Оригінальна стаття
https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-37-07
УДК 537.811, 537.621

Д. І. ГАВРИЛЕНКО, студент.
e-mail: m380669254126@gmail.com ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-6498-887X
О. М. ДУМІН, д. ф.-м. наук, доц.
e-mail: dumin@karazin.ua ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-5067-9689
О. А. ПРИЩЕНКО, аспірант.
e-mail: pryshchenko@karazin.ua ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-7143-9545
[1] *Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків, м. Свободи,4*

АНАЛІТИЧНА ФОРМА РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ НА ГРАНИЦІ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

Актуальність. Використання нестаціонарних електромагнітних хвиль для задач зондування є перспективним через велику інформаційну ємність цих полів та здатність глибоко проникати у середовище із втратами. Практичним застосуванням цих можливостей є імпульсний надширокосмуговий георадар. Вдосконалення його параметрів для широкого використання потребує не тільки точного розв'язання відповідних електродинамічних задач, що зараз забезпечується використанням прямих числових методів розрахунку, але й аналітичних розв'язків, які дозволяють отримувати більш загальну інформацію про фізичні процеси перетворення електромагнітних хвиль. Ця інформація буде більш корисною у випадку одержання розв'язків у часовому просторі. Тому отримання аналітичного розв'язку хоча б для найпростіших моделей, однією з яких є плаский випромінювач з круглою апертурою, є досить актуальним, чому і присвячена дана стаття.

Мета роботи. Аналітично розв'язати нестаціонарну електродинамічну задачу проникнення імпульсної електромагнітної хвилі із одного середовища в інше середовище без втрат. Для досягнення цієї мети з використанням граничних умов необхідно знайти невідомі коефіцієнти із загальних розв'язків рівнянь Клейна-Гордона, що є множниками в еволюційних коефіцієнтах. Також треба дослідити випадки повного проходження та відбиття, за допомогою яких стане можливим уточнити отримані співвідношення.

Матеріали та методи. Задача поширення нестаціонарної імпульсної хвилі розв'язується методом еволюційних рівнянь. Загальний розв'язок рівнянь Клейна-Гордона отримується методом розділення змінних. Розв'язання неоднорідного рівняння Клейна-Гордона здійснюється методом функції Рімана. Пошук зв'язку між невідомими коефіцієнтами з розв'язаних рівнянь відбуватиметься з використанням граничних умов для тангенційних компонентів полів згідно законів класичної електродинаміки.

Результати. З використанням граничних умов класичної електродинаміки знайдено зв'язок між невідомими коефіцієнтами з рівнянь Клейна-Гордона, що описують різні стадії поширення хвиль. Запропонований загальний вигляд шуканого розв'язку, що подібний до формул Френеля. Розв'язок досліджено для крайніх випадків поширення хвиль: повне проходження та відбиття. На основі цих випадків зроблено висновок про загальний випадок розповсюдження хвилі.

Висновки. Еволюційні коефіцієнти, що характеризують електричну та магнітну компоненти поля, були зв'язані між собою умовами на границі середовищ, що дозволило знайти зв'язок між невідомими коефіцієнтами рівнянь Клейна-Гордона. Запропонований загальний розв'язок перевірено шляхом його підстановки до основних формул, що характеризують граничні умови. Для магнітної компоненти досягнуто повне узгодження граничних умов, а електрична складова вимагає додаткового уточнення шляхом введення додаткової поверхневої хвилі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *нестаціонарне електромагнітне поле, надширокосмуговий георадар, еволюційні рівняння, часовий простір, формули Френеля*

Як цитувати: Гавриленко ДІ, Думін ОМ, Прищенко ОА. Аналітична форма розв'язку для нестаціонарного електромагнітного поля на границі двох середовищ. Вісник Харківського національного університету імені імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2022;37:86-97. https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-37-07

In cites: Havrylenko DI, Dumin OM, Prishchenko OA. Irradiation of media by transient field: analytical solving of the problem. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series “Radio Physics and Electronics”. 2022;37:86-97 (In Ukrainian) https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-37-07

ВСТУП

Електродинаміка у часовому просторі, у порівнянні з класичною, має переваги у дослідженні нестаціонарних процесів, поширенні імпульсних полів у середовище. Теоретичні дослідження у цій області важливі для подальшого практичного застосування. За приклад можна узяти дистанційне зондування, що стимулює створення надширокосмугових георадарів [1]. Зазвичай, задачі цього напрямку розв’язуються числовими методами. Найбільш відомим серед них є метод скінченних різниць у часовому просторі [2], [3]. Також можна виділити штучні нейронні мережі [4] та томографічний підхід [5]. Числові методи дають можливість досліджувати дифракцію електромагнітних хвиль у середовищі з різними типами неоднорідностей, докладно розглядаючи ефекти розсіювання радіохвиль [6].

Аналітичний підхід може дати нам більш загальну інформацію про фізичні процеси у середовищі, особливо, якщо розв’язується задача електродинаміки у часовому просторі. Такий метод менш розвинутий, ніж числовий. Проте для найпростіших моделей аналітичний розв’язок було знайдено [7]. У якості основи, функція Хевісайда є найзручнішим способом представлення імпульсних нестаціонарних полів. У роботі [8] поведінка різних типів падаючої та відбитої електричних компонент була докладно розглянута.

Крім задач, що пов’язані з випромінюванням у вільний простір, метод еволюційних рівнянь використовується для розв’язку хвилеводних задач [9], або резонаторних задач [10].

У представленій роботі ми розглянемо граничну задачу для диференціального рівняння у частинних похідних типу Клейна-Гордона для дослідження імпульсного поля на границі розділу двох середовищ, розробимо новий спосіб знаходження невідомих коефіцієнтів, що визначають компоненти відбитого та заломленого електромагнітного поля.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо електромагнітну TE-хвилю у вільному просторі, створену пласким джерелом нестаціонарного струму, який задається у циліндричній системі координат. Компоненти цього поля можна описати за допомогою методу еволюційних рівнянь, удосконаленого для вільного простору [7]:

$$\begin{cases} \vec{E}(\rho,\varphi,z,t) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} d\chi\, V_m^h [\nabla\psi_m \times \vec{z}_0]; \\ \vec{H}((\rho,\varphi,z,t)) = \dfrac{1}{\mu_0}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} d\chi\, I_m^h \nabla\psi_m; \\ E_z(\rho,\varphi,z,t) = 0; \\ H_z(\rho,\varphi,z,t) = \dfrac{1}{\mu_0}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} d\chi\, \chi^2 h_m^h \psi_m. \end{cases} \tag{1}$$

Тут $\varepsilon_0 \approx 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Ф}}{\text{м}}$, $\mu_0 \approx 1{,}25\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{А}}{\text{м}}$ – константи вільного простору; V_m^h, I_m^h – еволюційні коефіцієнти електричної та магнітної компонент відповідно; h_m^h – функція, що є розв’язком рівняння Клейна-Гордона [11] із заданими початковими та граничними умовами

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi^2\right) h_m^h(z,t) = \sqrt{\mu_0}\, j_m(z,t) \tag{2}$$

та пов’язана з еволюційними коефіцієнтами співвідношеннями

$$I_m^h = \frac{\partial h_m^h}{\partial z}; \quad V_m^h = -\frac{1}{c}\frac{\partial h_m^h}{\partial t}. \tag{3}$$

Функція ψ_m, що складається з функції Бесселя m-го порядку та комплексної експоненти, історично називається мембранною:

$$\psi_m(\rho,\varphi,\chi) = \frac{J_m(\chi\rho)}{\sqrt{\chi}} e^{im\varphi}.$$

Електромагнітне поле, що випромінюється антеною на поверхню середовища, ми позначатимемо верхнім індексом «*inc*» (з англ. *incident* – падаючий). Частина поля, що пройшла через границю двох середовищ позначатимемо як «*prop*» (з англ. *propagated* – той, що пройшов), а залишкову частину, що поширюється у протилежний бік від середовища позначатимемо як «*ref*» (з англ. *reflected* – відбитий). Щоб знайти ці компоненти поля, нам необхідно розв'язати одне неоднорідне (для падаючої хвилі) та два однорідних (для заломленої та відбитої хвиль) еволюційних рівняння [12]. Неоднорідне рівняння Клейна-Гордона розв'язується методом функції Рімана. Його розв'язки мають такий вигляд [7]:

$$\begin{cases} h_{m_i}^{inc}(\chi_i,z,t) = -A_0\frac{i\sqrt{\mu_0}R}{2}\left(\delta_{m_i,1}+\delta_{m_i,-1}\right)\frac{J_1(\chi_i R)}{\chi_i\sqrt{\chi_i}}\sum_{k_i=0}^{\infty}\left(\frac{ct-z}{ct+z}\right)^{\frac{2k_i+1}{2}} J_{1+2k_i}\left(\chi_i\sqrt{c^2t^2-z^2}\right); \\ I_{m_i}^{inc}(\chi_i,z,t) = A_0\frac{i\sqrt{\mu_0}R}{4}\left(\delta_{m_i,1}+\delta_{m_i,-1}\right)\frac{J_1(\chi_i R)}{\sqrt{\chi_i}}\cdot \\ \cdot\sum_{k_i=0}^{\infty}\left(\left(\frac{ct-z}{ct+z}\right)^{k_i} J_{2k_i}\left(\chi_i\sqrt{c^2t^2-z^2}\right) + \left(\frac{ct-z}{ct+z}\right)^{k_i+1} J_{2+2k_i}\left(\chi_i\sqrt{c^2t^2-z^2}\right)\right); \\ V_{m_i}^{inc}(\chi_i,z,t) = A_0\frac{i\sqrt{\mu_0}R}{4}\left(\delta_{m_i,1}+\delta_{m_i,-1}\right)\frac{J_1(\chi_i R)J_0\left(\chi_i\sqrt{c^2t^2-z^2}\right)}{\sqrt{\chi_i}}. \end{cases} \tag{4}$$

Відбита хвиля описується загальним розв'язком, отриманим методом розділення змінних у спеціальній системі координат (різновид заміни змінних) для рівняння Клейна-Гордона, дослідженого математичними методами теорії груп [11]:

$$\begin{cases} h_{m_r}^{ref}(\chi_r,z,t,\varepsilon) = \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m_r,ref}(\chi_r,\varepsilon)\left(\frac{ct+z}{ct-z}\right)^{\frac{k_r}{2}} J_{k_r}\left(\chi_r\sqrt{c^2t^2-z^2}\right); \\ I_{m_r}^{ref}(\chi_r,z,t,\varepsilon) = \frac{\chi_r}{2}\sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m_r,ref}(\chi_r,\varepsilon)\cdot \\ \cdot\left(\left(\frac{ct+z}{ct-z}\right)^{\frac{k_r+1}{2}} J_{k_r+1}\left(\chi_r\sqrt{c^2t^2-z^2}\right) + \left(\frac{ct+z}{ct-z}\right)^{\frac{k_r-1}{2}} J_{k_r-1}\left(\chi_r\sqrt{c^2t^2-z^2}\right)\right); \\ V_{m_r}^{ref}(\chi_r,z,t,\varepsilon) = \frac{\chi_r}{2}\sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m_r,ref}(\chi_r,\varepsilon)\cdot \\ \left(\left(\frac{ct+z}{ct-z}\right)^{\frac{k_r+1}{2}} J_{k_r+1}\left(\chi_r\sqrt{c^2t^2-z^2}\right) - \left(\frac{ct+z}{ct-z}\right)^{\frac{k_r-1}{2}} J_{k_r-1}\left(\chi_r\sqrt{c^2t^2-z^2}\right)\right). \end{cases} \tag{5}$$

Загальний вигляд компонент заломленої хвилі отримано, користуючись таким самим методом. Різниця полягає тільки у наявності середовища, що зумовлює зменшення швидкості поширення хвилі, та зміні знаку, у порівнянні з попередніми виразами (5), що показує зміну напрямку вектора Умова-Пойнтінга:

$$\begin{cases} h_{m_p}^{prop}(\chi_p, z, t, \varepsilon) = \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{m_p,prop}(\chi_p, \varepsilon)\left(\frac{vt-z}{vt+z}\right)^{\frac{k_p}{2}} J_{k_p}\left(\chi_p\sqrt{v^2t^2-z^2}\right); \\ I_{m_p}^{prop}(\chi_p, z, t, \varepsilon) = -\frac{\chi_p}{2}\sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{m_p,prop}(\chi_p, \varepsilon)\cdot \\ \cdot\left(\left(\frac{vt-z}{vt+z}\right)^{\frac{k_p+1}{2}} J_{k_p+1}\left(\chi_p\sqrt{v^2t^2-z^2}\right) + \left(\frac{vt-z}{vt+z}\right)^{\frac{k_p-1}{2}} J_{k_p-1}\left(\chi_p\sqrt{v^2t^2-z^2}\right)\right); \\ V_{m_p}^{prop}(\chi_p, z, t, \varepsilon) = \frac{\chi_p}{2}\sum_{k_p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} B_{k_p}^{m_p,prop}(\chi_p, \varepsilon)\cdot \\ \left(\left(\frac{vt-z}{vt+z}\right)^{\frac{k_p+1}{2}} J_{k_p+1}\left(\chi_p\sqrt{v^2t^2-z^2}\right) - \left(\frac{vt-z}{vt+z}\right)^{\frac{k_p-1}{2}} J_{k_p-1}\left(\chi_p\sqrt{v^2t^2-z^2}\right)\right). \end{cases} \tag{6}$$

У розв'язках (5), (6) функції $B_{k_r}^{m_r,ref}(\chi_r, \varepsilon)$, $B_{k_p}^{m_p,prop}(\chi_p, \varepsilon)$ – невідомі коефіцієнти, які можна знайти, застосувавши граничні умови класичної електродинаміки. Будемо задавати аналітично вигляд цих функцій та розглянемо граничні випадки і перевіримо їх у шуканому загальному розв'язку.

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

У якості граничних умов візьмемо рівність між собою тангенційних компонент електричного і магнітного полів на границі розділу середовищ:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{inc}(\rho, \varphi, t)\big|_{z=0} + \vec{E}^{ref}(\rho, \varphi, t)\big|_{z=0} &= \vec{E}^{prop}(\rho, \varphi, t)\big|_{z=0}; \\ \vec{H}^{inc}(\rho, \varphi, t)\big|_{z=0} + \vec{H}^{ref}(\rho, \varphi, t)\big|_{z=0} &= \vec{H}^{prop}(\rho, \varphi, t)\big|_{z=0}. \end{aligned} \tag{7}$$

Користуючись ортогональними перетвореннями [12], [13] отримуємо співвідношення між еволюційними коефіцієнтами електричної та магнітної компонент на поверхні середовища:

$$\begin{aligned} V_n^{inc}(\chi, t)\big|_{z=0} + V_n^{ref}(\chi, t, \varepsilon)\big|_{z=0} &= V_n^{prop}(\chi, t, \varepsilon)\big|_{z=0}; \\ I_n^{inc}(\chi, t)\big|_{z=0} + I_n^{ref}(\chi, t, \varepsilon)\big|_{z=0} &= I_n^{prop}(\chi, t, \varepsilon)\big|_{z=0}. \end{aligned} \tag{8}$$

Еволюційні коефіцієнти для електричної компоненти поля на границі двох середовищ

$$\begin{aligned} V_n^{inc}(\chi, t)\big|_{z=0} &= \frac{\chi}{2} B^{n,inc}(\chi) J_0(\chi ct); \\ V_n^{ref}(\chi, t, \varepsilon)\big|_{z=0} &= \frac{\chi}{2}\sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{n,ref}(\chi, \varepsilon)\left(J_{k_r+1}(\chi ct) - J_{k_r-1}(\chi ct)\right); \\ V_n^{prop}(\chi, t, \varepsilon)\big|_{z=0} &= \frac{\chi}{2}\sum_{k_p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} B_{k_p}^{n,prop}(\chi, \varepsilon)\left(J_{k_p+1}(\chi vt) - J_{k_p-1}(\chi vt)\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Для магнітної компоненти ми можемо записати, що

$$I_n^{inc}(\chi,t)\big|_{z=0}=\frac{\chi}{2}A^{n,inc}(\chi)\sum_{k_i=0}^{\infty}\left(J_{2k_i}(\chi ct)+J_{2+2k_i}(\chi ct)\right);$$
$$I_n^{ref}(\chi,t,\varepsilon)\big|_{z=0}=\frac{\chi}{2}\sum_{k_r=-\infty}^{\infty}B_{k_r}^{n,ref}(\chi,\varepsilon)\left(J_{k_r+1}(\chi ct)+J_{k_r-1}(\chi ct)\right);\tag{10}$$
$$I_n^{prop}(\chi,t,\varepsilon)\big|_{z=0}=-\frac{\chi}{2}\sum_{k_p=-\infty}^{\infty}B_{k_p}^{n,prop}(\chi,\varepsilon)\left(J_{k_p+1}(\chi vt)+J_{k_p-1}(\chi vt)\right).$$

Тут ми позначили

$$B^{n,inc}(\chi)=A^{n,inc}(\chi)=A_0\frac{i\sqrt{\mu_0}R}{2}\frac{J_1(\chi R)}{\chi\sqrt{\chi}}\left(\delta_{n,1}+\delta_{n,-1}\right).\tag{11}$$

Хоча коефіцієнти $B^{n,inc}$, $A^{n,inc}$ і дорівнюють одному й тому самому виразу, вони мають різну роль у цій задачі. Значення $B^{n,inc}$ є амплітудами еволюційного коефіцієнта електричної компоненти при різних n та пов'язують невідомі коефіцієнти з диференціальних рівнянь Клейна-Гордона для відбитої та заломленої хвиль. Множник $A^{n,inc}$ є амплітудними значеннями еволюційного коефіцієнта магнітної компоненти та показує, що, в іншому випадку, вони можуть відрізнятися від амплітуд $B^{n,inc}$.

Підставимо функції (9) до першого співвідношення з (8):

$$B^{n,inc}(\chi)J_0(\chi ct)+\sum_{k_r=-\infty}^{\infty}B_{k_r}^{n,ref}(\chi,\varepsilon)\left(J_{k_r+1}(\chi ct)-J_{k_r-1}(\chi ct)\right)=$$
$$=\sum_{k_p=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}B_{k_p}^{n,prop}(\chi,\varepsilon)\left(J_{k_p+1}(\chi vt)-J_{k_p-1}(\chi vt)\right)$$

Через те, що в лівій частині присутні функції Бесселя з аргументом χct, а в правій – ті ж самі циліндричні функції, але з χvt у дужках, то звідси знайти зв'язок між невідомими коефіцієнтами виявляється неможливим. Якщо підставити вирази (10) до другого співвідношення з (8), то отримаємо, що

$$A^{n,inc}(\chi)\sum_{k_i=0}^{\infty}\left(J_{2k_i}(\chi ct)+J_{2+2k_i}(\chi ct)\right)+\sum_{k_r=1}^{\infty}B_{k_r}^{n,ref}(\chi,\varepsilon)\left(J_{k_r+1}(\chi ct)+J_{k_r-1}(\chi ct)\right)=$$
$$=-\sum_{k_p=-\infty}^{\infty}B_{k_p}^{n,prop}(\chi,\varepsilon)\left(J_{k_p+1}(\chi vt)+J_{k_p-1}(\chi vt)\right).$$

У першому наближенні, отриманий вираз так само складний як і попередній: ліва частина містить функції Бесселя з аргументом χct, а ліва – відповідно χvt, які не вдається пов'язати між собою. З іншого боку, для суми функцій Бесселя існує формула з довідника [14], яка дозволяє нам продовжити аналіз отриманого співвідношення на поверхні середовища:

$$\sum_{k_i=0}^{\infty}\left(J_{2k_i}(\tau)+J_{2+2k_i}(\tau)\right)=J_0(\tau)+2\sum_{k_i=0}^{\infty}J_{2+2k_i}(\tau)=1.\tag{12}$$

Це означає, що немає різниці, який аргумент буде у функції Бесселя: χct чи χvt. В обох випадках сума дорівнюватиме одиниці.

Фізично, можна представити коефіцієнт-амплітуду $A^{n,inc}$ у вигляді суми двох частин, одна з яких іде на відбиття хвилі, а інша – на проходження у середовище із заданою діелектричною проникністю ε:

$$A^{n,inc}(\chi)=A^{n,inc(r)}(\chi,\varepsilon)+A^{n,inc(p)}(\chi,\varepsilon).\tag{13}$$

Тоді, враховуючи, що амплітуда $A^{n,inc}$ множилася на суму, що дорівнює одиниці, то частину, що піде на відбиття, можна помножити на суму функцій Бесселя з аргументом χct, а залишок, пов'язаний з проходженням – на ту ж саму суму, тільки з аргументом χvt. Остаточно, виходить:

$$A^{n,inc(r)}(\chi,\varepsilon)\sum_{k_i=0}^{\infty}\left(J_{2k_i}(\chi ct)+J_{2+2k_i}(\chi ct)\right)+A^{n,inc(p)}(\chi,\varepsilon)\sum_{k_i=0}^{\infty}\left(J_{2k_i}(\chi vt)+J_{2+2k_i}(\chi vt)\right)+$$

$$+\sum_{k_r=1}^{\infty}B_{k_r}^{n,ref}(\chi,\varepsilon)\left(J_{k_r+1}(\chi ct)+J_{k_r-1}(\chi ct)\right)=-\sum_{k_p=-\infty}^{\infty}B_{k_p}^{n,prop}(\chi,\varepsilon)\left(J_{k_p+1}(\chi vt)+J_{k_p-1}(\chi vt)\right).$$

На цьому місці ми можемо побачити зв'язок між парою коефіцієнтів $A^{n,inc(r)}$, $B_{k_r}^{n,ref}$, тому що множники поруч з ними містять функції Бесселя одного аргументу. Такий же підхід справедливий для пари амплітуд $A^{n,inc(p)}$, $B_{k_p}^{n,prop}$. Давайте представимо коефіцієнти $A^{n,inc(r)}$, $A^{n,inc(p)}$ у такій формі:

$$A^{n,inc(r)}(\chi,\varepsilon)=\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi);\quad A^{n,inc(p)}(\chi,\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi). \tag{14}$$

Цей вибір задовольняє формулу (13). Проаналізуємо два граничних випадки для виразів (14).
Випадок 1. $\varepsilon=1$ – ***повне проходження***

Згідно до фізичного сенсу, якщо електромагнітне поле повністю проникає в інше середовище з діелектричною проникністю ε, коефіцієнти, що відповідають за відбиття, мають дорівнювати нулю, а саме

$$A^{n,inc(r)}(\chi,1)=0;\quad B_{k_r}^{n,ref}(\chi,1)=0. \tag{15}$$

Це означає, що

$$\begin{gathered}V_n^{ref}(\chi,t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=1}=0; \qquad\qquad I_n^{ref}(\chi,t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=1}=0;\\ V_n^{inc}(\chi,t)\big|_{\varepsilon=1}=V_n^{prop}(\chi,t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=1};\quad I_n^{inc}(\chi,t)\big|_{\varepsilon=1}=I_n^{prop}(\chi,t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=1}.\end{gathered} \tag{16}$$

Гранична умова для **магнітної компоненти** набуває такого вигляду:

$$A^{n,inc(p)}(\chi,\varepsilon)\sum_{k_i=0}^{\infty}\left(J_{2k_i}(\chi vt)+J_{2+2k_i}(\chi vt)\right)\Bigg|_{\varepsilon=1}=-\sum_{k_p=1}^{\infty}B_{k_p}^{n,prop}(\chi,\varepsilon)\left(J_{k_p+1}(\chi vt)+J_{k_p-1}(\chi vt)\right)\Bigg|_{\varepsilon=1}$$

У лівій частині суму функцій Бесселя парних порядків можна спростити, застосувавши (12). Скориставшись граничним випадком, отримуємо $v=c$ і

$$A^{n,inc(p)}(\chi,1)=-\sum_{k_p=1}^{\infty}B_{k_p}^{n,prop}(\chi,1)\left(J_{k_p+1}(\chi ct)+J_{k_p-1}(\chi ct)\right). \tag{17}$$

Існують два варіанти розв'язку, які можуть задовольнити рівняння (17).

Варіант 1

$$B_{k_p<1}^{n,prop}(\chi,1)=0,\quad B_{2k_p}^{n,prop}(\chi,1)=0. \tag{18}$$

Тоді у виразі (17) залишаться лише додатні невідомі коефіцієнти непарних індексів:

$$A^{n,inc(p)}(\chi,1)=-\sum_{k_p=0}^{\infty}B_{2k_p+1}^{n,prop}(\chi,1)\left(J_{k_p+1}(\chi ct)+J_{k_p-1}(\chi ct)\right).$$

Враховуючи, що решта невідомих коефіцієнтів $B_{2k_p+1}^{n,prop}$ є однаковими, їх можна винести з-під символу сумування. Згідно (12), дійдемо до висновку, що

$$B_{2k_p+1}^{n,prop}(\chi,1) = -A^{n,inc(p)}(\chi,1) = -A^{n,inc}(\chi). \tag{19}$$

Варіант 2

$$B_{k_p<0}^{n,prop}(\chi,1) = -B_{k_p>0}^{n,prop}(\chi,1), \quad B_{2k_p}^{n,prop}(\chi,1) = 0. \tag{20}$$

Рівняння (17) можна розділити на дві нескінченні суми:

$$A^{n,inc(p)}(\chi,1) = -\sum_{k_p=1}^{\infty} B_{2k_p+1}^{n,prop}(\chi,1)\left(J_{2k_p+2}(\chi ct) + J_{2k_p}(\chi ct)\right) -$$
$$- \sum_{k_p=-\infty}^{-1} B_{2k_p+1}^{n,prop}(\chi,1)\left(J_{2k_p+2}(\chi ct) + J_{2k_p}(\chi ct)\right).$$

Відповідно до (12) обидва вирази в дужках дорівнюють одиниці. Отримуємо такі співвідношення між шуканими амплітудами:

$$B_{2k_p+1}^{n,prop}(\chi,1) = -\frac{1}{2}A^{n,inc(p)}(\chi,1) = -\frac{1}{2}A^{n,inc}(\chi);$$
$$B_{2k_p+1}^{n,prop}(\chi,1) = -A_0\frac{i\sqrt{\mu_0}R}{4}\frac{J_1(\chi R)}{\chi\sqrt{\chi}}\left(\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}\right). \tag{21}$$

Для **електричної компоненти** гранична умова (8), з урахуванням граничного випадку, набуває такого вигляду:

$$B^{n,inc}(\chi)J_0(\chi ct)\Big|_{\varepsilon=1} = \sum_{k_p=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}B_{k_p}^{n,prop}(\chi,\varepsilon)\left(J_{k_p+1}(\chi vt) - J_{k_p-1}(\chi vt)\right)\Bigg|_{\varepsilon=1}.$$

Якщо його застосувати, то виходить

$$B^{n,inc}(\chi)J_0(\chi ct) = \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{n,prop}(\chi,1)\left(J_{k_p+1}(\chi ct) - J_{k_p-1}(\chi ct)\right). \tag{22}$$

Перевіримо отримані варіанти розв'язків для інших граничних випадків.

Варіант 1

Відповідно до (18) виявляється, що

$$B^{n,inc}(\chi)J_0(\chi ct) = \sum_{k_p=0}^{\infty} B_{2k_p+1}^{n,prop}(\chi,1)\left(J_{2k_p+2}(\chi ct) - J_{2k_p}(\chi ct)\right).$$

Застосовуючи формулу для різниці функцій Бесселя [14]

$$\sum_{k_p=0}^{\infty}\left(J_{2k_p+2}(\chi ct) - J_{2k_p}(\chi ct)\right) = -J_0(\chi ct), \tag{23}$$

легко бачити, що

$$B_{2k_p+1}^{n,prop}(\chi,1) = -B^{n,inc}(\chi). \tag{24}$$

Варіант 2

Згідно з (20), ми можемо розділити (22) на дві нескінченні суми:

$$B^{n,inc}(\chi)J_0(\chi ct) = \sum_{k_p=0}^{\infty} B_{2k_p+1}^{n,prop}(\chi,1)\left(J_{2k_p+2}(\chi ct) - J_{2k_p}(\chi ct)\right) +$$
$$+ \sum_{k_p=-\infty}^{-1} B_{2k_p+1}^{n,prop}(\chi,1)\left(J_{2k_p+2}(\chi ct) - J_{2k_p}(\chi ct)\right)$$

Ці суми дорівнюють функції Бесселя нульового порядку. Вони скорочуються, і ми отримуємо такі співвідношення між коефіцієнтами-амплітудами:

$$B_{k_p}^{n,prop}(\chi,1) = -\frac{1}{2}B^{n,inc}(\chi). \tag{25}$$

Якщо порівняти результати першого варіанту (19) і (23), то робимо висновок, що вони не суперечать один одному, і їх можна аналізувати далі. У другому варіанті (22) і (25) дають різні знаки у співвідношеннях між коефіцієнтами, тому його відкидаємо.

Випадок 2. $\varepsilon \to \infty$ – ***повне відбиття***

Розглянемо випадок, що відповідає повному відбиттю падаючої хвилі, коли електромагнітне поле поширюється у протилежному, відносно падіння, напрямку. Граничні умови (8) можна переписати у такій формі:

$$\begin{gathered} V_n^{prop}(\chi,t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon\to\infty} = 0; \\ V_n^{inc}(\chi,t)\big|_{\varepsilon\to\infty} = -V_n^{ref}(\chi,t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon\to\infty}; \quad I_n^{inc}(\chi,t)\big|_{\varepsilon\to\infty} = I_n^{ref}(\chi,t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon\to\infty}. \end{gathered} \tag{26}$$

Еволюційний коефіцієнт заломленого електричного поля дорівнює нулю, тому що, коли діелектрична проникність наближається до нескінченності, то швидкість у середовищі наближається до нуля. В останньому співвідношенні відсутній знак " $-$ ", щоб задовольнити природню зміну напрямку поширення енергії.

Перепишемо вирази для еволюційних коефіцієнтів **електричної компоненти** у явному вигляді:

$$B^{n,inc}(\chi)J_0(\chi ct)\big|_{\varepsilon\to\infty} = -\sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{n,ref}(\chi,\varepsilon)\left(J_{k_r+1}(\chi ct) - J_{k_r-1}(\chi ct)\right)\Bigg|_{\varepsilon\to\infty}.$$

Далі, застосування граничної умови дає

$$B^{n,inc}(\chi)J_0(\chi ct) = -\sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{n,ref}(\chi,\varepsilon\to\infty)\left(J_{k_r+1}(\chi ct) - J_{k_r-1}(\chi ct)\right).$$

Згідно з (18) залишаться непарні коефіцієнти з додатними індексами. Враховуючи рівність значень шуканих функцій, що залишилися, бачимо, що нескінченна сума дасть функцію Бесселя нульового порядку (23), яку можна скоротити в обох частинах рівняння. Отже,

$$B_{2k_r+1}^{n,ref}(\chi,\varepsilon\to\infty) = B^{n,inc}(\chi). \tag{27}$$

Співвідношення між еволюційними коефіцієнтами **магнітної компоненти** матиме вигляд:

$$A^{n,inc}(\chi)\sum_{k_i=0}^{\infty}\left(J_{2k_i}(\chi ct) + J_{2+2k_i}(\chi ct)\right)\Bigg|_{\varepsilon\to\infty} = \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{n,ref}(\chi,\varepsilon)\left(J_{k_r+1}(\chi ct) + J_{k_r-1}(\chi ct)\right)\Bigg|_{\varepsilon\to\infty}$$

Зауважимо, що усі функції Бесселя, окрім нульового порядку, які мають нульовий аргумент, дорівнюють нулю. Циліндрична функція нульового порядку задовольняє умові [15]

$$J_0(0) = 1. \tag{28}$$

Комбінація (18) і (28) у граничній умові для непарних коефіцієнтів дасть

$$B_{2k_r+1}^{n,ref}(\chi,\varepsilon\to\infty)=A^{n,inc}(\chi). \tag{29}$$

Отже, гіпотетичний розв'язок (14) задовольняє обом граничним випадкам для **Варіанту 1**.

Випадок 3. 0 $<\varepsilon<\infty$ – ***загальний***

Розглянемо загальний випадок для діелектричної проникності середовища. Можна бачити, що для усіх граничних випадків справедливі отримані коефіцієнти

$$A^{n,inc(r)}(\chi,\varepsilon),A^{n,inc(p)}(\chi,\varepsilon),B_{k_r}^{n,ref}(\chi,\varepsilon),B_{k_p}^{n,prop}(\chi,\varepsilon),$$

якщо аналізувати **Варіант 1** шуканого розв'язку. Дивлячись на співвідношення (19), (29), можна побачити, що

$$\begin{gathered}B_{2k_r+1}^{n,ref}(\chi,\varepsilon)=A^{n,inc(r)}(\chi,\varepsilon);\\ B_{2k_p+1}^{n,prop}(\chi,\varepsilon)=-\sqrt{\varepsilon}A^{n,inc(p)}(\chi,\varepsilon),\end{gathered} \tag{30}$$

де коефіцієнти $A^{n,inc(r)}$, $A^{n,inc(p)}$ задані виразами (14).

Перевіримо їх на граничній умові для магнітного поля (8):

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi)\sum_{k_i=0}^{\infty}\left(J_{2k_i}(\chi ct)+J_{2+2k_i}(\chi ct)\right)+\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi)\sum_{k_i=0}^{\infty}\left(J_{2k_i}(\chi vt)+J_{2+2k_i}(\chi vt)\right)+$$
$$+\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi)\sum_{k_r=1}^{\infty}\left(J_{2k_r}(\chi ct)+J_{2k_r+2}(\chi ct)\right)=\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi)\sum_{k_p=-\infty}^{\infty}\left(J_{2k_p}(\chi vt)+J_{2k_p+2}(\chi vt)\right).$$

Скориставшись формулою для суми функцій Бесселя (12), виходить

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi)+\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi)+\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi)=\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi),$$

тобто остаточно ми отримали тотожність. Щодо граничної умови для електричного поля

$$A^{n,inc}(\chi)J_0(\chi ct)+\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi)\sum_{k_r=1}^{\infty}\left(J_{2k_r+2}(\chi ct)-J_{2k_r}(\chi ct)\right)=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi)\sum_{k_p=1}^{\infty}\left(J_{2k_p+2}(\chi vt)-J_{2k_p}(\chi vt)\right).$$

Застосувавши формулу для різниць циліндричних функцій (23), отримуємо

$$A^{n,inc}(\chi)J_0(\chi ct)-\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi)J_0(\chi ct)=\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi)J_0(\chi vt).$$

Спрощуючи ліву частину, дійдемо до висновку, що

$$\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi)J_0(\chi ct)=\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}+1}A^{n,inc}(\chi)J_0(\chi vt),$$

тобто множники рівні, але аргументи функцій Бесселя – різні. Отже, умову задачі необхідно уточнити.

ВИСНОВКИ

Аналітичний розв'язок для нестаціонарної електромагнітної хвилі на границі розділу двох середовищ було отримано методом еволюційних рівнянь. Знаходження полів було здійснено через розділення амплітуди падаючої хвилі на дві частини з коефіцієнтами, що залежать від матеріальних параметрів середовища. Отриманий розв'язок перевірено для двох граничних випадків поведінки електричного матеріального параметру. Розв'язок для довільних додатних значень діелектричної проникності задовольняє граничній умові для еволюційних коефіцієнтів магнітної компоненти поля. Можливо, гранична умова для електричного поля задовольнятиметься для довільних значень параметру середовища, якщо додатково розглянути поверхневу хвилю.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Taylor JD. Ultrawidebandradar: applications and design. Boca Raton, London, New York: CRC Press; 2012.
2. Taflove A, Hagness S, Computational Electrodynamics: The FiniteDifference Time-Domain Method, 3rd ed. Boston, London: Artech House; 2005.
3. Dumin O, Plakhtii V, Pryshchenko O, Shyrokorad D, Katrich VA. Ultrashort Impulse Radar for Detection and Classification of Objects in Layered Medium by Artificial Neural Network. Telecommunications and Radio Engineering. 2019:78(19):1759– 1770. https://doi.org/10.1615/telecomradeng.v78.i19.80.
4. Persanov I, Dumin O, Plakhtii V, Shyrokorad D. Subsurface Object Recognition in a Soil Using UWB Irradiation by Butterfly Antenna. 2019 XXIVth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). 2019 Sep;160-163. https://doi.org/10.1109/DIPED.2019.8882577.
5. Oleksandr Dumin, Vadym Plakhtii, Dmytro Shyrokorad, Oleksandr Prishchenko, Gennadiy Pochanin. UWB Subsurface Radiolocation for Object Location Classification by Artificial Neural Networks Based on Discrete Tomography Approach. 2019 Jul 1;, pp. 182-187, https://doi.org/10.1109/UKRCON.2019.8879827.
6. Blaunstein Nathan, Christodoulou Christos G. Electromagnetic Aspects of Wave Propagation over Terrain. 2014 Apr 18;81–116.https://doi.org/10.1002/9781118816707.ch4.
7. Tretyakov OA, Dumin AN. Emission of Nonstationary Electromagnetic Fields by a Plane Radiator. Telecommunications and Radio Engineering. 2000;54(1):2–15. https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v54.il.10.
8. Havrylenko D, Dumin O, Plakhtii V, Katrich V, Nesterenko M. Time Domain Analysis of Impulse Electromagnetic Field on the Interface of Two Media. 2022 IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET). 2022 Feb 22;https://doi.org/10.1109/TCSET55632.2022.9766855.
9. Nikitskiy SB, Tretyakov OA, Yemelyanov KM. Waveguide propagation of electromagnetic step signal. MELECON '98 9th Mediterranean Electrotechnical Conference Proceedings (Cat No98CH36056).1998. pp.263–266. https://doi.org/10.1109/MELCON.1998.692387.
10. Fatih Erden. Evolutionary Approach to Solve a Novel Time-Domain Cavity Problem. 2017 Sep 14;65(11):5918–31. https://doi.org/10.1109/TAP.2017.2752240.
11. Willard Miller, Jr., Symmetry and Separation of Variables. Addison-Wesley Pub. Co.: Massachusets; 1977
12. Havrylenko D, Dumin O, Plakhtii V. Irradiation of Medium by Plane Disk with Uniform Distribution of Transient Current. 2021 IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). 2021 Sep 8;pp. 74-77, https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552298.
13. Гавриленко ДІ, Думін ОМ, Плахтій ВА. Аналіз імпульсного електромагнітного поля у часовому просторі на границі розділу двох середовищ. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2021;35:41-55. https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021- 35-04.
14. Abramowitz M, Stegun I. Handbook of Mathematical Functions. 1964; 832 p.
15. Watson GNN. A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Second Edition. Cambridge University Press; 1995.

REFERENCES

1. Taylor JD. Ultrawidebandradar: applications and design. Boca Raton, London, New York: CRC Press; 2012.
2. Taflove A, Hagness S, Computational Electrodynamics: The FiniteDifference Time-Domain Method, 3rd ed. Boston, London: Artech House; 2005.

3. Dumin O, Plakhtii V, Pryshchenko O, Shyrokorad D, Katrich VA. Ultrashort Impulse Radar for Detection and Classification of Objects in Layered Medium by Artificial Neural Network. Telecommunications and Radio Engineering. 2019;78(19):1759– 1770. https://doi.org/10.1615/telecomradeng.v78.i19.80.
4. Persanov I, Dumin O, Plakhtii V, Shyrokorad D. Subsurface Object Recognition in a Soil Using UWB Irradiation by Butterfly Antenna. 2019 XXIVth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). 2019 Sep;160-163. https://doi.org/10.1109/DIPED.2019.8882577.
5. Oleksandr Dumin, Vadym Plakhtii, Dmytro Shyrokorad, Oleksandr Prishchenko, Gennadiy Pochanin. UWB Subsurface Radiolocation for Object Location Classification by Artificial Neural Networks Based on Discrete Tomography Approach. 2019 Jul 1; pp. 182-187, https://doi.org/10.1109/UKRCON.2019.8879827.
6. Blaunstein Nathan, Christodoulou Christos G. Electromagnetic Aspects of Wave Propagation over Terrain. 2014 Apr 18;81–116.https://doi.org/10.1002/9781118816707.ch4.
7. Tretyakov OA, Dumin AN. Emission of Nonstationary Electromagnetic Fields by a Plane Radiator. Telecommunications and Radio Engineering. 2000;54(1):2–15. https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v54.il.10.
8. Havrylenko D, Dumin O, Plakhtii V, Katrich V, Nesterenko M. Time Domain Analysis of Impulse Electromagnetic Field on the Interface of Two Media. 2022 IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET). 2022 Feb 22;https://doi.org/10.1109/TCSET55632.2022.9766855.
9. Nikitskiy SB, Tretyakov OA, Yemelyanov KM. Waveguide propagation of electromagnetic step signal. MELECON '98 9th Mediterranean Electrotechnical Conference Proceedings (Cat No98CH36056).1998. pp.263–266. https://doi.org/10.1109/MELCON.1998.692387.
10. Fatih Erden. Evolutionary Approach to Solve a Novel Time-Domain Cavity Problem. 2017 Sep 14;65(11):5918–31. https://doi.org/10.1109/TAP.2017.2752240.
11. Willard Miller, Jr., Symmetry and Separation of Variables. Addison-Wesley Pub. Co.: Massachusets; 1977
12. Havrylenko D, Dumin O, Plakhtii V. Irradiation of Medium by Plane Disk with Uniform Distribution of Transient Current. 2021 IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). 2021 Sep 8;pp. 74-77, https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552298.
13. Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA. Time domain analysis of impulse electromagnetic field at the interface of two media. radiophysics [Internet]. 2021Dec.29 [cited 2023Jun.8];(35):39-2. Available from: https://periodicals.karazin.ua/radiophysics/article/view/18772 https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021- 35-04. (In Ukrainian)
14. Abramowitz M, Stegun I. Handbook of Mathematical Functions. 1964; 832 p.
15. Watson GNN. A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Second Edition. Cambridge University Press; 1995.

Стаття надійшла до редакції: 5 жовтня 2022
Рекомендовано до друку: 29 листопада 2022

IRRADIATION OF MEDIA BY TRANSIENT FIELD: ANALYTICAL SOLVING OF THE PROBLEM

[1]D. I. Havrylenko, [1]O. M. Dumin, [1]O. A. Pryshchenko
[1]V. N. Karazin Kharkiv National University, 4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, Ukraine

Background. Application of transient electromagnetic waves for the remote sensing problems is perspective because of large information capacity of these fields and ability to penetrate into the medium with losses deeply. Impulse ultra wideband ground penetrating radar is the practical implementation of these possibilities. Improving of its parameters for the wide application requires not only exact solution of the corresponding electrodynamics' problems, which is currently provided by the direct numerical methods of computations, but also analytical solutions that allow to get more general information about physical processes of transformations of electromagnetic waves. This information will be more useful in the case of obtaining of solutions in time domain. Therefore, obtaining of the analytical solution at least for the simplest model of radiator, like the plane disk with circular aperture, is quite relevant, for which this article is dedicated.

Objectives. Solve analytically the problem of time domain electrodynamics of impulse electromagnetic wave distribution from the one medium into another lossless medium. To achieve this goal it is necessary to find unknown coefficients from the general solutions of Klein-Gordon equations that are multipliers in evolutionary coefficients by applying of the boundary conditions. It is also need to investigate the cases of full propagation and reflection, with the help of which the obtained expressions will be possible to clarify.

Materials and methods. The problem of distribution of transient impulse wave will be solved by the method of evolutionary equations. The general solution of Klein-Gordon equations is obtained by the separation of variables method. Solving of inhomogeneous Klein-Gordon equation is realized by the Riemann function method. Searching of the connection between unknown coefficients from the solved equations will be realized using of boundary conditions for tangential components of the field according to the laws of classical electrodynamics.
Results. With applying of boundary conditions of classical electrodynamics the connection between unknown coefficients from the Klein-Gordon equations that is described different stages of the wave distribution was founded. The general form of searched solution that is similar to Fresnel's formulas was suggested. Solution for extreme cases of wave distribution such as full propagation and reflection is investigated. On the base of these two cases the conclusion about the general form of solution has been made.
Conclusion. Evolutionary coefficients that characterized electrical and magnetic components of the field were stitched that allowed to find the connection between unknown coefficients of Klein-Gordon equations. Suggested general solution was verificated by means of substitution to the basic formulas that characterized the boundary conditions. For magnetic component the complete agreement of the boundary conditions is achieved, but electrical constituent requires the additional clarification by introducing an additional surface wave.
KEY WORDS: *transient electromagnetic field, ultra wideband ground penetrating radar, evolutionary equations, time domain, Fresnel formulas*

The article was received by the editors: 5 October 2022
The article is recommended for printing: 29 November 2022