

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-04>

УДК 537.87

Д. І. ГАВРИЛЕНКО<sup>1</sup>, студент

e-mail: [m380669254126@gmail.com](mailto:m380669254126@gmail.com) ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-6498-887X>

О. М. ДУМІН<sup>1</sup>, д. ф.-м. наук, доц.

e-mail: [dumin@karazin.ua](mailto:dumin@karazin.ua) ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5067-9689>

В. А. ПЛАХТІЙ<sup>1</sup>, аспірант, м.н.с

e-mail: [plakhtii@karazin.ua](mailto:plakhtii@karazin.ua) ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-0442-2716>

<sup>1</sup>Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, м. Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

## АНАЛІЗ ІМПУЛЬСНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ У ЧАСОВОМУ ПРОСТОРИ НА ГРАНИЦІ РОЗДІЛУ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

**Актуальність.** Надкороткі імпульси електромагнітного поля широко застосовуються у будівництві, археології та розминуванні тощо шляхом побудови ефективних георадарів підстилюючої поверхні, але теоретичне дослідження фізичних процесів опромінення середовища обмежене вузьким колом спрощених модельних задач, як правило, у частотній області. Тому особливу значущість для розуміння можливостей і обмежень георадарних досліджень мають розв'язки задач проникнення імпульсної хвилі з довільною часовою залежністю у матеріальне середовище.

**Мета роботи.** Отримати аналітичний розв'язок у часовому просторі задач відбиття і проходження імпульсної електромагнітної хвилі через границю розділу двох середовищ, що є першим модельним наближенням до опису фізичних процесів, які мають місце при функціонуванні імпульсного надширококуткового радара.

**Матеріали та методи.** Задача опромінювання нестационарним електричним полем середовища без втрат із заданою діелектричною проникністю розв'язується аналітично з використанням еволюційного підходу. Він полягає у розв'язанні задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку у частинних похідних типу Клейна–Гордона відносно еволюційних коефіцієнтів. Компоненти електромагнітного поля у вільному просторі знаходяться шляхом інтегрування по спектральних параметрах та сумування по кутових модах з відповідними комбінаціями базисних функцій.

**Результати.** Розв'язані задачі Коші для диференціальних рівнянь, що описують поведінку відбитої та заломленої хвиль. Знайдені електричні поперечні компоненти відбитої та заломленої хвиль як функції часу на поздовжній осі для випадку опромінення хвилею з часовою залежністю у вигляді одиночного стрибка. Побудовано та проаналізовано графіки залежності електричних компонент від часу та координат.

**Висновки.** Вперше продемонстроване явище електромагнітного снаряду у середовищі, що опромінене імпульсною електромагнітною хвилею надкороткої тривалості. Отримані результати можна узагальнити для випадку імпульсу довільної форми за допомогою методу інтегралу Дюамеля. Крім того, в подальшому можна розглянути електричне поле для точок спостереження, що не лежать на поздовжній осі. Ще більш цікавим продовженням досліджень з точки зору енергетичного аналізу є вивчення поведінки поздовжньої електричної та поперечної магнітної компонент.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** поперечне електричне поле, еволюційні рівняння, нестационарне випромінювання, електромагнітний снаряд, надкороткий імпульс, еволюційний коефіцієнт електричної компоненти поля

**Як цитувати:** Гавриленко ДІ, Думін ОМ, Плахтій ВА. Аналіз імпульсного електромагнітного поля у часовому просторі на границі розділу двох середовищ. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2021;35:41-55. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-04>

**In cites:** Havrylenko DI, Dumin OM, Plakhtii VA. Time domain analysis of impulse electromagnetic field at the interface of two media. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2021;35:41-55. (In Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-04>

### ВСТУП

Для задач опромінення середовища, в якому на невеликій глибині приховані об'єкти, перспективним виглядає застосування надширококуткових електромагнітних хвиль [1]. Є багато досліджень про поведінку електромагнітного поля у вільному просторі та на поверхні розділу середовищ повітря – ґрунт. Також описуються ефекти розсіювання радіохвиль від поверхні землі з різним ступенем неоднорідності [2]. Використання дифракції електромагнітних хвиль для дослідження і, особливо, для відтворення форми неоднорідностей в середовищі отримує додатковий поштовх завдяки нових підходам, таким як міграція Кірхгофа [4, 5] або перетворення Хафа [6, 7]. Для аналізу перетворень розсіяних електромагнітних хвиль у часовому просторі використовують різні методи, наприклад, метод розсіяння Борна або обернення контрастних джерел (Contrast Source Inversion -CSI) [8].

© Гавриленко Д. І., Думін О. М., Плахтій В. А., 2021

**Open access.** This article is licensed under a Creative Commons Attribution 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>

Для аналізу електричних параметрів досліджуваного середовища при радіолокаційному опроміненні існує система АТТЕМ [9], яка, завдяки видаленню первинного електромагнітного поля із загального на ранній стадії, має змогу більш точно визначити матеріальні параметри ґрунту. Через складність задачі, що містить неоднорідності, для аналізу нестационарного електромагнітного поля у такому середовищі зручно використовувати числові методи розрахунку, що дозволяє забезпечити високу деталізацію умов задачі і наблизити їх до реальних [10, 11]. Для аналізу розсіяного електромагнітного поля використовують штучні нейронні мережі [28, 31] з метою визначення наявності прихованих об'єктів, в тому числі малокоонтрастних. Проте через малу енергію сигналу дуже складно відрізнити відбиті хвилі від об'єктів пошуку від неоднорідностей. Тому використовують різні підходи, а саме знешумлення вхідних сигналів [29], попередню обробку [32], а у випадку з нейронними мережами додають «схожі» об'єкти до тренувального набору [33]. Варто відзначити важливість аналітичного розв'язку для підходу з нейронними мережами, адже створення тренувального набору даних є одною із найважливіших і найскладніших етапів їх застосування. А так як аналітичні підходи мають значну перевагу в часу розрахунку у порівнянні з числовими методами розрахунку, такий підхід дасть змогу створювати швидше і більші тренувальні набори.

Певне обмежене коло задач нестационарної електродинаміки розв'язуються аналітично. Наприклад, за допомогою еволюційного підходу [12], хвилеводна задача [13] поетапно розв'язана методом модового базису для часової залежності джерела у вигляді ступінчастої функції Хевісайда. Тобто, отримана перехідна функція хвилевода як лінійної передавальної системи. Для задачі випромінювання плоского випромінювача [14, 15] отримано аналітичний розв'язок у часовому просторі для аналогічного збудження. Саме аналітичний розв'язок у часовому просторі дозволяє застосувати подібний апарат для нелінійних задач [16] і для опису нестационарного випромінювання реальних антен [17]. У роботі [18], як розвиток останньої задачі, отримані коефіцієнти розкладу нестационарних полів хвилі, що відбита та заломлена для випадку опромінення плоского діелектричного середовища (ґрунту) нестационарною хвилею. Для цього використано граничні умови для тангенційних компонент поля для знаходження коефіцієнтів розкладу поля в перетворенні Фур'є-Бесселя.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо Н-хвилю, що збуджується джерелом у вигляді плоского струму [14], заданого у циліндричній системі координат:

$$\vec{j}_0(\rho, \varphi, z, t) = \vec{x}_0 A_0 H(R - \rho) \delta(z) H(t), \quad (1)$$

де функція Хевісайда  $H(R - \rho)$  задає випромінювач у вигляді круглої апертури радіусом  $R$ ;  $H(t)$  показує стрибкоподібну часову залежність струму;  $t$  – часова змінна;  $z$  – поздовжня координата, дельта-функція Дірака  $\delta(z)$  позначає нескінченно малу товщину випромінювача;  $A_0$  – амплітуда струму;  $\vec{x}_0 = \vec{\rho}_0 \cos \varphi - \vec{\varphi}_0 \sin \varphi$  – орт декартової системи координат;  $\rho$  – радіальна компонента циліндричної системи. Випромінювання здійснюється у вільний простір ( $\varepsilon = 1, \mu = 1$ ), який безпосередньо контактує з нижнім середовищем без втрат ( $\varepsilon > 1, \mu = 1$ ) при  $z = 0$ .

Математично Н-хвиля у вільному просторі описується диференціальним рівнянням у частинних похідних відносно еволюційного коефіцієнту, згідно еволюційного підходу [14]:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi_i^2 \right) h_{m_i}^{inc}(z, t) = \sqrt{\mu_0} j_{m_i}(z, t); \quad V_{m_i}^{inc} = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_{m_i}^{inc}}{\partial t}, \quad (2)$$

де індекс «*inc*» позначає падаючу хвилю;  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$  – швидкість світла у вільному просторі;  $\chi_i$  – спектральний параметр;  $h_{m_i}^{inc}$  – еволюційний коефіцієнт, що знаходиться шляхом розв'язку першого еволюційного рівняння;  $V_{m_i}^{inc}$  – еволюційний електричний коефіцієнт;  $j_{m_i}$  – функція-джерело, що є модовим розкладом стороннього струму  $\vec{j}_0$ ,

$$j_{m_i} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \vec{j}_0(\rho, \varphi, z, t) \cdot [\nabla \psi_{m_i}^* \times \vec{z}_0]. \quad (3)$$

$\psi_{m_i}$  – базисна (мембранна) функція, що залежить тільки від поперечних координат і задовольняє рівнянню Гельмгольца,

$$\psi_{m_i}(\rho, \varphi, \chi_i) = \frac{J_{m_i}(\chi_i \rho)}{\sqrt{\chi_i}} e^{im_i \varphi},$$

де  $J_{m_i}(\chi_i \rho)$  – функція Бесселя.

Розв'язавши рівняння (2) відносно усіх мод, поперечна компонента електричного поля знаходиться через дискретну суму по кутовим модам та неперервну по спектральних параметрах:

$$\vec{E}^{inc}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m_i=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_i V_{m_i}^{inc} [\nabla \psi_{m_i} \times \vec{z}_0]. \quad (4)$$

$\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$  – електрична,  $\mu_0 \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\Gamma_{\text{Н}}}{\text{м}}$  – магнітна сталі. Підставляючи сторонні струми (1) до формули (3) та здійснюючи інтегрування за кутовою та радіальною координатами, отримаємо функцію-джерело, тобто, праву частину диференціального рівняння (2)

$$j_{m_i}(z, t) = -A_0 \frac{i\delta(z)H(t)R}{2} (\delta_{m_i,1} + \delta_{m_i,-1}) \frac{J_1(\chi_i R)}{\sqrt{\chi_i}}, \quad (5)$$

$i$  – уявна одиниця,  $J_1(\chi_i R)$  – функція Бесселя першого порядку,  $\delta_{m,n}$  – символ Кронекера.

Рівняння (2) відносно коефіцієнта  $h_{m_i}^{inc}$  називається неоднорідним диференціальним рівнянням Клейна-Гордона. Його розв'язок знаходиться за допомогою метода функції Рімана [14, 19], яка має такий вигляд:

$$h_{m_i}^{inc}(z, t) = \sqrt{\mu_0} \frac{c}{2} \int_0^{\infty} dz' \int_0^{\infty} dt' J_0(\chi_i \sqrt{c^2(t-t')^2 - (z-z')^2}) j_{m_i}(z', t', \chi_i).$$

Інтегруючи функцію Бесселя нульового порядку з функцією-джерелом за поздовжньою координатою та часовою змінною, прийдемо до такого виразу:

$$h_{m_i}^{inc}(z, t) = -A_0 \frac{\sqrt{\mu_0} R}{2} (\delta_{m_i,1} + \delta_{m_i,-1}) \frac{J_1(\chi_i R)}{\chi_i \sqrt{\chi_i}} U_1(i\chi_i(ct-z), \chi_i \sqrt{c^2 t^2 - z^2}), \quad (6)$$

де  $U_n(W, Z)$  – функція Ломмеля двох змінних  $n$ -го порядку, яка являє собою нескінченну суму з функцій Бесселя [20]:

$$U_n(W, Z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{W}{Z}\right)^{n+2k} J_{n+2k}(Z).$$

Користуючись визначенням похідної від функції Ломмеля за кожною зі змінних [16]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z} U_m(W, Z) &= -\frac{Z}{W} U_{m-1}(W, Z); \\ \frac{\partial}{\partial W} U_m(W, Z) &= \frac{1}{2} U_{m+1}(W, Z) + \frac{1}{2} \left(\frac{Z}{W}\right)^2 U_{m-1}(W, Z), \end{aligned}$$

еволюційний коефіцієнт електричної компоненти поля знаходиться шляхом диференціювання складеної функції [21]:

$$\begin{aligned} V_{m_i}^{inc} &= A_0 \frac{i\sqrt{\mu_0} R}{4} (\delta_{m_i,1} + \delta_{m_i,-1}) \frac{J_1(\chi_i R)}{\sqrt{\chi_i}} \sum_{k_i=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{ct-z}{ct+z}\right)^{k_i} J_{2k_i}(\chi_i \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{ct-z}{ct+z}\right)^{k_i+1} J_{2+2k_i}(\chi_i \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

### ПОЛЯ НА ПОЗДОВЖНІЙ ОСІ

Вираз (7) можна ще спростити, розрахувавши нескінченну суму. Остаточоно виходить, що

$$V_{m_i}^{inc} = A_0 \frac{i\sqrt{\mu_0} A_0 R}{4} (\delta_{m_i,1} + \delta_{m_i,-1}) \frac{J_1(\chi_i R)}{\sqrt{\chi_i}} J_0(\chi_i \sqrt{c^2 t^2 - z^2}). \quad (8)$$

Щоб знайти поперечне електричне поле на поздовжній осі ( $\rho = 0$ ), потрібно до формули (4) підставити в явному вигляді еволюційний коефіцієнт (7). Завдяки символам Кронекера від нескінченної суми залишиться два доданки, і розклад (4) спроститься до інтегралу

$$\vec{E}^{inc} = -\vec{x} \frac{\sqrt{\mu_0} A_0 R}{\varepsilon_0 4} \int_0^\infty d\chi_i J_1(\chi_i R) J_0(\chi_i \sqrt{c^2 t^2 - z^2}),$$

який розраховується за допомогою формули [22]

$$\vec{E}^{inc} = -\vec{x} A_0 \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0 4} \begin{cases} \frac{1}{R}, & 0 < \sqrt{c^2 t^2 - z^2} < R; \\ \frac{1}{2\sqrt{c^2 t^2 - z^2}}, & 0 < \sqrt{c^2 t^2 - z^2} = R; \\ 0, & 0 < R < \sqrt{c^2 t^2 - z^2}. \end{cases} \quad (9)$$

Проілюструємо часову залежність електричної компоненти поля на границі розділу середовищ. На Рис. 1 видно, що електричне поле на поздовжній осі має форму прямокутного імпульсу. Поява його викликана приходом сигналу від найближчої точки джерела, зникнення – приходом сигналу від зовнішнього радіусу диску. З рисунку видно, що радіус диску дорівнює 0,5 м.

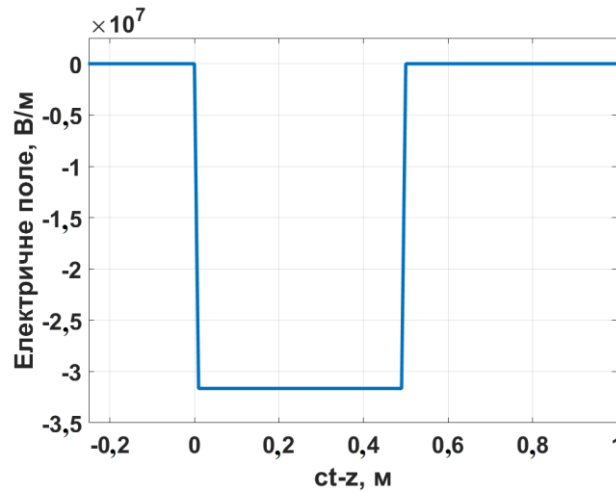


Рис. 1. Поперечна електрична компонента падаючої хвилі ( $z = 0, \rho = 0$ )

Fig. 1. Transverse electrical component of the incident wave ( $z = 0, \rho = 0$ )

Електричне поле потрапило на границю розділу середовищ. Одна частина, згідно законам геометричної оптики, відіб'ється, а решта – пройде у середовище з діелектричною проникністю  $\varepsilon$ . Знайдемо ту частину поля, що відбилася, розв'язавши відповідне еволюційне рівняння у вільному просторі та записавши визначення еволюційного коефіцієнта електричної компоненти поля у такому випадку:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi_r^2 \right) h_{m_r}^{ref}(z, t) = 0; \quad V_{m_r}^{ref} = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_{m_r}^{ref}}{\partial t}, \quad (10)$$

де індекс «*ref*» позначає відбиту хвилю. У правій частині рівняння стоїть нуль, тому що дана частина поля не має джерела у вигляді струму, воно задається у граничних умовах для еволюційних коефіцієнтів. Розв'язується дане рівняння за допомогою методу розділення змінних. Але якщо здійснити розділення класичним чином, тобто представити шукану функцію  $h_{m_r}^{ref}(z, t)$  у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить окремо від  $z$  і  $t$ , то вийде розв'язок, що еквівалентний застосуванню перетворення Фур'є. А це перехід до частотної області, який нас не цікавить. Щоб це усунути, здійснимо іншу заміну змінних [23]:

$$\begin{cases} ct = u \operatorname{ch} v; \\ z = u \operatorname{sh} v; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{2} \ln \frac{ct + z}{ct - z}; \\ u = \sqrt{c^2 t^2 - z^2}. \end{cases} \quad (11)$$

Підставляючи (11) у (10) та здійснюючи перетворення з похідними другого порядку, прийдемо до диференціального рівняння:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + \chi_r^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) h_{m_r}^{ref}(u, v) = 0, \quad (12)$$

яке також розв'язується розділенням змінних

$$h_{m_r}^{ref}(u, v) = \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} V_{k_r}^{ref}(v) U_{k_r}^{ref}(u). \quad (13)$$

Після елементарних математичних перетворень приходимо до двох звичайних диференціальних рівнянь, що містять коефіцієнт розділення  $k_r$ ,

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{U_{k_r}^{ref}} \frac{d^2 U_{k_r}^{ref}}{du^2} + \frac{u}{U_{k_r}^{ref}} \frac{dU_{k_r}^{ref}}{du} + \chi_r^2 u^2 &= k_r^2; \\ \frac{1}{V_{k_r}^{ref}} \frac{d^2 V_{k_r}^{ref}}{dv^2} &= k_r^2, \end{aligned}$$

і розв'язання яких приводить нас до шуканого еволюційного коефіцієнта за умови відкидання функції Неймана як такої, що приймає нескінченне значення в точках, в яких, з точки зору фізики поширення хвилі, повинні бути обмежені значення електромагнітного поля:

$$h_{m_r}^{ref}(u, v) = \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} A_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) J_{k_r}(\chi_r u) (\tilde{B}_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) e^{k_r v} + \tilde{C}_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) e^{-k_r v}).$$

Здійснюючи обернену заміну (11) та вважаючи, що  $A_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) \tilde{B}_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) = B_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r)$ , а  $\tilde{C}_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) = 0$  через властивості відбитої хвилі, остаточно отримаємо

$$h_{m_r}^{ref}(z, t, \chi_r) = \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) J_{k_r}(\chi_r \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \left( \frac{ct + z}{ct - z} \right)^{\frac{k_r}{2}}. \quad (14)$$

Знаючи диференціальні та рекурентні співвідношення між функціями Бесселя [24]

$$\begin{aligned} J_m(\chi\rho) &= \frac{\chi\rho}{2m} (J_{m-1}(\chi\rho) + J_{m+1}(\chi\rho)); \\ \frac{\partial}{\partial\rho} J_m(\chi\rho) &= \frac{\chi}{2} (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho)), \end{aligned} \quad (15)$$

еволюційний коефіцієнт електричної компоненти поля легко обчислити за формулою (10):

$$\begin{aligned} V_{m_r}^{ref} &= \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} \frac{\chi_r}{2} B_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) \left\{ \left( \frac{ct + z}{ct - z} \right)^{\frac{k_r+1}{2}} J_{k_r+1}(\chi_r \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{ct + z}{ct - z} \right)^{\frac{k_r-1}{2}} J_{k_r-1}(\chi_r \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Коефіцієнт  $B_{k_r}^{m_r,ref}(\chi_r)$  є невідомою функцією тільки від спектрального параметра, який буде знайдено за допомогою граничних умов на границі середовищ.

Еволюційне рівняння та еволюційний коефіцієнт для хвилі, що пройшла у середовище з діелектричною проникністю  $\varepsilon$  мають вигляд:

$$\left( \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi_p^2 \right) h_{m_p}^{prop}(z, t) = 0; \quad V_{m_r}^{prop} = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_{m_p}^{prop}}{\partial t}. \quad (17)$$

де індекс «*prop*» позначає хвилю, що пройшла у середовище, а  $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$  – швидкість світла у середовищі. Диференціальне рівняння відносно  $h_{m_p}^{prop}$  розв'язується так само, як і рівняння відносно  $h_{m_r}^{ref}$ , тому відразу перепишемо розв'язок із заміною змінних (11) та врахуванням фізично обґрунтованої поведінки поля на нескінченності:

$$h_{m_p}^{prop}(z, t) = \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{m_p,prop}(\chi_p) J_{k_p}(\chi_p \sqrt{v^2 t^2 - z^2}) \left( \frac{vt - z}{vt + z} \right)^{\frac{k_p}{2}}. \quad (18)$$

Еволюційний коефіцієнт електричної компоненти поля у такому випадку представляється як

$$V_{m_p}^{prop} = \frac{v}{c} \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} \frac{\chi_p}{2} B_{k_p}^{m_p,prop}(\chi_p) \left\{ \left( \frac{vt - z}{vt + z} \right)^{\frac{k_p+1}{2}} J_{k_p+1}(\chi_p \sqrt{v^2 t^2 - z^2}) - \left( \frac{vt - z}{vt + z} \right)^{\frac{k_p-1}{2}} J_{k_p-1}(\chi_p \sqrt{v^2 t^2 - z^2}) \right\}. \quad (19)$$

Коефіцієнт  $B_{k_p}^{m_p,prop}(\chi_p)$  є залежним тільки від спектрального параметру, і знаходиться через використання граничних умов на границі розділу середовищ. Після обчислення коефіцієнтів  $B_{k_r}^{m_r,ref}(\chi_r)$ ,  $B_{k_p}^{m_p,prop}(\chi_p)$  знайдемо явний вигляд еволюційних коефіцієнтів електричного поля для відбитої та заломленої хвиль, після чого за допомогою (4) розрахуємо відповідні компоненти полів.

### ЗШИВАННЯ ПОЛІВ

Невідомі коефіцієнти розкладу  $B_{k_r}^{m_r,ref}(\chi_r)$  і  $B_{k_p}^{m_p,prop}(\chi_p)$  з'явилися внаслідок розв'язання диференціальних рівнянь (9), (16) у загальному випадку із врахуванням напрямків поширення хвиль. Щоб їх знайти, треба доповнити нашу задачу граничними умовами. У нашому випадку це буде співвідношення між компонентами полів на границі розділу середовищ ( $z = 0$ ). Суперпозиція хвиль, одна з яких падає, а інша – відбивається, має дати компоненту, що дорівнюватиме електричній компоненті поля, яке поширюється у середовищі:

$$\vec{E}^{inc} + \vec{E}^{ref} = \vec{E}^{prop}. \quad (20)$$

Рівність (20) відбиває умову неперервності тангенційних складових електричного поля, що виводиться в [25]. Підставимо до (20) розклади електричних компонент згідно (4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m_i=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_i [\nabla\psi_{m_i} \times \vec{z}_0] V_{m_i}^{inc}(\chi_i, t) + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m_r=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_r [\nabla\psi_{m_r} \times \vec{z}_0] V_{m_r}^{ref}(\chi_r, t) = \\ = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m_p=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_p [\nabla\psi_{m_p} \times \vec{z}_0] V_{m_p}^{prop}(\chi_p, t). \end{aligned}$$

Домножимо цю рівність на векторний добуток, що містить градієнт від комплексноспряженої базисної функції та подіємо операторами інтегрування за кутовою та радіальною змінними:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m_i=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho [\nabla\psi_{m_i} \times \vec{z}_0] \cdot [\nabla\psi_n^* \times \vec{z}_0] V_{m_i}^{inc}(\chi_i, t) + \\
& + \sum_{m_r=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_r \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho [\nabla\psi_{m_r} \times \vec{z}_0] \cdot [\nabla\psi_n^* \times \vec{z}_0] V_{m_r}^{ref}(\chi_r, t) = \\
& = \sum_{m_p=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_p \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho [\nabla\psi_{m_p} \times \vec{z}_0] \cdot [\nabla\psi_n^* \times \vec{z}_0] V_{m_p}^{prop}(\chi_p, t).
\end{aligned}$$

Це дає змогу використати умову ортогональності базисних функцій [14],

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \nabla\psi_m(\chi) \cdot \nabla\psi_n^*(\xi) = \delta_{mn} \delta(\xi - \chi), \quad (21)$$

через що гранична умова значно спроститься:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m_i=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_i \delta_{m_i n} \delta(\xi - \chi_i) V_{m_i}^{inc}(\chi_i, t) + \sum_{m_r=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_r \delta_{m_r n} \delta(\xi - \chi_r) V_{m_r}^{ref}(\chi_r, t) = \\
& = \sum_{m_p=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_p \delta_{m_p n} \delta(\xi - \chi_p) V_{m_p}^{prop}(\chi_p, t).
\end{aligned}$$

Під інтегралом міститься дельта-функція, яка має корисну властивість:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \chi) f(\chi) d\chi = f(\xi). \quad (22)$$

Під оператором сумування міститься символ Кронекера, що також спрощує зшивання полів:

$$\sum_{m_i=-\infty}^{\infty} \delta_{mn} f_m(\xi) = f_n(\xi). \quad (23)$$

Скориставшись математичними властивостями (22), (23), прийдемо до співвідношення між еволюційними коефіцієнтами електричних компонентів на границі розділу середовищ:

$$V_n^{inc}(\xi, t) + V_n^{ref}(\xi, t) = V_n^{prop}(\xi, t). \quad (24)$$

Перепишемо коефіцієнти електричного поля у явному вигляді, врахувавши усі спрощення, які були здійснені до (22):

$$\begin{aligned}
V_n^{inc}(\xi, t) &= \frac{\xi}{2} \sum_{k_i=0}^{\infty} \tilde{B}_{2k_i}^{n,inc}(\xi) \left( J_{2k_i}(\xi ct) - J_{2+2k_i}(\xi ct) \right); \\
V_n^{ref}(\xi, t) &= \frac{\xi}{2} \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{n,ref}(\xi) \left( J_{k_r+1}(\xi ct) - J_{k_r-1}(\xi ct) \right); \\
V_n^{prop}(\xi, t) &= \frac{\xi v}{2c} \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{n,prop}(\xi) \left( J_{k_p+1}(\xi vt) - J_{k_p-1}(\xi vt) \right),
\end{aligned} \quad (25)$$

де було позначено

$$\tilde{B}_{2k_i}^{n,inc}(\xi) = A_0 \frac{i\sqrt{\mu_0 R} J_1(\xi R)}{2} \frac{1}{\xi\sqrt{\xi}} (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}). \quad (26)$$

Еволюційний коефіцієнт електричного поля падаючої хвилі візьмемо у формі (7), а не (8), оскільки саме такий вигляд нам зручний для аналізу. Щоб зробити його більш ідентичним до двох інших коефіцієнтів, здійсимо тотожні перетворення з оператором сумування. Зробимо заміну  $2k_i \rightarrow k_i$  та перейдемо до суми у межах від  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$V_n^{inc}(\xi, t) = \frac{\xi}{2} \sum_{k_i=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_{k_i}^{n,inc}(\xi) (J_{k_i}(\xi ct) - J_{k_i+2}(\xi ct)).$$

Щоб отримана рівність була тотожною до тієї, що наведена у (25), коефіцієнт  $\tilde{B}_{k_i}^{n,inc}(\xi)$  у нових доданках повинен дорівнювати нулю для непарних додатних  $k_i = 2k_1 + 1$  і усіх від'ємних індексів:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{2k_1+1}^{n,inc}(\xi) &= 0 \quad \forall k_1 \in \mathbb{N}_0; \\ \tilde{B}_{k_i}^{n,inc}(\xi) &= 0 \quad \forall k_i < 0. \end{aligned}$$

Якщо змістити доданки на одиницю  $k_i \rightarrow k_i - 1$ , то

$$V_n^{inc}(\xi, t) = \frac{\xi}{2} \sum_{k_i=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_{k_i-1}^{n,inc}(\xi) (J_{k_i-1}(\xi ct) - J_{k_i+1}(\xi ct)).$$

а коефіцієнт  $\tilde{B}_{k_i-1}^{n,inc}(\xi)$  дорівнюватиме нулю за таких умов:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{2k_1-1}^{n,inc}(\xi) &= 0 \quad \forall k_1 \in \mathbb{N}_0; \\ \tilde{B}_{k_i-1}^{n,inc}(\xi) &= 0 \quad \forall k_i < 0. \end{aligned}$$

Для того, щоб було зручно зшивати поля, перепишемо цей вираз у більш зручній формі для нового коефіцієнту

$$\sum_{k_i=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_{k_i-1}^{n,inc}(\xi) (J_{k_i-1}(\xi ct) - J_{k_i+1}(\xi ct)) = \sum_{k_i=-\infty}^{\infty} B_{k_i}^{n,inc}(\xi) (J_{k_i+1}(\xi ct) - J_{k_i-1}(\xi ct)).$$

Щоб перейти до нового коефіцієнта  $B_{k_i}^{n,inc}(\xi)$ , напишемо відповідні умови, за яких він дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} B_{2k_1}^{n,inc}(\xi) &= 0 \quad \forall k_1 \in \mathbb{N}_0; \\ B_{k_i}^{n,inc}(\xi) &= 0 \quad \forall k_i < 0, \end{aligned}$$

оскільки усі індекси на одиницю більші, ніж у коефіцієнта  $\tilde{B}_{k_i-1}^{n,inc}(\xi)$ . Якщо подивитися на рівність, записану вище, яка їх пов'язує, то виходить, що вони будуть рівними, коли один з них буде узятий з протилежним знаком:

$$B_{2k_1+1}^{n,inc}(\xi) = -\tilde{B}_{2k_1}^{n,inc}(\xi) = -A_0 \frac{i\sqrt{\mu_0 R} J_1(\xi R)}{2} \frac{1}{\xi\sqrt{\xi}} (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}) \quad \forall k \geq 0. \quad (27)$$

Також слід звернути увагу на те, що у рівності порядки функцій Бесселя не змінювались. Тобто, коли для  $\tilde{B}_{2k_1}^{n,inc}(\xi)$  циліндричні функції приймали парні порядки, то для  $B_{2k_1+1}^{n,inc}(\xi)$  вони також мають бути парними.

Перепишемо рівність (24) з урахуванням попередніх перетворень:



$$\begin{aligned} & \frac{\xi}{2} \sum_{k_1=0}^{\infty} B_{2k_1+1}^{n,inc}(\xi) \left( J_{2k_1+2}(\xi ct) - J_{2k_1}(\xi ct) \right) + \frac{\xi}{2} \sum_{k_2=0}^{\infty} B_{2k_2+1}^{n,ref}(\xi) \left( J_{2k_2+2}(\xi ct) - J_{2k_2}(\xi ct) \right) = \\ & = \frac{\xi v}{2c} \sum_{k_3=0}^{\infty} B_{2k_3+1}^{n,prop}(\xi) \left( J_{2k_3+2}(\xi vt) - J_{2k_3}(\xi vt) \right). \end{aligned}$$

Межі сумування було змінено через тривіальність коефіцієнтів  $B_{k_1}^{n,inc}(\xi)$  для відповідних значень  $k_1$ . Тоді, для відбитої і заломленої хвиль усі від'ємні та парні коефіцієнти мають занулитися, звідки й випливає заміна індексів  $k_r, k_p$  на  $k_2, k_3$ . Запишемо усі умови, які було накладено на коефіцієнти:

$$B_{2k_1}^{n,inc}(\xi) = 0, \quad B_{2k_2}^{n,ref}(\xi) = 0, \quad B_{2k_3+1}^{n,prop}(\xi) = 0 \quad \forall k_1, k_2, k_3 \geq 0. \quad (28)$$

Врахувавши масштабувальне перетворення для третьої суми

$$\frac{v}{c} \xi = \xi',$$

отримаємо таку рівність:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi}{2} \sum_{k_1=0}^{\infty} B_{2k_1+1}^{n,inc}(\xi) \left( J_{2k_1+2}(\xi ct) - J_{2k_1}(\xi ct) \right) + \frac{\xi}{2} \sum_{k_2=0}^{\infty} B_{2k_2+1}^{n,ref}(\xi) \left( J_{2k_2+2}(\xi ct) - J_{2k_2}(\xi ct) \right) = \\ & = \frac{\xi'}{2} \sum_{k_3=0}^{\infty} B_{2k_3+1}^{n,prop} \left( \frac{c}{v} \xi' \right) \left( J_{2k_3+2}(\xi' ct) - J_{2k_3}(\xi' ct) \right). \end{aligned}$$

Згідно (26) коефіцієнти, залежні від спектрального параметру, для усіх додатних непарних індексів можуть бути винесені з-під оператора сумування:

$$B_{2k_1+1}^{n,inc}(\xi) \equiv B^{n,inc}(\xi); \quad B_{2k_2+1}^{n,ref}(\xi) \equiv B^{n,ref}(\xi); \quad B_{2k_3+1}^{n,prop} \left( \frac{c}{v} \xi' \right) \equiv B^{n,prop} \left( \frac{c}{v} \xi' \right).$$

Розрахунок сум дасть функції Бесселя нульового порядку, узятих з протилежним знаком. У рівності, записаній вище, вони скоротяться, і виходить просте співвідношення між коефіцієнтами-функціями від спектральних параметрів

$$B^{n,inc}(\xi) + B^{n,ref}(\xi) = B^{n,prop}(\xi), \quad (29)$$

де для заломленої хвилі було здійснено обернену масштабувальну заміну.

Коефіцієнти для відбитої та заломленої хвиль у рівності (29) можуть бути пов'язані з коефіцієнтом для падаючої таким чином [25]:

$$\begin{aligned} B^{n,ref}(\xi) &= \frac{1 - \frac{c}{v}}{1 + \frac{c}{v}} B^{n,inc}(\xi) = A_0 \frac{\frac{c}{v} - 1}{\frac{c}{v} + 1} \frac{i\sqrt{\mu_0 R} J_1(\xi R)}{2 \xi \sqrt{\xi}} (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}); \\ B^{n,prop}(\xi) &= \frac{2}{1 + \frac{c}{v}} B^{n,inc}(\xi) = -A_0 \frac{2}{1 + \frac{c}{v}} \frac{i\sqrt{\mu_0 R} J_1(\xi R)}{2 \xi \sqrt{\xi}} (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}), \end{aligned} \quad (30)$$

звідки легко записати остаточні вирази для електричних еволюційних коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} V_{m_r}^{ref} &= -A_0 \frac{\frac{c}{v} - 1}{\frac{c}{v} + 1} \frac{i\sqrt{\mu_0 R}}{2} (\delta_{m_r,1} + \delta_{m_r,-1}) \frac{J_1(\chi_i R)}{\chi_r \sqrt{\chi_r}} J_0(\chi_r \sqrt{c^2 t^2 - z^2}); \\ V_{m_p}^{prop} &= A_0 \frac{\frac{v}{c}}{1 + \frac{c}{v}} \frac{i\sqrt{\mu_0 R}}{2} (\delta_{m_p,1} + \delta_{m_p,-1}) \frac{J_1(\chi_p R)}{\chi_p \sqrt{\chi_p}} J_0(\chi_p \sqrt{v^2 t^2 - z^2}). \end{aligned} \quad (31)$$

З порівняння еволюційних коефіцієнтів відбитої та заломленої хвиль (31) з падаючою (8) видно, що відносно спектральних параметрів функціональна залежність не змінилася, а тому й обчислення електричних полів нічим не відрізнятиметься від розрахунку падаючої хвилі. Запишемо результуючі вирази для поперечних електричних полів. Відбита хвиля

$$\vec{E}^{ref} = \vec{x} \frac{\frac{c}{v} - 1}{\frac{c}{v} + 1} \frac{\sqrt{\mu_0} A_0 R}{\varepsilon_0 4} \begin{cases} \frac{1}{R}, & 0 < \sqrt{c^2 t^2 - z^2} < R; \\ \frac{1}{2\sqrt{c^2 t^2 - z^2}}, & 0 < \sqrt{c^2 t^2 - z^2} = R; \\ 0, & 0 < R < \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \end{cases} \quad (32)$$

зображена на Рис. 2. Як і падаюча хвиля, відбита відображає прямокутний імпульс. Можна помітити, що зі збільшенням відстані спостереження, тривалість імпульсу падає, а швидкість спадання зменшується. Енергія хвилі спадає пропорційно  $\frac{1}{z}$ , що підтверджує результати роботи [26], в якій вперше було описане явище електромагнітного снаряду – аномально повільного спадання електромагнітного поля у просторі.

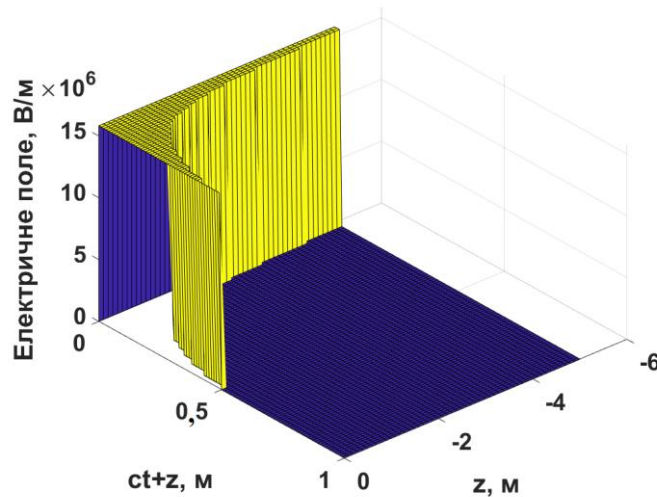


Рис. 2. Поперечна електрична компонента відбитої хвилі ( $z < 0, \rho = 0$ )  
Fig. 2. Transverse electrical component of the reflected wave ( $z < 0, \rho = 0$ )

Хвиля, що пройшла

$$\vec{E}^{prop} = -\vec{x} \frac{\frac{v}{c}}{1 + \frac{c}{v}} \frac{\sqrt{\mu_0} A_0 R}{\varepsilon_0 4} \begin{cases} \frac{1}{R}, & 0 < \sqrt{v^2 t^2 - z^2} < R; \\ \frac{1}{2\sqrt{v^2 t^2 - z^2}}, & 0 < \sqrt{v^2 t^2 - z^2} = R; \\ 0, & 0 < R < \sqrt{v^2 t^2 - z^2}, \end{cases} \quad (33)$$

показана на Рис. 3. Вона поводить себе як прямокутний імпульс. Це підтверджує однакову функціональну поведінку хвиль (9), (32), (33). Різниця між ними проявляється у параметрах і коефіцієнтах. Аналогічно до Рис. 2, тривалість імпульсу падає зі збільшенням відстані спостереження. Його енергія також зменшується, але зі своєю асимптотикою, і швидкість спадання зменшується. Таким чином, ми вперше спостерігаємо явище електромагнітного снаряду [21, 26, 27] і в підстиляючому середовищі, опромінену імпульсною хвилею.

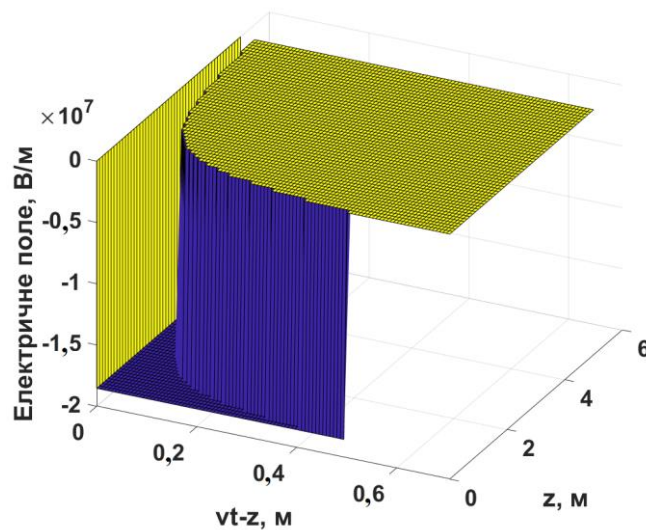


Рис. 3. Поперечна електрична компонента хвилі, що пройшла у середовище ( $z > 0, \rho = 0, \varepsilon = 0$ )  
 Fig. 3. Transverse electrical component of a wave that has passed into the medium ( $z > 0, \rho = 0, \varepsilon = 0$ )

### ВИСНОВКИ

Завдяки еволюційному підходу було аналітично розв'язано у часовому просторі задачу опромінення діелектрика нестационарною хвилею на осі випромінювання. Вперше продемонстроване явище електромагнітного снаряду у середовищі, що опромінене імпульсною електромагнітною хвилею надкороткої тривалості. Отримані результати можна узагальнити для випадку імпульсу довільної форми за допомогою методу інтегралу Дюамеля. Крім того, в подальшому можна розглянути електричне поле для точок спостереження, що не лежать на поздовжній осі. Ще більш цікавим з точки зору енергетичного аналізу є дослідження поведінки поздовжньої електричної та поперечної магнітної компонент.

### КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Taylor JD. Ultrawidebandradar: applications and design. Boca Raton, London, New York: CRC Press; 2012.
2. Blaunstein N, Christodoulou CG. Electromagnetic Aspects of Wave Propagation over Terrain. In Radio Propagation and Adaptive Antennas for Wireless Communication Networks. Wiley; 2014, p. 81 – 116. <https://doi.org/10.1002/9781118816707.ch4>.
3. Li C, Zhao J, Peng S, Lin P. Enhancing Subsurface Diffractions Using Demigration Method. in IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. 2021 July;18(7):1179-1183. <https://doi.org/10.1109/LGRS.2020.2998106>
4. Plakhtii V, Dumin O, Pryshchenko O. Kirchhoff Migration Method for Tube Detection with UWB GPR. IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2021); 2021. p. 181-184. doi: <https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552330>
5. Smitha N, Ullas Bharadwaj DR, Abilash S, Sridhara SN, Singh V. Kirchhoff and F-K migration to focus ground penetrating radar images. International Journal of Geo-Engineering. 2016 Apr 15;7(1). <https://doi.org/10.1186/s40703-016-0019-6>
6. Windsor CG, Capineri L, Falorni P. A Data Pair-Labeled Generalized Hough Transform for Radar Location of Buried Objects. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. 2014 Jan;11(1):124–7. <https://doi.org/10.1109/LGRS.2013.2248119>.
7. Wei Li, Huilin Zhou, Xiaoting Wan. Generalized Hough Transform and ANN for subsurface cylindrical object location and parameters inversion from GPR data. 2012 14th International Conference on Ground Penetrating Radar (GPR). 2012 Jun; <https://doi.org/10.1109/ICGPR.2012.6254874>.
8. Bloemenkamp RF, van den Berg PM. Time-domain gradient-type methods for inversion of the subsurface. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium 2001 Digest Held in conjunction with: USNC/URSI National Radio Science Meeting (Cat No01CH37229). <https://doi.org/10.1109/APS.2001.959809>.
9. Zhong W, Jun L, Shengbao Y, Yanju J, Guohua Z. ATTEM: An Instrument System Using Transient Electromagnetic Pulse for Subsurface Imaging. 2006 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings. 2006 Apr; <https://doi.org/10.1109/IMTC.2006.328568>.

10. Teixeira FL, Weng Cho Chew. Finite-difference computation of transient electromagnetic waves for cylindrical geometries in complex media. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 2000 Jul;38(4):1530–43. <https://doi.org/10.1109/36.851953>.
11. Pryshchenko O, Dumin O, Plakhtii V, Pochanin G. Subsurface Object Detection in Randomly Inhomogeneous Medium Model. 2021 IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON); 2021 Aug 26; p. 167-171. doi: <https://doi.org/10.1109/UKRCON53503.2021.9575688>.
12. Tretyakov OA. Essentials of Nonstationary and Nonlinear Electromagnetic Field Theory. In: Hashimoto M, Idemen M, Tretyakov OA, editors. Analytical and numerical methods in electromagnetic wave theory. Ch. 3. Tokyo: Science House Co., Ltd.; 1993.
13. Nikitskiy SB, Tretyakov OA, Yemelyanov KM. Waveguide propagation of electromagnetic step signal. MELECON '98 9th Mediterranean Electrotechnical Conference Proceedings (Cat No98CH36056) (MELECON-98); 1998. p.263–266. <https://doi.org/10.1109/MELCON.1998.692387>
14. Dumin O, Tretyakov O. Radiation of arbitrary signals by plane disk. MMET '96 VIth International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory Proceedings; Lviv, Ukraine. pp. 248–251. <https://doi.org/10.1109/MMET.1996.565704>
15. Tretyakov OA, Dumin AN. Emission of Nonstationary Electromagnetic Fields by a Plane Radiator. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2000;54(1):2–15. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v54.i1.10>
16. Dumin OM, Tretyakov OA, Akhmedov RD, Dumina OO. Evolutionary approach for the problem of electromagnetic field propagation through nonlinear medium. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics"*. 2014;24(1115):23-28.
17. Akhmedov R, Dumin O, Katrich VA. Impulse radiation of antenna with circular aperture. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018;77(20):1767–84. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v77.i20.10>
18. Havrylenko D, Dumin O, Plakhtii V. Irradiation of Medium by Plane Disk with Uniform Distribution of Transient Current. 2021 IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). 2021 Sep 8; p. 74-77, <https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552298>.
19. Борисов ВВ. Неустановившиеся поля в волноводах. Л.: Изд. ЛГУ; 1991. 156 с.
20. Деканосидзе ЕН. Таблицы цилиндрических функций от двух переменных. М.: Изд. АН СССР; 1956. 492 с.
21. Третьяков ОА, Думин АН. Излучение нестационарных электромагнитных полей плоским излучателем. *Электромагнитные волны & электронные системы*. 1998;3(1):12-22.
22. Прудников АП, Брычков ЮА, Маричев ОИ. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука; 1983. 752 с.
23. Tretyakov OA. Propagation of Super – Wideband Signals through Waveguides. In: Proc. International Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory V (MMET-94); 1994; Kharkiv, Ukraine. p. 434.
24. Ватсон ГН. Теория бесселевых функций. ч.1. М.: Изд. иностранной литературы; 1949. 450 с.
25. Тамм ИЕ. Основы теории электричества: Учеб. Пособие для вузов. 11-е изд. испр. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ; 2003. 616 с.
26. Wu TT. Electromagnetic missiles. *J. Appl. Phys*. 1985;57(7):2370–2373.
27. Седин ЛГ. Импульсное излучение антенны (электромагнитный снаряд). *Радиотехника и электроника*. 1991;36(5):1014–1022.
28. Думін ОМ, Плахтій ВА, Прищенко ОА, Широкопад ДВ. Розпізнавання об'єктів під поверхню землі при надширокопasmовій радіоінтроскопії за допомогою штучних нейронних мереж. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка»*. 2018;28:24-29.
29. Influence of denoising of input signal on classification of object location by artificial neural network in ultrawideband radiointroscopy. *Visnyk of VN Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics."* 2019;(31):27-5. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2019-31-03>
30. Detection and classification of landmines using UWB antenna system and ANN analysis. *Visnyk of VN Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics."* 2020;(33):7-19. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2020-33-01>
31. Discrete tomography method for the processing of ultrawideband subsurface radiolocation by artificial neural network. *Visnyk of VN Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics."* 2018;(29):17-6. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2018-29-03>
32. Capineri L, Falorni P, Borgioli G, Bossi L, Pochanin G, Ruban V, et al. Background Removal for the Processing of Scans Acquired with the, "UGO-1st", Landmine Detection Platform. 2019 Photonics & Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS-Spring). 2019 Jun; p. 3965-3973. <https://doi.org/10.1109/PIERS-Spring46901.2019.9017781>.

#### REFERENCES

1. Taylor JD. Ultrawideband radar: applications and design. Boca Raton, London, New York: CRC Press; 2012.

2. Blaunstein N, Christodoulou CG. Electromagnetic Aspects of Wave Propagation over Terrain. In Radio Propagation and Adaptive Antennas for Wireless Communication Networks. Wiley; 2014, p. 81 – 116. <https://doi.org/10.1002/9781118816707.ch4>.
3. Li C, Zhao J, Peng S, Lin P. Enhancing Subsurface Diffractions Using Demigration Method. in IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. 2021 July;18(7):1179-1183. <https://doi.org/10.1109/LGRS.2020.2998106>
4. Plakhtii V, Dumin O, Pryshchenko O. Kirchhoff Migration Method for Tube Detection with UWB GPR. IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2021); 2021. p. 181-184. doi: <https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552330>
5. Smitha N, Ullas Bharadwaj DR, Abilash S, Sridhara SN, Singh V. Kirchhoff and F-K migration to focus ground penetrating radar images. International Journal of Geo-Engineering. 2016 Apr 15;7(1). <https://doi.org/10.1186/s40703-016-0019-6>
6. Windsor CG, Capineri L, Falorni P. A Data Pair-Labeled Generalized Hough Transform for Radar Location of Buried Objects. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. 2014 Jan;11(1):124–7. <https://doi.org/10.1109/LGRS.2013.2248119>.
7. Wei Li, Huilin Zhou, Xiaoting Wan. Generalized Hough Transform and ANN for subsurface cylindrical object location and parameters inversion from GPR data. 2012 14th International Conference on Ground Penetrating Radar (GPR). 2012 Jun; <https://doi.org/10.1109/ICGPR.2012.6254874>.
8. Bloemenkamp RF, van den Berg PM. Time-domain gradient-type methods for inversion of the subsurface. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium 2001 Digest Held in conjunction with: USNC/URSI National Radio Science Meeting (Cat No01CH37229). <https://doi.org/10.1109/APS.2001.959809>.
9. Zhong W, Jun L, Shengbao Y, Yanju J, Guohua Z. ATTEM: An Instrument System Using Transient Electromagnetic Pulse for Subsurface Imaging. 2006 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings. 2006 Apr; <https://doi.org/10.1109/IMTC.2006.328568>.
10. Teixeira FL, Weng Cho Chew. Finite-difference computation of transient electromagnetic waves for cylindrical geometries in complex media. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 2000 Jul;38(4):1530–43. <https://doi.org/10.1109/36.851953>.
11. Pryshchenko O, Dumin O, Plakhtii V, Pochanin G. Subsurface Object Detection in Randomly Inhomogeneous Medium Model. 2021 IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON); 2021 Aug 26; p. 167-171. doi: <https://doi.org/10.1109/UKRCON53503.2021.9575688>.
12. Tretyakov OA. Essentials of Nonstationary and Nonlinear Electromagnetic Field Theory. In: Hashimoto M, Idemen M, Tretyakov OA, editors. Analytical and numerical methods in electromagnetic wave theory. Ch. 3. Tokyo: Science House Co., Ltd.; 1993.
13. Nikitskiy SB, Tretyakov OA, Yemelyanov KM. Waveguide propagation of electromagnetic step signal. MELECON '98 9th Mediterranean Electrotechnical Conference Proceedings (Cat No98CH36056) (MELECON-98); 1998. p.263–266. <https://doi.org/10.1109/MELCON.1998.692387>
14. Dumin O, Tretyakov O. Radiation of arbitrary signals by plane disk. MMET '96 VIth International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory Proceedings; Lviv, Ukraine. pp. 248–251. <https://doi.org/10.1109/MMET.1996.565704>
15. Tretyakov OA, Dumin AN. Emission of Nonstationary Electromagnetic Fields by a Plane Radiator. Telecommunications and Radio Engineering. 2000;54(1):2–15. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v54.i1.10>
16. Dumin OM, Tretyakov OA, Akhmedov RD, Dumina OO. Evolutionary approach for the problem of electromagnetic field propagation through nonlinear medium. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series “Radio Physics and Electronics”. 2014;24(1115):23-28.
17. Akhmedov R, Dumin O, Katrich VA. Impulse radiation of antenna with circular aperture. Telecommunications and Radio Engineering. 2018;77(20):1767–84. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v77.i20.10>
18. Havrylenko D, Dumin O, Plakhtii V. Irradiation of Medium by Plane Disk with Uniform Distribution of Transient Current. 2021 IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). 2021 Sep 8; p. 74-77, <https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552298>.
19. Borisov VV. Unsteady fields in waveguides. L.: Ed. LGU; 1991. 156 p. (In Russian)
20. Dekanosidze EN. Tables of cylindrical functions of two variables. M.: Ed. Academy of Sciences of the USSR; 1956. 492 p. (In Russian)
21. Tretyakov OA, Dumin AN. Radiation of non-stationary electromagnetic fields by a flat radiator. Electromagnetic waves & electronic systems. 1998;3(1):12-22. (In Russian)
22. Prudnikov AP, Brychkov YuA, Marichev OI. Integrals and series. Special features. M.: Nauka; 1983. 752 p. (In Russian)
23. Tretyakov OA. Propagation of Super – Wideband Signals through Waveguides. In: Proc. International Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory V (MMET-94); 1994; Kharkiv, Ukraine. p. 434.
24. Watson GN. Theory of Bessel functions. part 1. M.: Ed. foreign literature; 1949. 450 p. (In Russian)
25. Tamm IE. Fundamentals of the theory of electricity. Proc. Allowance for universities. 11th ed. correct and additional Moscow: FIZMATLIT; 2003. 616 p. (In Russian)
26. Wu TT. Electromagnetic missiles. J. Appl. Phys. 1985;57(7):2370–2373.

27. Sodin LG. Antenna impulse radiation (electromagnetic projectile). *Radio engineering and electronics*. 1991;36(5):1014–1022. (In Russian)
28. Dumin OM, Plakhtiy VA, Prishchenko OA, Shirokorad DV. Recognition of objects under the surface of the earth with over-wide-space radio-introspection for the help of piece-wise neural networks. *Visnyk of VN Karazin Kharkiv National University, series “Radio Physics and Electronics”*. 2018;28:24-29. (In Ukrainian)
29. Influence of denoising of input signal on classification of object location by artificial neural network in ultrawideband radiointrospection. *Visnyk of VN Karazin Kharkiv National University, series “Radio Physics and Electronics”* 2019;(31):27-5. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2019-31-03>
30. Detection and classification of landmines using UWB antenna system and ANN analysis. *Visnyk of VN Karazin Kharkiv National University, series “Radio Physics and Electronics.”* 2020;(33):7-19. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2020-33-01>
31. Discrete tomography method for the processing of ultrawideband subsurface radiolocation by artificial neural network. *Visnyk of VN Karazin Kharkiv National University, series “Radio Physics and Electronics.”* 2018;(29):17-6. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2018-29-03>
32. Capineri L, Falorni P, Borgioli G, Bossi L, Pochanin G, Ruban V, et al. Background Removal for the Processing of Scans Acquired with the, “UGO-1st”, Landmine Detection Platform. 2019 Photonics & Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS-Spring). 2019 Jun; p. 3965-3973. <https://doi.org/10.1109/PIERS-Spring46901.2019.9017781>.

Стаття надійшла до редакції: 22 вересня 2021 р.

Рекомендовано до друку: 25 жовтня 2021 р.

## TIME DOMAIN ANALYSIS OF IMPULSE ELECTROMAGNETIC FIELD AT THE INTERFACE OF TWO MEDIA

D. I. Havrylenko<sup>1</sup>, O. M. Dumin<sup>1</sup>, V. A. Plakhtii<sup>1</sup>

<sup>1</sup>V. N. Karazin Kharkiv National University, 4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, Ukraine

**Background.** Ultrashort pulses of electromagnetic field are widely used in construction, archeology and demining, etc., by constructing effective georadars of the underlying surface, but theoretical study of physical processes of irradiation of medium is had a limit range of simplified model problems, usually in frequency domain. Therefore, the solutions of the problems of penetration of a pulsed wave with arbitrary time dependence into material medium are of special importance for understanding the possibilities and limitations of georadar’s study.

**Objectives.** To obtain the analytical solution in time domain of the problems of reflection and propagation of a impulse electromagnetic wave through the interface of two media, which is the first model approximation to the description of physical processes that occur during operation of pulsed ultrawideband radar.

**Materials and methods.** The problem of irradiation by nonstationary electric field of a lossless medium with a given permittivity is solved analytically by application of evolutionary approach. It consists in solving of Cauchy’s problem for the second-order partial differential equation Klein–Gordon type with respect to evolutionary coefficients. The components of the electromagnetic field in free space are found by integration by spectral parameters and summation by angular modes with appropriate combinations of basis functions.

**Results.** Cauchy’s problems for differential equations that describe the behavior of reflected and refracted waves are solved. The electrical transverse components of the reflected and refracted waves as a function of time on the longitudinal axis were found for the case of irradiation with the step-like time dependence. Graphs of dependence of electric components on time and coordinates are plotted and analyzed.

**Conclusion.** The phenomenon of an electromagnetic missiles in the medium that was irradiated by a pulsed electromagnetic wave of ultrashort duration was demonstrated for the first time. The obtained results can be generalized for the case of an arbitrary impulse by the Duhamel’s integral method. In addition, the electric field for observation point that do not lie on the longitudinal axis can be considered. An even more interesting continuation of the researches in terms of energy analysis is the study of the behavior of longitudinal electric and transverse magnetic components.

**KEY WORDS:** electric transversal component, evolutionary equations, non-stationary field, electromagnetic missiles, ultrashort impulse, evolutionary coefficient of electric component of the field

The article was received by the editors: September 22 2021.

The article is recommended for printing: October 25 2021