

Original article

In print article

<https://doi.org/10.26565/2222-5617-2025-42-02>

UDC 530.145, 530.12, 530.182

PACS numbers: 03.65.Yz, 03.67.Bg, 03.65.Ta

ВПЛИВ ПАРАМЕТРІВ ДЕКОГЕРЕНЦІЇ НА ЕФЕКТИВНІСТЬ ЗБЕРЕЖЕННЯ ЗАПЛУТАНОСТІ ДВОКУБІТНИХ СТАНІВ ВЕРНЕРА ЗА РАХУНОК КВАНТОВИХ ВИМІРЮВАНЬ

О. М. Коноваленко¹ , З. О. Майзеліс^{1,2} 

¹Інститут радіофізики та електроніки імені О. Я. Ускова НАН України,
вулиця Академіка Проскури, 12, 61085 Харків, Україна

²Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, 61022 Харків, Україна
E-mail: maizelis.z.a@gmail.com

Надійшла до редакції 03 квітня 2024 р. Переглянуто 13 травня 2024 р.

Прийнято до друку 17 травня 2024 р.

У цій роботі ми аналізуємо, як протокол спільних періодично повторюваних вимірювань впливає на збереження когерентності стану й тим самим зберігає запутаність у двокубітних системах у стані Вернера. Моделюючи лінійну взаємодію кожного кубіта з незалежним дисипативним середовищем (коефіцієнти γ_1, γ_2) та дисперсійну взаємодію (коефіцієнти $\gamma_{11} = \gamma_{\perp}, \gamma_{12} = \gamma_{\perp}$), ми вводимо «ефективність» алгоритму η , яка кількісно характеризує, наскільки ці вимірювання зменшують швидкість втрати когерентності й підтримують квантові кореляції.

Для максимально запутаного вхідного стану (параметр стану Вернера $p = 1$) ефективність η залежить гіперболічно від параметру $\gamma_{\perp}$ у режимі сильного лінійного зв'язку, за $\gamma_{\perp} \ll \gamma_1, \gamma_{\perp} \ll \gamma_2$, а ефективність асимптотично спадає до одиниці при $\gamma_1 \ll \gamma_{\perp}, \gamma_2 \ll \gamma_{\perp}$, що свідчить про втрату здібності пригнічення декогеренції у випадку переважно дисперсійного зв'язку з термостатом. Чисельно досліджено залежність ефективності збереження запутаності від усіх трьох параметрів, а саме: лінійної та дисперсійної взаємодії кожного кубіта з середовищем й параметру стану Вернера, що описує ступінь запутаності стану. Обговорюється ефективність алгоритму у різних граничних випадках, зокрема для мінімальних і максимальних значень параметра стану Вернера для цього випадку, а також за умов, коли рівень лінійної взаємодії наближається до дисперсійної.

Отримані результати показують, що ретельно підібрані методики вимірювання разом із високим рівнем запутаності квантової системи здатні ефективно нейтралізувати шкідливий вплив середовища. Це відкриває шлях до формулювання детальних, кількісно обґрунтованих рекомендацій щодо налаштування процедур динамічного захисту когерентності стану, які підвищують надійність збереження запутаності у різноманітних квантових алгоритмах, зокрема в протоколах квантового шифрування (BB84, E91/BBM92, DI-QKD, а також багатокореляційних схемах квантового секретного спільного доступу HVB99) і у варіаційних алгоритмах симуляції матеріалів (VQE, ADAPT-VQE, QITE, VQSD та пов'язаних із ними UCC-базованих підходах).

Ключові слова: квантова запутаність, стани Вернера, декогеренція, збереження запутаності, відкриті квантові системи, міра запутаності, рівняння Ліндблада.

Як цитувати: О. М. Коноваленко, З. О. Майзеліс. Вплив параметрів декогеренції на ефективність збереження запутаності двокубітних станів Вернера за рахунок квантових вимірювань. Вісник ХНУ імені В. Н. Каразіна. Серія «Фізика». Вип. 42, 2025, 22–26. <https://doi.org/10.26565/2222-5617-2025-42-02>

In cites: O. M. Konovalenko, Z. A. Maizelis. Influence of decoherence parameters on the efficiency of preserving entanglement of two-qubit werner states through quantum measurements. Journal of V. N. Karazin Kharkiv National University. Series Physics. Iss. 42, 2025, 22–26. <https://doi.org/10.26565/2222-5617-20250-42-02> (in Ukrainian).

ВСТУП

Квантова заплутаність є фундаментальною рисою квантової механіки та ключовим ресурсом у науці про квантову інформацію [1, 2]. У практичних умовах квантові системи рідко є ізольованими: вони взаємодіють із довкіллям та піддаються впливу шуму, що призводить до утворення змішаних квантових станів. Тому розуміння заплутаності в таких змішаних станах є критично важливим для забезпечення стійкості квантових обчислювальних та комунікаційних протоколів. Вернерівські стани є прикладом змішаних двокубітових станів, які можуть зберігати заплутаність [3]. Двокубітовий вернерівський стан зазвичай визначається як:

$$\rho_W(p) = p |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + (1-p) \frac{I_4}{4}, \quad (1)$$

де $0 \leq p \leq 1$, $|\Psi^-\rangle$ — максимально заплутаний синглетний стан Белла, а I_4 — матриця тотожності розмірності 4×4 (максимально змішаний стан). Ці стани є заплутаними за достатньо великих значень p , але стають сепарабельними (не заплутаними) при p нижчих за критичне значення ($p_{crit} = 1/3$ у випадку двох кубітів) [3, 4]. У своїй основоположній праці Вернер показав, що такі змішані заплутані стани можуть допускати модель локальних прихованих змінних у низькопараметричному режимі, тобто вони не порушують жодної нерівності Белла, незважаючи на заплутаність [3]. Ця парадоксальна властивість робить вернерівські стани зручним прикладом для дослідження межі між квантовими та класичними кореляціями.

Декогеренція — втрата квантової когерентності внаслідок взаємодії з довкіллям — істотно впливає на заплутані стани кубітів [5, 6]. Внаслідок декогеренції довкілля фактично «вимірює» систему, проектує квантові суперпозиції в класичні суміші та руйнує заплутаність (ефект *einselection*) [5, 7]. Для двокубітних вернерівських станів реалістичні механізми декогеренції (наприклад, дефазування або деполяризуючий шум, що діють на кожен із кубітів) змінюють стан, збільшуючи змішаність (тобто зменшуючи параметр p), при цьому зменшуючи або повністю знищуючи заплутаність. Теорія відкритих квантових систем надає інструменти для кількісного прогнозування цієї еволюції [8], включаючи можливість раптового зникнення заплутаності за скінченний час при певних каналах шуму — явище, відоме як раптова втрата заплутаності (*entanglement sudden death*, ESD) [9]. Ця крихкість стану була широко досліджена теоретично [9, 10] та підтверджена експериментально: зокрема, було продемонстровано ESD для фотонних двокубітових вернерівських станів

під дією контрольованого шуму [11].

Квантові вимірювання також відіграють ключову роль у зміні заплутаності станів. Проекційне вимірювання однієї частинки заплутаної пари миттєво колапсує спільний стан і зазвичай руйнує взаємну заплутаність кубітів. Більш того, безперервну взаємодію з довкіллям можна розглядати як форму неперервного вимірювання, при якому обирається певний «вказівний» (*pointer*) базис системи та поступово пригнічується фазова когерентність [5]. У контексті вернерівських станів часті вимірювання або взаємодія з довкіллям подібним чином приводять до затухання позадіагональних елементів матриці густини, спрямовуючи стан до класичної суміші. Експериментальні спостереження підтверджують цю картину: наприклад, спостерігали прогресивну декогеренцію суперпозиції станів в резонаторі (квантовий «лічильник» вимірювань), наочно демонструючи, як передача інформації довкіл्लю знищує квантову когерентність [12]. Такі результати підтверджують, що декогеренція та вимірювання є двома сторонами переходу від квантового до класичного стану.

Вернерівські стани служать парадигматичною та керованою моделлю для вивчення того, як заплутаність у двокубітових системах змінюється під впливом декогеренції та вимірювань. Дослідження динаміки таких станів за наявності взаємодії із довкіллям дозволяє кількісно оцінити деградацію заплутаності (зокрема, через ESD) та проливає світло на фундаментальні аспекти квантових вимірювань. У цій статті ми представляємо теоретичний аналіз двокубітових вернерівських станів за наявності різних каналів декогеренції та втручання вимірювань, досліджуємо, як ці процеси погіршують заплутаність, й обговорюємо наслідки цих ефектів для збереження квантової інформації.

Характеристикою заплутаності стану є конкаренс (*concurrence*) [13] довільного двокубітового стану ρ , який визначається як:

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (2)$$

де λ_i — квадратні корені власних значень матриці:

$$R = \rho (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (3)$$

в порядку спадіння.

Для вернерівських станів конкаренс визначається простим аналітичним виразом:

$$C(\rho_W(p)) = \max\left\{0, \frac{3p-1}{2}\right\}, \quad (4)$$

який є строго позитивним лише для $p > 1/3$, що точно збігається з порогом сепарабельності для вернерівських станів.

СИМУЛЯЦІЯ ЕВОЛЮЦІЇ

Для збереження заплутаності вернерівського стану, ми реалізуємо спеціально розроблений протокол, що полягає у періодичних спільних жорстких вимірюваннях [14, 15] у белівському базисі стану двохкубітної системи, яка зазнає декогеренції внаслідок як лінійного зв'язку з термостатом, так і дисперсійного. Еволюцію стану системи ми розраховуємо за допомогою рівнянь Ліндблада [16, 17] з операторами, що відповідають як лінійному, так і дисперсійному зв'язку. Знаючи матричні елементи матриці густини стану в довільний момент часу, ми знаходимо характеристики заплутаності, а також ефективність η алгоритму, яку ми визначаємо як відношення швидкостей втрати конкаренсу за відсутності і при наявності повторюваних вимірювань.

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Перейдемо до аналізу отриманих результатів роботи алгоритму. На рис. 1 показана залежність ефективності алгоритму від двох параметрів лінійного зв'язку γ_1 та γ_2 при незмінному значенні $\gamma_\perp$.

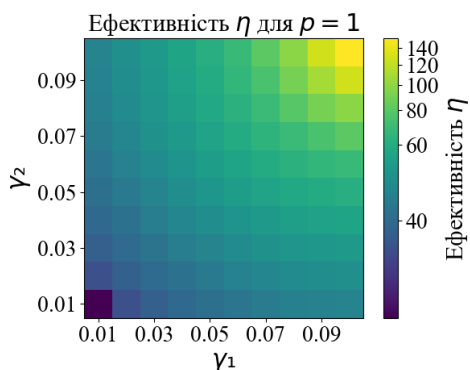


Рис. 1. Ефективність алгоритму збереження заплутаності стану Вернера як функція швидкостей декогеренції γ_1 та γ_2 , що відповідають лінійному зв'язку з термостатом, в одиницях власної частоти кубітів ω , при параметрі вернерівського стану $p = 1$ і $\gamma_\perp = 0.001$.

Fig. 1. Efficiency of the algorithm for preserving entanglement of the Werner state as a function of decoherence rates γ_1 and γ_2 , corresponding to linear coupling with the reservoir, expressed in units of the qubits' intrinsic frequency ω , for Werner state parameter $p = 1$ and $\gamma_\perp = 0.001$.

Бачимо, що при $p = 1$ ефективність η монотонно зростає зі збільшенням γ_1 і γ_2 , причому у граничному

випадку $\gamma_\perp \ll \gamma_1, \gamma_\perp \ll \gamma_2$ можемо асимптотично отримати:

$$\eta(\gamma_1, \gamma_2) \propto \gamma_1 + \gamma_2, \quad (5)$$

що підтверджується результатами чисельного розрахунку, показаними на рис. 1. Обидва параметри входять адитивно у ефективність лише у граничному випадку, при проміжних же значеннях $\gamma_1 \sim \gamma_\perp, \gamma_2 \sim \gamma_\perp$ наявний також взаємний вплив декогеренції двох кубітів один на одного, що є проявом нелінійної еволюції, визначеної рівнянням Ліндблада.

У режимі $\gamma_1 \ll \gamma_\perp, \gamma_2 \ll \gamma_\perp$ ефективність виходить асимптотично до одиниці, демонструючи знижену ефективність алгоритму, який дозволяє ефективно боротися саме з впливом лінійної взаємодії з термостатом.

Зазначимо, що застосування алгоритму до змішаного стану, який характеризується параметром $p = 0.9$, суттєво пригнічує загальну варіацію швидкості декогеренції: параметр η залишається значно ближчим до одиниці в усій області площини параметрів, що розглядається.

Ця особливість свідчить про те, що навіть помірний параметр змішування ефективно зменшує ефективність алгоритму, усуваючи виражену залежність від γ_1 , характерну для $p = 1$. Це пояснюється тим, що проектування на белівські стани дозволяє відновити максимальну заплутаність при $p = 1$, однак не є бажаною для змішаних станів. Рисунок 2 демонструє залежність від параметру $\gamma_\perp$ при цих двох значеннях параметру p .

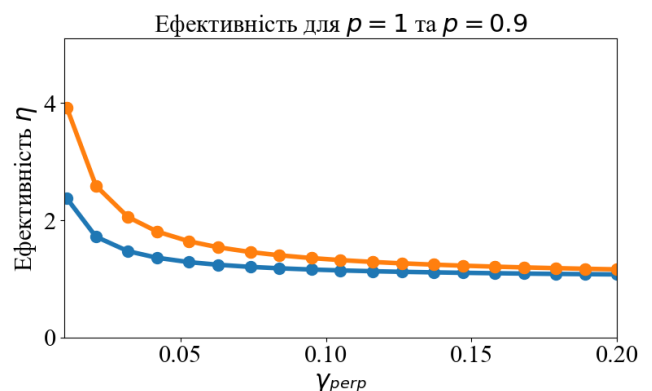


Рис. 2. Ефективність алгоритму збереження заплутаності стану Вернера як функція швидкості декогеренції $\gamma_\perp/\omega$ при параметрах $p = 1$ (верхня крива) і $p = 0.9$ (нижня крива).

Fig. 2. Efficiency of the algorithm for preserving entanglement of the Werner state as a function of the decoherence rate $\gamma_\perp/\omega$, for Werner state parameters $p = 1$ (upper curve) and $p = 0.9$ (lower curve).

Бачимо, що для обох значень параметру p ефективність η спадає зі збільшенням $\gamma_{\perp}$, наближаючись асимптотично до значень порядку одиниці, причому зменшення параметру p зменшує ефективність алгоритму.

Асимптотично по малому параметру $\gamma_{\perp}/\gamma_1$ можна отримати:

$$\eta(\gamma_1, \gamma_{\perp}) \sim 1 + C \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_{\perp}}, \quad (6)$$

з константою $C \approx 0.23$.

ВИСНОВКИ

У цій роботі ми дослідили вплив ключових параметрів декогеренції, γ_1, γ_2 і $\gamma_{\perp}$, що характеризують лінійний і дисперсійний зв'язки кубітів з ступенями свободи термостату, на ефективність алгоритму пригнічення декогеренції системи з двох кубітів у вернерівському стані. Наш аналіз показав, що відношення швидкостей зменшення конкаренсу пари кубітів лінійно залежить від суми параметрів лінійного зв'язку і обернено пропорційне до параметру дисперсійного зв'язку, у режимі сильного лінійного зв'язку $\gamma_{\perp} \ll \gamma_1, \gamma_{\perp} \ll \gamma_2$. У протилежному ж граничному випадку слабого лінійного зв'язку алгоритм перестає бути ефективним, і $\eta \approx 1$. Це зниження ефективності свідчить про те, що вимірювання сплутаного стану кубітів ефективно долає декогеренцію, що суттєво змінює не тільки позадіагональні матричні елементи, але і викликає затухання, тобто призводить до деградації діагональних елементів.

Окремо досліджено вплив параметра змішаності вернерівського стану p . Порівняльний аналіз максимально заплутаного стану з $p = 1$ і змішаного стану з $p < 1$ показав, що ефективність методу суттєво знижується для змішаних станів при всіх досліджених значеннях параметрів декогеренції. Це пов'язано з тим, що декогеренція, пов'язана з термічними шумами, виявляється замаскованою під змішаний вернерівський стан пари кубітів. Таким чином, саме розгляд стану Вернера дозволив проаналізувати цей важливий параметр стану заплутаних систем.

Загалом, наші результати демонструють, що хоча слабкий зв'язок із тепловими резервуарами може суттєво погіршувати роботу квантових алгоритмів і призводити до декогеренції, повторювані жорсткі вимірювання стану заплутаної системи у белівському базисі дозволяють суттєво зменшити швидкість втрати заплутаності. Ці висновки мають практичний інтерес для налаштування ефективної роботи квантових комп'ютерів з урахуванням лінійного та дисперсійного зв'язків з термостатом, в інженерії чистих станів, для

оптимізації роботи квантових систем із змішаними заплутаними вхідними станами, і відкривають перспективи для подальших досліджень термодинамічної поведінки низькорозмірних відкритих квантових систем.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare that they have no conflict of interests.

REFERENCES

1. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki. Rev. Mod. Phys., 81, 865 (2009). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.865>
2. M. A. Nielsen and I. L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, Cambridge (2000), 676 p. ISBN: 9780521635035
3. R. F. Werner. Phys. Rev. A, 40, 4277 (1989). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.4277>
4. A. Peres. Phys. Rev. Lett., 77, 1413 (1996). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>
5. W. H. Zurek. Rev. Mod. Phys., 75, 715 (2003). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.715>
6. M. Schlosshauer. Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition, Springer, Berlin Heidelberg (2007), 416 p. ISBN: 9783540357735
7. E. Joos, H. D. Zeh, C. Kiefer, D. Giulini, J. Kupsch, and I. O. Stamatescu. Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory, 2nd ed., Springer, Berlin Heidelberg (2003), 508 p. ISBN: 9783540003908
8. H. P. Breuer and F. Petruccione. The Theory of Open Quantum Systems, Oxford University Press, Oxford (2002), 648 p. ISBN: 9780198520634
9. T. Yu and J. H. Eberly. Science, 323, 598 (2009). <https://doi.org/10.1126/science.1167343>
10. L. Aolita, F. de Melo, and L. Davidovich. Rep. Prog. Phys., 78, 042001 (2015). <https://doi.org/10.1088/0034-4885/78/4/042001>
11. M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, and L. Davidovich. Science, 316, 579 (2007). <https://doi.org/10.1126/science.1139892>
12. M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche. Phys. Rev. Lett., 77, 4887 (1996). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.4887>
13. W. K. Wootters. Phys. Rev. Lett., 80, 2245 (1998). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>
14. C. H. Bennett and S. J. Wiesner. Phys. Rev. Lett., 69, 2881 (1992). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.2881>
15. C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters. Phys. Rev. Lett., 70, 1895 (1993). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895>
16. G. Lindblad. Commun. Math. Phys., 48, 119 (1976).

17. V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan.
J. Math. Phys., 17, 821 (1976).

INFLUENCE OF DECOHERENCE PARAMETERS ON THE EFFICIENCY OF PRESERVING ENTANGLEMENT OF TWO-QUBIT WERNER STATES THROUGH QUANTUM MEASUREMENTS

O. M. Konovalenko¹, Z. A. Maizelis^{1,2}

¹*O. Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics NASU,
12 Akademika Proskury Str. 61085 Kharkiv, Ukraine*

²*V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., 61022 Kharkiv, Ukraine
E-mail: maizelis.z.a@gmail.com*

Received on April 03, 2024. Reviewed on May 13, 2024.

Accepted for publication on May 17, 2024.

In this work we analyse how a protocol of joint, periodically repeated measurements influences the preservation of state coherence and thereby maintains entanglement in two-qubit systems prepared in a Werner state. By modeling the linear interactions of each qubit with independent dissipative environments (with coefficients γ_1, γ_2) together with the dispersive interactions (with coefficients $\gamma_{\perp 1} = \gamma_{\perp}, \gamma_{\perp 2} = \gamma_{\perp}$), we introduce the algorithmic “efficiency” parameter η , which quantitatively characterises how strongly these measurements slow down the loss of coherence and support the underlying quantum correlations..

For the maximally entangled input state (Werner state parameter $p = 1$), the efficiency η shows a hyperbolic dependence on the dispersive-coupling parameter $\gamma_{\perp}$ in the strong linear-coupling regime, when $\gamma_{\perp} \ll \gamma_1, \gamma_{\perp} \ll \gamma_2$. In the opposite regime, when $\gamma_1 \ll \gamma_{\perp}, \gamma_2 \ll \gamma_{\perp}$, efficiency asymptotically approaches unity, indicating a loss of capability to suppress decoherence in environments dominated by dispersive interactions. A comprehensive numerical study has been performed on the entanglement-preservation efficiency across all three relevant parameters—namely, the linear and dispersive couplings of each qubit to the environment and the Werner-state parameter that quantifies the initial entanglement. The algorithm’s performance is analyzed in various limiting cases, including the minimal and maximal values of the Werner parameter examined in this work, as well as scenarios in which the linear-interaction strength approaches the dispersive one.

The results obtained indicate that carefully tailored measurement schemes, combined with a high level of quantum-system entanglement, can effectively neutralize the deleterious influence of the environment. This paves the way for formulating detailed, quantitatively substantiated recommendations for tuning dynamic coherence-protection procedures that enhance the reliability of entanglement preservation across a variety of quantum algorithms, including entanglement-based quantum-cryptography protocols (BB84, E91/BBM92, DI-QKD, as well as multi-correlation quantum secret-sharing schemes such as HBB99) and variational algorithms for materials simulation (VQE, ADAPT-VQE, QITE, VQSD and related UCC-based approaches).

Keywords: quantum entanglement, Werner states, decoherence, entanglement preservation, open quantum systems, entanglement measure, Lindblad equation.