

N – точечные мультиплоскостные гравитационные линзы

А.Т. Котвицкий, Д.В. Крючков

*Харьковский национальный университет
kotvytskyi@gmail.com, kryuchkov_dm@mail.ru*

В данной работе мы рассматриваем совокупность массивных точек образующих гравитационную линзу. В первом разделе очень кратко вводятся нужные нам основные понятия и определения. Во втором разделе изучена гравитационная линза, состоящая из N точек в одной плоскости. Определен алгоритм построения каустик и критических кривых для такой линзы в случае произвольного распределения точечных масс. С помощью этого алгоритма построены каустики и критические кривые для 3-х и 4-х точечных линз в случая симметричного распределения равных точечных масс. В третьем разделе рассмотрена гравитационная линза, состоящая из P плоскостей. В общем случае введен параметр ξ_0 обобщающий понятие радиуса Эйнштейна-Хвольсона и с его помощью введено полное обезразмеривание уравнения гравитационной линзы. В качестве конкретного примера рассмотрена гравитационная линза, представляющая собой систему из двух плоскостей: в первой плоскости находится бинарная линза, а во второй – одна точечная масса. Приведены каустики и критические кривые для такой гравитационной линзы, а также построен ряд изображений от кругового источника.

Ключевые слова: гравитационная линза, каустика, критическая кривая, радиус Эйнштейна-Хвольсона.

В даній роботі ми розглядаємо сукупність масивних точок, які утворюють гравітаційну лінзу. У першому розділі коротко вводяться потрібні нам основні поняття і визначення. У другому розділі вивчена гравітаційна лінза, що складається з N точок в одній площині. Визначено алгоритм побудови каустик і критичних кривих для такої лінзи у випадку довільного розподілу точкових мас. За допомогою цього алгоритму побудовані каустики та критичні криві для 3-х і 4-х точкових лінз у випадку симетричного розподілу рівних точкових мас. У третьому розділі розглянута гравітаційна лінза, що складається з P площин. У загальному випадку введено параметр ξ_0 , який узагальнює поняття радіуса Ейнштейна Хвольсона, і з його допомогою введено повне обезразмірювання рівняння гравітаційної лінзи. Як конкретний приклад розглянута гравітаційна лінза, що представляє собою систему з двох площин: у першій площині знаходиться бінарна лінза, у другій - одна точкова маса. Наведено каустики і критичні криві для такої гравітаційної лінзи, а також побудовано ряд зображень від кругового джерела.

Ключові слова: гравітаційна лінза, каустика, критична крива, радіус Ейнштейна-Хвольсона.

In the work an aggregate of massive points that is gravitational lens is researched. There is brief overview of the basic concepts and definitions in the first section. In the second section a gravitational lens formed by N points in a single plane is researched. The algorithm for constructing of caustics and critical curves for a lens with an arbitrary allocation of mass points is developed. Also there are caustics and critical curves that constructs by the algorithm for 3th and 4th points lenses with symmetric allocation of equal mass points. In the third section a gravitational lens formed by P planes is researched. The parameter ξ_0 , that generalizes the notion of Einstein Khvolson radius, is introduced. Using the parameter, the dimensionless equation form for P plane lens is obtained. As a concrete example the following two-plane lens is researched: the first plane contains a binary lens, the second plane contains a single mass point. There are caustics and critical curves for the lens and images of circular source.

Key words: gravitational lens, caustic, critical curve, Einstein-Khvolson radius.

Основные понятия и определения

Впервые правильную формулу для угла отклонения луча света, проходящего вблизи точечного источника гравитации (линзы) получил Эйнштейн [1], которую принято записывать в виде

$$g = \frac{2r_g}{\xi} = \frac{4GM}{c^2\xi}, \quad (1)$$

где r_g - гравитационный радиус, M – масса линзы, G - гравитационная постоянная, c - скорость света в вакууме, ξ - минимальное расстояние, на которое свет приближается к линзе (другими словами это расстояние

в плоскости линзы между линзой и изображением наблюдаемого объекта). Подробный вывод этой формулы можно найти во многих классических учебниках, см. например [2-4].

Изобразим ход лучей на рис. 1. Тогда, для малых углов отклонения имеем

$$\eta = \frac{D_s}{D_d} \xi - \frac{2r_g D_{ds}}{\xi}, \quad (2)$$

где η - расстояние в плоскости источника от центра источника до оси линзы (это ось, проходящая через наблюдателя и центр масс линзы); D_s – расстояние между наблюдателем и источником; D_d – расстояние

между наблюдателем и линзой; D_{ds} – расстояние между линзой и источником.

Полученное уравнение в литературе называется уравнением гравитационной линзы и подробно рассмотрено в [5,6].

При $\eta = 0$, то есть когда источник света расположен на оси линзы, имеем квадратное уравнение на ξ . Решение которого принято обозначать как ξ_0

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{4GM \cdot D_{ds} \cdot D_d}{c^2 \cdot D_s}} \quad (3)$$

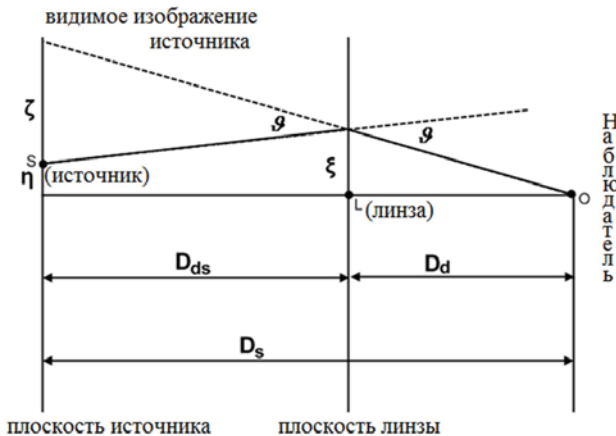


Рис.1. Схема и ход лучей для гравитационной линзы.

Если точечный источник, точечная линза и наблюдатель находятся на одной прямой, то мы будем видеть окружность радиуса ξ_0 . Этот радиус обычно называют радиусом Эйнштейна-Хвольсона [7,8]. Вводя безразмерные параметры

$$x \equiv \frac{\xi}{\xi_0}, \quad y \equiv \frac{D_d \cdot \eta}{D_s \cdot \xi_0} \quad (4)$$

уравнение гравитационной линзы (2) приобретает вид

$$y = x - \frac{1}{x}. \quad (5)$$

Так как распространение света происходит в трехмерном пространстве, то для описания отклонения лучей удобно использовать векторный вид уравнений. Для этого вводят векторный угол отклонения

$$\vec{g} = \frac{\vec{\xi}}{D_{ds}} = \frac{4GM}{c^2 \xi^2} \vec{\xi}, \quad (6)$$

тогда уравнение гравитационной линзы в векторной форме приобретает следующий вид

$$\vec{\eta} = \frac{D_s}{D_d} \vec{\xi} - D_{ds} \frac{4GM}{c^2 \xi^2} \vec{\xi}. \quad (7)$$

Или в безразмерных координатах

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{\vec{x}}{x^2}, \quad (8)$$

где векторы \vec{x} и \vec{y} лежат соответственно в плоскостях линзы и источника.

Одним из центральных понятий для анализа гравитационных линз является $\det[A_{ij}]$, где матрица A_{ij} есть матрица 2x2 и определяется как

$$A_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}. \quad (9)$$

Так как матрица A_{ij} переводит вектор $\Delta \vec{x}$ в вектор $\Delta \vec{y}$, то выражение обратное ее детерминанту является

множителем пропорциональности между площадями отображаемых фигур. Другими словами площадь фигуры в плоскости \vec{x} будет в $1/\det[A_{ij}]$ раз больше площади прообраза данной фигуры в плоскости \vec{y} . Данное выражение носит название коэффициента усиления.

Кривая, в плоскости \vec{x} (плоскости линзы) которая определяется уравнением

$$\det[A_{ij}] \equiv \det \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right] = 0 \quad (10)$$

называется критической кривой. Прообраз этой кривой в плоскости \vec{y} (плоскости источника) называется каустикой.

Физический смысл каустики заключается в том, что когда точечный источник пересекает данную кривую, то коэффициент усиления стремится к бесконечности.

Для одноточечной линзы (когда источник гравитационной линзы представляет собой одиночную точечную массу) - критическая кривая представляет собой окружность (кольцо Эйнштейна), а каустика это точка в начале координат [5,6].

N – точечные одноплоскостные гравитационные линзы

Естественным обобщением одноточечной гравитационной линзы является рассмотрение N – точечных гравитационных линз в одной плоскости. Такое обобщение заметно усложняет задачу и делает невозможным полное аналитическое решение. Однако исследование структуры каустик позволяет лучше понять природу реальных гравитационных линз существующих в нашей Вселенной.

Рассмотрим случай, когда гравитационную линзу можно представить в виде нескольких точек с массами M_i , положение которых определяется векторами $\vec{\xi}_i$ в плоскости линзы, тогда (в приближении слабого поля), полный угол отклонения определяется векторной

суммой углов отклонения от каждой i – ой массы [5,6]

$$\vec{g} = \sum_i \frac{4GM_i}{c^2 |\vec{\xi} - \vec{\xi}_i|^2} (\vec{\xi} - \vec{\xi}_i), \quad (11)$$

где суммирование осуществляется по всем точкам.

Уравнение многоточечной линзы (в безразмерной форме) имеет вид:

$$\vec{y} = \vec{x} - \sum_i \mu_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^2}, \quad (12)$$

где \vec{x}_i - радиус-векторы точечных масс входящих в линзу, $\mu_i = \frac{M_i}{\sum_k M_k}$ - безразмерные массы. Очевидно что

$$\sum_i \mu_i = 1.$$

Случай $N=2$ (бинарные гравитационные линзы) очень детально рассмотрены во многих работах. Бинарные линзы с равными массами и произвольным соотношением между массами изучались во многих работах, см. например [6,9-11]. Так как двухточечные линзы являются достаточно сложными, то случай $N>2$ рассматривают крайне редко. Краткий обзор по этой тематике имеется в [6], а более детально разобрано в [12].

Наш подход отличается от работ [6,12], но также позволяет получить некоторые выражения в общем виде которые затем удобно использовать при численном моделировании.

Из уравнения линзы (12) имеем

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \sum_{n=1}^N \mu^{(n)} \frac{\delta_{ij} \left((x_1 - R_1^{(n)})^2 + (x_2 - R_2^{(n)})^2 \right) - 2(x_i - R_i^{(n)})(x_j - R_j^{(n)})}{\left((x_1 - R_1^{(n)})^2 + (x_2 - R_2^{(n)})^2 \right)^2}, \quad (13)$$

где $\vec{R}^{(n)}$ - радиус вектор n -го источника гравитации в плоскости линзы с координатами $(R_1^{(n)}, R_2^{(n)})$.

Тогда для детерминанта получаем

$$\det \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right] = 1 - \left(\sum_{n=1}^N \mu^{(n)} \frac{(x_1 - R_1^{(n)})^2 - (x_2 - R_2^{(n)})^2}{\left((x_1 - R_1^{(n)})^2 + (x_2 - R_2^{(n)})^2 \right)^2} \right)^2 - 4 \left(\sum_{n=1}^N \mu^{(n)} \frac{(x_1 - R_1^{(n)})(x_2 - R_2^{(n)})}{\left((x_1 - R_1^{(n)})^2 + (x_2 - R_2^{(n)})^2 \right)^2} \right)^2 \quad (14)$$

Введём параметры

$$\begin{aligned} B^{(n)} &= (x_1 - R_1^{(n)})^2 - (x_2 - R_2^{(n)})^2 \\ C^{(n)} &= (x_1 - R_1^{(n)})(x_2 - R_2^{(n)}) \\ D^{(n)} &= \left((x_1 - R_1^{(n)})^2 + (x_2 - R_2^{(n)})^2 \right)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим что

$$B^{(n)2} + 4C^{(n)2} = D^{(n)}. \quad (16)$$

Тогда детерминант принимает вид

$$\det \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right] = 1 - \left[\sum_{n=1}^N \frac{\left(\mu^{(n)} \right)^2}{D^{(n)}} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=k+1}^N \left(\mu^{(k)} \mu^{(l)} \frac{B^{(k)} B^{(l)} + 4C^{(k)} C^{(l)}}{D^{(k)} D^{(l)}} \right) \right]. \quad (17)$$

Окончательно получаем уравнение критической кривой, для произвольной одноплоскостной линзы в виде

$$\prod_{m=1}^N D^{(m)} - \sum_{n=1}^N \left(\mu^{(n)} \right)^2 \prod_{m=1, m \neq n}^N D^{(m)} - 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=k+1}^N \left(\mu^{(k)} \mu^{(l)} (B^{(k)} B^{(l)} + 4C^{(k)} C^{(l)}) \prod_{m=1, m \neq k, m \neq l}^N D^{(m)} \right) = 0 \quad (18)$$

Такой вид уравнения уже не сложно обработать на компьютере. Поэтому, в системе Mathematica была реализована программа, которая строит это уравнение и решает его численным методом.

На рис. 2, 3 приведены каустики и критические кривые для различных трех- и четырехточечных линз.

Мультиплоскостные гравитационные линзы

Следующим шагом в обобщении гравитационных линз является анализ мультиплоскостных линз. Основной идеей при рассмотрении таких линз является, то, что свет, проходя через Вселенную, может испытывать многократное отклонение на разных расстояниях друг от друга. Предполагая, что гравитационные линзы расположены достаточно далеко, их взаимным влиянием можно пренебречь, и мы получаем мультиплоскостную гравитационную линзу.

Ход лучей изображен на рис.4, тогда (для малых углов отклонения) уравнение гравитационной линзы имеет вид [6]

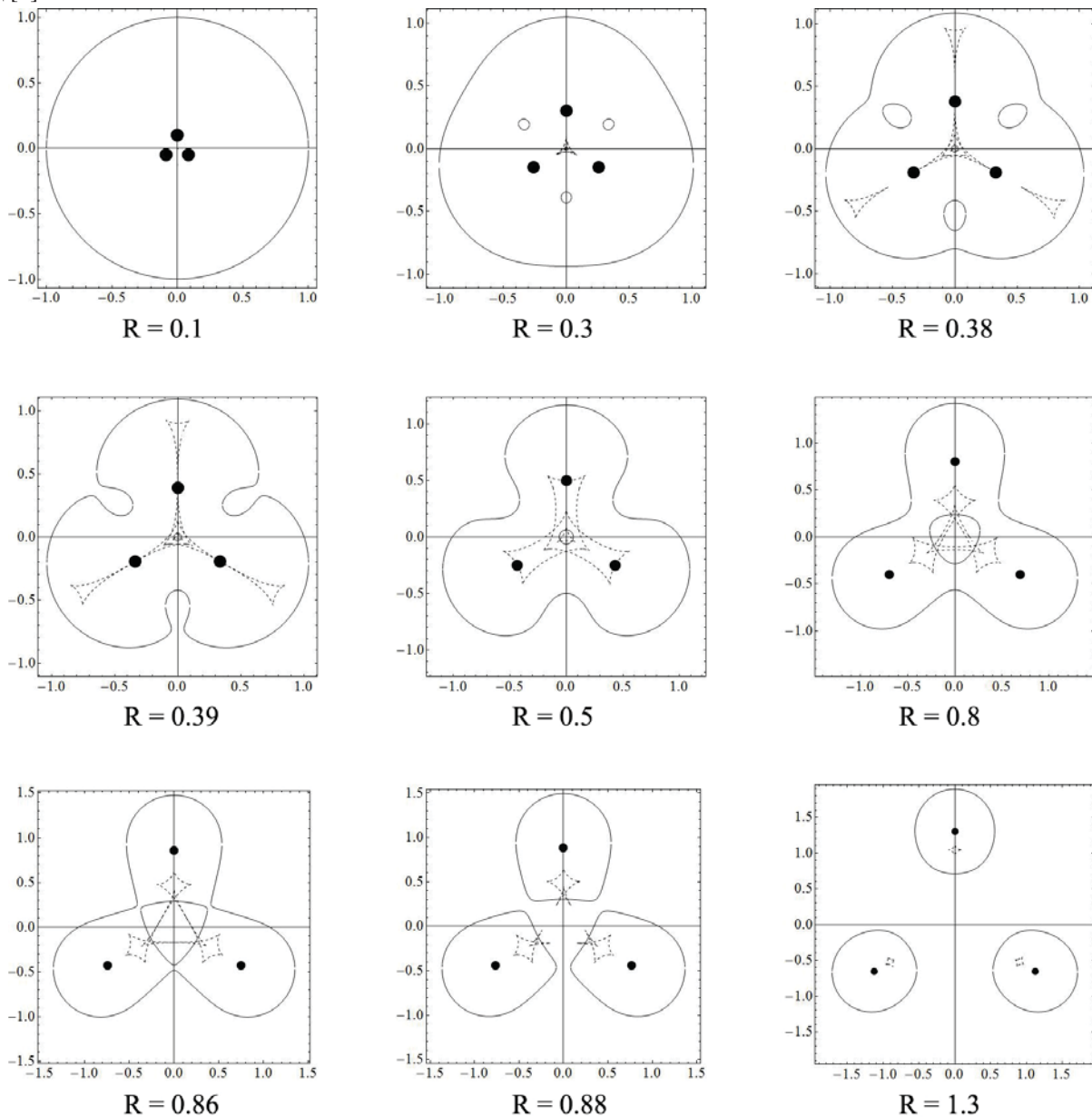


Рис.2. Критические кривые и каустики для трёхточечной одноплоскостной гравитационной линзы. Сплошные линии - критические кривые, штриховые - каустики. Черные точки соответствуют точечным массам. R – расстояние от центра до точечной массы.

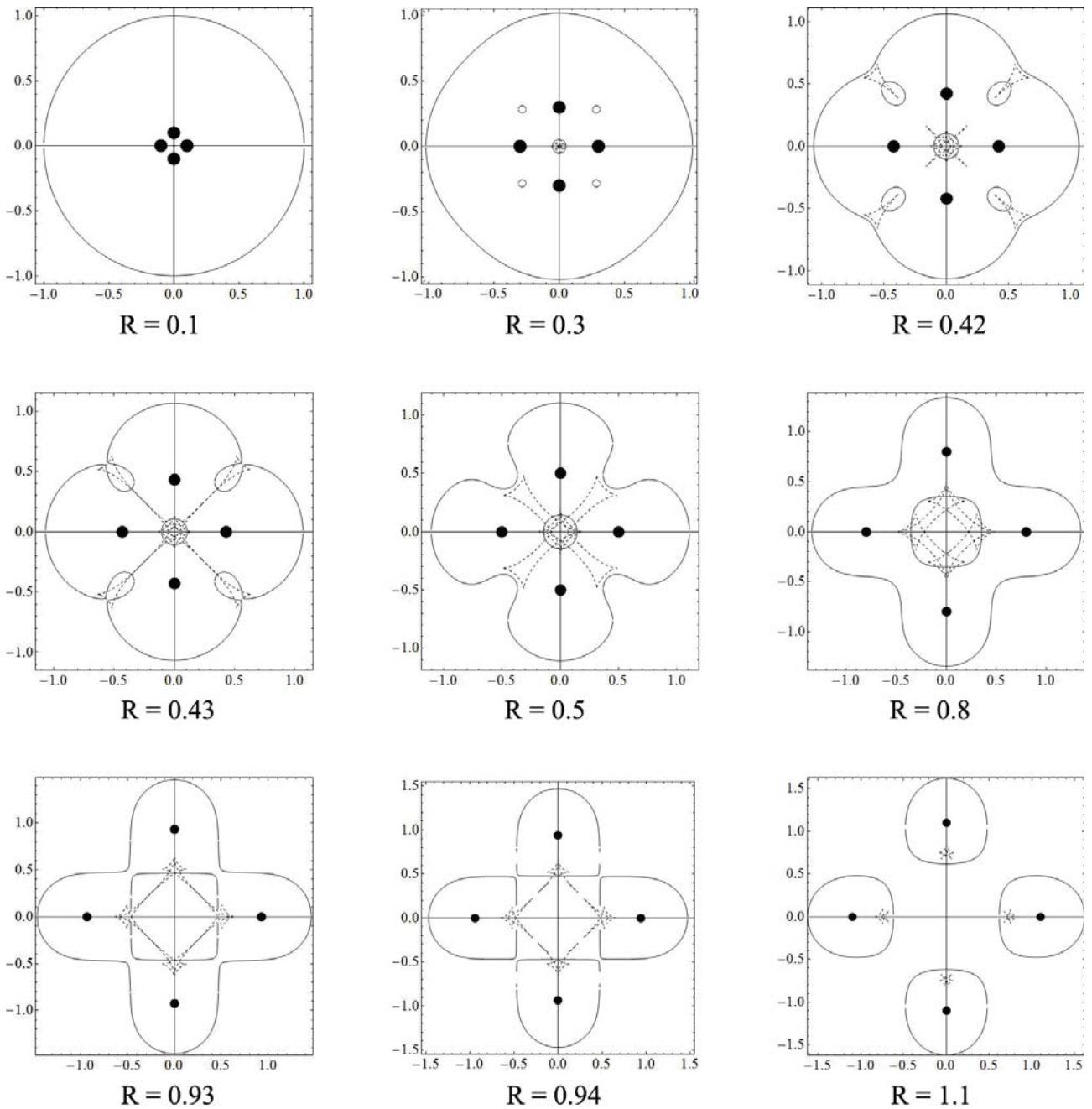


Рис.3. Критические кривые и каустики для четырёхточечной одноплоскостной гравитационной линзы. Сплошные линии - критические кривые, штриховые - каустики. Черные точки соответствуют точечным массам. R – расстояние от центра до точечной массы.

$$\vec{\eta} = \frac{d_s}{d_1} \vec{\xi}^{(1)} - \sum_{i=1}^P \vec{\alpha}^{(i)} d_{is}, \quad (19)$$

где все обозначения понятны из рисунка.

При этом между векторами существует связь определяемая выражением

$$\vec{\xi}^{(j)} = \frac{d_j}{d_1} \vec{\xi}^{(1)} - \sum_{i=1}^{j-1} d_{ij} \vec{\alpha}^{(i)}. \quad (20)$$

Теория мультиплоскостных линз развита в [13,14]. В

работе [15] рассмотрены каустики для приближенного случае, когда расстояния между точками в одной плоскости малы по сравнению с радиусом Эйнштейна – Хвольсона. В данной работе мы обобщаем методику введения безразмерных переменных рассмотренную [16,17] на произвольную P- плоскостную линзу с любым количеством и распределением точечных масс.

Запишем уравнения линзы в виде системы

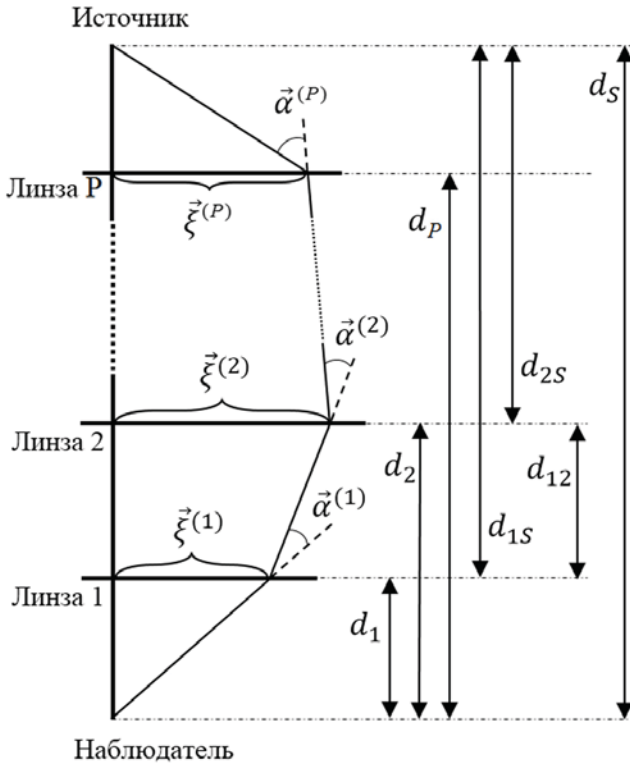


Рис.4. Схема и ход лучей для мультиплоскостной гравитационной линзы.

$$\begin{cases} \vec{\eta} = \frac{d_s}{d_1} \vec{\xi}^{(1)} - \sum_{n=1}^P \vec{\alpha}^{(n)} d_{ns} \\ \vec{\xi}^{(k)} = \frac{d_k}{d_1} \vec{\xi}^{(1)} - \sum_{n=1}^{k-1} d_{nk} \vec{\alpha}^{(n)} \end{cases}, \quad (21)$$

где индекс *n* пробегает по всем плоскостям, а угол отклонения в каждой плоскости определяется выражением

$$\vec{\alpha}^{(n)} = \sum_i^{\text{masses in plane}} \frac{4GM_i^{(n)}}{c^2 |\vec{\xi}^{(n)} - \vec{\Xi}_i^{(n)}|^2} (\vec{\xi}^{(n)} - \vec{\Xi}_i^{(n)}), \quad (22)$$

где $\vec{\Xi}_i^{(n)}$ - координата *i*-й массы в *n*-ой плоскости.

В каждой плоскости перенормируем все массы

$$\mu_i^{(n)} = \frac{d_{ns}}{d_n} \frac{4GM_i^{(n)}}{c^2} \quad (23)$$

и определим полную перенормированную массу как сумму по всем плоскостям и по всем точкам в каждой плоскости

$$\mu_{FULL} = \sum_{n=1}^P \sum_i^{\text{all masses in plane}} \mu_i^{(n)}. \quad (24)$$

Введем безразмерные массы

$$m_i^{(n)} = \frac{\mu_i^{(n)}}{\mu_{FULL}}, \quad (25)$$

а также параметры

$$\xi_0 = d_1 \sqrt{\frac{\mu_{FULL}}{d_s}}, \quad \beta_{nk} = \frac{d_{nk} d_s}{d_{ns} d_k}. \quad (26)$$

При переходе к одноплоскостной линзе ξ_0 становится обычным радиусом Эйнштейна-Хвольсона, а $\beta_{nk} \rightarrow 0$.

Тогда, определяя безразмерные переменные

$$\vec{y} = \frac{\vec{\eta}}{\xi_0} \frac{d_1}{d_s}, \quad \vec{x}^{(n)} = \frac{\vec{\xi}^{(n)}}{\xi_0} \frac{d_1}{d_n} \quad (27)$$

и безразмерные радиус-векторы в каждой плоскости

$$\vec{R}_j^{(n)} = \frac{\vec{\Xi}_j^{(n)}}{\xi_0} \frac{d_1}{d_n} \quad (28)$$

получим следующую систему уравнений для мультиплоскостной гравитационной линзы

$$\begin{cases} \vec{y} = \vec{x}^{(1)} - \sum_{n=1}^P \sum_i^{\text{all masses in plane}} \frac{m_i^{(n)}}{|\vec{x}^{(n)} - \vec{R}_i^{(n)}|^2} (\vec{x}^{(n)} - \vec{R}_i^{(n)}) \\ \vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(1)} - \sum_{n=1}^{k-1} \sum_i^{\text{all masses in plane}} \beta_{nk} \frac{m_i^{(n)}}{|\vec{x}^{(n)} - \vec{R}_i^{(n)}|^2} (\vec{x}^{(n)} - \vec{R}_i^{(n)}) \end{cases} \quad (29)$$

Анализ двухплоскостной линзы

Рассмотрим более детально гравитационную линзу, изображенную на рис. 5. В первой плоскости находится бинарная система с равными массами, во второй — одноточечная гравитационная линза. Для простоты мы предполагаем, что центр масс первой линзы, наблюдатель и вторая точечная линза находятся на одной прямой. Несмотря на кажущуюся простоту такой линзы, она имеет достаточно богатую каустическую структуру.

Уравнение гравитационной линзы в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} \vec{\eta} = \frac{d_s}{d_1} \vec{\xi}^{(1)} - \vec{\alpha}^{(1)} d_{1s} - \vec{\alpha}^{(2)} d_{2s} \\ \vec{\xi}^{(2)} = \frac{d_2}{d_1} \vec{\xi}^{(1)} - d_{12} \vec{\alpha}^{(1)} \end{cases}, \quad (30)$$

где обозначения для всех расстояний соответствуют рис. 4, а углы отклонения определяются следующими выражениями

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 &= \frac{4GM_1}{c^2 |\vec{\xi}_1 - \vec{\Xi}|^2} (\vec{\xi}_1 - \vec{\Xi}) + \frac{4GM_1}{c^2 |\vec{\xi}_1 + \vec{\Xi}|^2} (\vec{\xi}_1 + \vec{\Xi}) \\ \vec{\alpha}_2 &= \frac{4GM_2}{c^2 |\vec{\xi}_2|^2} \vec{\xi}_2 \end{aligned} \quad (31)$$

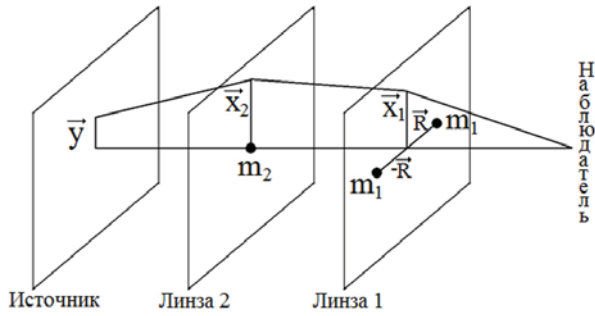


Рис.5. Схема двухплоскостной трёхточечной гравитационной линзы.

В данном случае параметры (23) – (25) определяются как

$$\mu_1 = \frac{d_{1s}}{d_1} \frac{4GM_1}{c^2}, \mu_2 = \frac{d_{2s}}{d_2} \frac{4GM_2}{c^2}, m_i = \frac{\mu_i}{\mu_{FULL}}, \quad (32)$$

где $\mu_{FULL} = 2\mu_1 + \mu_2$, а выражения (26), (27) переходят в

$$\xi_0 = d_1 \sqrt{\frac{\mu_{FULL}}{d_s}}, \beta = \frac{d_{12} d_s}{d_{1s} d_2}, \quad (33)$$

$$\vec{y} = \frac{\vec{\eta}}{\xi_0} \frac{d_1}{d_s}, \vec{x}_1 = \frac{\vec{\xi}_1}{\xi_0}, \vec{x}_2 = \frac{\vec{\xi}_2}{\xi_0} \frac{d_1}{d_2}, \vec{R} = \frac{\vec{\Xi}}{\xi_0} \quad (34)$$

Окончательно уравнение такой линзы принимает следующий вид

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{y} &= \vec{x}_1 - m_1 \left(\frac{\vec{x}_1 - \vec{R}}{|\vec{x}_1 - \vec{R}|^2} + \frac{\vec{x}_1 + \vec{R}}{|\vec{x}_1 + \vec{R}|^2} \right) - m_2 \frac{\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|^2} \\ \vec{x}_2 &= \vec{x}_1 - \beta m_1 \left(\frac{\vec{x}_1 - \vec{R}}{|\vec{x}_1 - \vec{R}|^2} + \frac{\vec{x}_1 + \vec{R}}{|\vec{x}_1 + \vec{R}|^2} \right) \end{aligned} \right., \quad (35)$$

где $2m_1 + m_2 = 1$, вектор \vec{R} имеет координаты $(R; 0)$ и $\beta \in [0, 1]$.

На рис. 6, 7, 8, 9 изображены каустики и критические кривые для некоторого набора параметров, а также представлены ряд изображений, которые дает данная гравитационная линза.

Выводы

Изучена N точечная гравитационная линза в одной плоскости. Предложен алгоритм построения каустик и критических кривых в общем случае отличный от [6,12].

Представлен результат работы этого алгоритма для 3-х и 4-х точечных линз с симметричным

распределением источников гравитации равной массы.

Для гравитационной линзы, состоящей из P плоскостей, для произвольного количества и распределения точечных масс введен параметр ξ_0 обобщающий понятие радиуса Эйнштейна-Хвольсона. С его помощью произведено полное обезразмеривание уравнения гравитационной линзы.

В качестве конкретного примера рассмотрена гравитационная линза, представляющая собой систему из двух плоскостей. В первой плоскости находится бинарная линза с равными массами M_1 , а вторая – содержит одну точку массой M_2 . Для симметричного распределения масс приведен набор каустик и критических кривых соответствующий различному расстоянию между массами в бинарной линзе, а также построен ряд изображений от кругового источника.

1. Эйнштейн А. Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности // Собрание научных трудов в 4 томах. М., 1965. Т. 1. С. 439 – 447.
2. Блюх П.В., Минаков А.А. Гравитационные линзы. Киев. Наукова думка, 1989. С. 240.
3. Вейнберг С. Гравитация и космология. М. Мир, 1975. С. 696.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М. Наука, 1988. Т.2 С. 512.
5. Захаров А.Ф. Гравитационные линзы и микролинзы. М. Янус-К, 1997. С. 328.
6. Schneider P., Ehlers J., Falco E.E. Gravitational lenses. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1999 P. 560.
7. Chwolson O. Über eine mögliche Form fiktiver Doppelsterne // Astr. Nachrichten. – 1924, 221, P. 329 - 330.
8. Einstein A. Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field // Science. – 1936, 84, No. 2188, P. 506 – 507.
9. Schneider P., Weiss A. The two point mass lens: detailed investigation of a special asymmetric lens // Astr. Ap. – 1986, 164, P. 237–259.
10. Asada H. Images for a binary gravitational lens from a single real algebraic equation // Astron. Astrophys. – 2002, 390, P. L11–L14.
11. Cassan A. An alternative parameterisation for binary-lens caustic-crossing events // Astron. Astrophys. – 2008, 491, P.587–595.
12. Witt H. J. Investigation of high amplification events in light curves of gravitationally lensed quasars // Astron. Astrophys. – 1990, 236, P. 311–322.
13. Blandford R.D., Narayan R. Fermat’s principle, caustics, and the classification of gravitational lens images // Astrophys. J. – 1986, 310, P. 568–582.
14. Kovner I. The thick gravitational lens: A lens composed of many elements at different distances // Astrophys. J. – 1987, 316, P. 52–69.
15. Bozza V. Caustics in special multiple lenses // astro-

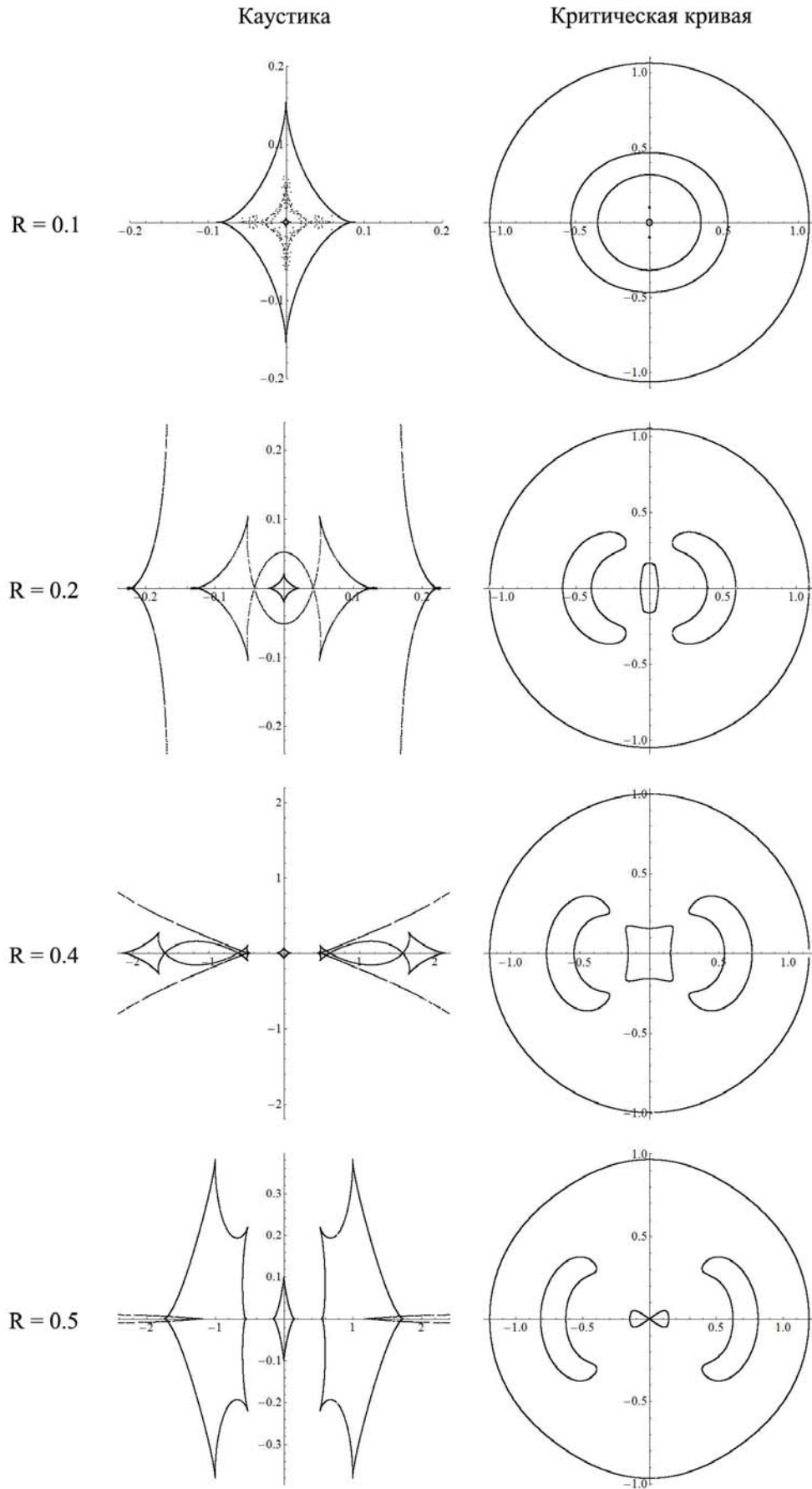


Рис.6. Каустики и критические кривые для двухплоскостной трёхточечной гравитационной линзы с параметрами $m_1 = 0.25$, $m_2 = 0.5$, $\beta = 0.5$ и различными R . Параметры согласованы с уравнением линзы (35).

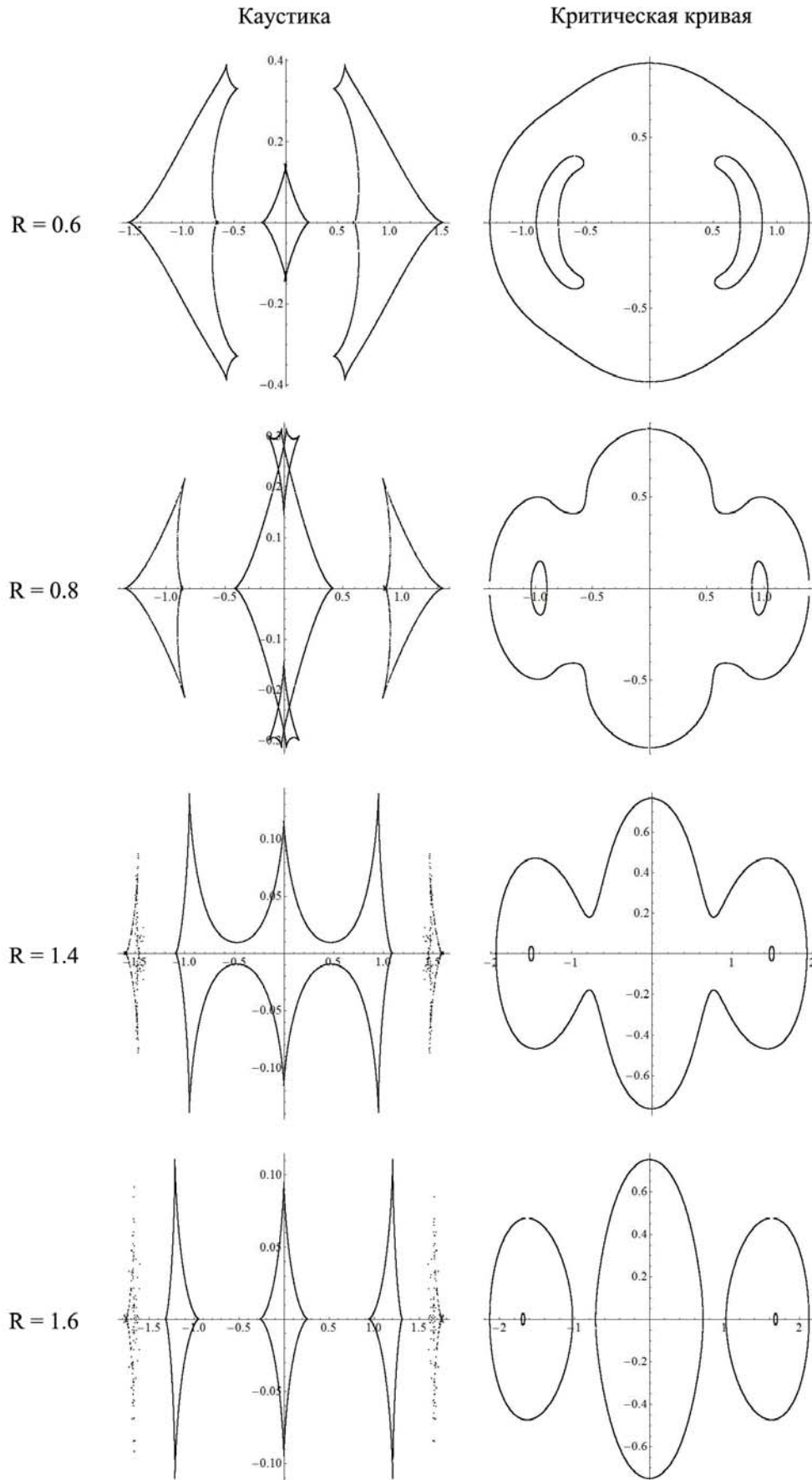


Рис.7. Каустики и критические кривые для двухплоскостной трёхточечной гравитационной линзы с параметрами $m_1 = 0.25$, $m_2 = 0.5$, $\beta = 0.5$ и различными R . Параметры согласованы с уравнением линзы (35).

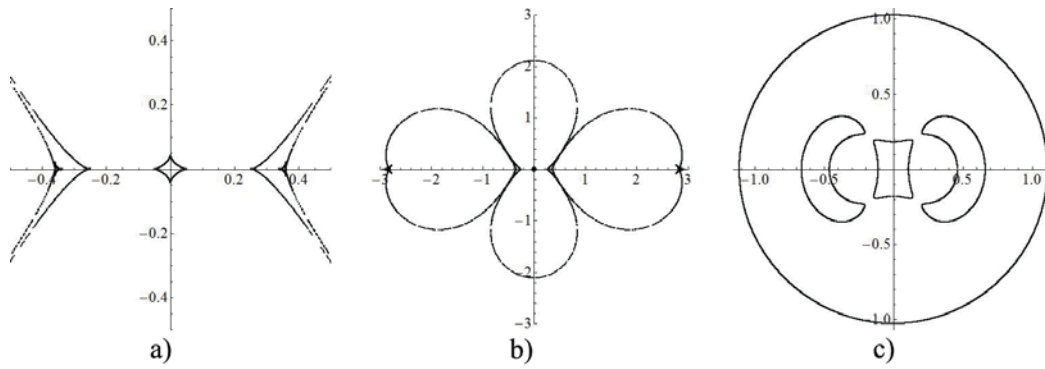


Рис.8. Каустики и критические кривые для двухплоскостной трёхточечной гравитационной линзы с параметрами $m_1 = 0.25$, $m_2 = 0.5$, $\beta = 0.5$, $R = 0.3$. Параметры согласованы с уравнением линзы (35). а – каустика в диапазоне $[-0.5, 0.5]$; б – каустика в диапазоне $[-3, 3]$; с – критическая кривая.

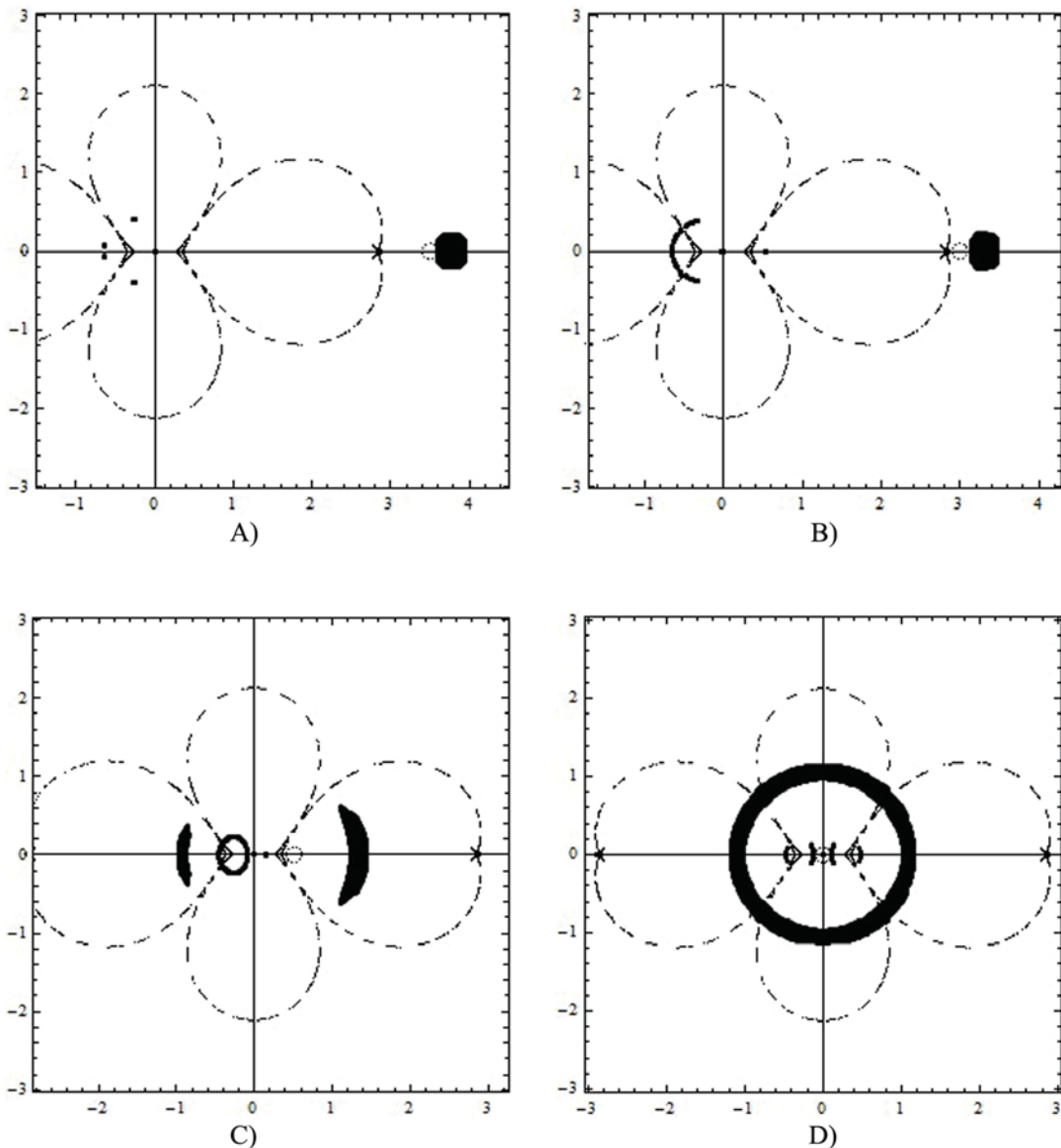


Рис.9. Изображения кругового источника для двухплоскостной трёхточечной гравитационной линзы с параметрами $m_1 = 0.25$, $m_2 = 0.5$, $\beta = 0.5$, $R = 0.3$. Параметры согласованы с уравнением линзы (35). Источник изображён пунктирной окружностью радиусом 0.1, штриховые линии – каустики. А – координаты источника (3.5; 0). В - координаты источника (3.0; 0). С - координаты источника (0.5; 0). D - координаты источника (0; 0).

ph/9910535v2 13 Jan 2000.

16. Erdl H., Schneider P. Classification of the multiple detection two point-mass gravitational lens models and applications of Catastrophe Theory in Lensing // *Astron. Astrophys.* – 1993, 268, P. 453–471.
17. Werner M. C., An J., Evans N. W. On multiple Einstein rings // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2008, 391, P. 668–674.