

Regular and stochastic dynamics of the Duffing oscillator excited by the harmonic force

P.K. Sikorski, I.O. Anisimov

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, 60 Volodymyrska St., 01033, Kyiv, Ukraine
sikorskiphilipp@knu.ua*

ORCID: 0000-0002-9764-259X, 0000-0002-6185-1162

DOI: 10.26565/2222-5617-2021-34-09

Regular and stochastic motion of the conservative oscillator with the cubic nonlinearity due to the external harmonic force (Duffing model) was analyzed numerically. This model corresponds to a wide class of real systems: oscillating circuit with nonlinear capacitance, forced oscillations of mathematical pendulum, the electron's motion in a crystal and others. Duffing equation can be transformed into Ueda equation, that depends only on two parameters – normalized magnitude and normalized frequency of the external force. Oscillation plots, 3D phase portraits, spectra and point mapping for various parameters and initial conditions were obtained.

Regular motion corresponds to phase oscillations around points of nonlinear resonances. Phase oscillation are non-isochronous due to the Duffing oscillator nonlinearity. These results can be interpreted in the terms of Kolmogorov – Arnold – Moser and Poincare – Birkhoff theorems. Sequence of the alternation of higher-order resonances on the point mapping is determined by the free oscillations' law of non-isochronism.

Stochastic motion was detected via continuous spectrum and irregular character of the point mapping. Stochastic motion appears in the vicinity of the phase oscillations' separatrices and can be associated with the heteroclinic structure formation. For this case irregular jumps between different parts of the separatrix can be clearly observed at the oscillation plots. Another case of the stochastic motion is the nonlinear resonances' overlapping according to Chirikov criterion (for larger amplitudes of the external force). Initial stage of the overlapping of several resonances was observed when stability areas remained substantial. Oscillation plot for this mode becomes more complicated. Further increase in the amplitude of the external force leads to the formation of the wide area of the stochastic motion (stochastic sea) with small islands of stability on the mapping.

Key words: Duffing oscillator, nonlinear resonance, stochastic dynamics

Регулярна та стохастична динаміка осцилятора Дюффінга, збудженого гармонічною силою

Ф.К. Сікорський, І.О. Анісімов

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Володимирська 64, 01033, Київ, Україна

Числовими методами проаналізовано регулярні та стохастичні коливання консервативного осцилятора з кубічною нелінійністю під дією зовнішньої гармонічної сили (модель Дюффінга). Ця модель відповідає широкому класу реальних систем: коливний контур із нелінійною ємністю, вимушені коливання математичного маятника, рух електрона в кристалі та інші. Рівняння Дюффінга може бути перетворене на рівняння Уеди, яке залежить тільки від двох параметрів – нормованої амплітуди та нормованої частоти зовнішньої сили. Було побудовано епюри коливань, тривимірні фазові портрети, спектри і карти точкових відображень для різних параметрів та початкових умов.

Регулярний рух відповідає фазовим коливанням навколо точок нелінійних резонансів. Фазові коливання є неізохронними внаслідок нелінійності осцилятора Дюффінга. Ці результати можуть бути інтерпретовані в термінах теорем Колмогорова – Арнольда – Мозера та Пуанкаре – Біркгофа. Послідовність чергування резонансів вищих порядків на карті точкових відображень визначається законом неізохронності власних коливань.

Стохастичний рух визначався за неперервним спектром та нерегулярним характером точкових відображень. Стохастичний рух виникає в околі сепаратрис фазових коливань і може бути пов'язаний із формуванням гетероклінічних структур. Для цього випадку нерегулярні стрибки між різними частинами сепаратриси можна чітко спостерігати на епюрах коливань. Інший випадок стохастичного руху – це перекриття нелінійних резонансів відповідно до критерію Чірікова (за більших амплітуд зовнішньої сили). Спостерігалася початкова стадія перекриття кількох резонансів, коли області регулярного руху залишалися значними. Епюри коливань у цьому випадку помітно ускладнюються. Подальше зростання амплітуди зовнішньої сили веде до утворення широкої області стохастичного руху (стохастичного моря) з маленькими острівцями стійкості на карті відображення.

Ключові слова: осцилятор Дюффінга, нелінійний резонанс, стохастична динаміка

Регулярная и стохастическая динамика осциллятора Дюффинга, возбуждаемого гармонической силой

Ф.К. Сикорский, И.А. Анисимов

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Владимирская 64, 01033, Киев, Украина

Численно проанализированы регулярные и стохастические колебания консервативного осциллятора с кубической нелинейностью под действием внешней гармонической силы (модель Дюффинга). Эта модель соответствует широкому классу реальных систем: колебательный контур с нелинейной емкостью, вынужденные колебания математического маятника, движение электрона в кристалле и другие. Уравнение Дюффинга может быть преобразовано в уравнение Уэды, зависящее только от двух параметров – нормированной амплитуды и нормированной частоты внешней силы. Были построены эпюры колебаний, трехмерные фазовые портреты, спектры и карты точечных отображений для разных параметров и начальных условий.

Регулярное движение соответствует фазовым колебаниям вокруг точек нелинейных резонансов. Фазовые колебания являются неизохронными вследствие нелинейности осциллятора Дюффинга. Эти результаты могут быть интерпретированы в терминах теорем Колмогорова – Арнольда – Мозера и Пуанкаре – Биркгофа. Последовательность чередования резонансов высших порядков на карте точечных отображений определяется законом неизохронности собственных колебаний.

Стохастическое движение определялось по непрерывному спектру и по нерегулярному характеру точечных отображений. Стохастическое движение возникает в окрестностях сепаратрис фазовых колебаний и может быть связано с формированием гетероклинических структур. Для этого случая нерегулярные скачки между разными частями сепаратрисы можно четко наблюдать на эпюрах колебаний. Другой случай стохастического движения – это перекрытие нелинейных резонансов в соответствии с критерием Чирикова (при больших амплитудах внешней силы). Наблюдалась начальная стадия перекрытия нескольких резонансов, когда области регулярного движения оставались существенными. Эпюры колебаний в этом случае заметно усложняются. Дальнейшее возрастание амплитуды внешней силы ведет к образованию широкой области стохастического движения (стохастического моря) с маленькими островками устойчивости на карте отображения.

Ключевые слова: осциллятор Дюффинга, нелинейный резонанс, стохастическая динамика

Introduction

Oscillator with cubic nonlinearity (Duffing model) under the action of an external harmonic force is one of the simplest models that demonstrate stochastic dynamics. This model corresponds to a wide class of real systems: oscillating circuit with nonlinear capacitance, forced oscillations of mathematical pendulum, the electron's motion in a crystal and others. Although such models have long been being studied in the literature (see, e.g., [1]), conditions of the unpredictable behavior emergence and features of this behavior remain unclear. This report studies different modes of the conservative oscillator with cubic nonlinearity under the action of an external harmonic force, including the clarification of the conditions of the stochastic oscillations' occurrence.

Model description and methods of analysis

The Duffing model (for the conservative case) is described by the equation

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f_m \cos pt, \quad (1)$$

where ω_0 is the frequency of free oscillations of the small amplitude, β is parameter of the cubic nonlinearity (we treat only the case $\beta > 0$), f_m and p are amplitude and frequency of the external force, respectively. In the transition to dimensionless variables $\tau = \omega_0 t$, $y = x\sqrt{\beta}/\omega_0$ (1) takes the form of the so-called Ueda equation

$$\ddot{y} + y + y^3 = F \cos \Omega t, \quad (2)$$

that depends on only two parameters $F = f_m \sqrt{\beta}/\omega_0^3$, $\Omega = \omega_0/p$.

Equation (2) was solved numerically using a package Wolfram Mathematica 12.0. Oscillation plots $y(\tau)$, phase portraits in coordinates (y, \dot{y}, τ) , spectra (Fourier transforms of functions $y(\tau)$), and point mappings were obtained. To construct the mappings, 3D phase trajectory was intersected by planes $t = const$ (over a period of external force), and then the points of intersection were projected onto the plane (y, \dot{y}) [2].

Regular oscillations

Fig. 1 shows a point mapping for various initial conditions for a small external force ($F = 1$).

In this case the mapping is similar to the phase portrait of free oscillations, that looks like a set of nested deformed ellipses. Only for the most noticeable resonances – at the frequency of the external force, at its one third and one half – the splitting of elliptical trajectories into chains of the separatrix loops is observed.

This effect becomes clear if one remembers that square of the oscillations' amplitude in the point mapping is proportional to intensity. Intensity for weakly nonlinear oscillations is proportional to the action (in the variables action - angle) Then the splitting of elliptical trajectories in fig. 1 can be interpreted as analogue of the resonant tori

destruction under the action of a non-integrated term in the Hamiltonian according to the Kolmogorov-Arnold-Moser and Poincare-Birkhoff theorems [3].

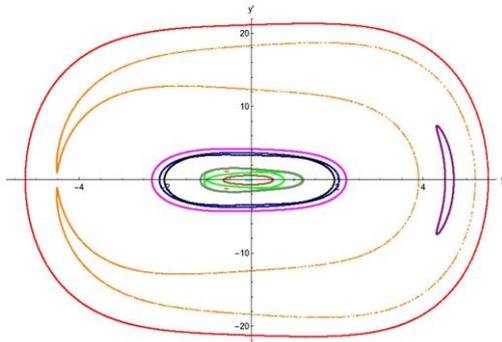


Fig. 1. Point mapping for $\Omega = 4, F = 1$

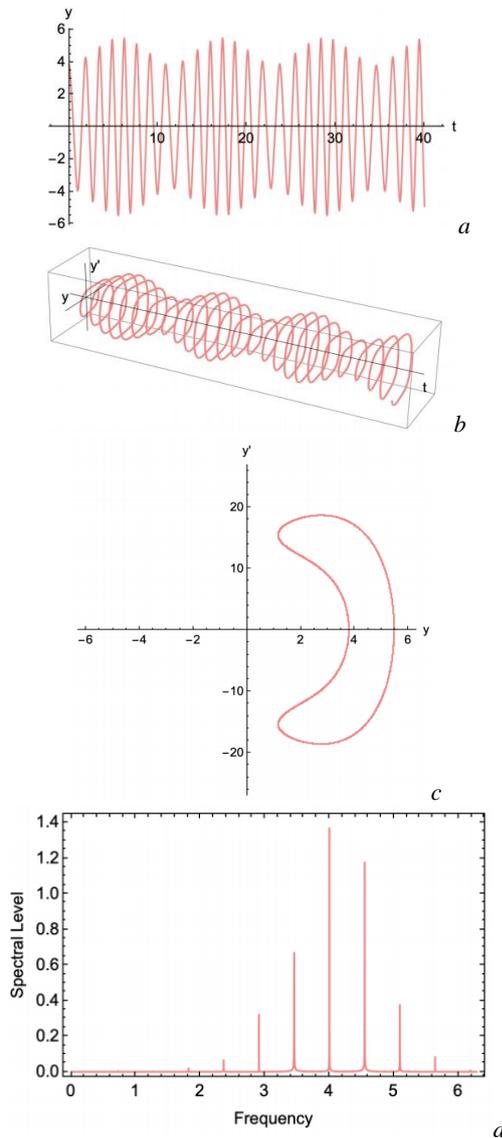


Fig. 2. Phase oscillations near the main resonance for $\Omega = 4, F = 5$: a – oscillations' plot, b – 3D phase portrait, c – point mapping, d – spectrum

Fig. 2 characterizes the phase oscillations around the main resonance – nonlinear analogue of beating, when perturbation of the oscillations' amplitude is accompanied by the variation of their frequency due to the non-isochronism of the nonlinear oscillator. An equidistant set of lateral frequencies around the fundamental one appears in the spectrum.

Fig. 3 shows the point mapping similar to fig. 1, but for the larger amplitude of the external force ($F = 5$). It presents the formation of several areas of stochastic dynamics, that will be discussed below. Alternation of resonances in fig. 3 corresponds to the law of non-isochronism of free oscillations of a nonlinear oscillator. In this case, the frequency of free oscillations increases with the amplitude increase. So, the ratio of the resonance frequency to the frequency of the external force increases as the amplitude is increased. Indeed, this ratio for resonance 4 is $1/3$, for the next resonance 3 – $1/2$, for resonance 5 – $5/9$, for resonance 1 – 1, and finally for almost free oscillations $10 - 5/4$.

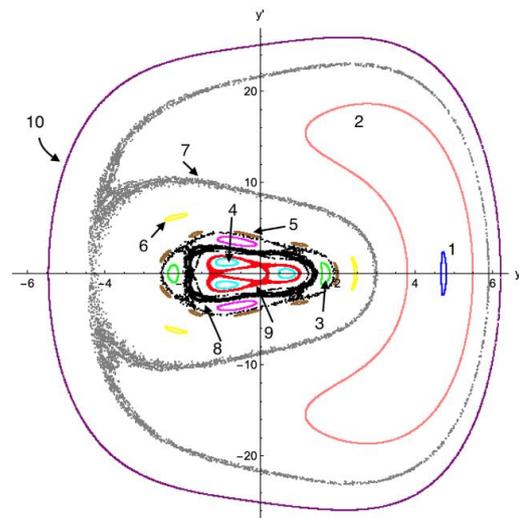


Fig. 3. Point mapping for $\Omega = 4, F = 5$

Stochastic oscillations

Fig. 4 illustrates the appearance of stochastic dynamics around the main resonance separatrix loop. The essence of this dynamics is unpredictable jumps between internal and external parts of the separatrix loop (line 7 on Fig. 3). Corresponding changes in the motion can be seen in the three-dimensional phase portrait (fig. 4 a). The separatrix on the mapping is blurred, and continual component appears in the spectrum (fig. 4 c). This behavior can be associated with the appearance of the heteroclinic structure in the vicinity of the saddle point [3].

Fig. 5 b illustrates the moment of the nonlinear resonances' overlapping in accordance with Chirikov's criterion, when the distance between the resonances decreases to the size of the order of their width. Simultaneous overlapping of several resonances of higher orders is presented in Fig. 5 b. Comparison with fig. 1 (obtained for the smaller amplitude of the external force) moves to the conclusion that one of them is a resonance on the half of the main harmonic, that corresponds to a set of four loops of the separatrix connected by saddle points. As in the previous case, the plot of oscillations (fig. 5 a) demonstrates random transitions between phase oscillations that correspond to different resonances. Further increase in the amplitude of the external force leads to the formation of the wide area of the stochastic motion (stochastic sea) with small islands of stability on the mapping.

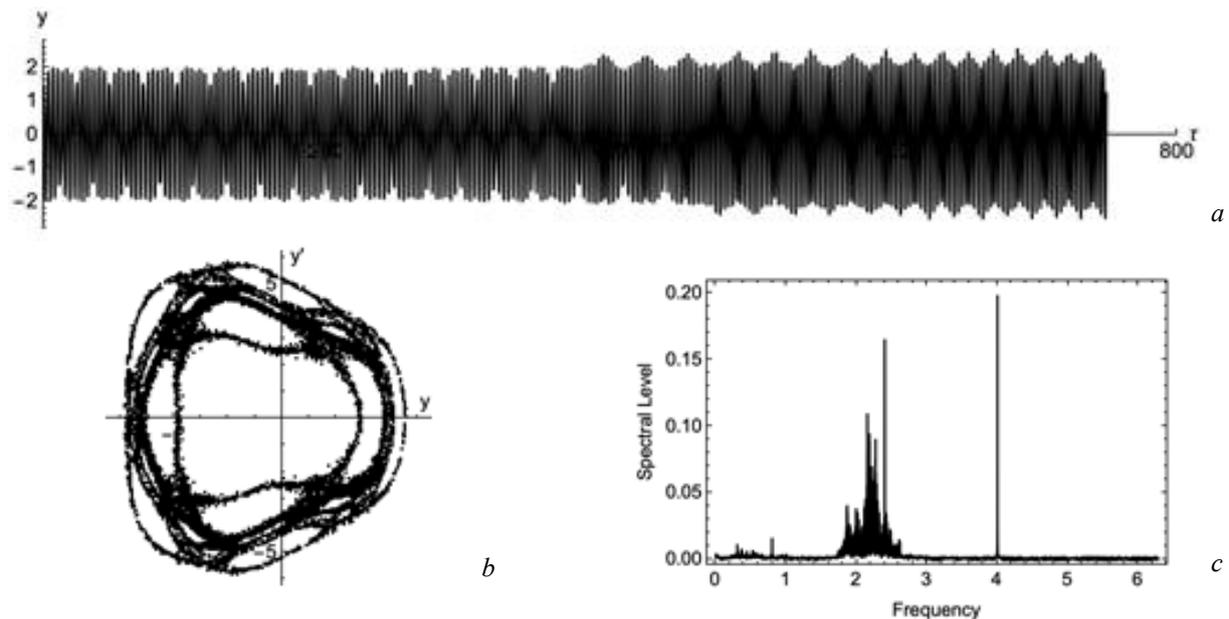


Fig. 5. Stochastic layer formed due to the overlap of nonlinear resonances ($\Omega=4, F=5$): a – oscillations' plot; b - point mapping; c - spectrum

Conclusions

1. Sequence of the alternation of higher-order resonances on the point mapping is determined by the free oscillations' law of non-isochronism (in this case, by the increase of the free oscillations' frequency with an increase of their amplitude).

2. One of the possible types of stochastic dynamics in the Duffing model is associated with random jumps between different parts of the separatrix, connected by saddle points. It is associated with heteroclinic structures in the vicinity of these points.

3. At external force amplitudes greater than a certain threshold value, the stochastic dynamics of the Duffing

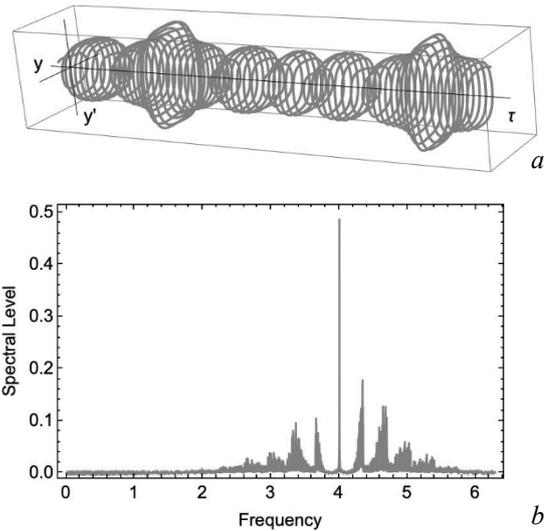


Fig. 4. Stochastic layer near the separatrix of the main resonance ($\Omega=4, F=5$): a – 3D phase portrait, b - spectrum

oscillator is sometimes associated with the overlapping of nonlinear resonances according to the Chirikov's criterion. As in the previous case, jumping between resonances may be accompanied by a change in the amplitude of oscillations.

References

1. Yu.I. Neimark, P.S. Landa. *Stochastic and chaotic oscillations*. (Nauka, Moscow, 1987), 424 p. [In Russian]
2. G.M. Zaslavskiy, R.Z. Sagdeev. *Introduction to nonlinear physics: from pendulum to turbulence and chaos*. (Nauka, Moscow, 1988), 368 p. [In Russian]
3. M. Tabor. *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*. (J. Wiley & Sons, New York, 1989), 384 pp.