

Оригинальная статья

<https://doi.org/10.26565/2311-0872-2019-31-01>

УДК 537.874; 621.385.6

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЛН ФЛОКЕ-БЛОХА В ГИРОТРОПНЫХ МАГНИТОФОТОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

А. А. Шматько<sup>1</sup>, В. Н. Мизерник<sup>1,2</sup>, Е. Н. Одаренко<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, 61022, г. Харьков, пл. Свободы, 4  
E-mail: [sh47@ukr.net](mailto:sh47@ukr.net)

<sup>2</sup>Харьковский физико-технологический центр МОН и АН Украины, 61022, г. Харьков, пл. Свободы, 2  
E-mail: [yiknikm@ukr.net](mailto:yiknikm@ukr.net)

<sup>3</sup>Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков, пр. Науки, 14  
E-mail: [yevhen.odarenko@nure.ua](mailto:yevhen.odarenko@nure.ua)

Поступила в редакцию 8 октября 2019 г.

**Актуальность** рассмотренной в работе задачи определена широким применением магнитофотонных кристаллов в различных устройствах терагерцового микроволнового и оптического диапазонов. Ключевым является аналитическое решение третьей краевой задачи для уравнения Хилла со смешанными граничными условиями Коши. Такой подход позволил найти в явном виде новые решения для электромагнитных полей в слоях кристалла и дисперсионные характеристики для ТЕ- и ТМ-волн, что важно для разработки новых многофункциональных устройств терагерцового диапазона.

**Цель работы** – разработка аналитической теории волн Флоке-Блоха для гиротропных магнитофотонных кристаллов с поперечным магнитным полем.

**Материалы и методы.** Магнитофотонные кристаллы состоят из гиротропных (гироселективных или гиромангнитных материалов) двухслойных структур на периоде, параметры которых изменяются от величины приложенного магнитного поля. Рассматриваются аналитические методы решения уравнения Хилла через фундаментальные решения третьей краевой задачи.

**Результаты.** Определены в аналитическом виде фундаментальные решения уравнения Хилла. Найдены аналитические выражения для дисперсионных характеристик ТЕ- и ТМ- волн Флоке-Блоха. Установлено существование объемных и поверхностных волн в зонах пропускания магнитофотонного кристалла. Показано существование для положительной эффективной электрической или магнитной проницаемостей необычной поверхностной волны с нетипичным распределением поля в слоях кристалла.

**Выводы.** Предложенный новый подход для определения решений уравнения Хилла на основе фундаментальных решений третьей краевой задачи позволил получить в аналитическом виде дисперсионные характеристики и поля управляемых гиромангнитных магнитофотонных кристаллов для ТЕ- и ТМ- волн Флоке-Блоха. Это позволит относительно просто рассчитывать различные функциональные устройства на основе управляемых Брегговских структур.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** магнитофотонные кристаллы, гиромангнитные среды, теория Флоке-Блоха, уравнение Хилла, третья краевая задача, зоны пропускания и запираения, объемные и поверхностные волны.

## АНАЛІТИЧНА ТЕОРІЯ ХВИЛЬ ФЛОКЕ-БЛОХА В ГІРОТРОПНИХ МАГНІТОФОТОННИХ КРИСТАЛАХ

О. О. Шматько<sup>1</sup>, В. М. Мізерник<sup>1,2</sup>, Є. М. Одаренко<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, м. Свободи, 4

<sup>2</sup>Харківський фізико-технологічний центр МОН і АН України, 61022, м. Харків, м. Свободи, 2

<sup>3</sup>Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків, пр. Науки, 14

**Актуальність** розглянутої в роботі задачі визначена широким застосуванням магнітофотонних кристалів у різних пристроях терагерцового мікрохвильового й оптичного діапазонів. Ключовим є аналітичне рішення третьої крайової задачі для рівняння Хілла зі змішаними граничними умовами Коши. Такий підхід дозволив знайти в явному вигляді нові рішення для електромагнітних полів у шарах кристалла й дисперсійні характеристики для ТЕ- і ТМ-хвиль, що важливо для розробки нових багатофункціональних пристроїв терагерцового діапазону.

**Ціль роботи** – розробка аналітичної теорії хвиль Флоке-Блоха для гиротропних магнітофотонних кристалів з поперечним магнітним полем.

**Матеріали й методи.** Магнітофотонні кристали складаються з гиротропних (гіроселективних або гиромангнітних матеріалів) двошарових структур на періоді, параметри яких змінюються від величини прикладеного магнітного поля. Розглядаються аналітичні методи рішення рівняння Хілла через фундаментальні рішення третьої крайової задачі.

**Результати.** Визначені в аналітичному вигляді фундаментальні рішення рівняння Хілла. Знайдені аналітичні вирази для дисперсійних характеристик ТЕ- і ТМ- хвиль Флоке-Блоха. Установлено існування об'ємних і

поверхневих хвиль у зонах пропускання магнітофотонного кристалу. Показано існування для позитивної ефективної електричної або магнітної проникності незвичайної поверхневої хвилі з нетиповим розподілом поля в шарах кристалу.

**Виводи.** Запропонований новий підхід для визначення рішень рівняння Хілла на основі фундаментальних рішень третьої крайової задачі дозволив отримати в аналітичному виді дисперсійні характеристики й поля керованих гіромагнітних магнітофотонних кристалів для ТЕ- і ТМ- хвиль Флоке-Блоха. Це дозволить відносно просто розраховувати різні функціональні пристрої на основі керованих Брегівських структур.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** магнітофотонні кристали, гіромагнітні середовища, теорія Флоке-Блоха, рівняння Хілла, третя крайова задача, зони пропускання й запирання, об'ємні й поверхневі хвилі.

## ANALITICAL THEORY FLOUQUET-BLOCH WAVES FOR GYROTROPIC MAGNETOPHOTONIC KRYSTALS

A. A. Shmat'ko<sup>1</sup>, V. N. Mizernik<sup>1,2</sup>, E. N. Odarenko<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> V. N. Karazin Kharkiv National University, 4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, Ukraine

E-mail: [sh47@ukr.net](mailto:sh47@ukr.net)

<sup>2</sup> Scientific Physical-Technologic Center of MES and NAS of Ukraine, 2, Svobody Square, Kharkiv, 61022, Ukraine

E-mail: [viknikm@ukr.net](mailto:viknikm@ukr.net)

<sup>3</sup> Kharkiv National University of Radio Electronics, pr. Nauki, 14, Kharkiv, Ukraine

E-mail: [yevhen.odarenko@nure.ua](mailto:yevhen.odarenko@nure.ua)

**The relevance** of the problem considered in the work is determined by the widespread use of magnetophotonic crystals in various devices of the terahertz microwave and optical ranges. The key is the analytical solution of the third boundary value problem for the Hill equation with mixed Cauchy boundary conditions. This approach made it possible to explicitly find new solutions for electromagnetic fields in the crystal layers and dispersion characteristics for TE and TM waves, which is important for the development of new multifunction devices in the terahertz range.

**The purpose** of the work is to develop an analytical theory of Floquet-Bloch waves for gyrotropic magnetophotonic crystals with a transverse magnetic field.

**Materials and methods.** Magnetophotonic crystals consist of gyrotropic (gyroelectric or gyromagnetic materials) two-layer structures over a period, the parameters of which vary from the magnitude of the applied magnetic field. Analytical methods for solving the Hill equation through fundamental solutions of the third boundary value problem.

**Results.** The fundamental solutions of the Hill equation are determined in an analytical form. Analytical expressions for the dispersion characteristics of TE and TM Floquet-Bloch waves are found. The existence of bulk and surface waves in the transmission zones of a magnetophotonic crystal is established. The existence of an extraordinary surface wave with an atypical field distribution in the crystal layers for positive effective electric or magnetic permeability is shown.

**Conclusions.** The proposed new approach for determining the solutions of the Hill equation based on the fundamental solutions of the third boundary-value problem made it possible to obtain in an analytical form the dispersion characteristics and fields of controlled gyromagnetic magnetophotonic crystals for TE and TM Floquet-Bloch waves. This will make it relatively easy to calculate various devices based on controlled Bragg structures.

**KEY WORDS:** magnetophotonic crystals, gyromagnetic media, Floquet-Bloch theory, Hill equation, third boundary value problem, transmission and locking zones, bulk and surface waves.

## ВВЕДЕНИЕ

Задаче распространения электромагнитных волн терагерцового диапазона в периодических тонких диэлектрических пленках (одномерные фотонные кристаллы) в последние годы посвящено достаточно много теоретических и экспериментальных работ [1-12]. При распространении электромагнитного излучения в изотропных и анизотропных средах наблюдаются различные оптические явления, которые используются при создании новых оптоэлектронных приборов с улучшенными характеристиками. Благодаря этому фотонные кристаллы (ФК) получили широкое применение в различных приложениях современной науки и техники терагерцового, микроволнового и оптического диапазонов. Одним из перспективных направлений применения ФК являются новые электронно-волновые источники колебаний терагерцового диапазона [13-17] с электронной перестройкой частоты на объемных и поверхностных волнах.

Как правило, большинство теоретических исследований ФК базируется на характеристическом (дисперсионном) уравнении и матрице передачи периодической структуры. Чаще используются численные методы расчета матричных уравнений и реже - аналитические методы преобразований матриц. Благодаря такому матричному подходу свойства изотропных ФК достаточно хорошо изучены как для ТЕ, так и для ТМ волн [1-3, 18]. Альтернативным подходом при изучении ФК является теория волн Флоке-Блоха [19-22], позволяющая на основании фундаментальных решений уравнений Хилла находить в аналитической форме не только дисперсионные характеристики ФК, но и выражения для полей в каждом слое ФК на его периоде. Однако, такие исследования проведены только для изотропных ФК на основе периодических двухслойных диэлектрических структур [17, 24-28]. В последнее время

особое внимание исследователей привлекают магнитофотонные кристаллы (МФК) на основе управляемых поперечным магнитным полем гиротропных элементов, [3, 6-9, 11]. При наличии гиротропии материальные параметры среды зависят от величины приложенного магнитного поля. Применение статического магнитного поля к таким МФК приводит к сильной анизотропии материала, которая приводит к появлению недиагональных компонент тензора диэлектрической или магнитной проницаемости и изменению циклотронной частоты, связанной с приложенным к образцу МФК магнитным полем. Поэтому применение статического магнитного поля в МФК, материальные параметры которых достаточно чувствительны к его изменению, приводит к появлению различных магнито-оптических эффектов и заметным перспективам их практического применения с возможными манипуляциями распространения электромагнитных волн в них.

В гиротропном МФК относительно легко можно изменять за счет величины магнитного поля значения материальных параметров среды слоев и, как следствие, управлять его дисперсионными свойствами и характеристиками распространения волн. Кроме того в зависимости от направления магнитного поля наблюдаются различные эффекты: эффект Фарадея, магнитное двулучевое преломление, вращение плоскости поляризации, невзаимные явления для прямых и обратных волн, наличие поверхностных гиротропных волн [11], наличие магнитополяритонных поверхностных волн, наличие управляемого углового спектра и др. МФК находят широкое применение в качестве различных фильтров, управляемых фокусирующих устройств, невзаимных устройств, биосенсоров на поверхностных волнах.

Исследования МФК с гиротропными элементами в общем случае проводились в основном на основе метода матрицы передачи [3, 7-9, 11]. Альтернативный подход с использованием теории Флоке и уравнения Хилла для гиротропных МФК ранее не рассматривался ввиду сложности нахождения фундаментальных решений уравнения Хилла с граничными условиями Дирихле и Неймана. В данной работе рассмотрена задача о собственных волнах в МФК с гиротропными слоями на основе теории Флоке и новых фундаментальных решений уравнения Хилла со смешанными граничными условиями Коши. Благодаря такому подходу выражения для полей в слоях гиротропных МФК и дисперсионное уравнение находятся в явном виде через фундаментальные решения для произвольных материальных параметров слоев.

Основное внимание в работе уделено режимам существования замедленных поверхностных волн в зонах пропускания. Установлены условия существования поверхностных волн, как модифицированных поверхностных волн Зеннека-Зоммерфельда, так и необычных гиротропных поверхностных волн МФК.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать распространение электромагнитных волн в стратифицированной двухслойной периодической структуре в общем виде с бигиротропными слоями (одномерном магнитофотонном кристалле) (Рис. 1). Каждый из двух слоев на периоде структуры  $l = a + b$  является анизотропной средой (плазменной или ферритовой или их комбинацией), диэлектрическая и магнитная проницаемости которых характеризуется тензорными величинами стандартного вида с материальными параметрами  $\vec{\epsilon}_j$ ,  $\vec{\mu}_j$  ( $j = 1, 2$ ). Ширина одного слоя  $a$ , а другого –  $b$ .

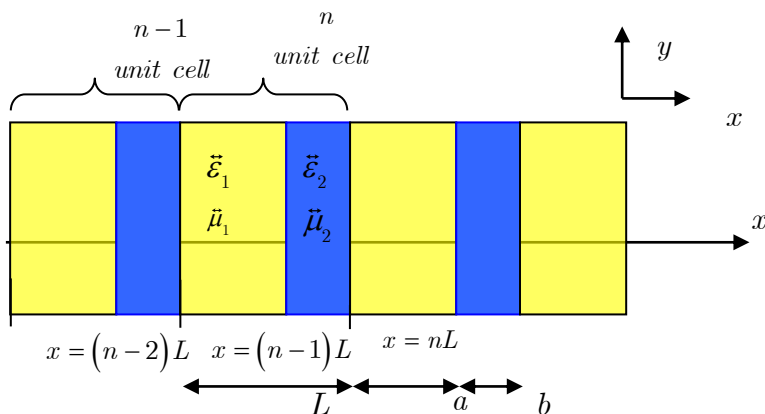


Рис. 1. Модель гиротропного магнитофотонного кристалла

Тензоры диэлектрической  $\vec{\varepsilon}_j$  и магнитной проницаемостей  $\vec{\mu}_j$  бигиротропной среды каждого слоя ( $j = 1, 2$ ) имеют стандартный вид [29]:

$$\vec{\varepsilon}_j = \begin{pmatrix} \varepsilon_j & -i\varepsilon_{aj} & 0 \\ i\varepsilon_{aj} & \varepsilon_j & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel j} \end{pmatrix}, \quad \vec{\mu}_j = \begin{pmatrix} \mu_j & -i\mu_{aj} & 0 \\ i\mu_{aj} & \mu_j & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel j} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Для плазменной среды величина диэлектрической проницаемости  $\vec{\varepsilon}_j$  – тензор, а величина магнитной проницаемости  $\mu_j$  – скаляр. Такие среды называются электрически-гиротропными. В случае ферритовой среды, наоборот, магнитная проницаемость  $\vec{\mu}_j$  – тензор, а диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  – скаляр. Такие среды, как правило, называют магнитогиротропными. Если диэлектрическая и магнитная проницаемость среды одновременно описывается тензорами вида (1), то такую среду принято называть гиротропной или бигиротропной. Материальные параметры, входящие в тензоры диэлектрической  $\vec{\varepsilon}_j$  и магнитной проницаемостей  $\vec{\mu}_j$ , определяются величиной внешнего управляющего подмагничивающего поля  $\vec{H}_0 = \vec{z}_0 H_0$ , которое направлено вдоль оси  $Oz$  [29]. Рассмотрение общего случая гиротропной среды с материальными параметрами вида (1) (бианизотропные гиромангнитные среды) является целесообразным, в первую очередь, потому, что дает возможность использовать при получении основных выражений для полей и характеристических уравнений, определяющих дисперсию гиротропных периодических структур, принцип двойственной перестановочности [29, 30]. Согласно принципу двойственной перестановочности [29], обобщенным на случай гиротропных сред [29, 30], а именно, когда одновременно выполняется замена полей  $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$  и материальных параметров  $\vec{\varepsilon} \leftrightarrow -\vec{\mu}$ , получение общих уравнений, из которых потом легко определяются уравнения для магнитно-гиротропной среды (феррита) и электрически-гиротропной среды (плазмы), а также чисто гиротропной среды (бианизотропные среды), оказывается более простым, чем в каждом из этих указанных частных случаев в отдельности.

Используя связь продольных компонент полей  $E_z$  и  $H_z$  через поперечные компоненты полей, получим из уравнений Максвелла уравнения Гельмгольца (случай  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ) для двух поляризаций  $E_z$  и  $H_z$ , соответственно:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\mu_{\perp} x} + \frac{\partial}{\mu_{\perp} x} \frac{\partial E_z}{\partial y} + k^2 \varepsilon_{\parallel} x E_z = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\varepsilon_{\perp} x} + \frac{\partial}{\varepsilon_{\perp} x} \frac{\partial H_z}{\partial y} + k^2 \mu_{\parallel} x E_z = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon_{\perp} x = \varepsilon_j \left(1 - \frac{\varepsilon_{aj}^2}{\varepsilon_j^2}\right)$ ,  $\mu_{\perp} x = \mu_j \left(1 - \frac{\mu_{aj}^2}{\mu_j^2}\right)$  – эффективные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей слоев,  $j = 1, 2$  – номер слоя на периоде [11, 29]. Тангенциальные компоненты поля  $E_y$  и  $H_y$  определяются из уравнений Максвелла формулами

$$H_y = \left( \frac{1}{-ik\mu_{\perp} x} \right) \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} + i \frac{\mu_{aj}}{\mu} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \quad E_y = \left( \frac{1}{ik\varepsilon_{\perp} x} \right) \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} + i \frac{\varepsilon_{aj}}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right). \quad (4)$$

Уравнение (2) описывает ТМ (поперечно магнитные) волны ( $H_x, H_y, E_z$ ),  $E_z$ -поляризация ( $s$ -поляризация), а уравнение (3) – ТЕ (поперечно электрические) волны ( $E_x, E_y, H_z$ ),  $H_z$ -поляризация ( $p$ -поляризация). Следовательно, для  $s$ -поляризации вектор напряженности электрического поля  $\vec{E} = \vec{z}_0 E_x$  направлен перпендикулярно плоскости  $xy$ , а для  $p$ -поляризации вектор электрического поля  $\vec{E} = \vec{x}_0 E_x + \vec{y}_0 E_y$  параллелен этой плоскости. При решении граничной электродинамической задачи на собственные волновые числа и собственные функции оператора Лапласа необходимо использовать граничные условия для тангенциальных компонент полей на границе раздела сред. Для ТМ волн ( $s$ -

поляризация) это непрерывность компонент  $E_z$  и  $H_y$ , а для ТЕ волн ( $p$ -поляризация) - непрерывность компонент  $H_z$  и  $E_y$ . Из проведенного анализа следует важный вывод, что в общем случае гиротропной среды (бианизотропная среда), поля ТМ и ТЕ типов волн относительно направления подмагничивающего поля  $\vec{H}_0$  (вдоль оси  $Oz$ ) в двумерном случае  $\left(\frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$  - разделяются на два независимых решения уравнений Максвелла (2), (3). Более того, из представленных уравнений (2), (3) и выражений для тангенциальных полей  $E_y$  и  $H_y$  (4) следует, что для типов волн ТМ и ТЕ выполняется принцип двойственной перестановочности. При замене в уравнении (2) компоненту поля  $E_z$  на  $H_z$  и, одновременно, эффективную магнитную проницаемость  $\mu_{\perp}$  на отрицательное значение эффективной диэлектрической проницаемости  $(-\varepsilon_{\perp})$ , а также  $\varepsilon_{\parallel}$  на  $(-\mu_{\parallel})$ , оно переходит в уравнение (3). Более того, граничные условия для компонент полей  $E_y$  и  $H_y$  (4) также удовлетворяют принципу двойственной перестановочности. Все это позволяет упростить рассмотрение общей электродинамической задачи и ограничиться лишь одним типом волн ТМ или ТЕ для любого вида сред. При выбранном одном типе волн и виде среды достаточно в конечных выражениях воспользоваться принципом двойственной перестановочности для получения решения для другого типа волн.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением распространением в гиротропной фотоннокристаллической структуре  $H_z$ -поляризованных волн (ТЕ тип волн).

Для определения волновых чисел и, соответствующих им, мод двухслойного гиромангнитного магнитофотонного кристалла в случае ТЕ волн рассмотрим уравнение Гельмгольца для  $H_z$ -поляризации (3) с соответствующими граничными условиями для тангенциальных компонент полей  $H_z$ ,  $E_y$  на границе раздела слоев в периодической структуре. Для случая  $E_z$ -поляризации (ТМ- волны или  $s$ -поляризация) необходимо воспользоваться в конечном решении для ТЕ-волн ( $p$ -поляризация) принципом двойственной перестановочности.

В силу принципа двойственной перестановочности ограничимся рассмотрением одной поляризации, например  $H_z$ - поляризации для МФК из гироэлектрических плазменных слоев..

Учитывая однородность МФК вдоль оси  $Oy$ , решение уравнения Гельмгольца будем искать в виде  $H_z(x, y) = X(x)e^{i\beta y}$ , где величина  $\beta$  определяет постоянную распространения волн вдоль координаты  $y$   $\exp i\beta y$ . Тогда уравнение Гельмгольца (3) сводится к традиционному одномерному уравнению Хилла [19-22] относительно функции  $X(x)$  с периодическими дискретными коэффициентами.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial X}{\partial x} \right) + q(x)X = 0, \quad (5)$$

где  $p(x) = \frac{1}{\varepsilon_{\perp}(x)}$ ,  $q(x) = p(x) k^2 \mu_{\parallel} \varepsilon_{\perp}(x) - \beta^2$ , такие что  $p(x+L) = p(x)$  и  $q(x+L) = q(x)$ .

Традиционно, решение уравнения Хилла (5)  $X(x) = a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x)$  для фотонных кристаллов из диэлектрических слоев находятся через фундаментальные решения  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  граничных задач Дирихле и Неймана, например [Мороз]. Согласно уравнению Хилла, если  $\psi_1(x)$  есть частное решение уравнения (5), то при периодических коэффициентах  $p(x)$  и  $q(x)$   $\psi_1(x+L)$  также является его решением. Если  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  два линейно независимых решения уравнения (5), на основании предыдущего  $\psi_1(x+L)$  и  $\psi_2(x+L)$  также являются решением уравнения (5). В свою очередь эти решения могут быть также представлены в виде линейной комбинации двух исходных решений  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$ , а именно [19-22]:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 x + L &= a_{11} \psi_1 x + a_{12} \psi_2 x \\ \psi_2 x + L &= a_{21} \psi_1 x + a_{22} \psi_2 x \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $a_{nm}$  – некоторые постоянные, подлежащие определению из граничных условий.

При наличии гиротропных слоев такой путь решения задачи весьма трудоемок и мало эффективен. Ключевым фактором при решении такой задачи на собственные функции и собственные числа оператора Хилла является использование смешанных краевых условий (краевые условия Коши [30]) – третья краевая задача. Это продиктовано очевидным фактом – тангенциальная компонента электрического поля  $E_y x, y$  (4) определяется линейной комбинацией искомой функции  $X(x)$  и ее производной  $\partial X x / \partial x$ , а именно:

$$E_y x, y = 1 / ik\varepsilon_{\perp} \left( \partial X x / \partial x - \beta \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} X x \right) e^{i\beta y}.$$

Фундаментальные решения  $\psi_1 x$  и  $\psi_2 x$  уравнения Хилла (5) для гиротропного МФК будем находить как решение третьей краевой задачи со смешанными граничными условиями (условия Коши).

$$\psi_1(0) = 1, \quad \frac{1}{\varepsilon_{11}} \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_0 - \beta \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_1} \psi_1 \Big|_0 \right] = 0, \quad (7)$$

$$\psi_2(0) = 0, \quad \frac{1}{\varepsilon_{11}} \left( \frac{\partial \psi_2(0)}{\partial x} - \beta \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_1} \psi_2(0) \right) = 1. \quad (8)$$

Граничные условия (7), (8) для нахождения фундаментальных решений уравнения Хилла (5) с точностью до константы связаны с граничными условиями для тангенциальных компонент магнитного

$H_z x, y = X x e^{i\beta y}$  и электрического  $E_y x, y = \left( \frac{1}{ik\varepsilon_{\perp}} \right) \left( \frac{\partial X x}{\partial x} - \beta \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} X x \right)$  полей на поверхностях слоев, которые сводятся к следующим уравнениям при  $x = a$ :

$$\begin{aligned} X_1 a &= X_2 a, \\ \frac{1}{\varepsilon_{11}} \left( \frac{\partial X_1 a}{\partial x} - \beta \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_1} X_1 a \right) &= \frac{1}{\varepsilon_{12}} \left( \frac{\partial X_2 a}{\partial x} - \beta \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} X_2 a \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Используя эти граничные условия и смешанные краевые условия для фундаментальных решений  $\psi_1 x$  и  $\psi_2 x$  уравнений Хилла, получим

$$\psi_1 x = \begin{cases} \cos \xi_1 x + \beta \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_1} \frac{\sin \xi_1 x}{\xi_1}, & 0 < x < a \\ A \cos \xi_2 x - a + B \frac{\sin \xi_2 x - a}{\xi_2}, & a < x < L \end{cases}, \quad (10)$$

$$\psi_2 x = \begin{cases} \varepsilon_{11} \frac{\sin \xi_1 x}{\xi_1}, & 0 < x < a \\ D \cos \xi_2 x - a + C \frac{\sin \xi_2 x - a}{\xi_2}, & a < x < L. \end{cases} \quad (11)$$

$$A = \cos \xi_1 a + \beta \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_1} \frac{\sin \xi_1 a}{\xi_1}, \quad B = \beta \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} \cos \xi_1 a - \frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}} \xi_1 \sin \xi_1 a + \beta \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_1} \left( \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}} \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_1} \right) \frac{\sin \xi_1 a}{\xi_1},$$

$$D = \varepsilon_{11} \frac{\sin \xi_1 a}{\xi_1}, \quad C = \varepsilon_{12} \cos \xi_1 a + \beta \varepsilon_{12} \left( \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}} - \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_1} \right) \frac{\sin \xi_1 a}{\xi_1}.$$

В случае рассмотрения ТМ волн необходимо воспользоваться принципом двойственности для нахождения фундаментальных решений (10), (11).

Отметим важную особенность в поперечных распределениях полей для гиротропных слоев. В выражениях (10), (11) при наличии гиротропии в среде ( $\varepsilon_{aj} \neq 0$ ) продольная постоянная

распространения  $\beta$  (вдоль оси  $Oy$ ) входит в первой и второй степени. Это указывает на различное пространственное распределение для прямых ( $\beta$  положительная величина) и обратных ( $\beta$  отрицательная величина) волн в МФК, характерное для гиротропных сред. В этом проявляется невязимость в распространении прямых и обратных волн.

Как правило, при исследовании различных фотонных кристаллов (ФК) из диэлектрических слоев в качестве двух линейно независимых фундаментальных решений уравнений Хилла (5)  $\psi_1 x$  и  $\psi_2 x$  выбирались такие, которые удовлетворяют наиболее простым граничным условиям: Дирихле или Неймана [23-27]. При использовании смешанных граничных условий (7), (8) для фундаментальных решений  $\psi_1 x$  и  $\psi_2 x$  явные выражения для неизвестных коэффициентов в решениях  $X x = a_1 \psi_1 x + a_2 \psi_2 x$  принимают вид:

$$a_{11} = \psi_1 L, \quad a_{12} = \frac{1}{\varepsilon_{\perp 2} L} \left[ \psi_1' L - \beta \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} \frac{L}{L} \psi_1 L \right],$$

$$a_{21} = \psi_2 L, \quad a_{22} = \frac{1}{\varepsilon_{\perp 2} L} \left[ \psi_2' L - \beta \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} \frac{L}{L} \psi_2 L \right].$$

Если вместо найденных фундаментальных решений  $\psi_1 x$  и  $\psi_2 x$  (10), (11) взять любые другие линейно независимые решения, то коэффициенты преобразования будут также другими. В частности при  $a_{12} = a_{21} = 0$  преобразование принимает наиболее простой диагональный вид

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 x + L &= a_{11} \psi_1 x = \rho_1 \psi_1 x \\ \psi_2 x + L &= a_{22} \psi_2 x = \rho_2 \psi_2 x \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $a_{11} = \rho_1, \quad a_{22} = \rho_2$  называются множителями Флоке. Используя теорему Флоке [32] для электромагнитных полей

$$\rho X_1 0 = X_2 0 + L,$$

$$\rho \frac{1}{\varepsilon_{\perp 11}} \left( \frac{\partial X_1 0}{\partial x} - \beta \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_1} X_1 0 \right) = \frac{1}{\varepsilon_{\perp 12}} \left( \frac{\partial X_2 0 + L}{\partial x} - \beta \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} X_2 0 + L \right) \quad (13)$$

и функций  $\psi_1 x$  и  $\psi_2 x$  получим характеристическое уравнения для определения множителя Флоке  $\rho$ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

Раскрывая определитель (14) системы уравнений с учетом найденных значений коэффициентов уравнений, получим характеристическое уравнения для определения множителя Флоке  $\rho$

$$\left( \rho + \frac{Wr(\psi_1, \psi_2)}{\rho} \right) = \frac{1}{\varepsilon_{\perp 2}} \left[ \psi_2'(L) - \beta \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} \psi_2(L) \right] + \psi_1(L) = ikE L + H L \quad (15)$$

или в стандартном виде

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0. \quad (16)$$

Здесь  $A = W_{11} + W_{22} = \psi_1 L + \left[ \psi_2' L - \beta \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} \psi_2 L \right] / \varepsilon_{\perp 2}, \quad Wr(\psi_1, \psi_2) = 1.$

Решения квадратного уравнения (16) относительно множителя Флоке  $\rho$  удовлетворяют условию  $\rho_1 \rho_2 = 1$ , откуда находим  $\rho = e^{\pm iK_{TE}L}$ . В результате из условия

$2\cos K_{TE}L = \left[ \psi_2'(L) - \beta \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} \psi_2(L) \right] / \varepsilon_{\perp 2} + \psi_1(L)$  получим в аналитической форме дисперсионное

уравнение для определения волновых чисел Флоке-Блоха  $K_{TE}$  для ТЕ волн МФК.

$$\cos K_{TE}L = \cos \xi_1 a \cos \xi_2 b - \frac{1}{2} \left[ \frac{\varepsilon_{\perp 2} \xi_1}{\varepsilon_{\perp 1} \xi_2} + \frac{\varepsilon_{\perp 1} \xi_2}{\varepsilon_{\perp 2} \xi_1} + \frac{\beta^2}{\xi_1 \xi_2} \left( \frac{\varepsilon_{\perp 2}}{\varepsilon_{\perp 1}} \right) \left( \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_{\perp 1} \varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{\perp 2} \varepsilon_2} \right) \right]^2 \sin \xi_1 a \sin \xi_2 b. \quad (17)$$

Используя принцип двойственной перестановочности выпишем дисперсионное уравнение для определения волновых чисел Флоке-Блоха  $K_{TM}$  для ТМ волн гиротропного ферритового МФК

$$\cos K_{TM}L = \cos \xi_1 a \cos \xi_2 b - \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_{\perp 2} \xi_1}{\mu_{\perp 1} \xi_2} + \frac{\mu_{\perp 1} \xi_2}{\mu_{\perp 2} \xi_1} + \frac{\beta^2}{\xi_1 \xi_2} \left( \frac{\mu_{\perp 2}}{\mu_{\perp 1}} \right) \left( \frac{\mu_{a1}}{\mu_1} - \frac{\mu_{\perp 1} \mu_{a2}}{\mu_{\perp 2} \mu_2} \right) \right]^2 \sin \xi_1 a \sin \xi_2 b. \quad (18)$$

Поперечные волновые числа  $\xi_1$  и  $\xi_2$  также изменяются,

Отметим, что характеристические (дисперсионные) уравнения (17), (18) в точности совпадают с уравнениями, полученными в [11] для МФК методом матрицы передачи с аналитическими выражениями для ее элементов. Из (17), (18) видно, что дисперсионные характеристики МФК для прямых и обратных волн, распространяющихся вдоль оси  $Oy$  одинаковы (постоянная распространения  $\beta$  в уравнении представлена квадратичной величиной). Это указывает на то, что гиротропия среды слоев МФК не влияет на их дисперсионные характеристики.

Из однородных уравнений (13) легко находится отношение  $a_1 / a_2 = \psi_2 L / [\rho - \psi_1 L]$ , которое позволяет определить аналитический вид полей в слоях на периоде МФК через функцию  $X_j$   $x = a_2 \left[ a_1 / a_2 \psi_1 x + \psi_2 x \right]$ .

Из (17), (18) следует, что действительным значениям волнового числа Флоке-Блоха  $K$  соответствуют такие параметры МФК, для которых выполняется условие  $|\cos KL| < 1$ . Эти значения  $K$  соответствуют распространяющимся вдоль МФК волнам Флоке. Условие  $|\cos KL| = 1$  определяет границы полос пропускания и запираания. В полосах пропускания значения  $K_{TE}$  вещественны. В полосах запираания значения  $K$  чисто мнимые и  $|\cos KL| > 1$ . Как показывает анализ решений дисперсионного уравнения (18), в полосах пропускания существует два режима распространения волн: режим объемных волн и режим поверхностных волн. В режиме поверхностных волн в МФК с гиротропными плазменными слоями может существовать в определенной области параметров модифицированные поверхностные волны Зенка-Зомерфельда [11] или необычные поверхностные гиротропные волны [11]. Поверхностные волны Зенка-Зомерфельда имеют максимальную амплитуду на границе слоев, а необычная поверхностная волна максимальна на границе периода МФК. Для чисто мнимых значений волнового числа Флоке-Блоха  $K$  волна затухает в МФК. Однако если МФК конечных размеров и состоит из нескольких периодов, то в таком кристалле может существовать поверхностная волна Флоке-Блоха как для режима распространяющихся волн, так и поверхностных волн. В этом случае максимум амплитуды поля может располагаться не на границе, как у плазмонполяритонных поверхностных волн [11], а в одном из слоев первого периода Брэгговского отражателя. В некоторых сенсорных устройствах отдают предпочтение именно поверхностным волнам Флоке-Блоха.

В общем случае особенности распространения электромагнитных волн в МФК зависят от волнового числа Флоке-Блоха  $K$  (16), (17) и поперечных волновых чисел в каждом слое  $\xi_j$ . Поперечные волновые числа  $\xi_j$  при отсутствии потерь могут быть либо вещественными либо чисто мнимыми. При вещественных значениях  $\xi_j$  в слоях МФК распространяются объемные волны, при мнимых значениях  $\xi_j$  реализуется режим поверхностных волн. Возможна и комбинация указанных режимов в различных слоях. Наличие гиротропного плазменного слоя (одного или двух) в МФК приводит к двум возможным случаям эффективной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{\perp j} \geq 0$  и  $\varepsilon_{\perp j} < 0$ . Рассмотрим два случая положительных и отрицательных значений эффективной диэлектрической проницаемости полупроводниковой плазмы  $\varepsilon_{\perp 1}$  одного из слоев МФК. Если  $\varepsilon_{\perp j} \geq 0$ , то, фактически, свойства МФК аналогичны свойствам ФК с управляемыми магнитным полем материальными параметрами слоев.

Однако, даже в этом случае, когда выполняется условие  $\varepsilon_{\perp 2} > 0$  ( $\varepsilon_{a2} < \varepsilon_2$ ,  $\frac{\varepsilon_{\perp 2}}{\varepsilon_2} < 1$ ), может существовать два режима распространения ТЕ-волн. Это традиционно объемные быстрые волны, область существования которых определяется выполнением одновременно двух условий  $k^2 \varepsilon_1 \mu_{\parallel} - \beta^2 > 0$  и



$k^2 \varepsilon_{2\perp} \mu_{2\parallel} - \beta^2 > 0$ . Второй режим, обнаруженный нами – режим распространения гиротропной поверхностных волн и является новым режимом, присущим только гиротропным средам с положительными значениями эффективной диэлектрической проницаемости плазменного слоя  $\varepsilon_{2\perp}$ . Этот режим наблюдается при выполнении одновременно двух условий  $k^2 \varepsilon_1 \mu_{1\parallel} - \beta^2 < 0$  ( $\xi_1 = i\sqrt{\beta^2 - k^2 \varepsilon_1 \mu_{1\parallel}}$  чисто мнимая величина) и  $k^2 \varepsilon_{2\perp} \mu_{2\parallel} - \beta^2 < 0$  ( $\xi_2 = i\sqrt{\beta^2 - k^2 \varepsilon_{2\perp} \mu_{2\parallel}}$  чисто мнимая величина) и, дополнительно, третьего условия, следующего из уравнения (17), когда третье слагаемое принимает отрицательные значения, а именно:

$$\frac{\varepsilon_{\perp 2} \xi_1}{\varepsilon_{\perp 1} \xi_2} + \frac{\varepsilon_{\perp 1} \xi_2}{\varepsilon_{\perp 2} \xi_1} + \frac{\beta^2}{\xi_1 \xi_2} \left( \frac{\varepsilon_{\perp 2}}{\varepsilon_{\perp 1}} \right) \left( \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_{\perp 1} \varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{\perp 2} \varepsilon_2} \right)^2 < 0,$$

которое для случая одного гиротропного слоя  $\varepsilon_{a1} = 0$  принимает вид

$$\frac{\xi_1 \varepsilon_{\perp 2}}{\xi_2 \varepsilon_{\perp 1}} + \frac{\xi_2 \varepsilon_{\perp 1}}{\xi_1 \varepsilon_{\perp 2}} + \frac{\beta^2}{\xi_1 \xi_2} \frac{\varepsilon_{\perp 1}}{\varepsilon_{\perp 2}} \left( \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} \right)^2 < 0. \tag{19}$$

Анализ этого условия и решений (17) показывает, что указанный выше режим наблюдается, когда в условии (19) продольное волновое число  $\beta$  отлично от нуля. Действительно, в режиме поверхностных волн выражение, стоящее в левой части неравенства (19) может принимать отрицательные значения, когда:

$$\frac{\beta^2}{|\xi_1| |\xi_2|} \frac{\varepsilon_{\perp 1}}{\varepsilon_{\perp 2}} \left( \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} \right)^2 > \left| \frac{\xi_1}{\xi_2} \right| \frac{\varepsilon_{\perp 2}}{\varepsilon_{\perp 1}} + \left| \frac{\xi_2}{\xi_1} \right| \frac{\varepsilon_{\perp 1}}{\varepsilon_{\perp 2}}.$$

или  $\left( \frac{\varepsilon_{\perp 1}}{\varepsilon_{\perp 2}} \right)^2 \frac{|\xi_2|^2}{|\xi_1|^2} \left| \frac{\beta^2}{|\xi_2|^2} \left( \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} \right)^2 - 1 \right| > 1.$

Результаты численного расчета дисперсионной диаграммы для такого режима МФК показаны на Рис. 2. Расчет проводился при следующих параметрах задачи:  $a = 0.8$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_{\parallel} = \mu_{2\parallel} = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 2.25$ ,  $\varepsilon_2 = 12$ ,  $\varepsilon_{a2} = 11$ ,  $\varepsilon_{\perp 2} = 1.917$ . Затемненные области соответствуют полосам пропускания,

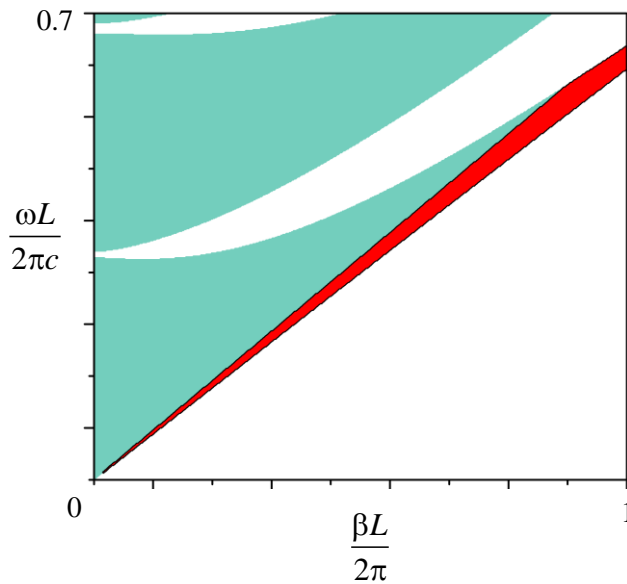


Рис. 2. Дисперсионная диаграмма магнитофотонного кристалла для положительных значений эффективной диэлектрической проницаемости плазменного слоя.

светлые – полосам запирания. Из рисунка видно, что при выполнении трех условий  $k\sqrt{\varepsilon_{\perp 2}\mu_{\parallel 2}} < \beta$ ,  $k\sqrt{\varepsilon_1\mu_{\parallel 1}} < \beta$  и

$$\frac{\varepsilon_{\perp 2}}{|\varepsilon_{\perp 2}|} \left[ \frac{\beta^2}{|\xi_1||\xi_2|} \frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_{\perp 2}|} \left( \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} \right)^2 - \left( \frac{|\xi_1|}{\xi_2} \frac{|\varepsilon_{\perp 2}|}{\varepsilon_1} + \frac{|\xi_2|}{\xi_1} \frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_{\perp 2}|} \right) \right] > 0 \quad (20)$$

существует область вещественных значений волнового числа  $K$ , при которых наблюдается режим *необычной* гиротропной поверхностной ТЕ-волны. Область существования этого режима обозначена красным цветом в пределах полосы пропускания структуры.

Рассмотрим второй случай гиротропии плазменного слоя, когда величина эффективной плазменной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{\perp 2}$  отрицательная величина, например,  $\varepsilon_{\perp 2} < 0$ . В этом случае может существовать модифицированная поверхностная волна Зеннека-Зоммерфельда [11]. Максимум амплитуды поля для такой волны наблюдается на границах слоев МФК. Модифицированная поверхностная волна может быть как симметричной так и несимметричной относительно направления периодичности. Однако, кроме модифицированной поверхностной ТЕ-волны Зеннека-Зоммерфельда, существует поверхностная волна при других параметрах задачи, названная нами *необычной* поверхностной гиротропной волной. Действительно такая волна существует, когда оба поперечных волновых числа в двух слоях  $\xi_1, \xi_2$  чисто мнимые величины  $\xi_1^2 < 0, \xi_2^2 < 0$  и при  $\varepsilon_{\perp 2} < 0$  должно выполняться условие

$$\frac{\beta^2}{|\xi_1||\xi_2|} \frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_{\perp 2}|} \left( \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_2} \right)^2 < \frac{|\xi_1|}{\xi_2} \frac{|\varepsilon_{\perp 2}|}{\varepsilon_1} + \frac{|\xi_2|}{\xi_1} \frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_{\perp 2}|},$$

противоположное условию для положительных значений  $\varepsilon_{\perp 2} > 0$ . Для этого случая волновое число  $\beta$  может быть и равным нулю. Таким образом, такая необычная поверхностная волна может существовать при разных знаках величины  $\varepsilon_{\perp 2}$ .

На Рис. 3 представлена дисперсионные диаграмма для случая отрицательного значения эффективной диэлектрической проницаемости полупроводниковой плазмы  $\varepsilon_{\perp 2} < 0$ . Параметры задачи при расчетах выбирались следующие:  $a = 0.8, \mu_1 = \mu_2 = \mu_{\parallel 1} = \mu_{\parallel 2} = 1, \varepsilon_1 = 2.25, \varepsilon_2 = 12, \varepsilon_{a2} = 14.8, \varepsilon_{\perp 2} = -6.25$ . Отметим, что в зонах пропускания ТЕ-волн на дисперсионной диаграмме существует две

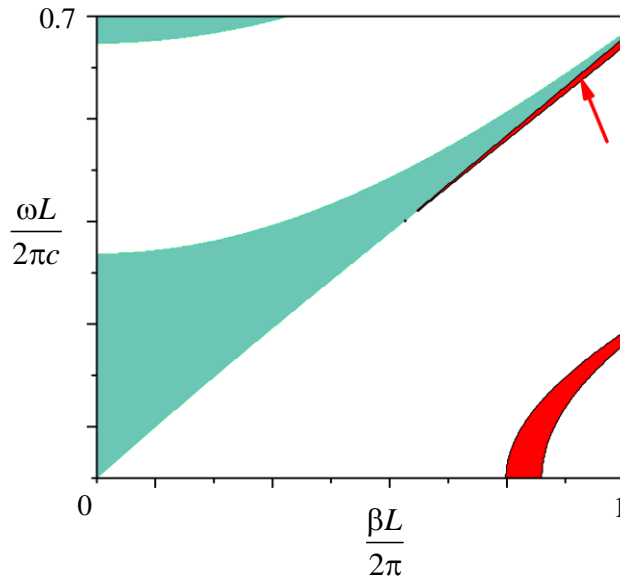


Рис. 3. Дисперсионная диаграмма магнитофотонного кристалла для отрицательных значений эффективной диэлектрической проницаемости плазменного слоя.

области, в которых распространяются поверхностные волны. Одна область относится к модифицированным поверхностным волнам Зеннека-Зоммерфельда, а другая – к необычной гиротропной поверхностной волне (отмечена стрелкой на диаграмме). Однако область ее существования в данном случае определяется условием, противоположным (20).

Очевидно, что появление поверхностных волн в структуре и соответственная модификация дисперсионной диаграммы обусловлены изменением независимых параметров системы, в том числе и внешнего магнитного поля, что приводит к мнимым значениям поперечных волновых чисел. Рассмотрим далее влияние величины внешнего магнитного поля, т. е. эффективного значения диэлектрической проницаемости плазменного слоя, на дисперсию МФК.

На Рис. 4 представлены результаты расчета дисперсионной диаграммы для таких значений параметров системы:  $a = 0.8$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_{1\parallel} = \mu_{2\parallel} = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 4$ ,  $\varepsilon_2 = 12$  и различных отрицательных значений параметра  $\varepsilon_{\perp 2}$ . Рис. 4 (а), (б) и (в) построены для значений  $\varepsilon_{\perp 2} = -12.08$ ,  $\varepsilon_{\perp 2} = -18.1$  и  $\varepsilon_{\perp 2} = -24.75$  соответственно. Изменение эффективной диэлектрической проницаемости плазменного слоя приводит к довольно существенным изменениям дисперсионных свойств МФК. Конфигурация и местоположение зон пропускания и запирания изменяются в соответствии с увеличением абсолютного значения  $\varepsilon_{\perp 2}$ . Следует отметить, что, начиная с определенного значения эффективной диэлектрической

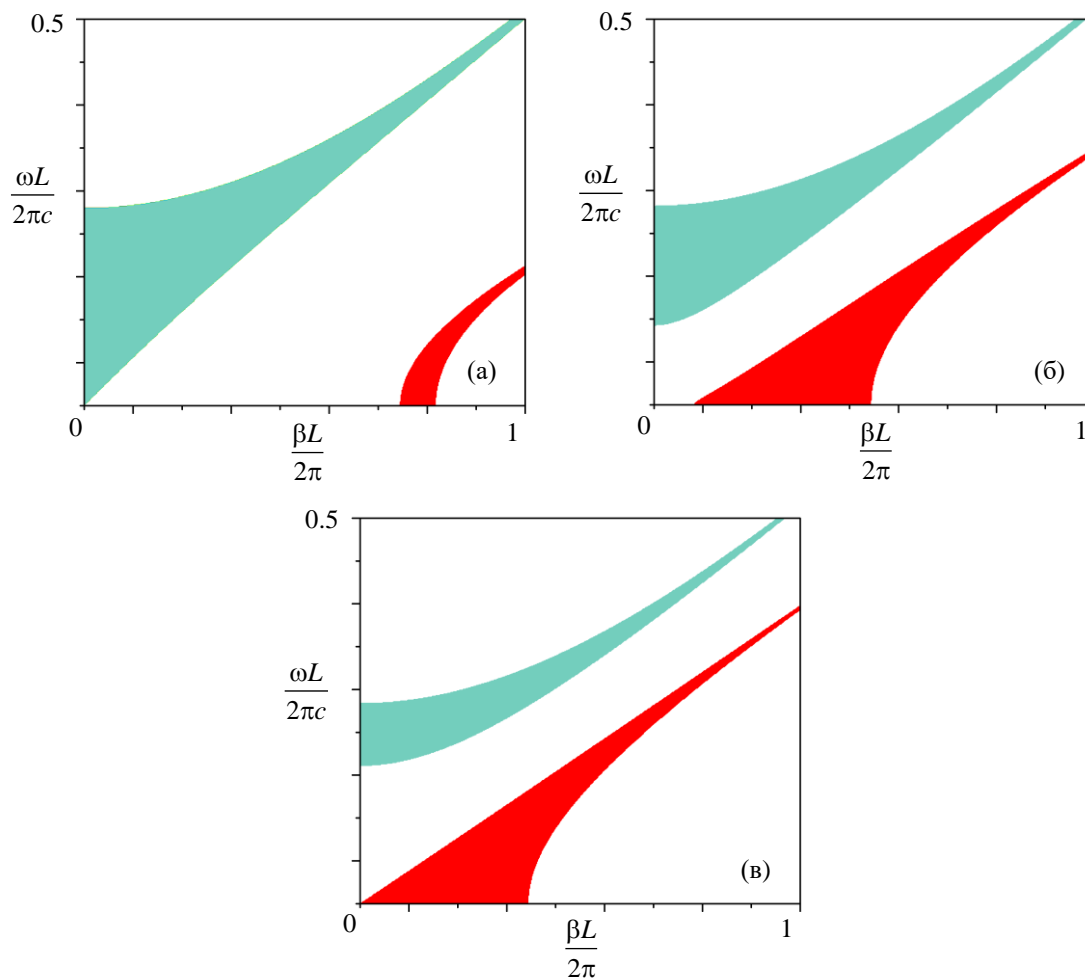


Рис. 4. Эволюция дисперсионных диаграмм магнитофотонного кристалла при изменении внешнего магнитного поля.

проницаемости плазменного слоя, для случая нормального распространения ( $\beta = 0$ ) в системе возникает так называемая плазменная запрещенная зона, которая начинается с нулевой частоты. Следовательно, в этом случае МФК в целом приобретает свойства плазменной среды. Однако плазменная запрещенная зона существует только в определенном диапазоне угла распространения волн в МФК. За пределами этого диапазона реализуется зона пропускания по поверхностным волнам Зеннека-Зоммерфельда,

фазовая скорость которых меньше скорости света. Таким образом, в МФК, который содержит гиротропные плазменные слои, существуют режимы, для которых в полосах пропускания могут распространяться как быстрые, так и медленные ТЕ волны.

### ВЫВОДЫ

Разработано аналитическую теорию распространения волн Флоке-Блоха в гиротропных МФК с поперечным магнитным полем для определения собственных функций уравнения Хилла со смешанными граничными условиями Коши. Получены в явном виде дисперсионные уравнения для ТМ-волн и ТЕ-волн с произвольными материальными параметрами гиротропных слоев. Установлено существование в МФК режима с необычной поверхностной волной, который реализуется при положительных значениях эффективной диэлектрической или магнитной проницаемостей среды одного из слоев. Получены условия для существования поверхностных волн в зонах пропускания МФК. Выявлено два вида гиротропных поверхностных волн: модифицированных поверхностных волн Зеннека-Зомерфельда и необычных гиротропных поверхностных волн распространяющихся в МФК при выполнении трех условий между параметрами гиротропных слоев. Показаны основные отличия в распределениях электромагнитных полей для этих поверхностных волн.

### Authors' ORCID ID

Шматько А.А. <http://orcid.org/0000-0002-3714-1638>

Одаренко Е.Н. <http://orcid.org/0000-0001-7656-0440>

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. Yeh, A. Yariv, and Chi-Shain Hong. Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory // J. Opt. Soc. Am. 1977. Vol. 67, No. 4. pp. 423-438.
2. A. Yariv, P. Yeh, Photonics. Optical Electronics in Modern Communications. New York: Oxford University press, 2007.
3. F.G. Bass, A.A. Bulgakov, Kinetic and Electrodynamical Phenomena in Classical and Quantum Semiconductor. New York: Nova Science Publishers, 1997.
4. J. Lekner, Light in periodically stratified media, J. Opt. Soc. Am. A 11, 2892–2899 (1994)
5. S. Sakaguchi and N. Sugimoto, "Transmission properties of multilayer films composed of magneto-optical and dielectric materials," J. of Lightwave Technology, vol. 17, no. 6, pp. 1087–1092, 1999.
6. M. Inoue, K. Arai, T. Fujii, M. Abe, "One-dimensional magnetophotonic crystals," J. of Applied Physics, 85, 5768–5770, 1999.
7. I. L. Lyubchanskii, N. N. Dadoenkova, M. I. Lyubchanskii, E. A. Shapovalov, "Magnetic photonic crystals," J. of Physics D: Applied Physics, 36, pp.277–287, 2003.
8. A.A. Shmat'ko, V.N. Mizernik, E.N. Odarenko, V.A. Yampol'skii, T.N. Rokhmanova, A.Yu. Galenko, Dispersion properties of a one-dimensional anisotropic magnetophotonic crystal with a gyrotropic layer. Proc. of the 7th Int. Conf. on Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL'2016). Odessa, Ukraine. Sept. 12-15. P. 126–128, 2016.
9. O. V. Shramkova, "Transmission properties of ferrite-semiconductor periodic structure," Progress In Electromagnetics Research, 7, pp. 71–85, 2009.
10. J.-X. Fu, R.-J. Liu and Z.-Y. Li, "Experimental demonstration of tunable gyromagnetic photonic crystals controlled by dc magnetic fields," EPL, vol. 89, 64003, 2010.
11. A.A. Shmatko, V.N. Mizernik, E.N., Odarenko E.N., V.T. Lysytsya. Ch.3, Dispersion Properties of TM and TE Modes of Gyrotropic Magnetophotonic Crystals. (Theoretical Foundations and Applications of Photonic Crystals, Ed. A. Vakhrushev), 228 pp. . InTech, 2018.
12. I. L. Lyubchanskii, N. N. Dadoenkova, M. I. Lyubchanskii, E. A. Shapovalov, "Magnetic photonic crystals," J. of Physics D: Applied Physics, 36, pp.277–287, 2003.
13. E. N. Odarenko, A. A. Shmat'ko. 2016. Novel THz Sources with Profiled Focusing Field and Photonic Crystal Electrodynamic Systems. The IEEE International Conference on Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications, and Computer Science, Lviv-Slavsko, Ukraine, February, 23–26, TCSET 2016, pp. 345–347.
14. E.N. Odarenko, Y.V. Sashkova, A.A. Shmatko, N.G. Shevchenko. Analysis of Slow Wave Modes in Modified Photonic Crystal Waveguides Using the MPB Package(2018) International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, MMET 2018, pp. 164–167.
15. A.A. Shmat'ko, V.N. Mizernik, E.N. Odarenko. Surface and bulk modes of magnetophotonic crystals.(2018) 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering, TCSET 2018, pp. 436–440.
16. E.N. Odarenko, Y.V. Sashkova, A.A. Shmat'ko, Localized field enhancement in slow-wave modes of modified Bragg waveguide (2017), IEEE Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium, MRRS 2017, pp. 147–150.
17. E.N. Odarenko, A.A. Shmat'ko, Photonic crystal and Bragg waveguides for THz electron devices.(2016) Conference Proceedings - 2016 IEEE 13th International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling, LFNM 2016,

- pp. 53–55.
18. Sprung D. W. L., Wu H. and Martorell J., Scattering by a finite periodic potential, *Am. J.Phys.*, 61 (1993) 1118.
  19. J. J. Stoker, *Nonlinear Vibrations* (Waverly, 1950).
  20. V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskii, *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients* (Wiley, 1975).
  21. M. S. P. Eastham, *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations* (Scottish Academic, 1975).
  22. W. Magnus and S. Winkler, *Hill's Equation* (Dover, 2004).
  23. J. K. Nurligareev and V. A. Sychugov, Propagation of light in a one-dimensional photonic crystal: analysis by the floquet-bloch function method, *Quantum Electron.* 38, 452–461 (2008).
  24. G. V. Morozov and D. W. L. Sprung, Floquet-Bloch waves in onedimensional photonic crystals, *Europhys. Lett.* 96, 54005 (2011).
  25. J. K. Nurligareev, Floquet–Bloch waves in bound onedimensional photonic crystals, *J. Surf. Invest.* 5, 193–208(2011).
  26. G. V. Morozov and D. W. L. Sprung, Transverse-magnetic-polarized Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystals, *J. Opt.Soc. Am. B* 29, 3231–3239 (2012).
  27. G. V. Morozov and D. W. L. Sprung, Band structure analysis of an analytically solvable Hill equation with continuous potential, *J. Opt.* 17, 035607 (2015).
  28. D. J. Vezzetti, M.M.Cahay. Transmission resonances in finite, repeated structures. *J.Phys. D; Appl. Phys.* 12 (1986), L53-L55.
  29. A.G. Gurevich. *Ferrites at Microwave Frequencies*. Consultants Bureau, New York. 1963.
  30. Epstein PS. Theory of wave proragation in a gyromagnetic medium. *Rev. Mod. Phys.* 1956; 28: 3–17.
  31. Mors PhM, Feshbach P. *Metods theoretical of physics. Path I*. New York, Toronto, London. McGraw Hill Book Company. Inc. 1953; 930.
  32. Floquet G. Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques. *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure.* 1883;12:47–88.