

Оригінальна стаття

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2019-31-08>

УДК 621.373.826:535.36

ОЦІНКА МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ ФАЗОВОГО ЗСУВУ ХВИЛЬОВИХ ФРОНТІВ ВЛАСНИХ МОД КОНФОКАЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА

К.І. Мунтян

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, м. Свободи, 4

E-mail: muntean@univer.kharkov.ua

Надійшла до редакції 23 жовтня 2019 р.

Актуальність. Перевизначення одиниці довжини - метра - через одиницю часу і фундаментальну константу - швидкість світла у вакуумі - відкрило принципову можливість істотного зниження невизначеності її відтворення. У теперішній час прогрес в таких галузях науки і техніки, як абсолютна балістична гравіметрія, контроль великогабаритної асферичної оптики, лазерна інтерферометрія, виробництво електронних компонентів в напівпровідникової промисловості, зробив цю можливість надзвичайно актуальною. Відомо, що вимірювальна шкала лазерних інтерферометрів, що застосовуються для прецизійного вимірювання відстаней, нелінійна, так як синфазні поверхні будь-якого реального пучка випромінювання розташовані в просторі нерегулярно. Для компенсації впливу цієї нерегулярності на результат вимірювання необхідне знання прецизійної фазової структури реальних лазерних пучків.

Мета роботи. Порівняння і оцінка теоретичних методів розрахунку величини фазового зсуву і закону його розподілу вздовж оптичної осі пучка оптичного випромінювання.

Матеріали та методи. Розглянуто та порівняно відомі методи розрахунку топологічного фазового зсуву синфазних поверхонь пучка оптичного випромінювання - метод Ломмеля-Дебая на основі інтеграла Френеля-Кірхгофа, модифікований метод на основі інтеграла Релея-Зоммерфельда і метод гауссова пучка на основі параболічного рівняння.

Результати. Кожним методом проведені розрахунки відставання фази, що накопичена, для сфокусованого пучка випромінювання при переміщенні площини спостереження щодо його фокусної точки. Обчислено також розподіл відносної зміни відстані між синфазними поверхнями в діапазоні переміщень від λ до $10^6 \cdot \lambda$. Найбільш адекватна фізична картина явища отримана методом гауссова пучка на основі параболічного рівняння.

Висновки. Отримані результати знайдуть застосування для зниження систематичної помилки лазерних інтерферометрів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: відтворення одиниці довжини, нерегулярність синфазних поверхонь, топологічна фаза

ESTIMATION OF METHODS FOR CALCULATING THE PHASE SHIFT OF WAVE FRONTS OF OWN MODES OF A CONFOCAL RESONATOR

K.I. Muntean

V. N. Karazin Kharkiv National University, 4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, Ukraine

Background. The redefinition of a unit of length - a meter - through a unit of time and a fundamental constant - the speed of light in vacuum - has opened up the fundamental possibility of a significant reduction in the uncertainty of its reproduction. Now progress in areas such as absolute ballistic gravimetry, control of large-sized aspherical optics, laser interferometry, and the production of electronic components in the semiconductor industry have made this feature extremely relevant. It is known that the measuring scale of laser interferometers used for precision distance measurement is non-linear, since the common-mode surfaces of any real radiation beam are located irregularly in space. To compensate for the effect of this irregularity on the measurement result, it is necessary to know the precision phase structure of real laser beams.

Objectives of the work is comparing existing methods for studying the phase structure of optical radiation beams and estimating the distribution of the topological phase shift of a relatively uniform plane wave.

Materials and methods. The well-known theoretical methods for calculating the topological phase shift of in-phase surfaces of an optical beam are considered and compared - the Lommel-Debye method based on the Fresnel-Kirchhoff integral, the modified method based on the Rayleigh-Sommerfeld integral and the Gaussian beam method based on a parabolic equation.

Results. Each method performed calculations of the accumulated phase lag of the focused radiation beam when moving the observation plane relative to the focal point. The distribution of the relative change in the distance between the in-phase surfaces in the range of displacements from λ to $10^6 \cdot \lambda$ was also calculated. The most adequate physical picture of the phenomenon was obtained by the Gaussian beam method based on a parabolic equation.

Conclusion. The results will be used to reduce the systematic error of laser interferometers.

KEYWORDS: reproduction of a unit of length, irregularity of in-phase surfaces, topological phase.

ОЦЕНКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА ФАЗОВОГО СДВИГА ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ СОБСТВЕННЫХ МОД КОНФОКАЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА

К.И. Мунтян

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, 61022, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Актуальность. Переопределение единицы длины – метра – через единицу времени и фундаментальную константу – скорость света в вакууме – открыло принципиальную возможность существенного снижения неопределенности ее воспроизведения. В настоящее время прогресс в таких областях науки и техники, как абсолютная баллистическая гравиметрия, контроль крупногабаритной асферической оптики, лазерная интерферометрия, производство электронных компонентов в полупроводниковой промышленности, сделал эту возможность чрезвычайно актуальной. Известно, что измерительная шкала лазерных интерферометров, применяемых для прецизионного измерения расстояний, нелинейна, так как синфазные поверхности любого реального пучка излучения расположены в пространстве нерегулярно. Для учета и компенсации влияния этой нерегулярности на результат измерения необходимо знание прецизионной фазовой структуры реальных лазерных пучков.

Цель работы - сравнение существующих теоретических методов расчета фазовой структуры пучков оптического излучения и оценка распределения топологического фазового сдвига относительно однородной плоской волны.

Материалы и методы. Рассмотрены и сравнены известные методы расчета топологического фазового сдвига синфазных поверхностей пучка оптического излучения – метод Ломмеля-Дебая на основе интеграла Френеля-Кирхгофа, модифицированный метод на основе интеграла Рэлея-Зоммерфельда и метод гауссова пучка на основе параболического уравнения.

Результаты. Каждым методом проведены расчеты накопленного интегрального отставания фазы сфокусированного пучка излучения при перемещении плоскости наблюдения относительно фокальной точки. Вычислено также распределение относительного изменения расстояния между синфазными поверхностями в диапазоне перемещений от λ до $10^6 \cdot \lambda$. Наиболее адекватная физическая картина явления получена методом гауссова пучка на основе параболического уравнения.

Выводы. Полученные результаты найдут применение для снижения систематической ошибки лазерных интерферометров.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: воспроизведение единицы длины, нерегулярность синфазных поверхностей, топологическая фаза

ВСТУП

Важливість точних вимірювань фізичних величин, в тому числі довжини і часу, у сучасному світі є беззаперечною. Визначення одиниці довжини, яке зараз існує, спирається на точно відому швидкість C світла у вакуумі та частоту ν випромінювання оптичного стандарту частоти [1]. В даний час відносна нестабільність і невідтворюваність частоти випромінювання сучасних лазерних оптичних стандартів досягає 10^{-19} [2]. Саме так точно ми можемо розрахувати відстань між двома синфазними поверхнями (a wavefront spacing = wavelength $\lambda_0 = C / \nu$) одновимірної однорідної плоскої хвилі в вакуумі. Але наш тривимірний фізичний світ такий, що лазерний стандарт випромінює не однорідну плоску хвилю, а просторово обмежений оптичний пучок. Відстань між синфазними поверхнями хвильових фронтів реального лазерного пучка випромінювання неоднакова уздовж оптичної осі пучка, на відміну від такої у плоскої хвилі. Навіть у вакуумі ця відстань у реального пучка завжди більше, ніж довжина хвилі λ_0 однорідної плоскої хвилі, і в міру віддалення в нескінченність вона зменшується, наближаючись до λ_0 . Утворена хвильовими фронтами вимірювальна шкала довжин нелінійна, тому сучасні еталони промислово розвинених країн відтворюють одиницю довжини з відносною похибкою в кілька одиниць дев'ятого знака [3]. Для зниження похибки відтворення одиниці довжини необхідно вміти точно розраховувати подовжену фазову структуру пучків оптичного випромінювання, які застосовують на практиці. Знання фазової структури лазерного пучка також важливо в таких галузях науки і техніки, як абсолютна балістична гравиметрія [4], контроль великогабаритної асферичної оптики, лазерна інтерферометрія [5, 6], виробництво електронних компонентів в напівпровідниковій промисловості [7].

Будь-які фізичні системи, які виявляють хвильові властивості, характеризуються динамічною фазою, яка описує поширення хвилі. В даний час відомо, що при циклічній зміні будь-яких параметрів системи на додаток до динамічній фазі виникає топологічний фазовий зсув, знак і величина якого визначаються специфічними властивостями простору параметрів фізичної системи. Історично першим проявом топологічної фази в оптиці було відкриття стрибка фази в фокусі оптичної лінзи, яке продемонстрував L. G. Гоцу в 1890 [8]. У 1938 - 1941 С. М. Ритов і В. В. Володимирський описали додатковий набіг фази, який виникає при поширенні поляризованого оптичного пучка по вигнутій траєкторії в тривимірному просторі. У 1956 році S. Pancharatnam показав, що зміна поляризації випромінювання також веде до появи додаткового набігу фази хвилі навіть при прямолінійному поширенні світлового пучка. Топологічні фазові ефекти в цей же час неодноразово спостерігалися

експериментально в квантовій механіці – ефекти Яна-Теллера (1937), Ааронового-Бома (1959), спіновий ефект Холла (1971) та ін.

Фактично наукове співтовариство почало обговорювати топологічну фазу в квантовій механіці ще на початку ХХ-го століття, але тільки після опублікування відомої статті М. V. Berry 1984 року [9] було усвідомлено, що народилося нове універсальне фізичне поняття. Після публікації статті Беррі феномен топологічної фази був виявлений в класичній механіці, гідродинаміці, акустиці, хімії, фізиці елементарних частинок і інших галузях науки. Кількість публікацій з дослідження фази Гуї продовжує збільшуватися, хоча з моменту її відкриття пройшло більше ста років. Розвинені різні гіпотези для пояснення феномена фазового зсуву. Ці гіпотези враховують геометричні властивості гауссових пучків [10], вплив коефіцієнта i/λ в інтегралі Кірхгофа [11], топологічну фазу Беррі [12], періодичну зміну комплексної кривизни хвильового фронту пучка [13], принцип невизначеності Гейзенберга [14, 15], астигматизм пучка випромінювання [16]. Саме факт наявності великої кількості гіпотез підтверджує думку Е. Wolf і Т. D. Visser, що "фаза Гуї відноситься до самих важко зрозумілих явищ в оптиці" [16].

Метою цієї роботи є порівняння існуючих методів розрахунку фазового зсуву синфазних поверхонь сфокусованого лазерного пучка щодо однорідної плоскої хвилі і визначення особливостей його розподілу.

СКАЛЯРНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ЗСУВУ ФАЗИ

1. Тривимірний розподіл світла поблизу фокуса лінзи вперше досліджували Е. Lommel, Н. Struve і К. Schwarzschild. Пізніше Р. Debye вирішив цю задачу вдруге. Коротко розглянемо ключові особливості методу Е. Lommel, який модифіковано Р. Debye [17].

Нехай сферична монохроматична хвиля виходить з круглого отвору і сходиться в осьовій фокальній точці O . Необхідні позначення вказані на Рис. 1.

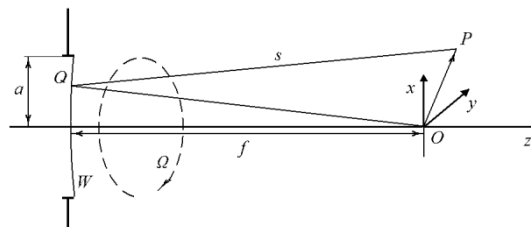


Рис. 1. Пояснення позначень.

Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля поле $U(P)$ в довільній точці спостереження P є інтегралом по площі S хвильового фронту

$$U(P) = -\frac{i A \exp(-ikf)}{\lambda f} \iint_w \frac{\exp(iks)}{s} dS$$

де A - амплітуда хвилі, $k = 2\pi / \lambda_0$ - хвильовий вектор, λ_0 - довжина хвилі у вільному просторі.

Вважаючи $s \approx f$ і $dS = f^2 d\Omega$, переходимо до інтеграла Дебая по тілесному куту Ω , під яким апертуру видно з фокусу

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} A \iint_{\Omega} \exp(-ik(s - f)) d\Omega$$

Розкладаємо аргумент експоненти $(s - f)$ в ряд і залишаємо складові першого та другого ступеня малості. Потім вводимо безрозмірні змінні

$$u = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{f}\right)^2 z ; \quad v = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{f}\right) (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

і отримуємо вираз для поля в точці P

$$U(P) = -\frac{2\pi i a^2 A}{\lambda f^2} \exp\left[i\left(\frac{f}{a}\right)^2 u\right] \int_0^{\frac{1}{2}} J_0(v\rho) \exp\left(-\frac{1}{2} i u \rho^2\right) \rho d\rho \tag{2}$$

де ρ - радіальна координата точки Q (Рис. 1).

Позначимо як $C(u, v)$ і $S(u, v)$ речову і уявну частини інтеграла, відповідно

$$2 \int_0^1 J_0(v\rho) \exp\left(-\frac{1}{2} iu\rho^2\right) \rho d\rho = C(u, v) - iS(u, v)$$

Інтегруючи по частинах, отримуємо

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \frac{2}{u} \sin \frac{v^2}{2u} + \frac{\sin\left(\frac{1}{2}u\right)}{\frac{1}{2}u} V_0(u, v) - \frac{\cos\left(\frac{1}{2}u\right)}{\frac{1}{2}u} V_1(u, v) \\ S(u, v) &= \frac{2}{u} \cos \frac{v^2}{2u} - \frac{\cos\left(\frac{1}{2}u\right)}{\frac{1}{2}u} V_0(u, v) - \frac{\sin\left(\frac{1}{2}u\right)}{\frac{1}{2}u} V_1(u, v) \end{aligned} \quad (3)$$

де $V_n(u, v)$ - функція Ломмеля [18].

Згідно з (2) і (3), фаза поля є

$$\varphi(u, v) = -\frac{\pi}{2} + \left(\frac{f}{a}\right)^2 - \arctg \frac{S(u, v)}{C(u, v)} \mp 2\pi n$$

Так як для осьових точок [19]

$$V_0(u, 0) = 1; V_1(u, 0) = 0,$$

то, повертаючись до розмірних змінних, отримуємо

$$\varphi(u, v) = -\frac{\pi}{2} + kz - \arctg \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{a}{f}\right)^2 z\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{f}\right)^2 z\right)} \mp 2\pi n \quad (4)$$

Отже, в найближчій околиці фокусної точки (тобто при малих z) фаза є

$$\varphi(u, v) = -\frac{\pi}{2} + kz - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{f}\right)^2 kz \mp 2\pi n$$

і довжина хвилі випромінювання поблизу фокусу в $1/(1 - a^2/4f^2)$ більша, ніж для плоскої хвилі.

Викладений метод є класичним і широко застосовується для різних розрахунків аж до теперішнього часу [16, 19, 20].

2. Останнім часом стала відома модифікація розглянутого методу [21].

У вдосконаленому методі замість інтеграла Френеля-Кірхгофа використовують інтеграл Релея-Зоммерфельда, а перехід до безрозмірних змінних здійснюють згідно співвідношенням

$$u = \frac{2\pi a^2}{\lambda} \frac{z}{f(f+z)}; \quad v = \frac{2\pi a}{\lambda} \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{f+z} \quad (5)$$

Таке перетворення координат, на відміну від (1), не є афінним, що призводить до нелінійної зміни розрахункових співвідношень.

Згідно з модифікованим методом фаза поля на осьовій лінії пучка з урахуванням (5) є

$$\varphi(z) = -\frac{\pi}{2} + kz - \arctg \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi a^2}{2\lambda f} \frac{z}{f+z}\right)}{\sin\left(\frac{\pi a^2}{\lambda f} \frac{z}{f+z}\right)} \mp 2\pi n \quad (6)$$

тобто при малих z фаза $\varphi(u, v)$ є

$$\varphi(u, v) = -\frac{\pi}{2} + kz - \frac{1}{4} \frac{a^2}{f(f+z)} kz \mp 2\pi n$$

і довжина хвилі випромінювання поблизу фокусу в $1/(1 - a^2/4f(f+z))$ більша, ніж для плоскої хвилі.

3. В теорії відкритих резонаторів розрахунок фазової структури гауссова пучка заснований на теорії

параболічного рівняння.

Фазовий зсув на осі гауссова пучка в конфокальному лазерному резонаторі є [22]

$$\varphi(z) = kz - \arctg \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \quad (7)$$

Співвідношення (4), (6) і (7) для фаз на осі пучка випромінювання дозволяють оцінити методи, які розглядаються.

МЕТОДИКА ПОРІВНЯННЯ І РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ

Для порівняння методів за розрахунковими формулами (4), (6) і (7) проводилися два види розрахунків.

1. Обчислювалося абсолютне сумарне відставання фази на оптичній осі сфокусованого пучка від фази плоскої хвилі як функція відстані від фокусної точки.

Обчислення проводилися в абсолютних одиницях для відстані від фокусної точки від 1 мм до 1000 мм для фокальних відстаней 10 мм, 100 мм і 1000 мм. Для забезпечення еквівалентних умов розрахунку апертура лінзи для методів Ломмеля-Дебая і модифікованого методу вибиралася рівною розміру плями основної моди на дзеркалі конфокального резонатора при розрахунку за методом гауссова пучка. Результати розрахунку наведені на Рис. 2.

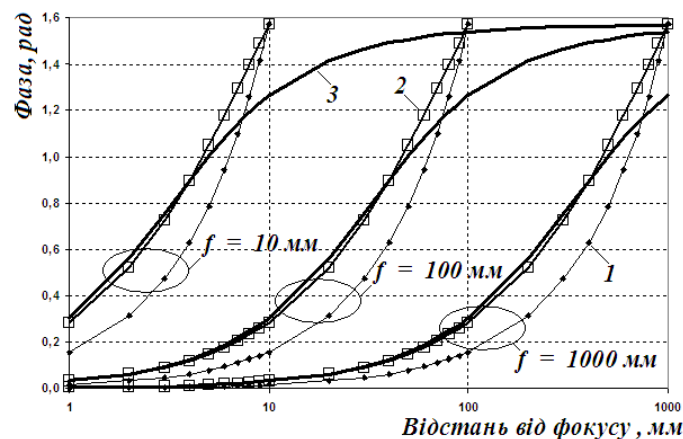


Рис. 2. Залежність величини відставання по фазі для сфокусованого пучка від відстані від фокусу.

1 - розрахунок за методом Ломмеля-Дебая; 2 - розрахунок за модифікованим методом;
3 - розрахунок за методом гауссова пучка.

Проведені розрахунки дали такі результати:

- при розрахунку Ломмеля - Дебая і модифікованим методами інтегральне відставання фази на $\pi / 2$ накопичується в межах зони Релея для всіх значень фокусних відстаней, тоді як при розрахунку методом гауссова пучка таке накопичення фази відбувається в нескінченності, що краще відповідає реальній картині поширення лазерного пучка;
- метод Ломмеля-Дебая в порівнянні з методом гауссова пучка дає занижені значення інтегрального відставання фази на більшій частині зони Релея і завищені значення при наближенні до межі цієї зони для всіх значень фокусних відстаней;
- розрахунок модифікованим методом на початку і середині зони Релея дає результат, що добре збігається з результатом розрахунку методом гауссова пучка, а поблизу кордону цієї зони його результати наближаються до результатів розрахунку методом Ломмеля-Дебая.

2. Обчислювалося відносне збільшення відстані між синфазними поверхнями на оптичній осі пучка випромінювання як функція відстані від фокусної точки.

Всі параметри в обчисленні нормувалися на довжину хвилі λ_0 . Діапазон фокальних відстаней лінзи варіювався від 1 до 10^6 , в такому ж діапазоні змінювалась відстань площини спостереження від фокусної точки. Сімейства графіків, які розраховані методами, що порівнюються, наведено Рис. 3-5. Параметрами графіків служили нормовані на довжину хвилі λ_0 фокальні відстані лінз.

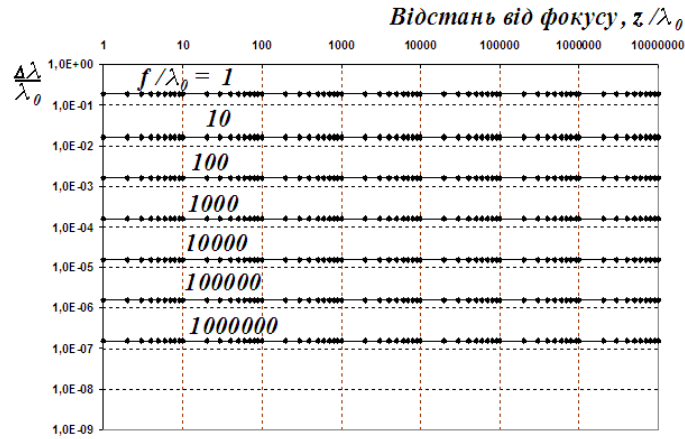


Рис. 3. Залежність збільшення довжини хвилі від відстані від фокуса за методом Ломмеля-Дебая.

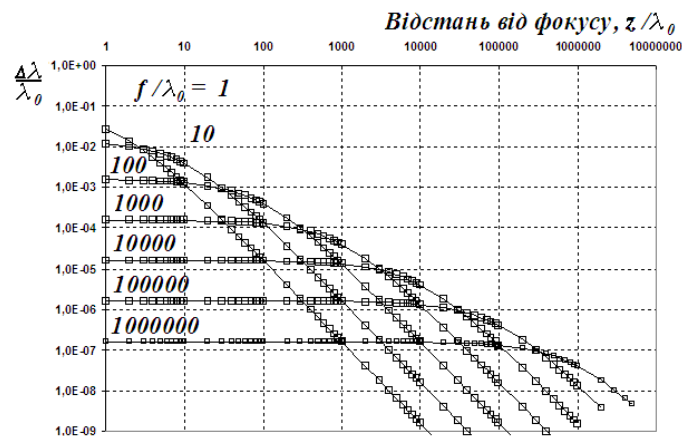


Рис. 4. Залежність збільшення довжини хвилі від відстані від фокуса за модифікованим методом.

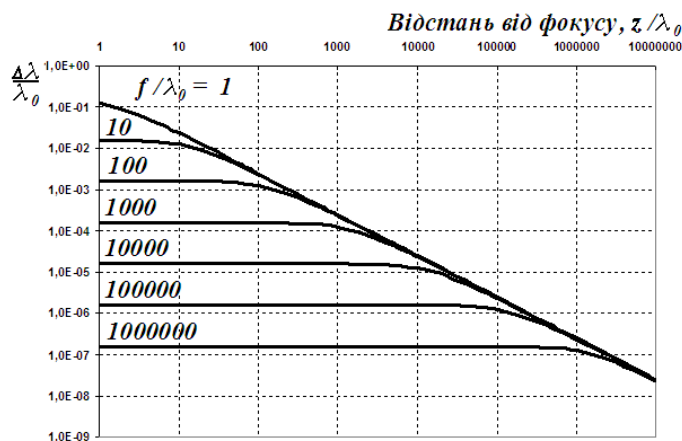


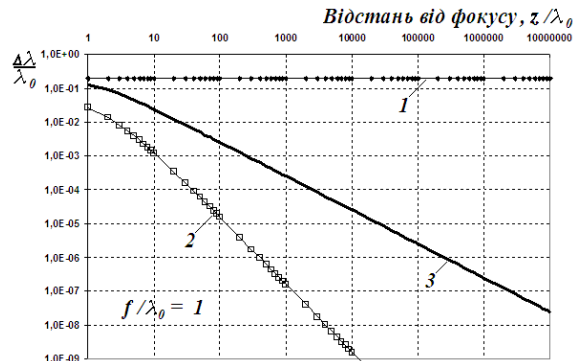
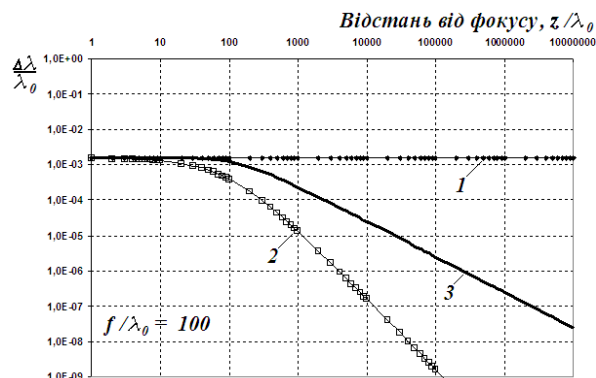
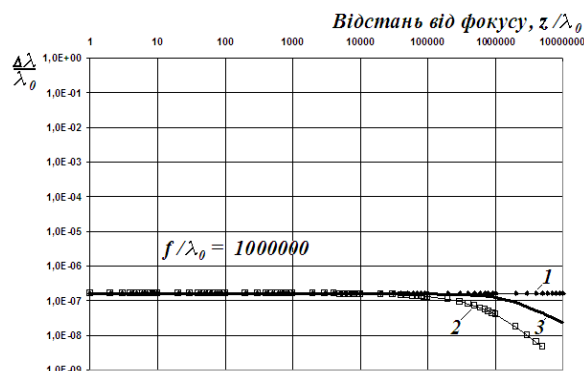
Рис. 5. Залежність збільшення довжини хвилі від відстані від фокуса за методом гауссова пучка.

Проведені розрахунки дали такі результати:

- розрахунок за всіма трьома методами показав, що збільшення відстані між синфазними поверхнями (довжина хвилі) істотно залежить від фокусної відстані лінзи, причому для короткофокусних лінз відносне збільшення довжини хвилі більше, ніж для довгофокусних;
- отримано також збіг розрахункових результатів усіх трьох методів в зоні Релея. Задовільний збіг

результатів спостерігається навіть при $f/\lambda_0 = 1$ (Рис. 6, тут і далі позначення графіків як на Рис. 2), де розрахункові формули фактично втрачають силу. Починаючи ж з $f/\lambda_0 = 100$ (Рис. 7 і 8) збіг результатів дуже гарний;

- розрахунок за методом Ломмеля-Дебая показав, що збільшення довжини хвилі не залежить від відстані від фокуса. Ясно, що такий результат не має фізичного смисла і, отже, розрахункова формула (4) придатна тільки для розрахунків в зоні Релея;
- розрахунок за модифікованим методом показав, що збільшення довжини хвилі мало змінюється в межах зони Релея і монотонно зменшується за її межами, наближаючись до довжини хвилі вільного простору;
- розрахунок за методом гауссова пучка, який відрізняється кількісно за межами зони Релея, якісно виявив таку ж поведінку результатів, як і розрахунок за модифікованим методом.

Рис. 6. Збіг результатів в зоні Релея при $f/\lambda_0 = 1$.Рис. 7. Збіг результатів в зоні Релея при $f/\lambda_0 = 100$.Рис. 8. Збіг результатів в зоні Релея при $f/\lambda_0 = 1000000$.

ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянуті скалярні методи розрахунку, як відомо містять багато припущень:

- вихідний принцип Гюйгенса-Френеля евристичен за своєю природою;
- крайові умови для дифракційного інтеграла нереальні;
- сферичні поверхні і хвильові фронти явно або неявно замінюються параболічними;
- функції Гріна, коректні для площини, застосовуються для вигнутих поверхонь;
- малі складові не враховуються.

Як результат, розрахунок фазових зсувів за формулами (4), (6) і (7), які всі спираються на єдиний

евристичний принцип Гюйгенса - Френеля, має невідому систематичну похибку. Ця похибка проявляється не тільки в кількісно різних результатах розрахунків, але і в якісній відмінності виразів для фазових зсувів, причому немає вагомих підстав вважати кращим який-небудь вираз перед двома іншими, принаймні в зоні Релея. Але виходячи з того, що метод гауссова пучка дає результати, близькі до середніх в зоні Релея, які мають фізичний зміст навіть за межами цієї зони, можливо рекомендувати до застосування саме метод гауссова пучка.

ВИСНОВОК

За результатами даного розгляду методів розрахунку топологічного фазового зсуву хвильових поверхонь слід рекомендувати до застосування метод гауссова пучка. Проте необхідно відзначити, що підвищення точності розрахунку фазової структури реального лазерного пучка залишається актуальним завданням.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автор повідомляє про відсутність конфлікту інтересів.

Author's ORCID ID

Мунтян К.І.  <https://orcid.org/0000-0001-6479-3511>

REFERENCES

1. Documents Concerning the New Definition of the Metre. *Metrologia*. 1984;19(4):163-16.
2. Ma L-S, Bi Z, Bartels A, Robertsson L, Zucco M, Windeler RS, Wilpers G, et al. Optical frequency synthesis and comparison with uncertainty at the 10^{-19} level. *Science*. 2004 Mar 19;303(5665):1843-3.
3. Zaharenko YuG, Kononova NA, Lejbengardt GI, Chekirda KV. Tridtsatimetrovyj lazernyj interferentsionnyj komparator vkhodyaschij v sostav gosudarstvennogo pervichnogo etalona edynitsy dliny - metra - izmeritel'naya tehnika. 2012;(5):22-5.
4. Vitushkin LF, Orlov OA, Dzhermak A, D'agostino G. Lazernye interferometrii peremescheniy s subnanometrovym razresheniem v absolyutnykh ballisticheskikh gravimetrah. *Izmeritel'naya tehnika*. 2012;(3):3-6.
5. Lawall J, Kessler E. Michelson interferometry with 10 pm accuracy. *Rev. Sci. Instrum.* 2000;71(7):2669-8.
6. Dubrov MN, Alyoshin VA. Precise laser interferometry with 1 pm resolution. *Zhurnal radioelektroniki*. 2004;(5): Available at: <http://jre.cplire.ru/alt/may04/1/text.html>.
7. ITRS – International Technology Roadmap for Semiconductors. 2003: <http://public.itrs.net>
8. Gouy LG. Sur une propriété nouvelle des ondes lumineuses, *CR Hebdomadaires Séances Acad. Sci.* 1890;(110):1251-3.
9. Berry MV. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. Roy. Soc. Lond.* 1984 Mar 8;A392(1802):45-13.
10. Boyd RW. Intuitive explanation of the phase anomaly of focused light beams. *J. Opt. Soc. Am.* 1980 Jul;70(7):877-4.
11. Siegman AE. *Lasers*. Mill Hill: University Science Books; 1986.
12. Simon R, Mukunda N. Bargmann invariant and the geometry of the Gouy effect. *Phys. Rev. Lett.* 1993 Feb 15;70(7):880-4.
13. Subbarao D. Topological phase in Gaussian beam optics. *Opt. Lett.* 1995;20(21):2162-3.
14. Hariharan P, Robinson PA. The Gouy phase shift as a geometrical quantum effect. *J. Mod. Optics*. 1996;43(2):219-3.
15. Feng S, Winful HG. Physical origin of the Gouy phase shift. *Opt. Lett.* 2001;26(8):485-3.
16. Visser TD, Wolf E. The origin of the Gouy phase anomaly and its generalization to astigmatic wavefields. *Opt. Commun.* 2010;(283):3371-5.
17. Born M, Wolf E. *Osnovy optiki*. Per. s angl. M.; Nauka: 1970. 856 s.
18. Watson GN. *Teoriya besselevykh funktsij*. Ch I. Per. s angl. M.; Izd. inostr. lit. 1949; 798 s.
19. Mahajan VN. Uniform versus Gaussian beams: a comparison of the effects of diffraction, obscuration and aberrations. *J. Opt. Soc. Am.* 1986;A3(4):470-6.
20. Pang X, Fischer DG, Visser TD. Wavefront spacing and Gouy phase in presence of primary spherical aberration. *Opt. Lett.* 2014 Jan 1;39(1):88-4.
21. Smirnov SA. *Svoystva sfokusirovannykh opticheskikh puchkov*. SPb. NIU ITMO. 2012; 123 s.
22. Kogelnik H, Li T. Laser Beams and Resonators. *Proc. of the IEEE*. 1966 Oct;54(10):1312-18.