

Оглядова стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2020-33-02>

УДК 535.361:535.555:535.573+577.3.0

## ПОШУК ДЕФЕКТІВ Й ОЦІНКА ПОТОЧНОГО СТАНУ ІНЖЕНЕРНИХ СПОРУД ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОРАДАРІВ (ОГЛЯДОВА СТАТТЯ. ЧАСТИНА II)

Д.О. Батраков

*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна*

*E-mail: [batrakov@karazin.ua](mailto:batrakov@karazin.ua)*

Надійшла до редакції 12 листопада 2020 р.

**Актуальність.** Розвиток технічних засобів неруйнівного контролю та дистанційного зондування є важливим практичним завданням. Це пов'язано в першу чергу з тим, що сучасні засоби неруйнівного контролю відкривають широкі можливості впровадження нових технологій і підвищення економічної ефективності заходів по обслуговуванню різних технічних і будівельних об'єктів при відносно невеликій собівартості проведення таких робіт. Важливе значення в зв'язку з цим набуває і розвиток обчислювальних алгоритмів обробки первинних даних і програмних продуктів для подальшої інтерпретації отриманих результатів за допомогою систем комп'ютерної інженерії.

**Мета роботи** - огляд технічних засобів, методів обробки сигналів і деяких комп'ютерно орієнтованих інженерних систем для вирішення завдань виявлення різних дефектів в інженерних спорудах і будівельних конструкціях.

**Матеріали та методи.** В роботі наведено короткий огляд методів обробки первинних наборів даних, отриманих за допомогою імпульсних георадарів. На наступному етапі обробка здійснюється за допомогою програми GeoVizu. Нарешті, основна увага в роботі приділена аналізу можливостей сучасних засобів комп'ютерної інженерії. Також використані чисельно - аналітичні методи сучасної теорії дифракції та методи аналізу сигналів в просторово часовій області.

**Результати.** Основу результатів складають не тільки наукові статті, а й аналіз можливостей сучасних систем комп'ютерного моделювання, а також деякі математичні моделі, отримані автором.

**Висновки.** Представлені в статті результати дозволяють говорити про започаткування нового напрямку в наукових дослідженнях. Цей напрямок може бути визначено як комбінований багато-параметричний аналіз. Метою даного напрямку є проведення досліджень різних взаємопов'язаних процесів в технічних конструкціях за допомогою методів математичної фізики при об'єднанні не тільки аналізу їх взаємодії з полями різної фізичної природи, але і відповідних моделей з різних областей математичної фізики. Значимість отриманих результатів складається не тільки з нових моделей обробки та інтерпретації даних, а й з перспектив подальшого прогресу в галузі технічних засобів контролю і діагностики.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** імпульсні георадари, комп'ютерні системи обробки даних, дистанційне зондування.

## SEARCH FOR DEFECTS AND ASSESSMENT OF THE CURRENT CONDITION OF ENGINEERING STRUCTURES WITH THE HELP OF GEORADARS (REVIEW. PART II)

D. O. Batrakov

*V. N. Karazin Kharkiv National University, 4, Svobody sq., Kharkiv, 61022, Ukraine*

**The relevance.** The development of technical means for non-destructive testing and remote sensing is an important practical task. This is primarily due to the fact that modern means of non-destructive testing open up ample opportunities for the introduction of new technologies and increase the economic efficiency of measures for the maintenance of various technical and construction objects at a relatively low cost of such work. In this regard, the development of computational algorithms for processing primary data and software products for the subsequent interpretation of the results obtained using computer engineering systems is of great importance.

**The purpose** of the work is to review technical means, signal processing methods and some computer-oriented engineering systems for solving problems of detecting various defects in engineering structures and building structures.

**Materials and methods.** The paper provides a brief overview of methods for processing primary data sets obtained using pulsed GPR. At the next stage, processing is carried out using the GeoVizu program. Finally, the main focus of the work is on the analysis of the capabilities of modern computer engineering tools. Also used the numerical - analytical methods of the modern theory of diffraction and methods of signal analysis in the space-time domain.

**Results.** The results are based not only on scientific articles, but also on the analysis of the capabilities of modern computer modeling systems, as well as some mathematical models obtained by the author.

**Conclusions.** The results presented in the article allow one to talk about a new direction in scientific research. This direction can be defined as combined multi-parametric analysis - CoMPA. The purpose of this direction is to conduct research of various interrelated processes in technical structures by using the methods of mathematical physics,

combining not only the analysis of their interaction with fields of different physical nature, but also involving the appropriate models from various areas of mathematical physics. The significance of the results obtained consists not only of new models of data processing and interpretation, but also of the prospects for further progress in the field of technical means of control and diagnostics.

**KEY WORDS:** impulse georadars, computer data processing systems, remote sensing.

## ПОИСК ДЕФЕКТОВ И ОЦЕНКА ТЕКУЩЕГО СОСТОЯНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ГЕОРАДАРОВ (ОБЗОР. ЧАСТЬ II)

Д.О. Батраков

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61022, г. Харьков, Украина*

**Актуальность.** Развитие технических средств неразрушающего контроля и дистанционного зондирования является важной практической задачей. Это связано в первую очередь с тем, что современные средства неразрушающего контроля открывают широкие возможности внедрения новых технологий и повышения экономической эффективности мероприятий по обслуживанию различных технических и строительных объектов при относительно небольшой себестоимости проведения таких работ. Важное значение в связи с этим приобретает и развитие вычислительных алгоритмов обработки первичных данных и программных продуктов для последующей интерпретации полученных результатов с помощью систем компьютерной инженерии.

**Цель работы** – обзор технических средств, методов обработки сигналов и некоторых компьютерно-ориентированных инженерных систем для решения задач обнаружения различных дефектов в инженерных сооружениях и строительных конструкциях.

**Материалы и методы.** В работе приведен краткий обзор методов обработки первичных наборов данных, полученных с помощью импульсных георадаров. На следующем этапе обработка осуществляется с помощью программы GeoVizu. Наконец, основное внимание в работе уделено анализу возможностей современных средств компьютерной инженерии. Также использованы численно – аналитические методы современной теории дифракции и методы анализа сигналов в пространственно-временной области.

**Результаты.** Основу результатов составляют не только научные статьи, но и анализ возможностей современных систем компьютерного моделирования, а также некоторые математические модели, полученные автором.

**Выводы.** Представленные в статье результаты позволяют говорить о новом направлении в научных исследованиях. Это направление может быть определено как комбинированный многопараметрический анализ. Целью данного направления является проведение исследований различных взаимосвязанных процессов в технических конструкциях с помощью методов математической физики при объединении не только анализа их взаимодействия с полями различной физической природы, но и соответствующих моделей из различных областей математической физики. Значимость полученных результатов складывается не только из новых моделей обработки и интерпретации данных, но и из перспектив последующего прогресса в области технических средств контроля и диагностики.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** импульсные георадары, компьютерные системы обработки данных, дистанционное зондирование.

### ВСТУП

У першій частині статті [1] були розглянуті питання, які пов'язані з виявленням за допомогою георадарів небезпечних та таких, що не спостерігаються зовні, у першу чергу підповерхневих, тріщин у будівельних і промислових конструкціях. Одним з найбільш характерних прикладів вдалого застосування георадарів для виявлення підповерхневих тріщин є конструкції автомобільних доріг з нежорстким покриттям. Після етапу виявлення тріщини необхідно вирішити наступні завдання [2]:

- 1) розробити моделі оцінки поточного стану технічних споруд й, зокрема, дорожніх одягів нежорсткого типу;
- 2) запропонувати моделі прогнозування як на рівні мережі доріг, так і для окремих ділянок автомобільних доріг, при наявності умов експлуатації, які відрізняються від проектних;
- 3) для підвищення надійності одержуваних оцінок залучити моделі, які пов'язують різні об'ємні частки води й повітря з обмірюваним значенням ефективної діелектричної проникності;
- 4) провести аналіз можливостей різних схем зондування за допомогою імпульсних георадарів й у підсумку запропонувати загальну схему одержання первинних даних й алгоритми їхньої наступної обробки;
- 5) досліджувати можливість застосування сучасних систем комп'ютерної інженерії для побудови моделі оцінки стану дорожніх одягів нежорсткого типу.

У свою чергу, кожний із цих п'яти пунктів є сукупністю завдань наступного рівня деталізації. Зокрема проблемі розробки моделей оцінки поточного стану різних технічних споруджень присвячені роботи [3-6]. Очевидно, що тема розробки й використання моделей оцінки технічного стану в такому формулюванні є надзвичайно широкою. Це має відношення й до різних фізичних принципів, що покладено в основу теоретичних моделей, і до математичного апарату, який використовується. Розвиток рішення більш вузького завдання по створенню й застосуванню моделей інтерпретації результатів виявлення тріщин у конструкціях дорожніх одягів нежорсткого типу було розглянуто в [7-10].

Це ж можна сказати й про інші завдання. Наприклад, моделі прогнозування в [2] запропоновано розглядати у вигляді суперпозиції завдань локального й мережевого рівнів із залученням динамічних моделей на локальному рівні й марківських матриць переходу на рівні мережі доріг. Надалі ці ідеї одержали розвиток у роботах [11-12]. Моделі, що зв'язують об'ємні частки води й повітря з відповідними значеннями ефективної діелектричної проникності, були далі розвинені в роботах [13]. Питання детального аналізу можливостей дистанційного зондування за допомогою імпульсних георадарів були розглянуті в [14-16], а схема одержання даних й алгоритми обробки були розвинені в роботах [17-19]. Нарешті, питання застосування сучасних систем комп'ютерної інженерії для створення моделей роботи різних технічних конструкцій розглянуті в [10, 20, 21]. Однак, багато основних результатів виявилися розташованими в різних роботах, доступ до яких часто є обмеженим.

Тому метою даної публікації є огляд методів і підходів до рішення завдань прогнозування зміни стану технічних об'єктів (у першу чергу - автомобільних доріг) на основі отриманої за допомогою георадарів інформації та із залученням систем чисельного моделювання.

### ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ Й МЕТОД РІШЕННЯ

Вище вже було сказано, що завдання виявлення, позиціонування, ідентифікації різних дефектів з наступним прогнозуванням на базі різних моделей і залученням систем комп'ютерного моделювання є по суті різними етапами одного комплексного завдання. Тому в даній частині статті основна увага буде приділена проблемам об'єднання досягнень різних галузей фізики. Ця тенденція особливо чітко простежується в процесі розвитку найбільш передових технологій та подальшому їх об'єднанні для отримання рішень комплексних завдань. Наприклад, для того, щоб краще представити процеси взаємодії надширококутних імпульсних сигналів з різними шарувато-неоднорідними середовищами й змодельовати процеси зношування й руйнування в промислових конструкціях, необхідно залучити комбіновані моделі, які враховували б всі нюанси. Такий напрямок одержав назву *multiphysics* (мультифізика). У найбільш загальному змісті мультифізика може бути визначена як об'єднання процесів або систем, що припускає включення двох або більше фізичних полів [22, 23]. Мається на увазі, що метою такого об'єднання є наступна спільна обробка отриманих даних із залученням фізичних, математичних й обчислювальних моделей. Залучені математичні моделі в основному опираються на теорію диференціальних рівнянь і тензорний аналіз. Інші варіанти визначення терміна мультифізика спираються на обчислення, що залучають кілька фізичних моделей або кілька фізичних явищ. Включення до складу терміна поняття декількох фізичних моделей надає йому достатню спільність і широту використовуваних концепцій. Однак у певних ситуаціях таке визначення є трохи надмірним, оскільки фізичні моделі можуть містити в собі фізичні явища. У більш вузькому змісті поняття мультифізика визначає крос-платформний додаток COMSOL Multiphysics, що спирається на аналіз за допомогою методу кінцевих елементів і платформу віртуальних обчислень [24]. У прийнятому визначенні мультифізика визначається як:

1. Об'єднання фізичних явищ у рамках однієї системи комп'ютерного моделювання.
2. Дослідження декількох взаємозалежних фізичних властивостей.

Згідно ще одному визначенню, мультифізична система складається з більш ніж одного компонента, що регулюється власними принципами еволюції/рівноваги, а також і законами збереження або конститутивними (фундаментальними) законами. [22,23]. Це визначення дуже близько до попереднього, за винятком того факту, що воно не підкреслює фізичні властивості. Більш жорстке формулювання стверджує, що мультифізика може бути визначена як процеси, що включають тісно пов'язані взаємодії між окремими континуальними фізичними явищами [22,23]. У цьому визначенні важливою особливістю є двосторонній обмін інформацією між фізичними полями, що може включати неявну конвергенцію в межах кроку в часі. На підставі цих визначень, мультифізика може бути позначена як сукупність пов'язаних процесів або систем, які включають більше одного одночасно виникаючого фізичного поля, а також дослідження й знання про ці процеси й системи [22, 24]. Сучасна мультифізика це вже область не тільки досліджень, але й додатків у багатьох наукових і технічних дисциплінах. Існує чітка тенденція, що всі суттєво складні науково-технічні проблеми є пов'язаними з такими фізичними процесами, які не можуть бути вирішені в рамках однієї традиційної дисципліни або галузі знань. Ця тенденція у свою чергу вимагає розширення можливостей аналізу для рішення більш складних і багатопрофільних завдань. Як результат, виникають проблеми швидко зростаючої складності, які виходять за традиційні дисциплінарні межі між фізикою й іншими областями (хімією, матеріалознавством, біологією). У промисловій практиці програми моделювання перетворилися в інструмент проектування, розробки продукції й контролю якості. Під час цих процесів розроблювачі повинні мати знання в областях, що виходять за рамки їхньої вузької спеціалізації й залучити відповідні інструменти моделювання. Це приводить до того, що інженерам тепер необхідно знати й розуміти концепцію того, що усередині інженерного світу відомо як «мультифізика» [25].

Реалізація її завдань звичайно складається з таких етапів:

- ідентифікація мультифізичного процесу / системи;
- розробка математичного опису цього процесу / системи;
- дискретизація цієї математичної моделі в алгебраїчну систему;
- розв'язання відповідної системи алгебраїчних рівнянь;
- постобробка даних.

Абстрагування (відокремлення) мультифізичної проблеми від більш складного явища (або сукупності явищ) й наступний опис такої проблеми звичайно не акцентуються. Однак, вони дуже важливі для успіху мультифізичного аналізу. Це вимагає визначення системи, яку необхідно проаналізувати, включаючи геометрію, матеріали й домінуючі механізми. Така система буде інтерпретуватися з використанням математичних визначень (функція, тензор, диференціальне рівняння), а також із залученням таких понять як розрахункова область, граничні умови, допоміжні рівняння й керуючі рівняння. Дискретизація, рішення й постобробка виконуються за допомогою комп'ютерів. Таким чином, описана вище процедура мало чим відрізняється від звичайних методів чисельного моделювання, заснованих на дискретизації диференціальних рівнянь у частинних похідних [22-25].

Математична модель - це, по суті, сукупність рівнянь разом з додатковими умовами. Цих умов не повинно бути занадто багато (інакше рішення може не існувати) і занадто мало, щоб забезпечити єдино вірне рішення. Також відзначимо, що фізична модель це, по суті, набір спрощень і виділення головної сутності. Наприклад, коли цікавляться відбиттям імпульсного сигналу георадару від поверхні реального покриття автомобільної дороги, звичайно зневажають шорсткістю поверхні й частотною дисперсією в матеріалах шарів, а як модель просторового розподілу електромагнітного поля приймають плоску хвилю. У такому випадку для розрахунку параметрів відбитого поля та поля, що пройшло, можна використати формули Френеля [26]:

$$T_{II} = \frac{2 \sin \theta_t \cdot \cos \theta_i}{\sin(\theta_i - \theta_t) \cdot \cos(\theta_i - \theta_t)} A_{II}; \quad T_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_i \cdot \cos \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp}. \quad (1)$$

$$R_{II} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)} A_{II}; \quad R_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp}. \quad (2)$$

де:  $\theta_i, \theta_t, A_{II, \perp}, T_{II, \perp}, R_{II, \perp}$  – кути падіння й заломлення, а також амплітуди падаючих, переломлених і відбитих хвиль відповідно. Паралельна й ортогональна поляризації при цьому позначені індексами  $II$  й  $\perp$ . Зрозуміло, модель плоскої хвилі з погляду електродинаміки є ідеалізацією, і використання цієї моделі вимагає додаткового обґрунтування. Відповідне обґрунтування необхідно здійснювати щораз при використанні нових антен [14, 21].

При реалізації обчислень мультифізика звичайно спирається на методи дискретизації. До них традиційно відносять [27-31]: метод кінцевих елементів, метод скінченних різниць і метод кінцевих об'ємів. Багато популярних програмних пакетів (ANSYS, ABAQUS) в основному покладаються на метод кінцевих елементів або аналогічні розповсюджені чисельні методи для моделювання взаємозалежної фізики: теплової напруги, електро- і акустимагнітомеханічної взаємодії.

Принципово інший підхід запропонований у роботах [1, 14, 15]. Він спирається на застосування спеціалізованого програмного забезпечення GeoVizu для обробки даних зондування за допомогою георадарів на першому етапі. На наступних етапах проводиться залучення математичних моделей прогнозування різних рівнів (для мережі автомобільних доріг це моделі мережевого рівня й динамічні моделі локального рівня) і на заключній стадії проводиться моделювання напружено-деформованого стану з використанням методу кінцевих елементів [27].

Розглянемо цю схему більш детально. В [10-12] запропоновано розвиток ідей роботи [2]. Сенс у тому, щоб до вже наявних критеріїв у рамках загальної операторної моделі [2] включити додатковий набір елементів. Цей набір запропоновано записати як оператор, що забезпечує корекцію моделі з

урахуванням економетричних показників ( $\hat{Lecon}$ ):

$$P(t_2) = \hat{L}_D \cdot V(t_1) + \hat{P}'_T \cdot P_{j, V}(t_1) + \hat{Lecon} \cdot V(t_1), \quad (3)$$

де  $\hat{L}_D \cdot V(t_1)$  – результат використання адаптивної динамічної моделі для прогнозування станів обстежених ділянок;  $\hat{P}'_T$  – результат коректування вихідної матриці переходу із застосуванням

динамічної моделі;  $\hat{L}_{econ} \cdot V(t_1)$  – результат коректування із залученням економетричної моделі.

Природно, що таке розширення процедури комплексного застосування динамічних і марківських моделей істотно підвищує ефективність одержуваних оцінок в умовах обмеженого фінансування. Таким чином, запропонований загальний алгоритм коректування оцінок складається з наступних етапів:

1) аналіз отриманих даних про особливості різних ділянок з метою їхнього коректного об'єднання за об'єднаними критеріями техніко-експлуатаційного стану (наприклад, по швидкості зміни індексу стану) і по економетричних критеріях (собівартість поточного ремонту й утримання);

2) проведення аналізу обсягів робіт по обстеженню мережі й зіставлення його результатів з реально наявними ресурсами;

3) підготовка масивів вихідних даних і проведення відбору груп ділянок для подальшого обстеження.

У підсумку, якщо позначити об'єм ресурсів, які виділено у  $j$ -му році на обстеження мережі через  $Z_{\Sigma, j}$ , то в загальному вигляді завдання оптимізації цього етапу слід компактно записати як:

$$F[\xi_{\Sigma}] \rightarrow \min; \quad Z_j \leq Z_{\Sigma, j},$$

$$\xi_{\Sigma} = \sum_{m=1}^M \varphi(n_1, n_2, \dots, n_M) \quad (4)$$

де  $m$  – індекс стану групи ділянок (загальною кількістю  $n$ ),  $\xi_{\Sigma}, \varphi$  – функції, що описують загальний і парціальні індекси стану по групах ділянок.

Як розвиток цих ідей, в [19] використаний наступний набір співвідношень для побудови моделі прогнозування:

$$\begin{cases} P_1(t_2) = P_{1,1} \cdot P_1(t_1) + 0 \cdot P_2(t_1) \\ P_2(t_2) = P_{2,1} \cdot P_1(t_1) + P_{2,2} \cdot P_2(t_1) \end{cases} \quad (5)$$

У такому випадку значення коефіцієнта  $P_{1,2} = 0$  відображає той очевидний факт, що ділянка дороги не може мимовільно перейти з гіршого стану в кращий, за умови, що за розглянутий проміжок часу ремонтні роботи на ньому не проводилися. Тепер результати можна компактно переписати в наступній формі:

$$P_i(t_2) = P_{i,j} \cdot P_j(t_1); \quad i, j = 1, \dots, 5. \quad (6)$$

Тут неявно передбачається підсумовування по повторюваних індексах. Тобто  $P_{i,j} \cdot P_j(t_1) \equiv \sum_j P_{i,j} \cdot P_j(t_1)$ . Дотримуючись робіт [2, 12, 19], ми увели поняття вектора стану

ділянки дороги  $\mathbf{P}(t_k)$ . Компонентами такого вектора є ймовірності знаходження даної ділянки у відповідних станах у момент часу  $(t_k)$ , що дозволяє записати останнє співвідношення в ще більш компактній формі:

$$\mathbf{P}(t_2) = \mathbf{P}_T \cdot \mathbf{P}(t_1), \quad (7)$$

де  $\mathbf{P}_T$  – матриця переходу, елементами якої є ймовірності переходу ділянки з одного стану в інший. У загальному випадку ця матриця має вигляд:

$$\mathbf{P}_T = \begin{vmatrix} P_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{2,1} & P_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} & 0 & 0 \\ P_{4,1} & P_{4,2} & P_{4,3} & P_{4,4} & 0 \\ P_{5,1} & P_{5,2} & P_{5,3} & P_{5,4} & 1 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Одиниця в правому нижньому куті підкреслює той очевидний факт, що ділянка, що перебувала у самому гіршому з можливих станів може при відсутності ремонтних робіт тільки залишитися в цьому ж стані.

Зручність й ефективність такого формалізованого апарата складається також у тому, що для знаходження стану ділянки через  $2 \cdot \Delta t$  (за умови, що ймовірності початкових станів ділянки відомі) досить просто двічі застосувати операцію множення вектора початкового стану на матрицю переходу:

$$P_i(t_3) = P_{i,j} \cdot P_j(t_2) = P_{i,j} \cdot P_{i,j} \cdot P_j(t_1) = P_{i,j}^2 \cdot P_j(t_1), \quad (9)$$

або в більш компактній формі:

$$\mathbf{P}(t_3) = \mathbf{P}_T^2 \cdot \mathbf{P}(t_1). \quad (10)$$

Очевидно, що застосування такої процедури справедливо лише у випадку, коли є повний набір даних про стан всіх ділянок і хід (швидкість) процесу руйнування покриття не змінюється з часом. Такі процеси називають стаціонарними. У загальному випадку швидкість руйнування конструкції залежить від часу й тому застосування останнього співвідношення без урахування цього фактору некоректно. Тому в моделі побудови (обчислення елементів) матриць переходу необхідно використати інтервали часу, протягом яких процес є стаціонарним. Альтернативою цьому є алгоритм внесення корегування відповідно до динамічних моделей [2, 12].

У підсумку був запропонований розвиток методу регресійної оптимізації. Цей метод припускає використання функціональної нелінійної оптимізації для мінімізації суми абсолютних значень різниці між регресійною залежністю, що якнайкраще апроксимує фактичні дані, і результатами прогнозів відповідно до використання марківських матриць переходу. Ця схема може бути представлена математичною моделлю виду:

$$\Psi = \sum_{m=1}^M |J(t_m) - J(t_m, P_{m-1,m})| \rightarrow \min, \quad (11)$$

де  $\Psi$  – цільова функція;  $J(t_m)$  – індекс стану в період  $t_m$  відповідно до регресійної моделі;  $J(t_m, P_{m-1,m})$  – індекс стану в той же період, але відповідно до марківської моделі.

Ця модель, природно, припускає наявність інформації про стан всіх або значної (більшої) частини ділянок. Також передбачається, що відома інформація й про проведення в попередні періоди ремонтних заходів. Оскільки ця інформація в повному обсязі в багатьох випадках відсутня у базах даних, то доцільно застосувати метод пропорцій. Технологія застосування цього методу спирається на наступне співвідношення для елементів матриці переходу:

$$P_{i,j} = \frac{n_{i,j}}{n_i}, \quad (12)$$

де  $n_{i,j}$  – кількість ділянок, що перейшли протягом даного періоду часу з  $i$ -го стану в  $j$ -і;  $n_i$  – число ділянок, що перебували в  $i$ -м стані на початок періоду.

Стосовно до діагностики автомобільних доріг цей метод ефективний й у випадку, коли відомі дані обстежень по всіх ділянках на початку й наприкінці попереднього періоду, тобто тільки за попередній рік, а не за весь попередній строк експлуатації. У такому випадку зручним інструментом є таблиці даних про стан ділянок. Ці таблиці можуть бути складені як щодо окремих пошкоджень і руйнувань (відомості дефектів), так і щодо індексу стану.

На наступному етапі аналізу для оцінки стану конструкцій дорожніх одягів за результатами діагностики й наступного призначення ремонтних заходів необхідно досліджувати вплив внутрішніх параметрів моделі оцінки стану дорожніх одягів (тріщин, зон перезволоження й недоуцільнення) на показники, що характеризують міцнісний й деформаційний стани конструкції. Як було відзначено в роботах [2, 12], такими показниками є: загальний еквівалентний модуль пружності конструкції; напруги, що розтягують, діючі в монолітних шарах конструкції; напруги зрушення, що діють у ґрунтах земляного полотна й шарів з незв'язаних матеріалів, а також коефіцієнти запасу міцності за відповідними критеріями. У рамках запропонованої схеми інтерпретації результатів на даному етапі здійснюється моделювання за допомогою методу кінцевих елементів. Суть такого підходу складається в об'єднанні результатів попередніх етапів з можливостями сучасних систем комп'ютерного моделювання. У такому

випадку в основі розрахунків напружено-деформованого стану (далі – НДС) дорожніх одягів лежать базові рівняння теорії пружності, які складаються із трьох груп [32]. Для одержання цих рівнянь в околі розглянутої точки виділяється елементарний паралелепіпед з розмірами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  і перша група рівнянь, які називають статичними, визначає умови рівноваги цього елемента. Друга група – це геометричні рівняння, що пов'язують деформації елемента з переміщеннями його точок. І остання група, яка по суті є рівняннями, що виражають залежність між напругами й деформаціями. Оскільки в цих рівняннях враховуються механічні властивості матеріалу, їх прийнято називати фізичними. По суті, вони є відображенням закону Гука й мають вигляд [32]:

1. Статичні рівняння:

$$\mathbf{A} \vec{\sigma} + \vec{g} = 0, \quad (13)$$

де:  $\vec{\sigma}$  – вектор напруг, а  $\vec{g}$  – вектор інтенсивності об'ємного навантаження (наприклад, вага, сила інерції й т.д.). Матричний оператор диференціювання має вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix}. \quad (14)$$

2. Геометричні рівняння (їх називають також рівняннями Коші):

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \vec{u}, \quad (15)$$

де:  $\vec{\varepsilon}$  і  $\vec{u}$  вектори деформацій і переміщень, а матриця  $\mathbf{A}^T$  є транспонованою стосовно матриці  $\mathbf{A}$  (14).

3. Фізичні рівняння теорії пружності:

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{C} \vec{\sigma}. \quad (16)$$

де:  $\mathbf{C}$  – матриця пружної піддатливості матеріалу.

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Це рівняння для лінійно-пружних ізотропних тіл є виразом узагальненого закону Гука з урахуванням зв'язку між модулями пружності при розтяганні ( $E$ ), зрушенні ( $G$ ) і коефіцієнтом Пуассона ( $\mu$ ):

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (18)$$

Рівняння (16) дозволяють визначити деформації, якщо відомі напруги, й представляють закон Гука в прямій формі. Іноді при рішенні практичних завдань виникає необхідність зворотної постановки завдання, тобто визначення напруг по відомих деформаціях. У такій ситуації необхідно розв'язати рівняння (16) щодо напруг. Для цього можна використати закон Гука у зворотній формі:

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D} \vec{\varepsilon}, \quad (19)$$

де:  $\mathbf{D}$  – матриця твердості матеріалу, що має вигляд:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \quad (20)$$

а, параметр  $\lambda$  - коефіцієнт Ламе:

$$\lambda = \frac{2 \mu G}{1 - 2 \mu} = \frac{\mu E}{(1 - 2 \mu) \cdot (1 + \mu)}. \quad (21)$$

Оскільки рівняння (13, 15) є диференціальними рівняннями, то для знаходження єдиного рішення завдання в кожному конкретному випадку до співвідношень (13, 15, 16) необхідно додати додаткові умови. При розгляді статичних завдань це повинні бути як власне умови на границях (граничні умови), так й умови, що задають навантаження. Всі разом вони повинні забезпечувати з математичної точки зору існування й єдність розв'язку завдання, що сформульовано. Ці співвідношення являють собою основу для побудови обчислювальних алгоритмів і проведення комплексного аналізу поведінки конструкції.

Після цього вже може бути реалізований етап прогнозування, але тепер на якісно новому рівні. Зрозуміло, у межах однієї статті складно дати детальний огляд всіх можливих напрямків розвитку систем обробки й інтерпретації даних, які спираються на досягнення сучасної математичної фізики, теорії електромагнетизму, а також методів і засобів обчислювальної діагностики й прогнозування. Відповідні результати автор сподівається опублікувати в наступній частині роботи.

## ВИСНОВКИ

У статті наведено аналіз раніше отриманих результатів, в основі яких лежить сукупність не тільки різних методів, але й фактичне об'єднання декількох наукових напрямків. Запропонований підхід включає об'єднання етапів одержання первинних даних за допомогою георадарів і наступної їхньої обробки із залученням створеного програмного забезпечення GeoVizu, а далі - виконання на наступному етапі оцінки й прогнозування стану конструкцій дорожніх одягів нежорсткого типу на основі процедури комплексного застосування динамічних моделей локального рівня й марковських моделей мережевого рівня. Цей підхід показав ефективність одержуваних оцінок, особливо в умовах обмеженого фінансування. Наступний етап оцінки стану промислових і будівельних конструкцій за результатами діагностики й подальшого призначення ремонтних заходів припускає дослідження впливу так званих внутрішніх параметрів моделі. До них ставляться міцнісні й деформаційні параметри, які визначають напружено-деформований стан конструкції. Подальший розвиток операторного підходу дозволив в підсумку запропонувати більш досконалу математичну модель оцінки й прогнозування поточного стану різних технічних і будівельних конструкцій, зокрема автомобільних доріг.

Таким чином, представлені результати дозволяють говорити про новий напрямок у наукових дослідженнях, що може бути визначен як комбінований багатопараметричний аналіз (combined multi-parametric analysis - CoMPA). Метою даного напрямку є дослідження взаємозалежних процесів у технічних конструкціях за допомогою методів математичної фізики при об'єднанні не тільки аналізу їхньої взаємодії з полями різної фізичної природи, але й при залученні математичних моделей з різних технічних областей.

Значимість отриманих результатів складається не тільки з нових моделей обробки й інтерпретації даних, але також з перспектив подальшого розвитку технічних засобів контролю й діагностики. Стимулом до такого розвитку є також накопичений досвід численних експериментальних досліджень, що дозволить глибше врахувати всю повноту фізичних явищ, що супроводжують процеси дистанційного зондування й неруйнівного контролю й забезпечити подальший прогрес у даному напрямку.

## Authors' ORCID ID

Д.О. Батраков  <http://orcid.org/0000-0002-6726-8162>



## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Батраков ДО. Алгоритми пошуку дефектів в інженерних спорудах за допомогою георадарів. (оглядова стаття, Частина I). Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Радіофізика та електроніка. 2019;31:16-26. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2019-31-02>.
2. Батракова АГ. Методология мониторинга дорожных одежд нежесткого типа с применением георадиолокационных технологий [Дис. доктора техн. наук, 05.22.11 – Автомобильные дороги и аэродромы]. Харьков; 2014. 397 с.
3. ДСТУ-НБВ.1.2-18:2016 Настанова щодо обстеження будівель і споруд для визначення та оцінки їх технічного стану.
4. Чуканова Наталя Петрівна Удосконалення організаційно-технологічних рішень моніторингу технічного стану будівель старої забудови. Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеню кандидата технічних наук. 05.23.08 – технологія та організація промислового та цивільного будівництва, Харків, 2020. [http://kstuca.kharkov.ua/wp-content/uploads/2020/03/\\_chukanova\\_avtoreferat.pdf](http://kstuca.kharkov.ua/wp-content/uploads/2020/03/_chukanova_avtoreferat.pdf)
5. Flanagan R, Jewell C, Norman G. Whole life appraisal for construction. John Wiley and Sons; 2005. 182 p.
6. Core Competencies for Federal Facilities Asset Management Through 2020: Transformational Strategies / National Research Council (U.S., 2008. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://www.nap.edu/openbook.php?record\\_id=12049](http://www.nap.edu/openbook.php?record_id=12049).
7. Batrakov DO, Antyufeyeva MS, Antyufeyev AV; Batrakova AG. GPR data processing for evaluation of the subsurface cracks in road pavements. 2017 9th International Workshop on Advanced Ground Penetrating Radar (IWAGPR); 2017; Edinbourg, Scotland, IEEE Conference Publications; p. 1-6. <http://ieeexplore.ieee.org/document/7996072/>
8. Батраков ДО, Антюфеева МС, Батракова АГ, Антюфеев АВ, Фан Хаоцзе. Применение георадаров для идентификации подповерхностных дефектов в дорожных покрытиях. Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, серія: «Радіофізика та електроніка». 2017;26:17-23.
9. Батраков ДО, Антюфеева МС, Хе Илунь, Батракова АГ, Чень Дунбо. Обнаружение цилиндрической неоднородности в плоско-слоистой среде. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Радіофізика та електроніка». 2017;27:17-23.
10. Батракова АГ, Урдзик СМ, Батраков ДО. Моделирование и оценка состояния дорожных одежд со сквозными трещинами в покрытии. Вестник ХНАДУ: Сб. научн. тр. 2019;85:48-58. **ISSN: 2219-5548**
11. Batrakova AG, Batrakov DO, Antyufeyeva Mariya S. Pavement deterioration model based on GPR datasets. Roads and Bridges - Drogi i Mosty, [S.l.]. 2018;17(1):55-71. ISSN 2449-769X. Available at: <>. Date accessed: 19 Apr. 2018. doi:<http://dx.doi.org/10.7409/rabdim.018.004>
12. Батракова АГ, Урдзик СМ, Батраков ДО. Динамические и эконометрические модели прогнозирования состояния автомобильных дорог. Вестник ХНАДУ: Сб. научн. тр. 2019;85:59-65. **ISSN: 2219-5548**
13. Батракова АГ, Процюк ВО. Алгоритм оцінки вологості ґрунтів земляного полотна за результатами георадіолокаційного обстеження. Вестник ХНАДУ: Сб. научн. тр. 2016;72:157-161. ISSN: 2219-5548.
14. Батраков ДО. Радиофизические Методы решения задач неразрушающего контроля и дистанционного зондирования в частотной области. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, Серія «Радіофізика та електроніка». 2018;28:8-15.
15. Батраков ДО, У Дион, Белошенко КС, Антюфеева МС, Батракова АГ. Сравнительный анализ двух алгоритмов толщинометрии плоскостойких сред с помощью импульсных георадаров. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, Серія «Радіофізика та електроніка». 2018;28:16-23.
16. Batrakov D, Beloshenko K, Antyufeyeva M, Batrakova A, Urdzik S. COMPARATIVE STUDY OF SIGNAL PROCESSING OF TWO UWB GPR ANTENNA UNITS. Telecommunications and Radio Engineering. 2019;78:109-116. DOI: [10.1615/TelecomRadEng.v78.i2.20](https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v78.i2.20)
17. Batrakov DO, Antyufeyeva MS, Beloshenko KS, Batrakova AG, Troyanovsky VV. GPR Signals Processing for the Road Pavements Monitoring with the Weak Contrast Layers. Conference Paper, Proceedings of European Microwave Conference in Central Europe; May 13-15, 2019; Prague, Czech Republic; p. 390-393.
18. Batrakov DO, Antyufeyeva MS, Batrakova AG, Troyanovsky VV, Pilicheva MO. UWB Signal Processing for the Road Pavements Assessment. Conference Paper, Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON); 2019. p. 1-4. <http://ukrcon.ieee.org.ua/program/> DOI: [10.1109/UKRCON.2019.8879866](https://doi.org/10.1109/UKRCON.2019.8879866)

19. Angelika G. Batrakova, Vladimir V. Troyanovsky, Dmitry O. Batrakov, Maryna O. Pilicheva, Nataliia S. Skrypnyk. Prediction of the road pavement condition index using stochastic models. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, 2020;19(3):225-242. DOI: [10.7409/rabdim.020.015](https://doi.org/10.7409/rabdim.020.015). Published: 2020-09-30
20. Benny R, Smith IFC. *Fundamentals Computer-Aided Engineering*. John Wiley & Sons. Paperback; 2003, 328 p. ISBN-13 : 978-0471487159.
21. Батраков Д.О. Радиофизические модели дистанционного зондирования и диагностики. Lambert Academic Publishing, Düsseldorf, Germany; 2017. 309 p. ISBN: 978-620-2-09485-6.
22. Krzhizhanovskaya VV, Sun S. Simulation of Multiphysics Multiscale Systems: Introduction to the ICCS'2007 Workshop. *Computational Science ICCS 2007*, Springer Berlin Heidelberg; 2007; p. 755-761, doi:[10.1007/978-3-540-72584-8\\_100](https://doi.org/10.1007/978-3-540-72584-8_100), ISBN [9783540725831](https://doi.org/10.1007/9783540725831)
23. Groen D, Zasada SJ, Coveney PV. Survey of Multiscale and Multiphysics Applications and Communities. 2012-08-31. [arXiv:1208.6444](https://arxiv.org/abs/1208.6444)
24. "COMSOL Modeling Software". COMSOL.com. Comsol, Inc. Retrieved 20 November 2015.
25. Martin Courtney. Multiphysics brings the real world into simulations. *Eandt.theiet.org*, Published Monday, March 16, 2015. PP. 1-5. <https://eandt.theiet.org/content/articles/2015/03/multiphysics-brings-the-real-world-into-simulations/>
26. Max Born, Emil Wolf. *Principles of Optics (Sixth Edition)*. Pergamon; 1980. 891 p. ISBN 9780080264820, <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-026482-0.50001-3>.
27. Karan Kumar, Pradhan Snehashish. Chakraverty. *Finite Element Method. Computational Structural Mechanics, Static and Dynamic Behaviors*; 2019. p. 25-28. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-815492-2.00010-1>
28. Chari MVK, Salon SJ. *Numerical Methods in Electromagnetism, Electromagnetism, The finite difference method*; 2000. p. 105-141.
29. Roe PL. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *J. of Comp. Physics*. 1981;43:337-372.
30. Anderson WK, Thomas JL, van Leer B. Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations. *AIAA J*. 1986;24(9):1453-1460.
31. Ковеня ВМ, Чирков ДВ. *Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики Учебное пособие, Новосибирск; 2013. с. 87. <http://www.ict.nsc.ru/matmod/files/textbooks/KovenyaChirkov.pdf>*
32. Александров АВ, Потапов ВД. *Основы теории упругости и пластичности. Москва: Высш. шк.; 1990. 400 с.*

#### REFERENCES

1. Batrakov DO. Algorithms for searching defects in engineering structures using GPR (Review article, Part I) *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. "Radiophysics and Electronics"*. 2019;31:16-26. [In Russian] DOI: <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2019-31-02>.
2. Batrakova AG. Methodology for monitoring non-rigid road pavements with the use of ground-penetrating radar technologies [dis. ... doctor tech. Sciences: 05.22.11 - Highways and airfields]. – Kharkov; 2014. 397 p. [In Russian]
3. DSTU-NBV.1.2-18: 2016 *Nastanova for routine maintenance and assessment of technical conditions*. [In Ukrainian].
4. Chukanova Natalya Petrivna. Improvement of organizational and technological solutions for monitoring the technical condition of old buildings. Abstract of the dissertation for the degree of candidate of technical sciences. 05.23.08 - technology and organization of industrial and civil construction, Kharkiv, 2020. [In Ukrainian]. [http://kstuca.kharkov.ua/wp-content/uploads/2020/03/chukanova\\_avtoreferat.pdf](http://kstuca.kharkov.ua/wp-content/uploads/2020/03/chukanova_avtoreferat.pdf)
5. Flanagan R, Jewell C, Norman G. *Whole life appraisal for construction*. John Wiley and Sons; 2005. 182 p.
6. *Core Competencies for Federal Facilities Asset Management Through 2020: Transformational Strategies / National Research Council (U.S., 2008. – [Electronic resource]. – Available at: [http://www.nap.edu/openbook.php?record\\_id=12049](http://www.nap.edu/openbook.php?record_id=12049)*.
7. Batrakov DO, Antyufeyeva MS, Antyufeyev AV, Batrakova AG. GPR data processing for evaluation of the subsurface cracks in road pavements. 2017 9th International Workshop on Advanced Ground Penetrating Radar (IWAGPR); 2017, Edinbourg, Scotland, IEEE Conference Publications; p. 1-6. <http://ieeexplore.ieee.org/document/7996072/>
8. Batrakov DO, Antyufeyeva MS, Batrakova AG, Antyufeyev AV, Fan Haotsze. Application of GPR for identification of subsurface defects in road surfaces. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. "Radiophysics and Electronics"*. 2017;26:17-23. [In Russian].
9. Batrakov DO, Antyufeyeva MS, He Ylun, Batrakova AG, Chen Dongbo. Detection of cylindrical inhomogeneity in a layered medium. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. "Radiophysics and Electronics"*. 2017;27:17-23. [In Russian].

10. Batrakova AG, Urdzik SM, Batrakov DO. Modeling and assessment of the condition of pavements with through cracks in the pavement. *HNADU Bulletin: Sb. scientific. tr.* 2019;85:48-58. ISSN: 2219-5548 [In Russian].
11. Batrakova AG, Batrakov DO, Antyufeyeva MS. Pavement deterioration model based on GPR datasets. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, [S.l.]. 2018;17(1):55-71. ISSN 2449-769X. Available at: <>. Date accessed: 19 Apr. 2018. doi:<http://dx.doi.org/10.7409/rabdim.018.004>
12. Batrakova AG, Urdzik SM, Batrakov DO. Dynamic and econometric models for predicting the state of highways *Vestnik KhNADU: Sb. scientific. tr.* 2019;85:59-65. ISSN: 2219-5548 [In Russian].
13. Batrakova AG, Protsyuk VO. Algorithm for assessing the quality of the ground bed according to the results of georadiolocation coverage. *HNADU Bulletin: Sat. scientific. tr.* 2016;72:157-161. ISSN: 2219-5548 [In Russian].
14. Batrakov DO. Radiophysical Methods for solving problems of non-destructive testing and remote sensing in the frequency domain. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. "Radiophysics and Electronics"*. 2018;28:8-15. [In Russian]
15. Batrakov DO, U Diyun, Beloshenko KS, Antyufeyeva MS, Batrakova AG. Comparative analysis of two algorithms for thickness measurement of plane-layered media using pulsed GPR. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. "Radiophysics and Electronics"*. 2018;28:16-23. [In Russian]
16. Batrakov DO, Beloshenko KS, Antyufeyeva MS, Batrakova AG, Urdzik S.. COMPARATIVE STUDY OF SIGNAL PROCESSING OF TWO UWB GPR ANTENNA UNITS. *Telecommunications and Radio Engineering.* 2019;78:109-116. DOI: [10.1615/TelecomRadEng.v78.i2.20](https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v78.i2.20)
17. Batrakov DO, Antyufeyeva MS, Beloshenko KS, Batrakova AG, Troyanovsky VV. GPR Signals Processing for the Road Pavements Monitoring with the Weak Contrast Layers. Conference Paper, Proceedings of European Microwave Conference in Central Europe; May 13-15, 2019; Prague, Czech Republic; p. 390-393.
18. Batrakov DO, Antyufeyeva MS, Batrakova AG, Troyanovsky VV, Pilicheva MO. UWB Signal Processing for the Road Pavements Assessment. Conference Paper, Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON); 2019. p. 1-4. <http://ukrcon.ieee.org.ua/program/> DOI: [10.1109/UKRCON.2019.8879866](https://doi.org/10.1109/UKRCON.2019.8879866)
19. Batrakova AG, Troyanovsky VV, Batrakov DO, Pilicheva MO, Skrypnyk NS. Prediction of the road pavement condition index using stochastic models. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, 2020;19(3):225-242. DOI: [10.7409/rabdim.020.015](https://doi.org/10.7409/rabdim.020.015). Published: 2020-09-30
20. Benny Raphael, Smith I.F.C. *Fundamentals Computer-Aided Engineering.* John Wiley & Sons. Paperback, 2003, 328 pages, ISBN-13 : 978-0471487159.
21. Batrakov DO. Radiophysical models of remote sensing and diagnostics. Lambert Academic Publishing, Düsseldorf, Germany; 2017. 309 p. ISBN: 978-620-2-09485-6.
22. Krzhizhanovskaya VV, Sun Shuyu. Simulation of Multiphysics Multiscale Systems: Introduction to the ICCS'2007 Workshop. *Computational Science ICCS 2007*, Springer Berlin Heidelberg; 2007; p. 755-761, doi:[10.1007/978-3-540-72584-8\\_100](https://doi.org/10.1007/978-3-540-72584-8_100), ISBN [9783540725831](https://doi.org/10.1007/978-3-540-72584-8)
23. Groen D, Zasada SJ, Coveney PV. Survey of Multiscale and Multiphysics Applications and Communities. 2012-08-31 [arXiv:1208.6444](https://arxiv.org/abs/1208.6444)
24. "[COMSOL Modeling Software](https://www.comsol.com/)". *COMSOL.com*. Comsol, Inc. Retrieved 20 November 2015.
25. Martin Courtney. Multiphysics brings the real world into simulations. *Eandt.theiet.org*, Published Monday, March 16, 2015. p. 1-5. <https://eandt.theiet.org/content/articles/2015/03/multiphysics-brings-the-real-world-into-simulations/>
26. Max Born, Emil Wolf. *Principles of Optics (Sixth Edition)*, Pergamon; 1980, 891 p. ISBN 9780080264820, <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-026482-0.50001-3>.
27. Karan Kumar, Pradhan Snehashish. Chakraverty. *Finite Element Method. Computational Structural Mechanics, Static and Dynamic Behaviors*; 2019. p. 25-28. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-815492-2.00010-1>
28. Chari MVK, Salon SJ. *Numerical Methods in Electromagnetism, Electromagnetism, The finite difference method*; 2000. p. 105-141.
29. Roe PL. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *J. of Comp. Physics.* 1981;43:337-372.
30. Anderson WK, Thomas JL, van Leer B. Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations. *AIAA J.* 1986;24(9)1453-1460.
31. Kovenya VM, Chirkov DV. *Methods of finite differences and finite volumes for solving problems of mathematical physics* Textbook, Novosibirsk; 2013. p. 87. <http://www.ict.nsc.ru/matmod/files/textbooks/KovenyaChirkov.pdf>
32. Aleksandrov AV, Potapov VD. *Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity.* - Moscow: Higher. Shk; 1990. 400 p.