в резонаторі відсутні, а вихрові модові амплітуди описуються аналітично — числовим виразом

$$\begin{pmatrix} e_n(t) \\ ih_n(t) \\ \tilde{p}_n(t) \\ i\tilde{m}_n(t) \end{pmatrix} = A_n \left[ \sum_{k=1}^4 \frac{\Omega_n \cos \Omega_n t - \lambda_k^{sol} \sin \Omega_n t - \Omega_n \exp(-\lambda_k^{sol} t)}{\lambda_k^{sol} - \Omega_n} \mathbf{K}(\lambda_k^{sol}) \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

де  $\lambda_k^{sol}$  та  $\mathbf{K}(\lambda_k^{sol})$  обчислюються відповідно конкретним значенням параметрів середовища і власної частоти порожнього резонатора. Також можна записати вирази для напруженості електричного і магнітного полів

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= A_n \left[ \sum_{k=1}^4 \frac{\Omega_n \cos \Omega_n t - \lambda_k^{sol} \sin \Omega_n t - \Omega_n \exp(-\lambda_k^{sol} t)}{\lambda_k^{sol} - \Omega_n} \mathbf{K}(\lambda_k^{sol}) \right]_{1,1} \mathbf{E}_n(\mathbf{r}); \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) &= -iA_n \left[ \sum_{k=1}^4 \frac{\Omega_n \cos \Omega_n t - \lambda_k^{sol} \sin \Omega_n t - \Omega_n \exp(-\lambda_k^{sol} t)}{\lambda_k^{sol} - \Omega_n} \mathbf{K}(\lambda_k^{sol}) \right]_{2,1} \mathbf{H}_n(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (12)$$

де  $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$  та  $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$  визначаються відомими задачами Діріхле та Неймана на власні значення і мають вигляд відповідно геометрії резонатора.

### ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для числового моделювання будемо розглядати електромагнітне поле у прямокутному резонаторі, і, як сказано вище, вважаємо що в резонаторі збуджується одна, основна, мода, просторовий розподіл якої

для прямокутного резонатора добре відомий. Власна частота коливань у порожньому резонаторі визначається його геометричними розмірами  $f_{n0} = \frac{1}{2\pi} k_n \equiv \frac{1}{2\pi} k_{nmp} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{w^2} + \frac{p^2}{h^2}\right)} / \varepsilon_0 \mu_0$ , де  $l$  – довжина,  $w$  – ширина,  $h$  – висота прямокутного резонатора, у нашому числовому моделюванні вона складає  $f_{n0} = 10.09$  ГГц. Часова частина електромагнітного поля описується модовими амплітудами (11), на поведінці і характеристиках яких ми і зосередимо нашу увагу.

Ми будемо розглядати поведінку у часі полів для двох різних випадків заповнення резонатора, відповідно співвідношенням (3), з різними значеннями параметрів середовища. Середовище I має плазмову частоту  $f_{p1} = \frac{\omega_{p1}}{2\pi} = 25.09$  ГГц, коефіцієнт втрат  $\gamma_1 = 10^{-3} \omega_{p1} = 15.76 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$ , середовище II має плазмову частоту  $f_{p2} = \frac{\omega_{p2}}{2\pi} = 75.09$  ГГц, коефіцієнт втрат  $\gamma_2 = 10^{-3} \omega_{p2} = 47.18 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$ , амплітуди полюсів обох середовищ однакові  $\chi_1 = \chi_2 = 1$ . Вигляд частотної залежності показника заломлення обох середовищ наведено на Рис. 1, де також присутні маркери, що відповідають плазмовим частотам середовищ  $f_{p1}$ ,  $f_{p2}$  та власній частоті  $f_{n0}$  порожнього резонатора, електромагнітні поля в якому ми розглядаємо в даній роботі.

Характеристичне рівняння матриці  $\mathbf{Q}_{sol}$  (10) є аналогом звичайного дисперсійного рівняння частотної області, де корені  $\lambda$  рівняння (10) і комплексні частоти  $\tilde{\omega}$  співвідносяться як  $Im(\lambda) = Re(\tilde{\omega})$ ,  $Re(\lambda) = Im(\tilde{\omega})$ . Відповідно уявна частина  $\lambda$  визначає власну кругову частоту в резонаторі з відповідним заповненням, а дійсна частина відповідає за втрати на цій резонансній частоті. Рівняння (10) для середовища, яке описується моделлю (3), є рівнянням 4-го порядку і його корені є двома парами комплексно спряжених чисел. Таким чином, ми отримуємо 2 резонансні частоти, які відповідають заданій частоті порожнього резонатора. Хоча далі ми будемо розглядати конкретний резонатор, який був описаний на початку цього розділу, давайте переглянемо, як змінюватимуться власні частоти заповненого резонатора залежно від власної частоти порожнього резонатора, яка визначається тільки його геометричними розмірами. Для цього ми просто обчислимо значення коренів рівняння (10) для низки значень параметра  $k_n/2\pi$ . Результати для обчисленої таким чином власної частоти заповненого резонатора  $Im(\lambda)/2\pi$  наведено на Рис. 2.

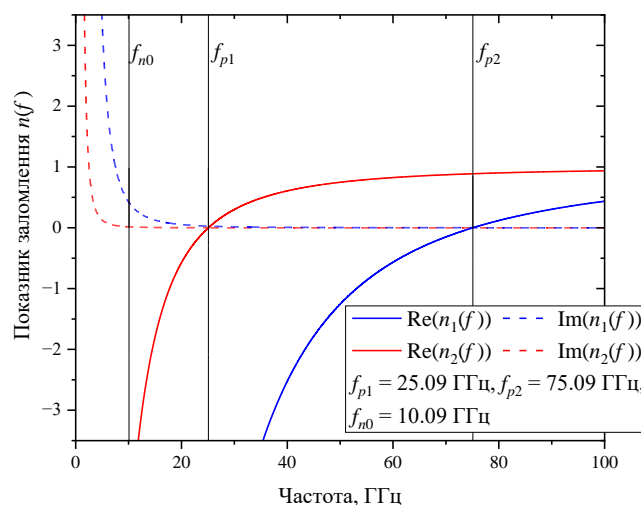


Рис. 1. Залежність показника заломлення середовищ, що заповнюють резонатор, від частоти  
Fig. 1. Dependence on frequency of the refractive index of the media that used as cavity filling

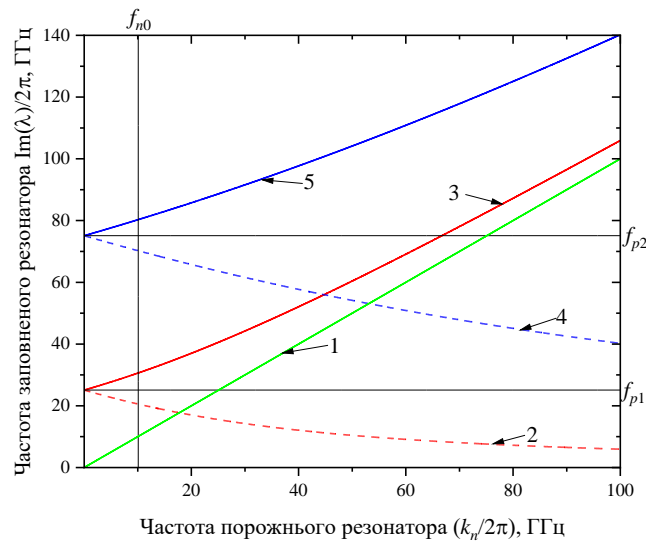


Рис. 2. Ілюстрація поведінки власних частот заповненого резонатора залежно від власної частоти порожнього резонатора

Fig. 2. Illustration of the behaviour of eigen frequencies of a filled cavity resonator depending on the eigen frequency of an empty cavity

На Рис. 2 цифрами 2 і 3 позначено власні частоти у випадку заповнення резонатора середовищем I, цифрами 4 і 5 позначено власні частоти у випадку заповнення резонатора середовищем II. Криві 2, 4, далі будемо позначати ці частоти  $f_{d1}$  та  $f_{d2}$  для першого і другого середовищ, відповідають зоні від'ємного показника заломлення середовища,  $f_{d1} < f_{p1}$ ,  $f_{d2} < f_{p2}$  (див. Рис. 1.). Ця частота спадає зі зростанням частоти порожнього резонатора і можна вивести, що її поведінка та існування зумовлені в першу чергу взаємодією електромагнітного поля в резонаторі з середовищем, [27]. Криві 3, 5, ці частоти будемо позначати  $f_{c1}$  та  $f_{c2}$ , відповідають зоні додатного показника заломлення,  $f_{c1} > f_{p1}$ ,  $f_{c2} > f_{p2}$ , і ростуть із зростанням частоти порожнього резонатора. На Рис. 2 додатково наведено пряму, позначену 1, яка відповідає зростанню частоти порожнього резонатора і вона є асимптотою для частоти  $f_c$ , таким чином поведінка частоти  $f_c$  у заповненому резонаторі більше зумовлена перевідбиттям електромагнітної хвилі між стінками резонатора. Безпосередньо коли дійсна частина показника заломлення перетинає 0, довжина хвилі будь-якого хвильового процесу всередині такого середовища стає нескінченною, а електричне поле відповідно, залишається постійним. Це також відображає Рис. 2, бо частоти  $f_d$  та  $f_c$  розходяться в різні боки від позначених горизонтальними маркерами плазмових частот  $f_p$  середовища I та II, де дійсна частина показника заломлення перетворюється на нуль.

Дуже важливою характеристикою резонатора із заповненням є величина невантаженої добротності резонатора, збудженого на резонансній частоті, яка наведена на Рис. 3, залежно від тієї ж низки власних частот порожнього резонатора. Невантажена добротність визначається як відношення кругової резонансної частоти до коефіцієнту втрат на цій частоті, в нашому випадку це  $Im(\lambda)/Re(\lambda)$ . Криві 1, 2 відповідають резонансним частотам середовища I, криві 3, 4 відповідають резонансним частотам середовища II, криві 1, 3 відповідають збудженню власної частоти  $f_c$ , криві 2, 4 відповідають збудженню власної частоти  $f_d$ .

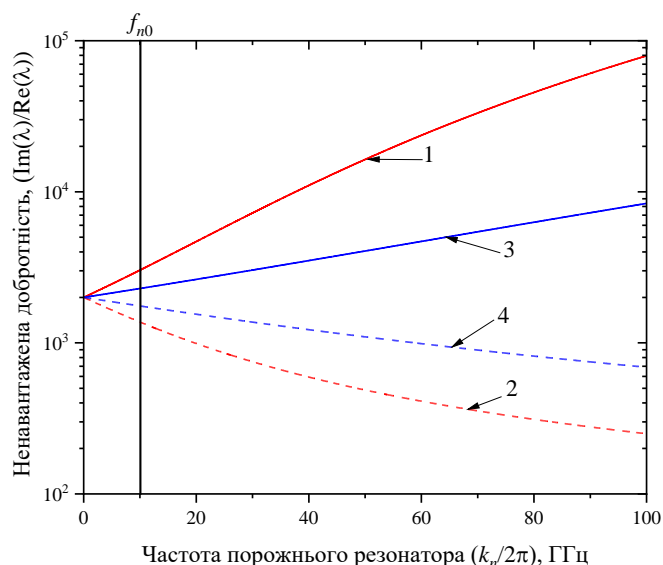


Рис. 3. Ненавантажена добротність резонатора, збудженого на власних частотах, у випадку заповнення резонатора середовищем I та II

Fig. 3. Unloaded Q-factor of the resonator excited at eigen frequencies in the case of filling the cavity resonator with media I and II

Для визначеного на початку розділу резонатора, власна частота якого, коли він порожній,  $f_{n0} = 10.09$  ГГц маємо значення власних частот, коли він заповнений середовищем I,  $f_{d1} = 20.55$  ГГц,  $f_{c1} = 30.64$  ГГц (відповідні коефіцієнти втрат, дійсна частина характеристичних чисел  $\lambda$ ,  $\epsilon \delta_{d1} = 4.59 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$ ,  $\delta_{c1} = 1.75 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$ ). У випадку коли резонатор, що розглядається, заповнений середовищем II, його власні частоти будуть  $f_{d2} = 70.21$  ГГц,  $f_{c2} = 80.30$  ГГц (відповідні коефіцієнти втрат, дійсна частина характеристичних чисел  $\lambda$ ,  $\epsilon \delta_{d2} = 2.51 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$ ,  $\delta_{c2} = 2.20 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$ ). Дуже важливим результатом є те, що завдяки значно вищому значенню плазмової частоти ніж частота порожнього резонатора, ми можемо отримати обидві резонансні частоти заповненого резонатора, також значно вищими. Це є наслідком саме того, що показник заломлення середовища на цих резонансних частотах є ближчим до нуля, так дійсна частина показника заломлення середовища I на резонансних частотах має значення  $n_1(f_{d1}) = -0.49$ ,  $n_1(f_{c1}) = 0.33$ , а середовища II –  $n_2(f_{d2}) = -0.14$ ,  $n_2(f_{c2}) = 0.13$ . Ми бачимо, що заповнення резонатора середовищем II більше відповідає існуванню електромагнітних полів у наближенні показника заломлення матеріалу до нуля.

Подивимося на частотний склад та поведінку вимушених коливань у резонаторі з заповненням. Модова амплітуда сторонніх струмів визначена як  $j_n^e(t) = A_n \sin \Omega_n t$ , де значення  $\Omega_n$  будемо визначати як відповідно резонансній частоті  $f_d$ , так і резонансній частоті  $f_c$ . На Рис. 4 представлені спектри електричної модової амплітуди  $e_n(t)$  у резонаторі, що заповнений середовищем I. Крива 1 відповідає значенню кругової частоти збудження  $\Omega_n = 2\pi f_{c1}$ , крива 2 відповідає значенню кругової частоти збудження  $\Omega_n = 2\pi f_{d1}$ . Рис. 5 містить аналогічні спектри електричної модової амплітуди  $e_n(t)$  у резонаторі, що заповнений середовищем II (крива 1 –  $\Omega_n = 2\pi f_{c2}$ , крива 2 –  $\Omega_n = 2\pi f_{d2}$ ).

Можна показати, що зі збільшенням плазмової частоти середовища, спектральний внесок частот  $f_c$  та  $f_d$  змінюється. Для середовища II, коли частота модової амплітуди сторонніх струмів  $\Omega_n = 2\pi f_{c2}$ , внесок частотної складової  $f_{d2}$  більший ніж для середовища I. При збудженні коливань на частоті  $f_d$ , навпаки, частотна складова  $f_c$  зменшується з ростом плазмової частоти середовища. І хоча коефіцієнт втрат для частоти  $f_{d2}$  все ще залишається трохи більшим ніж для частоти  $f_{c2}$ , амплітуда частотних складових з ростом плазмової частоти середовища практично вирівнюється. Це взаємопов'язано також з тим, що ненавантажена добротність резонатора на частоті  $f_c$  зменшується з ростом плазмової частоти середовища, а ненавантажена добротність резонатора на частоті  $f_d$ , навпаки, збільшується, Рис. 3.

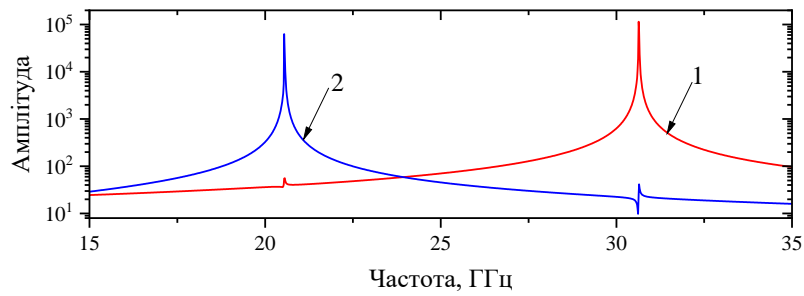


Рис. 4. Спектри модової амплітуди  $e_n(t)$ , коли резонатор заповнений середовищем I  
 Fig. 4. The spectrums of the mode amplitude  $e_n(t)$ , when cavity resonator is filled with the medium I

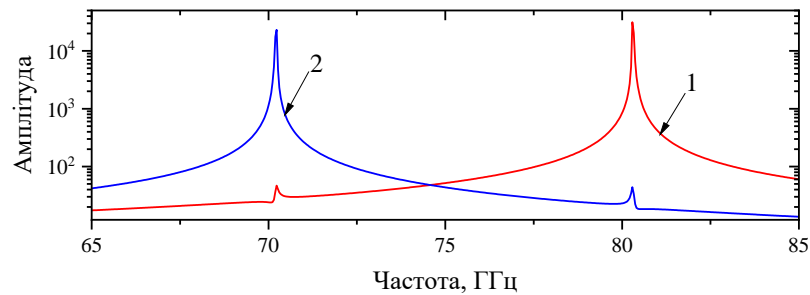


Рис. 5. Спектри модової амплітуди  $e_n(t)$ , коли резонатор заповнений середовищем II  
 Fig. 5. The spectrums of the mode amplitude  $e_n(t)$ , when cavity resonator is filled with the medium II

На Рис. 6 наведено огинаючі модової амплітуди  $e_n(t)$  для середовища I (крива 1 –  $\Omega_n = 2\pi f_{c1}$ , крива 2 –  $\Omega_n = 2\pi f_{d1}$ ) та середовища II (крива 3 –  $\Omega_n = 2\pi f_{c2}$ , крива 4 –  $\Omega_n = 2\pi f_{d2}$ ). Огинаючі розраховувалися за допомогою побудування аналітичного сигналу для модової амплітуди. Самі часові залежності модових амплітуд наведено на Рис. 7.

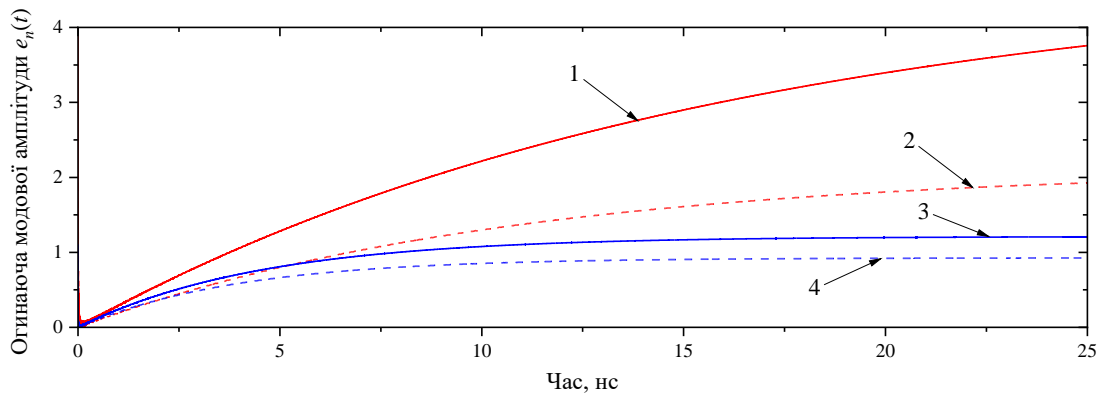


Рис. 6. Огинаючі модової амплітуди  $e_n(t)$   
 Fig. 6. The envelope of the mode amplitude  $e_n(t)$



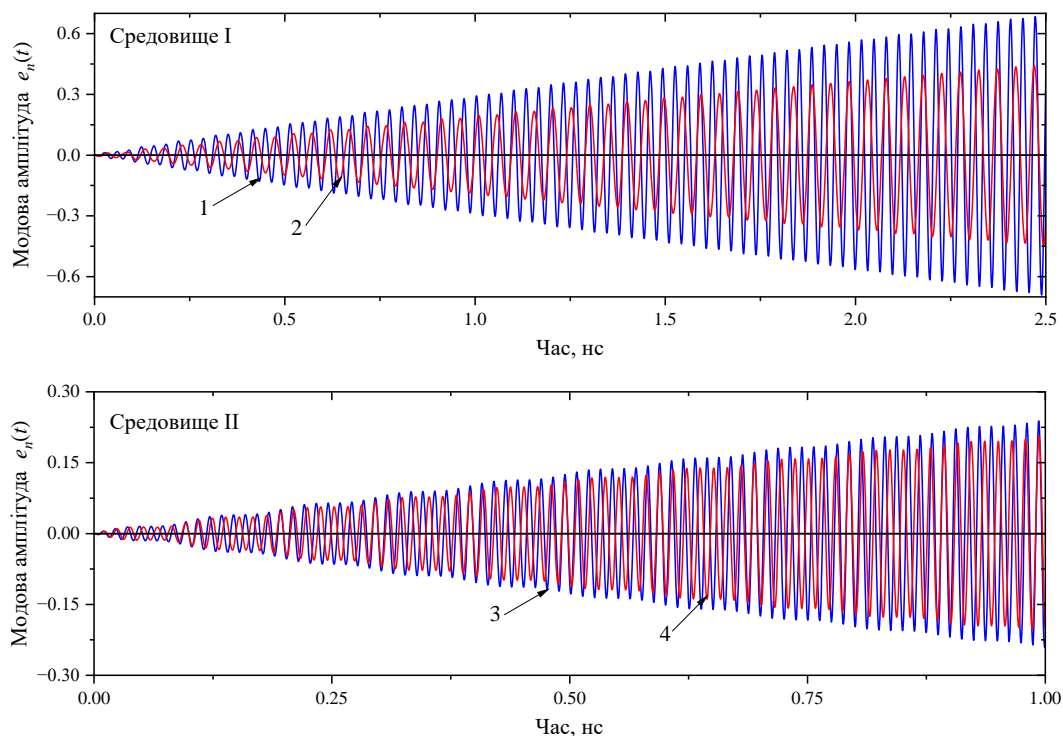


Рис. 6. Часові залежності модових амплітуд  $e_n(t)$   
 Fig. 6. Time dependence of the mode amplitudes  $e_n(t)$

### ВИСНОВКИ

У роботі теоретично розглянуто поведінку вимушених електромагнітних полів та їх основні характеристики в резонаторі, що заповнено штучним матеріалом, показник заломлення якого близький до нуля. Завдяки незвичайним властивостям штучного матеріалу, резонатор з таким заповненням набуває нових властивостей. У випадку збудження у резонаторі однієї просторової моди, ми можемо отримати коливання електромагнітного поля на двох різних частотах, практично рівноправних за власною добротністю резонатора, які, завдяки заповненню, значно вище ніж частота пустого резонатора. Таким чином, у роботі теоретично показано можливість розширити робочі частотні характеристики об'ємних резонаторів за рахунок специфічного заповнення, значно підвищити робочу частоту мікрохвильового резонатора. Незважаючи на початкові припущення про однорідність та ізотропність середовища у теоретичному дослідженні, і той факт, що втілення моделі середовища [25], яка бралася за основу для цього розглядання, не зовсім відповідає цим умовам, дослідження властивостей характеристик таких резонаторів і поведінки полів в них є досить цікавою і перспективною у напрямку розробки нових матеріалів та пристроїв і отримання нових ефектів.

### ПОДЯКА

М. С. Антюфеева висловлює вдячність Британській Академії та CARA (Council for At-Risk Academics) за підтримку у рамках стипендіальної програми Researcher-at-Risk. Також Марія Антюфеева висловлює подяку Віктору Пачеко-Пеña з університету Ньюкасла, Великобританія, за плідне обговорення окремих питань метаматеріалів із близьким до нуля показником заломлення.

Dr Antyufeyeva expresses her gratitude to the British Academy and CARA (Council for At-Risk Academics) for Researcher-at-Risk Fellowship program support. Also, Mariya Antyufeyeva expresses her appreciation to Victor Pacheco-Peña, Newcastle University, UK, for the fruitful discussion of certain issues of near-zero refractive index metamaterials.

### КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

### REFERENCES

1. Engheta N, Ziolkowski RW. Metamaterials. John Wiley & Sons; 2006. DOI: 10.1002/0471784192

2. Pendry JB. Controlling Electromagnetic Fields. Science [Internet]. 2006 Jun 23;312(5781):1780–2. Available from: <http://courses.washington.edu/phys322/Pendry.pdf>
3. Liberal I, Engheta N. Near-zero refractive index photonics. Nature Photonics [Internet]. 2017 Mar [cited 2019 Dec 11];11(3):149–58. Available from: <https://www.nature.com/articles/nphoton.2017.13>
4. Navarro-Cía M, Beruete M, Campillo I, Sorolla M. Enhanced lens by  $\epsilon$  and  $\mu$  near-zero metamaterial boosted by extraordinary optical transmission. Physical Review B. 2011 Mar 7;83(11). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.83.115112>
5. Pacheco-Peña V, Orazbayev B, Beaskoetxea U, Beruete M, Navarro-Cía M. Zoned near-zero refractive index fishnet lens antenna: Steering millimeter waves. Journal of Applied Physics. 2014 Mar 28;115(12):124902. <https://doi.org/10.1063/1.4869436>
6. Pacheco-Peña V, Torres V, Beruete M, Navarro-Cía M, Engheta N.  $\epsilon$ -near-zero (ENZ) graded index quasi-optical devices: steering and splitting millimeter waves. Journal of Optics. 2014 Sep 1;16(9):094009. DOI: 10.1088/2040-8978/16/9/094009
7. Silveirinha MG, Engheta N. Theory of supercoupling, squeezing wave energy, and field confinement in narrow channels and tight bends using  $\epsilon$  near-zero metamaterials. Physical Review B. 2007 Dec 10;76(24). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.76.245109>
8. Demetriadou A, Hao Y. A Grounded Slim Luneburg Lens Antenna Based on Transformation Electromagnetics. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. 2011 Jan 1;10:1590–3. <https://doi.org/10.1109/LAWP.2011.2180884>
9. Nishant Shankhwar, Ravindra Kumar Sinha. Zero Index Metamaterials. Springer eBooks. 2021. <https://doi.org/10.1007/978-981-16-0189-7>
10. Reshef O, De Leon I, Alam MZ, Boyd RW. Nonlinear optical effects in epsilon-near-zero media. Nature Reviews Materials [Internet]. 2019 Aug 1 [cited 2023 Feb 12];4(8):535–51. Available from: <https://www.nature.com/articles/s41578-019-0120-5> <https://doi.org/10.1038/s41578-019-0120-5>
11. Khurgin JB, Clerici M, Kinsey N. Fast and Slow Nonlinearities in Epsilon-Near-Zero Materials. Laser & Photonics Reviews. 2020 Dec 28;15(2):2000291. <https://doi.org/10.1002/lpor.202000291>
12. So J, Yuan G, Cesare Soci, Zheludev NI. Enhancement of luminescence of quantum emitters in epsilon-near-zero waveguides. Applied Physics Letters. 2020 Nov 2;117(18). <https://doi.org/10.1063/5.0018488>
13. Mahmoud AM, Engheta N. Wave-matter interactions in epsilon-and-mu-near-zero structures. Nature Communications [Internet]. 2014 Dec [cited 2019 Dec 11];5(1). Available from: <https://www.nature.com/articles/ncomms6638>. <https://doi.org/10.1038/ncomms6638>
14. Liberal I, Nader Engheta. Nonradiating and radiating modes excited by quantum emitters in open epsilon-near-zero cavities. Science Advances. 2016 Oct 7;2(10). <https://doi.org/10.1126/sciadv.1600987>
15. Liberal I, Mahmoud AN, Li Y, Edwards BJ, Engheta N. Photonic doping of epsilon-near-zero media. 2017 Mar 10;355(6329):1058–62. <https://doi.org/10.1126/science.aal2672>
16. Liberal I, Michaël Lobet, Li Y, Engheta N. Near-zero-index media as electromagnetic ideal fluids. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2020 Sep 10;117(39):24050–4. <https://doi.org/10.1073/pnas.2008143117>
17. Averkov YO, Prokopenko YV, Yakovenko VM. Interaction between a tubular beam of charged particles and a dispersive metamaterial of cylindrical configuration. Physical review. 2017 Jul 10;96(1). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.013205>
18. Michaël Lobet, Kinsey N, Liberal I, Hümeýra Çağlayan, Huidobro PA, Emanuele Galiffi, et al. New Horizons in Near-Zero Refractive Index Photonics and Hyperbolic Metamaterials. ACS Photonics. 2023 Oct 22. <https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.3c00747>
19. Tretyakov OA. Essentials of nonstationary and nonlinear electromagnetic field theory. In: Hashimoto M, Idemen M, Tretyakov OA, editors. Analytical and numerical methods in the Electromagnetic Wave Theory. Tokyo: Science House Co., Ltd., ; 1993. p. 123–46
20. Aksoy S, Antyufeyeva M, Basaran E, Ergin AA, Tretyakov OA. Time-domain cavity oscillations supported by a temporally dispersive dielectric. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2005 Aug;53(8):2465–71. <https://doi.org/10.1109/TMTT.2005.852784>
21. Antyufeyeva MS. Cavity with dispersive medium that refractive index is positive and negative. Microwave Radar and Remote Sensing Symposium. 2011 Aug 1: 73–76 <https://doi.org/10.1109/MRRS.2011.6053604>
22. Silveirinha M, Engheta N. Tunneling of Electromagnetic Energy through Subwavelength Channels and Bends using  $\epsilon$ -Near-Zero Materials. Physical Review Letters. 2006 Oct 10;97(15). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.157403>
23. Marcos J, Silveirinha MG, Nader Engheta.  $\mu$ -near-zero supercoupling. Physical Review B. 2015 May 11;91(19). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.91.195112>
24. Vulis DI, Reshef O, Camayd-Muñoz P, Mazur E. Manipulating the flow of light using Dirac-cone zero-index metamaterials. Reports on Progress in Physics. 2018 Nov 5;82(1):012001. DOI: 10.1088/1361-6633/aad3e5

25. Wang LG, Wang ZG, Zhang JX, Zhu SY. Realization of Dirac point with double cones in optics. *Optics Letters*. 2009 May 5;34(10):1510. <https://doi.org/10.1364/OL.34.001510>
26. Michaël Lobet, Liberal I, Vertchenko L, Lavrinenko AV, Nader Engheta, Mazur E. Momentum considerations inside near-zero index materials. *Light-Science & Applications*. 2022 Apr 25;11(1). <https://doi.org/10.1038/s41377-022-00790-z>
27. Antyufeyeva MS, A. Yu. Butrym, Tretyakov OA. Transient electromagnetic fields in a cavity with dispersive double negative medium. *Progress in Electromagnetics Research M*. 2009 Jan 1;8:51–65. <http://dx.doi.org/10.2528/PIERM09062307>
28. Hayashi S. *Surges on Transmission Systems*. 1955.

Стаття надійшла до редакції: 22 вересня 2023 р.

Рекомендовано до друку: 24 жовтня 2023 р.

## FEATURES OF EXCITED FIELDS IN A CAVITY RESONATOR FILLED WITH A NEAR-ZERO REFRACTIVE INDEX MEDIUM

M. S. Antyufeyeva<sup>1,2</sup>, M. O. Antyufeyev<sup>1</sup>, D. O. Batrakov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*V. N. Karazin Kharkiv National University, 4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, Ukraine*

<sup>2</sup>*School of Mathematics, Statistics and Physics, Newcastle University, Newcastle upon Tyne, Herschel Building, King's Gate, NE1 7RU, United Kingdom*

**Background.** Modern artificial media are capable of providing specially pointed electromagnetic parameters, such as a negative refractive index, or a near-zero refractive index. These properties are widely used in optics and photonics in the latest developments, as well as for microwave range elements and devices. For example, such media give the opportunity to supercouple waveguides with highly mismatched cross sections. The use of a filling medium with a near-zero refractive index can significantly affect resonant frequencies of cavity resonator and expand the operating ranges of microwave resonators.

**Objectives.** The aim of the work is a theoretical study of the influence of the parameters of a dispersion medium with a near-zero refractive index on the resonance frequencies of a microwave cavity resonator filled with such a medium, and on the characteristics of forced oscillations in a cavity resonator.

**Materials and methods.** The problem of forced electromagnetic fields in a cavity resonator with perfectly conducting walls, filled with a homogeneous isotropic medium with a dispersion, due to which its refractive index is close to zero in a certain frequency range, is solved using an Evolutionary Approach to Electromagnetics in the Time Domain. This approach allows the separation of temporal and spatial parts of the problem, which significantly facilitates the solution and provides obtaining analytical-numerical solutions in the case of filling the resonator with an arbitrary homogeneous medium with dispersion. We used a medium model previously proposed in the literature, the refractive index of which is close to zero in a certain frequency range, and one of the main considered issues of the work is how the properties of the medium affect the characteristics of a microwave cavity resonator and forced electromagnetic fields.

**Results.** Analytical-numerical solutions of evolutionary equations for a specific medium with a refractive index close to zero in a certain frequency range were obtained in the work. The characteristics of the filled resonator were obtained, and the influence of the medium parameters on the resonant frequencies of the filled resonator and the spectral composition of forced oscillations was observed.

**Conclusion.** The paper theoretically shows the possibility to expand the frequency characteristics and operating modes of cavity resonators due to specific filling, to significantly increase the operating frequency of the microwave resonator.

**KEY WORDS:** microwave cavity resonator, metamaterial, Evolutionary Approach to Electromagnetics in the Time Domain, dispersive medium, near-zero refractive index

The article was received by the editors: September 22 2023.

The article is recommended for printing: October 24 2023