

Original article

In print article

<https://doi.org/10.26565/2222-5617-2024-41-02>

UDC 524.882+52-17+520.1

PACS numbers: 02.60.Lj, 04.20.-q, 95.35.+d

СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ З РАДІАЛЬНИМ РУХОМ

О. Ю. Орлянський¹ , В. А. Козачина² 

¹ Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, проспект Науки, 72, 49000 Дніпро, Україна

² ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», Південне шосе, 80, 69008 Запоріжжя, Україна
E-mail: v.kozachyna@gmail.com

Надійшла до редакції 01 жовтня 2024 р. Переглянуто 14 листопада 2024 р.

Прийнято до друку 17 листопада 2024 р.

У роботі побудована модель радіального руху пілоподібної матерії для сферично-симетричного випадку у Загальній теорії відносності (ЗТВ). Модель може бути використана, зокрема, для опису галактичних гало з темної матерії. Питання про якісний і кількісний склад темної матерії є вкрай важливим як для розуміння сучасної будови Всесвіту, так і для вибору найбільш реалістичного сценарію його еволюції. Оскільки темна матерія ефективно проявляє себе лише гравітаційно, її тиском можна знехтувати, а рівняння стану, незважаючи на її фізичну природу, вважати пілоподібним. Наявність надмасивних чорних дір у центрах галактик і масштаби явищ обумовлюють використання рівнянь ЗТВ. Сферичні форми галактичних гало обумовлюють використання сферичної симетрії. Метою роботи є моделювання радіального руху темної матерії для сферично симетричного інтервалу ЗТВ з урахуванням можливої центральної маси. Темна матерія вважається пілоподібною і такою, що рухається як до центру, так і від нього. У роботі доведено, що такому стаціонарному випадку відповідає статичний інтервал простору-часу у координатах кривизн. Система рівнянь Ейнштейна для цього випадку суттєво спрощена й розв'язана чисельно. Граничними умовами обрано умови Ліхнеровича-Дармуа зшивки простору-часу запропонованої моделі із зовнішнім сферично-симетричним простором-часом Шварцшильда. У розробленій моделі виникає горизонт подій, при наближенні до якого рух частинок немов «завмирає», аналогічно руху поблизу горизонту подій у полі Шварцшильда. Таким чином модель також враховує наявність чорної діри у центрі, яка мала утворитися внаслідок розглянутого руху матерії. Запропоновану модель можна застосовувати до сферичних галактичних скупчень і навіть до зоряних систем в просторі поза зорею, якщо припустити існування навколо них гало з частинок холодної темної матерії.

Ключові слова: загальна теорія відносності, рівняння Ейнштейна, темна матерія, чорна діра, галактичне гало.

Як цитувати: О. Ю. Орлянський, В. А. Козачина. Сферично-симетричні розв'язки загальної теорії відносності з радіальним рухом. Вісник ХНУ імені В. Н. Каразіна. Серія «Фізика». Вип. 41, 2024, 16–22. <https://doi.org/10.26565/2222-5617-2024-41-02>

In cites: O. Yu. Orlyansky, V. A. Kozachyna. Spherically symmetric solutions of general relativity with radial motion. Journal of V. N. Karazin Kharkiv National University. Series Physics. Iss. 41, 2024, 16–22. <https://doi.org/10.26565/2222-5617-2024-41-02> (in Ukrainian).

ВСТУП

У стандартній космологічній моделі Λ CDM близько 5/6 всієї матерії у Всесвіті припадає на небаріонну темну матерію [1]. Доказами існування темної матерії є значна кількість незалежних астрономічних спостережень, до яких, зокрема, відносяться: дослідження гравітаційного линзування масивними тілами, галактиками або скупченнями галактик [2]; дослідження ротаційних кривих обертання галактик [3]; дослідження анізотропії реліктового випромінювання [4] тощо.

Темна матерія є основою, на якій формуються, еволюціонують, зливаються галактики. З еволюцією Всесвіту темна матерія виступала своєрідним «каталізатором» згущення баріонної матерії, подальшого утворенням з неї зір та загалом видимої складової галактик.

Відповідно, еволюція галактик та галактичних скупчень тісно пов'язана з гравітаційним впливом та розподілом маси в гало темної матерії. З цього випливає важливість математичного моделювання галактичних гало, що може дати відповіді як на питання стосовно фізики формування галактик, так і прояснити властивості та причини існуючого розподілу темної матерії.

З'ясуванню природи темної матерії приділяється чимала увага. Однак, незважаючи на ці значні зусилля, точні властивості темної матерії залишаються значною мірою невідомими. Очікується, що гравітаційні хвилі, передбачені у загальній теорії відносності (ЗТВ) та успішно виявлені у 2015 році, дозволять пролити світло на дану проблему, зокрема, шляхом фіксування впливу щільного гало темної матерії на поведінку гравітаційних хвиль [5].

Незважаючи на те, що природа темної матерії невідома, її гравітаційний вплив та рух повністю визначаються рівняннями ЗТВ внаслідок того, що, за всіма існуючими даними, вона ефективно проявляє себе тільки у гравітаційній взаємодії.

МЕТА ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даної роботи є моделювання радіального руху темної матерії в сферично симетричному полі.

Оскільки ЗТВ підтверджена багатьма спостереженнями та вже й даними експериментів, а галактики містять у своїх центрах надмасивні чорні діри, для опису руху темної матерії в галактичних гало слід використовувати рівняння Ейнштейна.

Яка природа темної матерії остаточно ще не відомо, але, оскільки вона дуже слабо взаємодіє електромагнітно зі звичайною речовиною, її можна вважати пилоподібною [1].

МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Опис моделі

Вважаємо, що темна матерія має пилоподібне рівняння стану, тобто її тиском можна знехтувати. Спостереження за галактичними гало свідчать, що навіть навколо спіральних галактик гало з темної матерії мають сферичні форми [2]. При утворенні галактик звичайна матерія за рахунок електромагнітної взаємодії і наявності початкового кутового моменту, а також механізмів його передачі від центральних до периферійних областей [6] з часом змінює свій розподіл, утворюючи дископодібну складову. Оскільки для темної матерії можна знехтувати іншими типами взаємодії крім гравітаційної, її приблизно сферично-симетричний початковий розподіл зберігатиметься довгий час, а частинки рухатимуться у напрямках близьких до радіальних. Розглянемо таку стаціонарну модель, розв'язавши рівняння Ейнштейна для сферично-симетричного інтервалу простору-часу в координатах кривизн, який є загальним для випадку сферичної симетрії [7]:

$$ds^2 = e^{v(r,t)} dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1)$$

де швидкість світла c прийнята за одиницю.

Тензор енергії-імпульсу темної матерії як ідеальної рідини в загальному вигляді записується наступним чином:

$$T_\nu^\mu = (\varepsilon + p)U^\mu U_\nu - \delta_\nu^\mu p, \quad (2)$$

де $\varepsilon(r)$ – розподіл густини енергії, $p(r)$ – тиск, U_ν, U^μ – відповідно коваріантні та контраваріантні компоненти 4-швидкості.

Вважатимемо, що частинки рухаються радіально, їх рух направлений як до центральної маси, так і від неї, тому для зручності розділимо матерію на дві компоненти з однаковими розподілами густини енергії, яка є функцією радіуса, а рух частинок відрізнятиметься напрямком:

$$\varepsilon_{(1)}(r) = \varepsilon_{(2)}(r) = \varepsilon(r) = \varepsilon,$$

$$p_{(1)}(r) = p_{(2)}(r) = p(r) = 0,$$

$$U_{(1)}^0 = U_{(2)}^0 = U^0 = \frac{dt}{ds}, U_{(1)}^1 = -U_{(2)}^1 = U^1 = \frac{dr}{ds},$$

$$U_{(1)}^2 = U_{(2)}^2 = \frac{d\theta}{ds}, U_{(1)}^3 = U_{(2)}^3 = \frac{d\phi}{ds},$$

де в дужках вказується номер компоненти.

Оскільки рух є радіальним, θ і φ константи, тому $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$, де тут і далі точкою позначається похідна по часовій координаті t , а штрихом – похідна по радіальній координаті r . Враховуючи це, маємо наступні ненульові компоненти 4-швидкості:

$$U^0 = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}}, \quad (3)$$

$$U^1 = \frac{dr}{ds} = \frac{\dot{r}}{\sqrt{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}}. \quad (4)$$

Тензор енергії-імпульсу (2) даної пілоподібної двокомпонентної матерії має вигляд:

$$T_\nu^\mu = \varepsilon(r) U_{(1)}^\mu U_{(1)\nu} + \varepsilon(r) U_{(2)}^\mu U_{(2)\nu},$$

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \varepsilon(U_{(1)}^0 U_{(1)0} + U_{(2)}^0 U_{(2)0}) = 2\varepsilon U^0 U_0 = \\ &= 2\varepsilon \frac{e^\nu}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1^1 &= \varepsilon(U_{(1)}^1 U_{(1)1} + U_{(2)}^1 U_{(2)1}) = 2\varepsilon U^1 U_1 = \\ &= -2\varepsilon \frac{e^\lambda \dot{r}^2}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}. \end{aligned}$$

Для недіагональної компоненти тензора енергії-імпульсу T_1^0 маємо:

$$T_1^0 = \varepsilon(U_{(1)}^0 U_{(1)1} + U_{(2)}^0 U_{(2)1}) = \varepsilon(U^0 U_1 + U^0 (-U_1)) = 0.$$

Аналогічно $T_0^1 = 0$. Всі інші компоненти тензора енергії-імпульсу також тотожно дорівнюють нулю.

Статичність моделі

Система рівнянь Ейнштейна для центрально-симетричного інтервалу записується у наступному вигляді [7]:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\gamma T_0^0 = 16\pi\gamma \frac{e^\nu}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}, \quad (5)$$

$$-e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} = 8\pi\gamma T_0^1 = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} &= -8\pi\gamma T_1^1 = \\ &= 16\pi\gamma \varepsilon \frac{e^\lambda \dot{r}^2}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'}{2} (\nu' - \lambda') + \frac{1}{r} (\nu' - \lambda') \right) &= \\ &= 8\pi\gamma T_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де γ – гравітаційна стала і в (8) було враховано, що згідно (6) знаходимо, що $\dot{\lambda} = 0$, тобто λ залежить лише від радіальної координати. Віднявши (7) від (5) маємо:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} \right) = 16\pi\gamma \varepsilon + 2(e^{-\lambda} - 1) \frac{1}{r^2}.$$

Оскільки ε і λ залежать лише від радіальної координати r , з останнього рівняння знаходимо, що ν' має бути функцією тільки r , тобто $\nu' = g(r)$, де $g(r)$ – деяка функція радіальної координати. Проінтегрувавши, отримуємо:

$$\nu = f(t) + \int g(r) dr.$$

Інтервал (1) залишає можливість перетворення часової координати від t до τ : $d\tau = e^{f(t)} dt$. Тож, без втрати загальності, можна вважати, що ν теж є функцією лише радіальної координати і не залежить від часу. Наслідком цього є статичність сферично-симетричного інтервалу, що є проявом стаціонарності даної задачі.

Незважаючи на наявність радіального руху матерії, завдяки однаковому її переносу у протилежних напрямках, від системи рівнянь в частинних похідних вдалося перейти до залежності невідомих функцій лише від однієї координати. Радіальна швидкість матерії на відстані r від центру також не залежить від часу і є функцією лише радіальної координати: $\dot{r} = \dot{r}(r)$, що витікає з (5) або (7).

Отже маємо систему трьох рівнянь (5), (7), (8) з чотирма невідомими функціями $\lambda(r), \nu(r), \varepsilon(r), \dot{r}(r)$. Ми нічого не знаємо про темну матерію, крім того, що її частинки взаємодіють тільки гравітаційно (сферична форма галактичних гало тому опосередкований доказ). Якщо казати коректніше та точніше, іншими видами взаємодії частинок темної матерії ми можемо знехтувати, розглядаючи їх рух як рух геодезичними. Це дозволяє доповнити систему рівнянь (5), (7), (8) й отримати всі невідомі функції.

Рівняння руху

Запишемо рівняння геодезичних:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i U^k U^l = 0.$$

Ненульові символи Кристофеля, необхідні у нашому випадку ($U^2 = U^3 = 0$) є наступними [7]:

$$\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{\nu'}{2}, \Gamma_{00}^1 = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, \Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}.$$

Рівняння геодезичних для x^2, x^3 зводяться до тотожності $\theta = 0$, а для x^0, x^1 набувають вигляду:

$$\frac{dU^0}{ds} + 2\frac{\nu'}{2} U^0 U^1 = 0, \quad (9)$$

$$\frac{dU^1}{ds} + \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} (U^0)^2 + \frac{\lambda'}{2} (U^1)^2 = 0. \quad (10)$$

Проінтегруємо (9):

$$\frac{dU^0}{ds} + \nu' U^0 \frac{dr}{ds} = 0,$$

$$\frac{dU^0}{U^0} = -\nu' dr,$$

$$U^0 = A e^{-\nu}, \text{ де } A = \text{Const.}$$

Тоді вираз для радіальної швидкості частинок матерії з урахуванням (3) може бути записаний у вигляді:

$$\dot{r}^2 = e^{\nu-\lambda} \left(1 - \frac{e^\nu}{A^2} \right). \quad (11)$$

Таким чином, маємо такі ненульові компоненти 4-швидкості:

$$U^0 = A e^{-\nu}, \quad (12)$$

$$U^1 = \text{sgn}(\dot{r}) \sqrt{e^{-\lambda} (A^2 e^{-\nu} - 1)}, \quad (13)$$

а відповідні компоненти тензора енергії-імпульсу з урахуванням (11)–(13) спрощуються:

$$T_0^0 = 2\varepsilon g_{00} (U^0)^2 = 2A^2 e^{-\nu} \varepsilon, \quad (14)$$

$$T_1^1 = 2\varepsilon g_{11} (U^1)^2 = 2(1 - A^2 e^{-\nu}) \varepsilon. \quad (15)$$

Враховуючи (14), (15), запишемо рівняння Ейнштейна наступним чином:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 16\pi\gamma A^2 e^{-\nu} \varepsilon, \quad (16)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = -16\pi\gamma (1 - A^2 e^{-\nu}) \varepsilon, \quad (17)$$

$$\nu'' + \frac{\nu'}{2} (\nu' - \lambda') + \frac{1}{r} (\nu' - \lambda') = 0. \quad (18)$$

Зазначимо, що рівняння геодезичної (10) з урахуванням (12) і (13) виконується тотожно, а замість (18) можна використати закон збереження тензора енергії-імпульсу для радіальної компоненти:

$$T_{1;\mu}^\mu = T_{1,\mu}^\mu + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu T_1^\sigma - \Gamma_{1\mu}^\sigma T_\sigma^\mu = 0,$$

який у нашого випадку, з урахуванням символів Кристофеля $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$ [7], набуває вигляду:

$$(T_1^1)' + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r} \right) T_1^1 - \frac{\nu'}{2} T_0^0 = 0. \quad (19)$$

Якщо компоненти тензора енергії-імпульсу T_0^0 і T_1^1 у загальному вигляді з (5) і (7) підставити в (19), після скорочення отримуємо (18), але на відміну від (18) рівняння (19) вже згруповано зручним для інтегрування чином. Для цього T_0^0 виразимо через T_1^1 , поділивши (14) на (15), і підставимо $T_0^0 = T_1^1 / (A^2 e^{-\nu} - 1)$ в (19). Отримуємо рівняння:

$$\frac{(T_1^1)'}{T_1^1} + \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r} + \frac{1}{2} \frac{\nu'}{1 - A^2 e^{-\nu}} = \frac{(T_1^1)'}{T_1^1} + \nu' + \frac{2}{r} - \frac{1}{2} \frac{(A^2 - e^\nu)'}{A^2 - e^\nu} = 0,$$

яке легко інтегрується:

$$T_1^1 = -\frac{\alpha}{r^2} e^{-\nu} \sqrt{A^2 - e^\nu}, \quad (20)$$

$$T_0^0 = \frac{\alpha A^2}{r^2} \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{A^2 - e^\nu}}, \quad (21)$$

де α – додатна стала інтегрування, яка, на відміну від A^2 , є розмірною величиною. Густина енергії визначається через метричний коефіцієнт e^v :

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2r^2 \sqrt{A^2 - e^v}}. \quad (22)$$

Знаходження метричних коефіцієнтів e^v і e^λ дозволить розрахувати всі інші фізичні величини. Остаточно, підставивши (20), (21) у рівняння Ейнштейна та ввівши змінну $y = e^{-\lambda}r$, отримуємо вже суттєво спрощену систему диференціальних рівнянь ЗТВ (два рівняння і дві невідомі функції, що залежать від однієї радіальної змінної):

$$\begin{cases} e^v \sqrt{A^2 - e^v} (1 - y') = 8\pi\gamma\alpha A^2, \\ y(e^v r)' = r(e^v + 8\pi\gamma\alpha \sqrt{A^2 - e^v}). \end{cases} \quad (23)$$

Незважаючи на суттєвий прогрес у спрощенні системи диференціальних рівнянь ЗТВ, система (23) є нелінійною і потребує чисельного розв'язання. Крім того метрика змодельованого радіального розподілу темної матерії в галактичному гало має переходити у зовнішній простір-час ЗТВ, який у випадку сферичної симетрії може бути описаний метрикою Шварцшильда.

Зшивка

Знаходження аналітичних розв'язків отриманої системи диференціальних рівнянь не є можливим, тому шукатимемо чисельні розв'язки. Для цього запишемо граничні умови, які отримаємо з умов Ліхнеровича-Дармуа [8, 9] зшивки двох сферично-симетричних інтервалів.

Для довільних сферично-симетричних інтервалів

$$\begin{aligned} ds_{(1)}^2 &= A_{(1)}(r)dt^2 - B_{(1)}(r)dr^2 - C_{(1)}(r)d\sigma^2, \\ ds_{(2)}^2 &= A_{(2)}(r)dt^2 - B_{(2)}(r)dr^2 - C_{(2)}(r)d\sigma^2 \end{aligned}$$

умови зшивки Ліхнеровича-Дармуа рівності першої та другої квадратичних форм для поверхні зшивки $r = R = \text{Const}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} A_{(1)}(R) &= A_{(2)}(R), \\ C_{(1)}(R) &= C_{(2)}(R), \\ (C'_{(1)}(R))^2 B_{(2)}(R) &= (C'_{(2)}(R))^2 B_{(1)}(R), \\ (A'_{(1)}(R))^2 B_{(2)}(R) &= (A'_{(2)}(R))^2 B_{(1)}(R). \end{aligned}$$

Запишемо аналогічні умови зшивки простору-часу нашої моделі з зовнішнім простором-часом Шварцшильда:

$$e^{v(R)} = 1 - \frac{r_g}{R}, e^{-\lambda(R)} = 1 - \frac{r_g}{R}, (e^{v(r)})' \Big|_{r=R} = \frac{r_g}{R^2},$$

звідки $v'(R) = e^{-v(R)} r_g R^{-2}$. Визначимо константу A , яка увійшла в остаточний вираз рівнянь Ейнштейна (23). Для цього підставимо отримані умови зшивки у друге рівняння (23) або (17) і на границі $r=R$:

$$e^{-\lambda(R)} \left(\frac{v'(R)}{R} + \frac{1}{R^2} \right) - \frac{1}{R^2} = -16\pi\gamma (1 - A^2 e^{-v(R)}) \varepsilon(R).$$

Ліва частина на границі зшивки дорівнює нулю тотожно:

$$\left(1 - \frac{r_g}{R} \right) \left(\frac{r_g}{R^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{R}} + \frac{1}{R^2} \right) - \frac{1}{R^2} = 0.$$

Згідно (22), густина енергії на поверхні зшивки $\varepsilon(R) \neq 0$, тому остаточно отримуємо:

$$A^2 = e^{v(R)} = 1 - \frac{r_g}{R}.$$

Швидкість v та густина частинок темної матерії ρ розраховуються відповідно за формулами:

$$v = c \sqrt{e^{v-\lambda} \left(1 - \frac{e^v}{A^2} \right)}, \rho = \frac{1}{2c^2} \frac{\alpha}{r^2} \frac{1}{\sqrt{A^2 - e^v}},$$

де c – швидкість світла у вакуумі.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Обчислення проводились у пакеті комп'ютерної алгебри MAPLE. При знаходженні розв'язків рівнянь Ейнштейна змінними параметрами були R , r_g , α . Відмітимо, що параметр α характеризує внесок пилоподібної матерії у загальну масу конфігурації, до якої може входити сферично симетричне центральне тіло. На графіках наведено залежності метричних коефіцієнтів, а також швидкості радіального руху частинок темної матерії і її густини від відстані до центру. Зазначимо також, що коефіцієнт α підбирався таким чином, щоб середня густина матерії була $\sim 10^{-27}$ кг/м³.

Результати розрахунків наведені для $R = 10^{13}$ м, $r_g = 10^8$ м, $\alpha = 10^{12}$ кг·м/с² (рис. 1-3).

Результати чисельного розрахунку показують, що в даній моделі радіального руху темної матерії за наявності масивного центру, наприклад, чорної діри в центрі галактики, виникає сингулярність, при наближенні до якої рух частинок немов «завмирає», аналогічно руху поблизу горизонту подій в полі

Шварцшильда. Особливістю розглянутої моделі є те, що всі частинки темної матерії мають однакову енергію, отже віддаляються від центру на однакову відстань.

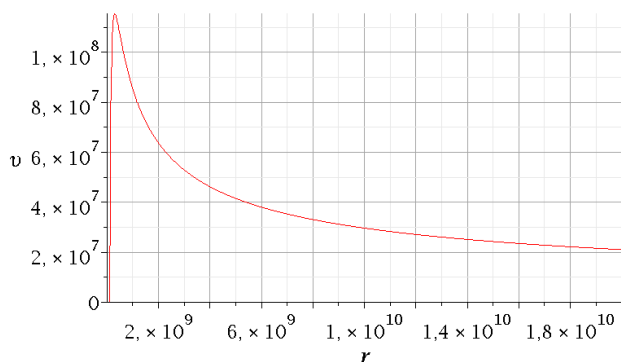


Рис. 1. Швидкості радіального руху частинок поблизу горизонту подій.

Fig. 1. Radial velocities of particles near the event horizon.

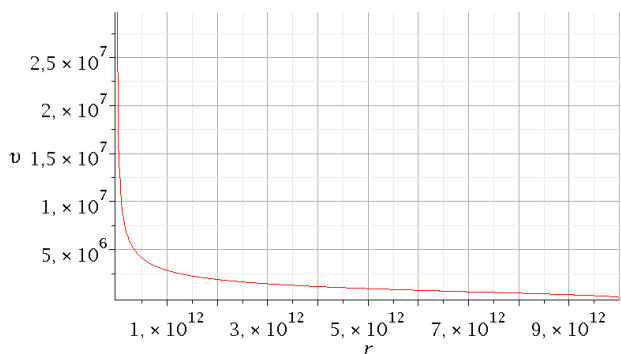


Рис. 2. Швидкості радіального руху частинок на віддаленні від центральної маси

Fig. 2. Radial velocities of particles at a distance from the central mass.

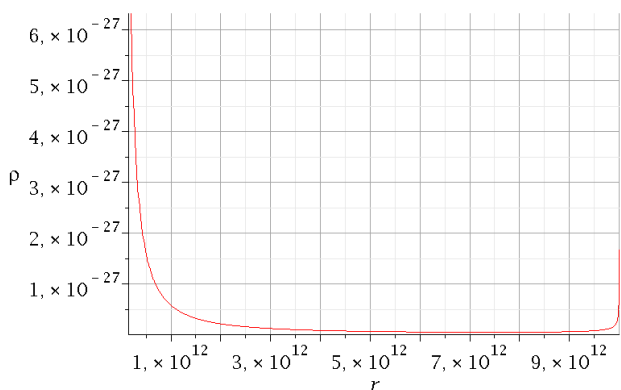


Рис. 3. Залежність густини темної матерії від радіусу.

Fig. 3. Dependence of dark matter density on radius.

Завдяки цьому на границі зшивки маємо своєрідне гало, яке нагадує сферичну оболонку з нечіткою внутрішньою границею.

ВИСНОВКИ

У роботі побудовано модель радіального руху темної матерії у сферично-симетричному просторі-часі. Отримана модель є стаціонарною і описує рух темної матерії в обох напрямках. Виходячи з того, що при наближенні до центру виникає горизонт подій, модель описує чорну діру, біля якої рухається темна матерія. Майже нульова швидкість частинок поблизу горизонту подій пояснюється тим, що з боку віддаленого спостерігача частинка досягає горизонту чорної діри за нескінченний проміжок часу.

Зазначимо, що даний підхід можна застосувати і до сферичних скупчень галактик, зоряних систем в просторі поза зорею, якщо припустити існування навколо них гало з частинок холодної темної матерії.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare that they have no conflict of interests.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Planck Collaboration. Planck 2018 results. Astr. and Astroph. Special Issue, 641, A1, 1 (2020). <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833880>
2. S. Vegetti, S. Birrer, G. Despali, C. D. Fassnacht, D. Gilman, Y. Hezaveh, L. Perreault Levasseur, J. P. McKean, D. M. Powell, C. M. O'Riordan, G. Vernardos. Space Sc. Rev., 220, 1 (2024). <https://doi.org/10.1007/s11214-024-01087-w>
3. W. J. G. de Blok, F. Walter, E. Brinks, C. Trachternach, S-H. Oh, R. C. Kennicutt Jr. The Astronom. J., 136, 6, 2648 (2008). <https://doi.org/10.1088/0004-6256/136/6/2648>
4. E. Komatsu, J. Dunkley, M. R. Nolta, C. L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw, N. Jarosik, D. Larson, M. Limon, L. Page, D. N. Spergel, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, S. S. Meyer, G. S. Tucker, J. L. Weiland. The Astroph. J. Suppl. Ser., 180, 2, 330 (2009). <https://doi.org/10.1088/0067-0049/180/2/330>
5. K. Eda, Y. Itoh, S. Kuroyanagi, J. Silk. Phys. Rev. D, 91, 4, 044045 (2015). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.044045>
6. M. López Corredoira, J. Betancort-Rijo, J. E. Beckman. Astr. and Astroph. 386, 1, 169 (2002). <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20020229>
7. L. D. Landau, E. M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields: Volume 2, 4th Revised English Edition, Butterworth-Heinemann, Oxford (1994), 444p.

8. W. B. Bonnor, P. A. Vickers. Junction Conditions in General Relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 13 (1981). <https://doi.org/10.1007/BF00766295>
 9. М. П. Коркіна. Сферичні конфігурації та умови зшивки, ДДУ, Д. (1998), 57 с.
 5. K. Eda, Y. Itoh, S. Kuroyanagi, J. Silk. *Phys. Rev. D*, 91, 4, 044045 (2015). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.044045>
 6. M. López Corredoira, J. Betancort-Rijo, J. E. Beckman. *Astr. and Astroph.*, 386, 1, 169 (2002). <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20020229>
 7. L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields: Volume 2, 4th Revised English Edition*, Butterworth-Heinemann, Oxford (1994), 444p.
 8. W. B. Bonnor, P. A. Vickers. Junction Conditions in General Relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 13 (1981). <https://doi.org/10.1007/BF00766295>
 9. M. P. Korkina. Spherical configurations and junction conditions, DSU, D. (1998), 57 p. (In Ukrainian).
- REFERENCES**
1. Planck Collaboration. Planck 2018 results. *Astr. and Astroph.*, Special Issue, 641, A1, 1 (2020). <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833880>
 2. S. Vegetti, S. Birrer, G. Despali, C. D. Fassnacht, D. Gilman, Y. Hezaveh, L. Perreault Levasseur, J. P. McKean, D. M. Powell, C. M. O'Riordan, G. Vernardos. *Space Sc. Rev.*, 220, 1 (2024). <https://doi.org/10.1007/s11214-024-01087-w>
 3. W. J. G. de Blok, F. Walter, E. Brinks, C. Trachternach, S-H. Oh, R. C. Kennicutt Jr. *The Astronom. J.*, 136, 6, 2648 (2008). <https://doi.org/10.1088/0004-6256/136/6/2648>
 4. E. Komatsu, J. Dunkley, M. R. Nolte, C. L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw, N. Jarosik, D. Larson, M. Limon,

SPHERICALLY SYMMETRIC SOLUTIONS OF GENERAL RELATIVITY WITH RADIAL MOTION

O. Yu. Orlyansky¹, V. A. Kozachyna²

¹*Oles Honchar Dnipro National University, 72 Nauky Ave., 49000 Dnipro, Ukraine*

²*LLC "TECHNICAL UNIVERSITY "METINVEST POLYTECHNIC", 80 Southern Highway, 69008 Zaporizhzhia, Ukraine
E-mail: v.kozachyna@gmail.com*

Received on October 01, 2024. Reviewed on November 14, 2024.

Accepted for publication on November 17, 2024.

In this paper, the model of radial motion of dusty matter for the spherically symmetric case in General Relativity (GR) was developed. The model can be used, in particular, to describe galactic halos of dark matter. The question of the qualitative and quantitative composition of dark matter is of great importance both for understanding the current structure of the Universe and for choosing the most realistic scenario of its evolution. Since dark matter effectively manifests itself only gravitationally, its pressure can be neglected, and the equation of state, despite its physical nature, can be considered dusty. The presence of supermassive black holes in the centers of galaxies and the scale of the phenomena necessitate the use of GR equations. The spherical shapes of galactic halos require the use of spherical symmetry. The aim of this work is to model the radial motion of dark matter for a spherically symmetric GR interval, taking into account a possible central mass. Dark matter is assumed to be dusty and moving both toward and away from the center. It is proved that such a stationary case corresponds to a static interval of spacetime in the coordinates of curvatures. The system of Einstein's equations for this case is significantly simplified and solved numerically. The Lichnerowicz-Darmois conditions of crosslinking the spacetime of the proposed model with the external spherically symmetric Schwarzschild spacetime are chosen as boundary conditions. In the proposed model, there is an event horizon, approaching which the motion of particles seems to "freeze", similar to the motion near the event horizon in the Schwarzschild field. Thus, the model also takes into account the presence of a black hole in the center, which should have been formed as a result of the considered motion of matter. The proposed model can be applied to spherical galaxy clusters and even to stellar systems in space beyond the star, assuming the existence of a halo of cold dark matter particles around them.

Keywords: *general relativity, Einstein's equations, dark matter, black hole, galactic halo.*