

PACS 74.00, 01.40.–d

UDC: 538.945

Класична крайова задача про перехід сферичного надпровідника першого роду в нормальний стан при збільшенні прикладеного однорідного магнітного поля (методична розробка)

О.Г. Орт, М.Р. Вовк

*Фізичний факультет, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, м. Свободи 4, 61022, Харків, Україна
nikolayvovk94@gmail.com*

ORCID: 0000-0001-8697-4452

DOI:10.26565/2222-5617-2020-33-06

В рамках класичної (не квантової) електродинаміки суцільних середовищ і модифікованої (спрощеної) нелокальної піппардівської електродинаміки однорідних надпровідників першого роду повно і математично строго (з урахуванням ефекту проникнення і точних граничних умов) вирішена складна крайова задача про перехід макроскопічного сферичного надпровідника першого роду в проміжний і нормальний стани при збільшенні прикладеного магнітного поля.

Основною метою цієї роботи є самоузгоджена і точна постановка крайової задачі, а також її математично строгі рішення з урахуванням поверхневих ефектів і нелокальності піппардівських надпровідників першого роду.

Новим у вирішенні даної задачі є те, що поверхневі явища описуються в ній на підставі модифікованої (спрощеної) нелокальної піппардівської електродинаміки.

Показано, що ігнорування поверхневих ефектів в теорії низькотемпературних надпровідників може привести не тільки до кількісних помилок, але і до невірних якісних висновків.

На підставі строгого рішення крайової задачі і визначення розподілу результуючого магнітного поля у всьому просторі (всередині і поза надпровідною кулею) зроблені висновки про характер переходу макроскопічного сферичного надпровідника першого роду в проміжний і нормальний стани, які узгоджуються з висновками, отриманими раніше іншими авторами при використанні ними різного роду наближених моделей і методів.

Оскільки наукові результати отримано авторами шляхом строгого і самоузгодженого рішення точно поставленої крайової задачі, то робота безумовно представляє теоретичний і методичний інтереси.

Ключові слова: сферичний надпровідник, магнітне поле, проміжний стан, нормальний стан, локальна лондонівська електродинаміка, нелокальна піппардівська електродинаміка, ефект Мейсснера-Оксенфельда, глибина проникнення, крайова задача, диференціальні рівняння, граничні умови.

The classical boundary problem of the transition of a spherical type-I superconductor to the normal state with increasing of the applied uniform magnetic field (methodical development)

O.G. Ort, M.R. Vovk

Physics Department, V.N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq. 4, 61022, Kharkiv, Ukraine

A complicated boundary value problem of the transition of a macroscopic massive spherical type-I superconductor to the intermediate and normal state with increasing of the applied uniform magnetic field has been solved. Taking into account a penetration effect and exact boundary conditions the boundary problem has been solved completely and rigorously within the framework of the classical (non-quantum) electrostatics of continuous mediums and the modified (simplified) nonlocal Pippard electrostatics of spatially homogenous type-I superconductors.

The principal object of this work is a self-consistent and exact setting of the boundary value problem and also its mathematically rigorous solution taking into account surface effects and nonlocality of Pippard type-I superconductors.

The solution novelty is a description of the surface effects within the framework of the modified (simplified) nonlocal Pippard electrostatics.

It is shown that disregarding for the surface effects in a theory of low-temperature superconductors can lead not only to computational mistakes, but also to incorrect qualitative conclusions.

The conclusions about nature of the transition of a macroscopic spherical type-I superconductor to the intermediate and normal state have been drawn on the ground of a rigorous solution of the boundary problem and determination of the total magnetic field distribution in the whole space (inside and outside the superconducting sphere). These conclusions are in agreement with those, which have been drawn earlier by other authors on the ground of different approximate models and methods.

Since the scientific results have been obtained by the authors on the basis of rigorous and self-consistent solution of the exactly set boundary problem, the work is undoubtedly of theoretical and methodical interest.

Keywords: spherical superconductor, magnetic field, intermediate state, normal state, local London electrostatics, nonlocal Pippard electrostatics, Meissner-Ochsenfeld effect, penetration depth, boundary value problem, differential equations, boundary conditions.

Классическая краевая задача о переходе сферического сверхпроводника первого рода в нормальное состояние при увеличении приложенного однородного магнитного поля (методическая разработка)

А.Г. Орт, Н.Р. Вовк

Физический факультет, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы 4, 61022, Харьков, Украина

В рамках классической (не квантовой) электродинамики сплошных сред и модифицированной (упрощённой) нелокальной пиппардовской электродинамики однородных сверхпроводников первого рода полно и математически строго (при учёте эффекта проникновения и точных граничных условий) решена сложная краевая задача о переходе макроскопического массивного сферического сверхпроводника первого рода в промежуточное и нормальное состояние при увеличении приложенного однородного магнитного поля.

Основной целью настоящей работы является самосогласованная и точная постановка краевой задачи, а также её математически строгое решение при учёте поверхностных эффектов и нелокальности пиппардовских сверхпроводников первого рода.

Новым в решении данной задачи является то, что поверхностные явления описываются в ней на основании модифицированной (упрощённой) нелокальной пиппардовской электродинамики.

Показано, что игнорирование поверхностных эффектов в теории низкотемпературных сверхпроводников может привести не только к количественным ошибкам, но и к неверным качественным выводам.

На основании строгого решения краевой задачи и определения распределения результирующего магнитного поля во всём пространстве (внутри и вне сверхпроводящего шара) сделаны выводы о характере перехода макроскопического сферического сверхпроводника первого рода в промежуточное и нормальное состояние, которые согласуются с выводами, полученными ранее другими авторами при использовании ими различного рода приближённых моделей и методов.

Поскольку научные результаты получены авторами путем строгого и самосогласованного решения точно поставленной краевой задачи, то работа безусловно представляет теоретический и методический интерес.

Ключевые слова: сферический сверхпроводник, магнитное поле, промежуточное состояние, нормальное состояние, локальная лондонская электродинамика, нелокальная пиппардовская электродинамика, эффект Мейснера-Оксенфельда, глубина проникновения, краевая задача, дифференциальные уравнения, граничные условия.

Список умовних позначень, скорочень і термінів

Однорідне прикладене магнітне поле – однорідне зовнішнє магнітне поле, створене за допомогою соленоїда зовні НП – зразка. Структура і силові характеристики прикладеного магнітного поля не залежать від наявності або відсутності НП – зразка [4]

НП – Надпровідник

НП – матеріали – Надпровідні матеріали

НП – метал – Надпровідний метал

НП 1-го (2-го) роду – Надпровідник першого (другого) роду

НП – стан – Надпровідний стан

НП – струм – Надпровідний струм

НП – електрони – Надпровідні електрони, тобто електрони, об'єднані в куперівські пари

НП – куля – Надпровідна куля

Сферичний НП 1-го (2-го) роду – Сферичний надпровідник першого (другого) роду, або НП – куля

НП – зразок – Надпровідний зразок

Однорідний НП – зразок – НП – зразок, у якого концентрація НП – електронів однакова в усьому його об'ємі: $n_s \neq n_s(\vec{r})$; $n_s = const$

Однозв'язний НП – зразок – Надпровідне тіло, в якому можна довільний замкнутий контур стягнути в точку, ніде не перетинаючи при цьому меж тіла. Іншими словами, в однозв'язному тілі немає

наскрізних отворів. Тор (тороїд) – приклад двозв'язного тіла [5]

N – шар – Нормальний шар, або шар металу з нормальною провідністю

N – фаза – Нормальна фаза, або область металу з нормальною провідністю

S – шар – Надпровідний шар металу

S – фаза – Надпровідна фаза, або область металу, що має надпровідні властивості.

Локальна лондонівська електродинаміка надпровідників – Феноменологічна локальна ($\lambda_L \gg \xi_0$) теорія надпровідності Фріца і Гейнца Лондонів (1935)

Нелокальна піппардівська електродинаміка надпровідників – Феноменологічна нелокальна ($\lambda_L \ll \xi_0$) теорія надпровідності Піппарда А.Б. (1953)

Теорія БКШ – Мікроскопічна квантова теорія надпровідності Бардіна-Купера-Шріффера (1957)

q – частинка – Протяжна ($\xi_0 \sim 10^{-4}$ см) куперівська пара, утворена двома скорельованими електронами, які мають рівні за абсолютною величиною і протилежні за напрямком імпульси і спіни

ХФ – Хвильова функція

ДР – Диференціальне рівняння

3 – простір – Фізичний евклідовий 3-вимірний простір E_3

Вступ

Задача про поведінку сферичного НП 1-го роду (НП – кулі) при збільшенні прикладеного однорідного магнітного поля $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z$ до критичних значень є однією з класичних задач фізики низькотемпературних надпровідників.

Складність теоретичного аналізу цієї задачі в разі макроскопічної (масивної) НП – кулі обумовлена тим, що результуюче (самоузгоджене) зовнішнє ($r > R$) магнітне поле $\vec{B}^e(\vec{r}) = \vec{B}_0 + \vec{B}_s^e(\vec{r})$, де $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z = const$ – статичне однорідне прикладене магнітне поле, що генерується зовнішніми джерелами (напр., соленоїдом), $\vec{B}_s^e(\vec{r})$ – зовнішнє ($r > R$) магнітне поле замкнутих екрануючих НП – струмів $\vec{j}_s(\vec{r})$, циркулюючих в тонкому приповерхневому шарі НП – кулі; є суттєво неоднорідним і має різні значення в різних місцях поблизу поверхні НП – кулі.

Складність теоретичного рішення даної задачі спонукала багатьох дослідників нехтувати поверхневими ефектами, вводити допоміжні величини, які не мають чіткого і ясного фізичного сенсу, і користуватися різного роду формальними моделями.

Хоча подібний модельний підхід і дозволяє в деяких випадках задовільно описувати результати експериментів, однак, в цілому він викликає почуття незадоволення. При такому моделюванні не розкривається природа фізичних явищ і механізм фізичних процесів, а самі формально-еквівалентні моделі мають дуже обмежену сферу застосування. Більш того, як буде показано нижче, зневага поверхневими ефектами і використання надмірно спрощених моделей може привести не тільки до кількісних, а й до грубих якісних помилок.

У даній роботі класична крайова задача про перехід макроскопічного сферичного НП 1-го роду в проміжний і нормальний стани при збільшенні однорідного прикладеного магнітного поля $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z$ вирішується строгими математичними методами в рамках класичної електродинаміки суцільних середовищ і модифікованої (спрощеної) нелокальної піппардівської електродинаміки надпровідників.

При строгому і самоузгодженому рішенні крайової задачі враховується ефект проникнення результуючого (самоузгодженого) магнітного поля

$\vec{B}(\vec{r})$ в тонкий приповерхневий шар НП – кулі, враховуються також і замкнуті екрануючі НП – струми, що реально протікають в тонкому приповерхневому шарі НП – кулі, з рішення диференціальних рівнянь магнітостатики надпровідників знаходиться розподіл результуючого магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$ всередині ($r \leq R$) і зовні ($r > R$) НП – кулі, а константи інтегрування визначаються з точних граничних умов для вектора \vec{B} .

В роботі не використовуються ніякі допоміжні величини, в тому числі і вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}(\vec{r})$, який в разі неоднорідного ($\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$) результуючого магнітного поля не має чіткого і ясного фізичного сенсу.

Єдиною фундаментальною фізичною величиною, яка використовується в роботі, є вектор $\vec{B}(\vec{r})$, який входить у вираз для сили Лоренца $\vec{F}_n = \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{B}]$ і, таким чином, визначає силову дію магнітного поля.

Сформовані історично назви «вектор напруженості магнітного поля» і «вектор магнітної індукції \vec{B} » в роботі не використовуються, оскільки ці назви не тільки не мають ніякого фізичного сенсу, але і можуть ввести в оману. Замість загальноприйнятої назви «вектор магнітної індукції \vec{B} » в роботі використовується назва «вектор результуючого магнітного поля \vec{B} », яке, на нашу думку, точніше відображає фундаментальний характер істинного магнітного поля.

На основі розподілу результуючого магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$ всередині ($r \leq R$) і поза ($r > R$) НП – кулю, отриманого з математично строгого рішення крайової задачі, аналізується характер переходу макроскопічного НП 1-го роду в проміжний і нормальний стани при збільшенні однорідного прикладеного магнітного поля \vec{B}_0 . Робиться висновок про те, що якщо величина однорідного прикладеного магнітного поля \vec{B}_0 лежить в інтервалі значень $\frac{2}{3} B_{cm} \leq B_0 < B_{cm}$, де B_{cm} – критичне значення однорідного прикладеного магнітного поля, при якому довгий тонкий циліндричний НП 1-го роду, розташований паралельно вектору \vec{B}_0 , повністю переходить в нормальний стан; то макроскопічний сферичний НП 1-го роду, знаходиться в проміжному

стані, який представляє собою тонкі S – і N – шари, що перемежуються, а також паралельні вектору \vec{B}_0 . При цьому зовнішнє магнітне поле проходить через N – шари.

Новим у вирішенні даної крайової задачі є те, що поверхневі ефекти описуються в ній за допомогою методів модифікованої (спрощеної) нелокальної піппардівської електродинаміки, що дозволило обійтися наочними фізичними моделями і елементарними математичними викладками.

Методична цінність цієї роботи полягає у тому, що наукові результати отримано в ній методом строгого і самоузгодженого рішення коректно і точно поставленої крайової задачі, в якій враховується ефект проникнення результуючого магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$ в тонкий приповерхневий шар НП - кулі, а також нелокальність макроскопічного сферичного НП 1-го роду.

Постановка задачі носить найбільш природний характер, а також найточніше відображає природу даних фізичних явищ і реальний механізм фізичних процесів. Обраний спосіб опису (замкнуті НП – струми $\vec{j}_s(\vec{r})$, вектор результуючого магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$, піппардівська глибина проникнення λ_p) також найбільш адекватно і точно відображають властивості реальної фізичної системи (макроскопічний сферичний НП 1-го роду в однорідному прикладеному магнітному полі).

Тому робота представляє безумовний теоретичний і методичний інтереси, а її результати можуть бути використані при підготовці лекційних курсів та написанні методичних посібників з дисциплін «Класична електродинаміка суцільних середовищ» і «Введення в фізику надпровідників».

1. Огляд літературних джерел

Задача про поведінку макроскопічного сферичного НП 1-го роду при збільшенні однорідного прикладеного магнітного поля \vec{B}_0 розглядалася в багатьох роботах [1-11,14].

У роботах [1-7] аналізувалася отримана в припущенні виконання повного ефекту Мейсснера-Оксенфельда ($\vec{B}^i = 0$) наближена формула (в наших позначеннях)

$$B_s^e \approx \frac{B_0}{(1 - N_H)} \approx \frac{3}{2} B_0, \quad (1.1)$$

де B_s^e - величина результуючого магнітного поля поза ($r > R$) НП – кулею поблизу її «екватора», N_H - розмагнічуючий фактор (коефіцієнт розмагнічування), який для НП – кулі дорівнює $N_H^{(u)} = \frac{1}{3}$.

На підставі (1.1) був зроблений висновок про те, що при виконанні умови

$$B_0 \geq \frac{2}{3} B_{cm} \quad (1.2)$$

сферичний НП 1-го роду переходить в проміжний стан, при якому N – і S – фази повинні співіснувати, оскільки на «екваторі» НП – кулі критичне значення магнітного поля вже досягнуто ($B_s^e \approx B_{cm}$), тоді як на решті поверхні НП – кулі (напр., на «полюсах») результуюче магнітне поле ще не досягло критичної позначки.

Таким чином, в цих роботах були підтверджені якісні міркування про те, що характер переходу макроскопічного НП – зразка в проміжний стан визначається його формою, а сам перехід можливий тільки в неоднорідному результуючому магнітному полі $\vec{B}(\vec{r})$.

Більш строгі дослідження задачі про поведінку НП – кулі в однорідному прикладеному магнітному полі \vec{B}_0 наведено в роботах [8-10], де вирішується крайова задача в зовнішній області ($r > R$) без урахування ефекту проникнення ($\vec{B}^i = 0$).

Поза ($r > R$) НП – кулею результуюче магнітне поле задовольняє рівнянням

$$\Delta \vec{B}^e(\vec{r}) = 0, \quad (1.3)$$

$$\text{div} \vec{B}^e(\vec{r}) = 0, \quad (1.4)$$

з граничними умовами

$$B_r^e|_{r=R} = 0, \quad (1.5)$$

$$\vec{B}^e(\vec{r}) \rightarrow \vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z = \text{const при } r \rightarrow \infty. \quad (1.6)$$

Рішення рівняння (1.3), що задовольняє граничним умовам (1.5) - (1.6), в сферичній системі координат $\{r, \theta, \alpha\}$ має (в наших позначеннях) наступний вигляд

$$\begin{cases} B_r^e(r, \theta) = B_0 \cos \theta + \frac{2M \cos \theta}{r^3}, & (1.7) \\ B_\theta^e(r, \theta) = -B_0 \sin \theta + \frac{M \sin \theta}{r^3}, & (1.8) \\ B_\alpha^e(r, \theta) = 0, \quad (r > R), \end{cases}$$

де

$$M \approx -\frac{B_0 R^3}{2}. \quad (1.9)$$

З формул (1.7) - (1.9) випливає, що на «полюсах» ($\theta = 0, \theta = \pi$) НП – кулі

$$B_r^e(R, 0) = B_r^e(R, \pi) = 0, \quad (1.10)$$

$$B_\theta^e(R, 0) = B_\theta^e(R, \pi) = 0, \quad (1.11)$$

тоді як на «екваторі» ($\theta = \frac{\pi}{2}$):

$$B_r^e\left(R, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (1.12)$$

$$B_\theta^e\left(R, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}B_0. \quad (1.13)$$

З формули (1.13) випливає, що при

$$B_0 < \frac{2}{3}B_{cm} \quad (1.14)$$

НП – куля проявляє властивості ідеального діаманетика і повністю «витісняє» результуюче магнітне поле зі свого об'єму ($\vec{B}^i = 0$) (див. рис. 1.).

З рис. 1. видно, що на поверхні ($r = R$) і поблизу НП – кулі результуюче магнітне поле є сильно неоднорідним, ($\vec{B}^e(\vec{r}) = \vec{B}_0 + \vec{B}_s^e(\vec{r})$), а далеко від НП – кулі (при $r \rightarrow \infty$) переходить в однорідне прикладене магнітне поле $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z = const$.

З формул (1.10) – (1.13) робиться висновок про те, що якщо значення B_0 лежить в інтервалі

$$\frac{2}{3}B_{cm} \leq B_0 < B_{cm}, \quad (1.15)$$

то макроскопічний сферичний НП 1-го роду буде перебувати в проміжному стані, який представляє

собою тонкі N – і S – шари, що перемежуються та паралельні вектору \vec{B}_0 . При цьому зовнішнє магнітне поле проходить через N – шари (див. рис.2).

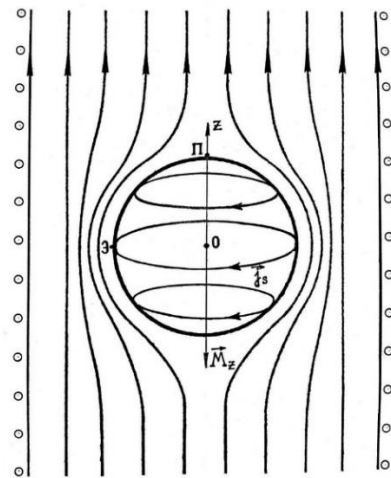


Рис. 1. Макроскопічна НП – куля в слабкому ($B_0 < \frac{2}{3}B_{cm}$) однорідному прикладеному магнітному полі $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z = const$ (повний ефект Мейсснера-Оксенфельда: $\vec{B}^i = 0$)

Зауважимо, що Рис. 2. носить схематичний характер, оскільки в проміжному стані НП – куля розщеплюється на велику кількість тонких N – і S – шарів, що чередуються між собою, граничні поверхні яких завжди паралельні вектору \vec{B}_0 . При цьому, однак, в загальному випадку ці шари зовсім не є плоскими.

Однак, і в роботах [8-10] передбачається повне «витіснення» результуючого магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$ з об'єму НП – кулі ($\vec{B}^i = 0$), що не допускає коректного опису поверхневих ефектів.

Найбільш строгий підхід до дослідження поведінки НП – кулі в однорідному прикладеному магнітному полі \vec{B}_0 базується на точному вирішенні крайової задачі про розподіл результуючого магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$ як поза ($r > R$), так і всередині ($r \leq R$) НП – кулі.

Відповідь до вирішення такої задачі наведено в роботах [11-13]. Однак, з цих робіт не ясно, який зміст вкладають автори в вектори \vec{H} і \vec{B} та які граничні умови при цьому використовують. Зауважимо також, що в статті Дж. Бардіна [11], а також в популярних задачнику [12] і підручнику [13] формули наведені з помилками.

В роботі [14] наведено найбільш строгі і повне рішення крайової задачі про перехід макроскопічної

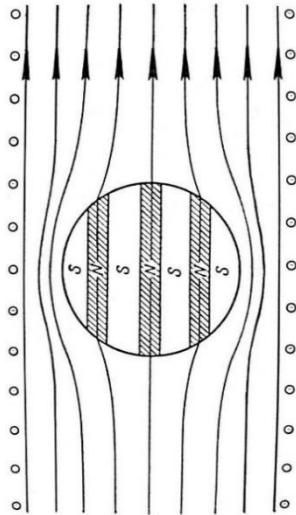


Рис. 2. Розщеплення макроскопічної НП – кулі в магнітному полі ($\frac{2}{3} B_{cm} \leq B_0 < B_{cm}$) на N – і S – шари (проміжний стан)

($R \gg \lambda_L$, де λ_L – лондонівська глибина проникнення) НП – кулі в проміжний стан. Проте, автори [14] не дають визначення «мікроскопічному полю $\vec{h}(\vec{r})$ », яке вони використовують, не обґрунтовують вибір граничних умов і не вказують методів рішень диференціальних рівнянь. Крім того, автори [14] використовують результати рішення крайової задачі, поставленої в рамках локальної ($\lambda_L \gg \xi_0$, де ξ_0 – довжина когерентності, або довжина кореляції між станами вільних електронів, яку в однорідних надпровідниках при $T = 0 K$ можна трактувати як середній розмір куперівської пари) лондонівської електродинаміки НП 2-го роду, для аналізу характеру переходу макроскопічної ($R \gg \lambda_L$) НП – кулі в проміжний стан.

Проте, як відомо (див. напр., [10]), в проміжний стан можуть переходити тільки НП 1-го роду, які можуть бути коректно описані тільки в рамках нелокальної ($\lambda_L \ll \lambda_p \ll \xi_0$) піппардівської електродинаміки надпровідників або інших нелокальних теорій надпровідності.

Ця помилка носить принциповий (якісний характер). Проблема полягає в тому, що локальні ($\lambda_L \gg \xi_0$) лондонівські надпровідники представляють собою НП 2-го роду, які при збільшенні однорідного прикладеного магнітного поля \vec{B}_0 переходять не в проміжний, а в змішаний стан (фазу Шубнікова, або вихоровий стан).

Тому коректний підхід полягає в тому, що задачу треба з самого початку вирішувати в рамках нелокальної ($\lambda_L \ll \lambda_p \ll \xi_0$) піппардівської електродинаміки НП 1-го роду, знайти розподіл результуючого магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$ всередині ($r \leq R$) і поза ($r > R$) НП – кулею, як функцію від піппардівської глибини проникнення λ_p , а вже потім для випадку макроскопічної ($\lambda_L \ll \lambda_p \ll \xi_0 \ll R$) НП – кулі робити граничний перехід $\frac{\lambda_p}{R} \rightarrow 0$.

2. Аналіз рівнянь магнітостатики надпровідників і граничних умов для вектора \vec{B} , що враховують ефект проникнення

За відсутності ($\vec{j}^e = 0$) нормальних струмів провідності (транспортних струмів) рівняння магнітостатики надпровідників мають такий вигляд [15]:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_s(\vec{r}), & (2.1) \\ \text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0, & (2.2) \end{cases}$$

де $\vec{B}(\vec{r})$ – вектор макроскопічного результуючого (самоузгодженого) магнітного поля, яке представляє собою справжнє (точне) мікроскопічне магнітне поле $\vec{B}^{\sim}(\vec{r})$, усереднене в околі точки \vec{r} по області, розміри якої малі в порівнянні з розмірами НП – зразка L , але великі в порівнянні з відстанями Δx порядку сталої кристалічної ґратки \vec{a} : $\vec{B}(\vec{r}) = \langle \vec{B}^{\sim}(\vec{r}) \rangle$; $\vec{j}_s(\vec{r})$ – вектор об'ємної густини макроскопічного замкнутого індукваного екрануючого НП – струму, що протікає в тонкому приповерхневому шарі НП – зразка і представляє собою аналогічним чином усереднену мікроскопічну справжню (точну) об'ємну густину НП – струму $\vec{j}_s^{\sim}(\vec{r})$: $\vec{j}_s(\vec{r}) = \langle \vec{j}_s^{\sim}(\vec{r}) \rangle$.

У магнітостатиці граничні умови для компонент відповідних векторів на поверхні розділу двох середовищ (магнетиків) можна отримати стандартним методом [6] обчислення відповідних інтегралів.

У випадку магнітостатики надпровідників визначимо граничні умови для нормальних компонент вектора \vec{B} з рівняння (2.2).

В якості замкнутої поверхні інтегрування на кордоні надпровідник – вакуум виберемо прямий круговий циліндр (рис. 3).

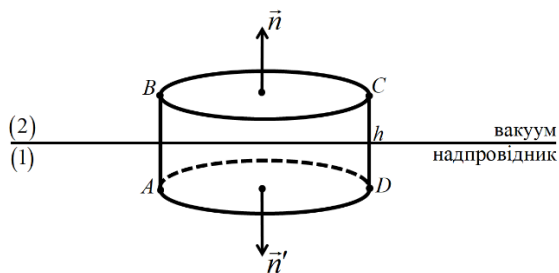


Рис. 3. Замкнена поверхня інтегрування на кордоні надпровідник – вакуум

Приймаючи до уваги рівняння (2.2), скористаємося теоремою Остроградського-Гауса:

$$\int_{(V)} (\operatorname{div} \vec{B}) dV = \oint_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = \oint_{(S)} B_n dS = 0, \quad (2.3)$$

звідки випливає, що при $AB = CD = h \rightarrow 0$ (див. Рис. 3) маємо $B_{1n} - B_{2n} = 0$, або

$$B_n^i \Big|_{cp} = B_n^e \Big|_{cp}. \quad (2.4)$$

Відзначимо, що гранична умова (2.4) має місце тільки при врахуванні ефекту проникнення результуючого магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$ в тонкий приповерхневий шар надпровідника. Якщо ж знехтувати ефектом проникнення ($\vec{B}^i = 0$), то гранична умова для B_n матиме вигляд:

$$B_n^e \Big|_{cp} = 0. \quad (2.5)$$

В якості замкнутого контуру інтегрування (L) на кордоні надпровідник - вакуум виберемо прямокутник $ABCD$ (див. Рис. 4).

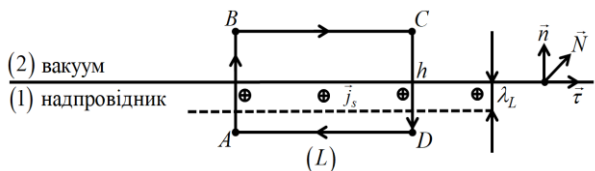


Рис. 4. Замкнений контур інтегрування на кордоні надпровідник – вакуум.

На рис. 4. $\vec{n}, \vec{\tau}$ і $\vec{N} = [\vec{n}, \vec{\tau}]$ – одиничні взаємоортогональні вектори.

Візьмемо поверхневі інтеграли по поверхні (S) , обмеженої контуром $(L) \equiv ABCD$, від обох частин рівняння (2.1):

$$\int_{(S)} (\operatorname{rot} \vec{B}) d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_{(S)} \vec{j}_s d\vec{S}. \quad (2.6)$$

НП – струм $\vec{j}_s(\vec{r})$, що протікає в тонкому приповерхневому шарі НП – зразка, що має малу, але кінцеву ($\lambda_L \neq 0$) глибину, трактуємо як об'ємний струм (а не як поверхневий!).

Оскільки об'ємний НП – струм $\vec{j}_s(\vec{r})$ протікає в тонкому приповерхневому шарі кінцевої ($\lambda_L \neq 0$) глибини, то при $AB = CD = h \rightarrow 0$ маємо:

$$\int_{(S)} \vec{j}_s d\vec{S} = 0. \quad (2.7)$$

Тоді, враховуючи (2.7) і застосовуючи до лівої частини рівняння (2.6) теорему Стокса, отримаємо:

$$\int_{(S)} (\operatorname{rot} \vec{B}) d\vec{S} = \oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = 0. \quad (2.8)$$

При $AB = CD = h \rightarrow 0$ (див. Рис. 4) з (2.8) випливає, що $B_{2\tau} - B_{1\tau} = 0$, або

$$B_\tau^i \Big|_{cp} = B_\tau^e \Big|_{cp}. \quad (2.9)$$

Таким чином, на поверхні НП – зразка весь вектор результуючого магнітного поля \vec{B} (з урахуванням ефекту проникнення!) виявляється безперервним [15].

Якщо знехтувати ефектом проникнення і перейти до границі $\lambda_L \rightarrow 0$ і $\vec{B}^i \rightarrow 0$, то тоді від об'ємної щільності НП – струму $\vec{j}_s(\vec{r})$ слід перейти до лінійної щільності поверхневого струму \vec{i}_s . При цьому зміниться і результат обчислення поверхневих інтегралів у формулі (2.6):

$$\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} \Big|_{(h \rightarrow 0)} = l_{BC} \cdot B_\tau^e \Big|_{cp} - l_{BC} \cdot B_\tau^i = l_{BC} \cdot B_\tau^e \Big|_{cp}, \quad (2.10)$$

Оскільки у границі $\lambda_L = 0$ маємо $\vec{B}^i = 0$.

$$\frac{4\pi}{C} \int_{(S)} \vec{j}_s d\vec{S} = \frac{4\pi}{C} \vec{I} = \frac{4\pi}{C} (i_s \cdot l_{BC}), \quad (2.11)$$

де $\vec{I}_{(L)}$ - повний НП – струм, що протікає через поверхню, обмежену контуром $(L) = ABCD$; i_s - лінійна густина поверхневого НП – струму.

Підставляючи (2.10) і (2.11) в (2.6), отримаємо

$$B_{\tau}^e \Big|_{zp} = \frac{4\pi}{C} i_s, \quad (2.12)$$

тоді як

$$B_{\tau}^i \Big|_{zp} = 0. \quad (2.13)$$

Відзначимо, що і в граничному випадку ($\lambda_L = 0, \vec{B}^i = 0$), коли $R \gg \lambda_L$, не можна покласти $i_s = 0$, тому що однорідне прикладене магнітне поле \vec{B}_0 індукує збудження в НП – зразку замкнутих екрануючих НП – струмів. Таким чином, існування в однозв'язному НП – зразку (при наявності в просторі однорідного прикладеного магнітного поля $\vec{B}_0 \neq 0$!) замкнутих індукованих НП – струмів носить об'єктивний характер незалежно від того, трактується вони як об'ємні, або ж, як поверхневі НП – струми.

Слід також зауважити, що результуюче магнітне поле $\vec{B}(\vec{r})$ не може бути повністю «витіснене» з усього об'єму НП 1-го роду, тому що це означало б, що на геометричній поверхні НП – зразка магнітне поле стрибком падає від значення $B_{\tau}^e \Big|_{zp} \neq 0$ до нуля. Для забезпечення такого стрибка магнітного поля поверхневий струм i_s повинен мати нескінченну густина, що неможливо. Тому спрощена формальна модель, в якій нехтується ефектом проникнення (тобто покладається, що $\lambda_L = 0$ і $\vec{B}^i = 0$), а індуковані результуючим магнітним полем $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 + \vec{B}_s^e(\vec{r})$ замкнуті екрануючі НП – струми трактується як поверхневі, є неточною і суперечливою.

У деяких випадках виявляється більш зручним замість вектора $\vec{B}(\vec{r})$ використовувати векторний потенціал $\vec{A}(\vec{r})$:

$$\text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}), \quad (2.14)$$

який задовольняє калібрувальній умові

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = 0. \quad (2.15)$$

Перейдемо від двох ДР 1-го порядку (2.1) – (2.2) до одного еквівалентного ДР 2-го порядку для вектору $\vec{A}(\vec{r})$. З огляду на (2.15), отримаємо

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]] = \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\Delta \vec{A}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Тоді підставляючи (2.16) в рівняння (2.1), отримаємо два еквівалентних рівняння для векторного потенціалу $\vec{A}(\vec{r})$: рівняння Пуассона

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{C} \vec{j}_s(\vec{r}), \quad (2.17)$$

або ж рівняння

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}(\vec{r})) = \frac{4\pi}{C} \vec{j}_s(\vec{r}). \quad (2.18)$$

3. Основи феноменологічної теорії надпровідності Фріца і Гейнца Лондонів (1935)

Теорія надпровідності Лондонів (далі НП – теорія) феноменологічно описує лінійну електродинаміку локальних ($\lambda_L \gg \xi_0$) НП 2-го роду в слабких електромагнітних полях.

НП – теорія побудована в рамках дворідинної моделі надпровідників К.Я. Гортера і Х. Казіміра (1933), в якій всі вільні електрони в НП – зразку розглядаються, як сукупність надпровідної і нормальної електронних компонент:

$$n = n_s + n_n, \quad (3.1)$$

де n – концентрація (густина) вільних електронів в металевому НП – зразку, n_s – концентрація НП – електронів, n_n – концентрація нормальних (ненадпровідних) електронів.

Співвідношення між концентраціями n_s і n_n залежить від температури $T(K)$:

$$n \geq n_s \geq 0 \quad (3.2)$$

при $0 \leq T \leq T_c$, де T_c – критична температура НП – зразка, при якій руйнується НП – стан.

У статичному випадку ($\vec{B}_0 \neq \vec{B}_0(t)$) електричний струм створюється тільки НП – електронами, тому що вони рухаються крізь НП – зразок без жодного тертя.

НП – теорія є класичною теорією, котра не враховує квантові ефекти, і тому не пояснює причину виникнення замкнутих екрануючих НП – струмів в НП – зразку, який знаходиться в статичному (!) однорідному прикладеному магнітному полі ($\vec{B}_0 \neq \vec{B}_0(t)$), і не розкриває мікроскопічний механізм надпровідності.

НП – теорія використовує наближення локальної електродинаміки: зв'язок між об'ємною густиною НП – струму $\vec{j}_s(\vec{r})$ і вектором $\vec{B}(\vec{r})$ носить локальний характер, тобто значення $\vec{j}_s(\vec{r})$ визначається значенням вектора $\vec{B}(\vec{r})$ в тій самій точці \vec{r} . Це означає, що носії НП – струму (протяжні куперівські пари, середній розмір яких визначається довжиною кореляції ξ_0) в рамках НП – теорії трактуються як точкові q – частинки.

Область застосування НП – теорії обмежена випадком слабких електромагнітних полів: передбачається, що результуюче електричне поле $\vec{E}(\vec{r})$ і результуюче магнітне поле $\vec{B}(\vec{r})$ настільки малі, що не роблять помітного впливу на концентрацію НП – електронів n_s .

Нехтується також просторовою зміною концентрації НП – електронів ($n_s \neq n_s(\vec{r})$) і передбачається, що n_s однакова у всьому об'ємі НП – зразка (тобто розглядаються тільки однорідні НП – зразки):

$$n_s = const. \quad (3.3)$$

Незважаючи на досить обмежену область своєї застосовності, НП – теорія дозволяє описати основні властивості надпровідників: відсутність опору постійному струму, ефект Мейсснера – Оксенфельда і ефект експоненційного загасання слабого ($B_0 < B_{c1}$, де B_{c1} – перше критичне поле НП 2-го роду) результуючого магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$ в тонкому приповерхневому шарі НП – зразка.

З 1-го рівняння Лондонів

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Lambda \frac{d\vec{j}_s(\vec{r}, t)}{dt}, \quad (3.4)$$

де $\Lambda = \frac{m_e}{n_s e^2}$ – параметр Лондона, $\vec{j}_s = en_s \vec{v}_s$ – об'ємна густина НП – струму; з цього випливає, що в

стаціонарному стані $\left(\frac{d\vec{j}_s}{dt} = 0 \right)$ результуюче електричне поле всередині НП – зразка дорівнює нулю ($\vec{E}^i = 0$).

Друге рівняння Лондонів може бути представлено в п'яти різних формах:

$$\Delta \vec{j}_s(\vec{r}) - \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{j}_s(\vec{r}) = 0, \quad (3.5)$$

$$\vec{j}_s(\vec{r}) = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \vec{A}(\vec{r}), \quad (3.6)$$

$$\text{rot } \vec{j}_s(\vec{r}) = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \vec{B}(\vec{r}), \quad (3.7)$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) - \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{A}(\vec{r}) = 0, \quad (3.8)$$

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}) - \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}(\vec{r}) = 0, \quad (3.9)$$

де

$$\lambda_L = \left[\frac{m_e c^2}{4\pi n_s e^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.10)$$

λ_L – лондонівська глибина проникнення (при $T = 0 \text{ K}$).

Відомо, що вибір векторного потенціалу \vec{A} неоднозначний, оскільки перехід до іншого вектор-потенціалу \vec{A}' за формулою

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla} a(\vec{r}), \quad (3.11)$$

де $a(\vec{r})$ – довільна однозначна скалярна функція, що не змінює величини результуючого магнітного поля:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{A}',$$

тому що $\text{rot}(\vec{\nabla} a(\vec{r})) = 0$.

Всі спостережувані фізичні величини повинні залишатися незмінними при калібрувальному перетворенні (3.11).

Очевидно, що рівняння (3.6) і (3.8) не є калібрувально-інваріантними, і тому вони будуть вірними тільки при спеціальному виборі калібрування.

Таке спеціальне (лондонівське) калібрування векторного потенціалу \vec{A} має наступний вигляд [5]:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = 0, & (3.12) \\ \vec{A} \cdot \vec{n} = 0, & (3.13) \end{cases}$$

де \vec{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні НП – зразка.

За допомогою рівнянь магнітостатики надпровідників (2.1) – (2.2) і умов лондонівського калібрування (3.12) – (3.13) можна легко здійснювати переходи між рівняннями (3.5) – (3.9).

Слід також зазначити, що з рівняння (3.6) і калібрувальної умови (3.12) випливає нерозривність (замкнутість) ліній НП – струму

$$\operatorname{div} \vec{j}_s(\vec{r}) = 0 \quad (3.14)$$

і відсутність джерел НП – струму.

Дійсно, з рівняння безперервності

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_q(\vec{r}) = 0, \quad (3.15)$$

де $\rho_q = qn_q = (2e) \left(\frac{n_s}{2} \right) = en_s$, $\vec{j}_q = qn_q \vec{v}_q = (2e) \times \left(\frac{n_s}{2} \right) \vec{v}_s = en_s \vec{v}_s = \vec{j}_s$, і умови (3.14) випливає, що $\rho_q = qn_q = en_s = \text{const}$.

Крім того, з рівняння (3.6) і каліброваної умови (3.13) випливає, що індуковані замкнуті екрануючі НП – струми $\vec{j}_s(\vec{r})$ завжди течуть уздовж поверхні НП – зразка ($\vec{j}_s = \vec{j}_{sr}$) і не можуть (при відсутності зовнішніх ланцюгів і контактів, що підводять транспортні струми) втікати в НП - зразок під прямим кутом ($j_{sn} = 0$).

Якщо перше рівняння Лондонів (3.4) являє собою другий закон Ньютона для НП – електронів і описує нескінченну провідність НП – зразка, то друге рівняння Лондонів просто інтуїтивно угадано. Коректність другого рівняння Лондонів доводиться тим, що воно разом з рівняннями магнітостатики надпровідників правильно описує основні властивості надпровідників, однак, його походження з точки зору класичної електродинаміки залишається неясним.

Найбільш загадковим з точки зору законів класичної електродинаміки є те, що постійне в часі ($\vec{B}_0 \neq \vec{B}_0(t)$) однорідне прикладене магнітне поле індукує в НП – зразку збудження замкнутих екрануючих НП – струмів $\vec{j}_s(\vec{r})$, тобто трансформує хаотичний тепловий рух вільних електронів

провідності в упорядкований макроскопічний рух [1]. Індукований постійним однорідним прикладеним магнітним полем $\vec{B}_0 \neq \vec{B}_0(t)$ замкнутий екрануючий

НП – струм $\vec{j}_s(\vec{r})$ являє собою бездисипативний квантовий струм, який по своїй природі є близьким до мікроскопічних квантових струмів (наприклад, до «орбітальних» електронних струмів в атомах і молекулах), однак носить макроскопічний характер.

Можна показати (див., напр., [16, 17]), що в нерелятивістській квантовій механіці вираз для густини електричного струму $\vec{j}_q(\vec{r})$ заряджених квантових частинок (що мають заряд q і масу m_q) в полі векторного потенціалу $A(\vec{r})$ має наступний вигляд

$$\vec{j}_q(\vec{r}) = i \frac{q\hbar}{2m_q} (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi) - \frac{q^2}{m_q c} (\psi \psi^*) \vec{A}(\vec{r}). \quad (3.16)$$

Перший доданок в (3.16)

$$\vec{j}_{par} = i \frac{q\hbar}{2m_q} (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi) \quad (3.17)$$

являє собою густину «парамагнітного» струму, що виникає за рахунок зміни («деформації») в 3 – просторі ψ – функції (хвильової функції) q – частинок.

Другий доданок в (3.16)

$$\vec{j}_{dia} = - \frac{q^2}{m_q c} (\psi \psi^*) \vec{A}(\vec{r}) \quad (3.18)$$

являє собою «діамагнітний» струм, обумовлений наявністю в 3 – просторі поля векторного потенціалу $\vec{A}(\vec{r})$.

Таким чином, джерелом струму (спрямованого потоку) заряджених квантових частинок, що знаходяться в статичному однорідному прикладеному магнітному полі \vec{B}_0 , може служити як неоднорідність хвильової функції заряджених квантових частинок ($\psi = \psi(\vec{r})$; $\vec{\nabla} \psi(\vec{r}) \neq 0$; $\vec{\nabla} \psi^*(\vec{r}) \neq 0$), так і поле векторного потенціалу $\vec{A}(\vec{r})$.

Явище надпровідності має чисто квантову природу і його неможливо пояснити в рамках класичної електродинаміки суцільних середовищ. Тому покажемо, як можна отримати друге рівняння Лондонів (3.6), виходячи з сучасних квантових уявлень про природу надпровідності.

Грунтуючись на висновках мікроскопічної квантової теорії надпровідності (БКШ), можна зробити такі припущення:

1) Носіями НП – струму $\vec{j}_s(\vec{r})$ є заряджені квантові q -частинки (куперівські пари), що володіють рівним нулю сумарним імпульсом

$$\vec{p}_q = \vec{p}_{e1} + \vec{p}_{e2} = 0 \quad (3.19)$$

і рівним нулю сумарним спіном

$$\vec{S}_q = \vec{S}_{e1} + \vec{S}_{e2} = 0. \quad (3.20)$$

Парування вільних НП – електронів в куперівській парі можливо тільки при низьких температурах ($T < T_c$) і пояснюється тим, що кулонівське відштовхування вільних електронів екранується на міжатомних відстанях позитивно зарядженими іонами у вузлах кристалічної ґратки, а обмінна взаємодія між вільними НП – електронами, які спаровуються між собою, обумовлена «обміном» віртуальними фононами (квантами поля збурень рівноважної структури кристалічної ґратки) і носить характер дуже слабого тяжіння.

Довжину кореляції ξ_0 між станами двох вільних НП – електронів при $T = 0 \text{ K}$ можна трактувати як середню довжину куперівських пар. Оцінимо порядок величини ξ_0 .

Вільні електрони, будучи ферміонами $\left(S_e = \frac{\hbar}{2}\right)$ і підкоряючись статистиці Фермі – Дірака, при $T = 0 \text{ K}$, відповідно до принципу Паулі, займають на енергетичній діаграмі всі нижні енергетичні рівні аж до найвищого рівня з максимальною енергією $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_F$, де ε_F – енергія Фермі.

У надпровідності бере участь тільки невелика кількість вільних електронів, енергії яких відрізняються лише на малу величину $\sim k_B T_c$ від енергії Фермі:

$$\Delta E \sim k_B T_c, \quad (3.21)$$

де $k_B T_c \ll \varepsilon_F$.

Зі співвідношення невизначеності Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (3.22)$$

можна отримати довжину кореляції ξ_0 вільних електронів через розкид значень їх імпульсів:

$$\xi_0 \sim \frac{\hbar}{\Delta p}. \quad (3.23)$$

Для найпростішого випадку ізотропного квадратичного закону дисперсії

$$E(p) = \frac{p^2}{2m_e} \quad (3.24)$$

маємо

$$\Delta E = \frac{p_F \cdot \Delta p}{m_e} = v_F \cdot \Delta p. \quad (3.25)$$

Тоді з (3.23), (3.25) і (3.21) отримаємо [9]:

$$\xi_0 \sim \frac{\hbar v_F}{k_B T_c}. \quad (3.26)$$

Якщо для оцінки ξ_0 прийняти [5] $v_F \sim 10^8 \frac{\text{см}}{\text{с}}$,

$T_c \sim 1 \text{ K}$, то

$$\xi_0 \sim 10^{-4} \text{ см}. \quad (3.27)$$

Таким чином, середній розмір куперівської пари ξ_0 істотно перевищує сталу кристалічної ґратки $\bar{a} \sim 10^{-8} \text{ см}$ і середню відстань між НП – електронами в НП – металі [1]:

$$\bar{r}_{ee} \sim n_s^{-1/3} \sim (10^{18})^{-1/3} \sim 10^{-6} (\text{см}). \quad (3.28)$$

Сильне перекриття куперівських пар в фізичному 3 – просторі істотно змінює характер звичайної бозе – ейнштейнівської конденсації ізольованих «точкових» бозонів, і, зокрема, призводить до появи в енергетичному спектрі елементарних збуджень надпровідника енергетичної щільності [1], ширина $\Delta_0 = \Delta(T = 0 \text{ K})$ якої визначається енергією зв'язку спарених електронів:

$$\Delta_0 \approx \frac{|E_{cs}|}{2}.$$

Наявність в спектрі елементарних збуджень надпровідника енергетичної щільності Δ_0 (зони

заборонених енергій, яка відділяє основний найнижчий енергетичний рівень, на якому знаходяться конденсатні куперівські пари, від енергетичних рівнів одиночних елементарних збуджень, на які можуть потрапляти поодинокі розпаровані електрони) обумовлює стійкість куперівських пар до розриву під дією малих збурень і є достатньою умовою для виникнення НП – стану.

Оскільки q – частинки являють собою стійкі зв'язані стани двох спарених електронів, які безперервно розсіюються один на одному, проте, в кожен момент часу мають рівні по абсолютній величині і протилежні за направленням імпульси і антипаралельні спіни, то q – пари можна трактувати як бозони ($\vec{S}_q = 0$), які підкоряються статистиці Бозе – Ейнштейна і мають тенденцію займати один і той самий квантовий стан з одним і тим же мінімальним значенням імпульсу ($\vec{p}_q = 0$) і з однією і тією самою мінімальною енергією.

В силу визначення дебройлівської довжини хвилі $\lambda_B = h / p_q$ умова (3.19) ($\vec{p}_q = 0$) обумовлює необмежену просторову протяжність хвильових функцій q – частинок. При цьому сильне взаємне перекриття хвильових функцій всіх q – частинок призводить до утворення когерентного (узгодженого) бозе – конденсату q – частинок.

Квантовий стан кожної окремої q – частинки, а також і всього когерентного бозе – конденсату q – частинок, можна описувати однією і тією ж макроскопічною хвильовою функцією

$$\psi(\vec{r}) = n_q^{1/2}(\vec{r}) e^{i\theta(\vec{r})}, \quad (3.29)$$

де $n_q(\vec{r}) = \frac{n_s(\vec{r})}{2}$; $\theta(\vec{r})$ – фаза ХФ.

Саме той факт, що q – частинки є бозонами ($\vec{S}_q = 0$) і можуть накопичуватися в одному квантовому стані з одними і тими ж енергією і імпульсом, дозволяє нормувати ХФ на концентрацію q – частинок:

$$|\psi|^2 = \psi\psi^* = n_q = \frac{n_s}{2}. \quad (3.30)$$

2) Припустимо, що слабке ($B_0 < B_{c1}$) прикладене однорідне магнітне поле практично не впливає на концентрацію q – частинок:

$$n_q \neq n_q(\vec{r}), \text{ або } n_q = const. \quad (3.31)$$

Тоді ХФ бозе – конденсату q – частинок має вигляд

$$\psi(\vec{r}) = n_q^{1/2} \cdot e^{i\theta(\vec{r})}. \quad (3.32)$$

3) Будемо використовувати наближення локальної ($\lambda_L \gg \xi_0$) електродинаміки надпровідників, тобто протяжні куперівські пари будемо розглядати як «точкові» q – частинки.

Тоді підставивши (3.32) в формулу (3.16) і враховуючи, що $q = 2e$, $m_q = 2m_e$, $n_q = \frac{n_s}{2} = const$, отримаємо:

$$\vec{j}_s(\vec{r}) = \frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \left[\frac{\Phi_0}{2\pi} \vec{\nabla} \theta(\vec{r}) - \vec{A}(\vec{r}) \right], \quad (3.33)$$

де $\Phi_0 = \frac{hc}{2e}$ – квант магнітного потоку.

Рівняння (3.33) являє собою квантове узагальнення другого рівняння Лондонів (3.6) для однорідних ($n_s \neq n_s(\vec{r})$) НП.

Рівняння (3.33) задовольняє умову градієнтної інваріантності (тобто рівняння (3.33) є інваріантним по відношенню до калібровочного перетворення (3.11)). Тому для однозв'язного НП – зразка (без наскрізних отворів) вибором відповідного калібрування векторного потенціалу $\vec{A}(\vec{r})$ завжди можна перейти до дійсної ХФ ψ [5]. Тоді, вважаючи, що в рівнянні (3.33) $\theta = 0$ і переходячи до дійсної ХФ, отримуємо друге рівняння Лондонів (3.6). Таким чином, перехід до «жорсткої» ($|\psi|^2 = \psi\psi^* = \frac{n_s}{2} = const$) дійсної ($\theta = 0$)

ХФ ψ , для якої виконуються умови $\vec{\nabla} \psi = \vec{\nabla} \psi^* = 0$, еквівалентний переходу до класичної (не квантової) електродинаміки надпровідників.

Оскільки явище надпровідності носить виключно квантовий характер, то найбільш природним способом отримання другого рівняння Лондонів (яке грає роль матеріального рівняння зв'язку і не є фундаментальним канонічним рівнянням) уявляється саме перехід від точних квантових моделей до наближених класичних моделей.

4. Узагальнення локальної ($\lambda_L \gg \xi_0$) лондонівської електродинаміки надпровідників на нелокальний ($\lambda_L \ll \xi_0$) випадок

Як відомо [5] до НП 1-го роду відносяться надпровідники, для яких виконується нерівність

$\lambda_L < 0.71\xi_0$. Обмежимося розглядом НП 1-го роду, для яких виконується сильна нерівність:

$$\lambda_L \ll \xi_0. \quad (4.1)$$

Тоді (у разі НП 1-го роду) поверхнева енергія $\sigma_{ns}^{(I)}$ границі поділу між N – та S – фазами додатна [5]:

$$\sigma_{ns}^{(I)} > 0. \quad (4.2)$$

Це означає, що для утворення NS – границі необхідно підводити енергію. Таким чином умова (4.2) перешкоджає розшаруванню НП – зразка на дуже тонкі S – шари і N – шари, які чергуються між собою при його переході в проміжний стан.

Однак, хоча надпровідникам 1-го роду енергетично і не вигідно розшаровуватися на дуже велику кількість S – і N – шарів, які перемежуються між собою, проте, для НП – зразків певної форми (оскільки перехід НП 1-го роду в проміжний стан можливий тільки в неоднорідному результуючому магнітному полі $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$) і в достатньо сильних однорідних прикладених магнітних полях \vec{B}_0 таке розшарування відбувається за рахунок енергії прикладеного магнітного поля (а точніше, за рахунок енергії генератора однорідного прикладеного магнітного поля \vec{B}_0).

Істотна нелокальність ($\lambda_L \ll \xi_0$) НП 1-го роду вказує на непридатність локальної ($\lambda_L \gg \xi_0$) лондонівської електродинаміки надпровідників для опису властивостей НП 1-го роду. Однак, можна показати, [8, 5], що локальна ($\lambda_L \gg \xi_0$) лондонівська теорія надпровідності допускає узагальнення на нелокальний ($\lambda_L \ll \xi_0$) випадок, а друге рівняння Лондонів (3.6) при цьому легко модифікується.

Рівняння (3.6) може бути застосовано тільки в тому випадку, якщо розміри ξ_0 куперівських пар (протяжних q -частинок) істотно менше характерної довжини, на якій відбувається зміна векторного потенціалу $\vec{A}(\vec{r})$, тобто істотно менше лондонівської глибини проникнення ($\xi_0 \ll \lambda_L$).

Замінімо локальне ($\lambda_L \gg \xi_0$) рівняння (3.6) на нелокальне ($\lambda_L \ll \xi_0$) рівняння, яке встановлює зв'язок між НП – струмом $\vec{j}_s(\vec{r})$ і векторним потенціалом $\vec{A}(\vec{r})$, який в нелокальних ($\lambda_L \ll \xi_0$) НП

1-го роду сильно змінюється на довжині куперівської пари ξ_0 .

У деякому наближенні будемо вважати, що результуюче магнітне поле $\vec{B}(\vec{r})$ і в нелокальному випадку загасає вглиб надпровідника також за експоненційним законом, але проникає в товщу НП на іншу глибину. Позначимо цю нову глибину проникнення λ_p і будемо називати її піппардівською глибиною проникнення.

Таким чином, на q -частинку (протяжну куперівську пару) «діаметром» ξ_0 векторний потенціал $\vec{A}(\vec{r})$ діє тільки на глибину $\lambda_p \ll \xi_0$. Оскільки тільки частка q -

частинки $\left(\frac{\lambda_p}{\xi_0}\right)$ «сприймає» дію поля векторного потенціалу $\vec{A}(\vec{r})$, то можна припустити, що дія $\vec{A}(\vec{r})$ на протяжну q – частинку в нелокальному випадку менш ефективна. Тому густина НП – струму $\vec{j}_s(\vec{r})$

буде менше в $\left(\frac{\xi_0}{\lambda_p}\right)$ разів. Підставивши цей коефіцієнт в рівняння (3.6), отримаємо

$$\vec{j}_s(\vec{r}) = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \left[\frac{\lambda_p}{\xi_0} \right] \vec{A}(\vec{r}). \quad (4.3)$$

Якщо це рівняння записати у вигляді

$$\vec{j}_s(\vec{r}) = -\frac{c}{4\pi\lambda_p^2} \vec{A}(\vec{r}), \quad (4.4)$$

то отримаємо експоненційний закон загасання $\vec{A}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ і $\vec{j}_s(\vec{r})$ на глибині проникнення λ_p .

Порівняння рівнянь (4.3) і (4.4) дає (див., напр., [8, 5]):

$$\lambda_p = (\lambda_L^2 \xi_0)^{1/3}. \quad (4.5)$$

З (4.5) випливає, що λ_p задовольняє наступним сильним нерівностям

$$\lambda_L \ll \lambda_p \ll \xi_0. \quad (4.6)$$

Зауважимо, що такий наближений підхід справедливий тільки для макроскопічних (масивних) НП – зразків. Наприклад, для макроскопічного сферичного НП 1-го роду повинна виконуватися умова

$$\lambda_L \ll \lambda_p \ll \xi_0 \ll R, \quad (4.7)$$

де R - радіус НП – кулі.

Таким чином, для нелокального узагальнення локальної лондонівської електродинаміки (в разі макроскопічних НП – зразків) достатньо у всіх формулах (3.5) – (3.9) замінити λ_L на λ_p :

$$\Delta \vec{j}_s(\vec{r}) - \frac{1}{\lambda_p^2} \vec{j}_s(\vec{r}) = 0, \quad (4.8)$$

$$\vec{j}_s(\vec{r}) = -\frac{c}{4\pi\lambda_p^2} \vec{A}(\vec{r}), \quad (4.9)$$

$$\text{rot } \vec{j}_s(\vec{r}) = -\frac{c}{4\pi\lambda_p^2} \vec{B}(\vec{r}), \quad (4.10)$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) - \frac{1}{\lambda_p^2} \vec{A}(\vec{r}) = 0, \quad (4.11)$$

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}) - \frac{1}{\lambda_p^2} \vec{B}(\vec{r}) = 0, \quad (4.12)$$

де $\lambda_p = (\lambda_L^2 \xi_0)^{1/3}$; $\lambda_L \ll \lambda_p \ll \xi_0$.

Рівняння нелокальної ($\lambda_p \ll \xi_0$) піппардівської електродинаміки (4.8) – (4.12), також як і рівняння локальної ($\lambda_L \gg \xi_0$) лондонівської електродинаміки (3.5) – (3.9), описують тільки однорідні ($n_s \neq n_s(\vec{r})$), тобто $n_s = \text{const}$ по всьому об'єму НП – зразка) надпровідники, що робить рівняння (4.8) – (4.12) непридатними для детального опису структури проміжного стану.

Оскільки для детального опису проміжного стану НП 1-го роду необхідно враховувати наявність границі поділу між S – і N – фазами, то точна кількісна теорія повинна описувати неоднорідні ($n_s = n_s(\vec{r})$) НП.

В якості таких теорій можна використовувати феноменологічну квантову теорію надпровідності Гінзбурга - Ландау (1950) або точну мікроскопічну квантову теорію БКШ (1957).

Проте, модифікована (спрощена) піппардівська електродинаміка НП 1-го роду, будучи дуже простою класичною (не квантовою) теорією, дозволяє встановити саму можливість переходу макроскопічного (4.7) сферичного НП 1-го роду в проміжний стан і навіть зробити деякі чисельні оцінки.

Основне рівняння нелокальної ($\lambda_L \ll \lambda_p \ll \xi_0$) піппардівської теорії НП 1-го роду (4.9) – (4.10) являє собою матеріальне рівняння, яке пов'язує об'ємну густину НП – струму $\vec{j}_s(\vec{r})$ з результируючим магнітним

полем $\vec{B}(\vec{r})$ і тим самим замикає максвеллівську систему рівнянь магнітостатики надпровідників (2.1) – (2.2).

5. Розв'язання задачі про розподіл результируючого магнітного поля $\vec{B}^i(\vec{r})$ по об'єму НП – кулі

($r \leq R$), що знаходиться в слабкому ($B_0 < \frac{2}{3} B_{cm}$)

однорідному прикладеному магнітному полі \vec{B}_0

Застосувавши операцію rot до обох частин рівняння (4.10) і скориставшись рівнянням (2.1), отримаємо рівняння для знаходження об'ємної густини НП – струму $\vec{j}_s(\vec{r})$:

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{j}_s(\vec{r})) + \frac{1}{\lambda_p^2} \vec{j}_s(\vec{r}) = 0. \quad (5.1)$$

Підставивши розв'язок $\vec{j}_s(\vec{r})$ рівняння (5.1) в рівняння (4.10)

$$\vec{B}^i(\vec{r}) = -\frac{4\pi\lambda_p^2}{c} \text{rot } \vec{j}_s(\vec{r}), \quad (5.2)$$

отримаємо розподіл результируючого магнітного поля $\vec{B}^i(\vec{r})$ всередині ($r \leq R$) НП – кулі.

Такий підхід є найбільш простим і ефективним, оскільки з міркувань симетрії (див. рис.1) вектор $\vec{j}_s(\vec{r})$ має в сферичній системі координат $\{r, \theta, \alpha\}$ тільки одну відмінну від нуля компоненту:

$$j_{s\alpha} \neq 0; \quad j_{sr} = j_{s\theta} = 0, \quad (5.3)$$

де $j_{s\alpha} \neq j_{s\alpha}(\alpha)$, оскільки індуковані однорідним прикладеним магнітним полем $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z = \text{const}$ замкнуті (кругові) НП – струми $\vec{j}_s(\vec{r})$, що протікають в тонкому приповерхневому шарі НП – кулі, мають аксіальну симетрію.

Оскільки об'ємна густина НП – струму $j_{s\alpha}$ повинна бути максимальна на «екваторі» НП – кулі і дорівнює нулю на його «полюсах», то компонента $j_{s\alpha}$ може залежати від полярного кута θ тільки через $\sin \theta$. Нарешті, оскільки і вектор $\vec{B}^i(\vec{r})$, і НП – струм $\vec{j}_s(\vec{r})$ експоненційно загасають при зменшенні координати r (при просуванні вглиб НП – кулі), то розв'язок рівняння (5.1) природно шукати у вигляді:

$$j_{s\alpha}(r, \theta) = f(r) \cdot \sin \theta. \quad (5.4)$$

Підставляючи компоненти (5.3) – (5.4) в формули для компонент вектора $(\text{rot } \vec{j}_s(r, \theta))$ в сферичній системі координат [12], отримаємо:

$$\left\{ \begin{aligned} (\text{rot } \vec{j}_s)_r &= \frac{2f(r)\cos\theta}{r}, & (5.5) \\ (\text{rot } \vec{j}_s)_\theta &= -\frac{\sin\theta}{r}(f(r) + rf'(r)), & (5.6) \\ (\text{rot } \vec{j}_s)_\alpha &= 0. & (5.7) \end{aligned} \right.$$

Тоді ще раз, підставляючи компоненти (5.5) – (5.7) нового вектора $(\text{rot } \vec{j}_s)$ в ті ж формули [12] для $\text{rot}(\text{rot } \vec{j}_s)$, отримаємо

$$(\text{rot}(\text{rot } \vec{j}_s))_r = 0, \quad (5.8)$$

$$(\text{rot}(\text{rot } \vec{j}_s))_\theta = 0, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} (\text{rot}(\text{rot } \vec{j}_s))_\alpha &= -\frac{\sin\theta}{r}(2f'(r) + rf''(r)) + \\ &+ \frac{2f(r) \cdot \sin\theta}{r^2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Підставляючи (5.10) і (5.4) в рівняння (5.1), отримаємо

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df(r)}{dr} - \left[\frac{2}{r^2} + \frac{1}{\lambda_p^2} \right] f(r) = 0. \quad (5.11)$$

Введемо позначення $k^2 = \frac{1}{\lambda_p^2}$ і зробимо заміну $f(r) = r^{-1/2} \varphi(r)$:

$$\varphi''(r) + \frac{1}{r} \varphi'(r) - \left[k^2 + \frac{(1+1/2)^2}{r^2} \right] \varphi(r) = 0. \quad (5.12)$$

Зробивши заміну $r = \frac{\rho}{k}$, отримаємо:

$$\varphi''(\rho) + \frac{1}{\rho} \varphi'(\rho) - \left[1 + \frac{(1+1/2)^2}{\rho^2} \right] \varphi(\rho) = 0. \quad (5.13)$$

Рівняння (5.13) являє собою ДР Бесселя, розв'язком якого є дійсні модифіковані функції Бесселя від напівцілого індексу $\nu = (1+1/2)$ [18]:

$$I_{(n+1/2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho^{(n+1/2)} \frac{d^n}{(\rho d\rho)^n} \left(\frac{sh\rho}{\rho} \right), \quad (5.14)$$

$$I_{-(n+1/2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho^{(n+1/2)} \frac{d^n}{(\rho d\rho)^n} \left(\frac{ch\rho}{\rho} \right). \quad (5.15)$$

Визначення та графіки гіперболічних функцій $sh\rho$ і $ch\rho$ можна знайти в [19].

Вважаючи в (5.14) – (5.15) $n=1$, представимо розв'язок рівняння (5.13) у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) &= C_1 I_{(1+1/2)}(\rho) + C_2 I_{-(1+1/2)}(\rho) = \\ &= C_1 \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho^{-3/2} (\rho ch\rho - sh\rho) \right] + \\ &+ C_2 \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho^{-3/2} (\rho sh\rho - ch\rho) \right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Зробимо зворотний перехід до старої змінної (тобто покладемо $\rho = kr = \frac{r}{\lambda_p}$) і підставимо (5.16) в формулу

$$f(r) = r^{-1/2} \varphi(r) :$$

$$f(r) = \frac{1}{r^2} \left\{ \begin{aligned} &C_3 \left[\left(\frac{r}{\lambda_p} \right) ch \left(\frac{r}{\lambda_p} \right) - sh \left(\frac{r}{\lambda_p} \right) \right] + \\ &+ C_4 \left[\left(\frac{r}{\lambda_p} \right) sh \left(\frac{r}{\lambda_p} \right) - ch \left(\frac{r}{\lambda_p} \right) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (5.17)$$

З умови скінченності функції $f(r)$ в точці $r=0$ покладемо $C_4 = 0$. Тоді, підставляючи (5.17) в (5.4), остаточно отримаємо

$$j_{s\alpha}(r, \theta) = \frac{cN}{4\pi r^2} \left[sh \left(\frac{r}{\lambda_p} \right) - \left(\frac{r}{\lambda_p} \right) ch \left(\frac{r}{\lambda_p} \right) \right] \cdot \sin \theta, \quad (5.18)$$

де константа інтегрування N обрана з міркувань зручності.

Підставляючи (5.18) в формули для компонент вектора $(\text{rot } \vec{j}_s)$ в сферичній системі координат [12], на підставі рівняння (5.2) отримаємо компоненти вектора $\vec{B}^i(\vec{r})$ всередині ($r \leq R$) НП – кулі:

$$B_r^i(r, \theta) = -\frac{2\lambda_p^2 N}{r^3} \left[\begin{array}{c} sh\left(\frac{r}{\lambda_p}\right) - \\ -\left(\frac{r}{\lambda_p}\right) ch\left(\frac{r}{\lambda_p}\right) \end{array} \right] \cdot \cos \theta, \quad (5.19)$$

$$B_\theta^i(r, \theta) = -\frac{\lambda_p^2 N}{r^3} \left[\begin{array}{c} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_p^2}\right) sh\left(\frac{r}{\lambda_p}\right) - \\ -\left(\frac{r}{\lambda_p}\right) ch\left(\frac{r}{\lambda_p}\right) \end{array} \right] \cdot \sin \theta, \quad (5.20)$$

$$B_\alpha^i = 0, \quad (r \leq R). \quad (5.21)$$

6. Розв'язок задачі про розподіл результуючого магнітного поля $\vec{B}^e(\vec{r})$ в зовнішній області ($r > R$)

НП - кулі, що знаходиться в слабкому $\left(B_0 < \frac{2}{3} B_{cm}\right)$

однорідному прикладеному магнітному полі \vec{B}_0

В даному випадку зручно скористатися рівнянням (2.18) для векторного потенціалу $\vec{A}(\vec{r})$. Поза ($r > R$) НП – кулею НП – струми відсутні ($\vec{j}_s^e = 0$) і рівняння (2.18) прийме наступний вигляд:

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}^e(\vec{r})) = 0. \quad (6.1)$$

З рівняння (4.9), аксіальної симетрії НП – струму (5.3) і умови безперервності для поля векторного потенціалу $\vec{A}(\vec{r})$ на поверхні ($r = R$) НП – кулі слідує, що і у зовнішній області ($r > R$) векторний потенціал $\vec{A}^e(\vec{r})$ також має аксіальну симетрію:

$$A_\alpha^e(r, \theta) \neq 0; \quad A_r^e = 0; \quad A_\theta^e = 0. \quad (6.2)$$

За аналогією з формулою (5.4) розв'язок рівняння (6.1) будемо шукати у тому ж вигляді:

$$A_\alpha^e(r, \theta) = F(r) \cdot \sin \theta. \quad (6.3)$$

Оскільки вектори $\vec{A}^e(r, \theta)$ і $\vec{j}_s(r, \theta)$ мають однакову симетрію, то для компонент вектора $(\text{rot}(\text{rot } \vec{A}^e))$ напишемо точно такі ж формули (5.8) – (5.10), як і для вектора $(\text{rot}(\text{rot } \vec{j}_s))$:

$$\left(\text{rot}(\text{rot } \vec{A}^e) \right)_r = 0, \quad (6.4)$$

$$\left(\text{rot}(\text{rot } \vec{A}^e) \right)_\theta = 0, \quad (6.5)$$

$$\left(\text{rot}(\text{rot } \vec{A}^e) \right)_\alpha = -\frac{\sin \theta}{r} [2F'(r) + rF''(r)] + \frac{2F(r) \cdot \sin \theta}{r^2}. \quad (6.6)$$

Підставляючи (6.4) – (6.6) в рівняння (6.1), отримаємо рівняння Ейлера для функції $F(r)$:

$$F''(r) + \frac{2}{r} F'(r) - \frac{2}{r^2} F(r) = 0. \quad (6.7)$$

ДР 2-го порядку має містити дві константи інтегрування. Тому розв'язок рівняння Ейлера (6.7) шукаємо у вигляді:

$$F(r) = Cr^m, \quad (6.8)$$

де C і m – дві константи інтегрування, що підлягають визначенню.

Підставляючи (6.8) в (6.7), отримаємо квадратичне рівняння

$$m^2 + m - 2 = 0,$$

яке має два корені: $m_1 = 1$ і $m_2 = -2$.

Тоді загальний розв'язок рівняння (6.7) має вигляд:

$$F(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}. \quad (6.9)$$

Підставляючи (6.9) в (6.3), отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\alpha^e(r, \theta) = \left[C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \right] \cdot \sin \theta, \end{array} \right. \quad (6.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_r^e = 0, \end{array} \right. \quad (6.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\theta^e = 0. \end{array} \right. \quad (6.12)$$

Скориставшись формулами [12] для компонент вектору $\text{rot } \vec{A}^e(\vec{r}) = \vec{B}^e$ в сферичній системі координат і переозначаючи константи $2C_1 = C_0$ і $C_2 = M$, отримаємо:

$$\begin{cases} B_r^e(r, \theta) = C_0 \cos \theta + \frac{2M}{r^3} \cos \theta, & (6.13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_\theta^e(r, \theta) = -C_0 \sin \theta + \frac{M}{r^3} \sin \theta, & (6.14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_\alpha^e = 0, \quad (r > R). & (6.15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}, & (6.25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_\theta = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}, & (6.26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_\alpha = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}, & (6.27) \end{cases}$$

Константа C_0 має ясний фізичний зміст, оскільки НП – куля знаходиться в статичному однорідному прикладеному магнітному полі

$$\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z = const. \quad (6.16)$$

Знайдемо компоненти вектора $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z$ в сферичній системі координат $\{r, \theta, \alpha\}$. Для переходу від декартової системи координат $\{x, y, z\}$ до сферичної системи координат $\{r, \theta, \alpha\}$ виразимо ортонормовані базисні вектори $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha\}$ сферичної системи координат через ортонормовані базисні вектори $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ декартової системи координат. Формули для ортонормованих базисних векторів довільної криволінійної системи координат мають вигляд

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \quad (6.17)$$

де

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad (6.18)$$

h_i – функції координат (коефіцієнти Ляме).

Для сферичної системи координат: $\{q_1, q_2, q_3\} = \{r, \theta, \alpha\}$,

$$\begin{cases} x(r, \theta, \alpha) = r \sin \theta \cos \alpha, & (6.19) \\ y(r, \theta, \alpha) = r \sin \theta \sin \alpha, & (6.20) \\ z(r, \theta, \alpha) = r \cos \alpha; & (6.21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1 = h_r = 1, & (6.22) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_2 = h_\theta = r, & (6.23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_3 = h_\alpha = r \sin \theta. & (6.24) \end{cases}$$

Тоді з (6.17) отримаємо:

$$\text{де } \vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z = (r \sin \theta \cos \alpha) \vec{e}_x + (r \sin \theta \sin \alpha) \vec{e}_y + (r \cos \theta) \vec{e}_z. \quad (6.28)$$

Підставляючи (6.28) у формули (6.25) – (6.27), остаточно отримуємо [20]:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = (\sin \theta \cos \alpha) \vec{e}_x + (\sin \theta \sin \alpha) \vec{e}_y + (\cos \theta) \vec{e}_z, & (6.29) \\ \vec{e}_\theta = (\cos \theta \cos \alpha) \vec{e}_x + (\cos \theta \sin \alpha) \vec{e}_y + (-\sin \theta) \vec{e}_z, & (6.30) \\ \vec{e}_\alpha = (-\sin \alpha) \vec{e}_x + (\cos \alpha) \vec{e}_y. & (6.31) \end{cases}$$

Помноживши вектор $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z$ на базисні орти сферичної системи координат $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha\}$ (6.29) – (6.31), отримаємо:

$$\begin{cases} B_{0r} = B_0 \cos \theta, & (6.32) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{0\theta} = -B_0 \sin \theta, & (6.33) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{0\alpha} = 0. & (6.34) \end{cases}$$

З порівняння формул (6.32) – (6.34) з формулами (6.13) – (6.15) випливає, що $C_0 = B_0$. Таким чином, в сферичній системі координат $\{r, \theta, \alpha\}$ компоненти результуючого магнітного поля $\vec{B}^e(\vec{r})$ поза ($r > R$) НП – кулю мають вигляд:

$$\begin{cases} B_r^e(r, \theta) = \left(B_0 + \frac{2M}{r^3}\right) \cos \theta, & (6.35) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_\theta^e(r, \theta) = \left(-B_0 + \frac{M}{r^3}\right) \sin \theta, & (6.36) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_\alpha^e = 0, \quad (r > R). & (6.37) \end{cases}$$

Тоді і формули (6.10) – (6.12) виразимо через нові константи B_0 і M :

$$\begin{cases} A_\alpha^e(r, \theta) = \left[\frac{1}{2} B_0 r + \frac{M}{r^2}\right] \sin \theta, & (6.38) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_r^e = 0, & (6.39) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_\theta^e = 0, \quad (r > R). & (6.40) \end{cases}$$

Формули для компонент вектору $\vec{B}^e(r, \theta)$ (6.35) – (6.37) і вектору $\vec{A}^e(r, \theta)$ (6.38) – (6.40) в сферичній системі координат $\{r, \theta, \alpha\}$ можна також представити і в універсальній векторній формі

$$\vec{B}^e(\vec{r}) = \vec{B}_0 + \frac{3\vec{r}(\vec{M} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3}, \quad (6.41)$$

$$\vec{A}^e(\vec{r}) = \frac{1}{2}[\vec{B}_0, \vec{r}] + \frac{[\vec{M}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (6.42)$$

Оскільки $\vec{B}^e = \text{rot } \vec{A}^e(\vec{r})$, то легко показати, що з (6.42) слідує (6.41), а спроектувавши вектори (6.41) і (6.42) на одиничні базисні орти $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha\}$ сферичної системи координат, отримаємо формули (6.35) – (6.37) і (6.38) – (6.40).

З формул (6.41) – (6.42) легко встановити фізичний сенс вектора \vec{M} . Відомо [21, 22], що на великих відстанях r від обмеженої області, в якій течуть стаціонарні замкнуті струми $\vec{j}(\vec{r})$, магнітне поле $\vec{B}_\infty(\vec{r})$ і векторний потенціал $\vec{A}_\infty(\vec{r})$ приймають наступний вигляд

$$\vec{B}_\infty(\vec{r}) = \frac{3\vec{r}(\vec{M} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3}, \quad (6.43)$$

$$\vec{A}_\infty(\vec{r}) = \frac{[\vec{M}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (6.44)$$

де \vec{M} – магнітний дипольний момент обмеженої системи замкнутих струмів $\vec{j}(\vec{r})$:

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}, \vec{j}(\vec{r})] dV. \quad (6.45)$$

Якщо стаціонарні замкнуті НП – струми $\vec{j}_s(\vec{r})$, що течуть у тонкому приповерхневому шарі НП – кулі, трактувати як струми намагнічування, які, маючи аксіальну симетрію, спричиняють виникнення у НП – кулі магнітного дипольного моменту \vec{M} , то тоді власне магнітне поле $\vec{B}_s(\vec{r})$ індукованих замкнутих НП – струмів $\vec{j}_s(\vec{r})$ можна трактувати як магнітне поле, що обумовлене намагнічуванням НП – кулі.

З порівняння формул (6.43) – (6.44) з формулами (6.41) – (6.42) випливає, що векторна константа $\vec{M} = \text{const}$, що входить в (6.41) – (6.42), може

трактуватися як магнітний дипольний момент НП – кулі, «намагніченої» статичним прикладеним магнітним полем $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z = \text{const}$.

У обраної конфігурації (див. рис. 1) вектор магнітного дипольного моменту \vec{M} має в декартовій системі координат тільки одну компоненту, колінеарну осі z :

$$\vec{M} = \vec{M}_z = M \cdot \vec{e}_z. \quad (6.46)$$

Тоді помноживши вектор \vec{M} (6.46) на базисні орти $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha\}$ сферичної системи координат (6.29) – (6.31), отримаємо компоненти вектора \vec{M} в сферичній системі координат:

$$M_r = M \cos \theta, \quad (6.47)$$

$$M_\theta = -M \sin \theta, \quad (6.48)$$

$$M_\alpha = 0, \quad (6.49)$$

де $M = \text{const}$.

7. Визначення констант інтегрування з граничних умов для вектора \vec{B} на поверхні ($r = R$) НП - кулі

З формул (2.4) і (2.9) випливає, що вектор $\vec{B}(r, \theta)$ задовольняє наступним граничним умовам:

$$B_r^i|_{r=R} = B_r^e|_{r=R}, \quad (7.1)$$

$$B_\theta^i|_{r=R} = B_\theta^e|_{r=R}. \quad (7.2)$$

Підставимо в граничні умови (7.1) – (7.2) відповідні компоненти вектору \vec{B} з формул (5.19) – (5.20) і (6.35) – (6.36):

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{2\lambda_p^2 N}{R^3} \left[\text{sh} \left(\frac{R}{\lambda_p} \right) - \left(\frac{R}{\lambda_p} \right) \text{ch} \left(\frac{R}{\lambda_p} \right) \right] \cos \theta = \\ & = \left(B_0 + \frac{2M}{R^3} \right) \cos \theta, \end{aligned} \right. \quad (7.3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{\lambda_p^2 N}{R^3} \left[\left(1 + \frac{R^2}{\lambda_p^2} \right) \text{sh} \left(\frac{R}{\lambda_p} \right) - \left(\frac{R}{\lambda_p} \right) \text{ch} \left(\frac{R}{\lambda_p} \right) \right] \sin \theta = \\ & = \left(-B_0 + \frac{M}{R^3} \right) \sin \theta. \end{aligned} \right. \quad (7.4)$$

Розв'язав систему двох лінійних рівнянь (7.3) – (7.4) з двома невідомими, знайдемо значення констант інтегрування N і M :

$$N = \frac{3B_0 R}{2sh\left(\frac{R}{\lambda_p}\right)}, \quad (7.5)$$

$$M = -\left(\frac{B_0 R^3}{2}\right) \left[1 - 3\left(\frac{\lambda_p}{R}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{R}{\lambda_p}\right) + 3\left(\frac{\lambda_p^2}{R^2}\right) \right]. \quad (7.6)$$

8. Аналіз розподілу результуючого магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$ в усьому просторі у випадку макроскопічної ($R \gg \lambda_p$) НП – кулі

Введемо великий параметр $\xi = \left(\frac{R}{\lambda_p}\right) \gg 1$. Тоді асимптотики гіперболічних функцій при $sh\xi \rightarrow +\infty$ і $\operatorname{cth}\xi \rightarrow 1$ при $\xi \rightarrow +\infty$ можна легко знайти з відповідних графіків [19].

Тоді при $\xi \rightarrow +\infty$ (тобто в разі $R \gg \lambda_p$) маємо:

$$N \approx 0, \quad (8.1)$$

$$M \approx -\left(\frac{B_0 R^3}{2}\right) \left[1 - \frac{3}{\xi} + \frac{3}{\xi^2} \right] \approx -\left(\frac{B_0 R^3}{2}\right). \quad (8.2)$$

Від’ємне значення проєкції $M_z \equiv M$ вектору магнітного дипольного моменту \vec{M} «намагніченої» НП – кулі на вісь z (див. рис. 1, де $\vec{M} = M \cdot \vec{e}_z$, $M < 0$) вказує на те, що НП – куля є діаманетиком.

Підставляючи (8.2) в формули (6.35) – (6.37), знайдемо у випадку $R \gg \lambda_p$ значення результуючого магнітного поля $\vec{B}^e(\vec{r})$ на поверхні ($r = R$) НП – кулі:

$$\begin{cases} B_r^e(R, \theta) = 0, & (8.3) \\ B_\theta^e(R, \theta) = -\frac{3}{2} B_0 \sin \theta, & (8.4) \\ B_\alpha^e(R, \theta) = 0. & (8.5) \end{cases}$$

З формул (8.3) – (8.5) випливає, що на «екваторі» (при $\theta = \frac{\pi}{2}$) НП – кулі

$$B_\theta^e\left(R, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2} B_0, \quad (8.6)$$

тоді як на «полосах» (при $\theta = 0$ і $\theta = \pi$) НП – кулі

$$B_\theta^e(R, 0) = B_\theta^e(R, \pi) = 0. \quad (8.7)$$

Підставляючи (8.1) в формули (5.19) – (5.20), знайдемо в разі $R \gg \lambda_p$ значення результуючого магнітного поля $\vec{B}^i(\vec{r})$ всередині ($r \leq R$) НП – кулі:

$$\begin{cases} B_r^i(r, \theta) = 0, & (8.8) \\ B_\theta^i(r, \theta) = 0, & (8.9) \\ B_\alpha^i(r, \theta) = 0. & (8.10) \end{cases}$$

Таким чином, в наближенні $R \gg \lambda_p$ проникненням результуючого магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$ всередину НП – кулі можна знехтувати ($\lambda_p = 0$, $\vec{B}^i = 0$).

Зауважимо, що у границі $\left(\frac{\lambda_p}{R}\right) \rightarrow 0$ порушується неперервність між тангенціальними компонентами вектора $\vec{B}(\vec{r})$ на поверхні ($r = R$) НП – кулі:

$$\begin{cases} B_\theta^e(R, \theta) = -\frac{3}{2} B_0 \sin \theta, & (8.11) \\ B_\theta^i(R, \theta) = 0, & (8.12) \end{cases}$$

що знаходиться в протиріччі з граничною умовою (7.2). Однак можна показати, що в граничному випадку ($\lambda_p \rightarrow 0$, $\vec{B}^i \rightarrow 0$) граничні умови (2.9) трансформуються в граничні умови (2.12) – (2.13).

9. Класичне дослідження характеру переходу макроскопічного ($R \gg \lambda_p$) сферичного НП 1-го роду в проміжний і нормальний стани при збільшенні однорідного прикладеного магнітного поля \vec{B}_0

З формули (8.6) випливає, що в дуже слабкому однорідному прикладеному магнітному полі, коли

$$B_0 < \frac{2}{3} B_{cm}, \quad (9.1)$$

у випадку $R \gg \lambda_p$ має місце повний ефект Мейсснера–Оксенфельда ($\lambda_p = 0$, $\vec{B}^i = 0$), і весь об’єм НП – кулі знаходиться в НП – стані.

З формул (8.6) – (8.7) випливає, що для значень однорідного прикладеного магнітного поля B_0 , які лежать в інтервалі

$$\frac{2}{3} B_{cm} \leq B_0 < B_{cm}, \quad (9.2)$$

НП – куля знаходиться в проміжному стані (див. рис. 2).

Після досягнення значення $B_0 = \frac{2}{3} B_{cm}$ в ході подальшого збільшення однорідного прикладеного магнітного поля B_0 структура проміжного стану НП – кулі змінюється: товщина нормальних шарів збільшується і, таким чином, збільшується частка об'єму НП – кулі, яка переходить в нормальний стан.

При досягненні значення $B_0 = B_{cm}$ весь об'єм НП – кулі цілком переходить в нормальний стан, і однорідне прикладене магнітне поле $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z = const$ без спотворень проходить наскрізь через весь об'єм НП – кулі.

Всі ці висновки повністю збігаються з висновками наближеної теорії, яка розглядалася в роботах [8-10], в яких наводиться відповідь до рішення крайової задачі у зовнішній області ($r > R$) НП – кулі при нехтуванні ефектом проникнення ($\lambda_p = 0; \vec{B}^i = 0$).

Висновки даної роботи збігаються також і з висновками роботи [14], де крайова задача вирішувалася з урахуванням ефекту проникнення ($\lambda_L \neq 0; \vec{B}^i \neq 0$) строгими математичними методами, за винятком того, що автори [14] помилково розглядають можливість переходу в проміжний стан сферичного НП 2-го роду, тобто локального ($\lambda_L \gg \xi_0$) лондонівського надпровідника.

Висновки

Повно і математично строго (з урахуванням ефекту проникнення) в рамках класичної електродинаміки суцільних середовищ і феноменологічної модифікованої (спрощеної) нелокальної ($\lambda_p \ll \xi_0$) піппардівської електродинаміки однорідних ($n_s = const$) НП 1-го роду вирішена складна крайова задача про розподіл результуючого магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$ всередині ($r \leq R$) і поза ($R > r$) макроскопічним ($\lambda_L \ll \lambda_p \ll \xi_0 \ll R$) сферичним НП 1-го роду.

На підставі рішення даної крайової задачі були зроблені наступні висновки:

1. при $B_0 < \frac{2}{3} B_{cm}$ весь об'єм макроскопічної ($R \gg \xi_0 \gg \lambda_p$) НП – кулі знаходиться в НП – стані (тобто має місце практично повний ефект Мейсснера-Оксенфельда: $\lambda_p \approx 0, \vec{B}^i \approx 0$);

2. якщо значення статичного однорідного прикладеного магнітного поля B_0 лежать в інтервалі $\frac{2}{3} B_{cm} \leq B_0 < B_{cm}$, то НП – куля знаходиться в проміжному стані;

3. після досягнення однорідним прикладеним магнітним полем значення $B_0 = \frac{2}{3} B_{cm}$ в ході подальшого збільшення прикладеного магнітного поля B_0 відбувається збільшення товщини нормальних шарів, а, отже, і збільшення частки об'єму НП – кулі, яка переходить в стан нормальної провідності;

4. при досягненні прикладеним магнітним полем значення $B_0 = B_{cm}$ весь об'єм НП – кулі цілком переходить в нормальний стан і однорідне прикладене магнітне поле $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z = const$ без спотворень проходить через весь об'єм НП – кулі.

Достовірність отриманих результатів і висновків обумовлена строгим і точним рішенням коректно поставленої крайової задачі, а також тим, що результати даної роботи узгоджуються з результатами робіт, виконаних з даної тематики іншими авторами.

Відмінною рисою цієї роботи є самоузгоджена постановка крайової задачі з урахуванням ефекту проникнення, а також її математично строге і повне рішення.

Новим у рішенні даної задачі є те, що вона вперше вирішена в рамках модифікованої (спрощеної) нелокальної ($\lambda_L \ll \lambda_p \ll \xi_0$) піппардівської електродинаміки надпровідників 1-го роду, тоді як інші дослідники або зовсім виключали з розгляду поверхневі ефекти (тобто вважали $\lambda_L = 0$ і $\vec{B}^i = 0$, що робить незрозумілим сам механізм переходу макроскопічної НП – кулі в проміжний стан), або ж помилково розглядали перехід макроскопічного ($R \gg \lambda_L$) локального ($\lambda_L \gg \xi_0$) сферичного НП 2-го роду в проміжний стан.

Оскільки поверхневі ефекти відіграють важливу роль у фізиці надпровідників, то їх ігнорування або недбалий опис (напр., написання в формулах для компонент вектора $\vec{B}(\vec{r})$ параметра λ_L замість λ_p , хоча $\lambda_L \ll \lambda_p$) може привести не тільки до кількісних, а й до грубих якісних помилок (напр., до помилкового висновку про можливість переходу в проміжний стан локального ($\lambda_L \gg \xi_0$) НП 2-го роду).

Оскільки наукові результати отримано авторами шляхом строгого і самоузгодженого рішення точно

поставленої крайової задачі, то робота безумовно представляє теоретичний і методичний інтереси. Тому матеріали цієї роботи можуть бути використані для підготовки курсів лекцій і написання методичних посібників з дисциплін «Класична електродинаміка суцільних середовищ» і «Введення в фізику надпровідників».

References/Literature

1. I.M. Dmitrenko. *In the world of superconductivity*, (Naukova Dumka, Kyiv, 1981), 195 p. И.М. Дмитренко. *В мире сверхпроводимости* (Наукова думка, Киев), 195 с. [In Russian]
2. V. Bukkel. *Superconductivity. Fundamentals and Applications*, (Mir, Moscow, 1975), 370 p. В. Буккель. *Сверхпроводимость. Основы и приложения*, (Мир, Москва), 370 с. [In Russian]
3. E. Linton. *Superconductivity, 2nd ed., Rev. and add.* (Mir, Moscow, 1971), 264 p. Э. Линтон. *Сверхпроводимость, 2-е изд., испр. и доп.* (Мир, Москва), 264 с. [In Russian]
4. A. Rose-Ince, E. Roderick. *Introduction to the physics of superconductivity*, (Mir, Moscow, 1972), 272 p. А. Роуз-Инс, Е. Родерик. *Введение в физику сверхпроводимости*, (Мир, Москва), 272 с. [In Russian]
5. V.V. Schmidt. *Introduction to the physics of superconductors, 2nd ed., Rev. and add.*, (MTsNMO, Moscow, 2000), 398 p. В.В. Шмидт. *Введение в физику сверхпроводников, 2-е изд., испр. и доп.* (МЦНМО, Москва), 398 с. [In Russian]
6. L.D. Landau, E.M. Lifshits. *Theoretical physics. vol. 8. Electrodynamics of Continuous Media, 2nd ed., Rev. and add.*, (Nauka, Moscow, 1982), 624 p. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика. т.8. Электродинамика сплошных сред, 2-е изд., перераб. и доп.*, (Наука, Москва), 624 с. [In Russian]
7. B. Serin. *Superconductivity. Experimental part. Low temperature physics: scientific collection, ed. A.I. Shalnikov, (Izd.inostr.lit., Moscow, 1959), pp. 621–622.* Б. Серин. *Сверхпроводимость. Экспериментальная часть. Физика низких температур: научный сборник под ред. А.И.Шальникова*, (Изд.иностр.лит., Москва), С. 621–622. [In Russian]
8. P. De Gennes. *Superconductivity of metals and alloys*, (Mir, Moscow, 1968), 280 p. П. Де Жен. *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, (Мир, Москва), 280 с. [In Russian]
9. M. Tinkham. *Introduction to superconductivity*, (Atomizdat, Moscow, 1980), 312 p. М. Тинкхам. *Введение в сверхпроводимость*, (Атомиздат, Москва), 312 с. [In Russian]
10. E.A. Pashitsky. *Fundamentals of the theory of superconductivity*, (Vischa shkola, Kyiv, 1985), 104 p. Э.А. Пашицкий. *Основы теории сверхпроводимости*, (Вища школа, Киев), 104 с. [In Russian]
11. J. Bardeen. *Superconductivity theory. Low temperature physics: scientific collection, ed. A.I. Shalnikov, (Izd.inostr.lit., Moscow, 1959), pp. 679–782.* Дж. Бардин. *Теория сверхпроводимости. Физика низких температур: научный сборник под ред. А.И.Шальникова*, (Изд. иностр. лит., Москва), С. 679–782. [In Russian]
12. V.V. Batygin, I.N. Toptygin. *Collection of problems in electrodynamics, 2nd ed., Revised, textbook*, (Nauka, Moscow, 1970), 504 p. В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. *Сборник задач по электродинамике, 2-е изд., перераб., учебное пособие*, (Наука, Москва), 504 с. [In Russian]
13. I. N. Toptygin. *Modern electrodynamics. Part 2. Theory of electromagnetic phenomena in matter*, (NITS "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", Moscow-Izhevsk, 2005), 848 p. И.Н. Топтыгин. *Современная электродинамика. Часть 2. Теория электромагнитных явлений в веществе*, (НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Москва-Ижевск), 848 с. [In Russian]
14. A.V. Svidzinsky, O.M. Viligursky, *Lectures on superconductivity physics*, (RVV "Vezha" Volyns'koho derzhavnoho universytetu im. Lesi Ukrayinky, Luts'k, 2003), 82 p. А.В. Свідзинський, О.М. Вілігурський. *Лекції з фізики надпровідності*, (РВВ "Вежа" Волинського державного університету ім. Лесі Українки, Луцьк), 82 с. [In Ukrainian]
15. E.M. Lifshitz, L.P. Pitaeveskiy. *Theoretical physics. v.9. Statistical physics. Part 2. Theory of the condensed state*, (Nauka, Moscow, 1978), 448 p. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Теоретическая физика. т.9. Статистическая физика. Часть 2. Теория конденсированного состояния*, (Наука, Москва), 448 с. [In Russian]
16. D.I. Blokhintsev. *Fundamentals of Quantum Mechanics. 6th ed., Stereot.*, (Nauka, Moscow, 1983), 664 p. Д.И. Блохинцев. *Основы квантовой механики. 6-е изд., стереот.*, (Наука, Москва), 664 с. [In Russian]
17. I.O. Vakarchuk. *Quantum mechanics. 3rd edition, add.*, (vyd-vo LNU im. Ivana Franka, Lviv, 2007), 848 p. І.О. Вакарчук. *Квантова механіка. 3-тє вид, доп.*, (вид-во ЛНУ ім. Івана Франка, Львів), 848 с. [In Ukrainian]
18. D.S. Kuznetsov. *Special functions, 2nd ed., Rew. and add.*, (Vysshaya shkola, Moscow, 1965), 273 p.

- Д.С. Кузнецов. *Специальные функции*, 2-е изд., перераб. и доп., (Высшая школа, Москва), 273 с. [In Russian]
19. А.Р. Yanpolsky. *Hyperbolic functions*, (Fizmatgiz, Moscow, 1960), 196 p. А.Р. Янпольский. *Гиперболические функции*, (Физматгиз, Москва), 196 с. [In Russian]
20. G. Arfken. *Mathematical Methods in Physics*, (Atomizdat, Moscow, 1970), 712 p. Г. Арфкен. *Математические методы в физике*, (Атомиздат, Москва), 712 с. [In Russian]
21. М.М. Bredov, V.V. Rummyantsev, I.N. Toptygin. *Classical electrodynamics*, (Nauka, Moscow, 1985), 400 p. М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. *Классическая электродинамика*, (Наука, Москва), 400 с. [In Russian]
22. А.И. Alekseev. *Collection of problems on classical electrodynamics*, (Nauka, Moscow, 1977), 320 p. А.И. Алексеев. *Сборник задач по классической электродинамике*, (Наука, Москва), 320 с. [In Russian]