Вісник ХНУ імені В.Н. Каразіна, серія «Фізика», вип. 32, 2020. с. 71-80

PACS: 47.37.+q

UDC: 538.94

Гідродинаміка і власні коливання квантових рідин з конформаційними ступенями свободи

М.Ю. Ковалевський[1], О.А. Рожков[2]

1 Національний науковий центр "Харківський фізико-технічний інститут", вул. Академічна 1, Харків, 61108, Україна
2 Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», вул. Кирпичова, 4, м. Харків, 61002, Україна
new.arz.yes777@gmail.com

ORCID: 0000-0002-9224-5288

DOI:10.26565/2222-5617-2020-32-09

Побудовано параметри порядку для фермі- рідини з конформаційними ступенями свободи. На їх основі введені додаткові термодинамічні параметри: спіновий одиничний вектор d_α (визначає анізотропію в спиновому підпросторі), одиничні просторові вектори m_i і n_i (що визначають анізотропію в просторі), а також три скалярних параметра що визначають форму куперовской пари u, v, q (перші два параметри це напівосі еліпсоїда куперівської пари, а останній це взаємна орієнтація у просторі цих напівосей). Розглянуто симетрійні властивості оператора параметра порядку. Виведено рівняння ідеальної гідродинаміки фермі-рідини з урахуванням впливу конформаційних ступенів свободи. Під конформаційними ступенями свободи слід розуміти параметри, пов'язані з формою і розмірами куперовскої пари. Отримані вирази для потоків термодинамічних величин такої фермі-рідини в термінах щільності функціоналу енергії. Функціонал енергії залежить як від адитивних інтегралів руху (класичні параметри рідини) так і від конформаційних параметрів. Отримано дисперсійне рівняння такої рідини для модельного вигляду функціоналу енергії (робота виконувалася в рамках фермі-рідинного підходу). Дисперсійне рівняння включає в себе спінові моди, перший, другий і третій звуки. Розібрано отримання дисперсійного рівняння для просторової підсистеми, що включає перший, другий і третій звуки, характерні для надплинних систем. Змодельовані частні рішення дисперсійного рівняння з використанням програмного пакету Maple (наведено кілька 3д малюнків для кутової залежності скорость 1 і 2 звуків в сферичної системі координат). Все вищеописане дозволяє зробити висновок, що таку фермі-рідину можна розглядати як надплинний рідкий кристал нематического типу. Наявність конформаційних параметрів відрізняє розглянуту фазу від А-фази надплинної фермі-рідини.

Ключові слова: параметр порядку, симетрійного властивості нового оператора параметра порядку, власні коливання, перший звук, другий звук, третій звук, конформаційні ступені свободи, симетрія, потоки термодинамічних величин, фермі-рідинний підхід.

Hydrodynamics and proper vibrations of quantum liquids with conformational degrees of freedom

M.Yu. Kovalevsky, A.A. Rozhkov

National Science Center Kharkov Institute of Physics and Technology, 1, Akademicheskaya St., Kharkiv, 61108, Ukraine
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", 3 Kyrpychov Str., Kharkiv, 61002, Ukraine

The order parameters are constructed for a Fermi liquid with conformational degrees of freedom. Based on them, additional thermodynamic parameters were introduced: the spin unit vector d_α (determining the anisotropy in the spin subspace), the unit spatial vectors m_i and n_i (determining the anisotropy in space), and also three scalar parameters determining the shape of the Cooper pair u, v, q (first two items are half-axes of ellipsoid of Cooper pair and last item is mutual orientation in space of these half axes). The symmetry properties of the order parameter operator are considered. The equations of ideal hydrodynamics of a Fermi liquid are derived taking into account the influence of conformational degrees of freedom. By conformational degrees of freedom should be understood the parameters associated with the shape and size of the Cooper pair. Expressions are obtained for the flows of thermodynamic quantities of such a Fermi liquid in terms of the density of the energy functional. The energy functional depends both on the additive integrals of motion (classical fluid parameters) and on conformational parameters. The dispersion equation of such a liquid is obtained for a model representation of the energy functional (the work was performed as part of the Fermi-liquid approach). The dispersion equation includes spin modes, first, second, and third sounds. The dispersion equation for the spatial subsystem, including the first, second, and third sounds characteristic of superfluid systems, is analyzed. Particular solutions of the dispersion equation are simulated using the Maple software package (several 3D figures are given for the angular dependence of the speeds of 1 and 2 sounds in a spherical coordinate system). All of the above allows us to conclude that such a Fermi liquid can be considered as a superfluid liquid crystal of a nematic type. The presence of conformational parameters distinguishes the considered phase from the F phase of a superfluid Fermi liquid.

Keywords: order parameter, symmetry properties of the new order parameter operator, natural vibrations, first sound, second sound, third sound, conformational degrees of freedom, symmetry flows of thermodynamic quantities, Fermi-liquid approach.

Гидродинамика и собственные колебания квантовых жидкостей с конформационными степенями свободы

М.Ю. Ковалевский, А.А. Рожков

Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт", ул. Академическая 1, Харьков, 61108, Украина
Национальний технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 4, Харьков, 61002, Украина

Построены параметры порядка для ферми- жидкости с конформационными степенями свободы. На их основе введены дополнительные термодинамические параметры: спиновый единичный вектор d_α (определяющий анизотропию в спиновом подпространстве), единичные пространственные векторы m_i и n_i (определяющие анизотропию в пространстве), а также три скалярных параметра определяющих форму куперовской пары u, v, q (первые два параметра это полуоси элипсоида куперовской пары, а последний это взаимная ориентация в пространстве этих полу осей). Рассмотрены симметрийные свойства оператора параметра порядка. Выведены уравнения идеальной гидродинамики ферми-жидкости с учетом влияния конформационных степеней свободы. Под конформационными степенями свободы следует понимать параметры, связанные с формой и размерами куперовской пары. Получены выражения для потоков термодинамических величин такой ферми-жидкости в терминах плотности функционала энергии. Функционал энергии зависит как от аддитивных интегралов движения (классические параметры жидкости) так и от конформационных параметров. Получено дисперсионное уравнение такой жидкости для модельного представления функционала энергии (работа выполнена в рамках ферми-жидкостного подхода). Дисперсионное уравнение включает в себя спиновые моды, первый, второй и третий звуки. Разобрано получение дисперсионного уравнения для пространственной подсистемы, включающее первый, второй и третий звуки, характерные для сверхтекучих систем. Смоделированы частные решения дисперсионного уравнения с использованием программного пакета Maple (приведены несколько 3д рисунков для угловой зависимости скоростей 1 и 2 звуков в сферической системе координат). Все вышеописанное позволяет заключить, что такую ферми-жидкость можно рассматривать как сверхтекучий жидкий кристалл нематического типа. Наличие конформационных параметров отличает рассмотренную фазу от А-фазы сверхтекучей ферми-жидкости.

Ключевые слова: параметр порядка, симметрийные свойства нового оператора параметра порядка**,** собственные колебания, первый звук, второй звук, третий звук, конформационные степени свободы, симметрия потоки термодинамических величин, ферми-жидкостной подход.

Вступ

У роботах [1,2] наведено класифікацію станів надплинного гелію-3. Надплинність He-3 реалізується за рахунок утворення куперівских пар з атомів гелію при різних значеннях орбітального моменту. Серед них добре відомі А-, A_1 і В-фази.

У куперовской парі відстань між складовими помітно більше ніж розміри атомів, що дозволяє розглядати куперівську пару як деяку молекулу, що має форму і розміри. Отже, квантова фермі-рідина буде мати нові гідродинамічні властивості.

У цій роботі розглядається гідродинаміка надплинної фермі-рідини з конформаційними ступенями свободи, яка базується на фермі-рідинному підході розвиненому в роботах [3-5]. Питання, пов'язані з впливом конформаційних ступенів свободи на гідро- і термодинаміку рідких кристалів розглядалися в роботі [6]. Під конформаційними ступенями свободи маються на увазі параметри, пов'язані з формою і розмірами куперовской пари.

Серед фізичних систем з різними формами порушення симетрії щодо фазових перетворень, трансляцій і спінових поворотів існує особливий тип систем - системи з конформаційними ступенями свободи. У таких системах важливу роль грають параметри, які відповідають за форму і взаємне розташування напівосей куперівської пари. З фізичної точки зору це може відповідати спаровуванню з орбітальним моментом відмінним від нуля. До таких систем можна віднести надплинні А- і А - подібні фази гелію-3. У цих фазах реалізуються як рідкокристалічні властивості так і класична надплинність. Наше завдання побудувати ідеальну гідродинаміку системи з конформаційними ступенями свободи і виявити нові ефекти, що пов'язані з наявністю цих ступенів свободи.

Параметри порядку і додаткові параметри

Введемо нові оператори параметрів порядку (ОПП), побудовані з скалярного і тензорного ОПП сверхтекучего гелію:

$$\begin{aligned}
&\hat{\eta}_{\alpha k}(\mathbf{x}) = i\left(\hat{\Delta}^{+}(\mathbf{x})\hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x}) - \hat{\Delta}^{+}_{\alpha k}(\mathbf{x})\hat{\Delta}(\mathbf{x})\right),\\
&\hat{\bar{\eta}}_{\alpha k}(\mathbf{x}) = i\left(\hat{\Delta}(\mathbf{x})\hat{\Delta}^{+}_{\alpha k}(\mathbf{x}) - \hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x})\hat{\Delta}^{+}(\mathbf{x})\right),\\
&\hat{\chi}_{\alpha k}(\mathbf{x}) = \hat{\Delta}^{+}(\mathbf{x})\hat{\eta}_{\alpha k}(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{1}$$

Оператори $\hat{\eta},\hat{\bar{\eta}}$ є ермітовим. Оператори (1) задовольняють таким комутаційним співвідношенням

$$\left[\hat{n}(\mathbf{x}),\hat{\eta}_{\alpha k}(\mathbf{x}')\right]=\left[\hat{n}(\mathbf{x}),\hat{\bar{\eta}}_{\alpha k}(\mathbf{x}')\right]=0,$$
$$\left[\hat{s}_{\alpha}(\mathbf{x}),\hat{\eta}_{\beta k}(\mathbf{x}')\right]=i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\eta}_{\gamma k}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$
$$\left[\hat{s}_{\alpha}(\mathbf{x}),\hat{\bar{\eta}}_{\beta k}(\mathbf{x}')\right]=i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\bar{\eta}}_{\gamma k}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{\pi}_i(\mathbf{x}),\hat{\eta}_{\alpha k}(\mathbf{x}')\right]=-i\hat{\eta}_{\alpha k}(\mathbf{x})\nabla_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-i\nabla_i\left(\hat{\eta}_{\alpha k}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right)-i\nabla_k\left(\hat{\eta}_{\alpha i}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right),\\
&\left[\hat{\pi}_i(\mathbf{x}),\hat{\bar{\eta}}_{\alpha k}(\mathbf{x}')\right]=-i\hat{\bar{\eta}}_{\alpha k}(\mathbf{x})\nabla_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-i\nabla_i\left(\hat{\bar{\eta}}_{\alpha k}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right)-i\nabla_k\left(\hat{\bar{\eta}}_{\alpha i}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right),\\
&\left[\hat{n}(\mathbf{x}),\hat{\chi}_{\alpha k}(\mathbf{x}')\right]=2\hat{\chi}_{\alpha k}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\ \left[\hat{s}_{\alpha}(\mathbf{x}),\hat{\chi}_{\beta k}(\mathbf{x}')\right]=i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda}\hat{\chi}_{\gamma k}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\\
&\left[\hat{\pi}_i(\mathbf{x}),\hat{\chi}_{\alpha k}(\mathbf{x}')\right]=-i\hat{\chi}_{\alpha k}(\mathbf{x})\nabla_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-2i\nabla_i\left(\hat{\chi}_{\alpha k}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right)-i\nabla_k\left(\hat{\chi}_{\alpha i}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right).
\end{aligned}\tag{2}$$

Якщо ввести унітарні оператори $U_{\theta},U_{\phi},U_{\xi}$, задающиеся формулами наведеними вище по тексту, то отримаємо наступні співвідношення

$$U_{\theta}^{+}\hat{\eta}_{\alpha k}(\mathbf{x})U_{\theta}=\hat{\eta}_{\alpha k}(\mathbf{x}),U_{\theta}^{+}\hat{\bar{\eta}}_{\alpha k}(\mathbf{x})U_{\theta}=\hat{\bar{\eta}}_{\alpha k}(\mathbf{x}),\ U_{\theta}^{+}\hat{\chi}_{\alpha k}(\mathbf{x})U_{\theta}=\hat{\chi}_{\alpha k}(\mathbf{x})e^{2i\theta(\mathbf{x})},$$

$$U_{\phi}^{+}\hat{\eta}_{\alpha k}(\mathbf{x})U_{\phi}=a_{\alpha\beta}(\phi(\mathbf{x}))\hat{\eta}_{\beta k}(\mathbf{x}),\ U_{\phi}^{+}\hat{\bar{\eta}}_{\alpha k}(\mathbf{x})U_{\phi}=a_{\alpha\beta}(\phi(\mathbf{x}))\hat{\bar{\eta}}_{\beta k}(\mathbf{x}),\tag{3}$$

$$U_{\phi}^{+}\hat{\chi}_{\alpha k}(\mathbf{x})U_{\phi}=a_{\alpha\beta}(\phi(\mathbf{x}))\hat{\chi}_{\beta k}(\mathbf{x}),$$

$$U_{\phi}^{+}\hat{\eta}_{\alpha k}(\mathbf{x})U_{\phi}=a_{\alpha\beta}(\phi(\mathbf{x}))\hat{\eta}_{\beta k}(\mathbf{x}),\ U_{\phi}^{+}\hat{\bar{\eta}}_{\alpha k}(\mathbf{x})U_{\phi}=a_{\alpha\beta}(\phi(\mathbf{x}))\hat{\bar{\eta}}_{\beta k}(\mathbf{x}),\tag{4}$$

$$U_{\phi}^{+}\hat{\chi}_{\alpha k}(\mathbf{x})U_{\phi}=a_{\alpha\beta}(\phi(\mathbf{x}))\hat{\chi}_{\beta k}(\mathbf{x}),$$

$$U_{\xi}^{+}\hat{\eta}_{\alpha k}(\mathbf{x})U_{\xi}=\alpha^{2}(\mathbf{x})\alpha_{lk}(\mathbf{x})\hat{\eta}_{\alpha l}(\mathbf{x}'(\mathbf{x})),\ U_{\xi}^{+}\hat{\bar{\eta}}_{\alpha k}(\mathbf{x})U_{\xi}=\alpha^{2}(\mathbf{x})\alpha_{lk}(\mathbf{x})\hat{\bar{\eta}}_{\alpha l}(\mathbf{x}'(\mathbf{x})),$$

$$U_{\xi}^{+}\hat{\chi}_{\alpha k}(\mathbf{x})U_{\xi}=\alpha^{2}(\mathbf{x})\alpha_{lk}(\mathbf{x})\hat{\chi}_{\alpha l}(\mathbf{x}'(\mathbf{x})),$$

де $\alpha(\mathbf{x})=\det(\hat{\alpha}(\mathbf{x})),\ \alpha_{ik}(\mathbf{x})=\partial x_k'(\mathbf{x})/\partial x_i$ -- величини, пов'язані з перетвореннями довільних деформацій.

На основі цих величин, що грають роль параметрів порядку, можна побудувати додаткові термодинамічні параметри. Побудуємо одиничний спіновий вектор d_{α} за формулою:

$$d_{\alpha}(\mathbf{x})=D_{\alpha}(\mathbf{x})/D(\mathbf{x}),\ D_{\alpha}(\mathbf{x})=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\eta_{\beta k}(\mathbf{x})\bar{\eta}_{\gamma k}(\mathbf{x}),\ D^{2}(\mathbf{x})=D_{\beta}(\mathbf{x})D_{\beta}(\mathbf{x}).\tag{5}$$

Цей вектор характеризує спінову анизотропию розглянутого стану. Використовуючи формалізм варійованого операторів, отримаємо комутаційні співвідношення для варійованого оператора $\hat{d}_{\alpha}(\mathbf{x})$:

$$\mathrm{Sp}\hat{\rho}\left[\hat{n}(\mathbf{x}),\hat{d}_{\alpha}(\mathbf{x}')\right]=0,$$

$$\mathrm{Sp}\hat{\rho}\left[\hat{s}_{\alpha}(\mathbf{x}),\hat{d}_{\beta}(\mathbf{x}')\right]=\varepsilon_{\alpha\beta\lambda}\hat{d}_{\lambda}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\tag{6}$$

$$\mathrm{Sp}\hat{\rho}\left[\hat{\pi}_i(\mathbf{x}),\hat{d}_{\alpha}(\mathbf{x}')\right]=-i\hat{d}_{\alpha}(\mathbf{x})\nabla_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

Крім цього дійсного одиничного вектора слід ввести ще один просторовий фазово неінваріантний вектор. Цей новий вектор визначається за формулою:

$$c_i(\mathbf{x},\hat{\rho}) = \chi^{-1/2}(\mathbf{x},\hat{\rho})\chi_{\alpha i}(\mathbf{x},\hat{\rho})d_\alpha(\mathbf{x},\hat{\rho}), \tag{7}$$

де $\chi(\mathbf{x},\hat{\rho}) = \chi_{\alpha i}(\mathbf{x},\hat{\rho})\chi^{i*}_\alpha(\mathbf{x},\hat{\rho})$.

Знову використовуючи метод варійованнного оператора побудуємо комутаційні співвідношення для варійованого оператору $\hat{c}_i(\mathbf{x},\hat{\rho})$:

$$\begin{gathered}\mathrm{Sp}\hat{\rho}\left[\hat{n}(\mathbf{x}),\hat{c}_i(\mathbf{x}',\hat{\rho})\right] = 2\hat{c}_i(\mathbf{x},\hat{\rho})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\\ \mathrm{Sp}\hat{\rho}\left[\hat{s}_\alpha(\mathbf{x}),\hat{c}_i(\mathbf{x}',\hat{\rho})\right] = 0,\\ \mathrm{Sp}\hat{\rho}\left[\hat{\pi}_i(\mathbf{x}),\hat{c}_k(\mathbf{x}',\hat{\rho})\right] = i\left(\nabla_i\hat{c}_k(\mathbf{x},\hat{\rho}) - \nabla_k\hat{c}_i(\mathbf{x},\hat{\rho})\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - ic_i(\mathbf{x},\hat{\rho})\nabla_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').\end{gathered} \tag{8}$$

Виходячи з формули $\dot{A}(\mathbf{x}) = i\ \mathrm{Sp}\hat{\rho}\left[\hat{H},\hat{A}(\mathbf{x})\right] = i\int d^3x'\mathrm{Sp}\hat{\rho}\left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}'),\hat{A}(\mathbf{x})\right]$, отримаємо рівняння для вектора $c_i(\mathbf{x},\hat{\rho})$:

$$\dot{c}_i = 2i\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}c_i + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}\nabla_k c_i + \nabla_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}c_k.$$

Вектор c_i – комплексний вектор. Тому замість цього вектора зручно ввести два дійсних вектора a_i та b_i таким чином щоб $c_i = a_i + ib_i$.

Використовуючи ці два вектори побудуємо дійсні термодинамічні величини, звязані з симетрією стану рівноваги розглянутої фізичної системи. Визначимо зараз одиничні взаємно ортогональні вектори співвідношеннями:

$$m_i(\mathbf{x},\hat{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1+\vec{\xi}(\mathbf{x},\hat{\rho})\vec{\bar{\xi}}(\mathbf{x},\hat{\rho})\right\}^{-1/2}\left(\xi_i(\mathbf{x},\hat{\rho})+\bar{\xi}_i(\mathbf{x},\hat{\rho})\right),$$

$$n_i(\mathbf{x},\hat{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\vec{\xi}(\mathbf{x},\hat{\rho})\vec{\bar{\xi}}(\mathbf{x},\hat{\rho})\right\}^{-1/2}\left(\bar{\xi}_i(\mathbf{x},\hat{\rho})-\xi_i(\mathbf{x},\hat{\rho})\right),$$

де $\xi_i = a_i / a$, $\bar{\xi}_i = b_i / b$.

Крім одиничних векторів також можна визначити три скалярні додаткові термодинамічні величини. Ці величини характеризують взаємне розташування осей симетрії куперівскої пари і розміри цих осей. Назвемо ці параметри конформаційними ступенями свободи. Вони виражаються через параметр порядку формулами:

$$q(\mathbf{x},\hat{\rho}) = \frac{1}{2}\left(1-\vec{\xi}(\mathbf{x},\hat{\rho})\vec{\bar{\xi}}(\mathbf{x},\hat{\rho})\right),$$

$$u(\mathbf{x},\hat{\rho}) = 2a(\mathbf{x},\hat{\rho})\left(1-q(\mathbf{x},\hat{\rho})\right)^{1/2},\ \mathbf{v}(\mathbf{x},\hat{\rho}) = 2b(\mathbf{x},\hat{\rho})q^{1/2}(\mathbf{x},\hat{\rho})$$

де $a(\mathbf{x},\hat{\rho}), b(\mathbf{x},\hat{\rho})$ - модулі дійсної та мнимої частин параметра порядку.

Таким чином рівноважний стан розглянутої рідини характеризується набором адитивних інтегралів руху і додатковими термодинамічними параметрами - одиничними спіновим і просторовим векторами і трьома конформаційними параметрами. Виходячи з визначень всіх цих фізичних величин сформулюємо гідродинамічні рівняння для такої рідини.

Рівняння бездисипативної гідродинаміки

Рівняння бездисипатівної гідродинаміки для надплинної рідини з конформаційними ступенями свободи мають такий вигляд:

$$\dot{\sigma} = -\nabla_k \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} \sigma \right), \ \dot{\zeta}_a = -\nabla_k \zeta_{ak}; a = \alpha, i, 4;$$

$$\dot{d}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \varepsilon}{\partial d_\beta} d_\gamma + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} \nabla_k d_\alpha, \tag{9}$$

$$\dot{m}_i = -2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \ell n_i + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} \nabla_k m_i + f_{kji} \nabla_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k},$$

$$\dot{n}_i = 2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \ell m_i + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} \nabla_k n_i + g_{kji} \nabla_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k},$$

$$\dot{q} = -4 \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \left\{ q(1-q) \right\}^{1/2} o + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} \nabla_k q - 2q(1-q) h_{ik} \nabla_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k},$$

$$\dot{u} = 2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \left\{ q(1-q) \right\}^{-1/2} \kappa + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} \nabla_k u + u r_{ik} \nabla_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k},$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \left\{ q(1-q) \right\}^{-1/2} \varsigma + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} \nabla_k \mathbf{v} + \mathbf{v} s_{ik} \nabla_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k},$$

де нами введені такі позначки

$$\ell = qu / \mathbf{v} + (1-q) \mathbf{v} / u \quad , \quad o = qu / \mathbf{v} - (1-q) \mathbf{v} / u$$

$$f_{jki} = m_i \delta_{kj}^{\perp}(m) - q(m_i n_k + m_k n_i) m_j,$$

$$g_{jki} = n_i \delta_{kj}^{\perp}(n) - (1-q)(m_i n_k + m_k n_i) n_j,$$

$$\kappa = q^2 u^2 / v - (1-q)^2 v, \quad \varsigma = q^2 u - (1-q)^2 v^2 / u,$$

$$h_{ik} = m_i m_k - n_i n_k, \quad r_{ik} = m_i m_k - \left\{ q(1-q) \right\}^{1/2} (m_i n_k + m_k n_i),$$

$$s_{ik} = n_i n_k - \left\{ q(1-q) \right\}^{1/2} (m_i n_k + m_k n_i).$$

Вирази для потоків $\zeta_{ak} \equiv \left\{ j_{\alpha k}, t_{ik}, i_k \right\}$ адитивних інтегралів руху можно записати у вигляді:

$$i_k = 2\ell \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_k n_j} m_j - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_k m_j} n_j \right) + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k},$$

$$j_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} d_\beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_k d_\alpha} + s_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k}, \tag{10}$$

$$t_{ik}=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial d_\alpha}-\nabla_j\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nabla_j d_\alpha}\right)d_\alpha\delta_{ik}+\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial m_j}-\nabla_l\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nabla_l m_j}\right)f_{ikj}+\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_j}-\nabla_l\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nabla_l n_j}\right)g_{ikj}+$$
$$+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nabla_k d_\alpha}\nabla_i d_\alpha+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nabla_k m_j}\nabla_i m_j+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nabla_k n_j}\nabla_i n_j+\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}ur_{ik}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{v}s_{ik}-2q(1-q)\frac{\partial\varepsilon}{\partial q}h_{ik}.$$

Спектри власних коливань

У якості функціоналу енергії ε тут можна взяти модельний вигляд

$$\varepsilon(x)=\frac{\pi_i^2(x)}{2\rho(x)}+\frac{s_\alpha^2(x)}{2\chi(x)}+,$$

$$\Phi\Big(\rho(x),\sigma(x),d_\alpha(x),n_i(x),\nabla n_i(x),m_i(x),\nabla m_i(x),q(x),u(x),\mathbf{v}(x)\Big),$$

$$\rho(x)=mn(x).$$

Для того щоб отримати спектри власних коливань лінеарізуємо рівняння (9) поблизу стану рівноваги. У цьому стані виконуються співвідношення

$$\pi_k=\mathbf{v}_k=s_\alpha=0\ ,\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial d_\alpha}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nabla_k d_\alpha}=\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial d_\alpha\partial\nabla_k d_\alpha}=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_k}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nabla_l n_k}=\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial n_k\partial\nabla_l n_j}=0,\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial m_k}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nabla_l m_k}=\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial m_k\partial\nabla_l m_j}=0,\qquad q=\frac{1}{2}.$$

Ці умови означають, що у стані рівноваги середовище однорідно і не деформовано.
Лінеарізуємо рівняння (9) вони приймуть вигляд

$$\delta\dot\sigma(x,t)=-\sigma\nabla_k\delta\mathbf{v}_k(x,t),\qquad \delta\dot n(x,t)=-n\nabla_k\delta\mathbf{v}_k(x,t),\qquad \delta\dot s_\alpha(x,t)=-s_\alpha(x,t)\nabla_i\delta\mathbf{v}_i(x,t)$$
$$mn\delta\dot{\mathbf{v}}_i(x,t)=-\nabla_l\delta t_{il}(x,t),\qquad \delta\dot d_\alpha(x,t)=\delta\mathbf{v}_k(x,t)\nabla_k d_\alpha(x,t)$$

$$\delta\dot n_j(x,t)=-g_{ilj}\nabla_i\delta\mathbf{v}_l(x,t),\quad \delta\dot m_j(x,t)=-f_{ilj}\nabla_i\delta\mathbf{v}_l(x,t), \tag{12}$$

$$\delta\dot u(x,t)=-r_{ij}\nabla_j\delta\mathbf{v}_i(x,t),\ \ \delta\dot{\mathbf{v}}(x,t)=-s_{ij}\nabla_j\delta\mathbf{v}_i(x,t),\ \ \delta\dot q(x,t)=-h_{ij}\nabla_j\delta\mathbf{v}_i(x,t).$$

Де

$$\delta t_{il}(x,t)=\delta_{il}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\delta n(x,t)+\frac{\partial P}{\partial\sigma}\delta\sigma(x,t)\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial q^2}h_{il}\delta q(x,t)+u\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial u^2}r_{il}\delta u(x,t)+\mathbf{v}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\mathbf{v}^2}s_{il}\delta\mathbf{v}(x,t)$$

$$f_{jki}=m_i\delta_{kj}^{\perp}(m)-\frac{1}{2}\Big(m_in_k+m_kn_i\Big)m_j,$$

$$g_{jki} = n_i \delta_{kj}^{\perp}(n) - \frac{1}{2}\left(m_i n_k + m_k n_i\right) n_j,$$

$$h_{ik} = m_i m_k - n_i n_k, \quad r_{ik} = m_i m_k - \frac{1}{2}\left(m_i n_k + m_k n_i\right),$$

$$s_{ik} = n_i n_k - \frac{1}{2}\left(m_i n_k + m_k n_i\right).$$

Тут ми врахували що q =1/2 але не врахували що $s_\alpha = 0$.

Переходимо в рівняннях (12) до Фур'є-представлення і після підстановки модельного виду для функціоналу енергії та обліку умов (11) отримаємо систему лінеаризованих рівнянь

$$\omega \delta n(k,\omega) = k_l n \mathbf{v}_l(k,\omega), \qquad \omega \delta \sigma(k,\omega) = k_l \sigma \mathbf{v}_l(k,\omega),$$

$$\omega \delta s_\alpha(k,\omega) = 0 \qquad \omega \delta d_\alpha(k,\omega) = k_l d_\alpha \delta \mathbf{v}_l(k,\omega)$$

$$\omega m n \delta \mathbf{v}_i(k,\omega) = k_i \left(\frac{\partial P}{\partial n} \delta n(k,\omega) + \frac{\partial P}{\partial \sigma} \delta \sigma(k,\omega) \right) +$$

$$+ u \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u^2} r_{ij} k_j \delta u(k,\omega) + \mathbf{v} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{v}^2} s_{ij} k_j \delta \mathbf{v}(k,\omega) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q^2} h_{ij} k_j \delta q(k,\omega)$$

$$\omega \delta n_j(k,\omega) = -g_{\lambda l j} k_\lambda \delta \mathbf{v}_l(k,\omega),$$

$$\omega \delta m_j(k,\omega) = -f_{\lambda l j} k_\lambda \delta \mathbf{v}_l(k,\omega),$$

$$\omega \delta u(k,\omega) = r_{ij} k_i \delta \mathbf{v}_j(k,\omega), \tag{13}$$

$$\omega \delta \mathbf{v}(k,\omega) = s_{ij} k_i \delta \mathbf{v}_j(k,\omega),$$

$$\omega \delta q(k,\omega) = h_{ij} k_i \delta \mathbf{v}_j(k,\omega).$$

Спінова підсистема може бути розглянута окремо (вона не коругує з іншими рівняннямиd_α). В просторовій підсистемі в рівнянні (13) для щільності імпульсу можна виключити інші величини і отримати систему лінійних однорідних рівнянь типу

$$\delta \mathbf{v}_j(k,\omega) A_{ij}(k,\omega) = 0$$

$$A_{ij}(k,\omega) \equiv \left(\omega^2 \delta_{ij} - k_i k_j c^2 - R_i(k) R_j(k) - S_i(k) S_j(k) - H_i(k) H_j(k) \right) \tag{14}$$

Тут використані величини

$$c^2 = \frac{n}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \sigma}$$

$$S_i(k) \equiv \mathbf{v}\left[n_i \vec{n}\vec{k} - \frac{1}{2}(n_i \vec{m}\vec{k} + \vec{n}\vec{k}m_i)\right]\sqrt{\mathbf{V}},$$

$$R_i(k) \equiv u\left[m_i \vec{m}\vec{k} - \frac{1}{2}(n_i \vec{m}\vec{k} + \vec{n}\vec{k}m_i)\right]\sqrt{U}, \qquad (15)$$

$$H_i(k) \equiv -\frac{1}{2}\left[n_i \vec{n}\vec{k} - m_i \vec{m}\vec{k}\right]\sqrt{H}.$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u^2} \equiv U, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{v}^2} \equiv V, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q^2} \equiv H.$$

Щоб знайти нетривіальні рішення системи (14) необхідно прирівняти нулю її детермінант. Визначивши детермінант і прирівнявши його до нуля отримаємо дисперсійне рівняння для власних коливань

$$\begin{gathered}\det A = \frac{1}{6}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{mnp}\left(\omega^2\delta_{ij} - k_i k_j c^2 - Q_i^s(k)Q_m^s(k)\right)\times \\ \times\left(\omega^2\delta_{kn} - k_k k_n c^2 - Q_k^r(k)Q_n^r(k)\right)\times \\ \times\left(\omega^2\delta_{lp} - k_l k_p c^2 - Q_l^t(k)Q_p^t(k)\right) \equiv \omega^6 I_6 + \omega^4 I_4 + \omega^2 I_2 + I_0 = 0\end{gathered} \qquad (16)$$

Де

$$R_i(k)R_j(k) + S_i(k)S_j(k) + H_i(k)H_j(k) \equiv Q_i^s(k)Q_j^s(k),$$

$$I_6 = 1,$$

$$I_4 = -k^2c^2 - R_i^2(k) - S_i^2(k) - H_i^2(k) < 0,$$

$$I_2 = c^2\left\{\left[\vec{k}\times\vec{R}\right]^2 + \left[\vec{k}\times\vec{S}\right]^2 + \left[\vec{k}\times\vec{H}\right]^2\right\} > 0, \qquad (17)$$

$$I_0 = -c^2\left\{\left[\vec{k}\left(\vec{R}\times\vec{S}\right)\right]^2 + \left[\vec{k}\left(\vec{R}\times\vec{H}\right)\right]^2 + \left[\vec{k}\left(\vec{S}\times\vec{H}\right)\right]^2\right\} < 0.$$

Рівняння (16) є бікубічним рівнянням, що допускає як аналітичне рішення так і чисельне. У формулах (17) перейдемо до подання сферичних координат $\vec{e}\vec{m} = \sin\theta\cos\phi$, $\vec{e}\vec{n} = \sin\theta\sin\phi$, $\vec{e}\vec{l} = \cos\theta$, $\vec{e} = \vec{k}/k$:,

$$\begin{gathered}I_4(\theta,\phi) = -k^2c^2\left\{1 + \lambda_1\left[1 - \sin^2\theta\sin^2\phi + \frac{1}{4}\sin^2\theta + \sin^2\theta\sin\phi\cos\phi\right] + \right. \\ \left. + \lambda_2\left[1 - \sin^2\theta\cos^2\phi + \frac{1}{4}\sin^2\theta - \sin^2\theta\sin\phi\cos\phi\right] + \lambda_3\sin^2\theta\right\}\end{gathered}$$

$$I_2(\theta,\phi)=k^4c^4\left\{\lambda_1\left[\frac{1}{4}+\sin^2\phi-\sin\phi\cos\phi-\sin^2\theta\sin^2\phi(\sin\phi-\cos\phi)^2\right]+\right.$$
$$+\lambda_2\left[\frac{1}{4}+\cos^2\phi+\sin\phi\cos\phi-\sin^2\theta\cos^2\phi(\sin\phi+\cos\phi)^2\right]+ \quad , \qquad (18)$$
$$\left.+\lambda_3\left[1-\sin^2\theta\cos^2 2\phi\right]\right\}\sin^2\theta$$

$$I_0(\theta,\phi)=-k^6c^6\sin^4\theta\cos^2\theta\left\{\frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-2\phi\right)+\right.$$
$$\left.+\lambda_1\lambda_3\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\phi\right)+\lambda_2\lambda_3\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-\phi\right)\right\}.$$

Тут введені позначення

$$\lambda_1\equiv\frac{u^2}{c^2}U\,,\qquad \lambda_2\equiv\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}V\,,\qquad \lambda_3\equiv\frac{q^2}{c^2}H\,.$$

В результаті отримаємо бікубічне дисперсійне рівняння

$$\omega^6+I_4(\theta,\phi)\omega^4+I_2(\theta,\phi)\omega^2+I_0(\theta,\phi)=0 \qquad (20)$$

Аналіз дискримінанта рівняння (19) призводить до приведеного кубічного рівняння

$$y^3+\tau y+z=0,$$

де

$$\tau=I_2-I_4^2/3 \qquad\qquad z=\frac{2}{27}I_4^3-I_4I_2/3+I_0$$

аналитичне рішення котрого відомо [7]

$$y_k=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}I_4^2-I_2\right)\cos\frac{1}{3}\left(\psi+2(k-1)\pi\right)$$

де

$$\cos\psi=-\frac{z}{2\xi} \qquad\qquad \xi=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}I_4^2-I_2\right)\right]^{3/2}$$

А рішення вихідного рівняння

$$\omega_k^2=y_k-\frac{I_4}{3}\equiv c_k^2(\theta,\phi)k^2,$$

І остаточно

$$\left(\omega^2-c_1^2k^2\right)\left(\omega^2-c_2^2k^2\right)\left(\omega^2-c_3^2k^2\right)=0 \qquad (21)$$

З (21) видно що в такій рідині спостерігаються всі три відомих типів звуку. Крім того слід зазначити що в розглянутому окремому випадку виникають коливання подібні коливань в нематичних рідких кристалах.

Покажемо на закінчення цікаву комп'ютерну графіку акустичних спектрів (залежність швидкостей звуків надплинної фермі-рідини від азимутального та полярного кутів сферичної системи координат):

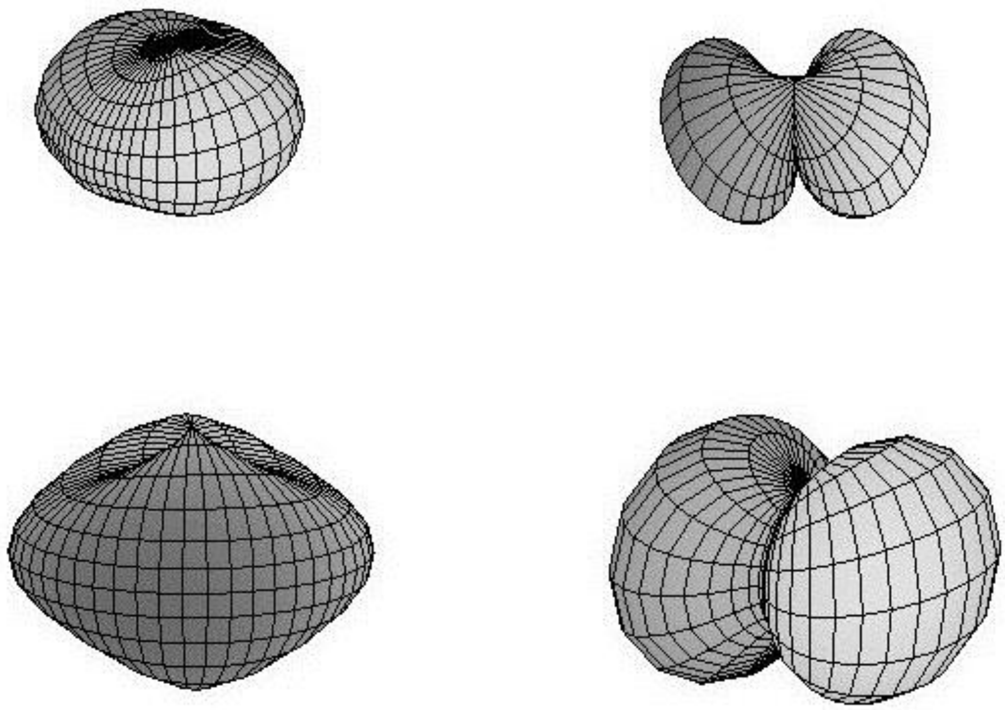

Рис. 1. Швидкості звуків у залежності від кутів сферичної системи координат:

Верхній рядок $Y(\theta,\phi)=\sqrt{2+3\sin^4(\theta)\sin^2(\phi)}$, $Y(\theta,\phi)=\sin(\theta)\cos(\phi)$

Нижній рядок $Y(\theta,\phi)=\sqrt{1+\sin^2(\theta)\cos^2(\phi)}$, $Y(\theta,\phi)=\sqrt{1+10\sin^2(\theta)\sin^2(\phi)}$. При побудові використовували математичний пакет Maple.

Висновки

1. В цій роботі в рамках фермі-рідинного підходу побудовано теорію квантової рідини в А-подібній фазі з урахуванням впливу на її властивості термодинамічних параметров, пов'язаних з конформаційними ступенями свободи. За надплинні свойтва He^3A відповідає куперівське спарювання атомів He^3. Куперівська пара, що утворюється атомами He^3, являє собою молекулоподібне утворення, що має форму і розмір.
2. Для вирішення завдання введені нові параметри порядку на яких будуються додаткові параметри.
3. Побудовано систему рівнянь гідродинаміки для нових типів параметрів порядку, що враховує вплив конформаційних ступенів свободи. До основних рівнянь гідродинаміки додані рівняння для додаткових параметрів.
4. Отримано дисперсійне рівняння для такої рідини. Його розвязками є акустичні коливання, що відповідають трьом звукам в надплинних рідинах. Обчислення велося для модельного функціоналу.
5. За допомогою математичного пакета Maple промодельовані залежності швидкостей звуку від полярного і азимутального кутів сферичної системи координат. В роботі наведені деякі результати.
6. Виявлена аналогія між розглянутою фермі-рідиною і нематичним кристалом. Подібну фазу квантовой рідини можна розглядати як надплинний рідкий кристал.

References

1. M.Yu.Kovalevsky, N.N. Chekanova, A.A. Rozkov. Problems Of Atomic Science And Technology, **6**, 351, (2001).
2. A.A. Rozhkov, N.N. Chekanova, M.Yu. Kovalevsky. Bulletin of KSTU. **2(15)**, 218, (2002). (А.А. Рожков, Н.Н. Чеканова, М.Ю. Ковалевский. Вестник ХГТУ. **2 (15)**, 218 (2002)) [in Russian]
3. V.V. Krasilnikov, S.V. Peletminsky, A.A. Rozhkov, A.A. Yatsenko. Physics Of Elementary Particles And Atomic Nuclei, **19, 6**, 1440, (1988).
4. V.V. Krasilnikov, A.A. Rozhkov, A.A. Yatsenko. FNT, **16, 11**, 1368. (1990).
6. M.Yu. Kovalevsky, A.A. Rozhkov. FNT, **21, 11**, 1138. (1995).
7. M.Yu. Kovalevsky, A.L. Shishkin. Scientific bulletin of BelSU. Ser. Physics, **2(15)**, 59, (2001).
8. I. N. Bronstein, K.A. Semendyaev. A guide to mathematics for engineers and students of technical colleges. (GITTL, Moscow, 1957) 138p. (И. Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. *Руководство по математике для инженеров и студентов технических вузов*. (ГИТТЛ, Москва)) [in Russian]