

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

# ВІСНИК

Харківського національного університету  
імені В.Н. Каразіна

## Серія

«Математичне моделювання.  
Інформаційні технології.  
Автоматизовані системи управління»

**Випуск 44**

Серія заснована 2003 р.

---

# BULLETIN

of V.N. Karazin Kharkiv National University

## Series

«Mathematical Modeling.  
Information Technology.  
Automated Control Systems»

**Issue 44**

First published in 2003

Харків  
2019

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних та технічних наук (наказ МОН України № 1328 від 21.12.2015 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 13 від 23.12.2019 р.)

### **Редакційна колегія:**

**Азаренков М.О. (гол. редактор),**

д.ф.-м.н., академік НАН України, проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора),** д.т.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Лазурик В.Т. (заст. гол. редактора),** д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Споров О.Є. (відповідальний секретар),** к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Замула О. А.,** д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Золотарьов В.О.,** д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ імені Б.І. Веркіна НАН України

**Куклін В.М.,** д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Мацевитий Ю.М.,** д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Рассомахін С. Г.,** д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Руткас А.Г.,** д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В. Н. Каразіна

**Стервоєдов М.Г.,** к.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Толстолузька О. Г.** д.т.н., с.н.с., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Угрюмов М. Л.,** д.т.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Целуйко О.Ф.,** к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Шейко Т.І.,** д.т.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Шматков С. І.,** д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Щербина В.А.,** д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Раскін Л.Г.,** д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"

**Стрельнікова О.О.,** д.т.н., проф. Ін-т проблем машинобудування НАН України

**Соколов О.Ю.,** д.т.н., проф., кафедра прикладної інформатики, університет імені Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Professor of Technical Informatics and Computer Systems, Institute of Informatics, Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of computer science, Dep. of C. S., University of Nice-Sophia Antipolis, France

**Адреса редакційної колегії:** 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

## ЗМІСТ

▪ <b>A. O. Borysyuk</b> .....	<b>4</b>
Flow modelling in a straight rigid-walled duct with two rectangular axisymmetric narrowings. Part 1. A theory	
▪ <b>N.V. Varlamova, V.T. Lazurik, N.G. Styervoedov</b> .....	<b>16</b>
Model and hardware-software implementation of information-measuring system for psychophysical and psychophysiological researches	
▪ <b>А.И. Воронков, В.М. Колодяжный, О.Ю. Лисина, И.Н. Никитченко</b> .....	<b>23</b>
Расчет суммарной площади проходных сечений золотникового воздухораспределителя автомобильного пневмодвигателя	
▪ <b>К.Г. Дегтярьов, О.Л. Зайденварг, Р.П. Москаленко, Ю.В. Науменко</b> .....	<b>34</b>
Розрахункова модель для оцінки довговічності елементів конструкцій за наявності отворів та тріщин	
▪ <b>Д.В. Крютченко</b> .....	<b>43</b>
Моделювання коливань рідини в призматичних резервуарах з хрестовими перегородками	
▪ <b>О.М. Мелкозерова, С.Г. Рассомахин</b> .....	<b>51</b>
Застосування графових баз даних для моделювання соціальних графів	
▪ <b>Р.Г. Пальчиков, О.О. Стрельнікова, О.О. Усатова</b> .....	<b>66</b>
Метод обчислення сингулярних інтегралів в задачах аксіально-симетричних течій Стокса	
▪ <b>В.В. Поричанский, А.В. Приймак, В.В. Яновский</b> .....	<b>74</b>
Статистические свойства сети телефонных абонентов	
▪ <b>О. Ridozub, V. Terokhin, M. Stervoyedov, S. Fomin</b> .....	<b>88</b>
Sensor node for wireless radiation monitoring network	
▪ <b>V.V. Romanuke</b> .....	<b>94</b>
Infinity substitute in exactly minimizing total tardiness in tight-tardy progressive 1-machine scheduling by idling-free preemptions of equal-length jobs	
▪ <b>CONTENTS</b> .....	<b>102</b>

UDC 532.542

## Flow modelling in a straight rigid-walled duct with two rectangular axisymmetric narrowings. Part 1. A theory

A. O. Borysyuk

*Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, 03680, Kyiv 180 MSP, Ukraine**e-mail: aobor@ukr.net*

A method for modelling the flow in a rigid-walled duct with two narrowings has been developed. It has the second order of accuracy in the spatial and the first order of accuracy in the temporal coordinates, provides high stability of the solution, and compared to the similar methods requires much less computational time to obtain a result. According to the method, the stream function and the vorticity are introduced initially, and consequently the transition from the governing equations, as well as the initial and boundary conditions to the proper relationships for the introduced variables is performed. The obtained relationships are rewritten in a non-dimensional form. After that a computational domain and a uniform computational mesh are chosen, and the corresponding discretization of the non-dimensional relationships is performed. Finally, the linear algebraic equations obtained as a result of the discretization are solved.

**Keywords:** *flow, duct, narrowing, stream function, vorticity, pressure.*

Розроблено метод, який дозволяє моделювати течію у прямому плоскому жорсткому каналі з двома прямокутними осесиметричними жорсткими звуженнями. Цей метод має другий порядок точності по просторових і перший порядок точності по часовій координатах, забезпечує високу стійкість розв'язку і потребує значно менше комп'ютерного часу для одержання результату у порівнянні з відповідними методами, які є в науковій літературі. Відповідно до розробленого методу, розв'язування задачі, сформульованої у розділі 2 статті, починається із введення функції течії та завихореності і подальшого переходу від рівнянь Нав'є-Стокса і нерозривності, а також початкових і граничних умов до відповідних співвідношень для введених змінних (підрозділ 3.1 статті). Одержані у такий спосіб співвідношення переписуються у безрозмірній формі (підрозділ 3.2 статті) і дискретизуються у вузлах вибраної просторово-часової сітки інтегрування з малими сталими кроками по часу та координатах (підрозділ 3.3 статті). Після цього розв'язуються лінійні алгебраїчні рівняння для функції течії, завихореності і тиску (підрозділ 3.4 статті), одержані внаслідок проведення зазначеної дискретизації. Щодо останньої, то в ній застосовуються одностороння різниця вперед для дискретизації нестационарного члена рівняння переносу завихореності, а також односторонні різниці проти потоку (для дискретизації конвективного члена цього рівняння) та триточкові шаблони (для дискретизації дифузійного члена зазначеного рівняння та рівнянь Пуассона для функції течії і тиску) по осьовій та поперечній координатах. Дискретизація ж компонент швидкості проводиться на основі відповідних центральних різниць. Що стосується зазначених вище лінійних алгебраїчних рівнянь для шуканих величин, то для функції течії і тиску вони розв'язуються за допомогою ітераційного методу послідовної верхньої релаксації. Натомість одержане алгебраїчне співвідношення для завихореності вже є готовою обчислювальною схемою для визначення цієї величини на основі відомих значень відповідних величин, знайдених у попередній момент часу.

**Ключові слова:** *течія, канал, звуження, функція течії, завихореність, тиск.*

Разработан метод, позволяющий моделировать течение в жестком канале с двумя сужениями. Он имеет второй порядок точности по пространственным и первый порядок точности по временной координатам, обеспечивает высокую устойчивость решения и требует значительно меньше компьютерного времени для получения результата в сравнении с методами подобного типа. Согласно разработанному методу, решение задачи начинается с введения функции течения и завихренности и соответствующего перехода к уравнениям, граничным и начальным условиям для этих переменных. Полученные соотношения переписываются в безразмерном виде и дискретизируются в узлах выбранной равномерной сетки интегрирования. После этого решаются линейные алгебраические уравнения для функции течения, завихренности и давления, полученные вследствие проведения указанной дискретизации.

**Ключевые слова:** *течение, канал, сужение, функция течения, завихренность, давление.*

### 1. Introduction

Study of flows in straight channels is an actual problem in many spheres of science and technology. Studying fluid motions in ducts with local narrowings, such as wall deposits, welding joints, stenosis and so on is of a particular interest. That is due to local changes in the flow structure and character, as well as changes in the flow local and integral characteristics and others are caused by such irregularities in the duct geometry. Those changes can have corresponding consequences (sometimes serious) not only in the vicinity of, but far from the irregularities as well (see, for example, [1-13] and the references therein).

An analysis of appropriate publications shows that flows in channels with local narrowings have been studied rather intensively. In those studies, rigid-walled channels and their narrowings are considered, and the simplest narrowing shapes are chosen. As for the basic flow (i.e., the flow upstream of a (first) narrowing), it is laminar, axisymmetric and steady, whereas fluids are assumed to be homogeneous, incompressible and Newtonian. The other types of channels, their narrowings, fluids and the basic flow are not considered in this paper, because they have been studied not so often compared with the ones

mentioned above. Those allow us to investigate the role of the basic parameters of channel, its narrowing and the basic flow within the framework of the appropriate models as well as significantly simplify solutions for the corresponding problems (see, for example, [1-13]).

Among the results obtained, the numerical methods, which have been developed to study flows near channel narrowings, are of a great importance. In particular, a numerical method to solve a problem of flow in an infinite straight hard-walled channel with two rectangular axisymmetric rigid narrowings has been developed in [14]. That method has a second order of accuracy in the temporal and spatial coordinates, and allows studying the fluid motion with the velocity and pressure as the variables. However, due to the huge amount of mathematical operations, it requires a lot of computational time to obtain a solution.

In this paper, an alternative method has been developed to solve the same problem with the stream function, vorticity, and pressure as the variables. This method has almost the same order of accuracy and a higher stability of solution, and, due to the use of less powerful mathematical apparatus, requires far less computational time to obtain a result in comparison with the mentioned above.

The paper consists of an introduction (Section 1), three main sections and a list of references. It begins with formulating the problem (Section 2) and presenting the corresponding governing equations, as well as the boundary and initial conditions. The solution method to the formulated problem is described in Section 3. The conclusions of the research are summarized in Section 4 and the list of references is presented.

## 2. Formulation of the problem

An immovable infinite flat straight rigid-walled duct of width  $D_0$  is considered (Fig.1). This duct has two rigid rectangular axisymmetric narrowings of diameters  $d_i$  and lengths  $l_i$  ( $i=1,2$ ), which are situated at the distance  $l_{12}$  from one another. In this duct, an incompressible viscous homogeneous Newtonian fluid, of mass density  $\rho$  and kinematic viscosity  $\nu$ , moves. Its flow upstream of the first narrowing (i.e., the basic flow) is steady and laminar, and is characterised by the flow rate  $q$  per unit depth of the duct. It is necessary to study the flow near the narrowings, as well as establish the qualitative and quantitative relationships between its characteristics of interest and the parameters of the basic flow, the duct, its narrowings and the distance between them.

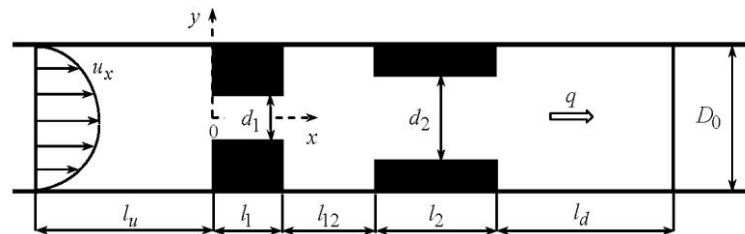


Fig. 1. Geometry of the problem and the corresponding computational domain.

The formulated problem is governed by the two-dimensional Navier-Stokes equations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

and the continuity equation:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (2.2)$$

The boundary conditions are zero fluid velocity at the duct wall,  $S_{ch}$ , and at the surfaces of both narrowings,  $S_i$ , ( $i=1,2$ ):

$$u_x|_{S_{ch}, S_i} = 0, \quad u_y|_{S_{ch}, S_i} = 0. \quad (2.3)$$

Also, due to mass conservation in the duct, the flow rate  $q$  must be the same in all cross sections:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q = U_a D_0. \quad (2.4)$$

In addition, since a laminar basic flow is considered, the parabolic velocity profile is chosen outside the disturbed flow region due to the narrowings (i.e., before the narrowings, where the flow is still undisturbed by them, and far behind them, where the flow is undisturbed again (i.e., where the flow disturbances disappear, and it becomes basic again)):

$$u_x|_{x=-l_u, l_1+l_{12}+l_2+l_d} = U_0 \left(1 - 4y^2 / D_0^2\right), \quad u_y|_{x=-l_u, l_1+l_{12}+l_2+l_d} = 0. \quad (2.5)$$

The pressure  $p$  is assumed to be constant upstream of the first narrowing:

$$p|_{x=-l_u} = \text{const}_u = p_u,$$

and far downstream of the second one:

$$p|_{x=l_1+l_{12}+l_2+l_d} = \text{const}_d = p_d,$$

and the corresponding pressure drop,  $\Delta p = p_u - p_d = \text{const} > 0$ , should ensure the existence of the given laminar regime of the basic flow. Herewith, without loss of generality, the magnitude  $p_d$  can be assumed to be zero<sup>1</sup>, and the pressure  $p_u$  (which now is equal to  $\Delta p$ ), like the pressure in the whole channel, needs to be found.

In addition the normal pressure derivative should be zero at the immovable rigid surfaces of the duct and the narrowings:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}|_{S_{ch}} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}|_{S_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

The initial conditions, in absence of fluid motion in the duct, at the instant of time  $t = 0$  are [14]:

$$u_x|_{t=0} = u_y|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = 0. \quad (2.7)$$

In the relationships (2.1)-(2.7)  $x$  and  $y$  are the rectangular Cartesian coordinates chosen in such a way that the axis  $x$  is directed downstream along the duct axis (see Fig. 1);  $t$  the time;  $u_x$  and  $u_y$  the local fluid velocity components in the directions  $x$  and  $y$ .  $U_0$  and

$$U_a = \frac{1}{D_0} \int_{-D_0/2}^{D_0/2} u_x|_{x=-l_u, l_1+l_{12}+l_2+l_d} dy = \frac{2}{3} U_0$$

are the maximum and averaged (over the channel cross-section) basic flow velocities, respectively. The values of the distances  $l_u$  and  $l_d$  are given in Subsection 3.3 and the vector  $\mathbf{n}$  denotes the outward unit normal to appropriate surface.

### 3. Solution method

A solution to the problem formulated in the former section consists of the four consecutive steps. The stream function and the vorticity are introduced initially, and the corresponding transition from the variables velocity-pressure to the variables stream function-vorticity-pressure is performed. Then the relationships (which have been obtained on the basis of the transition mentioned above) are rewritten in a non-dimensional form. After that a computational domain and the corresponding space-time computational mesh are chosen, and the corresponding discretization of the non-dimensional relationships is carried out. Finally, the linear algebraic equations obtained after the use of the discretization are solved. Let us consider each of these steps separately.

#### 3.1. Transition to the variables stream function-vorticity-pressure

Introducing the stream function,  $\psi$  [15]:

<sup>1</sup> If the value of  $p_d$  is fixed, it is always possible to choose the corresponding value of  $p_u$  in such a way that the pressure drop  $\Delta p$  (which governs fluid motion in the channel) remains unchangeable.

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.1)$$

(which satisfies the equation (2.2)) and the vorticity,  $\omega$ , (which has only one component in case of two-dimensional flow) [15]:

$$\omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (3.2)$$

allows transiting from the equations (2.1), (2.2) for the velocity and the pressure to the equations for the variables  $\psi$ ,  $\omega$  and  $p$ . Indeed, taking derivatives of the first and second equations in (2.1) with respect to  $y$  and  $x$ , respectively, subsequent subtracting the first of the obtained relationships from the second one and taking into account the representation (3.2) gives us the vorticity transfer equation:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla_{(x,y)}^2 \omega, \quad (3.3)$$

where

$$\nabla_{(x,y)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

is the Laplace operator in the coordinates  $x, y$ .

Substituting representation (3.1) into relationship (3.2) yields Poisson's equation for the stream function:

$$\nabla_{(x,y)}^2 \psi = -\omega, \quad (3.4)$$

which directly relates the functions  $\psi$  and  $\omega$  with one another.

Afterwards, differentiating the first equation in the system (2.1) with respect to  $x$  and the second one in (2.1) with respect to  $y$ , adding the obtained relationships to one another and taking into account the continuity equation (2.2) results in Poisson's equation for the pressure:

$$\nabla_{(x,y)}^2 p = -\rho \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (3.5)$$

As for the boundary and initial conditions for the variables  $\psi$ ,  $\omega$  and  $p$ , they can be obtained from the conditions (2.3)-(2.7) with the use of appropriate mathematical operations. In fact, the relationships (2.5) together with (3.1), (3.2) allow us to write conditions for the stream function and the vorticity in the inlet  $x = -l_u$  and the outlet  $x = l_1 + l_{12} + l_2 + l_d$  sections of the disturbed flow region due to the narrowings:

$$\psi|_{x=-l_u, l_1+l_{12}+l_2+l_d} = U_0 y \left( 1 - \frac{4y^2}{3D_0^2} \right), \quad \omega|_{x=-l_u, l_1+l_{12}+l_2+l_d} = \frac{8U_0 y}{D_0^2}. \quad (3.6)$$

From a zero normal component of the fluid velocity on the duct and the walls of narrowings (on the basis of (3.1)) the constancy of the function  $\psi$  follows:

$$\psi|_{S_{ch}^+, S_i^+} = \text{const}_+, \quad \psi|_{S_{ch}^-, S_i^-} = \text{const}_-, \quad i=1,2$$

(here  $S_{ch}^+$  and  $S_i^+$  are the upper walls of the channel and the  $i$ -th narrowing, respectively, and  $S_{ch}^-$  and  $S_i^-$  their lower walls). From here, on the basis of the first relationship in (3.6), we obtain the following conditions

$$\psi|_{S_{ch}^+, S_i^+} = \frac{1}{3} U_0 D_0, \quad \psi|_{S_{ch}^-, S_i^-} = -\frac{1}{3} U_0 D_0, \quad i=1,2. \quad (3.7)$$

The absence of the tangential component of the fluid velocity at the surfaces  $S_{ch}$  and  $S_i$  yields zero values of the first-order normal derivatives and the second-order mixed derivative of the function  $\psi$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{S_{ch}, S_i^h} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{S_i^v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \Big|_{S_{ch}, S_i} = 0, \quad i=1,2 \quad (3.8)$$

(in the conditions (3.8),  $S_i^h$  and  $S_i^v$  denote the horizontal and vertical parts of the surface  $S_i$ , respectively).

The relationships (3.8) together with the equation (3.4) allow us to write the following conditions for the vorticity at the channel and the walls of narrowings:

$$\omega|_{S_{ch}, S_i^h} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{S_{ch}, S_i^h}, \quad \omega|_{S_i^v} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{S_i^v}, \quad i=1,2. \quad (3.9)$$

Regarding the boundary conditions for the pressure, we have (apart from conditions (2.6)) the following two conditions:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{S_i^v} = \rho \left[ \nu \nabla_{(x,y)}^2 u_x - \frac{\partial u_x}{\partial t} \right]_{S_i^v}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{S_{ch}, S_i^h} = \rho \left[ \nu \nabla_{(x,y)}^2 u_y - \frac{\partial u_y}{\partial t} \right]_{S_{ch}, S_i^h}, \quad i=1,2. \quad (3.10)$$

The relationships (3.10) are obtained from the equations (2.1) after the conditions (2.3) were used.

As for the initial conditions for  $\psi$ ,  $\omega$  and  $p$ , they are equal to zero at the instant of time  $t=0$  (see (2.7)-(3.2)):

$$\psi|_{t=0} = 0, \quad \omega|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = 0. \quad (3.11)$$

### 3.2. Non-dimensional relationships

Making computations, it is convenient to deal with non-dimensional analogues of the relationships presented in the previous subsection. Such analogues can be obtained after introducing appropriate scaling coefficients. In this study, the following magnitudes are chosen as the coefficients: the channel width  $D_0$  as the length scale; the cross-sectionally averaged basic flow velocity,  $U_a = q / D_0$ , as the velocity scale; the ratio  $D_0 / U_a$  and the double mean dynamic pressure of the basic flow,  $\rho U_a^2$ , as the time and pressure scales, respectively; the product  $U_a D_0$  serves as the scale for both the stream function and the flow rate; and the ratio  $U_a / D_0$  as the scale for the vorticity.

For these coefficients, the non-dimensional analogues of the representations (3.1), (3.2) and the equations (3.3)-(3.5) have the following forms, respectively

$$U_x = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad U_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad \Omega = \frac{\partial U_y}{\partial X} - \frac{\partial U_x}{\partial Y}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} + U_x \frac{\partial \Omega}{\partial X} + U_y \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla_{(X,Y)}^2 \Omega, \quad (3.13)$$

$$\nabla_{(X,Y)}^2 \Psi = -\Omega, \quad (3.14)$$

$$\nabla_{(X,Y)}^2 P = -\left( \frac{\partial U_x}{\partial X} \right)^2 - 2 \frac{\partial U_x}{\partial Y} \frac{\partial U_y}{\partial X} - \left( \frac{\partial U_y}{\partial Y} \right)^2. \quad (3.15)$$

The dimensionless analogues of boundary conditions (2.4), (2.6), (3.6)-(3.10) are written as

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = 0, \quad Q = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{ch}, S_i} = 0, \quad \Psi|_{X=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} = \frac{3}{2} Y \left( 1 - \frac{4}{3} Y^2 \right),$$

$$\Omega|_{X=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} = 12Y, \quad \Psi|_{S_{ch}^+, S_i^+} = \frac{1}{2}, \quad \Psi|_{S_{ch}^-, S_i^-} = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \Big|_{S_{ch}, S_i^h} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} \Big|_{S_i^v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} \Big|_{S_{ch}, S_i} = 0,$$

$$\Omega|_{S_{ch}, S_i^h} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \Big|_{S_{ch}, S_i^h}, \quad \Omega|_{S_i^v} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \Big|_{S_i^v}, \quad i=1,2, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} \Big|_{S_i^v} = \left[ \frac{1}{\text{Re}} \nabla_{(X,Y)}^2 U_x - \frac{\partial U_x}{\partial T} \right]_{S_i^v}, \quad \frac{\partial P}{\partial Y} \Big|_{S_{ch}, S_i^h} = \left[ \frac{1}{\text{Re}} \nabla_{(X,Y)}^2 U_y - \frac{\partial U_y}{\partial T} \right]_{S_{ch}, S_i^h}.$$



The initial conditions (3.11) for the dimensionless variables  $\Psi$ ,  $\Omega$  and  $P$  are rewritten in the following way

$$\Psi|_{T=0} = 0, \quad \Omega|_{T=0} = 0, \quad P|_{T=0} = 0. \quad (3.17)$$

In the relationships (3.12)-(3.17)  $X = x / D_0$  and  $Y = y / D_0$  are the dimensionless coordinates  $x$  and  $y$ ;  $T = tU_a / D_0$  the dimensionless time;  $U_x = u_x / U_a$  and  $U_y = u_y / U_a$  the dimensionless fluid velocity components in the directions  $x$  and  $y$ ;  $\Psi = \psi / (D_0 U_a)$  and  $\Omega = \omega D_0 / U_a$  the dimensionless stream function and vorticity, respectively;  $P = p / (\rho U_a^2)$  the non-dimensional pressure;  $Re = U_a D_0 / \nu$  the Reynolds number of the cross-sectionally averaged basic flow;  $Q = q / (U_a D_0)$  the non-dimensional flow rate in the channel per its unit depth;  $D_i = d_i / D_0$  and  $L_i = l_i / D_0$  the dimensionless diameters  $d_i$  and lengths  $l_i$  ( $i=1,2$ ), respectively;  $L_u = l_u / D_0$  and  $L_d = l_d / D_0$  the dimensionless distances  $l_u$  and  $l_d$ ;

$$\nabla_{(X,Y)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$$

the Laplace operator in the coordinates  $X, Y$ . It is also taken into account that  $U_a = 2U_0 / 3$  (see after the conditions (2.7)).

### 3.3. Computational domain, computational mesh and discrete relationships

The domain, in which a solution to the formulated problem should be found, is shown in Fig. 1. Its left boundary  $X = -L_u$  is taken upstream of the first narrowing, where the flow is undisturbed by it, and the right boundary,  $X = L_1 + L_{12} + L_2 + L_d$ , behind the second narrowing, where the flow is already undisturbed (i.e., where the flow disturbances disappear, and it redevelops into the basic one). Herewith, for the basic flow velocity the values of the distances  $L_u$  and  $L_d$  considered in this study are assumed to vary in the following ranges [14]

$$L_u \leq 0.5, \quad L_d \leq 12.$$

In the indicated domain, a uniform rectangular computational mesh having small spacings (steps)  $\Delta_X$  and  $\Delta_Y$  in the directions  $X$  and  $Y$ , respectively, is introduced (Fig. 2):

$$X_n = X_{n-1} + \Delta_X, \quad \Delta_X = \text{const}_X \ll 1; \quad Y_m = Y_{m-1} + \Delta_Y, \quad \Delta_Y = \text{const}_Y \ll 1. \quad (3.18)$$

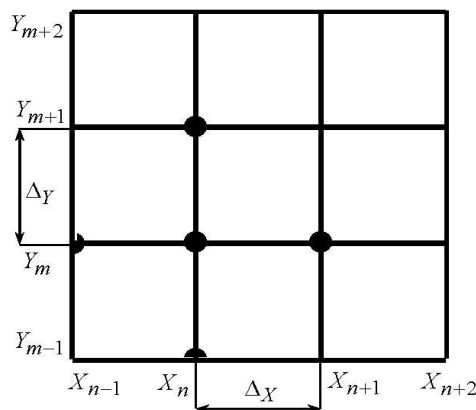


Fig. 2. Computational mesh.

The integration time is divided into small intervals of the constant duration  $\Delta_T$ :

$$T_k = T_{k-1} + \Delta_T = k\Delta_T, \quad \Delta_T = \text{const}_T \ll 1, \quad T_0 = 0. \quad (3.19)$$

Afterwards a discretization of the relationships (presented in the previous subsection) at the nodes  $X_n, Y_m, T_k$  of the computational grid (3.18), (3.19) is carried out. In doing so the values of an arbitrary magnitude  $f$  at the space-time point  $X_n, Y_m, T_k$  are denoted by  $f_{n,m}^k$ :

$$f_{n,m}^k = f(X, Y, T)|_{X=X_n, Y=Y_m, T=T_k}.$$

### Discrete analogues of the dimensionless governing equations

Discrete analogues of the representations (3.12) for the velocity components are obtained after applying the appropriate central differences to them [15]:

$$(U_x)_{n,m}^k = \frac{\Psi_{n,m+1}^k - \Psi_{n,m-1}^k}{2\Delta_Y}, \quad (U_y)_{n,m}^k = -\frac{\Psi_{n+1,m}^k - \Psi_{n-1,m}^k}{2\Delta_X}. \quad (3.20)$$

The relationships (3.20) have the second order of accuracy (a discrete analogue of the representation (3.12) for the vorticity is not presented because it is not used in the paper).

In order to discretize the equation (3.13), we use the two-point temporal onward differencing scheme, as well as the two-point backward differences and the three-point approximations (or the two-dimensional five-point differencing scheme; see Fig. 2) in the corresponding coordinates [15]. Specifically, the application of the two-point temporal onward difference to the non-steady term in (3.13) yields its discrete counterpart of the first order of accuracy:

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{n,m}^k = \frac{\Omega_{n,m}^{k+1} - \Omega_{n,m}^k}{\Delta_T}. \quad (3.21)$$

The convective term of the equation (3.13) is discretized by the two-point backward difference schemes in the coordinates  $X$  and  $Y$  having the second order of accuracy:

$$\begin{aligned} \left(U_x \frac{\partial\Omega}{\partial X}\right)_{n,m}^k &= \begin{cases} (U_x)_{n,m}^k \frac{\Omega_{n,m}^k - \Omega_{n-1,m}^k}{\Delta_X}; (U_x)_{n,m}^k \geq 0, \\ (U_x)_{n,m}^k \frac{\Omega_{n+1,m}^k - \Omega_{n,m}^k}{\Delta_X}; (U_x)_{n,m}^k < 0, \end{cases} \\ \left(U_y \frac{\partial\Omega}{\partial Y}\right)_{n,m}^k &= \begin{cases} (U_y)_{n,m}^k \frac{\Omega_{n,m}^k - \Omega_{n,m-1}^k}{\Delta_Y}; (U_y)_{n,m}^k \geq 0, \\ (U_y)_{n,m}^k \frac{\Omega_{n,m+1}^k - \Omega_{n,m}^k}{\Delta_Y}; (U_y)_{n,m}^k < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.22)$$

As for the diffusive term in (3.13), its discrete analogue of the second order of accuracy is obtained on the basis of the noted five-point scheme:

$$\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2}\right)_{n,m}^k = \frac{\Omega_{n+1,m}^k - 2\Omega_{n,m}^k + \Omega_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2}, \quad \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2}\right)_{n,m}^k = \frac{\Omega_{n,m+1}^k - 2\Omega_{n,m}^k + \Omega_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2}. \quad (3.23)$$

The availability of the relationships (3.21)-(3.23), as well as the use of the expressions (3.20) in (3.22) allow us to write a discrete counterpart of the equation (3.13):

$$\Omega_{n,m}^{k+1} = C_{n,m}^k \Omega_{n,m}^k + C_{n-1,m}^k \Omega_{n-1,m}^k + C_{n+1,m}^k \Omega_{n+1,m}^k + C_{n,m-1}^k \Omega_{n,m-1}^k + C_{n,m+1}^k \Omega_{n,m+1}^k, \quad (3.24)$$

in which the coefficients have the following forms:

$$C_{n,m}^k = \begin{cases} 1 - \alpha_{XY} \left( (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k - (\Delta\Psi)_{n,m,X}^k \right) - 2\alpha_X - 2\alpha_Y; (U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ 1 - \alpha_{XY} \left( (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + (\Delta\Psi)_{n,m,X}^k \right) - 2\alpha_X - 2\alpha_Y; (U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ 1 + \alpha_{XY} \left( (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + (\Delta\Psi)_{n,m,X}^k \right) - 2\alpha_X - 2\alpha_Y; (U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ 1 + \alpha_{XY} \left( (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k - (\Delta\Psi)_{n,m,X}^k \right) - 2\alpha_X - 2\alpha_Y; (U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 C_{n-1,m}^k &= \begin{cases} \alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + \alpha_X;(U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + \alpha_X;(U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ \alpha_X;(U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_X;(U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases} \\
 C_{n+1,m}^k &= \begin{cases} \alpha_X;(U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_X;(U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ -\alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + \alpha_X;(U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ -\alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + \alpha_X;(U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases} \\
 C_{n,m-1}^k &= \begin{cases} -\alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k + \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ -\alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k + \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases} \\
 C_{n,m+1}^k &= \begin{cases} \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k + \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k + \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases}
 \end{aligned}$$

Here the magnitudes  $\alpha_X$ ,  $\alpha_Y$ ,  $\alpha_{XY}$  are the appropriate ratios of the steps of the space-time computational grid (3.18), (3.19):

$$\alpha_X = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta_T}{\Delta_X^2}, \quad \alpha_Y = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta_T}{\Delta_Y^2}, \quad \alpha_{XY} = \frac{\Delta_T}{2\Delta_X\Delta_Y},$$

and  $(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k$  and  $(\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k$  the increases of the function  $\Psi$  in the  $X$  and  $Y$  directions of the grid, respectively:

$$(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k = \Psi_{n+1,m}^k - \Psi_{n-1,m}^k, \quad (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k = \Psi_{n,m+1}^k - \Psi_{n,m-1}^k.$$

As for the discrete analogues of Poisson's equations (3.14) (for the stream function) and (3.15) (for the pressure), they look similar:

$$\frac{\Psi_{n+1,m}^k - 2\Psi_{n,m}^k + \Psi_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} + \frac{\Psi_{n,m+1}^k - 2\Psi_{n,m}^k + \Psi_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} = -\Omega_{n,m}^k, \quad (3.25)$$

$$\frac{P_{n+1,m}^k - 2P_{n,m}^k + P_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} + \frac{P_{n,m+1}^k - 2P_{n,m}^k + P_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} = - \left[ \left( \frac{\partial U_x}{\partial X} \right)^2 + 2 \frac{\partial U_x}{\partial Y} \frac{\partial U_y}{\partial X} + \left( \frac{\partial U_y}{\partial Y} \right)^2 \right]_{n,m}^k. \quad (3.26)$$

The relationships (3.25) and (3.26) have the second order of accuracy and are obtained after application of the two-dimensional five-point differencing scheme to the equations (3.14), (3.15).

**The discrete analogues of the dimensionless boundary conditions and their application to the equations (3.20), (3.24)-(3.26)**

The discrete analogues of the dimensionless boundary conditions for the stream function and the vorticity from the relationships (3.16) are written as

$$\Psi_{n,m}^k \Big|_{X=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} = \frac{3}{2}Y \left(1 - \frac{4}{3}Y^2\right), \quad \Psi_{n,m}^k \Big|_{S_{ch, S_i}^+} = \frac{1}{2}, \quad \Psi_{n,m}^k \Big|_{S_{ch, S_i}^-} = -\frac{1}{2},$$

$$\left(\Psi_{n,m+1}^k - \Psi_{n,m-1}^k\right)_{S_{ch, S_i}^h} = 0, \quad \left(\Psi_{n+1,m}^k - \Psi_{n-1,m}^k\right)_{S_i^v} = 0,$$

$$\Omega_{n,m}^k \Big|_{X=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} = 12Y, \quad \Omega_{n,m}^k \Big|_{S_{ch, S_i}^h} = -\frac{\Psi_{n,m+1}^k - 2\Psi_{n,m}^k + \Psi_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} \Big|_{S_{ch, S_i}^h},$$

$$\Omega \Big|_{S_i^v} = -\frac{\Psi_{n+1,m}^k - 2\Psi_{n,m}^k + \Psi_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} \Big|_{S_i^v}, \quad i=1,2.$$

Regarding the pressure  $P$ , the discrete counterparts of the corresponding boundary conditions from (3.16) have the following forms:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}\right)_{n,m}^k \Big|_{S_{ch, S_i}} = 0, \quad i=1,2,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_{n,m} \Big|_{S_i^v} = \left[ \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{(U_x)_{n+1,m}^k - 2(U_x)_{n,m}^k + (U_x)_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} + \frac{(U_x)_{n,m+1}^k - 2(U_x)_{n,m}^k + (U_x)_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} \right) - \frac{(U_x)_{n,m}^{k+1} - (U_x)_{n,m}^k}{\Delta_T} \right]_{S_i^v},$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_{n,m} \Big|_{S_{ch, S_i}^h} = \left[ \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{(U_y)_{n+1,m}^k - 2(U_y)_{n,m}^k + (U_y)_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} + \frac{(U_y)_{n,m+1}^k - 2(U_y)_{n,m}^k + (U_y)_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} \right) - \frac{(U_y)_{n,m}^{k+1} - (U_y)_{n,m}^k}{\Delta_T} \right]_{S_{ch, S_i}^h}$$

(the representation (3.20) should be used for the velocity components).

These relationships allow us to find the values of all terms of the equations (3.20), (3.24)-(3.26) on the boundary of the chosen computational domain (see the very beginning of Subsection 3.3).

**The discrete analogues of the dimensionless initial conditions and their application to the equations (3.20), (3.24)-(3.26)**

The discrete analogues of the dimensionless initial conditions (3.17) are as follows:

$$\Psi_{n,m}^k \Big|_{k=0} = 0, \quad \Omega_{n,m}^k \Big|_{k=0} = 0, \quad P_{n,m}^k \Big|_{k=0} = 0.$$

They allow computing the values of all terms of the equations (3.20), (3.24)-(3.26) at the initial instant of time in the computational domain.

### 3.4. A solution of the equations (3.20), (3.24)-(3.26)

The analysis of the equations (3.24), (3.25) shows that

- at first sight, due to nonlinearity of the right part in (3.24) (whose terms depend of the products  $\Psi\Omega$  at the appropriate points of the space-time grid (3.18), (3.19)), this equation is nonlinear;
- they are coupled.

However, more detailed study of the equation (3.24) indicates that all terms in its right part are the known magnitudes (because they are computed at the previous time stage,  $T = T_k$ , and at the initial instant of time they are established (see above)). Therefore, the relationship (3.24) is a computational scheme (rather than an equation) to determine the vorticity values,  $\Omega_{n,m}^{k+1}$ , on the basis of its known right part.

Accordingly, the system (3.24), (3.25) is not a system of coupled algebraic equations.

The availability of the vorticity values at all the nodes of the integration mesh (3.18), (3.19) (which are obtained on the basis of the scheme (3.24)) allows proceeding to solving the system of linear algebraic equations (i.e., SLAE) (3.25) with a known right part.

In scientific literature, direct and iteration methods are applied to solve SLAE. The former are used in case of SLAE of small dimensions, and present good results. However, when systems of equations are of big dimensions and, in addition, their matrices are rarefied, direct methods require a lot of both time and computational memory. Therefore, their application is unsuitable. Iteration methods need much less computational memory and time to solve SLAE of big dimensions, keep their matrices rarefied (if such a property is present), and give satisfactory results [15].

Taking that into account, as well as the dimension and the rarefaction degree of the matrix of system (3.25), the successive over-relaxation iteration method is chosen [15]. This method has a second order of accuracy, and its computational scheme for SLAE (3.25) has the following form

$$\Psi_{n,m}^{k+1} = (1-\gamma)\Psi_{n,m}^k + \frac{\gamma}{2(1+\beta^2)} \left( \Psi_{n+1,m}^k + \Psi_{n-1,m}^k + \beta^2\Psi_{n,m+1}^k + \beta^2\Psi_{n,m-1}^k + \Delta_X^2\Omega_{n,m}^k \right) \quad (4.1)$$

(here  $\gamma$  is the relaxation parameter varying in the ranges  $1 < \gamma \leq 2$ , and  $\beta = \Delta_X / \Delta_Y$  the ratio of the steps of the grid (3.18)). It could be seen that all terms on the right-hand side of the scheme (4.1) are known values. Therefore, the magnitudes  $\Psi_{n,m}^{k+1}$  are found by performing the operations indicated on the right side of (4.1).

The found values of the function  $\Psi$  let us determine (on the basis of (3.20)) the corresponding values of the velocity components  $U_x$  and  $U_y$ , and substitute these values into the right part of the system (3.26). Afterwards the successive over-relaxation method is applied to solve SLAE (3.26):

$$P_{n,m}^{k+1} = (1-\gamma)P_{n,m}^k + \frac{\gamma}{2(1+\beta^2)} \left( P_{n+1,m}^k + P_{n-1,m}^k + \beta^2P_{n,m+1}^k + \beta^2P_{n,m-1}^k + \Delta_X^2 S_{n,m}^k \right), \quad (4.2)$$

$$S_{n,m}^k = \left[ \left( \frac{\partial U_x}{\partial X} \right)^2 + 2 \frac{\partial U_x}{\partial Y} \frac{\partial U_y}{\partial X} + \left( \frac{\partial U_y}{\partial Y} \right)^2 \right]_{n,m}^k.$$

As in the computational schemes (3.24) and (4.1), all terms on the right part of (4.2) are the known values. This allows computing the magnitudes  $P_{n,m}^{k+1}$  in the left part of SLAE (4.2).

## 4. Conclusions

1. A method to predict flow in a straight rigid-walled duct with two rectangular axisymmetric narrowings has been developed. It has the second order of accuracy in the spatial and the first order of accuracy in the temporal coordinates, provides high stability of a solution, and requires much less computational time to obtain a result as compared to the methods available in scientific literature.

2. According to the method, the problem is solved by means of a) introducing the stream function and the vorticity with the corresponding transition from the Navier-Stokes and continuity equations, as well as the formulated initial and boundary conditions to appropriate relationships for the introduced variables; b) rewriting those relationships in a non-dimensional form; c) choosing appropriate computational domain and space-time computational mesh, and performing a corresponding discretization of the non-

dimensional relationships; d) solving the linear algebraic equations obtained after the use of the indicated discretization.

3. Performing the discretization, we apply the two-point temporal onward difference for the unsteady term, as well as the two-point backward differences (for the convective term of the non-linear vorticity equation) and the three-point approximations (for the diffusive term of the noted equation and Poisson's equations for the stream function and the pressure) in the axial and cross-flow coordinates. For discretization of the velocity components, the appropriate central differences are applied.

4. The linear algebraic equations for the stream function and the pressure (which are obtained after performing the discretization) are solved by the iterative successive over relaxation method. The obtained algebraic relationship for the vorticity is a complete computational scheme to determine this magnitude on the basis of the known values found at the previous instant of time.

#### REFERENCES

1. F. Azimpour, E. Caldwell, P. Tawfik, S. Duval, R.F. Wilson, "Audible coronary artery stenosis". *The American Journal of Medicine*, Vol. 125, pp. 515-521, 2016.
2. H.T. Banks, S. Hu, Z.R. Kenz, C. Kruse, S. Shaw, J. Whiteman, M.P. Brewin, S.E. Greenwald, M.J. Birch, "Model validation for a noninvasive arterial stenosis detection problem". *Mathematical Biosciences and Engineering*, Vol. 11, pp. 427-448, 2014.
3. J.H. Seo, R. Mittal, "A coupled flow-acoustic computational study of bruits from a modeled stenosed artery". *Medical and Biological Engineering and Computing*, Vol. 50, pp. 1025-1035, 2012.
4. S.S. Varghese, S.H. Frankel, "Numerical modeling of pulsatile turbulent flow in stenotic vessels". *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 125, pp. 445-460, 2013.
5. M. Jahangiri, M. Saghafian, M.R. Sadeghi, "Numerical study of turbulent pulsatile blood flow through stenosed artery using fluid-solid interaction", *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, Vol. 15, pp. 1-10, 2015.
6. R. Tabe, F. Ghalichi, S. Hossainpour, K. Ghasemzadeh, "Laminar-to-turbulence and relaminarization zones detection by simulation of low Reynolds number turbulent blood flow in large stenosed arteries", *Biomedical Materials and Engineering*, Vol. 27, pp. 119-129, 2016.
7. A.O. Borisjuk, "Experimental study of wall pressure fluctuations in rigid and elastic pipes behind an axisymmetric narrowing", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 26, pp. 658-674, 2010.
8. J. Garcia, O.R. Marrufo, A.O. Rodriguez, E. Larose, P. Pibarot, L. Kadem, "Cardiovascular magnetic resonance evaluation of aortic stenosis severity using single plane measurement of effective orifice area", *Journal of Cardiovascular Magnetic Resonance*, Vol. 12, pp. 1-12, 2012.
9. J. Garcia, M. Markl, S. Schnell, B. Allen, P. Entezari, P. Mahadevia, S.C. Malaisrie, P. Pibarot, J. Carr, A.J. Barker, "Evaluation of aortic stenosis severity using 4D flow jet shear layer detection for the measurement of valve effective orifice area", *Magnetic Resonance Imaging*, Vol. 32, pp. 891-898, 2014.
10. N. Srivastava, "Analysis of flow characteristics of the blood flowing through an inclined tapered porous artery with mild stenosis under the Influence of an inclined magnetic field", *Journal of Biophysics*, Vol. 14, pp. 1-9, 2014.
11. J.V. Reddy, D. Srikanth, "The polar fluid model for blood flow through a tapered artery with overlapping stenosis: effects of catheter and velocity slip", *Applied Bionics and Biomechanics*, Vol. 15, pp. 1-12, 2015.
12. A. Zaman, N. Ali, O.A. Beg, "Numerical simulation of unsteady micropolar hemodynamics in a tapered catheterized artery with a combination of stenosis and aneurysm", *Medical and Biological Engineering and Computing*, Vol. 54, pp. 1423-1436, 2016.
13. N. Ali, A. Zaman, M. Sajid, J.J. Nieto, A. Torres, "Unsteady non-Newtonian blood flow through a tapered overlapping stenosed catheterized vessel", *Mathematical Biosciences*, Vol. 269, pp. 94-103, 2015.
14. A.O. Borisjuk, "A method to solve a problem of flow in a channel with two axisymmetric narrowings", *Science-Based Technologies*, Vol. 38, pp. 270-278, 2018. [in Ukrainian]
15. J. H. Ferziger, M. Peri'c, *Computational methods for fluid dynamics*, 3rd ed. Berlin: Springer, 2002. 424 p.

1. Azimpour F., Caldwell E., Tawfik P. Duval S., Wilson R.F. Audible coronary artery stenosis. *The American Journal of Medicine*, 2016. Vol. 125. P. 515-521.
2. Banks H.T., Hu S., Kenz Z.R., Kruse C., Shaw S., Whiteman J., Brewin M.P., Greenwald S.E., Birch M.J. Model validation for a noninvasive arterial stenosis detection problem. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2014. Vol. 11. P. 427-448.
3. Seo J.H., Mittal R. A coupled flow-acoustic computational study of bruits from a modeled stenosed artery. *Medical and Biological Engineering and Computing*. 2012. Vol. 50. P. 1025-1035.
4. Varghese S.S., Frankel S.H. Numerical modeling of pulsatile turbulent flow in stenotic vessels. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2013. Vol. 125. P. 445-460.
5. Jahangiri M., Saghafian M., Sadeghi M.R. Numerical study of turbulent pulsatile blood flow through stenosed artery using fluid-solid interaction. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2015. Vol. 15. P. 1-10.
6. Tabe R., Ghalichi F., Hossainpour S., Ghasemzadeh K. Laminar-to-turbulence and relaminarization zones detection by simulation of low Reynolds number turbulent blood flow in large stenosed arteries. *Biomedical Materials and Engineering*. 2016. Vol. 27. P. 119-129.
7. Borisjuk A.O. Experimental study of wall pressure fluctuations in rigid and elastic pipes behind an axisymmetric narrowing. *Journal of Fluids and Structures*. 2010. Vol. 26. P. 658-674.
8. Garcia J., Marrufo O.R., Rodriguez A.O., Larose E., Pibarot P., Kadem L. "Cardiovascular magnetic resonance evaluation of aortic stenosis severity using single plane measurement of effective orifice area. *Journal of Cardiovascular Magnetic Resonance*. 2012. Vol. 12. P. 1-12.
9. Garcia J., Markl M., Schnell S., Allen B., Entezari P., Mahadevia P., Malaisrie S.C., Pibarot P., Carr J., Barker A.J. Evaluation of aortic stenosis severity using 4D flow jet shear layer detection for the measurement of valve effective orifice area. *Magnetic Resonance Imaging*. 2014. Vol. 32. P. 891-898.
10. Srivastava N. Analysis of flow characteristics of the blood flowing through an inclined tapered porous artery with mild stenosis under the Influence of an inclined magnetic field. *Journal of Biophysics*. 2014. Vol. 14. P. 1-9.
11. Reddy J.V., Srikanth D. The polar fluid model for blood flow through a tapered artery with overlapping stenosis: effects of catheter and velocity slip. *Applied Bionics and Biomechanics*. 2015. Vol. 15. P.1-12.
12. Zaman A., Ali N., Beg O.A. Numerical simulation of unsteady micropolar hemodynamics in a tapered catheterized artery with a combination of stenosis and aneurysm. *Medical and Biological Engineering and Computing*. 2016. Vol. 54. P. 1423-1436.
13. Ali N., Zaman A., Sajid M., Nieto J.J., Torres A. Unsteady non-Newtonian blood flow through a tapered overlapping stenosed catheterized vessel. *Mathematical Biosciences*. 2015. Vol. 269. P. 94-103.
14. Борисюк А.О. Метод розв'язування задачі про течію в каналі з двома осесиметричними звуженнями. *Наукоємні Технології*. 2018. Том 38ю С. 270-278.
15. Ferziger J. H., Peri'с M. Computational methods for fluid dynamics, 3rd ed. Berlin: Springer, 2002. 424 p.

**Borysyuk Andriy Oleksandrovysh** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Research Fellow, Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Zhelyabova Str., 8/4, 03680 Kyiv 180 MSP, Ukraine; e-mail: aobor@ukr.net; ORCID: 0000-0002-3878-3915.

**Борисюк Андрій Олександрович** - доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник, Інститут гідромеханіки НАН України, вул. Желябова, 8/4, 03680 Київ 180 МСП, Україна; e-mail: aobor@ukr.net; ORCID: 0000-0002-3878-3915.

**Борисюк Андрей Александрович** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт гидромеханики НАН Украины, ул. Желябова, 8/4, 03680 Киев 180 МСП, Украина; e-mail: aobor@ukr.net; ORCID: 0000-0002-3878-3915.

UDC 004.35: 004.9

## Model and hardware-software implementation of information processing system for psychophysical and psychophysiological researches

N.V. Varlamova<sup>1</sup>, V.T. Lazurik<sup>2</sup>, N.G. Styervoedov<sup>3</sup><sup>1</sup>V. N. Karazin Kharkiv National University, 6 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine<sup>2</sup>V. N. Karazin Kharkiv National University, 6 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine<sup>3</sup>V. N. Karazin Kharkiv National University, 6 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

e-mail: natess123@gmail.com

The conceptual model of the information processing system for psychophysical and psychophysiological researches has been developed. The hardware-software implementation of this system will allow us to diagnose a person's mental state on site or remotely, to identify person's professional suitability, to measure psychophysiological and cognitive characteristics, to store and process research information using the cloud service. The structure of the information processing system model is represented by UML diagrams. The detailed plan of the information processing system realization is presented.

**Keywords:** information processing system, UML diagram, psychological research, microcontroller, remote control, cloud service, mobile application.

Разработана концептуальная модель информационно-измерительной системы для психофизических и психофизиологических исследований. Аппаратно-программная реализация этой системы позволит локально и удаленно проводить диагностику психического состояния человека, выявлять ее профессиональной пригодности, измерять психофизиологические и когнитивные характеристики, хранить и обрабатывать информацию об исследовании, используя преимущества облачного сервиса. Структура модели информационно-измерительной системы изображена с помощью диаграмм UML. Представлен подробный план реализации информационно-измерительной системы.

**Ключевые слова:** информационно-измерительная система, UML диаграмма, психологические исследования, микроконтроллер, дистанционное управление, облачный сервис, мобильное приложение.

Розглянуто важливість застосування спеціалізованих програмно-апаратних комплексів з батареями психодіагностичних тестів для психофізіологічного та психофізичного моніторингу. Описано проблему нестачі сучасних інформаційних технологій для побудови систем якісної психодіагностики, особливо тих, що дозволяють проводити дистанційне обстеження. Доведена актуальність створення інформаційно-виміральної системи, що має сучасні способи отримання, передачі, обробки та збереження даних. Розроблено концептуальну модель інформаційно-виміральної системи для психофізичних і психофізіологічних досліджень. Апаратно-програмна реалізація цієї системи дозволить локально і віддалено проводити діагностику психічного стану людини, виявити її професійну придатність, вимірювати психофізіологічні та когнітивні характеристики, зберігати та обробляти інформацію про дослідження, використовуючи переваги хмарного сервісу та мобільного додатку. Структура моделі інформаційно-виміральної системи зображена за допомогою діаграм UML. Структурна модель представлена чотирма блоками: блоком управління (робоче місце експерта), блоком тестування (робоче місце досліджуваного), блоком отримання і передачі даних та блоком обробки та збереження даних. UML діаграми відображають як склад кожного блоку, так і способи взаємодії між компонентами системи. Представлений детальний план реалізації інформаційно-виміральної системи. Наведений короткий опис: способу налаштування та з'єднання Wi-Fi модулю ESP8266 із мікроконтролером STM32F4, принципи роботи хмарного сервісу ThingSpeak. Описані функції мобільного додатку інформаційно-виміральної системи.

**Ключові слова:** інформаційно-виміральна система, UML діаграма, психологічні дослідження, мікроконтролер, дистанційне керування, хмарний сервіс, мобільний додаток.

### Problem statement

Obtaining objective and reliable information on the professional suitability of the operator of complex systems and processes as well as the actual functional and psychological state of the employees and their ability to perform responsible or monotonous work is of high priority in the workplace safety and health management. Being ready to rapidly take action on basis of that information is a prerequisite for the effective management of the task assigned to the individual or executive team. The identification of the individual characteristics of an employee's job and the ability to assess the probability of an impending event is the basis for the optimal distribution of staff in any team. The sources of such information are specialized software-hardware complexes for psychophysiological monitoring by means of sets of psychological tests [1 - 3].

The development of models, logical flowcharts, algorithms and computer programs for psychophysiological research requires a detailed study of the psychological, physiological, and moral aspects of the problem, as well as professional experience with information technologies, electronic equipment and programming languages. Despite the growing need for such research and the relevance of computer-assisted psychophysiological diagnostics, the present information processing systems are



extremely insufficient, and their functionality is significantly limited. This is particularly true for systems that allow remote monitoring. For example, remote monitoring of the psycho-emotional state of truck drivers, diagnosing the functional state of athletes and military personnel determine their readiness to perform complex and responsible work.

Therefore, the development of information processing systems for psychophysical and psychophysiological studies that meet modern requirements is an urgent task [4, 5]. The urgency of creating and using information systems in psychophysiological and psychological research is determined by the fact that nowadays a person's information load has considerably increased. As a result, stressful situations, the need for ambiguous decisions, and the need to find solutions in an uncertain environment are increasingly occurring. The active use of specialized software-hardware systems for psychophysical training could contribute to the adaptation of human behavior in the context of information noise and global digital transformation of society. Obviously, the citizens' mental health depends on the effectiveness of implementation and usage of such systems.

The Internet, modern information technologies and electronic environment offer new opportunities for building more advanced psychodiagnostic systems.

The proposed development of a new generation of specialized information processing system is aimed at fast and effective psychological support for decision-making, diagnostics and control (including remote control) of psychophysiological state and cognitive abilities of a person.

### Conceptual model of information processing system for psychophysical and psychophysiological researches

The presented information processing system has the following features: it provides end-to-end information support for psychological research at all stages of the information flow based on integrated data presented in a unified form, information storage, visualization and data protection. The significant advantages of the system are the usage of cloud services in the process of data collection and processing, the ability to easily change and expand both the devices for the tests and the tests themselves, to work with various network technologies, as well as to engage, by the mobile application, professional psychologists and experts specializing in the subject areas.

In addition, the form and method of presenting information during the research process can be adaptively reshaped in the system. Thus, the functionality of the system can be described by the following levels: 1 - collection, registration and structuring of information, creation of information space; 2 - storage and search of additional information, set up of information exchange; 3 - statistical analysis of data, decision support and synthesis of test effects.

Let us consider the structure of the conceptual model of the information processing system, which is represented as a UML diagram of components.

Fig. 1 shows the information processing system consisting of the following units: the control unit (essentially, workplace expert), the testing unit (workplace investigated), the unit for receiving and transmitting data, and the unit for processing and storage data.

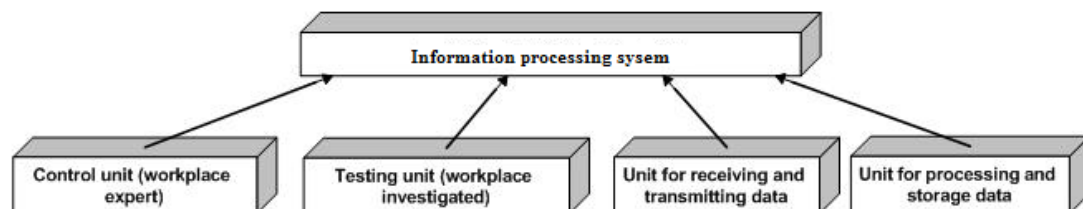
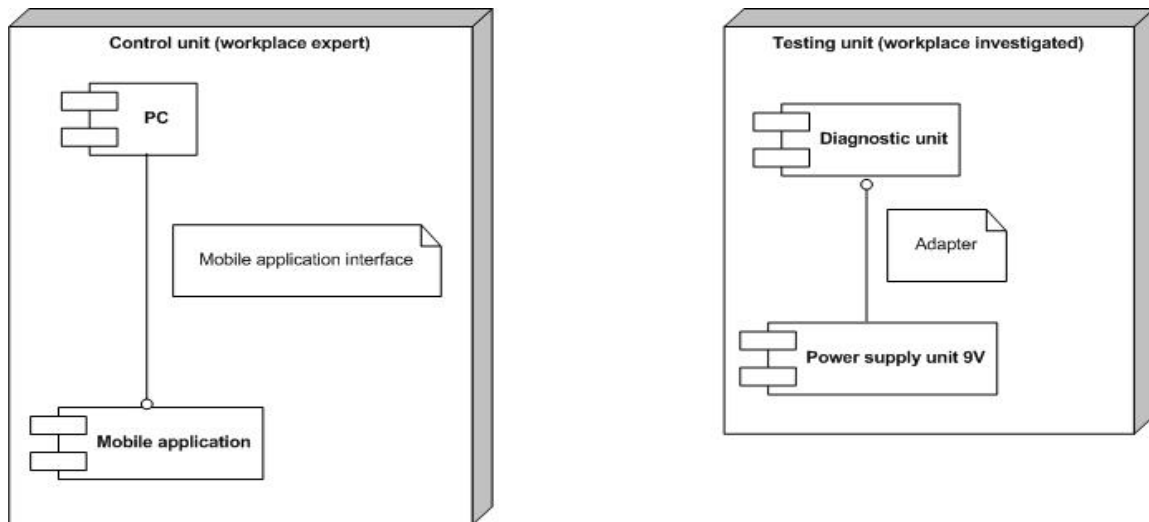


Fig. 1. Information processing system for psychophysiological research

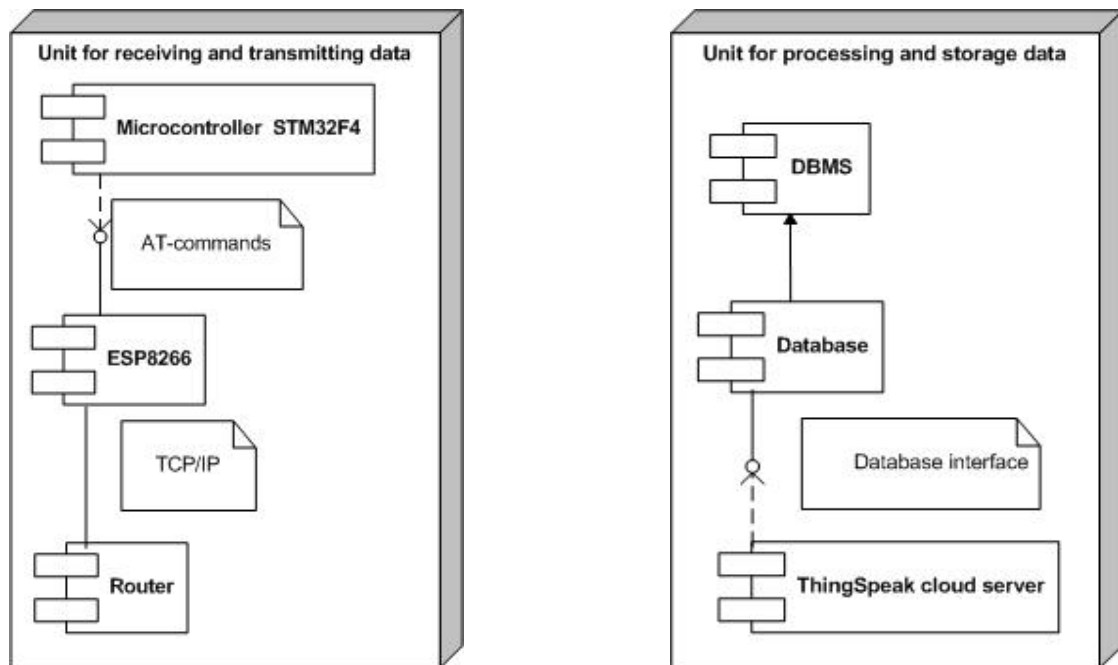
Fig. 2a is a diagram of the components of the control unit (workplace expert) consisting of a PC communicating through the mobile application interface with the mobile application, and the testing unit (workplace investigated) containing the diagnostic unit which feeds through the adapter from the 9 V power supply unit (Fig. 2b).

Fig. 3a presents a diagram of unit for receiving and transmitting data, comprising an STM32F4 microcontroller and an ESP8266 Wi-Fi module, that interact with each other through AT-commands, and a router that is connected through TCP / IP communication protocols. In the absence of the Internet, mobile communication or recording on a built-in fixed memory can be used with subsequent data transmission to the cloud-based subsystem of reception, processing and storage.

The unit for processing and storage data, presented in Fig. 3b, consists of a database management system (DBMS), the database itself, and a ThingSpeak cloud server.



a) b)  
Fig. 2 UML diagrams of the control unit (a) and the testing unit (b)



a) b)  
Fig. 3. UML Diagrams of the Unit for Receiving and Transmitting Data (a) and the Unit for Processing and Storage Data (b)

Fig. 4 shows the general structure of the conceptual model of the information processing system for psychophysiological research. The developed model describes the processing and analyzing data remotely in real time. The general structure presents not only all the components, but the functional

connections between the components as well: the mobile application and the ThingSpeak cloud server interact through the ThingSpeak interface, and the mobile application and the DBMS interact through the DBMS interface respectively. Data transmission between the router and the ThingSpeak cloud server is possible within HTTP requests. The connection of the diagnostic unit to the STM32F4 microcontroller and its efficient functioning are possible due to the IDE libraries included in the basic STM32F4.

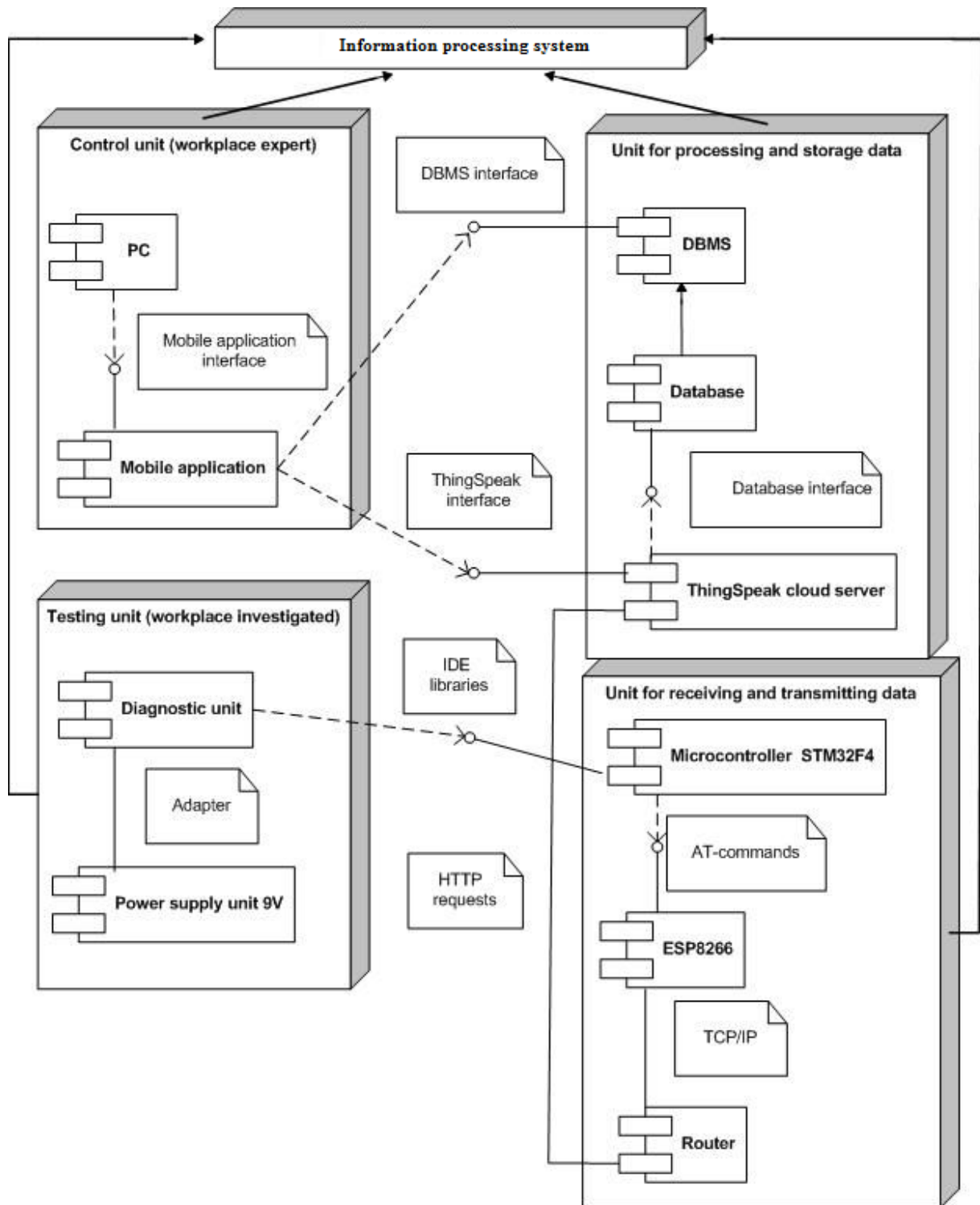


Fig 4. UML diagram "Conceptual model and hardware-software implementation of information processing system for psychophysiological researches"

### System model implementation

The steps planned for the system model implementation are:

1. Installation and testing of the diagnostic unit
2. Installation, configuration, connection and testing of ESP-8266
3. Configuration of the ThingSpeak Status Channel
4. Install ThingSpeak code on STM32F4
5. Database development
6. Development of Android application
7. Installation and configuration of external devices
8. Configuration of the ThingSpeak Actuators channels
9. Configuration of the STM32F4 with external devices
10. Testing Android application with sensor status check
11. General testing of the hardware-software complex.

To connect sensors it is necessary to use certain libraries native to STM32 IDE. These libraries make it possible to initiate sensors, obtain sensor readings and display them on the monitor screen.

The use of ESP8266-12 requires the usage of AT-commands (the module includes an AT-commands processor). To connect the module and adjust the rate of data transfer, it is necessary to connect STM32F4 to the PC, use empty code and AT commands in the open IDE. The final connection to the already configured ESP8266-12 includes the following connections:

- ESP-12 RXD --> STM32F4 PIN PD6
- ESP-12 TXD --> STM32F4 PIN PD4
- ESP-12 Ch-Pd (En) --> Vcc (3.3V)
- ESP-12 Reset --> STM32F4 Pin PB5
- ESP-12 Vcc (Red) --> 3.3V
- ESP-12 Gnd (Black) --> STM32F4 PIN PC15

The next step after installing the sensors and connecting the ESP-8266 is to configure the process of transmitting information from the sensors to the cloud service. ThingSpeak's cloud service allows collecting information from the sensors, as well as processing and analyzing it. After registration on Thingspeak, channels responsible for collecting sensor data (keyboards) and controlling actuators (visual stimulus unit) through the mobile application are created. HTTP requests are required to transmit data to the cloud. For example, to record data in the Status Channel fields (at a frequency of 1 every 15 seconds), it is necessary to submit an HTTP GET request.

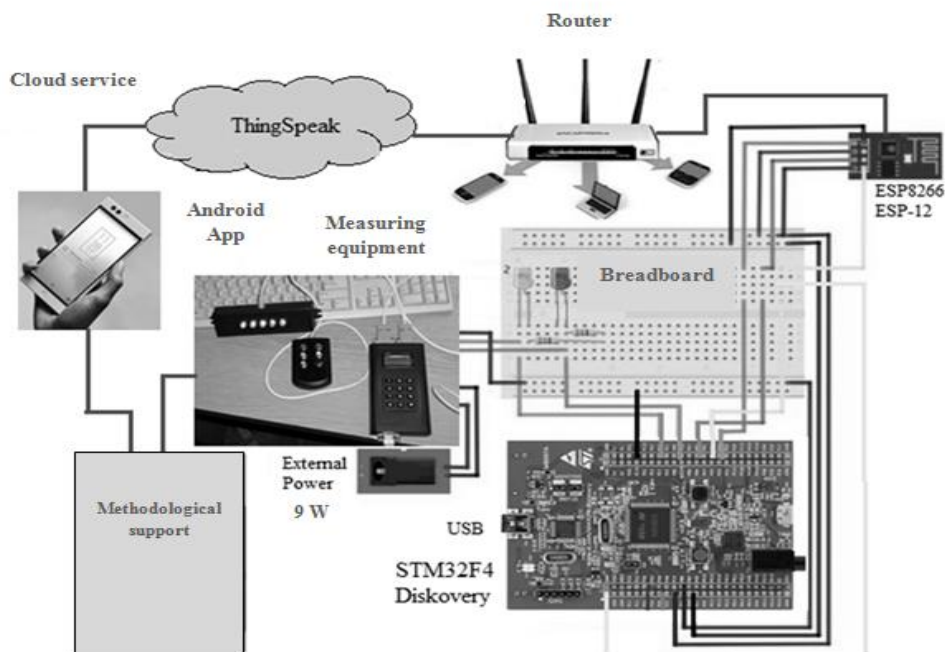


Fig. 5 Current layout of the subsystem for receiving and transmitting data for remote monitoring.

The mobile application of the hardware-software complex allows not only remote controlling of the executive devices (turn on, turn off, select the mode of the methodology) and viewing the information received from the sensors through the cloud server Thingspeak, but also drawing the initial and final expert conclusions on the diagnostics of the investigated personnel and storing them in the database. A significant advantage of the ThingSpeak cloud is the availability of a powerful suite of applications for solving scientific and technical computing problems (MatLab) which can perform all necessary data operations [6,7].

The structural and functional organization of the current layout of the subsystem of receiving and transmitting data for remote monitoring of psycho-emotional state is shown in Fig. 5. The subsystem layout is made on the basis of the STM32F4 Discovery microcontroller board. The board is connected to one of the information-executive modules of the psychodiagnostic system (described in [8]), the Wi-Fi module ESP8266-12 and the power adapter.

### Conclusions

The conceptual model of the information processing system for studying of psychophysical and psychophysiological patterns of sensory processes of a person is presented in the article. The model is a framework of functional blocks, the inputs and outputs of which are connected through the appropriate interfaces. It is presented as UML diagrams of general structure and detailed diagrams of system components. Such presentation made it possible to qualitatively and clearly visualize the structure and describe the system operation principles. Building a conceptual model greatly simplifies the next stages of designing an information processing system. The basic stages of implementation have been developed and described on the basis of the model of real information processing system with the possibility of both local and remote research of psychophysical and psychophysiological functions.

### REFERENCES

1. V. D. Balin, V. K. Gaida, V. K. Gerbachevsky, et al. *Praktikum po obshchey, eksperimental'noy i prikladnoy psikhologii*. St. Petersburg: Piter, 2003. 560 p. [In Russian].
2. V. V. Kal'nish, A. I. Yena. "Pryntsyvy profesiynoho psykhozivlozhichnoho vidboru [Principles of professional psychophysiological selection]". *Journal of Hygiene of Labor*, Vol. 32, pp.131–144, 2001. [In Ukrainian].
3. M.A. Popova, I. V. Myl'chenko, A.E. Shcherbakova, R.M.Safin. "Funktsional'noye sostoyaniye vegetativnoy i tsentral'noy nervnoy sistemy u lits, zanimayushchikhsya ekstremal'nymi vidami sporta" [The functional state of the autonomic and central nervous system in persons engaged in extreme sports]. *Modern problems of science and education*, No. 3, 2013. URL: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=9240>. Accessed on: 25.10.2019. [in Russian]
4. M. L.Kochina, A. G. Firsov. "Mnogofunktsional'nyy pribor dlya provedeniya psikhofiziologicheskikh issledovaniy [Multifunctional device for psychophysiological research]". *Applied radio electronics*. Vol. 9, No 2, pp. 260–265, 2010. [In Russian].
5. P.V. Belichenko, N.V. Blaginya, A.V. Mal'tsev, M.M. Khruslov. "Apparatno-programmnoye obespecheniye v psikhologii [Hardware and software in psychology]". *Computer modeling in high-tech technologies*. pp. 22-25, 2014. [In Russian].
6. P. L. Nikolaev. "Primeneniye oblachnykh tekhnologiy v sistemakh umnogo doma [The use of cloud technologies in smart home systems]". *Scientific journal "Young Scientist"*, No. 13, pp. 37-39, 2014. URL: <https://moluch.ru/archive/72/12306/>. Accessed on: 20.10.2019. [In Russian]
7. ThingSpeak. (2017). [Online]. URL: <https://thingspeak.com/>. Accessed on: 09.10.2019.
8. N.V. Varlamova, N.G. Styervoyedov. "Hardware - software complex for psychological and professional diagnostics with the remote control function". *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, series Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems*, Vol. 38, pp. 25 – 32, 2018.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Балин В. Д., Гайда В. К., Гербачевский В. К. и др. Практикум по общей, экспериментальной и прикладной психологии. / Под общей ред. А. А. Крылова, С. А. Маничева. Питер: 2-е изд., доп. и перераб. СПб., 2003. 560 с.
2. Кальніш В. В., Єна А. І. Принципи професійного психофізіологічного відбору. Гігієна праці. Київ, 2001. Вип. 32. С.131–144.

3. Попова М.А., Мыльченко И. В., Щербакова А.Э., Сафин Р.М. Функциональное состояние вегетативной и центральной нервной системы у лиц, занимающихся экстремальными видами спорта. Современные проблемы науки и образования. 2013. № 3. URL: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=9240> (дата звернення 25.10.2019)
4. Кочина М. Л., Фирсов А. Г. Многофункциональный прибор для проведения психофизиологических исследований. Прикладная радиоэлектроника, 2010. Т.9, №2. С.260–265.
5. Беличенко П.В., Благиня Н.В., Мальцев А.В., Хруслов М.М. Аппаратно-программное обеспечение в психологии. Труды международной науч.-техн. конф. Харьков: ХНУ м. В.Н.Каразина, 2014. С. 22-25.
6. Николаев П. Л. Применение облачных технологий в системах умного дома. Научный журнал «Молодой ученый». 2014. Вып. 13. С. 37-39. URL: <https://moluch.ru/archive/72/12306/> (дата звернення 20.10.2019).
7. Хмарний сервер ThingSpeak. [Електроний ресурс]. URL: <https://thingspeak.com/> (Дата звернення: 09.10.2019)
8. Varlamova N.V., Styervoyedov N.G. Hardware - software complex for psychological and professional diagnostics with the remote control function. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». 2018. Вип. 38. С.25 – 32.

*Varlamova Natalia V. – Post - graduate student of Department of Computer Science Faculty, V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 6, 61022, Kharkiv, Ukraine, natess123@gmail.com; ORCID: 0000-0001-5117-7293*

*Lazurik Valentine T.- doctor of physical and mathematical sciences, professor; Dean of Computer science faculty; V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine, 61022, Kharkiv, Svobody Sq., 6; e-mail: vtlazurik@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-8319-0764.*

*Styervoyedov Nicolay G. - PhD (Technology), Associate Professor: Head of Electronics and Control Systems Department V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 6, 61022, Kharkiv, Ukraine, n.styervoyedov@karazin.ua, keus@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-0136-6437.*

*Варламова Наталя Володимирівна – аспірант факультету комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків-22, Україна, 61022;*

*e-mail: natess123@gmail.com; ORCID: 0000-0001-5117-7293*

*Лазурик Валентин Тимофійович - доктор фізико-математичних наук, професор; декан факультету комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: vtlazurik@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-8319-0764.*

*Стервоєдов Микола Григорович – кандидат технічних наук, доцент; завідуючий кафедрою електроніки і управляючих систем, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків-22, Україна, 61022;*

*e-mail: n.styervoyedov@karazin.ua, keus@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-0136-6437.*

*Варламова Наталья Владимировна – аспірант факультета компьютерных наук; Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 6, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: natess123@gmail.com; ORCID: 0000-0001-5117-7293*

*Лазурик Валентин Тимофеевич – доктор физико-математических наук, профессор; декан факультета компьютерных наук; Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 6, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: vtlazurik@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-8319-0764.*

*Стервоєдов Микола Григорович – кандидат технических наук, доцент; заведующий кафедрой электроники и управляющих систем, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 6, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: n.styervoyedov@karazin.ua, keus@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-0136-6437.*

УДК 629.33:621.541

## Расчет суммарной площади проходных сечений золотникового воздухораспределителя автомобильного пневмодвигателя

А.И. Воронков, В.М. Колодяжный, О.Ю. Лисина, И.Н. Никитченко

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, ул. Ярослава Мудрого, 25,  
г. Харьков, 610002, Украина; Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы,  
4, г. Харьков, 610022, Украина  
e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Рассматривается одна из актуальных задач в области газовой динамики поршневых двигателей, которые касаются аналитической оценки влияния конструктивных и режимных параметров на процессы протекания газов через органы газораспределения. Процесс газообмена в двухтактных двигателях осуществляется с помощью открытия-закрытия проходных окон или золотника с поршнем. Предлагается метод расчета суммарной площади проходных сечений золотникового воздухораспределителя автомобильного пневмодвигателя. На основе математических средств теории  $R$ -функции проводится математическое описание заданной области входного отверстия золотникового воздухораспределителя и математическое описание заданной области выходного отверстия. Рассматривается алгоритм для создания компьютерной вычислительной программы для определения площадей проходных сечений отверстий золотникового воздухораспределителя. Предлагаемый алгоритм используется при разработке программного продукта при определении площадей, которые формируются впускными и выпускными отверстиями золотника с учетом разных их конфигураций. Расчет площадей сечений этих отверстий позволяет установить потери воздуха в воздухораспределительной системе пневматического двигателя и определить уточненные размеры каналов подведения и отвода сжатого воздуха. Результаты расчетов воздухораспределительной системы и параметров сжатого воздуха при впуске вошли отдельным блоком в общую динамическую модель расчетов рабочих процессов автомобильного пневматического двигателя, при определении скорости, температуры и расхода воздуха золотникового воздухораспределителя. Автомобильный пневматический двигатель имеет более высокие показатели экономичности и экологичности по сравнению с двигателем внутреннего сгорания в условиях низких оборотов коленчатого вала.

**Ключевые слова:** автомобильный пневмодвигатель, золотниковый воздухораспределитель, проходные сечения, площади проходных сечений, математическое моделирование, теория  $R$ -функций.

Розглядається одна з актуальних задач в області газової динаміки поршневих двигунів щодо аналітичної оцінки впливу конструктивних та режимних параметрів на процеси протікання газів через органи газорозподілення. Процес газообміну у двохтактних двигунах здійснюється за допомогою відкриття-закриття продувних вікон або золотника з поршнем. Пропонується метод розрахунку сумарної площини прохідних перетинів золотникового повітря розподільника автомобільного пневматичного двигуна. За допомогою математичних засобів теорії  $R$ -функцій здійснюється опис заданої області вхідного отвору золотникового повітродозподільника та математичний опис заданої області вихідного отвору. Розглядається алгоритм для створення комп'ютерної обчислювальної програми для визначення площ прохідних перетинів золотникового повітродозподільника. Запропонований алгоритм використовується при розробці програмного продукту при визначенні площ, які формуються впускними та випускними отворами золотника з врахуванням різних їх конфігурацій. Розрахунки площ перетинів цих отворів дозволяють встановлювати витрати повітря у повітродозподільній системі пневматичного двигуна та визначити уточнені розміри каналів підведення та відведення стислого повітря. Результати розрахунків повітродозподільної системи та параметрів стислого повітря при впуску ввійшли окремих блоком в загальну динамічну модель розрахунків робочих процесів автомобільного пневматичного двигуна, при визначенні швидкості, температури і витрат повітря золотникового повітря розподільника. Автомобільний пневматичний двигун має більш високі показники економічності та екологічності порівняно з двигуном внутрішнього згорання в умовах низьких обертів колінчатого валу.

**Ключові слова:** автомобільний пневматичний двигун, золотниковий повітродозподільник, прохідні перетини, площі прохідних перетинів, математичне моделювання, теорія  $R$ -функцій.

One of actual issues in the field of gas dynamics of piston engines which concerns the analytical estimation of influence of structural and regime parameters on the processes of flowing of gases through gas distribution mechanisms is examined. Gas interchange process in two-tact engines is performed by means of opening-closing of blow-off windows or slide-valve with a piston. The method of calculating the total plane of the flow area of slide-valve air distributor for a motor-car pneumatic engine is proposed. The mathematical descriptions of the pre-set areas of the entry and exit openings of slide-valve air distributor have been performed with the help of the theory of  $R$ -functions. The algorithm for creating the computer calculating program for determining the flow area of slide-valve air distributor is considered. The proposed algorithm has been used for developing the software application intended for calculating the areas which are formed by the entry and exit openings of slide-valve accounting for their different possible configurations. The calculations of flow area of these openings allow determining the air losses in the air distributive system of pneumatic engine and defining the specific size for the inlets and outlets of the compressed air. The results of calculations of the air distribution system and the parameters of the compressed air intake is presented as a separate block in the general dynamic model of calculations of working processes of the motor-car pneumatic engine, when determining the speed, temperature and air flow of the slide-valve air distributor. The motor-car pneumatic engine is more economical and environmentally friendly in comparison with the internal combustion engine at the low revolutions.

**Keywords:** motor-car pneumatic engine, slide-valve air distributor, flow area, planes of the flow area, mathematical design, theory of  $R$ -functions.

## 1 Введение

Наиболее актуальной задачей в области газовой динамики поршневых двигателей является аналитическая оценка влияния конструктивных и режимных параметров на процессы перетекания газов через органы газораспределения. Процессы газообмена в поршневых двигателях имеют сложный нестационарный газодинамический процесс который сопровождается изменением термодинамических параметров газа, площадью поперечного сечения впускных-выпускных отверстий, различными видами трения (внешним и внутренним), скоростями и температурой газового потока, теплообменом между потоком и деталями двигателя [1].

Одним из определяющих факторов для расчета процесса газообмена является определение времени сечения органов газораспределения.

Процесс газообмена в двухтактных двигателях осуществляется при помощи открытия-закрытия продувочных окон или золотника поршнем. Продувочные окна расположены в стенке цилиндров и открываются плоским днищем поршня. Обычно они имеют треугольные, круглые, эллиптические, ромбические и другие формы отверстий [1]. Определение площади соответствующих продувочных окон выполняются, согласно формулам, в которых  $d$ ,  $H$ ,  $b$  геометрические размеры окон,  $h$ - текущий размер.

Площадь круглого окна (величина открытого сечения) вычисляется как:

$$f = d_2 / 2 \{ \arccos(1 - 2h/d) - (d/2 - h) \sqrt{h(d-h)} \}; \sqrt{h(d-h)}$$

площадь полностью открытого окна с трапецевидным сечением:

$$f = 1/2(b_1 - b_2)H,$$

где ширина окна возле кромки –  $b = b_1 + h(b_2 - b_1)/H$ ;

Площадь отверстий продувочных окон сложной конфигурации можно определить известными математическими методами расчета: метод симметрии; метод разделения на простые части, метод отрицательных площадей [3]:

Задача определения функции площади сечений продувочных окон двигателя является менее сложной и сводится к постепенному изменению (увеличению или уменьшению) этих площадей, которые находятся с помощью интегрирования соответствующих собственных интегралов. Закон открытия окон по углу поворота коленчатого вала определяется перемещением поршня –

$$h = S - S_0 = R(1 - \cos \varphi \cos \varphi + \lambda/4(1 \cos 2\varphi - \cos 2\varphi)) - S_0, \lambda = R/L,$$

где  $S$ ,  $S_0$  – перемещение поршня;  $R$  – радиус кривошипа,  $\varphi$  – угол поворота кривошипа;  $L$  – длина шатуна; [1].

В работе [2] площади продувочных окон для различных значений рабочих диапазонов частот вращения  $n$  золотникового воздухораспределителя, т.е.  $Z = f(n)$ , предлагается определять следующим образом. По графику изменения площади проходного сечения двигателя,

$$\text{определяется время-сечение каждого окна } Z: Z = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} F d\varphi / 6n.$$

Время-сечение можно определить и следующим расчетным путем, рассматривая постоянные величины  $K_1$  и  $K_2$ :  $K_1 = 30DS\psi$ ;  $K_2 = (2\sigma + \lambda/4 + 1)\varphi + \sin \varphi - (\lambda/8)\sin 2\varphi$ , где  $\psi$  – относительная ширина окон,  $\varphi$  – угол полного открытия (закрытия окон);  $\sigma$  – относительная высота окна;  $D$  – диаметр цилиндра,  $S$ -ход поршня; на основе которых находим  $Z = K_1 K_2 / n$ .

Более сложная задача решалась в работе [4]. В ней рассчитывались пропускные возможности технологического отверстия в корпусе золотникового распределителя пневмодвигателя при подаче сжатого воздуха. При этом рассматривались вопросы формирования оптимальных геометрических размеров окон для обеспечения подачи необходимого объема сжатого воздуха в рабочую камеру пневмодвигателя. Численный алгоритм был реализован в вычислительной среде MatLab. Вычислительный эксперимент выполнялся по отношению параметров радиуса пропускного отверстия и угловой скорости. Другими словами, вычислялись площади проходного отверстия, которые открывались в определенные моменты времени.

Для решения изложенных выше задач разработаны различные компьютерные программные комплексы. Например, с помощью программного комплекса FlowVision HPC было проведено моделирование гидромеханических характеристик шиберной задвижки в процессе открытия. В работе приведены результаты исследования изменения давления в зависимости от изменения



площади проходного сечения. К сожалению, несмотря на красочную графическую часть, алгоритмы расчета не рассмотрены [5-8].

Также не приведены алгоритмы расчетов при моделировании движения потоков воздуха в золотниковом воздухораспределителе в пакетах программ Autodesk SimulationCFD (рис. 1) [9,10], что делает невозможным быстрое, точное и гибкое моделирование воздушных потоков. Результаты выводятся в графической форме.

Анализируя предварительные расчеты с помощью пакета программ Autodesk SimulationCFD, по скорости воздуха, можно сделать вывод, что независимо от изменяющихся геометрических параметров каналов наблюдается подкритическое и сверхкритическое истечение сжатого воздуха.

Следует отметить, что представленное исследование не противоречит данным, приведенным в работе [11].

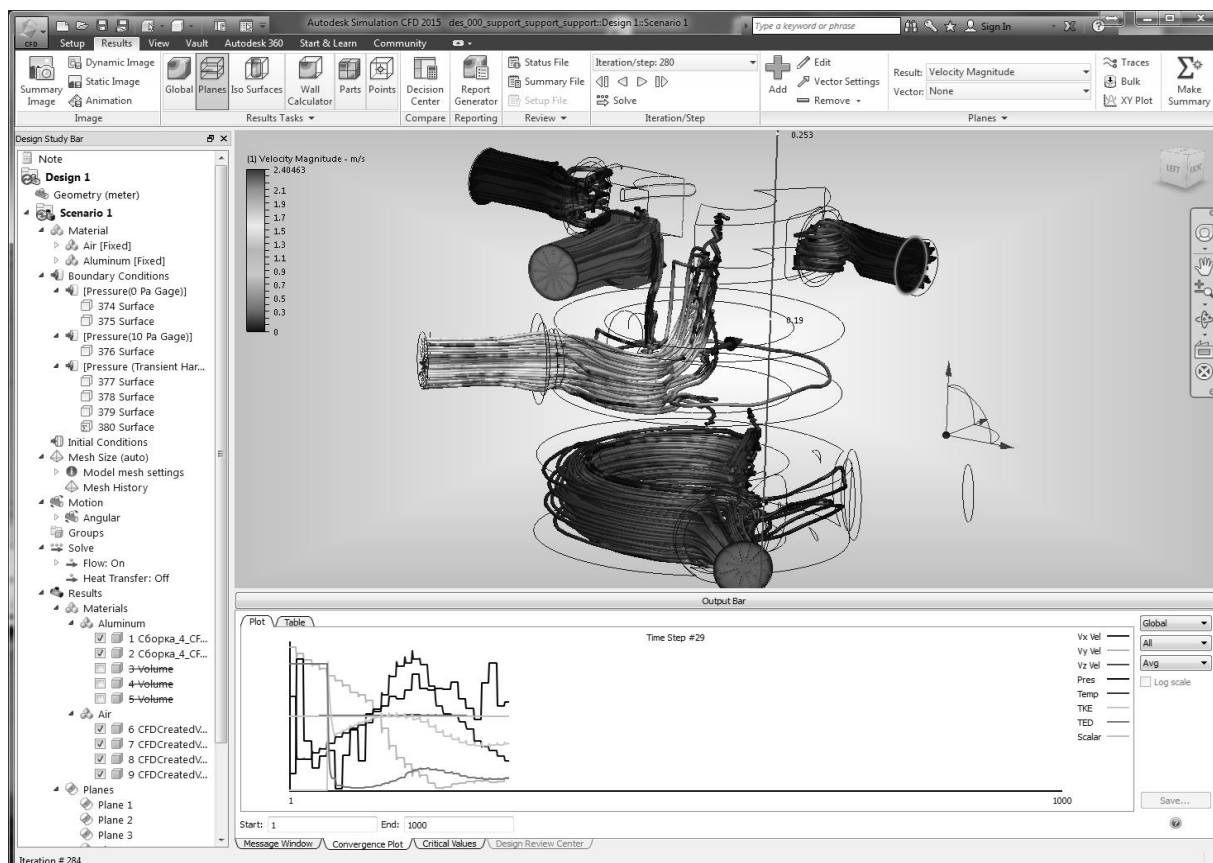


Рис. 1. Пример моделирования движения потока воздуха в золотнике

Однако с помощью такой программы можно осуществить только физическое моделирование процессов и расчет скорости воздуха. Поэтому для расчетов конструктивных параметров золотникового воздухораспределителя предлагается использовать методику, которая рассматривается в статье.

### Цель работы

Разработать метод расчета суммарной площади проходных сечений золотникового воздухораспределителя автомобильного пневмодвигателя.

### Задачи исследования

1. При помощи математических средств теории R-функций провести:
  - математическое описание заданной области входного отверстия золотникового воздухораспределителя;
  - математическое описание заданной области выходного отверстия.
2. Применить для расчетов компьютерную вычислительную систему «ПОЛЕ», разработанную в Институте проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины [12].

3. Разработать компьютерную вычислительную программу для определения площадей проходных сечений отверстий золотникового воздухораспределителя.

Поставленные задачи исследования по расчету проходных сечений золотникового воздухораспределителя предусматривают разработку соответствующих вычислительных алгоритмов. Для исследования выбираем золотниковый газораспределительный механизм автомобильного пневмодвигателя 4Ч7,6/7,6, который представлен на рис. 2.

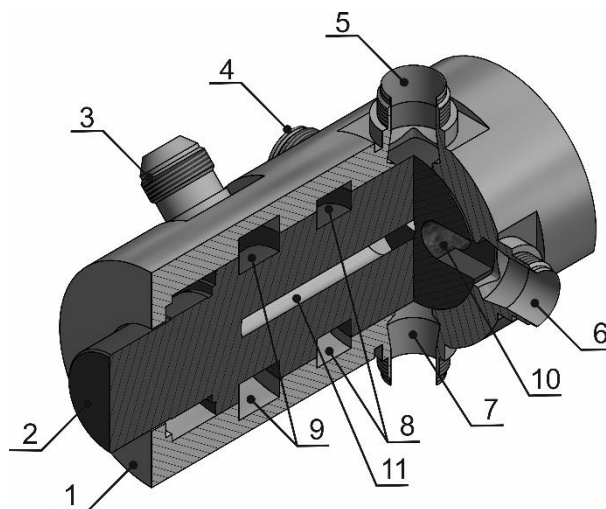


Рис. 2. Золотниковый воздухораспределитель в сборе: 1 – корпус; 2 – ротор; 3 – штуцер выпускного канала; 4, 5, 6, 7 – штуцеры каналов подвода-отвода воздуха к/от цилиндров; 8 – канавка для подвода сжатого воздуха; 9 – канавка для вывода отработанного воздуха; 10 – канал подвода-отвода воздуха; 11 – центральный канал подвода воздуха

При изготовлении воздухораспределительного отверстия золотника следует учитывать, что в результате работы фрезерного инструмента формируются закругления с рабочим радиусом  $R_z$ . Это приводит к необходимости при геометрическом моделировании области выходного отверстия учитывать форму отверстия, которая отлична от прямоугольной (рис. 3).

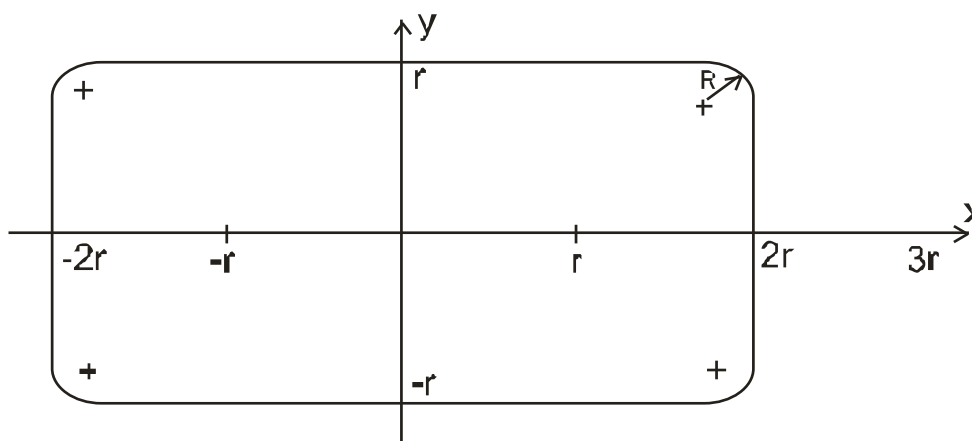


Рис. 3. Форма клапана для формирования выходного воздухораспределительного отверстия золотника

Для описания клапана выходного воздухораспределительного отверстия золотника считаем, что искомая область представляется в виде совокупности простых областей, показанных на рис.4. Данные простые области рис. 4 имеют следующие описания: область  $\Omega_0$  является прямоугольником  $[-2r; 2r] \times [-r; r]$ , области  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  задаются в виде кругов радиусом  $R_z = 0,25r$  с центрами расположенными в точках с соответствующими координатами  $(x_i; y_i)$ :

$(x_1; y_1) = (0,75r; 0,75r)$ ;  $(x_2; y_2) = (-1,75r; 0,75r)$ ;  $(x_3; y_3) = (-1,75r; -0,75r)$ ;  $(x_4; y_4) = (0,75r; -1,75r)$ ;  
області  $\Omega_5, \Omega_6, \Omega_7, \Omega_8$  являються півплощинами.

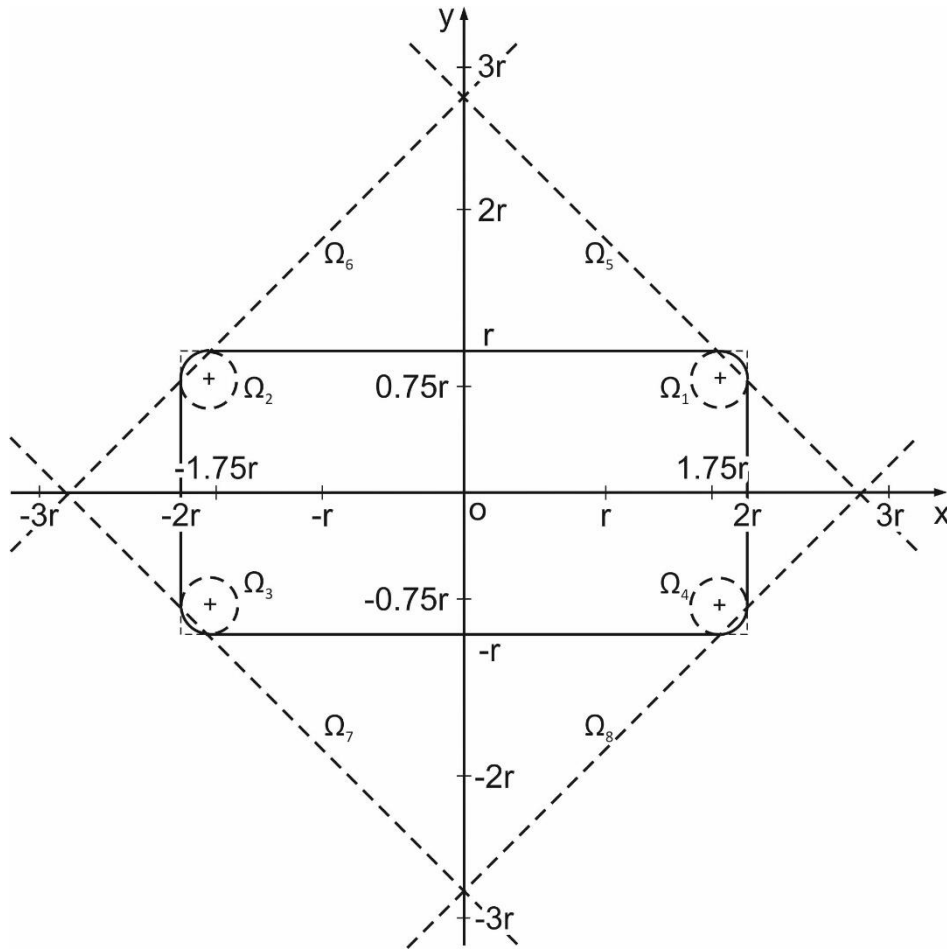


Рис. 4. Совокупность простых областей  $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_8$ , которые участвуют в формировании клапана выходного воздухораспределительного отверстия золотника

Описание областей рис.4 следующее:

$$\Omega_0: (x^2 - 4r^2)(y^2 - r^2) \geq 0;$$

$$\Omega_1: 0,25^2 - (x - 1,75r)^2 - (y - 0,75r)^2 \geq 0;$$

$$\Omega_2: 0,25^2 - (x + 1,75r)^2 - (y - 0,75r)^2 \geq 0;$$

$$\Omega_3: 0,25^2 - (x + 1,75r)^2 - (y + 0,75r)^2 \geq 0;$$

$$\Omega_4: 0,25^2 - (x - 1,75r)^2 - (y + 0,75r)^2 \geq 0;$$

$$\Omega_5: -y - x + 2,75 \geq 0;$$

$$\Omega_6: -y + x + 2,75 \geq 0;$$

$$\Omega_7: y + x + 2,75 \geq 0;$$

$$\Omega_8: y - x + 2,75 \geq 0.$$

Искомая область  $\Omega$  может быть описана с помощью алгебро-логических  $R$ -операций [13]:

$$\Omega = \left\{ \left\{ \left\{ \left\{ \Omega_0 \wedge \left[ \left( \Omega_5 \wedge \Omega_6 \right) \wedge \left( \Omega_7 \wedge \Omega_8 \right) \right] \right\} \vee \Omega_1 \right\} \vee \Omega_2 \right\} \vee \Omega_3 \right\} \vee \Omega_4.$$

Таким образом, описание клапана выходного воздухораспределительного отверстия золотника выполняется с помощью функции  $\omega_1(x, y)$ :

$$\omega_1(x, y) = \left\{ \left\{ \left\{ \left[ (x^2 - 4r^2)(y^2 - r^2) \right] \wedge_R \left[ (-y - x + 2,75) \wedge_R (-y + x + 2,75) \right] \wedge_R \left[ (y + x + 2,75) \wedge_R (y - x + 2,75) \right] \right\} \vee_R \left[ 0,25^2 - (x - 1,75r)^2 - (y - 0,75r)^2 \right] \right\} \vee_R \left[ 0,25^2 - (x + 1,75r)^2 - (y - 0,75r)^2 \right] \right\} \vee_R \left[ 0,25^2 - (x - 1,75r)^2 - (y + 0,75r)^2 \right] \right\} \vee_R \left[ 0,25^2 - (x + 1,75r)^2 - (y + 0,75r)^2 \right] \right\} \vee_R \left[ 0,25^2 - (x - 1,75r)^2 - (y + 0,75r)^2 \right].$$

Область входного отверстия, которое в определенное время перекрывает область выходного отверстия, описывается с помощью функции  $\omega_2(x, y)$ , описывается следующим образом:

$$\omega_2(x, y) = r^2 - \{x + [2r - r\alpha(\tau)]\}^2 - y^2,$$

где  $\tau$  временная переменная, позволяющая определить положение области проходного отверстия;  $\alpha(\tau)$  – функциональный параметр, позволяющий определить координаты центра движущегося круга (входного отверстия); величина  $\alpha(\tau)$  зависит от взаимного положения входного отверстия относительно выходного:  $\alpha(\tau) = \{0, \dots, 1, \dots, 2, \dots\}$ .

На рис. 5 приведены различные моменты формирования проходного отверстия, которое устанавливается путем определения области «проходного сечения»

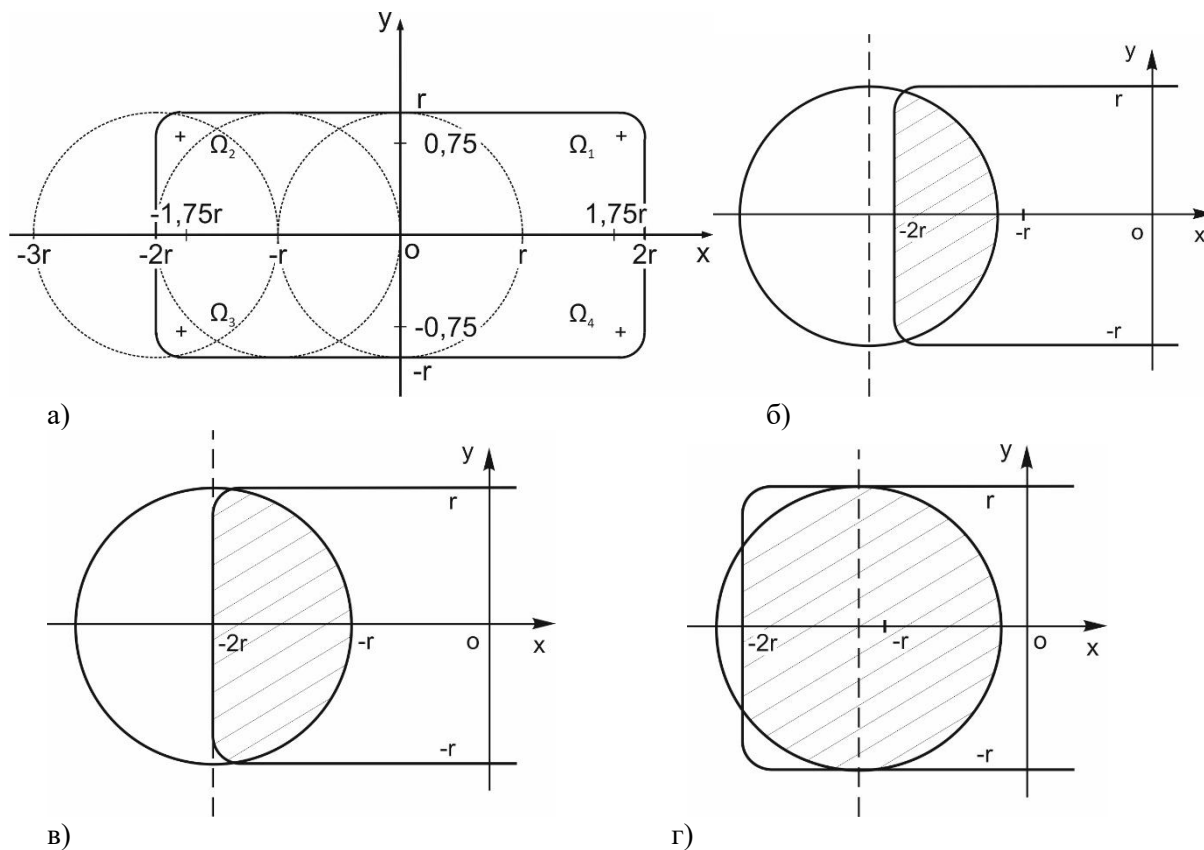


Рис. 5. Формирование проходного сечения: а) при различных положениях входного и выходного воздухораспределительного отверстия золотника при следующих значениях функционального параметра  $\alpha(\tau)$ : б)  $\alpha(\tau) > 1$ ; в)  $\alpha(\tau) = 0$ ; г)  $\alpha(\tau) = 1$

Задание разных моментов времени  $\tau$  позволяют получить различные области проходного сечения воздухораспределительного отверстия золотника. Эти области определяются функцией

$$\omega(x, y) = \omega_1(x, y) \wedge \omega_2(x, y),$$

которая используется при построении графического изображения площади проходного сечения воздухораспределительного устройства с подвижными и неподвижными окнами. Данные окна описываются соответствующими функциями  $\omega_1(x, y)$  и  $\omega_2(x, y)$ .

Функция  $\omega(x, y)$  описывает ограниченную область, площадь которой можно определить, в частности, с помощью вычислительной системы «ПОЛЕ» [13]. Предлагаемый подход позволяет строить диаграммы сечений для регулируемых окон практически произвольной формы. Вычисление площади проходной области при впуске выполняется по такой же схеме, что и в случае, рассмотренном выше, при выпуске воздуха. Однако при этом следует учитывать большую область покрытия кругом клапана воздухораспределительного отверстия, если координаты центра круга будут находиться в границах от  $(-3r, 0)$  до  $(3r, 0)$ . Наличие функции  $\omega(x, y)$ , которая описывает область проходного отверстия при формировании перекрытия входного и выходного отверстий, позволяет определить площадь проходного отверстия с помощью вычислительной системы «ПОЛЕ».

Определение площади проходных сечений можно определить с помощью вычислительной программы на основе следующего алгоритма:

- 1) построение графика неявно заданной функции  $\omega(x, y)$  в декартовой системе координат;
- 2) функция  $\omega(x, y)$  описывает область проходных сечений  $\Omega$ , на которую наносим квадратную сетку  $D$ :

$$D = \{(x_i, y_i) \mid x_i = x_0 + ih, y_i = y_0 + ih, i = 0, \dots, 2 \dots\},$$

где параметр  $h$ :  $h = x_{i+1} - x_i$ , выбираем достаточно малой величиной, и величина параметра служит для задания искомой точности вычисления площади области  $\Omega$ . Данная сетка покрывает область  $\Omega$ . Сумма частей области  $\Omega$  попадающих полностью или частично в квадратные ячейки сетки  $D$  позволяет вычислить площадь проходного отверстия. Величина функции  $\omega(x, y)$  позволяет установить принадлежность части области  $\Omega$  квадратной ячейки рассматриваемой сетки  $D$ : если  $\omega(x, y) > 0$ , то точка  $(x, y)$  принадлежит области  $\Omega$ ; если  $\omega(x, y) < 0$ , то точка  $(x, y)$  лежит вне области  $\Omega$ .

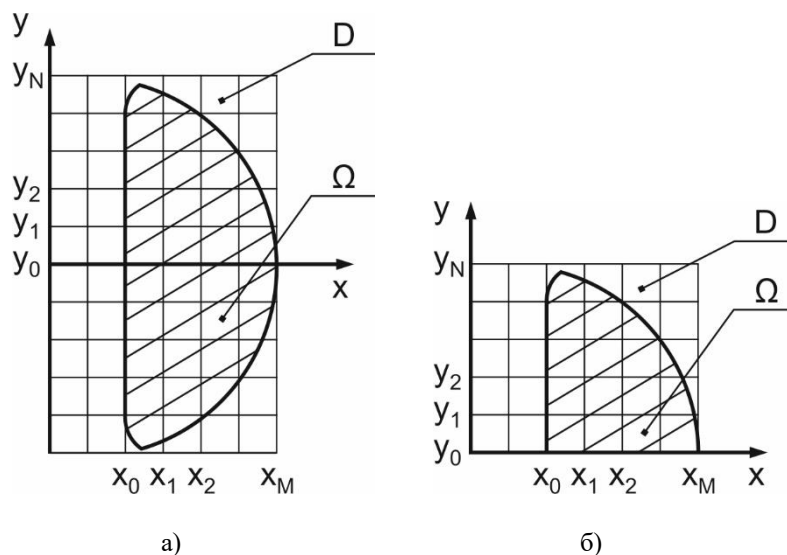


Рис. 6. Покрытие области проходного отверстия соответствующей квадратной сеткой (а); определение рабочей области (в соответствующих квадратах сетки) для вычисления определенных интегралов (б)

Очевидно, что чем меньше параметр  $h$ , который задает размер квадратной ячейки сетки  $D$ , тем точнее можно вычислить площадь области, которая формирует проходное отверстие. Для нахождения площади области, которая описывается функцией  $\omega(x, y)$  использовался метод Монте-Карло, который позволяет приближенно вычислять площади различных по сложности фигур [15].

Вычисление площади проходного отверстия осуществляется с помощью определенного интеграла:  $I = \int_A^B W(x) dx$ .

Подынтегральная функция  $W(x)$  и границы интегрирования  $A$  и  $B$  определяются величиной момента времени, при котором устанавливается положение входного отверстия относительно выходного, т.е. формируется проходное отверстие. Определение подынтегральной функции  $W(x)$ , в частном случае, рассмотрено на рис. 7.

В момент времени  $\tau_k$  входное отверстие перекрывает выходное отверстие в конфигурации, представленной на рис. 7. Для формирования соответствующих границ  $A$ ,  $B$  и  $C$  определенных интегралов и подынтегральных функций необходимо отыскать точку пересечения (точку  $M$ ) графиков функций  $\omega_1(x, y)$  и  $\omega_2(x, y)$ , которые задают границы выходного отверстия в конкретный момент времени.

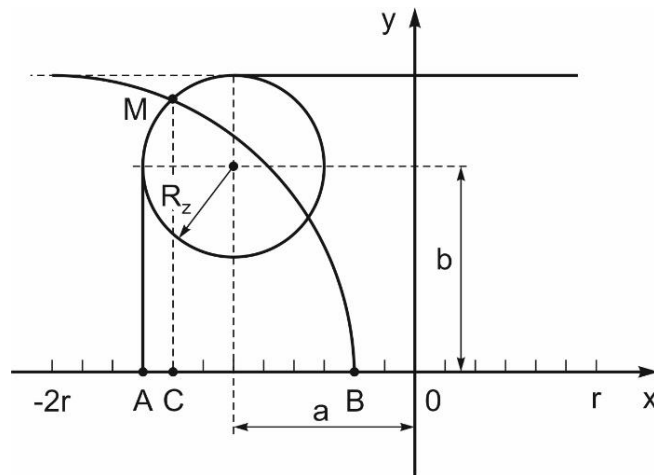


Рис. 7. Определение подынтегральной функции и границ интегрирования в определенных интегралах, которые позволяют вычислить площадь проходного отверстия

Следует учесть, что взаимная конфигурация области входного отверстия и области выходного отверстия определяет вид подынтегральной функции и границ интегрирования в соответствующих определенных интегралах, которые используются для вычисления площади проходного отверстия. Очевидно, что искомый интеграл, с помощью которого находится площадь проходного отверстия, представляется в виде суммы двух интегралов:

$$I = 2 \int_{x=A}^{x=B} W(x) dx = 2 \int_{x=A}^{x=C} \left[ b + \sqrt{R_z^2 - (x+a)^2} \right] dx + 2 \int_{x=C}^{x=B} \sqrt{r^2 - [x + \beta r - r\alpha(\tau)]^2} dx,$$

где точка  $z$  с координатами  $(a, b)$  определяет центр окружности округления;  $\tau$  – величина временной переменной;  $\alpha(\tau)$  – функциональный параметр, который позволяет установить координаты центра движущегося круга (отверстия);  $\beta$  – параметр, координаты которого задают центр движущегося круга (отверстия) в начальный момент времени начала перекрытия отверстий.

Данные интегралы вычисляются, следуя ранее используемой схеме, с использованием замены переменных. Рассматриваемый алгоритм вычисления площади проходного отверстия на основе вычисления соответствующих определенных интегралов, позволил получить достаточно точную величину искомой площади. Конфигурация области, площадь которой необходимо вычислить при

определении искомой площади проходного отверстия, устанавливается для каждой ячейки квадратной сетки.

Площадь проходного отверстия находится как разность:  $\pi r^2 - I$ .

Приведенный алгоритм стал основой при разработке программного продукта для определения площадей, формируемых впускными и выпускными отверстиями золотника. На основе проведенных расчетов площадей пересечений этих отверстий были установлены затраты воздуха в воздухораспределительной системе пневмодвигателя и уточнены размеры каналов подведения и отведения воздуха.

Расчет воздухораспределительной системы и параметров сжатого воздуха при впуске вошли отдельным блоком в общую динамическую модель расчетов рабочих процессов автомобильного пневмодвигателя.

В соответствии с проведенными расчетами построены рабочие чертежи и изготовлен исследовательский образец воздухораспределительной системы автомобильного пневмодвигателя.

### Выводы

1. При помощи математических средств теории  $R$ -функций проведены:
  - математическое описание заданной области входного отверстия золотникового воздухораспределителя;
  - математическое описание заданной области выходного отверстия.
2. Применена для расчётов компьютерная вычислительная система «ПОЛЕ», созданная в Институте проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.
3. Представленный алгоритм позволил разработать компьютерную вычислительную программу для определения площадей проходных сечений отверстий золотникового воздухораспределителя.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяченко В.Г. Двигуни внутрішнього згорання. Теорія: підручник. (За ред. А.П. Марченка). Харків: НТУ «ХПІ». 2008. 488 с. ISBN 978-966-503-575-9.
2. Бармин В.А. Конструирование и расчет двигателей: практикум для студентов специальности 1-37 01 01 «Двигатели внутреннего сгорания»: в 3-х ч. Часть 3: Расчет деталей газораспределительного механизма / сост.: В.А. Бармин, А.В. Предко. Минск : БНТУ, 2018. 51 с. ISBN 978-985-550-989-0.
3. Олофинская В.П. Техническая механика. Курс лекций с вариантами практических и текстовых заданий. М.: Форум, Неолит. 2017. 362 с. ISBN 978-5-9906776-7-9.
4. Воронков О.І. Лісіна О.Ю., Нікітченко І.М. Визначення часу перетину в золотниковому розподільнику пневмодвигуна. *Автомобільний транспорт*. вып. 34, 2014. С. 39-43.
5. Чепурко Е.Ю. Ананьевский В.А., Шмелев В.В. Моделирование процесса открытия шиберной задвижки. [Электронный ресурс]. Режим доступа к источнику: [https://flowvision.ru/images/2016/fv\\_es10\\_niicha.pdf](https://flowvision.ru/images/2016/fv_es10_niicha.pdf) (дата 19.03.2020).
6. Жлуктов С.В. Аксёнов А.А., Савицкий Д.В. Высокореинольдсовыи расчёты турбулентного теплопереноса в программном комплексе FlowVision. *Компьютерные исследования и моделирование*. Т. 10, №4, 2018.
7. V.S. Akimov, D.P. Silaev, A.A. Aksenov, S.V. Zhluktov, D.V. Savitskiy and A. S. Simonov. Flow Vision Scalability on Supercomputers with Angara Interconnect. Pleiades Publishing, Ltd.: ISSN 1995-0802. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. Vol. 39. No. 9, 2018. PP. 1159-1169.
8. Son E.E. CAD package "FlowVision" for simulations and imitation modeling of hypersonic vehicles / E.E. Son, V.G. Degtyar, A.A. Aksenov, S.V. Zhluktov, V.I. Hlybov, S.T. Kalashnikov / Scientific Institute, Federal State Budgetary Russia. 03.1 - Aerodynamics - CFD Methods and Validation, 31st Congress of the International Council of the Aeronautical Science, Belo Horizonte, Brazil, September 09-14, 2018.
9. Пузанов А.В. Инженерный анализ в Autodesk Simulation Multiphysics. М.: ДМК Пресс, 2012. 912 с.

10. Autodesk Simulation. [Электронный ресурс]. Режим доступа к источнику: <http://help.autodesk.com>. (дата 19.03.2020).
11. Зиневи́ч В.Д., Гешли́н Л.А. Поршневые и шестеренные пневмодвигатели горношахтного оборудования. М.: Недра, 1982. 200 с.
12. Рвачев В.Л. Теория  $R$ -функций и некоторые её приложения. К.: Наукова думка, 1982. 552 с.
13. Максименко-Шейко К.В.  $R$ -функции в моделировании геометрических объектов. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. 305 с.
14. Стоян Ю.Г. Теория  $R$ -функций и актуальные проблемы прикладной математики / Ю.Г. Стоян, В.С. Проценко, Г.П. Манько и др. К.: Наукова думка, 1986. 262 с.
15. Соболев И. М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1968. 64 с.

#### REFERENCES

1. VG Dyachenko. *Internal combustion engines. Theory: textbook* (Edited by AP Marchenko). Kharkiv, Ukraina: NTU "KPI", 2008. [in Ukrainian].
2. VA Barmin, Design and calculation of engines: a workshop for students of specialty 1-37 01 01 "Engines of internal combustion": in 3 parts. Part 3: Calculation of details of the gas distribution mechanism / composition: VA Barmin, A.V. Ancestor. Minsk, Belarus: BNTU, 2018. [in Russian].
3. Olofinskaya V.P. Technical mechanics. Lecture course with options for practical and textual assignments, Moscow, Russia: Forum/Neolit, 2017. [in Russian].
4. OI Voronkov, OYu Lisina and IM Nikitchenko. "Determination of the intersection time in the spool valve of the pneumatic engine", *Road Transport*, vol. 34, pp. 39-43, 2014. [in Ukrainian].
5. EYu Chepurko, VA Ananyevsky, VV Shmelev. Simulation of the gate valve opening process / [Electronic resource] / Source access mode: [https://flowvision.ru/images/2016/fv\\_es10\\_niicha.pdf](https://flowvision.ru/images/2016/fv_es10_niicha.pdf) (date of 19.03.2020). [in Russian].
6. V Zhluktov, AA Aksyonov, DV Savitsky. "High Reynolds calculations of turbulent heat transfer in the FlowVision software package", *Computer Research and Modeling*, T. 10, No. 4, 2018. [in Russian].
7. VS Akimov, DP Silaev, AA Aksenov, SV Zhluktov, DV Savitskiy and AS Simonov. "Flow Vision Scalability on Supercomputers with Angara Interconnect Pleiades Publishing", Ltd.: *Lobachevskii Journal of Mathematics*, Vol. 39, No. 9, Pp. 1159-1169, 2018.
8. EE Son, VG Degtyar, AA Aksenov, SV Zhluktov, VI Hlybov, ST Kalashnikov. CAD package "FlowVision" for simulations and imitation modeling of hypersonic vehicles, Scientific Institute, Federal State Budgetary Russia. 03.1 – *Aerodynamics - CFD Methods and Validation*, 31st Congress of the International Council of the Aeronautical Science, Belo Horizonte, Brazil, September 09-14, 2018.
9. AV Puzanov. *Engineering Analysis at Autodesk Simulation Multiphysics*. Moscow, Russia: DMK Press, 2012. 912 с. [in Russian].
10. Autodesk Simulation. [Electronic resource]. Source access mode: <http://help.autodesk.com>. (date of 19.03.2020).
11. VD Zinevich, LA Geschlin, *Piston and gear pneumatic engines of mining equipment*. Moscow, Russia: Nedra. 1982. [in Russian].
12. VL Rvachev *The theory of R-functions and some of its applications*. Kyev, Ukraina: Naukova Dumka, 1982. [in Russian].
13. KV Maksimenko-Sheyko  $R$ -functions in modeling geometric objects. Kharkov, Ukraina: IPMash NAS of Ukraine, 2009. [in Russian].
14. YuG Stoyan, VS Protsenko, G.P. Manko et al. *Theory of R-functions and actual problems of applied mathematics*. Kyev, Ukraina: Naukova Dumka, 1986. [in Russian].
15. Sobol I.M. *Monte Carlo Method*. Moscow, Russia: Science, 1968. [in Russian].

**Воронков Александр Иванович** – доктор технічних наук, професор, Кафедра двигунів внутрішнього згорання, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Ярослава Мудрого, 25, м. Харків, Україна, 61002, e-mail: [rio@khadi.kharkov.ua](mailto:rio@khadi.kharkov.ua), ORCID: 0000-0002-8389-2459.



**Voronkov Oleksandr Ivanovych** – PhD, Doctor of Science, Professor, Department of Internal Combustion Engines, Kharkiv National Automobile and Highway University, Yaroslava Mudrogo str., 25, Kharkiv, Ukraine, 61002, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua, ORCID: 0000-0002-8389-2459.

**Воронков Александр Иванович** – Доктор технических наук, профессор Кафедры двигателей внутреннего сгорания, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, ул. Ярослава Мудрого, 25, г. Харьков, Украина, 61002, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua, ORCID: 0000-0002-8389-2459

**Колодяжний Володимир Максимович** – Доктор фізико-математичних наук, професор, Кафедра інформатики і прикладної математики, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Ярослава Мудрого, 25, м. Харків, Україна, 61002, e-mail: vladmax1949@ukr.net, ORCID: 0000-0003-0696-1403

**Kolodiazhnyi Volodymyr Maximovich** – PhD, Doctor of Science, Professor, Department of Informatics and applied mathematics, Kharkiv National Automobile and Highway University, Yaroslava Mudrogo str., 25, Kharkiv, Ukraine, 61002; e-mail: vladmax1949@ukr.net, ORCID: 0000-0003-0696-1403

**Колодяжний Владимир Максимович** - доктор физико-математических наук, профессор, Кафедра информатики и прикладной математики, ул. Ярослава Мудрого, 25, г. Харьков, Украина, 61002, e-mail: vladmax1949@ukr.net, ORCID: 0000-0003-0696-1403

**Lisina Olga Yuliyevna** – PhD, Candidate of physics and mathematicians sciences, Department of Thermophysics, Molecular Physics and Energy Efficiency, V.N.Karazin Kharkiv National University, Svobody sq., 6, Kharkiv, Ukraine, 61022, e-mail: lisininakorovina@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2732-2136.

**Лісіна Ольга Юліївна** – кандидат фізико-математичних наук, кафедра теплофізики, молекулярної фізики та енергоефективності, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61022, e-mail: lisininakorovina@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2732-2136

**Лисина Ольга Юлиевна** - кандидат физико-математических наук, кафедра теплофизики, молекулярной физики и энергоэффективности, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 6, Харьков, Украина, 61022, e-mail: lisininakorovina@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2732-2136.

**Nikitchenko Igor Mikolayovych** – кандидат технічних наук, Кафедра двигунів внутрішнього згорання, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Ярослава Мудрого, 25, м. Харків, Україна, 61002, e-mail: igor.nikitchenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9481-4296.

**Nikitchenko Ihor Mykolayovych** – PhD, Department of Internal Combustion Engines, Kharkiv National Automobile and Highway University, Yaroslava Mudrogo str., 25, Kharkiv, Ukraine, 61002, e-mail: igor.nikitchenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9481-4296.

**Никитченко Игорь Николаевич** – кандидат технических наук, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, ул. Ярослава Мудрого, 25, г. Харьков, Украина, 61002, e-mail: igor.nikitchenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9481-4296.

УДК 539.3

## Розрахункова модель для оцінки довговічності елементів конструкцій за наявності отворів та тріщин

<sup>1</sup>К.Г. Дегтярьов, <sup>2</sup>О.Л. Зайденварг, <sup>3</sup>Р.П.Москаленко, <sup>1</sup>Ю.В.Науменко

<sup>3</sup> Інститут проблем машинобудування НАН України ім. А.М. Підгорного  
вулиця Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна

<sup>1</sup> Національний аерокосмічний університет ім. Н.С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»  
вулиця Чкалова, 17, Харків, 61000, Україна

<sup>2</sup> Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,  
площа Свободи 4, Харків, 61022, Україна  
rmpd2016@gmail.com

Розглянуто задачу визначення кількості циклів до руйнування для елементів конструкцій, які мають технологічні отвори кругової форми і послаблені тріщинами. Вважається, що конструкція піддана дії циклічного навантаження (розтяг-стиск) із заданими частотою і амплітудою. Розроблено методику визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень для елемента конструкції з двома симетричними тріщинами, що виходять на контур отвору. Задачу визначення коефіцієнта інтенсивності напружень зведено до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння. Для отримання числового розв'язку цього рівняння використано метод граничних елементів. Отримано формули для ефективного числового визначення сингулярних інтегралів із особливостями типу Коші і Адамара. Проведено дослідження точності розв'язку цих сингулярних рівнянь. Розглянуто граничні елементи з різною апроксимацією густини. Встановлено, що використання граничних елементів із кубічною апроксимацією густини приводить до суттєвого підвищення точності розв'язку. Густина, які фігурують як невідомі функції в розглянутих інтегральних рівняннях, використовуються для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень. Проведено порівняння аналітичних і числових розв'язків розглянутого сингулярного рівняння. З використанням порогового значення коефіцієнта інтенсивності напружень визначається початкова довжина, при якій починається розвиток тріщин. На підставі критерію Періса визначено критичну кількість циклів навантаження, за яке тріщина підрастає до неприпустимого розміру. Це критичне число циклів є характеристикою довговічності. Для порівняння характеристик довговічності розглянуті задачі визначення критичного числа циклів для пластин з одиночними ізольованими тріщинами і з ланцюжками тріщин. Встановлено, що при однаковому рівні навантаження найменше критичне число циклів відповідає елементу конструкції з тріщинами в безпосередній близькості від технологічних отворів.

**Ключові слова:** довговічність, тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень, сингулярні інтегральні рівняння, критерій Періса.

Рассмотрена задача определения количества циклов до разрушения для элементов конструкций, имеющих технологические отверстия круговой формы и ослабленных трещинами. Предполагается, что конструкция подвержена действию циклической нагрузки (растяжение-сжатие) с заданными частотой и амплитудой. Разработана методика определения коэффициентов интенсивности напряжений для элемента конструкции с двумя симметричными трещинами, выходящими на контур отверстия. Задача определения коэффициента интенсивности напряжений сведена к решению сингулярного интегрального уравнения. Для численного решения этого уравнения использован метод граничных элементов. Получены формулы для эффективного численного определения сингулярных интегралов с особенностями типа Коши и Адамара. Проведено исследование точности решения рассматриваемого сингулярного уравнения. Рассмотрены граничные элементы с различной аппроксимацией плотности. Установлено, что использование граничных элементов с кубической аппроксимацией плотности приводит к существенному повышению точности решения. Плотности, фигурирующие в качестве неизвестных функций в рассматриваемых интегральных уравнениях, используются для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений. Проведено сравнение аналитических и численных решений рассматриваемого сингулярного уравнения. С использованием порогового значения коэффициента интенсивности напряжений определяется начальная длина трещины, при которой начинается развитие трещин. На основании критерия Периса вычислено критическое количество циклов нагружения, за которое трещина подрастает до недопустимого размера. Это критическое число циклов является характеристикой долговечности. Для сравнения характеристик долговечности рассмотрены задачи определения критического числа циклов для пластин с одиночными изолированными трещинами и с цепочками трещин. Установлено, что при одинаковом уровне нагружения наименьшее критическое число циклов отвечает элементу конструкции с трещинами в окрестности технологических отверстий.

**Ключевые слова:** долговечность, трещина, коэффициент интенсивности напряжений, сингулярные интегральные уравнения, критерий Периса.

The problem of determining a number of cycles to failure for structural elements having technological holes of circular shape and weakened by cracks is considered. It is assumed that the structure is subject to cyclic loading (tension-compression) with given frequencies and amplitudes. A technique for determining stress intensity factors for the structural element with two symmetrical cracks adjoining a contour of hole has been developed. The problem of determining the stress intensity factor has been reduced to solving a singular integral equation. For the numerical solution of this equation, the boundary element method has been used. The formulas for the effective numerical simulation of singular integrals with singularities of the Cauchy and Hadamard type have been obtained. The solution accuracy of the considered singular equation is investigated. Boundary elements with different density approximations are considered. It has been established that the use of boundary elements with a cubic

approximation of density leads to a significant increase in the solution accuracy. Densities appearing as unknown functions in the considered integral equations are used to calculate stress intensity factors. Comparison of the analytical and numerical solutions of the considered singular equation, as well as the analytical and numerical values of the stress intensity coefficients has been performed. The initial crack length starting crack development has been determined by using the threshold value of the stress intensity factor. The critical number of loading cycles leading to cracks of an unacceptable size has been calculated based on the Paris criterion. This critical number of cycles is a characteristic of durability. To compare the durability characteristics, the problems of determining the critical number of cycles for plates with single isolated cracks and with crack chains are considered. It has been established that at the same loading level, the smallest critical number of cycles corresponds to a structural element with cracks in the vicinity of technological holes.

**Key words:** durability, crack, stress intensity factor, singular integral equations, Paris criterion.

## 1 Вступ

Реальні технологічні матеріали, які використовуються в сучасних конструкціях та спорудах, зазвичай мають різного роду мікрodefекти, розвинення яких під дією прикладених навантажень може призвести як до виходу з ладу окремих деталей та вузлів, так і до руйнування всієї конструкції. На теперішній час велика кількість обладнання в нафтохімічній та енергетичній галузях України практично відпрацювала свій нормативний ресурс. В зв'язку з цим виникають питання кваліфікованої оцінки залишкового ресурсу обладнання з метою встановлення черговості модернізації та заміни застарілих вузлів устаткування. При оцінці залишкового ресурсу важливим фактором є визначення довговічності обладнання за умови наявності та розвинення втомних тріщин під дією циклічних навантажень. Початкова довжина втомних тріщин є надзвичайно малою, саме тому такі тріщини не завжди ідентифікуються при візуальному огляді під час планових ремонтних робіт. Тому дослідження при оцінці довговічності проводять для так званих модельних тріщин. Ці модельні тріщини розташовують в місцях найвищої концентрації напружень. Оскільки заздалегідь невідома початкова форма тріщини, виникає необхідність дослідження тріщин різної форми за умови однакових умов навантаження з метою визначити найбільш небезпечні тріщини і далі дослідити довговічність елементів конструкцій саме з такими тріщинами. На цей час існує значна кількість наукових праць, присвячених дослідженням довговічності тіл з тріщинами, уточненому визначенню коефіцієнтів концентрації напружень, врахуванню пластичних деформацій в околиці вершин тріщини. Серед цих праць зазначимо відомі монографії Андрейківа О.Е., Дарчука А.І., [1] Панасюка В.В., Андрейківа О.Е., Ковчіка С.Є. [2], Махутова Н.А [3], Панасюка В.В., Саврука М.П., Дацишин А.П. [4] та статті [5] – [7], в яких детально висвітлюються зазначені питання. Новітні дослідження з теорії тріщин та включень, що утворюють скупчення, є фундаментом для створення сучасних технологій визначення залишкового ресурсу. В роботі [8] побудовано базу даних щодо тріщин в трубопроводах. В [9] надано оцінку довговічності авіаційного обладнання з мікротріщинами. В роботі [10] вивчаються взаємодіючі поверхневі тріщини, в [11] досліджено вплив ланцюжків тріщин та пор на міцність зварного шва при температурному навантаженні. Актуальним залишається питання визначення найбільш небезпечних тріщин, наявність яких призводить до швидкого руйнування конструктивних елементів.

## 2 Загальне формулювання задачі розрахунку довговічності плоских елементів конструкцій з тріщинами

Після дослідження статичного та динамічного напружено-деформованого стану та визначення частот вільних коливань конструкцій за допомогою експериментальних методів або числових методів скінченних та граничних елементів [12]-[14] з'ясовуються зони найбільшої концентрації напружень в конструктивному елементі. Ці зони зазвичай розташовуються поблизу отворів, границь елементів, місць розташування зварних швів, рис.2.1 а)-в). Саме в цих зонах розташовуємо модельні тріщини, 2.1 а),в), або ланцюжки тріщин, рис. 2.1б). Далі розглядаємо задачу визначення кількості циклів, яке витримує елемент конструкції до руйнування згідно з обраним критерієм. В цьому дослідженні використано критерій Періса [15].

Розглянуті ізольована тріщина, рис. 2.1а), ланцюжок тріщин, рис. 2.1б) та дві симетричні тріщини, що виходять на край отвору, , рис. 2.1в).

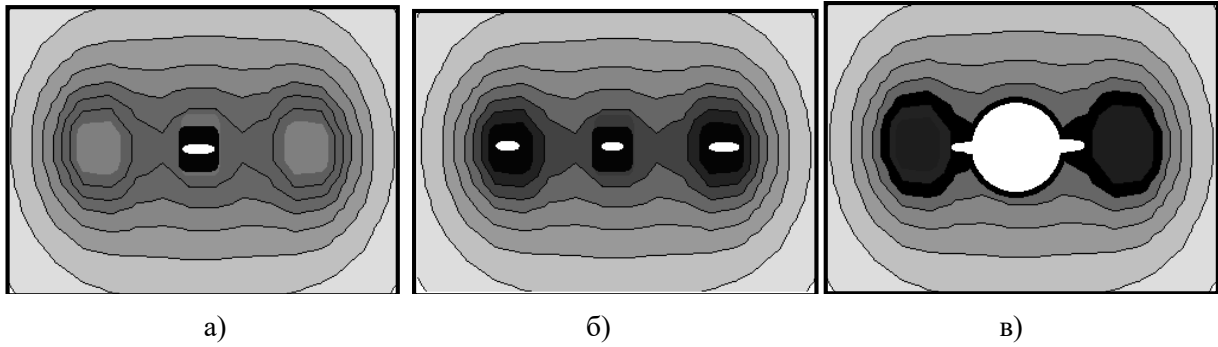


Рис.2.1. Модельні тріщини

Розглядаємо плоскі елементи конструкцій, які знаходяться під дією знакозмінного навантаження розтягу – стиску в напрямку, перпендикулярному лінії розташування тріщин.

Припустимо, що модельна тріщина розташована вздовж контуру  $L_0$ . Нехай  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ ) – контури отворів або границь елемента. При використанні інтегральних зображень [16] позначаємо невідомі густини як  $\alpha_1, \alpha_2$  на контурі  $L_0$ , а на контурах  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ ) як  $\beta_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ ). Позначимо як  $n_1^j, n_2^j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, K$ ) компоненти зовнішньої одиничної нормалі до відповідних контурів. Припустимо, що елемент конструкції знаходиться під дією заданих зовнішніх навантажень  $S_{11}, S_{12}, S_{22}$ . В [16, 17] показано, що невідомі функції  $\alpha_1, \alpha_2$  та  $\beta_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ ) можна визначити з системи  $2K + 2$  гіперсингулярних інтегральних рівнянь відносно  $2K + 2$  невідомих функцій  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ )

$$M \left\{ \int_{L_0} \sum_{i=1}^2 H_i(\xi_i, x_j) \alpha_i(\xi_0) dL_0 + \sum_{i=1}^K \int_{L_i} [P_1(\xi_i, x_j) \beta_i(\xi_i) + Q_1(\xi_i, x_j) \gamma_i(\xi_i)] dL_i \right\} = n_1^j S_{11} + n_2^j S_{12},$$

$$M \left\{ \int_{L_0} \sum_{i=1}^2 H_i(\xi_i, x_j) \alpha_i(\xi_0) dL_0 + \sum_{i=1}^K \int_{L_i} [P_2(\xi_i, x_j) \beta_i(\xi_i) + Q_2(\xi_i, x_j) \gamma_i(\xi_i)] dL_i \right\} = n_1^j S_{12} + n_2^j S_{22}, \quad (2.1)$$

де  $j = 0, 1, 2, \dots, K$ ,  $M = -\frac{\mu(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)}$ ,  $\lambda, \mu$  – параметри Ламе.

Перші доданки в інтегральних рівняннях системи (2.1) є гіперсингулярними складовими [16], а в ядрах  $P_1(\xi_i, x_j)$ ,  $Q_1(\xi_i, x_j)$ ,  $P_2(\xi_i, x_j)$ ,  $Q_2(\xi_i, x_j)$  наявні логарифмічні особливості або особливості типу Коші, якщо точки  $\xi_i$  та  $x_j$  співпадають. Числове розв'язання системи (2.1) здійснюється методом граничних елементів [17], [18].

Для коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) маємо вирази

$$k_1 = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} (n_1^0 S_{12} + n_2^0 S_{22}) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha_2(x)}{\sqrt{r}}, \quad k_2 = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} (n_1^0 S_{11} + n_2^0 S_{12}) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(x)}{\sqrt{r}}, \quad (2.2)$$

де  $r$  – відстань між вершиною тріщини та точкою спостереження,  $G$  – модуль зсуву,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Для ізольованої тріщини довжиною  $2l$ , рис. 2.1а), маємо таку систему гіперсингулярних рівнянь [17]:

$$M \int_{-l}^l \frac{\alpha_1(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2} = S_{12}, \quad M \int_{-l}^l \frac{\alpha_2(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2} = S_{22}. \quad (2.3)$$

Якщо розглядається ланцюжок тріщин в умовах дії навантаження, перпендикулярного лінії розташування тріщин, рис. 2.1б), то відповідне гіперсингулярне рівняння набуває вигляду [7], [17]

$$\int_{-l}^l \alpha_2(\xi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi-x-kd)^2} d\xi = p(x), \quad p(x) = S_{22}/M, \quad (2.4)$$

де  $l$  – половина довжини тріщини,  $d$  – відстань між центрами тріщин в ланцюжку.

В задачі визначення концентрації напружень для елемента конструкції з отвором радіусу  $R$  та двома симетричними тріщинами довжиною  $l$ , рис. 2.1в), що виходять на край отвору, маємо сингулярне рівняння [4]

$$\int_0^1 K(\eta, \xi) \alpha_2(\eta) d\eta = \pi S_{22}, \quad (2.5)$$

де  $K(\eta, \xi) = P(\eta, \xi) + S(\eta, \xi)$ ,

$$P(\eta, \xi) = \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{\lambda}{1 + \lambda\xi} + \frac{2(\xi^2 + 4\eta\xi - \eta^2) + 2\lambda\xi(\xi^2 + 9\eta\xi + 6\eta^2)}{2(1 + \lambda\xi)^2(1 + \lambda\eta)(\eta + \xi + \lambda\eta\xi)^3} +$$

$$+ \frac{2\lambda^2\eta\xi(4\xi^2 + 12\eta\xi + 3\eta^2) + 9\lambda^3\eta^2\xi^2(\xi + \eta) + 3\lambda^4\eta^3\xi^3}{2(1 + \lambda\xi)^2(1 + \lambda\eta)(\eta + \xi + \lambda\eta\xi)^3},$$

$$S(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{2(1 + \lambda\xi)} + \frac{\lambda[3\eta^2 - 2\eta\xi - \xi^2 + \lambda(\eta^3 - \eta^2\xi - 7\eta\xi^2 - \xi^3)]}{2(1 + \lambda\xi)^2(1 + \lambda\eta)(\eta + \xi + \lambda\xi)^2} -$$

$$- \frac{\lambda[\lambda^2\eta\xi(3\xi^2 + 8\eta\xi + \eta^2) + 3\lambda^3\eta^2\xi^2(\xi + \eta) + \lambda^4\eta^3\xi^3]}{2(1 + \lambda\xi)^2(1 + \lambda\eta)(\eta + \xi + \lambda\xi)^2}.$$

Тут  $\lambda = l/R$ . Числові розв'язки отримані з використанням 80 граничних елементів зі сталою апроксимацією густини всередині елементів [17], [18].

На рис. 2.2 наведені числові та аналітичні розв'язки гіперсингулярних рівнянь (2.3), рис. 2.2а) та (2.4), рис. 2.2б).

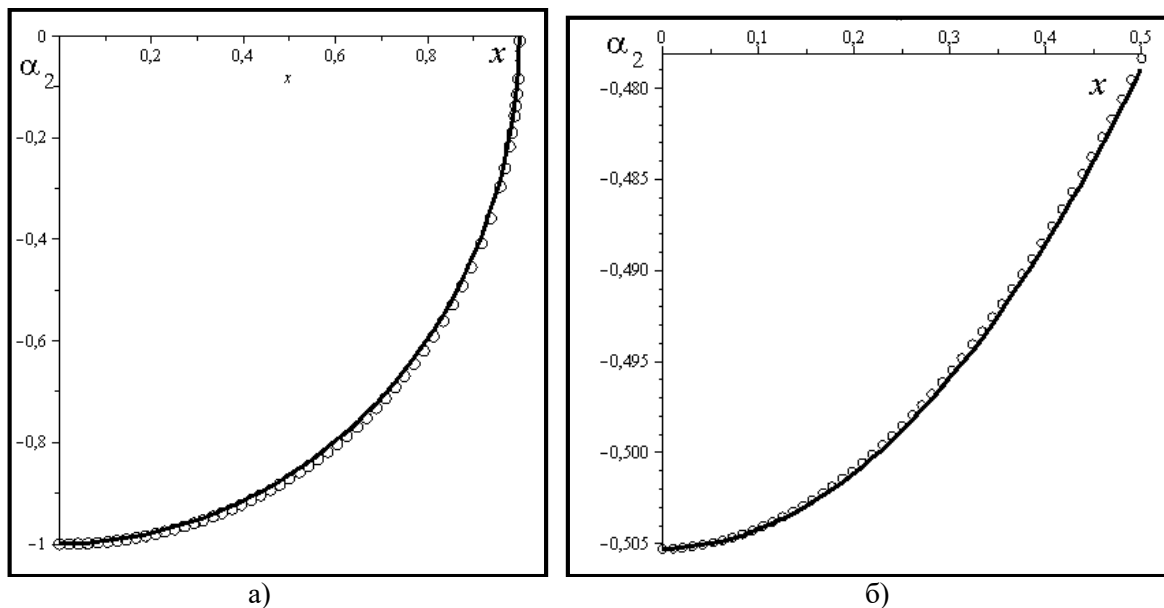


Рис.2.2. Порівняння числових та аналітичних розв'язків

Суцільні лінії на рис. 2.2 відповідають аналітичним розв'язкам, крапками позначені числові розв'язки, в розрахунках було досягнуто точність  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Така точність була досягнута при використанні граничних елементів з кубічною апроксимацією невідомих густин на елементах [17]. Застосування граничних елементів із квадратичною, лінійною та сталою апроксимацією густини дозволило отримати лише точність, меншу, або рівну  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

Для визначення критичної кількості циклів до руйнування використано залежність Періса [15]. Ця залежність має вигляд

$$\frac{dl}{dN} = \begin{cases} 10^{-20} & \Delta K < \Delta K_{th} \\ C(\Delta K)^m & \Delta K_{th} < \Delta K < K_{IC} \\ 10^3 & \Delta K > K_{IC} \end{cases} \quad (2.6)$$

Тут  $l$  – характерний розмір дефекту;  $N$  – критична кількість циклів;  $\Delta K_{th}$  – порогове значення коефіцієнту інтенсивності напружень;  $K_{IC}$  – критичне значення КІН; величина  $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ ,  $K_{max}$ ,  $K_{min}$  – максимальний та мінімальний КІН за один цикл навантаження;  $m$  – показник ступеня кривої втоми;  $C$  – характерна стала кривої втоми.

Вважаємо, що навантаження в циклі задовольняють співвідношенню

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = -1.$$

Тоді  $\Delta K = K_{max} - K_{min} = 2K_{max}$ . Число циклів до руйнування визначено шляхом інтегрування співвідношення (2.6), тобто маємо

$$dN = \frac{1}{C} (\Delta K)^{-m} dl; \quad \Delta K_{th} < \Delta K < K_{IC}.$$

Зауважимо, що при  $\Delta K < \Delta K_{th}$  тріщини не розвиваються, а при  $\Delta K > K_{IC}$  відбувається лавиноподібне розвинення тріщини, що веде до руйнування елемента конструкції.

Таким чином, отримано формулу для обчислення критичного числа циклів:

$$N = \frac{1}{C} \int_{l_0}^{l_1} (\Delta K)^{-m} dl, \quad \Delta K = 2K_{max}, \quad (2.7)$$

де  $l_0, l_1$  – початковий та кінцевий розміри тріщини, що розглядається.

### 3 Аналіз числових результатів

Згідно з нормативним документом [19] допустимі напруження основного металу становлять  $\sigma_0 = 147$  Мпа, а для зварного шва ці напруження складають  $\sigma_w = 95$  Мпа. Вважаємо, що прикладене навантаження дорівнює  $\sigma = \alpha\sigma_0$ , якщо тріщина міститься в основному металі, та  $\sigma = \alpha\sigma_w$  для тріщин, що розташовані в зоні зварного шва. Розглянуто матеріал з такими характеристиками:  $C = 3.2 \cdot 10^{-11} \text{МПа} \sqrt{\text{м}}$  – характерна стала кривої втоми;  $m = 3.09$  – показник степеню цієї кривої;  $K_{IC} = 49 \text{МПа} \sqrt{\text{м}}$  – критичний коефіцієнт інтенсивності напружень;  $\Delta K_{th} = 12 \text{МПа} \sqrt{\text{м}}$  – порогове значення КІН. Величини  $K_{IC}, \Delta K_{th}$  визначені на ВАТ «Турбоатом» розрахунково-експериментальним методом з урахуванням результатів дослідження якості металу [20].

На рис. 3.1 цифрами 1 позначені залежності  $\Delta K$  від довжини тріщини  $l$  при  $\alpha = 1$ , цифри 2 відповідають коефіцієнту навантаження  $\alpha = 0.1$ . Цифрами 3 позначені порогові значення КІН  $\Delta K_{th}$ , а цифрами 4 – критичні значення КІН  $K_{IC}$ .

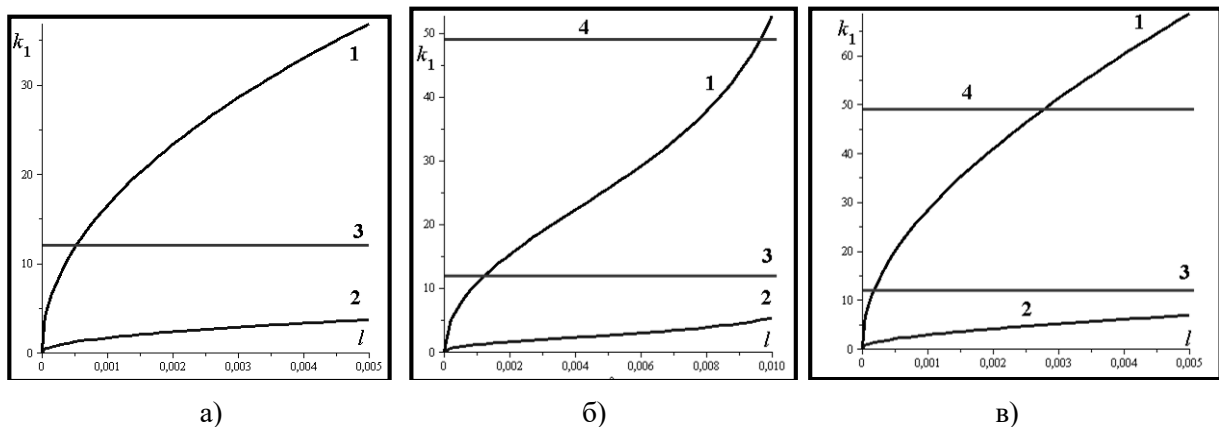


Рис.3.1. Розвинення тріщин за наявності різних дефектів

Рис. 3.1а) зображує КІН для ізольованої тріщини в пружній площині, рис. 2.1а) *дефект 1*; рис.3.1б) відповідає КІН для ланцюжка тріщин,  $d = 0.025\text{м}$ , рис. 2.1б), *дефект 2*; на рис. 3в) показано зміну КІН для двох симетричних тріщин, що виходить з кругового отвору радіуса  $R = 0.1\text{м}$ , рис.2.1в), *дефект 3*.

З отриманих результатів робимо висновок про те, що при рівні навантаження  $\sigma = 0.1\sigma_0 = 14.7\text{МПа}$  для основного металу, та  $\sigma = 0.1\sigma_w = 9.5\text{ МПа}$  для зварних швів не відбувається розвинення тріщин з початковими розмірами менш ніж  $0.005\text{м}$ . Зауважимо, що зазвичай тріщини з розмірами, більш ніж  $0.005\text{м}$  вважаються неприпустимими. Тобто, після проведення оглядових робіт елементи конструкцій за наявності таких тріщин підлягають ремонту або модернізації [19].

Далі з'ясуємо початкові розміри тріщин для навантажень  $\sigma = \sigma_0 = 147\text{МПа}$  для основного металу, та  $\sigma = \sigma_w = 95\text{ МПа}$  для тріщин, що розташовані в зоні зварних швів. Отримуємо такі значення:  $l_0 = 0.0005\text{м}$  для ізольованої тріщини в зоні основного металу,  $l_0 = 0.0012\text{м}$  для ланцюжка тріщин, що розташований в зоні зварного шва,  $l_0 = 0.0002\text{м}$  для тріщин біля технологічного отвору в основному металі. Тріщини, що мають початковий розмір менш за обчислені значення  $l_0$ , згідно з критерієм Періса, не розвиваються.

Обчислимо тепер кількість циклів навантаження для кожного із зазначених дефектів, якщо довжина тріщини змінюється від початкового значення  $l_0$  до кінцевого значення  $l_1 = 0.005\text{м}$ , або до того значення, яке є неприпустимим з точки зору критерію  $\Delta K > K_{IC}$ . Отримані результати наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1. Кількість циклів навантаження

№ дефекту	$l_0, \text{м}$	$l_1, \text{м}$	Кількість циклів
1	0.0005	0.005	8485
2	0.0012	0.005	2647
3	0.0002	0.003	413

Надані результати свідчать про те, що навантаження з амплітудами, які практично дорівнюють допустимим, призводять до швидкого руйнування елементу конструкції з тріщинами. Найбільш небезпечними виявились дефекти, що розташовані поблизу технологічного отвору; в цьому випадку кількість циклів до підростання тріщин до неприпустимих розмірів, є на порядок меншою, ніж для як ізольованих тріщин, так і ланцюжків тріщин.

#### 4 Висновки

Розроблено метод розрахунку критичної кількості циклів навантаження елементів конструкцій, що знаходяться в умовах знакозмінного циклічного навантаження. Припускається, що в зонах найбільшої концентрації напружень можуть знаходитись дефекти типу тріщин. Кількість циклів навантаження, яка призводить до підростання тріщин до неприпустимих розмірів, визначається згідно з критерієм Періса, який передбачає можливість обчислення коефіцієнту інтенсивності напружень для змінного розміру тріщини та заданого рівня навантажень. Розглянуто ізольовану тріщину, ланцюжок тріщин та дві симетричні тріщини, що виходять на край отвору. Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень запропоновано використовувати формули, засновані на застосуванні асимптотичної поведінки розв'язків гіперсингулярних інтегральних рівнянь. З'ясовано, що тріщини, які знаходяться в околі отворів, є найбільш небезпечними. В подальшому передбачається детальне вивчення втомних тріщин, які знаходяться в околі технологічних отворів, із залученням методу скінченних елементів.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Андрейкив А.Е. Драчек А.И. Усталостное разрушение и долговечность конструкций. Киев: Наук. Думка, 1987. 404 с.
2. Панасюк В.В. Андрейкив С.Е. Ковчик Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов. Киев: Наук. думка, 1971. 278 с.

3. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на усталостную прочность. М.: Машиностроение, 1981. 272 с.
4. Панасюк В.В. Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. К.: Наук. думка, 1976. 444 с.
5. Kastratović G., Vidanović N., Grbović A., Rašuo B. Approximate determination of stress intensity factor for multiple surface cracks. *FME Transactions*. 2018. Vol. 46. N 1. P. 41–47.
6. Mirko S. Maksimović. Residual Life Estimation of Cracked Aircraft Structural Components / S. Mirko Maksimović, Ivana V. Vasović, Katarina S. Maksimović, Nataša Trišović, Stevan M. Maksimović . *FME Transactions*. 2018. Vol. 124. N 46. P. 124–128.
7. Зайденварг О.Л., Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные уравнения в задачах прочности элементов конструкций с трещинами при температурном нагружении. *Вісник Харківського національного ун-ту. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2009. № 847. С. 191–196.
8. Bettayeb M., Bouali E, Abdelbaki N., Gaceb M. Establishment of a database and a classification of the defects in the metal of pipes according to their severity. *Procedia Engineering*. 2012. Vol. 42. P. 607–615.
9. Mirko S. Maksimović. Residual Life Estimation of Cracked Aircraft Structural Components S. / Mirko Maksimović, Ivana V. Vasović, Katarina S. Maksimović, Nataša Trišović, Stevan M. Maksimović. *FME Transactions*. 2018. Vol. 124. N 46. P. 124–128.
10. Guchinsky R.V., Petinov S.V. Numerical modeling of the surface fatigue crack propagation including the closure effect. *Int. J. Comput. Meth. Eng. Sci. Mech*. 2016. V. 17. DOI: 10.1080/15502287.2015.1125402.
11. Стрельникова Е. А., Ковч О. И. Исследование взаимного влияния пор в сварном шве под воздействием термосилового нагружения. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2015. №5. С. 59–63.
12. Місюра С.Ю., Сметанкіна Н.В., Місюра Є.Ю. Раціональне моделювання кришки гідротурбіни для аналізу міцності. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Динаміка і міцність машин. 2019. № 1. С. 34–39.
13. Medvedovskaya T. Strelnikova E., Medvedyeva K. Free hydroelastic vibrations of hydroturbine head covers. *Int. J. Eng. and Advanced Research Technology*. 2015. Vol. 1. No 1.– P.45–50.
14. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Пробл. машиностроения*. 2006. №1. С.105 - 118.
15. Пэрис П., Эрдоган Ф. Критерии усталостного распространения трещин. *Техн. механика*. Сер. Д. 1987. № 4. С. 60–68.
16. Стрельникова Е. А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в двумерных краевых задачах для уравнения Лапласа и уравнений Ламе. *Доп. НАН України*. 2001. №3. С. 27 – 31.
17. Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. Харьков: Новое слово, 2005. 252 с.
18. Gnitko V., Naumemko Y., Strelnikova E. Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 22. Issue 4. P. 867–881.
19. Кантор Б., Стрельникова О., Медведовська Т., Ржевська І., Еселева О., Линник О., Зеленська О. Розрахунок залишкового ресурсу елементів проточної частини гідротурбін ГЕС та ГАЕС. Методичні вказівки: нормативний документ. СОУ-НМЕВ 40.1 –21677681–51: 2011: утв. Міністерством енергетики та вугільної промисловості України: введ в действие 07.07.11. К.: Міністерство енергетики та вугільної промисловості України, 2011. 76 с.
20. Стрельникова Е.А.. Вероятностная оценка долговечности вала гидротурбины при наличии трещин/ Е.А. Стрельникова, И.Г. Сирота, А.В. Линник, Л.А. Калембет, В.Н. Зархина, О.Л. Зайденварг. *Проблемы машиностроения* . 2017. Том 20, №1.С. 28–35.

#### REFERENCES

1. А.Е. Andreikyv, А.Y. Darchuk , *Fatigue Failure And Lifespan of Constructions*. Kyev: Scientific Thought, 1987, 404 p. [in Russian]
2. V.V. Panasiuk А.Е. Andreikyv S.E. Kovchyk *Estimation Methods Of Construction Materials Crack Strength*. Kyev: Scientific Thought, 1971, 278 p. [in Russian]



3. Makhutov N.A., Deformation Cryterium Of Destruction And Fatigue Strength Structural Elements Calculation. M.:Mechanic Engineering. 1981, 272 p. [in Russian]
4. Panasiuk V.V., Stress Disribution Near Cracks In Plates And Claddings/ V.V. Panasiuk, M.P. Savruk, A.P. Datsyshyn. K.: Scientific Thought, 444 p,1976. [in Russian]
5. Kastratović G., “Approximate determination of stress intensity factor for multiple surface cracks” G. Kastratović, N.Vidanović, A. Grbović, B. Rašuo, *FME Transactions*. Vol. 46, N 1, R. 41-47, 2018.
6. Mirko S. Maksimović. Residual Life Estimation of Cracked Aircraft Structural Components S. / Mirko Maksimović, Ivana V. Vasović, Katarina S. Maksimović, Nataša Trišović, Stevan M. Maksimović, *FME Transactions*, Vol. 124, N 46, P. 124-128, 2018.
7. Zaydenvarg O.L. Strelnykova E.A., “Hypersingular Eqations In The Strength Problems Of Structural Components With Cracks Under Temperature Stress”. *Kharkiv National University Review. Series «Mathematical modeling. Information Technology. Automated Control Systems»*, № 847, P. 191-196, 2009. [in Russian]
8. Bettayeb M., Bouali E, Abdelbaki N., Gaceb M., “Establishment of a database and a classification of the defects in the metal of pipes according to their severity”. *Procedia Engineering*. Vol. 42, P. 607–615, 2012.
9. Mirko S. Maksimović. “Residual Life Estimation of Cracked Aircraft Structural Components”, S. Mirko Maksimović, Ivana V. Vasović, Katarina S. Maksimović, Nataša Trišović, Stevan M. Maksimović, *FME Transactions*. Vol. 124, N 46, P. 124–128, 2018.
10. Guchinsky R.V., Petinov S.V., “Numerical modeling of the surface fatigue crack propagation including the closure effect”. *Int. J. Comput. Meth. Eng. Sci. Mech*, V. 17, 2016. DOI: 10.1080/15502287.2015.1125402.
11. Strelnykova E. A., Kovch O. Y. “Research Of Mutual Influence Of Pores In A Weld Seab Under Thermal Power Stress”. *East-European Journal Of Modern Technologies*, №5, P. 59–63, 2015.
12. C.Iu. Misiura, N.V. Smetankina, Ye.Iu. Misiura, “Rational Modeling Of Hydroturbine Head Cover For Strength Analyses”. *National Technic University «KhPI» Review. Series: Dynamics And Strength Of Machines*, № 1, P. 34-39, 2019. [in Ukrainian]
13. Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K., “Free hydroelastic vibrations of hydroturbine head covers”. *Int. J. Eng. and Advanced Research Technology*. Vol. 1, No 1, P.45-50, 2015.
14. Eseleva E.V., Hnytko V.Y., Strelnykova E.A., “Natural Vibration Of High Pressure Tanks Under Interference With A Liquid”. *Mechanic Engineering Problems*, №1, P.105 – 118, 2006. [in Russian]
15. Paris P., Erdogan F., “The Cryterium Of Fatigue Extension”. *Of Tech. Mechanics, Ser. D*, № 4, P. 60-68, 1987. [in Russian]
16. Strelnykova E. A. “Hypersingular Equations For Two-dimensional Boundary Problevs Of Laplace And Lame Equations”. *Dop. NSA of Ukraine*. №3, P. 27 – 31, 2001. [in Russian]
17. Kantor B.Ia., Strelnykova E. A. *Hypersingular equations In Continuum Mechanics Problems*. Kharkov: New Word, 2005, 252 p. [in Russian]
18. Gnitko V., Naumemko Y., Strelnikova E. “Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles”. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 22, Issue 4, P. 867-881, 2017.
19. Kantor B., Strelnikova O., Medvedovska T., Rzhavska I., Yesseleva O., Lynnyk O., Zelenska O. Rozrakhunok zalyshkovoho resursu elementiv protochnoi chastyny hidroturbin HES ta HAES. Methodology Guidelines: Spesification. SOU-NMEV 40.1 –21677681–51: 2011: st. By The Minister of Energy and Coal Mining of Ukraine: implementation 07.07.11. K.: Ministerstvo enerhetyky ta vuhilnoi promyslovosti Ukrainy, 2011. 76 s. [in Russian]
20. Strelnykova E.A.. “Probable Estimation Of Hydroturbine Shaft Lifespan Under Cracks Occurence”. E.A. Strelnykova, Y.H. Syrota, A.V. Lynnyk, L.A. Kalemбет, V.N. Zarkhyna, O.L. Zadenvarh// *Mechanic Engineering Problems*, Book 20, №1, P. 28-35, 2017.[in Russian]

*Дегтярьов Кирило Георгійович* – провідний інженер Інституту проблем машинобудування ім. Підорного НАН України. E-mail [kdegt89@gmail.com](mailto:kdegt89@gmail.com); Orcid: 0000-0002-4486-2468.

*Зайдєнвєрг Олґа Леонидівна* – старший викладач кафедри вищої математики та системного аналізу Національного аєрокосмічного університету ім. Н.С. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут» Телефон +38-066-9827897, [olgazaydenvarg@gmail.com](mailto:olgazaydenvarg@gmail.com); [mailto:olga\\_z@gmail.com](mailto:olga_z@gmail.com); ORCID: 0000-0001-7214-6656.

**Москаленко Роман Павлович** – аспірант Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, факультет комп'ютерних наук. Телефон: 050 598 7682 E-mail: [rimancatomile@gmail.com](mailto:rimancatomile@gmail.com); Orcid: 0000-0002-5167-2793

**Науменко Юрій Віталійович**, – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А.Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна, E-mail: [strelea@ukr.net](mailto:strelea@ukr.net), ORCID: 0000-0001-9058-6727.

**Дегтярев Кирилл Георгиевич** - вєдуций инженер Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины. E-mail [kdegt89@gmail.com](mailto:kdegt89@gmail.com) Orcid: 0000-0002-4486-2468

**Зайдєнварг Ольга Леонидовна** – старший преподаватель кафедры высшей математики и системного анализа Национального аерокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт» Телефон +38-066-9827897, [olgazaydenvarg@gmail.com](mailto:olgazaydenvarg@gmail.com) [mailto:olga\\_z@gmail.com](mailto:olga_z@gmail.com); ORCID: 0000-0001-7214-6656

**Москаленко Роман Павлович** – аспірант Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, факультет комп'ютерних наук. Телефон: 050 598 7682 E-mail: [rimancatomile@gmail.com](mailto:rimancatomile@gmail.com) Orcid: 0000-0002-5167-2793

**Науменко Юрій Віталієвич**, – аспірант, Інститут проблем машиностроєния им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10, Харків, 61046, Украина, E-mail: [strelea@ukr.net](mailto:strelea@ukr.net), ORCID: 0000-0001-9058-6727.

**Degtyarev Kirill Georgiyevich** - Senior Engineer of A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems. E-mail [kdegt89@gmail.com](mailto:kdegt89@gmail.com). Orcid: 0000-0002-4486-2468.

**Zaydenvarg Olga Leonidivna** – senior lecturer of Department of Higher Mathematics and Systems Analysis of N.E. Zhukovsky National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute" , Phone: +38-066-9827897, [olgazaydenvarg@gmail.com](mailto:olgazaydenvarg@gmail.com) [mailto:olga\\_z@gmail.com](mailto:olga_z@gmail.com) ORCID: 0000-0001-7214-6656.

**Moskalenko Roman Pavlovich** – Post graduate of Karazin National University, Scholl of Computer Sciences, Phone: 050 598 7682 E-mail: [rimancatomile@gmail.com](mailto:rimancatomile@gmail.com) Orcid: 0000-0002-5167-2793.

**Naumenko Yury Vytalievich**, post graduate, A.Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, ul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046, E-mail: [strelea@ukr.net](mailto:strelea@ukr.net), ORCID: 0000-0001-9058-6727.

УДК 539.3

## Моделювання коливань рідини в призматичних резервуарах з хрестовими перегородками

<sup>1</sup>Д.В. Крютченко

<sup>1</sup> Інститут проблем машинобудування НАН України ім. А.М. Підгорного  
ул. Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна  
wollydenis@gmail.com

Розглянуті вільні коливання рідини в жорсткому призматичному резервуарі з вертикальними хрестовими перегородками. Ці перегородки поділяють резервуар на чотири відсіки. Перегородки дають змогу зменшити амплітуду плескань рідини в резервуарі при раптово прикладених зовнішніх навантажень внаслідок землетрусів, терактів, аварійних ситуацій, тощо. Припускається, що рідина є ідеальною і нестисливою, а її рух безвихровий. В цих умовах існує потенціал швидкостей, який задовольняє рівнянню Лапласа. На бічних поверхнях, днищі та перегородках виконується умова не протікання. На вільній поверхні задаються кінематична та динамічна умови. Кінематична умова полягає в тому, що ті точки рідини, що знаходились на вільній поверхні в початковий момент часу, залишаються на цій поверхні протягом всього наступного руху. Динамічна умова полягає у рівності тиску рідини на вільній поверхні атмосферному тиску. Отримано аналітичний розв'язок крайової задачі для рівняння Лапласа, у випадку, коли резервуар має дно у формі квадрату. При цьому було встановлено, що форми коливань вільної поверхні є симетричними. Зауважимо, що отримані форми коливань є однаковими в кожному відсіку. Частоти вільних коливань рідини в резервуарі з хрестовими перегородками у порівнянні з аналогічними частотами коливань призматичного бака без перегородок збільшуються. Отримані частоти та форми власних коливань вільної поверхні рідини дають змогу побудувати розв'язок крайової задачі у випадку дії раптових зовнішніх навантажень. При цьому потенціал швидкостей та функція, яка описує поведінку вільної поверхні, зображаються у вигляді рядів за формами власних коливань рідини на вільній поверхні. Це дає змогу ще на етапі проектування відбудуватися від небажаних резонансних частот при експлуатації та транспортуванні призматичних резервуарів з рідиною.

**Ключові слова:** призматичний резервуар з рідиною, вільні коливання, хрестові перегородки

Free vibrations of liquid in a rigid prismatic tank with vertical cross partitions are considered. These partitions divide the tank into four compartments. The partitions make it possible to reduce the amplitude of liquid sloshing in the tank under suddenly applied external loads due to earthquakes, terrorist attacks, emergencies, etc. It is assumed that the fluid is perfect and incompressible, and its motion is vortex-free. Under these conditions, there is a velocity potential that satisfies the Laplace equation. A non-leak condition is applied on the sides, bottom and partitions of the tank. On a free surface, kinematic and dynamic conditions are set. The kinematic condition is that the points of fluid that are on the free surface at the initial moment will remain on that surface for the entire subsequent motion. The dynamic condition is the equality of the fluid pressure on the free surface to the atmospheric pressure. An analytical solution of the boundary value problem for the Laplace equation is obtained for the case of the tank with a square bottom. The free surface oscillations have been found to be symmetrical. It should be noted that the oscillation patterns in each compartment are the same. The frequencies of free oscillations of the fluid in the tank with the cross partitions are increased in comparison with similar frequencies of oscillations of the prismatic tank without partitions. The frequencies obtained and the modes of natural oscillations of the fluid free surface allow us to solve the boundary value problem in case of sudden external loads. In this case, the velocity potential and the function describing the behaviour of the free surface are represented as the series according to the modes of natural fluctuations of the fluid free surface. Therefore it is possible to prevent the unwanted resonant frequencies at exploitation and transportation by designing prismatic tanks in a particular way.

**Key words:** prismatic fuel tank, free vibrations, baffle, quarter baffles.

Рассмотрены свободные колебания жидкости в жестком призматическом резервуаре с вертикальными крестовыми перегородками. Эти перегородки разделяют резервуар на четыре отсека. Перегородки позволяют уменьшить амплитуду плесканий жидкости в резервуаре при внезапно приложенных внешних нагрузок вследствие землетрясений, терактов, аварийных ситуаций и тому подобное. Предполагается, что жидкость является идеальной и несжимаемой, а ее движение безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей, который удовлетворяет уравнению Лапласа. На боковых поверхностях, днище и перегородках выполняется условие непротекания. На свободной поверхности задаются кинематическое и динамическое условия. Кинематическое условие заключается в том, что те точки жидкости, находящиеся на свободной поверхности в начальный момент времени, остаются на этой поверхности в течение всего последующего движения. Динамическое условие заключается в равенстве давления жидкости на свободной поверхности атмосферному давлению. Получено аналитическое решение краевой задачи для уравнения Лапласа в случае, когда резервуар имеет дно в форме квадрата. При этом было установлено, что формы колебаний свободной поверхности являются симметричными. Заметим, что полученные формы колебаний одинаковы в каждом отсеке. Частоты свободных колебаний жидкости в резервуаре с крестовыми перегородками, по сравнению с аналогичными частотами колебаний призматического бака без перегородок, увеличиваются. Полученные частоты и формы собственных колебаний свободной поверхности жидкости позволяют построить решение краевой задачи в случае действия внезапно приложенных внешних нагрузок. При этом потенциал скоростей и функция, которая описывает поведение свободной поверхности, изображаются в виде рядов по формам собственных колебаний свободной поверхности жидкости. Это позволяет еще на этапе проектирования отстроиться от нежелательных резонансных частот при транспортировке и эксплуатации призматических резервуаров с жидкостью.

**Ключевые слова:** призматический резервуар с жидкостью, свободные колебания, крестовые перегородки

## 1 Вступ

В багатьох галузях сучасної промисловості використовуються резервуари та контейнери різної форми для збереження рідких заповнювачів. Під дією раптово прикладених навантажень внаслідок маневрування при транспортуванні, сейсмічних впливів внаслідок землетрусів, або інтенсивних імпульсних навантажень внаслідок падіння літака, терактів, інших форс-мажорних обставин, рідина, що заповнює контейнер, починає інтенсивний рух. Цей рух є особливо небезпечним, якщо рідина не повністю заповнює резервуар. Цей феномен має назву плескання [1]. Такі явища пов'язані з виплеском небезпечного заповнювача і можуть мати негативні наслідки. Тому актуальним є питання демпфування плескань, зменшення їх амплітуди. З цією метою в резервуари встановлюють різного роду перегородки. Впливу перегородок на частоти і форми вільних коливань присвячено велику кількість наукових досліджень. Серед них зазначимо роботи [2-4], в яких детально висвітлюються ці питання. Зауважимо, що на демпфування плескань впливають форма перегородки [5], форма самого резервуару [6], засіб встановлення перегородки [7] та ін. Проблемам вимушених коливань рідини в резервуарах та паливних баках присвячено роботи [8-10]. Зазначимо, що в [5] доведено, що встановлення вертикальних хрестових перегородок змінює спектр вільних коливань в бік збільшення. Це дозволяє проведення відстроювання від небезпечних частот. В цій роботі досліджуються коливання рідини в призматичному жорсткому резервуарі з хрестовими перегородками.

## 2 Формулювання задачі та основні співвідношення

Розглядається призматичний резервуар з хрестовими вертикальними перегородками, рис.1.

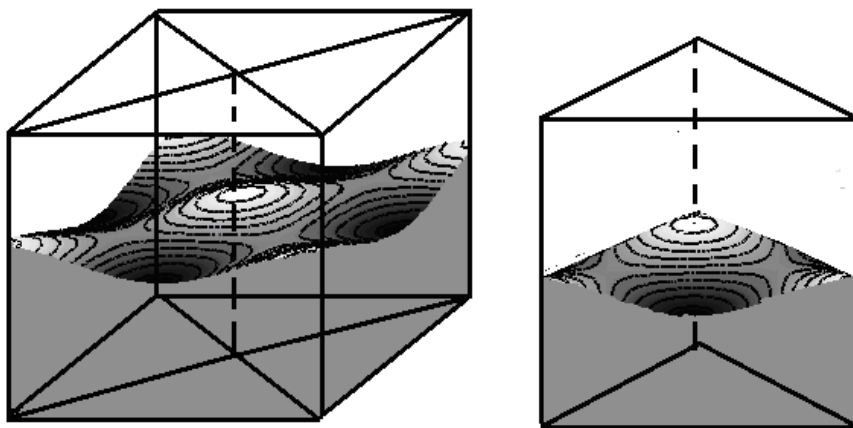


Рис. 2.1 Призматичний резервуар з вертикальними перегородками та його відсік

Вважаємо, що чотири відсіки резервуара частково заповнені ідеальною нестисливою рідиною, при чому рівень заповнення  $h$  у всіх відсіках однаковий. Припускаємо, що рух рідини є безвихровим. Зауважимо, що якщо рух починається із стану спокою, то він залишається потенційним протягом всього наступного часу згідно з теоремою Томпсона [1,8,11]. Використовуємо припущення існування потенціалу швидкостей  $\varphi(x,y,z,t)$  згідно з [1,9], тоді

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

В зазначених умовах цей потенціал задовольняє рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1)$$

Сформулюємо граничні умови для диференціального рівняння (2.1). Позначимо сукупність змочених бічних поверхонь та днища як  $S_1$ . Згідно з умовою непротікання на жорстких стінках маємо [5,12]

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad (2.2)$$

де  $\mathbf{n}$  - зовнішня одинична нормаль до змоченої поверхні.

Припустимо, що з контейнером пов'язано декартову систему координат  $Oxyz$ , при цьому вільна поверхня рідини  $S_0$  розташована в площині  $z = h$  в стані спокою. Для обчислення тиску рідини  $p$  будемо використовувати лінеаризоване рівняння Бернуллі у вигляді

$$p - p_0 = -\rho \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))z \right], \quad (2.3)$$

де  $\rho$  - густина рідини,  $g$  - прискорення вільного падіння,  $\mathbf{a}_x = \nabla[x \cdot a_x(t)]$ ,  $\mathbf{a}_z = \nabla[z \cdot a_z(t)]$  є відповідно горизонтальним та вертикальним прискореннями, що зумовлені дією зовнішньої сил,  $p_0$  - атмосферний тиск.

Розглянемо умови на вільній поверхні  $S_0$ . Це динамічна та кінематична умови. Кінематична умова полягає в тому, що ті точки рідини, що знаходились на вільній поверхні в початковий момент часу, залишаються на цій поверхні протягом всього наступного руху. Припустимо, що деяка функція  $\zeta = \zeta(x, y, t)$  описує форму та положення вільної поверхні за часом, тобто вважаємо, що

$$z = \zeta(x, y, t) \Big|_{S_0}.$$

Математичне подання кінематичної умови в лінійному формулюванні має вигляд [13,14]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Динамічна умова полягає у рівності тиску рідини на вільній поверхні  $S_0$  атмосферному тиску. Згідно з рівнянням (2.3) динамічна умова має вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta = 0. \quad (2.5)$$

Зауважимо, що рівняння (2.3) відповідає випадку вимушених коливань. Якщо розглядатимуться вільні коливання, то динамічна умова приймає форму

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (2.6)$$

Для формулювання граничних умов на хрестових перегородках припустимо для спрощення, що днище резервуару є квадратом зі сторонами  $[2a, 2a]$ .

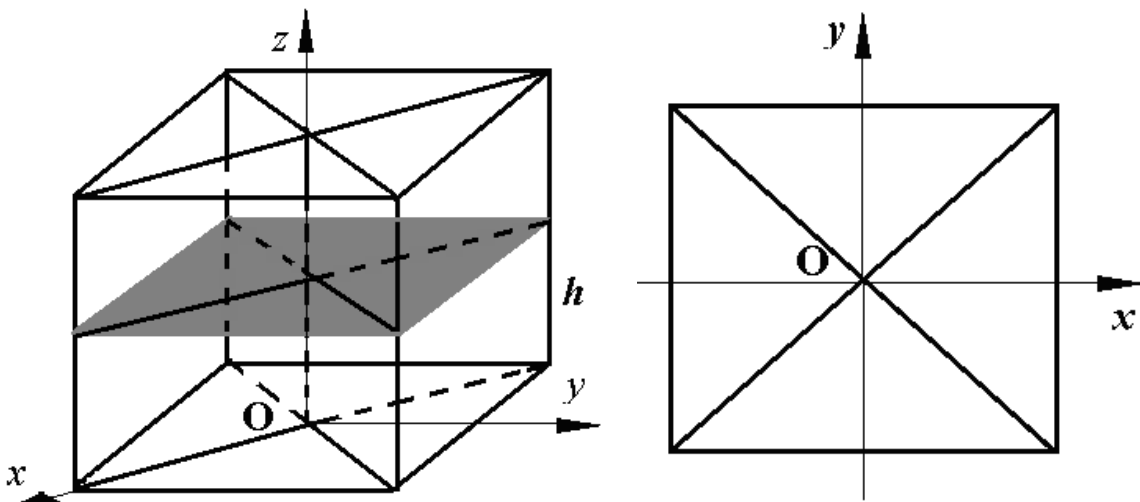


Рис.2.2 Горизонтальний переріз резервуару

Рівняння площин, в яких знаходяться перегородки є такими

$$y + x = 0, \quad y - x = 0.$$

Одиничними нормальними до поверхонь перегородок є, відповідно, такі вектори

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0).$$

Оскільки  $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = (\text{grad } \varphi, \mathbf{n})$ , то граничні умови на перегородках приймають вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (2.7)$$

До граничних умов (2.4)-(2.7) стосовно рівняння Лапласа (2.1) додаємо умову розв'язності крайової задачі

$$\int_{s_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS = 0. \quad (2.8)$$

Таким чином, сформульовано крайову задачу (2.1), (2.4), (2.6)-(2.8) для визначення вільних коливань рідини в резервуарі з хрестовими вертикальними перегородками.

### 3 Аналітичний розв'язок задачі про вільні коливання рідини в призматичному резервуарі з хрестовими вертикальними перегородками

Зобразимо потенціал швидкостей у вигляді

$$\varphi(x, y, z, t) = \exp(i\omega t)\varphi(x, y, z).$$

Далі використовуємо метод розділення змінних, а саме вважаємо, що

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (3.1)$$

Підставляючи подання (3.1) у диференціальне рівняння (2.1), отримуємо

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda^2. \quad (3.2)$$

Далі отримуємо

$$Z(z) = C_1 \exp(\lambda z) + C_2 \exp(-\lambda z).$$

Виконуючи крайову умову непротікання (2.2) на поверхні днища, яка знаходиться в площині  $z = 0$ , отримуємо

$$\left. \frac{dZ}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad \lambda(C_1 - C_2) = 0.$$

Звідси маємо

$$Z(z) = C_1 \cosh(\lambda z).$$

Далі з (3.2) отримуємо

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda^2 = -\mu^2, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\gamma^2, \quad \lambda^2 = \mu^2 + \gamma^2.$$

З цих рівнянь знаходимо, що частинним розв'язком диференційного рівняння (2.1) є

$$\varphi(x, y, z) = \cosh(\lambda z) \cos(\mu x) \cos(\gamma y).$$

Розглянемо граничні умови (2.7). Перша з них відноситься до поверхні  $y + x = 0$ . На цій поверхні маємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\mu \cosh(\lambda z) \sin(\mu x) \cos(\gamma y) = -\mu \cosh(\lambda z) \sin(\mu x) \cos(\gamma x),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\gamma \cosh(\lambda z) \cos(\mu x) \sin(\gamma y) = \gamma \cosh(\lambda z) \cos(\mu x) \sin(\gamma x).$$

Зауважимо, що  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ , якщо  $\gamma = \mu$ . Аналогічно, на поверхні  $y - x = 0$  маємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\mu \cosh(\lambda z) \sin(\mu x) \cos(\gamma y) = -\mu \cosh(\lambda z) \sin(\mu x) \cos(\gamma x),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\gamma \cosh(\lambda z) \cos(\mu x) \sin(\gamma y) = -\gamma \cosh(\lambda z) \cos(\mu x) \sin(\gamma x),$$

тобто при  $\gamma = \mu$  будемо мати  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ .

Таким чином, крайові умови (2.7) виконані.

На бічній поверхні  $y + a = 0$  з умови непротікання (2.2) отримуємо

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=-a} = 0, \quad \sin(\mu a) = 0$$

та знаходимо такі значення  $\mu_k = \frac{\pi k}{a}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Звідси знаходимо такі частинні розв'язки крайової задачі, що розглядається

$$\varphi_{2k+1}(x, y, z) = \cosh\left(\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi k}{a}\right)z\right) \sin\left(\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi k}{a}\right)x\right) \sin\left(\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi k}{a}\right)y\right), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$\varphi_{2k}(x, y, z) = \cosh\left(\sqrt{2}\frac{\pi k}{a}z\right) \cos\left(\frac{\pi k}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi k}{a}y\right), \quad k=1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Переходимо до крайових умов на вільній поверхні. Зобразимо невідомі потенціал швидкостей  $\varphi(x, y, z, t)$  та функцію  $\zeta = \zeta(x, y, t)$ , що описує еволюцію вільної поверхні у такий засіб

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) \varphi_k(x, y, z), \quad (3.4)$$

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(x, y, h)}{\partial z}. \quad (3.5)$$

Якщо використовуються подання (3.4), (3.5), то крайова умова (2.4) виконується автоматично. Для виконання умови (2.6) отримаємо таке співвідношення

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{c}_k(t) \varphi_k(x, y, h) + g \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(x, y, h)}{\partial z} = 0.$$

З використанням зображень (3.3) за умови ортогональності функцій  $\varphi_k(x, y, z)$  отримаємо такі співвідношення

$$\ddot{c}_k(t)\alpha_k \cosh\left(\sqrt{2} \frac{\pi k}{a} h\right) + c_k(t)g\alpha_k \sqrt{2} \frac{\pi k}{a} \sinh\left(\sqrt{2} \frac{\pi k}{a} h\right) = 0, k = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

З (3.6) знаходимо коефіцієнти  $c_k(t)$  у вигляді

$$c_k(t) = \exp(i\omega_k t), \quad \omega_k^2 = g\sqrt{2} \frac{\pi k}{a} \tanh\left(\sqrt{2} \frac{\pi k}{a} h\right) \quad (3.7)$$

Таким чином, отримані частоти та форми вільних коливань призматичного резервуара з хрестовими перегородками. Частоти обчислюються за формулами (3.7), а форми – за формулами (3.3). На рис. 3.1 зображені перші три форми коливань рідини в призматичному резервуарі з хрестовими перегородками.

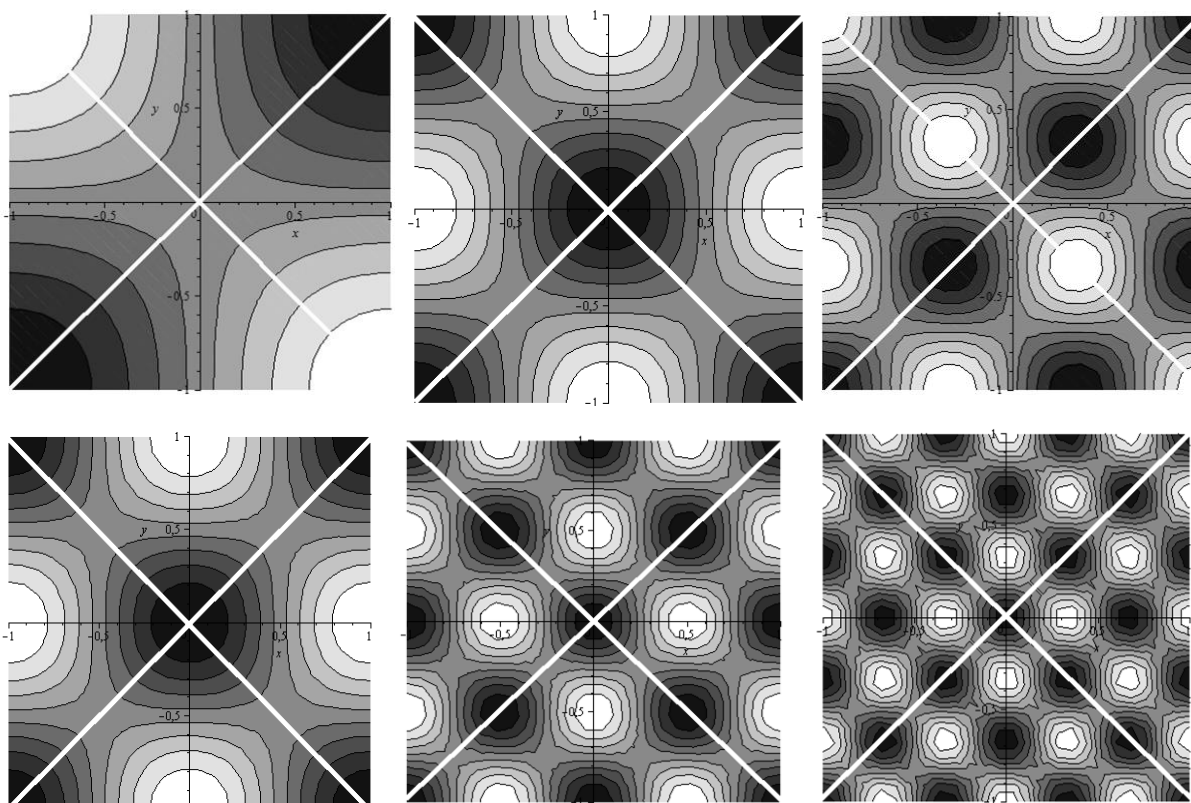


Рис. 3.1 Форми коливань рідини в призматичному резервуарі (горизонтальний переріз)

У таблиці 3.1 наведено порівняння частот коливань рідини в призматичних резервуарах з перегородками та без перегородок.

Таблиця 3.1. Частоти коливань рідини

n	без перегородок	з перегородками
1	4.051164194	4.613563138
2	4.051164194	6.008587070
3	5.710012556	8.085473483
4	5.892165855	9.336315604

Зауважимо, що отримані форми коливань є однаковими в кожному відсіку. Частоти коливань у порівнянні з частотами коливань призматичного бака без перегородок [16] збільшуються. Зазначимо також, що в розглянутому випадку реалізуються лише симетричні форми.

### Висновки

Досліджено вільні коливання рідини в призматичному резервуарі з хрестовими перегородками. Встановлено, що наявність таких перегородок приводить до збільшення частот



коливань рідини у порівнянні з резервуаром, що не має перегородок. Отримано частоти та форми вільних коливань резервуара, які в подальшому будуть використані як базисні функції для аналізу вимушених коливань рідини в призматичних резервуарах з перегородками.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Ibrahim R.A. *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press. New York. 2005.
2. Lloyd N., Vaiciurgis E. & Langrish T.A.G. The effect of baffle design on longitudinal liquid movement in road tankers: an experimental investigation. *Trans Inst. Chem. Engrs.* Vol. 80, No 4, 2002, pp.181-185.
3. Guorong Y., Rakheja S. Straight-line braking dynamic analysis of a partly-filled baffled and unbaffled tank truck. *I. Mech. E.*, Vol. 223, 2009, pp. 11-26.
4. Gavrilyuk I., Lukovsky I., Trotsenko Yu. & Timokha A. Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part 1. Linear fundamental solutions. *J. of Engineering Mathematics*. Vol. 54. 2006. pp. 71-88.
5. V. Gnitko, Y. Naumemko, E. Strelnikova Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 22. Issue 4. P. 867-881.
6. Gavrilyuk I., Hermann M, Lukovsky I., Solodun O., Timokha A. Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks. *Engineering Computations*. Vol. 25 No 6. 2008. pp.518 – 540.
7. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*, V. 5. 2019. pp.31-41.
8. Dodge F.T., Kana D.D., Abramson H.N., Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers, *AIAA J.* **3**, pp. 685–695, 1965.
9. Wang, J., Sun, S, «Study on liquid sloshing characteristics of a swaying rectangular tank with a rolling baffle», *J Eng Math* **119**, 23–41 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10665-019-10017>
10. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles *J. Modern Technology & Engineering* Vol.3, No.1, pp.15-52, 2018.
11. Lamb H. *Hydrodynamics*. 6th ed. *Cambridge University Press*, 1993. 634 p.
12. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Пробл. машиностроения*. №1, 2006, С.105-118.
13. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. –2020 Vol.111, P. 78-87. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008.
14. Шувалова Ю.С., Крютченко Д.В., Стрельникова Е.А. Интегральные уравнения в задаче о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в жестких резервуарах. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2016. №3. С. 455-459.
15. Kriutchenko D. Forced liquid vibrations in prismatic tanks under vertical and horizontal loads. *Вісник Харківського національного університету імені ВН Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»* 2019. №42. С. 68-76.

#### REFERENCES

1. Ibrahim R.A, *Liquid Sloshing Dynamics*, Cambridge University Press, New York, 2005.
2. Lloyd N., Vaiciurgis E. & Langrish T.A.G, «The effect of baffle design on longitudinal liquid movement in road tankers: an experimental investigation», *Trans Inst. Chem. Engrs.*, Vol. 80, No 4, 2002, pp.181-185.
3. Guorong Y., Rakheja S, «Straight-line braking dynamic analysis of a partly-filled baffled and unbaffled tank truck», *I. Mech. E.*, Vol. 223, 2009, pp. 11-26.
4. Gavrilyuk I., Lukovsky I., Trotsenko Yu. & Timokha A, “Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part 1. Linear fundamental solutions”, *J. of Engineering Mathematics*, Vol. 54, pp. 71-88, 2006.

5. V. Gnitko, Y. Naumemko, E. Strelnikova, “Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles”, *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 22. Issue 4. P. 867-881, 2017.
6. Gavriluk I., Hermann M, Lukovsky I., Solodun O., Timokha A, «Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks», *Engineering Computations*, Vol. 25 No 6, pp.518 – 540, 2008.
7. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. «Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations», *Journal of Mathematics and Statistical Science*, V. 5, pp.31-41, 2019.
8. Dodge F.T., Kana D.D., Abramson H.N, «Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers», *AIAA J.* 3, pp. 685–695, 1965.
9. Wang, J., Sun, S, «Study on liquid sloshing characteristics of a swaying rectangular tank with a rolling baffle», *J Eng Math* 119, 23–41 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10665-019-10017>
10. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y, «Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles», *J. Modern Technology & Engineering*, Vol.3, No.1, pp.15-52, 2018.
11. Lamb H. *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge University Press, 634 r, 1993.
12. Eseleva E.V., Gnitko V.I., Strelnikova E.A, “Own vibrations of pressure vessels during interaction with a liquid”, *Institute of Problems of mechanical engineering problems A.N. Pidgornogo*. №1, pp.105-118, 2006. [in Russian]
13. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K, “Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020 Vol.111, R. 78-87. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008.
14. Shuvalova Yu.S., Kryutchenko D.V., Strelnikova E.A, “Integral equations in the problem of free and forced fluctuations in the liquid in the tanks for children”, *Khresonsky visnuk National Technical University*, №3. pp. 455-459. 2016.. [in Russian]
15. Kriutchenko D, «Forced liquid vibrations in prismatic tanks under vertical and horizontal loads», *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», №42, pp. 68-76, 2019.*

**Крютченко Денис Володимирович** – аспірант Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. Телефон: 093208085753 E-mail: [wollydenis@gmail.com](mailto:wollydenis@gmail.com). Orcid 0000-0002-6804-6991.

**Крютченко Денис Владимирович** – аспірант Інститута проблем машиностроєння імені А.Н. Подгорного НАН України. Телефон: 093208085753 E-mail: [wollydenis@gmail.com](mailto:wollydenis@gmail.com). Orcid: 0000-0002-6804-6991.

**Kriutchenko Denys** – Post-graduate of A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems. Phone: 093208085753 E-mail: [wollydenis@gmail.com](mailto:wollydenis@gmail.com). Orcid: 0000-0002-6804-6991.

УДК 004.415.53

## Идентификация отпечатков пальцев на основе гамильтоновых циклов распределения локальных признаков

О.М. Мелкозерова<sup>1</sup>, С.Г. Рассомахин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы 4, г. Харьков, 61022, Украина  
olja.mex@gmail.com

Рассмотрена задача нахождения длин Гамильтоновых циклов на сложных графах. Задача имеет много практических приложений, в том числе при определении оптимальных маршрутов (задача коммивояжера), идентификации структур графов (распознавание характеристик локальных признаков биометрических объектов) и др. При решении задачи верификации биометрических образцов возникают проблемы дописывания или исчезновения опорных точек, деформация расстояний между ними, линейные и угловые смещения всего образца. При помощи метода, описанного в статье, возможно исключение проблемы смещений, так как решение обладает устойчивостью при перемешивании точек. Опорные планы, которые можно получить, также обладают подобного рода устойчивостью. Для их получения необходима меньшая вычислительная сложность, это обеспечивает большую точность распознавания. Предложено подробное описание решения задачи, основанное на применении метода ветвей и границ для симметричных матриц графов, описывающих распределение локальных признаков на изображениях отпечатков пальцев. Известно, что гарантированное получение решения нахождения длины Гамильтонова цикла для произвольного графа плоскостного распределения точек возможно только при использовании полного перебора всех вариантов. Однако вычислительная сложность такого перебора вычислительно не приемлема. Метод ветвей и границ, как и все существующие методы направленного поиска, не гарантирует нахождение решения при произвольно большой размерности графа. Поэтому предложен способ декомпозиции графов, позволяющий свести сложную задачу к совокупности более простых. При этом достигается существенное снижение вычислительной сложности. Показана относительная инвариантность метрики Гамильтоновых циклов к вероятностным смещениям, характерным для задач распознавания биометрических образов.

**Ключевые слова:** Гамильтонов цикл, кратчайшее расстояние, локальные признаки, оптимальный маршрут.

Розглянуто задачу знаходження довжин Гамільтонових циклів на складних графах. Завдання має багато практичних застосувань, в тому числі при визначенні оптимальних маршрутів (завдання комівояжера), ідентифікації структур графів (розпізнавання характеристик локальних ознак біометричних об'єктів) та ін. При вирішенні задачі верифікації біометричних зразків виникають проблеми дописування або зникнення опорних точок, деформування відстаней між ними, появи лінійних та кутових зміщень всього зразку. За допомогою методу, який описується у статті, можна виключити проблему зміщень, так як рішення має стійкість при змішуванні точок. Опорні плани, які також отримуються, також мають подібного роду стійкість. Але для їх отримання необхідна менша обчислювальна складність, це забезпечує більшу точність розпізнавання. Запропоновано докладний опис рішення задачі, заснований на застосуванні методу гілок і меж для симетричних матриць графів, які описують розподіл локальних ознак на зображеннях відбитків пальців. Відомо, що гарантоване отримання рішення знаходження довжини Гамільтонова циклу для довільного графа площинного розподілу точок можливо тільки при використанні повного перебору всіх варіантів. Однак обчислювальна складність такого перебору обчислювально не прийнятна. Метод гілок і меж, як і всі існуючі методи спрямованого пошуку, не гарантує знаходження рішення при довільно великій розмірності графа. Тому запропонований спосіб декомпозиції графів, що дозволяє звести складну задачу до сукупності більш простих. При цьому досягається істотне зниження обчислювальної складності. Показана відносна інваріантність метрики Гамільтонових циклів до імовірнісних зсувів, які є характерними для задач розпізнавання біометричних образів.

**Ключові слова:** Гамільтонів цикл, найкоротша відстань, локальні ознаки, оптимальний маршрут, біометрика.

The problem of finding the lengths of Hamiltonian cycles on complex graphs is considered. The task has such practical applications as determining the optimal routes (salesman's task), identifying graph structures (recognizing the characteristics of local features of biometric objects), etc. When solving the task of verification of biometric samples, the problems of addition or disappearance of reference points, deformation of the distances between them, the appearance of linear and angular displacements of the whole sample emerges. Using the method described in the article, the problem of displacements can be eliminated, as the solution is stable when shuffling of the points is present. Moreover, it is possible to obtain reference plans with the same stability. Obtaining them requires less computational complexity and provides greater recognition accuracy. A detailed description of the problem solution based on the application of the method of branches and boundaries for symmetric matrices of graphs, which describe the distribution of local features in the images of fingerprints, has been proposed. It is known that a guaranteed solution for finding the length of the Hamiltonian cycle for an arbitrary graph of the planar distribution of points is possible only by using an exhaustive search. However, the computational complexity of such a search is not acceptable. The method of branches and boundaries, like all existing methods of directional search, does not guarantee finding a solution with an arbitrarily large dimension of the graph. Therefore, a method of decomposing graphs is proposed, which allows reducing a complex problem to a set of simpler ones. That allows for a significant reduction in computational complexity. The relative invariance of the metrics of Hamiltonian cycles to probabilistic shifts, which are characteristic of biometric pattern recognition problems, has been shown.

**Keywords:** Hamiltonian cycle, the shortest distance, local features, an optimal route, biometric.

## 1 Вступление

Математическое решение задач идентификации и аутентификации биометрических объектов существенно затруднено из-за наличия неконтролируемых вероятностных искажений. Эти искажения проявляются при получении нескольких реализаций одних и тех же объектов в различных условиях. Доминирующим видом искажений являются афинные – линейные сдвиги и повороты плоскостных изображений. Проблема надежности распознавания, в основном, заключается в правильном выборе метрики оценки степени похожести модифицированных реализаций биометрических образов. Особенно актуальным является выбор подходящей метрики при анализе дактилоскопических изображений отпечатков пальцев. В соответствии с принятыми международными стандартами идентификация отпечатков производится, главным образом, по характеристикам (взаимному расположению на плоскости) локальных признаков – минуций. Поэтому биометрическими шаблонами отпечатков пальцев, фактически, являются плоскостные распределения точек локальных признаков.

Одной из перспективных метрик оценки похожести плоскостных распределений точек является метрика Гамильтоновых циклов. Эта метрика предполагает вычисление замкнутых последовательностей ребер графа, которые соединяют точки (узлы графов) определенным образом, чтобы получить кратчайший маршрут. Получаемый, как правило, единственный кратчайший маршрут и называется Гамильтоновым циклом. Очевидно, что объективность и потенциальные преимущества метрики Гамильтоновых циклов следуют из неизменности их длины при смещениях и поворотах графов. В большинстве практических случаев поиск Гамильтоновых циклов на графах связан с решением задачи коммивояжера.

В канонической постановке задача коммивояжера формулируется следующим образом. Имеется совокупность из  $n$  городов. Коммивояжер, выходящий из какого-нибудь фиксированного города, желает посетить  $n - 1$  других городов и вернуться в исходный пункт. В каждый из городов допускается входить и выходить только один раз. Расстояния между всеми этими городами известны. Требуется установить, в каком порядке он должен посещать города, чтобы общее пройденное расстояние было минимально.

Таким образом, суть задачи сводится к отысканию минимального расстояния между совокупностью точек на плоскости при обязательном, однократном их посещении. Исходными данными при анализе биометрических шаблонов отпечатков пальцев является совокупность из  $n$  точек (минуций) с заданными координатами  $(X_i, Y_i)$ ,  $i \in [1, n]$ . Данная совокупность может быть использована для формирования квадратной симметричной матрицы взаимных расстояний  $M$ , возможный вид которой представлен в таблице 1.1. Элементы матрицы являются взаимными евклидовыми расстояниями между узлами графа:

$$d_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}, \quad d_{ij} = d_{ji}, \quad i, j \in [1, n], \quad (1.1)$$

Поскольку условиями задачи определено, что  $n > 1$ , а вход и выход в каждую из вершин может быть осуществлен только один раз, то переходы при совпадающих индексах  $i = j$  являются запрещенными. Для того, чтобы придать задаче формализованный вид, достаточно положить величины соответствующих расстояний  $d_{ij}|_{i=j} = \infty$ . Поэтому элементы главной диагонали матрицы содержат  $\infty$ .

Следует отметить, что матрица взаимных расстояний остается неизменной при произвольных поворотах и линейных сдвигах распределения точек анализируемого графа. Это свойство предопределяет потенциальное преимущество метрики Гамильтоновых циклов, как объективной характеристики индивидуальных свойств плоскостных распределений. При этом, возможная смена лексикографического перечисления (нумерации) вершин в условиях действия афинных искажений не влияет на характеристики метрики. При этом происходит лишь циклический сдвиг элементов в строках, что не вызывает потерю оптимального решения, если оно существует.

## 2 Описание алгоритма нахождения Гамильтонова пути методом ветвей и границ

Для решения задачи нахождения длин кратчайших гамильтоновых циклов был выбран метод ветвей и границ [1], позволяющий на этапе последовательного анализа исключать заведомо не выгодные варианты маршрутов и сокращающий, тем самым, вычислительную сложность поиска.

Следует отметить, что в [1] достаточно хорошо исследованы свойства выбранного метода для особого случая – несимметричной матрицы взаимных расстояний. В рассматриваемой задаче матрица является симметричной относительно главной диагонали. Эта особенность матрицы вызывает существенное увеличение ветвей поиска и исключения вариантов решений, т.е. делает задачу более громоздкой. Учитывая достаточно большую размерность биометрических шаблонов (от 40 до 150 минут), в силу отмеченных выше причин, рассчитывать на нахождение истинного Гамильтонова цикла на полном распределении не следует. Поэтому мы рассматриваем возможность декомпозиции полного графа на совокупность подграфов меньшей размерности. Это является полезным, так как вместо одной числовой характеристики распределения точек получается некое множество Гамильтоновых циклов подграфов. Увеличение количества числовых характеристик распределений повышает объективность метрики при распознавании отпечатков по их биометрическим шаблонам.

Таблица 1.1 - Матрица взаимных расстояний между точками

$d_{ij}$	0	1	2	...	...	$j-1$	$j$	$j+1$	...	...	$n$
0	$\infty$	$d_{01}$	$d_{02}$	...	...	$d_{0(j-1)}$	$d_{0j}$	$d_{0(j+1)}$	...	...	$d_{0n}$
1	$d_{10}$	$\infty$	$d_{12}$	...	...	$d_{1(j-1)}$	$d_{1j}$	$d_{1(j+1)}$	...	...	$d_{1n}$
2	$d_{20}$	$d_{21}$	$\infty$	...	...	$d_{2(j-1)}$	$d_{2j}$	$d_{2(j+1)}$	...	...	$d_{2n}$
...	...	...	...	$\infty$	...	...	...	...	...	...	...
$i-1$	$d_{(i-1)0}$	$d_{(i-1)1}$	$d_{(i-1)2}$	...	...	$\infty$	$d_{(i-1)j}$	$d_{(i-1)(j+1)}$	...	...	$d_{(i-1)n}$
$i$	$d_{i0}$	$d_{i1}$	$d_{i2}$	...	...	$d_{i(j-1)}$	$\infty$	$d_{i1}$	...	...	$d_{in}$
$i+1$	$d_{(i+1)0}$	$d_{(i+1)1}$	$d_{(i+1)2}$	...	...	$d_{(i+1)(j+1)}$	$d_{(i+1)j}$	$\infty$	...	...	$d_{(i+1)n}$
...	...	...	...	...	$\infty$	...	...	...	...	...	...
$n$	$d_{n0}$	$d_{n1}$	$d_{n2}$	...	...	$d_{n(j-1)}$	$d_{nj}$	$d_{n(j+1)}$	...	...	$\infty$

Блок-схема разработанного алгоритма решения для симметричной матрицы взаимных расстояний изображена на рисунке 2.1. Алгоритм является циклическим и предполагает, при заданной размерности графа (подграфа)  $n$  и вычисленной матрице  $M$ , выполнение  $(n-2)$  раз последовательности однотипных этапов вычислительных преобразований. Суть этапов сводится к следующему.

**Этап 1.** Строится некоторая нижняя оценка длины маршрута для множества всех возможных Гамильтоновых циклов. Для этого осуществляется, так называемое, приведение матрицы. В каждой строке матрицы (поочередно) находится минимальный элемент – константа приведения. Значение константы приведения вычитается из значений всех элементов текущей строки. В результате, по крайней мере, один из элементов строки становится нулем. Подобные действия осуществляются для всех строк матрицы  $M$ . После этого, аналогичное приведение осуществляется по столбцам матрицы. Сумма констант приведения по строкам и столбцам образуют оценку нижней границы длины маршрута.

**Этап 2.** После приведения матрицы множество всех циклов разбивается на два частично пересекающихся подмножества. Первое подмножество состоит из гамильтоновых циклов, включающих некоторую дугу  $(i, j)$ , а второе – состоит из контуров, не включающих эту дугу  $(i, j)$ . Выбор дуги  $(i, j)$  осуществляется исходя из того, что наиболее резкое изменение оценки произойдет в том случае, когда выбирается элемент матрицы, с величиной взаимного расстояния  $d_{i,j}=0$ . Поэтому, после замены  $d_{i,j}=0$  на  $d_{i,j}=\infty$ , сумма минимальных элементов в  $i$ -й строке,  $j$ -ом столбце приобретает наибольшее значение.

Исключение дуги  $(i, j)$  из цикла производится заменой соответствующего элемента  $d_{i,j}$  в исходной  $M$  и приведенной  $M^*$  матрицах на значение  $\infty$ . В результате такой замены появляется

возможность провести дополнительное приведение матрицы, приводящее к улучшению оценки нижней границы длины цикла.

Включение дуги  $(i, j)$  в маршрут ведет к сокращению размеров матрицы (вычеркивается  $i$ -я строка,  $j$ -ый столбец). Одновременно появляется возможность исключить одну дугу.

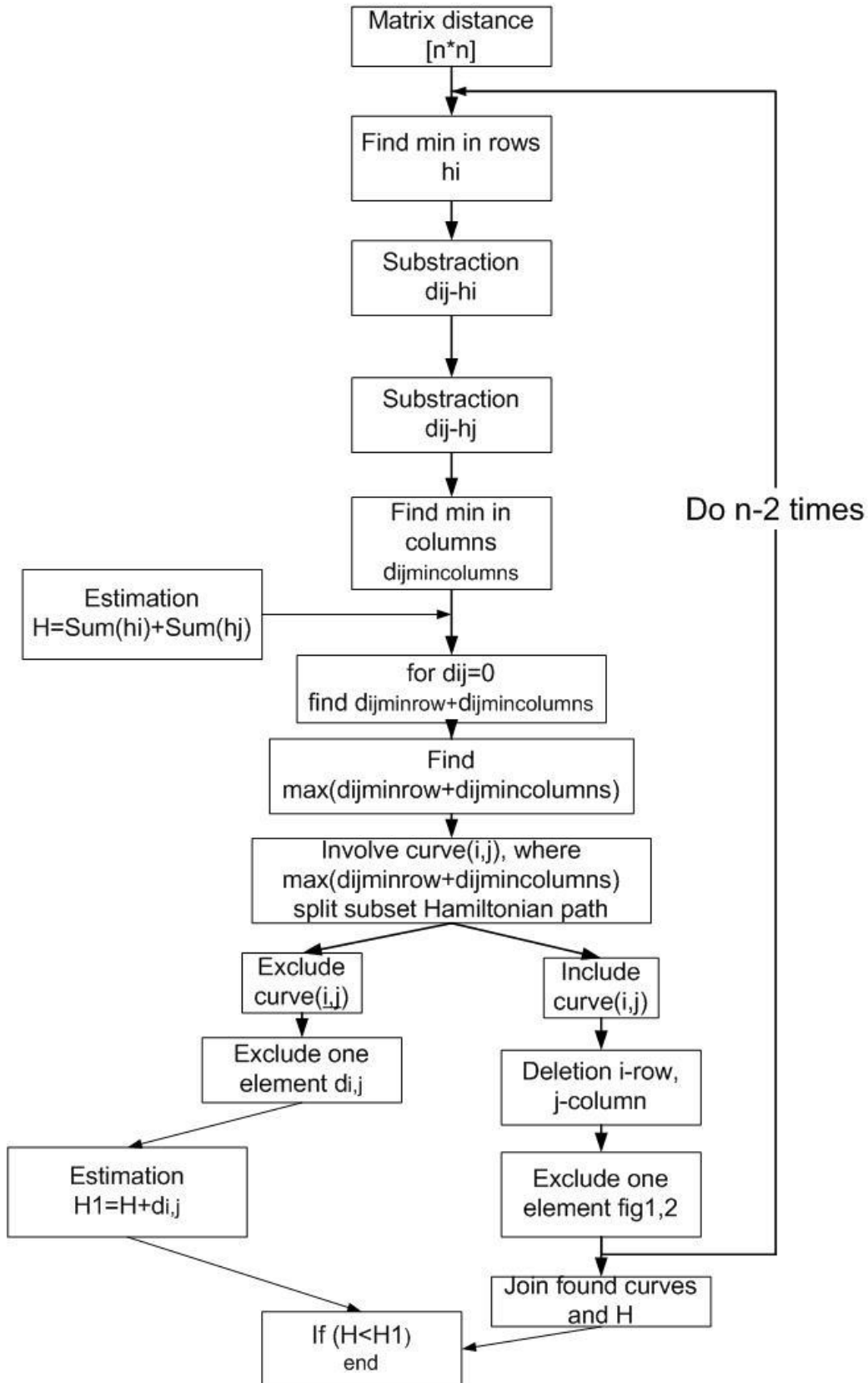


Рис. 2.1 Алгоритм решения задачи Коммивояжера

Исключение этой дуги очень важный элемент алгоритма. Включение дуги  $(i, j)$  ведет к образованию некоторого связанного пути, который соединяет, например, точки  $p$  и  $q$ , запрещается включать в маршрут дугу  $(q, p)$ . В простейшем случае, после выбора дуги  $(i, j)$ , исключить стоит дугу  $(j, i)$ , то есть элемент  $d_{j,i}$  следует заменить на значение  $\infty$ . Эта ситуация иллюстрируется на рис. 2.2. Пусть, например, в ходе решения получена дуга  $(0,4)$ , то заменять на бесконечное значение следует длину дуги  $(4,0)$ . Если в результате решения выбрана последовательность дуг –  $(0,4)$ ,  $(2,3)$  и очередной является дуга  $(0,2)$ , то исключать стоит элемент  $(4,3)$  (рисунок 2.3).

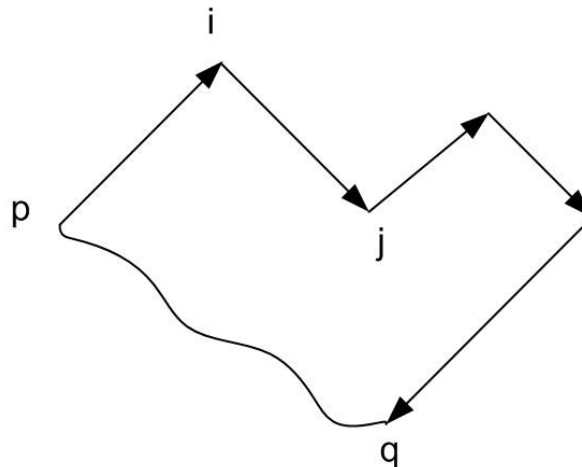


Рис. 2.2 Пояснение к исключению дуги.

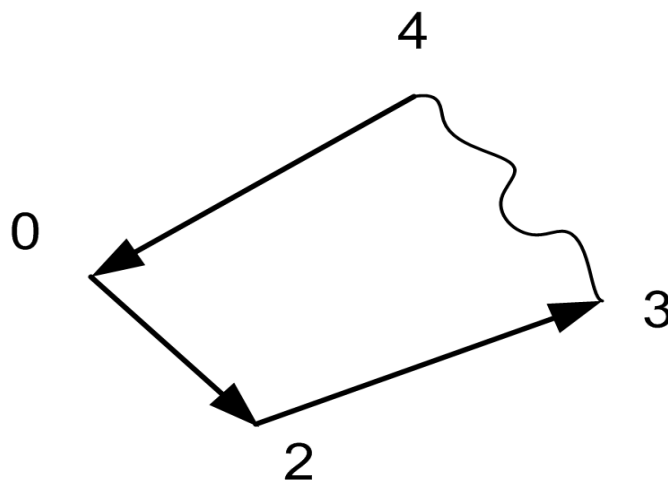


Рис. 2.3 Исключение дуги  $(4,3)$

### 3 Применение алгоритма для нахождения Гамильтонова цикла в условиях аффинных искажений

Рассмотрим практическое применение алгоритма для подграфа биометрического шаблона небольшой размерности  $n = 6$ . При этом разбиение полного распределения на подграфы может быть выполнено, например, по принципу удаленности от центра масс распределения минутий. После декомпозиции, последовательно решается задача определения наименьшей длины Гамильтонова цикла для каждого из подграфов. Это приводит к нахождению множества (по числу подграфов) числовых оценок, являющихся объективной характеристикой анализируемого отпечатка. Как отмечалось выше, одним из типичных искажений распределений точек (узлов), которое проявляется на различных реализациях биометрических шаблонов одного и того же дактилоскопического образа, являются линейные повороты и сдвиги. Пример, представленный ниже, иллюстрирует устойчивость метрики Гамильтоновых циклов в условиях подобных искажений.

Пусть матрица координат локальных признаков (биометрический шаблон) задан в виде, представленном в таблице 3.1. Покажем применение описанного алгоритма для нахождения длины Гамильтонова цикла. Столбцы  $X$ ,  $Y$  матрицы содержат плоскостные координаты точек эталонного распределения. Дополнительные столбцы  $X'$ ,  $Y'$ , содержат измененные координаты при линейном повороте ( $X'$ ,  $Y'$ ), а также при линейном повороте и дополнительном смещении графа ( $X''$ ,  $Y''$ ). Преобразование эталонного графа описывается следующими матричными преобразованиями:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = U(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}; \quad \text{где } U(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\pi}{12} \quad (3.1)$$

$$\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \end{pmatrix} = U(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix};$$

В таблице 3.1 представлены координаты точек. Применим для них алгоритм, описанный в предыдущем пункте. Координаты этих точек, повернутых на  $15^\circ$  вокруг оси  $OZ$ , ( $X'$ ,  $Y'$ ), и координаты точек, которые были получены путем поворота на  $15^\circ$  вокруг оси  $OZ$ , смещением на 0,3 по оси  $X$  и смещением на 0,4 по оси  $Y$  имеют значение ( $X''$ ,  $Y''$ ).

Таблица 3.1 – Координаты точек эталонного графа и его вариаций при аффинных искажениях

n	X	Y	X'	Y'	X''	Y''
0	0,61	0,57	0,442	0,708	0,742	1,108
1	0,39	0,7	0,373	0,348	0,496	1,177
2	0,45	0,24	0,446	0,886	0,673	0,748
3	0,22	0,49	0,086	0,530	0,386	0,930
4	0,66	0,74	0,196	0,777	0,746	1,286
5	0,27	0,72	0,074	0,765	0,374	1,165

Матрица взаимных расстояний между точками для всех трех случаев (исходного положения точек на плоскости, повернутых и смещенных точек) останется неизменной (таблица 3.2).

Таблица 3.2 - Матрица взаимных расстояний между точками

n	0	1	2	3	4	5	$h_i$
0	$\infty$	0,256	0,367	0,398	0,177	0,372	0,177
1	0,256	$\infty$	0,464	0,27	0,273	0,122	0,122
2	0,367	0,464	$\infty$	0,34	0,542	0,513	0,34
3	0,398	0,27	0,34	$\infty$	0,506	0,235	0,235
4	0,177	0,273	0,542	0,506	$\infty$	0,391	0,177
5	0,372	0,122	0,513	0,235	0,391	$\infty$	0,122

Для получения нижней границы значения контура осуществим приведение по строкам. Для этой цели в каждой строке выбираем минимальный элемент  $h_i$  (таблица 3.2) и вычитаем его из всех элементов строки. Результат этой операции представлен в таблице 3.3. Константами приведения будут следующие величины 0,177; 0,122; 0,34; 0,235; 0,177; 0,122. Сумма данных констант и дает нижнюю границу длины для всех гамильтоновых циклов ( $\sum_{i=1}^n h_i = 1,173$ ). Эта оценка может быть улучшена за счет приведения по столбцам. Константы приведения показаны в таблице 3.3. В результате приведения по столбцам получит таблицу 3.4. Нижняя граница Гамильтоновых циклов составляет  $\text{НГМ} = \sum_{i=1}^n h_i + \sum_{j=1}^n h_j = 1,278$ .



Таблиця 3.3 – Промежуточные расчеты

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5
0	$\infty$	0,079	0,19	0,221	0	0,195
1	0,134	$\infty$	0,342	0,148	0,151	0
2	0,027	0,124	$\infty$	0	0,202	0,173
3	0,163	0,035	0,105	$\infty$	0,272	0
4	0	0,096	0,365	0,329	$\infty$	0,214
5	0,25	0	0,391	0,113	0,269	$\infty$
$h_i$	0	0	0,105	0	0	0

Таблиця 3.4 – Промежуточные расчеты

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	НГМ=1,173+0,105=1,278
0	$\infty$	0,079	0,085	0,221	0	0,195	
1	0,134	$\infty$	0,237	0,148	0,151	0	
2	0,027	0,124	$\infty$	0	0,202	0,173	
3	0,163	0,035	0	$\infty$	0,272	0	
4	0	0,096	0,26	0,329	$\infty$	0,214	
5	0,25	0	0,286	0,113	0,269	$\infty$	

Далее просматриваются все нулевые элементы матрицы и находится сумму констант приведения для каждого нулевого элемента. Они показаны в таблице 3.5, в круглых скобках. Из этих значений выбираем максимальное значение (0,23) что соответствует дуге (0,4). НГМ [0,4]=1,278+0,23=1,508.

Включение дуги (0,4) ведет к исключению всей 0-ой строки и 4-го столбца. Элемент (4,0) изменяется на знак  $\infty$  (таблица 3.6). Оценку можно улучшить за счет приведения по строкам и столбцам (таблица 3.6, 3.7 и 3.8). НГМ=1,278+0,096+0,027=1,401 .

Таблиця 3.5 – Промежуточные расчеты

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	НГМ=1,278+0,23=1,508
0	$\infty$	0,079	0,085	0,221	0 <sup>(0,23)</sup>	0,195	
1	0,134	$\infty$	0,237	0,148	0,151	0 <sup>(0,134)</sup>	
2	0,027	0,124	$\infty$	0 <sup>(0,14)</sup>	0,202	0,173	
3	0,163	0,035	0 <sup>(0,085)</sup>	$\infty$	0,272	0 <sup>(0)</sup>	
4	0 <sup>(0,123)</sup>	0,096	0,26	0,329	$\infty$	0,214	
5	0,25	0 <sup>(0,128)</sup>	0,286	0,113	0,269	$\infty$	

Таблиця 3.6 – Промежуточные расчеты

<i>n</i>	0	1	2	3	5	$h_i$
1	0,134	$\infty$	0,237	0,148	0	0
2	0,027	0,124	$\infty$	0	0,173	0
3	0,163	0,035	0	$\infty$	0	0
4	$\infty$	0,096	0,26	0,329	0,214	0,096
5	0,25	0	0,286	0,113	$\infty$	0

Таблиця 3.7 – Промежуточные расчеты

<i>n</i>	0	1	2	3	5
1	0,134	$\infty$	0,237	0,148	0
2	0,027	0,124	$\infty$	0	0,173
3	0,163	0,035	0	$\infty$	0
4	$\infty$	0	0,164	0,233	0,118
5	0,25	0	0,286	0,113	$\infty$
$h_i$	0,027	0	0	0	0

Таблиця 3.8 – Промежуточные расчеты

$n$	0	1	2	3	5	
1	0,107	$\infty$	0,237	0,148	0	НГМ=1,278+0,096+0,027=1,401
2	0	0,124	$\infty$	0	0,173	
3	0,136	0,035	0	$\infty$	0	
4	$\infty$	0	0,164	0,233	0,118	
5	0,223	0	0,286	0,113	$\infty$	

Находится сумма констант приведения для каждого нулевого элемента (таблица 3.9). Максимальное значение 0,164 соответствует элементу (3,2). НГМ=1,401+0,164=1,565 .

Таблиця 3.9 – Промежуточные расчеты

$n$	0	1	2	3	5	
1	0,107	$\infty$	0,237	0,148	$0^{(0,107)}$	НГМ=1,401+0,164=1,565
2	$0^{(0,107)}$	0,124	$\infty$	$0^{(0,113)}$	0,173	
3	0,136	0,035	$0^{(0,164)}$	$\infty$	$0^{(0)}$	
4	$\infty$	$0^{(0,118)}$	0,164	0,233	0,118	
5	0,223	$0^{(0,113)}$	0,286	0,113	$\infty$	

Исключается 3-я строка, 2-ой столбец (таблица 3.10). Элемент (2,3) следует заменить знаком  $\infty$  (таблица 3.10). Значение может быть улучшено за счет приведения по столбцам (таблица 3.10 - 3.11). НГМ=1,401+0,113=1,514 .

Таблиця 3.10 – Промежуточные расчеты

$n$	0	1	2	3
1	0,107	$\infty$	0,148	0
2	0	0,124	$\infty$	0,173
4	$\infty$	0	0,233	0,118
5	0,223	0	0,113	$\infty$
$h_i$	0	0	0,113	0

Таблиця 3.11 – Промежуточные расчеты

$n$	0	1	3	5	
1	0,107	$\infty$	0,035	0	НГМ=1,401+0,113=1,514
2	0	0,124	$\infty$	0,173	
4	$\infty$	0	0,12	0,118	
5	0,223	0	0	$\infty$	

Находится сумма констант приведения для каждого нулевого элемента (таблица 3.12). Максимальное значение 0,231 соответствует значению (2,0). НГМ=1,514+0,231=1,745.

Таблиця 3.12 – Промежуточные расчеты

$n$	0	1	3	5	
1	0,107	$\infty$	0,035	$0^{(0,153)}$	НГМ=1,514+0,231=1,745
2	$0^{(0,231)}$	0,124	$\infty$	0,173	
4	$\infty$	$0^{(0,118)}$	0,12	0,118	
5	0,223	0	$0^{(0,035)}$	$\infty$	

Исключается 2-я строка, 0-й столбец (таблица 3.13). Элемент (4,3) заменяется знаком  $\infty$ . Значение НГМ остается прежним, НГМ=1,514 .

Таблиця 3.13 – Промежуточные расчеты

$n$	1	3	5	
1	$\infty$	0,035	0	НГМ=1,514
4	0	$\infty$	0,118	
5	0	0	$\infty$	

Находится сумма констант приведения для каждого нулевого элемента (таблица 3.14). Максимальное значение 0,153 соответствует элементу (1,5).

Таблица 3.14 – Промежуточные расчеты

<i>n</i>	1	3	5	НГМ=1,514+0,153=1,667
1	$\infty$	0,035	0 <sup>(0,153)</sup>	
4	0 <sup>(0,118)</sup>	$\infty$	0,118	
5	0 <sup>(0)</sup>	0 <sup>(0,035)</sup>	$\infty$	

Исключается 1-я строка и 5-ый столбец. Элемент (5,1) заменяется знаком  $\infty$ . Из таблицы 3.15 можно получить две недостающие дуги, которые входят в маршрут (4,1) и (5,3). НГМ=1,514.

Таблица 3.15 – Промежуточные расчеты

<i>n</i>	1	3	НГМ=1,514
4	0	$\infty$	
5	$\infty$	0	

Дуги, которые были получены в ходе решения, можно объединить в контур 0,4-3,2-2,0-1,5-4,1-5,3. После определенной перестановки получается последовательность: 0,4-4,1-1,5-5,3-3,2-2,0=0,177+0,367+0,34+0,235+0,122+0,273=1,514. Это и есть решение.

После получения некоторого Гамильтонова цикла, следует проанализировать оборванные ветви дерева поиска. Необходимо убедиться, что среди подмножества (0,4) нет оптимального решения. Остальные ветви рассматривать не смысла по очевидным причинам. Элемент  $d_{1,4}$  следует заменить знаком  $\infty$  (Таблица 3.16). После приведения по строкам и столбцам (Таблица 3.16, 3.17, 3.18) находится сумма констант приведения для каждого 0-го элемента (Таблица 3.19).

Максимальное значение приходится на дугу (4,0), что является недопустимым вариантом, то есть рассматривать данную ветвь нет смысла.

Дерево решений приведено на рисунке 3.1,  $H=1,514$ . На рисунке 3.2 приведен Гамильтонов контур для смещенных и повернутых точек.

Таблица 3.16 – Промежуточные расчеты

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	$h_i$
0	$\infty$	0,079	0,085	0,221	$\infty$	0,195	0,079
1	0,134	$\infty$	0,237	0,148	0,151	0	0
2	0,027	0,124	$\infty$	0	0,202	0,173	0
3	0,163	0,035	0	$\infty$	0,271	0	0
4	0	0,096	0,26	0,329	$\infty$	0,214	0
5	0,25	0	0,286	0,113	0,269	$\infty$	0

Таблица 3.17 – Промежуточные расчеты

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5
0	$\infty$	0	0,006	0,142	$\infty$	0,116
1	0,134	$\infty$	0,237	0,148	0,151	0
2	0,027	0,124	$\infty$	0	0,202	0,173
3	0,163	0,035	0	$\infty$	0,271	0
4	0	0,096	0,26	0,329	$\infty$	0,214
5	0,25	0	0,286	0,113	0,269	$\infty$
$h_i$	0	0	0	0	0,151	0

Таблиця 3.18 – Промежуточные расчеты

$n$	0	1	2	3	4	5
0	$\infty$	0	0,006	0,142	$\infty$	0,116
1	0,134	$\infty$	0,237	0,148	0	0
2	0,027	0,124	$\infty$	0	0,051	0,173
3	0,163	0,035	0	$\infty$	0,12	0
4	0	0,096	0,26	0,329	$\infty$	0,214
5	0,25	0	0,286	0,113	0,118	$\infty$

#### 4. Анализ полученных решений при различной размерности подграфов

Рассмотрим полученные решения на других подграфах, с различным количеством точек. Сгенерируем точки,  $x$  и  $y$ , которые меняются в пределах 0-1000. На рисунке 4.1 (а-е) при помощи описанного выше алгоритма изображены контуры. Как видно из изображений, при количестве точек 5-11, 13 алгоритм выдает оптимальное решение, тогда как при  $n = 12$  возникает пересечение контура (рисунок 4.1 д, полученное решение не есть оптимальным). Однако, возможно получение оптимального решения путем некоторой перестановки точек. На рисунке красным цветом выделен подправленный участок маршрута после перестановки точек. То есть, возможно получение оптимального решения путем анализа на пересечение отрезков маршрута.

Таблиця 3.19 – Промежуточные расчеты

$n$	0	1	2	3	4	5
0	$\infty$	$0^{(0,006)}$	0,006	0,142	$\infty$	0,116
1	0,134	$\infty$	0,237	0,148	$0^{(0,051)}$	$0^{(0)}$
2	0,027	0,124	$\infty$	$0^{(0,113)}$	0,051	0,173
3	0,163	0,035	$0^{(0,006)}$	$\infty$	0,12	$0^{(0)}$
4	$0^{(0,123)}$	0,096	0,26	0,329	$\infty$	0,214
5	0,25	$0^{(0,113)}$	0,286	0,113	0,118	$\infty$

При дальнейшем увеличении количества точек кратчайшее решение также не получаем. Однако после увеличения пределов, в которых изменяется  $x$  и  $y$  ( $x=0\dots2000$ ;  $y=0\dots2000$ ), были получены оптимальные решения для  $n = 20$ ,  $n = 30$ . Таким образом, на получение оптимального маршрута при применении метода ветвей и границ влияет плотность нанесения точек и расстояния между ними.

Были рассмотрены также решения при увеличении пределов от 0 до 10000, но количество точек, при котором было получено оптимальное решение не превышает 30 (рисунок 4.1 и), при  $n = 50$  оптимальное решение получено не было (рисунок 4.1 к).

Если матрица взаимных расстояний симметричная, то при решении задачи коммивояжера возникает множество решений, среди которых может находиться и оптимальное. Алгоритм не обеспечивает оптимальное решение для большого количества точек, но при изменении их порядка, можно найти решения, которые имеют одинаковые маршруты.

Так, например, для 18 точек (упорядоченные и перемешанные координаты приведены в таблице 4.1) было получено 6 тождественных опорных решений (таблица 4.2).

#### 5 Выводы

В статье подробно описан алгоритм решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ. Рассматривается подробный расчет для шести точек. Проведен анализ возможностей данного алгоритма путем рассмотрения различного количества точек на маршруте. Количество точек, для которых алгоритм однозначно приводит к оптимальному плану равно десяти. Однако есть возможность доработки алгоритма.

Показано, что главной проблемой при нахождении оптимального маршрута является проблема пересечения некоторых участков при получении опорного плана. Таким образом, возможно

получение оптимального маршрута путем проверки на пересекаемость отрезков и некоторой перестановки точек.

В результате исследований выявлено, что на результат получения оптимального маршрута влияет плотность распределения точек на маршруте. При значительном отдалении точек друг от друга получено оптимальное решение для тридцати точек. Но дальнейшее увеличение точек до пятидесяти не дало оптимального решения.

Еще к одному свойству этого алгоритма относится то, что при отыскании оптимального решения мы находим множество опорных планов, которые не являются оптимальными, но неизменны для определенной совокупности точек независимо от их порядка.

Применение разработанного метода для поиска гамильтоновых циклов подграфов позволяет получить совокупности объективных числовых характеристик биометрических шаблонов. Показанные примеры доказывают инвариантность (нечувствительность) метрики Гамильтоновых циклов к действию аффинных искажений.

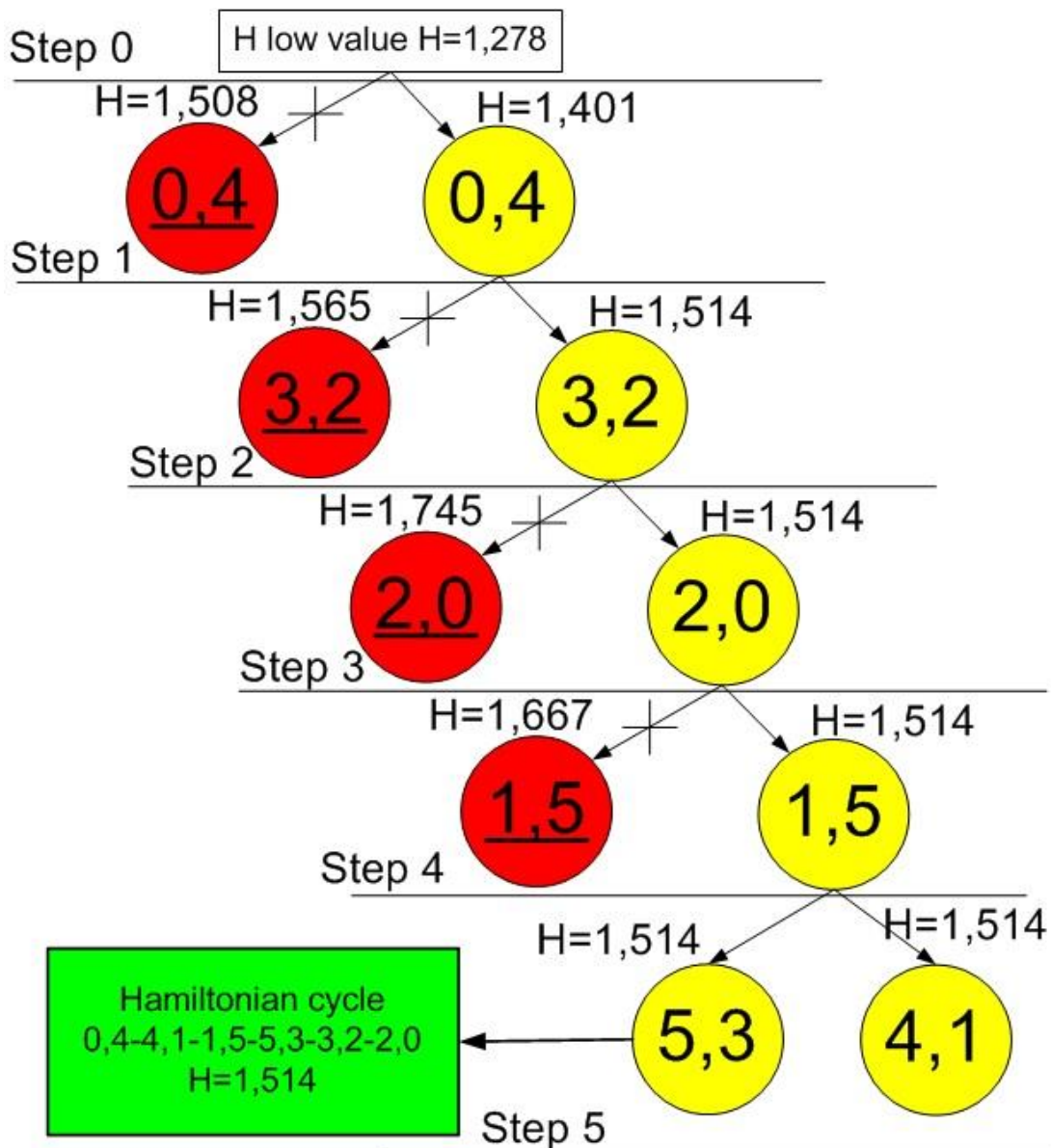


Рис. 3.1 Дерево решений (Гамильтонов контур)

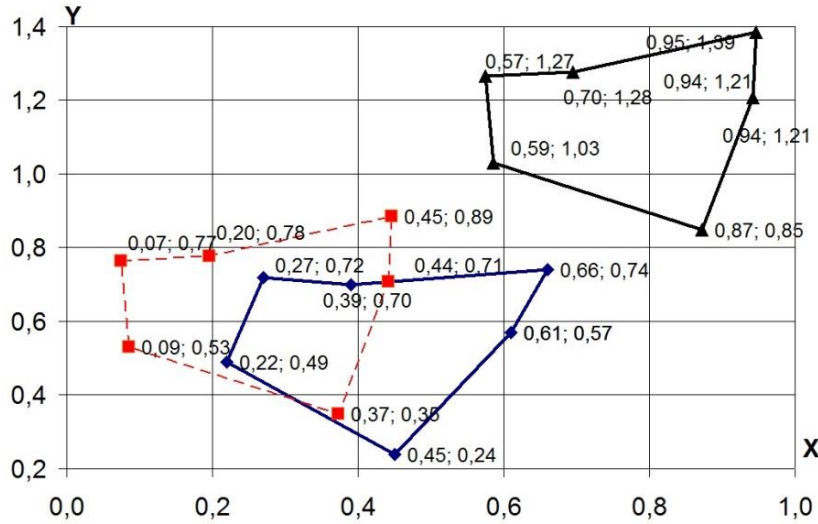
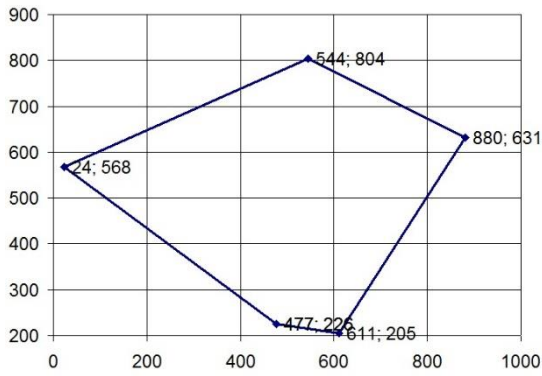
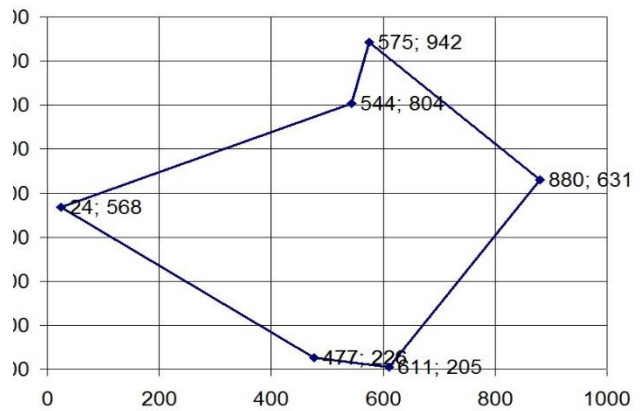


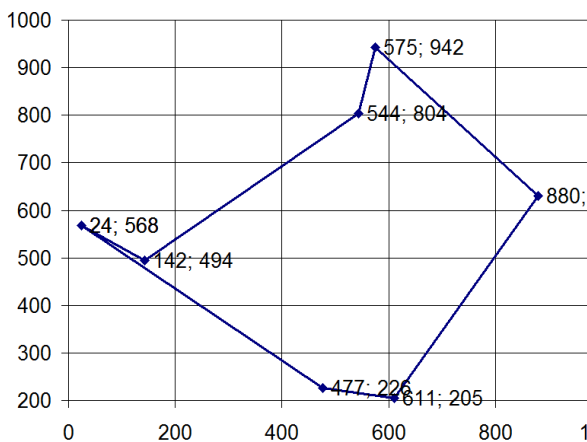
Рисунок 3.2 Изображение Гамильтонова контура: исходных точек (синий цвет), повернутых на  $15^\circ$  вокруг оси  $Z$  (красный цвет), и смещенных и повернутых точек (черный цвет),  $H = 1,514$



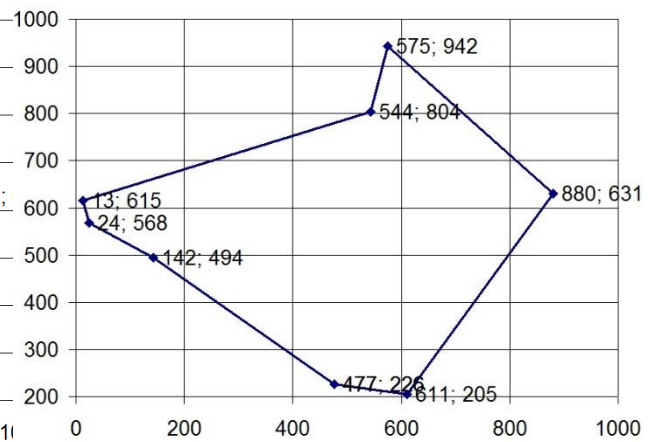
а)  $(477,226)-(611,205)-(880,631)-(544,804)-(24,568)-(477,226)$ ;  $H=2156,031$ ;  $1-2-3-0-4-1$ ;  $n=5$



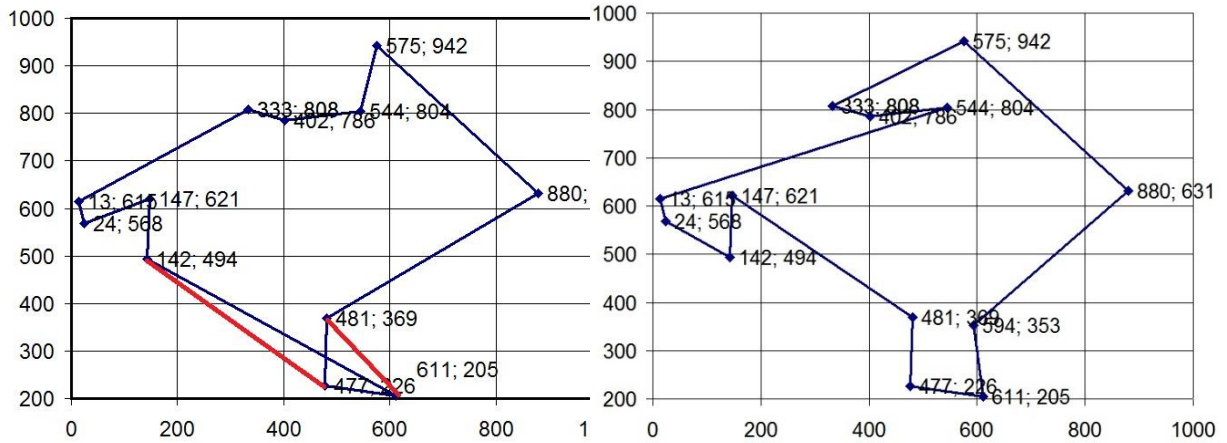
б)  $(477,226)-(611,205)-(880,631)-(575,942)-(544,804)-(24,568)-(477,226)$ ;  $H=2355,146$ ;  $1-2-3-5-0-4-1$ ;  $n=6$



в)  $(24,568)-(142,494)-(544,804)-(575,942)-(880,631)-(611,205)-(477,226)-(24,568)$ ;  $H=2431,028$ ;  $4-6-0-5-3-2-1-4$ ;  $n=7$

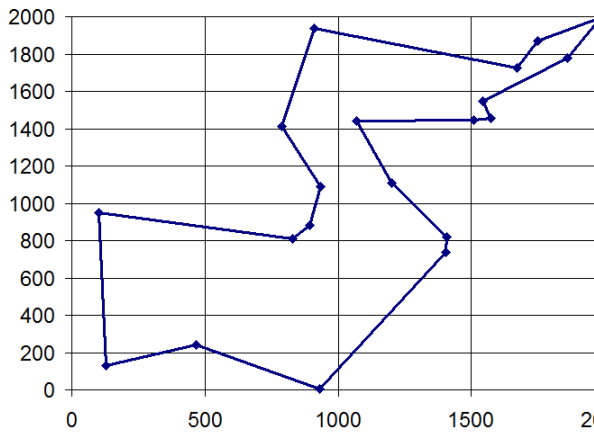


г)  $(477,226)-(611,205)-(880,631)-(575,942)-(544,804)-(13,615)-(24,568)-(142,494)-(477,226)$ ;  $H=2396,691$ ;  $1-2-3-5-0-7-4-6-1$ ;  $n=8$

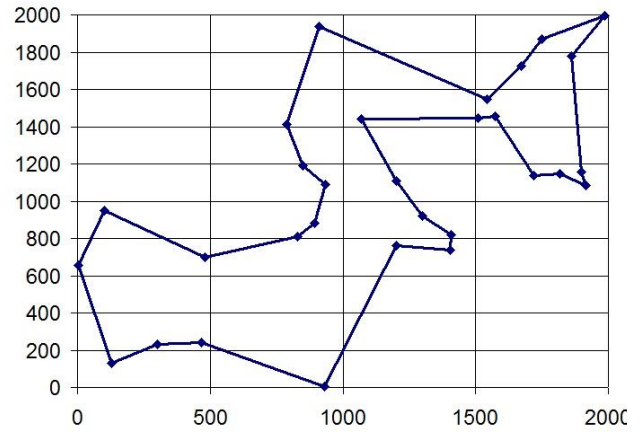


д) (333,808)-(402,786)-(544,804)-(575,942)-(880,631)-(481,369)-(477,226)-(611,205)-(142,494)-(147,621)-(24, 568)-(13,615)-(333, 808); 10-11-0-5-3-8-1-2-6-9-4-7-10; n=12

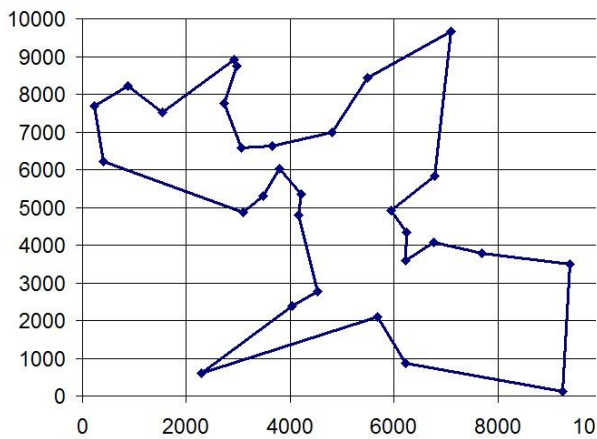
е) (333,808)-(402,786)-(544,804)-(13,615)-(24,568)-(142,494)-(147,621)-(481,369)-(477,226)-(611,205)-(594,353)-(880,631)-(575,942)-(333,808); 10-11-0-7-4-6-9-8-1-2-12-3-5-10; H=3050,98; n=13



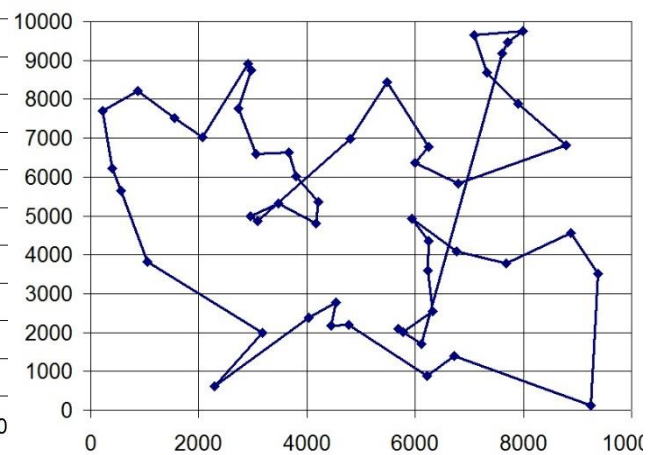
ж) n=20; x=0...2000; y=0...2000



з) n=30; x=0...2000; y=0...2000



и) n=30; x=0...10000; y=0...10000



к) n=50; x=0...10000; y=0...10000

Рис. 4.1 Изображение Гамильтоновых контуров для различных наборов точек

Таблиця 4.1 – Координаты точек

n	Упорядоченные от центра точки		Перемешанные 18 точек	
	x	y	x	y
0	0,528	0,621	0,74	0,1
1	0,411	0,385	0,59	0,866
2	0,35	0,498	0,701	0,092
3	0,799	0,489	0,809	0,393
4	0,752	0,666	0,411	0,385
5	0,377	0,801	0,35	0,498
6	0,809	0,393	0,752	0,666
7	0,408	0,152	0,799	0,489
8	0,53	0,128	0,53	0,128
9	0,59	0,866	0,528	0,621
10	0,153	0,32	0,153	0,32
11	0,378	0,119	0,378	0,119
12	0,915	0,437	0,377	0,801
13	0,058	0,587	0,058	0,587
14	0,701	0,092	0,408	0,152
15	0,74	0,1	0,915	0,437
16	0,013	0,567	0,244	0,954
17	0,244	0,954	0,013	0,567

Таблиця 4.2 – Полученные решения для точек имеющих различный порядок

n	H	Маршрут
18	3,671	14,15-15,6-6,12-12,3-3,4-4,9-9,5-5,17-17,13-13,16-16,10-10,1-1,2-2,0-0,11-11,7-7,8-8,14
	3,652	15,14-14,8-8,7-7,11-11,1-1,13-13,16-16,10-10,2-2,0-0,5-5,17-17,9-9,4-4,3-3,12-12,6-6,15
	3,721	15,14-14,8-8,7-7,11-11,1-1,13-13,16-16,10-10,2-2,0-0,17-17,5-5,9-9,4-4,3-3,12-12,6-6,15
	3,679	15,14-14,8-8,7-7,11-11,10-10,16-16,13-13,17-17,5-5,9-9,4-4,3-3,12-12,6-6,0-0,2-2,1-1,15
	3,682	15,14-14,8-8,7-7,11-11,1-1,16-16,13-13,10-10,2-2,0-0,5-5,17-17,9-9,4-4,3-3,12-12,6-6,15
	3,778	14,15-15,6-6,12-12,3-3,4-4,9-9,17-17,5-5,13-13,16-16,10-10,1-1,2-2,0-0,11-11,7-7,8-8,14
18'	3,652	2,0-0,3-3,15-15,7-7,6-6,1-1,16-16,12-12,9-9,5-5,10-10,17-17,13-13,4-4,11-11,14-14,8-8,2
	3,671	2,0-0,3-3,15-15,7-7,6-6,1-1,12-12,16-16,13-13,17-17,10-10,4-4,5-5,9-6,11-11,14-14,8-8,2
	3,721	0,2-2,8-8,14-14,11-11,4-4,13-13,17-17,10-10,5-5,9-9,16-16,12-12,1-1,6-6,7-7,15-15,3-3,0
	3,682	0,2-2,8-8,14-14,11-11,4-4,17-17,13-13,10-10,5-5,9-9,12-12,16-16,1-1,6-6,7-7,15-15,3-3,0
	3,679	0,2-2,8-8,14-14,11-11,10-10,17-17,13-13,16-16,12-12,1-1,6-6,7-7,15-15,3-3,9-9,5-5,4-4,0
	3,778	2,0-0,3-3,15-15,7-7,6-6,1-1,16-16,12-12,13-13,17-17,10-10,4-4,5-5,9-9,11-11,14-14,8-8,2

## ЛІТЕРАТУРА

1. Мудров В.И. Задача о коммивояжере. Издательство «Знание» Москва 1969, 61с.
2. Борознов В.О Исследование решения задачи коммивояжера. Вестник АГТУ. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2009 №2 URL: <https://cyberleninka.ru/article/v/issledovanie-resheniya-zadachi-kommivoyazhera> (дата звернення: 07.03.2020), С. 147-151.
3. Жукова Г.Н., Ульянов М.В., Фомичев М.И. Эффективный по времени точный комбинированный алгоритм для асимметричной задачи коммивояжера. БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКА №3(45) – 2018. URL: <https://cyberleninka.ru/article/v/effektivnyy-po-vremeni-tochnyy-kombinirovannyi-algoritm-dlya-asimmetrichnoy-zadachi-kommivoyazhera> (дата звернення: 07.03.2020), С. 20-26.
4. Мотова А.Н., Гареева Г.А., Лысанов Д.М. Обзор методов решения задачи коммивояжера для определения оптимального маршрута школьного транспорта. // Научное сообщество студентов XXI столетия. ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ: сб. ст. по мат. LXI междунар. студ. науч.-



практ. конф. № 1(60). URL: <https://sibac.info/studconf/tech/lxi/94839> (дата обращения: 18.02.2019), С.148-143.

## REFERENCES

1. Mudrov V.I., The task of the salesman. Knowledge Publishing House Moscow 1969, 61p. [in Russian].
2. Boroznov V.A., Investigation of the salesman problem solution. AGTU Gazette. Ser .: Management, Computer Engineering and Computer Science. 2009 No. 2 URL: <https://cyberleninka.ru/article/v/issledovanie-resheniya-zadachi-kommivoyazhera> (Last accessed: 07.03.2020), p. 147-151. [in Russian].
3. Zhukova G.N., Ulyanov M.V., Fomichev M.I., Time-efficient, accurate combination algorithm for the asymmetric traveling salesman problem. BUSINESS INFORMATION №3 (45), 2018. URL: <https://cyberleninka.ru/article/v/effektivnyy-po-vremeni-tochnyy-kombinirovannyi-algoritm-dlya-asimmetrichnoy-zadachi-kommivoyazhera> (Last accessed: 07.03.2020), p. 20-26. [in Russian].
4. Motova A.N., Gareeva G.A., Lysanov D.M. “An overview of the solving methods solving the salesman's task for determining the school transport optimal route”. Scientific community of XXI century students. TECHNICAL SCIENCES: Sat. Art. on mat. LXI international. stud. scientific-practical Conf. No. 1 (60). URL: <https://sibac.info/studconf/tech/lxi/94839> (Last accessed: 07.03.2020), p.148-143. [in Russian].

**Мелкозьорова Ольга Михайлівна** – кандидат технічних наук; доцент кафедри безпеки інформаційних систем і технологій, Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;  
e-mail: [olja.mex@gmail.com](mailto:olja.mex@gmail.com).

**Melkozerova Olha M.**, PhD; Associate Professor of Information Systems and Technologies Security Department V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, e-mail: [olja.mex@gmail.com](mailto:olja.mex@gmail.com).

**Мелкозерова Ольга Михайловна** – кандидат технических наук, доцент кафедры безопасности информационных систем и технологий, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022;  
e-mail: [olja.mex@gmail.com](mailto:olja.mex@gmail.com).

**Рассомахін Сергій Геннадійович** – доктор технічних наук; завідувач кафедри безпеки інформаційних систем і технологій, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;  
e-mail: [rassomakhin@karazin.ua](mailto:rassomakhin@karazin.ua).

**Rassomakhin Sergiy G.**, PhD; Doctor of Science, Professor, Head of Department of Information Systems and Technologies Security V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, e-mail: [rassomakhin@karazin.ua](mailto:rassomakhin@karazin.ua).

**Рассомахин Сергей Геннадиевич** – доктор технических наук, заведующий кафедры безопасности информационных систем и технологий, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022;  
e-mail: [rassomakhin@karazin.ua](mailto:rassomakhin@karazin.ua).

УДК 539.3

## Метод обчислення сингулярних інтегралів в задачах аксіально-симетричних течій Стокса

<sup>1</sup>Р.Г.Пальчиков, <sup>1,2</sup>О.О.Стрельнікова, <sup>1</sup>О.О. Усатова

<sup>1</sup> Інститут проблем машинобудування НАН України ім. А.М. Підгорного  
вулиця Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна

<sup>2</sup> Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,  
майдан Свободи 4, Харків, 61022, Україна,  
elena15@gmx.com

Досліджено течії в'язкої рідини з невеликими числами Рейнольдса (течії Стокса) у тривимірному формулюванні. В цьому випадку можливо нехтувати інерційними членами в рівняннях руху. Такі течії можуть відбуватися в нанотрубках, що є включеннями в репрезентативних об'ємах наноматеріалів. З використання фундаментального розв'язку Осена побудовано інтегральне зображення швидкості. Це зображення використовується для побудови інтегрального рівняння відносно невідомої густини. Розв'язок цього рівняння дає змогу обчислити тиск рідини на стінки оболонки. Досліджено випадок аксіально-симетричних течій. Для цього отримано інтегральне подання невідомої швидкості в циліндричних координатах. Шляхом інтегрування за окружною координатою здійснено зведення двовимірного сингулярного інтегрального рівняння до одновимірного. При цьому виявлено, що компоненти ядер сингулярного оператора виражаються через еліптичні інтеграли першого та другого роду. Доведено, що особливості ядер одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь мають логарифмічний характер. Для обчислення еліптичних інтегралів запропоновано використовувати алгоритм Гауса, заснований на використанні середнього арифметико-геометричного значення. Ця процедура дає змогу отримати логарифмічні сингулярні компоненти із високою точністю. Це дає змогу використовувати спеціальні квадратурні формули для обчислення інтегралів з такою особливістю. Побудовано алгоритм, заснований на використанні методу граничних елементів для числового розв'язання отриманих сингулярних інтегральних рівнянь. Проведено тестування запропонованого метода розв'язання одновимірних сингулярних рівнянь, які в ядрах містять еліптичні інтеграли з логарифмічними особливостями, тобто логарифмічна особливість не виражена в явному вигляді. Зроблено порівняння з відомими аналітичними розв'язками. Отримані дані свідчать про високу ефективність запропонованого числового методу.

**Ключові слова:** течія Стокса, аксіально-симетричне формулювання, сингулярні інтегральні рівняння, середнє арифметико-геометричне значення.

Исследовано течение вязкой жидкости при небольших числах Рейнольдса (течения Стокса) в трехмерной формулировке. В этом случае можно пренебречь инерционными членами в уравнениях движения. Такие течения могут происходить в нанотрубках, которые можно рассматривать как включения в репрезентативных объемах наноматериалов. С использованием фундаментального решения Осена построено интегральное представление скорости. Это представление используется для построения интегрального уравнения относительно неизвестной плотности. Решение полученного уравнения дает возможность вычислить давление жидкости на стенки оболочки. Исследован случай аксиально-симметричных течений. Для этого получено интегральное представление неизвестной скорости в цилиндрических координатах. Путем интегрирования по окружной координате осуществлено сведение двумерного сингулярного интегрального уравнения к одномерному. При этом установлено, что компоненты ядер сингулярного оператора выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода. Доказано, что особенности ядер одномерных сингулярных интегральных уравнений имеют логарифмический характер. Для вычисления эллиптических интегралов предложено использовать алгоритм Гаусса, основанный на использовании среднего арифметико-геометрического значения. Эта процедура позволяет получить логарифмические сингулярные компоненты с высокой точностью, что дает возможность использовать специальные квадратурные формулы для вычисления интегралов с такой особенностью. Построен алгоритм, основанный на использовании метода граничных элементов для численного решения полученных сингулярных интегральных уравнений. Проведено тестирование предложенного метода решения одномерных сингулярных уравнений, ядра которых содержат эллиптические интегралы с логарифмическими особенностями, то есть логарифмическая особенность не выражена в явном виде. Проведено сравнение полученных численных результатов с известными аналитическими решениями. Полученные данные свидетельствуют о высокой эффективности предложенного численного метода.

**Ключевые слова:** течение Стокса, аксиально-симметричная формулировка, сингулярные интегральные уравнения, среднее арифметико-геометрическое значение

The flow of a viscous fluid at small Reynolds numbers (Stokes flow) in a three-dimensional formulation is investigated. In this case, the inertial terms in the equations of motion can be neglected. Such flows can occur in nanotubes that can be considered as inclusions in representative volume elements of nanomaterials. By using the fundamental solution of Ossen, an integral representation of the velocity is proposed. This representation is used to receive an integral equation for an unknown density. The solution of the resulting equation makes it possible to calculate the fluid pressure on the walls of the shell. The case of axially symmetric flows is investigated. For this, an integral representation of the unknown velocity in cylindrical coordinates is

obtained. By integrating over the circumferential coordinate, the two-dimensional singular integral equation is reduced to one-dimensional one. It has been proved that the components of the kernels in singular operators are expressed in terms of elliptic integrals of the first and second kind. It has been proved that the singularities of the kernels of one-dimensional singular integral equations have a logarithmic character. To calculate elliptic integrals, the Gaussian algorithm based on the use of the arithmetic-geometric mean value is proposed. This procedure allows us to obtain logarithmic singular components with high accuracy, which makes it possible to use special quadrature formulas to calculate such integrals. An algorithm with usage of the boundary element method for the numerical solution of the obtained singular integral equations is proposed. The method for solving one-dimensional singular equations, where the kernels contain elliptic integrals with logarithmic singularities (i.e. logarithmic singularity is not expressed explicitly) has been tested. The obtained numerical results have been compared with the well-known analytical solutions. The data obtained indicate the high efficiency of the proposed numerical method.

**Key words:** Stokes flow, axially symmetric formulation, singular integral equations, arithmetic-geometric mean value.

## 1 Вступ

Вивчення фізичних та механічних властивостей технологічно-інноваційних нанокompatитних матеріалів є однією з актуальних проблем сучасної механіки. Обґрунтованість результатів числового моделювання міцності виробів з наноматеріалів вимагає побудови належних математичних моделей, що адекватно описують структури нанорозмірних включень. На теперішній час існує велика кількість теоретичних та експериментальних досліджень, присвячених нанокompatитам [1-8] та ін. Найбільш ефективними серед числових методів для дослідження властивостей нанокompatитів та наноматеріалів виявились методи скінченних та граничних елементів [5,7,9,10]. Відзначимо, що метод граничних елементів дозволяє враховувати неklasичні граничні умови на поверхнях інтерфейсу [5,11]. В роботі [7] досліджені різні типи представницьких комірок. Такі дослідження дають змогу розроблювати наноматеріали із заданими механічними характеристиками. Зауважимо, що важливо вивчати представницькі комірки саме з довільно розподіленими або упорядкованими системами нанотрубок. Дослідження течії рідини в нанотрубках та інших наноструктурах є важливою проблемою наногідродинаміки [12,13]. Течії такого роду відбуваються при малих числах Рейнольдса [14], тобто в цьому випадку можливо нехтувати інерційними членами в рівняннях руху [15-17]. Аксіально-симетричну течію всередині конуса за умови малих чисел Рейнольдса розглянуто в [18], де знайдено асимптотичний розв'язок рівнянь Нав'є – Стокса.

В даному дослідженні задачі аксіально-симетричної течії при малих числах Рейнольдса вивчаються за допомогою методів граничних елементів при розв'язанні рівнянь руху Стокса.

## 2 Загальне формулювання проблеми

Рівняння руху в'язкої рідини з невеликими числами Рейнольдса (течії Стокса) у тривимірному формулюванні мають вигляд [19]

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (2.1)$$

де  $\mathbf{u}$  – вектор швидкості рідини,  $\mu$  – динамічна в'язкість,  $p$  – тиск,  $\rho$  – густина рідини,  $\mathbf{g}$  – прискорення вільного падіння.

Фундаментальний розв'язок (Stokeslet) рівнянь (2.1), або тензор Озена [20] має такий вигляд

$$u_{ij}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{1}{8\pi\mu R} (\delta_{ij} + r_i r_j), \quad (2.2)$$

де  $R = |\mathbf{P} - \mathbf{Q}|$  – декартова відстань між точками  $\mathbf{P}(x, y, z)$  та  $\mathbf{Q}(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$ ,

$$r = (r_i r_i)^{1/2}, \quad r_i = x_i(\mathbf{P}) - x_i(\mathbf{Q}), \quad r_i = \partial r / \partial x_i(\mathbf{P}) = r_i / r, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

Будемо вивчати течії Стокса в аксіально-симетричному формулюванні.

Припустимо, що область течії  $S$  (зовнішня або внутрішня) є оболонкою обертання, рис. 2.1. На поверхні оболонки задаємо граничні умови.

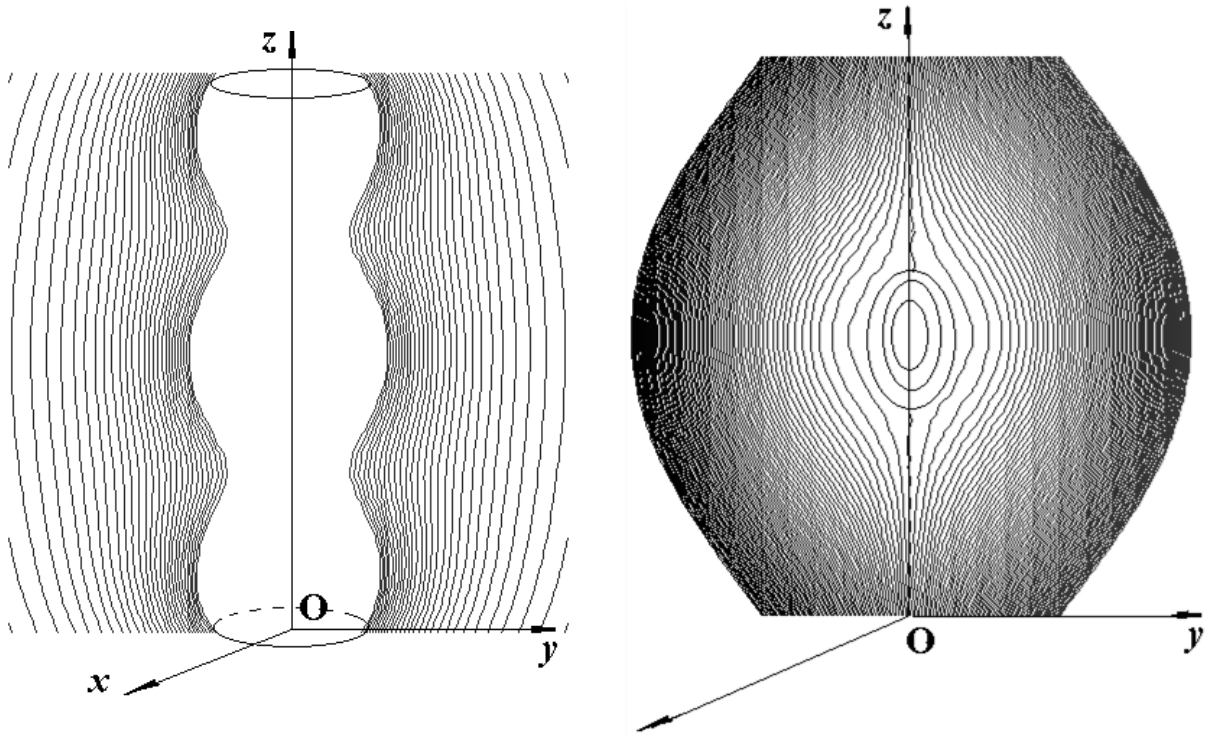


Рисунок 2.1 Аксіально-симетричні течії

За допомогою фундаментального розв'язку (2.2) побудуємо інтегральне зображення таким чином:

$$v_i(\mathbf{Q}) = \int_s u_{ij}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \gamma_j(\mathbf{P}) dS. \quad (2.3)$$

Тут вектор  $\gamma_1(\mathbf{P}), \gamma_2(\mathbf{P}), \gamma_3(\mathbf{P})$  зображає невідому густину, яка знаходиться з відповідного інтегрального рівняння, яке є наслідком граничних умов. Після знаходження невідомої густини з інтегрального рівняння знаходимо тиск за допомогою формули [20]

$$p(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{(\gamma(\mathbf{P}), \mathbf{r})}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|^3} dS.$$

У випадку дослідження аксіально-симетричних течій доцільно перейти до циліндричної системи координат. Нехай точки  $\mathbf{P}$  і  $\mathbf{Q}$ , відповідно є точкою на поверхні інтегрування, та точкою спостереження.

Тобто,

$$x_1(\mathbf{P}) = r_i \cos \theta_i, \quad x_2(\mathbf{P}) = r_i \sin \theta_i, \quad x_3(\mathbf{P}) = z_i$$

$$x_1(\mathbf{Q}) = r_j \cos \theta_j, \quad x_2(\mathbf{Q}) = r_j \sin \theta_j, \quad x_3(\mathbf{Q}) = z_j$$

Евклідова відстань між точками  $\mathbf{P}$  і  $\mathbf{Q}$  визначається за формулою:

$$R(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sqrt{(x_1(\mathbf{Q}) - x_1(\mathbf{P}))^2 + (x_2(\mathbf{Q}) - x_2(\mathbf{P}))^2 + (x_3(\mathbf{Q}) - x_3(\mathbf{P}))^2} \quad (2.4)$$

В циліндричних координатах рівність (2.4) набуває вигляду

$$R(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \theta_j + (z_i - z_j)^2} \quad (2.5)$$

Введемо оператор переходу таким чином:

$$T(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \cos \theta(\mathbf{X}) & -\sin \theta(\mathbf{X}) & 0 \\ \sin \theta(\mathbf{X}) & \cos \theta(\mathbf{X}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В точках  $\mathbf{P}$  та  $\mathbf{Q}$  маємо відповідно

$$\mathbf{T}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{T}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 & 0 \\ \sin 0 & \cos 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В циліндричних координатах компоненти швидкості позначимо як  $V_r(\mathbf{Q}), V_\theta(\mathbf{Q}), V_z(\mathbf{Q})$ , а компоненти густини як  $\gamma_r(\mathbf{Q}), \gamma_\theta(\mathbf{Q}), \gamma_z(\mathbf{Q})$ .

Отримаємо такий вираз для компонент швидкості в циліндричних координатах:

$$\begin{bmatrix} V_r(\mathbf{P}) \\ V_\theta(\mathbf{P}) \\ V_z(\mathbf{P}) \end{bmatrix} = \int_s \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_r(\mathbf{Q}) \\ \gamma_\theta(\mathbf{Q}) \\ \gamma_z(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} ds \quad (2.6)$$

Враховуючи (2.6), одержимо

$$\begin{aligned} U_{rr} &= \int_0^{2\pi} (u_{11} \cos \theta + u_{12} \sin \theta) d\theta, & U_{r\theta} &= \int_0^{2\pi} (-u_{11} \sin \theta + u_{12} \cos \theta) d\theta, & U_{rz} &= \int_0^{2\pi} u_{13} d\theta, \\ U_{\theta r} &= \int_0^{2\pi} (u_{21} \cos \theta + u_{22} \sin \theta) d\theta, & U_{\theta\theta} &= \int_0^{2\pi} (-u_{21} \sin \theta + u_{22} \cos \theta) d\theta, & U_{\theta z} &= \int_0^{2\pi} u_{23} d\theta, \\ U_{zr} &= \int_0^{2\pi} (u_{31} \cos \theta + u_{32} \sin \theta) d\theta, & U_{z\theta} &= \int_0^{2\pi} (-u_{31} \sin \theta + u_{32} \cos \theta) d\theta, & U_{zz} &= \int_0^{2\pi} u_{33} d\theta. \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$\hat{z} = z_i - z_j, \quad a = r_i^2 + r_j^2 + \hat{z}^2, \quad b = 2r_i r_j, \quad c = a + b, \quad d = a - b, \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}$$

та використаємо стандартні еліптичні інтеграли

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{1/2} d\psi, \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{-1/2} d\psi.$$

Аналогічно [11] здобудемо такі формули:

$$U_{ij}(P, P_0) = U_{ij}^1 E(k) + U_{ij}^2 K(k), \quad i, j = r, z, \theta,$$

де

$$\begin{aligned} U_{11}^1 &= \frac{-A}{r_i r_j \sqrt{c}} \left[ c + \hat{z}^2 \frac{a}{d} \right], & U_{11}^2 &= \frac{A}{r_i r_j \sqrt{c}} [a + \hat{z}^2], & U_{12}^2 &= \frac{A \hat{z}}{r_i \sqrt{c}}, & U_{12}^1 &= -\frac{U_{12}^2 h}{d}, \\ U_{21}^2 &= -\frac{A \hat{z}}{r_j \sqrt{c}}, & U_{21}^1 &= \frac{U_{21}^2 f}{d}, & U_{22}^2 &= \frac{2A}{\sqrt{c}}, & U_{22}^1 &= \frac{2A \hat{z}^2}{d \sqrt{c}}, \\ U_{33}^1 &= \frac{-2A}{r_i r_j \sqrt{c}} \left[ c + \hat{z}^2 \frac{a}{d} \right], & U_{33}^2 &= \frac{A}{r_i r_j \sqrt{c}} [a + \hat{z}^2], & U_{31} &= U_{13} = U_{32} = U_{23} = 0, \\ A &= [8\pi^2 \mu]^{-1}, & h &= r_j^2 - r_i^2 + \hat{z}^2, & f &= r_i^2 - r_j^2 + \hat{z}^2. \end{aligned}$$

Надалі розглянемо аксіально-симетричні течії, при цьому  $\gamma_\theta(\mathbf{Q}) = 0$ .

При цьому інтегральне зображення для пошуку швидкості набуває вигляду

$$\begin{bmatrix} V_r(\mathbf{P}) \\ V_z(\mathbf{P}) \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_r(\mathbf{Q}) \\ \gamma_z(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} d\Gamma \quad (2.7)$$

Зображення (2.7) буде використано для побудови інтегрального рівняння відносно невідомих густин.

### 3 Аналіз особливостей в ядрах інтегральних операторів

Компоненти  $U_{ij}^{1,2}$  є неперервними функціями. Тому особливості в ядрах (2.7) виникають завдяки логарифмічному характеру еліптичних інтегралів  $K(k)$  при  $k \rightarrow 1$ . Маємо

$$K(k) = \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2}\right) k'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4}\right) k'^4 + \dots, \quad k'^2 = 1 - k^2.$$

Для обчислення еліптичних інтегралів застосовано алгоритм Гауса, заснований на використанні середнього арифметико-геометричного значення  $AGM(a, b)$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2AGM(a, b)}.$$

Алгоритм Гауса полягає у такому [9]:

$$a_0 = a; b_0 = b; a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}; b_1 = \sqrt{a_0 b_0}; \dots; a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}; b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}; \dots \quad (3.1)$$

$$AGM(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Зауважимо, що при застосуванні формул (3.1) точність  $\varepsilon = |a_n - b_n| < 10^{-8}$  досягається за 6 ітерацій. Цей підхід дає змогу виявити логарифмічну особливість, інтеграція якої здійснюється методом, запропонованим в [21].

### 4 Тестування числового методу

Розглянуто сингулярне інтегральне рівняння у вигляді

$$\iint_S \frac{\gamma(x, y) dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = f(x_0, y_0), \quad (4.1)$$

де  $S$  є колом з радіусом  $R$ . В [22] отримано аналітичний розв'язок цього рівняння (4.1) з правою частиною  $f(x_0, y_0) = \pi^2$  у вигляді  $\gamma(x, y) = 1$ . Рівняння (4.1) зведено до одновимірного рівняння

$$4 \int_0^R \frac{\gamma(\rho)}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \frac{\rho}{\rho + \rho_0} K(k) d\rho = \pi^2.$$

Отримане рівняння має логарифмічну особливість, яка не виражена в явному вигляді.

Зробимо заміну змінної  $\rho = R \sin \vartheta$ , що дозволяє позбавитися від кореневої особливості при  $\rho$ , близьких до  $R$ . Отримаємо

$$4 \int_0^{\pi/2} \frac{\gamma(\vartheta) \sin \vartheta}{\sin \vartheta + \sin \vartheta_0} K(k) d\vartheta = \pi^2.$$

При використанні  $M$  граничних елементів [9] в точках еолокації

$$\rho_j = R \sin \vartheta_j; \quad \vartheta_j = \pi \left( j - \frac{1}{2} \right) / 2M, \quad j = 1, \dots, M$$

при  $M = 40$  були отримані значення, наведені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 Порівняння числових та аналітичних значень

Номер елемента	1	5	15	20	25	30	35
Значення густини	1.000092	1.000083	1.000155	1.000163	1.000165	1.000173	1.000168

Дані, наведені в таблиці 4.1, свідчать про добру узгодженість числового та аналітичного розв'язків.

## 5 Висновки

Отримано інтегральне зображення швидкості рідини для аксіально-симетричної течії Стокса. Здійснено аналіз особливостей в ядрах сингулярних операторів. Запропоновано ефективний метод числового розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними особливостями, що виникають при обчисленні еліптичних інтегралів. Наведено результати тестових розрахунків. В подальшому передбачається розв'язання крайових задач стосовно течії Стокса в аксіально-симетричних областях, до яких відносяться нанотрубки в репрезентативних об'ємах наноматеріалів.

Робота частково фінансується в рамках програми "Підтримка пріоритетних для держави наукових досліджень і науково-технічних (експериментальних) розробок Відділення фізико-технічних проблем енергетики НАН України" (КПКВК 6541230)

## ЛІТЕРАТУРА

1. Sigalas M., Kushwaga M.S., Economou E.N., Kafesaki M., Psarobas, I.E., Steurer, W., Classical vibrational modes in phononic lattices: theory and experiment. *Zeitschrift für Kristallographie* 220. 2005. 765- 809.
2. Wang, W., Zeng, W., Ding, J., Finite element modeling of two-dimensional nanoscale structures with surface effects. *World Acad. Sci. Eng. Technol.* 46. 2010. 12-20.
3. Kushch V.I., Mogilevskaya, S.G., Stolarski, H.K., Crouch, S.L., 2013. Elastic fields and effective moduli of particulate nanocomposites with the Gurtin-Murdoch model of interfaces. *International Journal of Solids and Structures* 50. 1141-1153.
4. Mykhas'kiv, V.V., Zhabdinskyi, I.Ya., Zhang, Ch., 2014. Dynamic stresses due to time-harmonic elastic wave incidence on doubly periodic array of penny-shaped cracks. *Journal of Mathematical Sciences* 203. 114-122.
5. Mykhas'kiv V.V., B.M Stasyuk. Effective elastic properties of 3D composites with short curvilinear fibers: numerical simulation and experimental validation. *Solid State Phenomena*. 2017. Vol. 258. P. 452-455.
6. Kushch V.I. Stress field and effective elastic moduli of periodic spheroidal particle composite with Gurtin-Murdoch interface. *International Journal of Engineering Science*. 2018. Vol. 132. P. 79-96.
7. Дегтярьов К.Г., Гнітько В.І., Стрельникова О.О., Тонконоженко А.М. Розрахункові моделі на основі методів скінчених та граничних методів для аналізу механічних властивостей тривимірних нанокомпозитів. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. Т. 2. С. 43-54.
8. Deymier, P.A., *Acoustic Metamaterials and Phononic Crystal*. Berlin, Springer. 2013. 334 p.
9. Gnitko V., Naumemko Y., Strelnikova E. Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 22. Issue 4. P. 867-881. DOI: 10.1515/ijame-2017-0056.
10. Еселева Е.В. Гнітько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Пробл. машиностроения*. 2006. Т.9. №1. С.105 - 118.

11. Gnitko V., Degtyariv K., Karaiev A., Strelnikova E., Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 122, WIT Press, pp.13-25, 2019. DOI: 10.2495/BE410021.
12. Rivera, J.L., Starr, F.W.: Rapid transport of water via carbon nanotube. *J.Phys. Chem. C* 114, 3737–3742 (2010).
13. Chivilikhin, S.A., Gusarov, V.V., Popov, I.Yu.: Flows in nanostructures: hybrid classical-quantum model. *Nanosyst. Phys. Chem. Math.* 3, 7–26 (2012).
14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Москва, Наука, 1970, 904 с.
15. Paul, D.R.: Creating new types of carbon-based membranes. *Science* 335(6067), 411–413 (2012)
16. Popov, I.Yu., Chivilikhin, S.A., Gusarov, V.V.: Model of fluid flow in nanotube: classical and quantum features. *J. Phys. Conf. Ser.* 248, 012006/1-8 (2010)
17. Popov, I.Yu.: Statistical derivation of modified hydrodynamic equations for nanotube flows. *Phys. Scr.* 83, 045601/1-3 (2011)
18. Ackerberg, R.C.: The viscous incompressible flow inside a cone. *J. Fluid Mech.* 21, 47–81 (1965)
19. Cortez R. The Method of Regularized Stokeslet. Society for Industrial and Applied Mathematics. Vol. 23, N4, P. 1204-1225 (2001).
20. Oseen C. W., Uber die Stoke'sche Formel und "uber eine " verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik Almquist & Wiksell, 1911, *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, vi (29)
21. Naumenko V.V., Strelnikova H.A. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. *Engineering analysis with boundary elements*. №26, pp. 95-98, 2002.
22. Кантор Б.Я. Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. Харьков: Новое слово, 2005. 252 с.

## REFERENCES

1. Sigalas, M., Kushwaga, M.S., Economou, E.N., Kafesaki, M., Psarobas, I.E., Steurer, W., "Classical vibrational modes in phononic lattices: theory and experiment". *Zeitschrift für Kristallographie* 220, 765- 809, 2005.
2. Wang, W., Zeng, W., Ding, J., "Finite element modeling of two-dimensional nanoscale structures with surface effects". *World Acad. Sci. Eng. Technol.* 46, 12-20, 2010.
3. Kushch V.I., Mogilevskaya, S.G., Stolarski, H.K., Crouch, S.L., "Elastic fields and effective moduli of particulate nanocomposites with the Gurtin-Murdoch model of interfaces". *International Journal of Solids and Structures* 50, 1141-1153, 2013.
4. Mykhas'kiv, V.V., Zhadynskyi, I.Ya., Zhang, Ch., "Dynamic stresses due to time-harmonic elastic wave incidence on doubly periodic array of penny-shaped cracks". *Journal of Mathematical Sciences* 203, 114-122, 2014.
5. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. "Effective elastic properties of 3D composites with short curvilinear fibers: numerical simulation and experimental validation". *Solid State Phenomena*. Vol. 258, P. 452-455, 2017.
6. Kushch V.I. "Stress field and effective elastic moduli of periodic spheroidal particle composite with Gurtin-Murdoch interface". *International Journal of Engineering Science*. Vol. 132, P. 79–96, 2018.
7. Dehtyar'ov K.H., Hnit'ko V.I., Strel'nikova O.O., Tonkonozhenko A.M. "Rozrakhunkovi modeli na osnovi metodiv skinchenykh ta hranychnykh metodiv dlya analizu mekhanichnykh vlastyvostey tryvymirnykh nanokompozytiv ". *Prykladni pytannya matematychnoho modelyuvannya*. T. 2, S. 43–54, 2018.
8. Deymier, P.A., *Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals*, Berlin, Springer, 2013, 334 p.
9. Gnitko V. Naumenko Y., Strelnikova E., "Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles". *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 22, Issue 4, P. 867-881, 2017. DOI: 10.1515/ijame-2017-0056.
10. Yeseleva Ye.V. Sobstvennyye kolebaniya sosudov vysokogo davleniya pri vzaimodeystvii s zhidkost'yu / Ye.V. Yeseleva, V.I. Gnit'ko, Ye.A. Strel'nikova // *Probl. mashinostroyeniya*. – 2006. T.9, №1. S.105 - 118. [in Russian]
11. Gnitko V., Degtyariv K., Karaiev A., Strelnikova E., Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 122, WIT Press, pp.13-25, 2019. DOI: 10.2495/BE410021.



12. Rivera, J.L., Starr, F.W.: Rapid transport of water via carbon nanotube. *J.Phys. Chem. C* 114, 3737–3742 (2010)
13. Chivilikhin, S.A., Gusarov, V.V., Popov, I.Yu.: Flows in nanostructures: hybrid classical-quantum model. *Nanosyst. Phys. Chem. Math.* 3, 7–26 (2012)
14. Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza*. Moskva, Nauka, 1970, 904 s. [in Russian]
15. Paul, D.R.: Creating new types of carbon-based membranes. *Science* 335(6067), 411–413 (2012).
16. Popov, I.Yu., Chivilikhin, S.A., Gusarov, V.V.: Model of fluid flow in nanotube: classical and quantum features. *J. Phys. Conf. Ser.* 248, 012006/1-8 (2010)
17. Popov, I.Yu.: Statistical derivation of modified hydrodynamic equations for nanotube flows. *Phys. Scr.* 83, 045601/1-3 (2011)
18. Ackerberg, R.C.: The viscous incompressible flow inside a cone. *J. Fluid Mech.* 21, 47–81 (1965).
19. Cortez R. *The Method of Regularized Stokeslet*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Vol. 23, N4, P. 1204-1225 (2001).
20. Oseen C. W., *Über die Stoke'sche Formel und "über eine " verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik* Almqvist & Wiksell, 1911, *Arkiv för matematik, astronomi och fysik, vi (29)*
21. Naumenko V.V., Strelnikova H.A. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. *Engineering analysis with boundary elements*. №26, pp. 95-98, 2002.
22. Ye.A. Kantor, Ye.A. Strel'nikova. *Gipersingulyarnyye integral'nyye uravneniya v zadachakh mekhaniki sploshnoy sredy*. Khar'kov: Novoye slovo, 2005, 252 s. [in Russian]

**Усатова Ольга Александрівна** - аспірант, Інституту проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України, 0953933929, usatova.olia@gmail.com, Orcid 0000-0001-1267-2723.

**Пальчиков Роман Романович** - аспірант, Інституту проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України. Телефон:+380960300413, 19palchikovroman@gmail.com, Orcid 0000-0003-3806-8708.

**Стрельникова Олена Александрівна**, - доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, Orcid: 0000-0003-0707-7214.

**Усатова Ольга Александровна** – аспірант, Інститут проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины. Телефон: +380953933929, usatova.olia@gmail.com, Orcid 0000-0001-1267-2723.

**Пальчиков Роман Романович** - – аспірант, Інститут проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины. Телефон: +380960300413, 19palchikovroman@gmail.com, Orcid 0000-0003-3806-8708.

**Стрельникова Елена Александровна**, - доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, Orcid:0000-0003-0707-7214.

**Usatova Olga** – PhD student, A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences. Phone:+380953933929, usatova.olia@gmail.com, Orcid 0000-0001-1267-2723.

**Palchikov Roman** - PhD student, A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences. Phone: +380960300413, 19palchikovroman@gmail.com, Orcid 0000-0003-3806-8708.

**Strelnikova Elena**, DSc, Prof., leading researcher, A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences, e-mail: elena15@gmx.com, Orcid 0000-0003-0707-7214.

УДК 519.6, 51-76

## Альтернативная эволюция стратегий с памятью

В.В.Поричанский<sup>1</sup>, А.В.Приймак<sup>1</sup>, В.В.Яновский<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61000, Харьков, Украина<sup>2</sup>Институт монокристаллов, Национальная Академия Наук Украины, пр. Науки 60, 61001 Харьков, Украина

e-mail: yanov50@gmail.com

Рассмотрена альтернативная эволюция сообщества стратегий, ограниченных только глубиной памяти. В каждом поколении удаляется из сообщества стратегия, которая набирает максимальное количество очков эволюционных преимуществ. Такая альтернативная эволюция приводит к существенным изменениям сообщества по сравнению с его обычной эволюцией. В определенном смысле альтернативная эволюция поддерживает максимальную глубину памяти и сложность даже в большей степени чем обычная эволюция. Главное отличие состоит в абсолютной агрессивности стационарных стратегий относительно друг друга. Стационар формируют максимально агрессивные по отношению к друг другу стратегии. Глубина памяти и сложность стратегий являются эволюционно выгодными свойствами. Универсальная связь между средней агрессивностью и числом выплат на ход стратегии в среднем сохраняется.

**Ключевые слова:** эволюционное моделирование, дилемма заключенного, стратегия, память, сложность.

У рамках узагальненої «дилеми ув'язнених» розглянута еволюція популяції з повним набором стратегій поведінки, обмежених тільки глибиною пам'яті. При еволюції розглядається парна взаємодія стратегій, відповідно до ітерованої «дилеми ув'язнених». При цьому кожна стратегія взаємодіє з кожною, включаючи себе. Кожне наступне покоління популяції послідовно втрачає найбільш вигідні стратегії поведінки попереднього покоління. Показано, що збільшення пам'яті в популяції еволюційно вигідно. Переможці еволюційного відбору незмінно відносяться до агентам з максимальною пам'яттю. Вводиться поняття складності стратегії. Вводяться колективні змінні для отримання середніх показників спільноти стратегій та вивчається їх зміна із часом. Показано, що стратегії, які перемагають у природному відборі, мають максимальну або близьку до максимуму складність. Розглянуто альтернативну еволюцію спільноти стратегій, обмежених тільки глибиною пам'яті. У кожному поколінні видаляється зі спільноти стратегія, яка набирає максимальну кількість очок еволюційних переваг. Така альтернативна еволюція призводить до суттєвих змін спільноти в порівнянні із його звичайної еволюцією. У певному сенсі альтернативна еволюція, підтримує максимальну глибину пам'яті і складність навіть більшою мірою, ніж звичайна еволюція. Головна відмінність полягає в абсолютній агресивності стаціонарних стратегій одна щодо одної. Стационар формують максимально агресивні по відношенню одна до одної стратегії. Глибина пам'яті і складність стратегій, як і в звичайній еволюції, є еволюційно вигідними властивостями. Розглядається універсальний зв'язок між агресивністю популяції і кількістю очок еволюційних переваг, які отримує стратегія в середньому за хід. Універсальний зв'язок між середньою агресивністю і числом виплат на хід стратегії в середньому зберігається.

**Ключові слова:** еволюційне моделювання дилема ув'язнених, стратегія, пам'ять, складність.

Within the generalized prisoner's dilemma, the evolution of a population with a complete set of behavioral strategies limited only by memory depth has been examined. Evolution considers the pairing of strategies, in accordance with the iterated prisoner's dilemma. In doing so, each strategy interacts with each, including itself. Each subsequent generation of the population consistently loses the most profitable behavior strategies of the previous generation. Increasing population memory has been shown to be evolutionarily beneficial. The winners of evolutionary selection consistently are the agents with maximum memory. The concept of strategy complexity has been introduced. Collective variables are introduced to obtain the average of the family of strategies and their changes over time are studied. Strategies that succeed in natural selection have been shown to have maximum or near maximum complexity. An alternative evolution of a family of strategies limited only by memory depth is considered. In each generation, a strategy that maximizes the point of evolutionary benefits is removed from the family. Such an alternative evolution leads to significant changes in the family compared to the normal evolution. In some ways, alternative evolution maintains maximum memory depth and complexity even more than normal evolution. The main difference is the stationary strategies being absolute aggressive against each other. The stationary family is formed by the strategies being the most aggressive towards each other. Memory depth and complexity of strategies, as in normal evolution, are evolutionarily beneficial properties. The universal relation between the aggressiveness of the population and the number of points of evolutionary advantages that the strategy receives on average per turn is considered. On the whole, the universal link between average aggression and the number of strategy payoffs per turn is maintained.

**Keywords:** evolutionary modeling, prisoner's dilemma, strategy, memory, complexity.

## 1 Введение

Эволюция различных сообществ вызывает большой интерес и интенсивно исследуется в настоящее время. В основу описания поведения сообществ часто закладываются элементы теории игр [1-4]. Используя такой подход, можно выяснить появление множества разнообразных свойств у эволюционирующих популяций. Под эволюционными популяциями, следуя Дарвину, будем понимать множество объектов, которые подчиняются следующим принципам. Это 1) принцип наследственности, 2) принцип изменчивости и 3) естественного отбора.

В работе [6] изучено влияние памяти на процесс эволюции в простой постановке задачи Коши. Понимание памяти использовалось в самом широком смысле. Если действие объекта зависит не только от наблюдаемой ситуации, а и от предшествующих событий, то будем считать, что объект обладает памятью. Тогда большинство биологических объектов обладают памятью. Центральным и важным элементом работы была конкуренция в исходной популяции всех возможных стратегий с ограниченной сверху памятью. Это гарантирует, что не упущена ни одна стратегия, которая может изменить ход эволюции. При эволюции рассматривалось парное взаимодействие стратегий, в соответствии с итерированной дилеммой заключенных. При этом каждая стратегия взаимодействует с каждой, включая себя. В каждом поколении суммируя очки эволюционных преимуществ, которые зависят от матрицы выплат, определялась проигравшая стратегия. Правило отбора при нормальной эволюции состояло в удалении проигравшей или проигравших стратегий из следующего поколения стратегий. Рассмотрено 3 типа популяций. Популяции без памяти, популяции с глубиной памяти 1 и 2. Было показано, что глубина памяти и сложность стратегий являются эволюционно выгодными свойствами. Кроме этого автоматически оказалось, что агрессивность стратегий при эволюции уменьшается и достигает минимума в стационаре. Стационар формируют стратегии с нулевой агрессивностью по отношению к друг другу.

В этой работе рассмотрена альтернативная эволюция сообщества тех же стратегий. Под альтернативной эволюцией будем понимать эволюцию сообщества стратегий с противоположным правилом отбора. Из поколения удаляется победившая стратегия. Такое правило отбора приводит к принципиальным изменениям эволюции сообщества стратегий. Главное изменение состоит в росте агрессивности сообщества стратегий при альтернативной эволюции. Стационар образуют стратегии максимально агрессивные по отношению к друг другу. При этом глубина памяти и сложность стратегий остается близкими к максимально возможным. Сохраняется и универсальная связь между средней агрессивностью сообщества и числом очков эволюционных «преимуществ» на ход стратегии. По сути это означает наличие детерминированной связи между средней агрессивностью сообщества и числом очков эволюционных «преимуществ», получаемых стратегией на протяжении поколения.

## 2 Моделирование эволюции сообщества стратегий

Смоделируем процесс альтернативной эволюции сообщества стратегий с памятью. Пусть в популяции реализованы все стратегии с глубиной памяти меньше или равной  $k$ . Так как в этом случае учтены все стратегии, то в процессе эволюции не будут появляться другие стратегии. Принцип наследственности будет состоять в передаче стратегий потомкам. Принцип естественного отбора реализуем исключением или уничтожением определенных стратегий. При альтернативной эволюции удаляется стратегия набравшая максимальное число очков эволюционных преимуществ в каждом поколении. Рассмотрим к каким последствиям приводит такой способ отбора в сообществе стратегий.

При эволюции рассматривается парное взаимодействие стратегий, в соответствии с итерированной дилеммой заключенных. При этом каждая стратегия взаимодействует с каждой, включая себя. Для того, чтобы установить результат парного взаимодействия стратегий, определим матрицу выплат. Напомним, что дилемма заключенного двух игроков состоит в том, что каждый игрок может выбрать между сотрудничеством (1) или отказом (0). В зависимости от стратегии соперника, выбранный игрок получает  $a_{11}$ , если оба сотрудничают;  $a_{22}$  - если оба отказываются;  $a_{12}$  - если выбранный игрок сотрудничает, и противник отказывается;  $a_{21}$  - если выбранный отказывается, а противник сотрудничает. Матричные элементы, соответствующие дилемме заключенных, ограничены неравенствами  $a_{21} > a_{11} > a_{22} > a_{12}$  и  $2a_{11} > a_{21} + a_{12}$ . В работе мы используем значения матрицы выплат Аксельрода  $M1$  (Таблица 1) [4],

Таблица 1. Матрица выплат Аксельрода

	Кооперация	Отказ
Кооперация	3,3	0,5
Отказ	5,0	1,1

Таким образом, результат взаимодействия стратегий будет определяться этой матрицей. Собственно, эта матрица определяет число очков эволюционных преимуществ, получаемых стратегией при взаимодействии с другой стратегией. Разумеется, взаимодействие двух объектов

популяції на протязі життя або покоління здійснюється багаторазово і кількість взаємодій можна розглядати як параметр в такій грі. Ця гра відповідає ітерованій дилемі заключених [4]. Повторення ходів багаторазово вже дозволяє використовувати покарання за хід або преміювання. Очевидно, що в цьому випадку виключно важливо пам'ятати. Важливо нагадати, що кількість стратегій  $N_k = 2^{2^{k+2}-1}$  зростає експоненціально з збільшенням глибини пам'яті  $k$ . Це означає, що індивідуальне слідування за таким великим кількістю стратегій неможливо. Тому потрібно використовувати колективні змінні. В цій роботі зручно використовувати як такі змінні кількість стратегій з певною глибиною пам'яті  $a_j$  і кількість стратегій з певною складністю  $n_i$  де  $j = 0, 1, \dots, k$  пробігає всі можливі значення глибини пам'яті, а  $i$  всі можливі значення складності стратегій. Наприклад,  $a_0$ -кількість стратегій з нульовою пам'яттю, а  $n_1$ -кількість стратегій складності 1. При вивченні поведінки пам'яті і складності стратегій суспільства в процесі еволюції це достатньо зручні колективні змінні.

## 2.1 Мир без пам'яті

Почнемо з обговорення еволюції найпростішого світу з глибиною пам'яті 0 або світу без пам'яті. Нехай кожна стратегія взаємодіє з іншою стратегією  $n = 100$  разів в межах ітерованій дилемі заключених. Такого кількості взаємодій достатньо для зниження впливу вибору першого ходу [5]. набір очок визначається матрицею виплат, наведеною вище, і сумується. Кожна стратегія в одній грі відповідає на перший хід вибраного суперника, а в іншій починає, роблячи перший хід в грі з тим же суперником. В цих іграх, які вона починає, є дві можливості зробити перший хід — це вибрати 0 або 1. Стратегія, роблячи певний перший хід, розглядається як окрема стратегія. Після проведення ігор між усіма такими стратегіями, включаючи себе, стратегії розподіляються по зайнятих місцях відповідно до набраних очок. Перше місце займає стратегія, набравши найбільшу суму очок. При альтернативній еволюції стратегія або стратегії, набравши максимальну кількість очок, виключаються і не передаються наступному поколінню. Залишені стратегії передаються наступному поколінню і знову вступають в боротьбу з початковими нульовими очками еволюційних переваг. Ці стратегії можна розглядати як нащадків попереднього покоління.

В цьому простому світі кількість стратегій достатньо мала ( $N_0 = 8$ ). Тому існує можливість прослідкувати за всіма стратегіями. Однак, будемо використовувати колективні змінні. Як такі змінні зручно використовувати кількість стратегій  $a_i$  з певною глибиною пам'яті  $i$  і кількість стратегій  $n_i$  певної складності  $i$  [6]. В цьому світі всі стратегії мають 0 глибину пам'яті і тому змінні  $a_0(t)$  просто відслідковують кількість стратегій  $a_0(t) = N_0(t)$ . Чітко, що при видаленні однієї стратегії на кожному етапі еволюції їх кількість лінійно падає з часом  $N_0 = (1-t) + 8$ . Тут  $t = 1, 2, \dots, 8$  — дискретний час еволюції. При такій малій кількості збіг набраних очок кількома стратегіями відсутній. Тому час еволюції займає 8 етапів (або поколінь), після яких виживає одна стратегія і настає стаціонарний стан.

Переходимо тепер до обговорення зміни складності стратегій суспільства [5, 6]. Це основна колективна характеристика, за якою можна класифікувати стратегії в цьому світі. Найбільш детальну інформацію про поведінку складності несуть кількість стратегій відповідної складності на кожному етапі еволюції. В світі з нульовою пам'яттю присутні стратегії складності 0, 1 і 2. Графіки зміни з часом кількості стратегій певної складності наведено на Рис.2.1,

З наведених залежностей (Рис.2.1) легко встановити час зникнення стратегій певної складності. Легко помітити, що незважаючи на введені правила відбору, примітивні стратегії  $n_0$  зникають вже на 3 етапі еволюції. Стратегії складності 1 зберігаються в суспільстві до 7 етапу і стаціонарно формують стратегії максимальної складності. При звичайній еволюції в світі без пам'яті першими зникли стратегії складності 1, а нульової складності зникли тільки після 7 етапу еволюції. В цьому сенсі навіть при альтернативній еволюції складність стратегій еволюційно вигідна властивість.

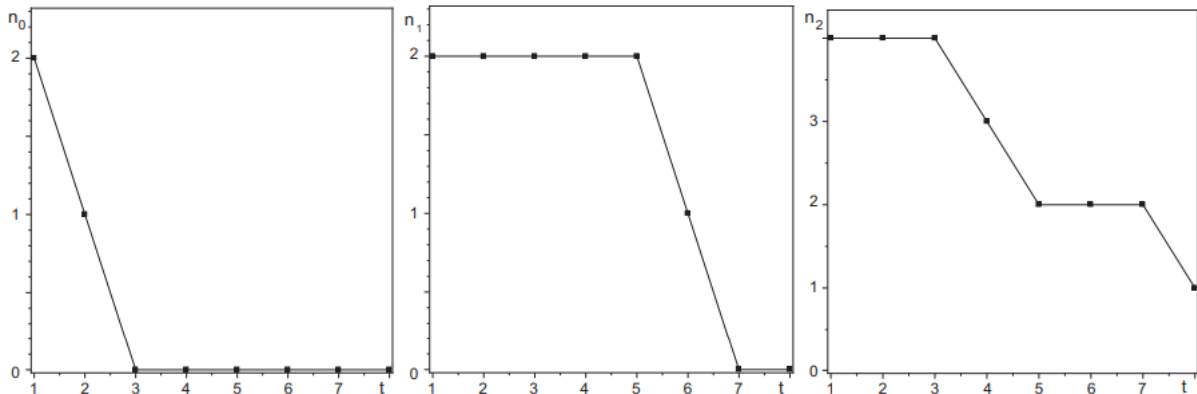


Рис.2.1 Слева – изменение  $n_0$  - числа стратегий нулевой сложности. Посередине – эволюция  $n_1$  - числа стратегий единичной сложности, справа –  $n_2$  - сложности 2. Отметим, что точки соединены линиями только для наглядности и линии не играют никакого значения. Время дискретно.

Также можно получить среднее значение сложности всего «сообщества» на каждом этапе эволюции. Среднее значение сложности определяется следующим образом (Формула 2.1).

$$\bar{C}(t) = \frac{0 \cdot n_0 + 1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2}{n_0 + n_1 + n_2} = \frac{1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2}{n_0 + n_1 + n_2} \quad (2.1)$$

Зависимость средней сложности стратегий «сообщества» от времени эволюции показана на Рис.2.2. Средняя сложность демонстрирует достаточно сложное, осциллирующее поведение с выходом на максимальное значение в стационаре. Другими словами, средняя сложность сообщества стратегий возрастает в процессе эволюции. Это означает выгодность сложных стратегий даже в сообществах с альтернативным отбором. Интересно отметить, что характер зависимости средней сложности при альтернативной эволюции отличается от аналогичной зависимости при естественном правиле отбора отсутствием стадии, на которой средняя сложность становилась ниже начальной сложности стратегий сообщества. В этом смысле сложность при альтернативной эволюции увеличивается даже более «монотонно» или интенсивно.

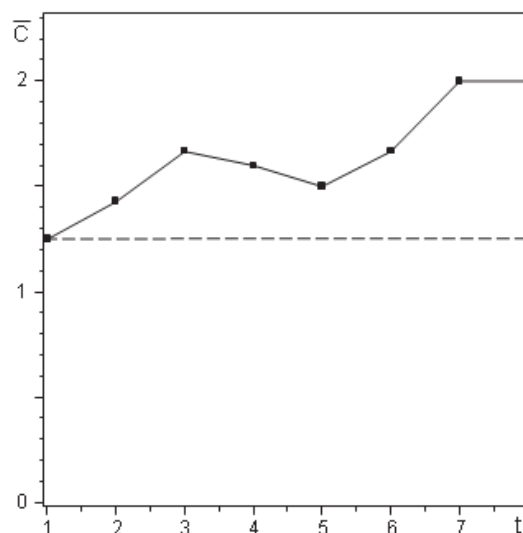


Рис.2.2 Изменение среднего значения сложности всего «сообщества» стратегий в процес- се эволюции. Пунктирная линия – начальное среднее значение сложности всех страте- гий «сообщества». Это значение соответствует среднему значению сложности сообщества стратегий в котором присутствуют все стратегии с нулевой глубиной памяти.

Обсудим теперь, какими свойствами обладают стратегии, которые, набирают максимальное число очко на разных этапах эволюции сообщества или доминирующие стратегии сообщества. Будем следить за сложностью, агрессивностью и числом выплат на ход, таких стратегий на разных этапах эволюции. На Рис.2.3 приведены соответствующие зависимости.

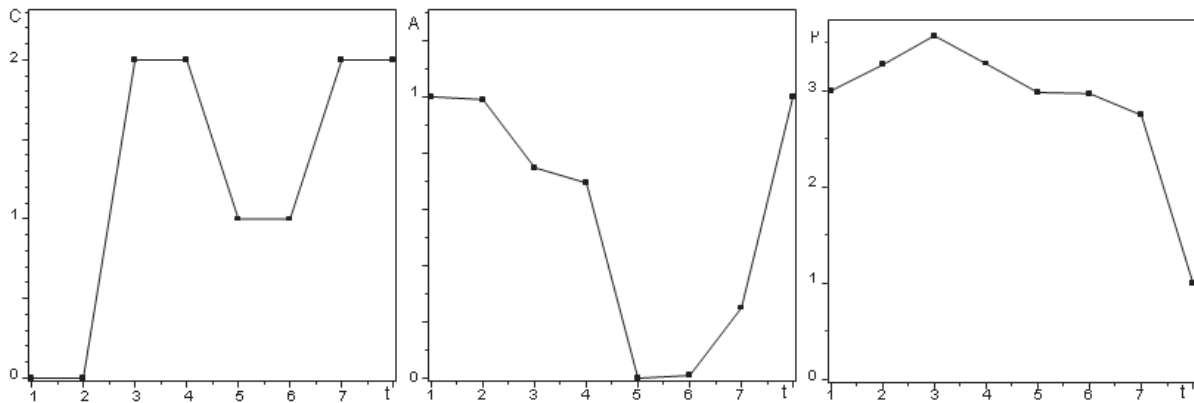


Рис.2.3 Слева сложность, стратегии набравших максимальное число очко на соответствующем этапе эволюции. В центре агрессивность, стратегии набравших максимальное число очко от времени. Справа число заработанных очко эволюционных преимуществ стратегией за один ход, набравших максимальное число очко на всех этапах эволюции

Видно, что на ранних этапах эволюции (до 2 этапа включительно) максимальное количество очко получали только примитивные стратегии с нулевой сложностью. При альтернативной эволюции они и были утеряны на этих этапах эволюции. Собственно, в этом и состоит причина более сильного роста сложности и механизм выхода в стационар более сложных стратегий с учетом правила отбора альтернативного сообщества. Напомним, что в этом случае удаляются, можно сказать, что удаляются победившие стратегии.

Явно выраженный ступенчатый характер изменения связан с небольшой численностью стратегий с нулевой глубиной памяти. Агрессивность победителей сначала падает, а затем нарастает до максимального значения. Минимум агрессивности коррелирует с периодом доминирования стратегий с промежуточной сложностью 1. Значение величины выплат на ход, победивших стратегий на разных этапах эволюции достигает максимума на 3 этапе эволюции и далее падает со временем. Минимум достигается в стационаре.

Перейдем теперь к обсуждению изменения со временем средней агрессивности и числа выплат на ход в среднем. Эти характеристики приведены на Рис.2.4. Легко заметить качественные изменения в поведении этих характеристик при альтернативной эволюции. Агрессивность в отличие от обычного случая (нормальной эволюции) сначала падает, а затем нарастает до максимального значения. Таким образом, сообщество стратегий становится более агрессивным в процессе альтернативной эволюции. Аналогичные качественные изменения претерпевает и изменение величины числа выплат на ход стратегии в среднем. В отличие от обычного случая [6] при альтернативной эволюции величина выплат достигает максимума и затем уменьшается. Этап достижения максимума выплат совпадает с этапом минимальной агрессивности сообщества стратегий.

Таким образом, при альтернативной эволюции агрессивность, выживающих стратегий возрастает, а величина выплат на ход в среднем уменьшается. В мире с нулевой памятью хорошо заметна корреляция в поведении средней агрессивности и среднего заработка на ход. Можно предположить, что связь между этими характеристиками определяется универсальным соотношением [6] (Формула 2.2).

$$A(t) = \sqrt{\lambda(P_{max} - P(t))} - a \quad (2.2)$$

На Рис.2.4 справа, приведено сравнение средней агрессивности, полученной численным моделированием, с эмпирической закономерностью, приведенной выше. Масштабный коэффициент выбран из соображений равенства этих характеристик на первом этапе эволюции  $P_{max} = 3$ ,  $\lambda = 5.3/8$  и  $a = 0.2$ .

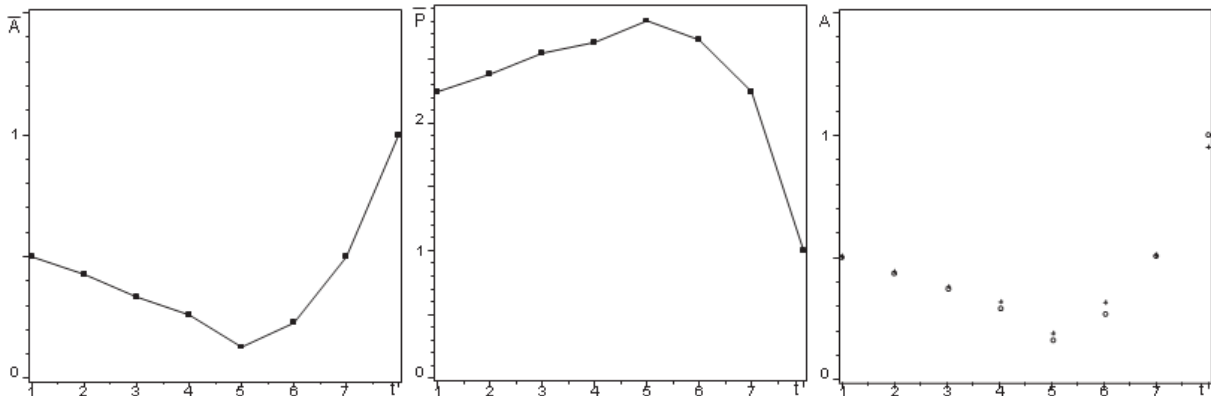


Рис.2.4 Слева изменение со временем средней агрессивности сообщества стратегий, в центре - числа выплат на ход стратегии в среднем. Справа сравнение агрессивности, полученной моделированием с агрессивностью, построенной по данным о числе выплат на ход стратегии в среднем (см. соотношение (1)).

Несмотря на небольшое отклонение в области минимума, графики демонстрируют хорошее согласие в поведении со временем этих характеристик. Разумеется, согласие можно улучшить, варьируя значения постоянных, входящих в соотношение (1). Здесь мы сохранили значения, которые использовались в различных вариантах эволюции [6, 7]. Среднее число выплат на ход стратегии зависит от средней агрессивности стратегий по квадратичному закону (Формула 2.3).

$$P(t) = P_{max} - \frac{1}{\lambda}(A(t) - a)^2 \quad (2.3)$$

Параметр  $a$ , который входит в это соотношение, приобретает простой физический смысл. Так можно заметить, что параметр  $a$  совпадает с минимальным значением агрессивности  $A_{min}$  сообщества стратегий при котором и достигается максимальное значение выплат. Поэтому удобно придать этому соотношению более наглядный вид (Формула 2.4).

$$P(t) = P_{max} - \frac{1}{\lambda}(A(t) - A_{min})^2 \quad (2.4)$$

Коэффициент  $\lambda$  зависит от выбора матрицы выплат. Таким образом, связь (2.3) между этими характеристиками сохраняется и при альтернативной эволюции. Однако поведение стратегий без памяти при альтернативной эволюции существенно отличается от их поведения при обычной эволюции.

## 2.2 Мир с глубиной памяти 1

Рассмотрим теперь альтернативную эволюцию сообщества стратегий с глубиной памяти 1. Принцип удаления победивших или стратегий, набравших максимальное число очков на каждом этапе эволюции, применяется и в этом случае. Время эволюции этого сообщества занимает 97 этапов и в стационарном состоянии остаются 8 стратегий (с учетом первого хода). В стационаре они получают одинаковое число очков эволюционных преимуществ. Агрессивность стратегий, формирующих стационар, по отношению к друг другу максимальна и равна 1. Это принципиально отличается от нулевой агрессивности стационарных стратегий при нормальной эволюции. Имена и характеристики стационарных стратегий при альтернативной эволюции приведены в таблице ниже

Таблиця 2. характеристики стаціонарних стратегій

Имя стратегии	Глубина памяти	Сложность
(0)(00)0001	1	4
(0)(01)0100	1	4
(0)(00)0100	1	4
(0)(00)0111	1	4
(0)(01)0001	1	4
(0)01	0	2
(0)(01)0111	1	4
(0)(01)0011	1	3

Видно, что стационар формируют стратегии максимальной сложности 4, только две стратегии имеют меньшую сложность 3 и 2. Прimitивные стратегии (нулевой сложности и сложности 1) не доживают до стационарного состояния. Эта закономерность проявляется и в глубине памяти стационарных стратегий - все кроме одной имеют максимальную глубину памяти.

Таким образом, в стационаре такого сообщества присутствуют только абсолютно агрессивные стратегии с максимальной глубиной памяти и сложностью. Только малая доля стратегий с меньшей глубиной памяти и сложностью, но абсолютно агрессивные входят в стационар. Отличие от стационара, возникающего при обычной эволюции состоит только в агрессивности стратегий. Стационар при обычной эволюции формируют стратегии нулевой агрессивности по отношению друг к другу.

Перейдем теперь к описанию эволюции такого сообщества стратегий. В этом мире уже встречаются стратегии с 0 (8 стратегий) и 1 глубиной памяти (96 стратегий). Поэтому в качестве нетривиальной коллективной переменной можно использовать и численность стратегий с определенной глубиной памяти. На Рис.2.5 приведены результаты численного моделирования поведения этих переменных при эволюции сообщества. Ступенчатая структура  $a_0(t)$  связана с небольшой численностью таких стратегий и наличие участков сохранения их численности определяется исчезновением, более многочисленных, стратегий 1 глубины памяти на этих временных интервалах. Средний интервал сохранения  $a_0(t)$  легко оценить, как  $\Delta t = 97/8 \approx 12$ , что и наблюдается на Рис.2.5 слева. Видно, что только одна стратегия с 0 глубиной памяти достигает стационара. Такая ступенчатая структура присутствует и в поведении  $a_1(t)$ , но мало заметна из-за большой численности стратегий глубины памяти 1.

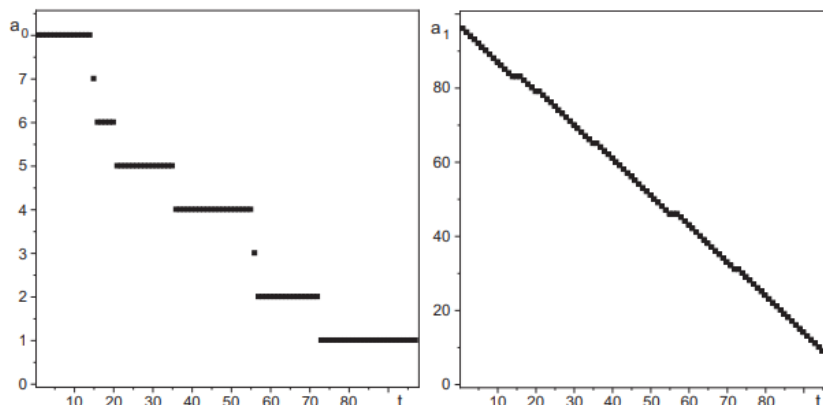


Рис.2.5 Слева – изменение  $a_0$  - числа стратегий нулевой глубины памяти. Справа – эволюция  $a_1$  - числа стратегий единичной глубины памяти. Время дискретно.

Следующие важные коллективные переменные — это численность стратегий определенной сложности. На Рис.2.6 приведена зависимость от времени этих переменных, полученные при численном моделировании эволюции. Хорошо заметно исчезновение примитивных стратегий. Так примитивные стратегии сложности 0 исчезают на 16 этапе эволюции (или поколений), а сложности 1 на 56 этапе. Зависимости  $n_0(t)$  и  $n_1(t)$  от времени



имеют характерную ступенчатую структуру, природа которой вполне аналогична описанной выше. Средний интервал сохранения их значений  $\Delta t = 97/3 \approx 32$ . Такая же структура наблюдается и остальных численностей стратегий  $n_i(t)$  определенной сложности. Причина не в столь значительном различии их численности по сравнению с различием численности  $a_0(t)$  и  $a_1(t)$  на порядок.

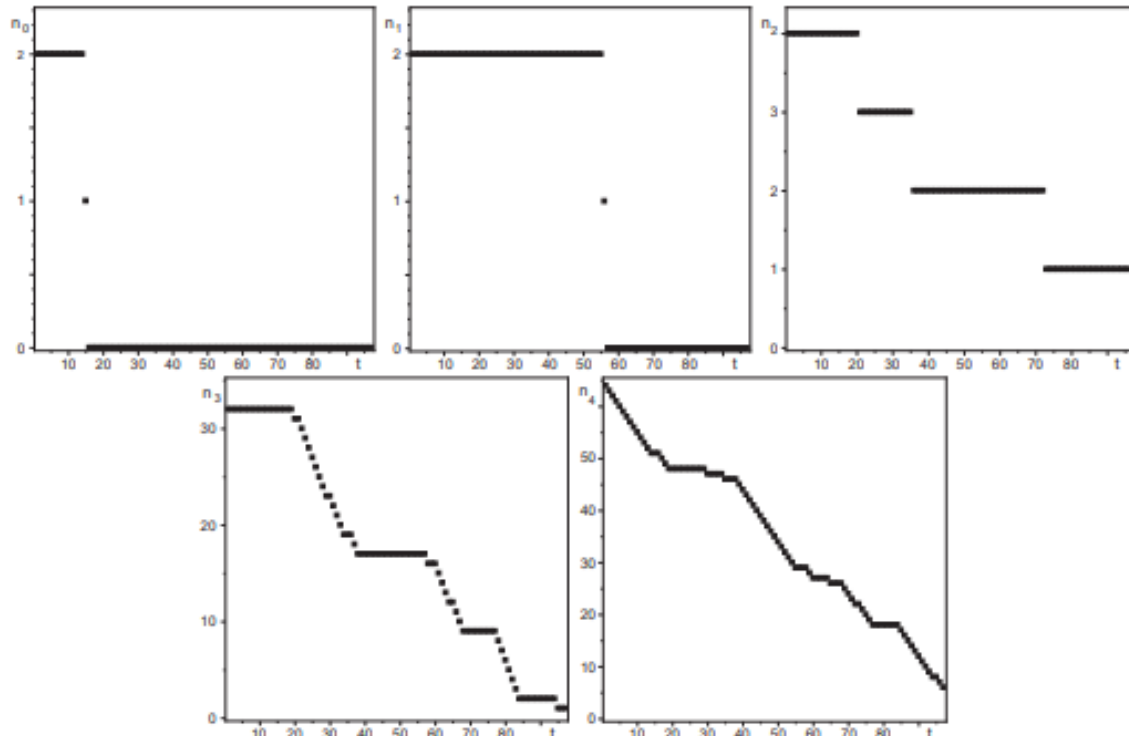


Рис.2.6 Изменение со временем  $n_i$  - числа стратегий  $i$ -ой сложности,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Перейдем теперь к обсуждению доминирующих стратегий в процессе эволюции сообщества. Как и ранее, под доминирующей стратегией на определенном этапе будем понимать стратегию, которая победила или набрала максимальное число очков на этом этапе. На Рис.2.7 приведены основные характеристики стратегий, доминирующих на этапах эволюции. Видно, что за редкими исключениями доминирующие стратегии имели максимальную глубину памяти. Доля времени на которых доминировали стратегии с меньшей глубиной памяти составляет 7% всего времени эволюции. Аналогично доминирующие стратегии сложны. Доля доминирования примитивных стратегий 0 и 1 сложности составляет 4% времени эволюции. Доля доминирования максимально сложных стратегий составляет 59%. Напомним, что в каждом поколении при альтернативной эволюции уничтожались именно доминирующие стратегии. Несмотря на это стационар формируют оставшиеся сложные стратегии. Агрессивность доминирующих стратегий сильно флуктуирует и скорее напоминает хаотическую зависимость. Механизм появления такой хаотизации связан с удалением выигравшей стратегии. Действительно, при обычной эволюции, выигравшая стратегия сохраняла первенство на некотором временном интервале эволюции, а в случае альтернативной она удаляется при первой победе. Поэтому следующая, победившая стратегия может иметь характеристики существенно отличные от предыдущего победителя. Как следует из Рис.2.7 такая неустойчивость особенно проявляется в агрессивности. Более закономерным образом ведет себя зависимость числа эволюционных преимуществ победивших стратегий, со временем их значение монотонно убывает.

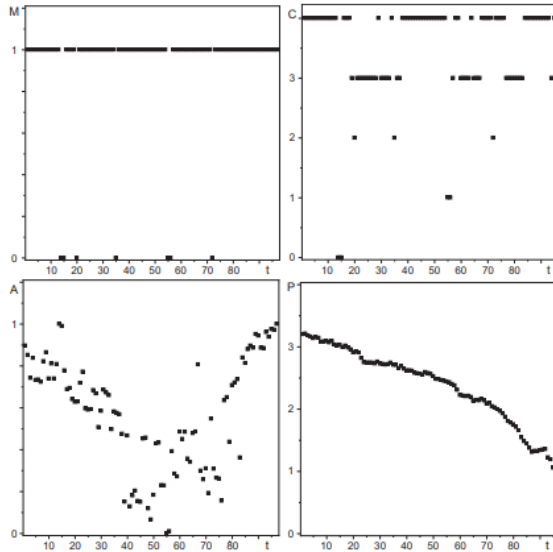


Рис.2.7 Слева сверху глубина памяти  $M$ , справа сверху  $C$  сложность, слева внизу агрессивность  $A$  и справа внизу число очкознаход  $P$ , выигравшей стратегии на соответствующем этапе эволюции.

Рассмотрим ниже поведение средних характеристик сообщества стратегий при альтернативной эволюции. Разумеется, их можно получить, используя зависимости  $a_i(t)$  и  $n_i(t)$ . На Рис.2.8 показаны зависимости от времени средних характеристик стратегий сообщества. Легко заметить, что средняя глубина памяти меняется в процессе эволюции незначительно в окрестности максимального значения. Средняя сложность сообщества стратегий также слабо меняется вблизи максимального значения. Другими словами, средняя глубина памяти и сложность стратегий сообщества сохраняется в процессе эволюции. Наиболее явные изменения претерпевает средняя агрессивность стратегий сообщества и как следствие число выплат на ход стратегии в среднем. Поведение средней агрессивности сообщества при альтернативной эволюции после достижения минимума начинает монотонно возрастать и достигает максимального значения в стационаре. Напомним, что при нормальной эволюции агрессивность после достижения максимума монотонно падала, достигая в стационаре минимального значения. Поведение величины выплат на ход стратегии также противоположно изменению со временем величине выплат при нормальной эволюции. При этом связь между средней агрессивностью и числом выплат на ход сохраняется прежней. В этом можно убедиться из нижнего правого графика на Рис.2.8.

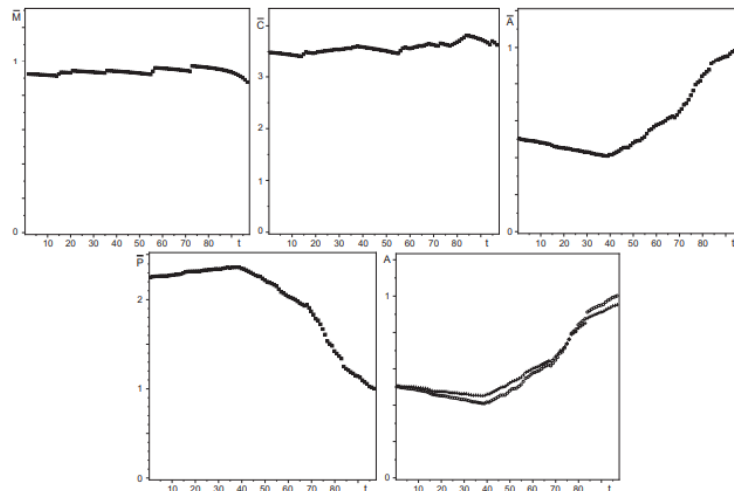


Рис.2.8 Слева – изменение средней сложности стратегий  $\bar{C}$ . Посредине – эволюция средней агрессивности стратегий  $\bar{A}$  справа – изменение числа выплат на ход стратегии в среднем  $\bar{P}$ . Внизу сравнение агрессивности, полученной моделированием (кружочки) с агрессивностью, построенной по данным о числе выплат на ход стратегии в среднем (крестики) (см. соотношение (1))

Таким образом, при альтернативной эволюции сообщества стратегий с глубиной памяти 1 в стационаре достигается максимальная агрессивность сообщества. При этом глубина памяти и сложностью выживших стратегий близка к максимальным значениям.

### 2.3 Мир с глубиной памяти 2

Перейдем теперь к обсуждению изменений при альтернативной эволюции сообщества стратегий при увеличении глубины памяти. Для этого рассмотрим сообщество стратегий с глубиной памяти не превышающей 2. Принцип удаления победивших стратегий на каждом этапе эволюции применяется и в этом мире. Матрица выплат и число ходов двух стратегий остается прежние. Естественно, что число всех возможных стратегий в этом мире увеличивается и равно 30824. Здесь снова под отдельной стратегией понимается стратегия с определенными начальными ходами. Как и ранее на каждом этапе будут удаляться стратегия (или стратегии), набравшая минимальное число эволюционных преимуществ. Далее всюду в качестве единицы временного масштаба будем использовать длительность 300 поколений. Время достижения стационара составляет 30694 поколений или выбранном масштабе 102.

В терминах коллективных переменных все стратегии разделим на 3 группы по глубине памяти и будем следить за изменением численности этих групп. Так  $a_0(t)$  - число стратегий в обществе с глубиной памяти 0 на  $t$ -ом этапе,  $a_1(t)$  - число стратегий с глубиной памяти 1 на  $t$ -ом этапе, а  $a_2(t)$  - число стратегий с глубиной памяти 2 на  $t$ -ом этапе. При моделировании эволюции такого общества получена зависимость изменения численности этих групп со временем, которые приведены на Рис.2.9. Величины  $a_0(t)$  и  $a_1(t)$  как и в предыдущем мире (см. раздел 2.2) обладают заметной кусочно-постоянной структурой. Как отмечалось выше, природа этого связана с численностью  $a_2(t)$ , превышающей на несколько порядков величины  $a_0(t)$  и  $a_1(t)$ . Главное отличие в поведении этих характеристик с увеличением глубины памяти сводится к исчезновению всех стратегий по мере эволюции, кроме имеющих максимальную глубину памяти. Стационар достигают только стратегии имеющие максимальную глубину памяти.

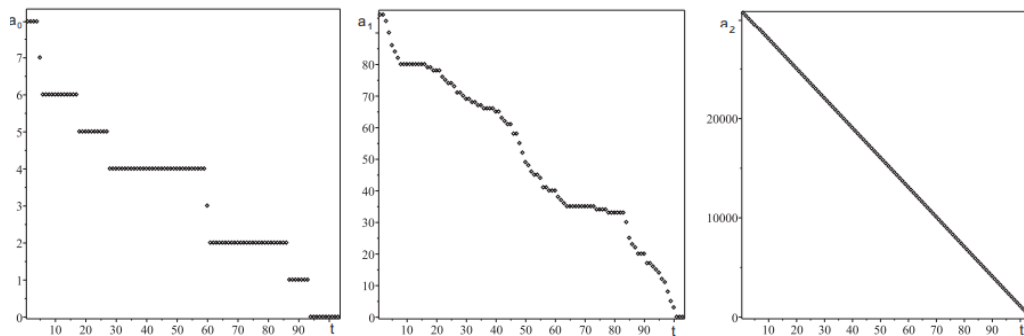


Рис.2.9 Изменение со временем  $a_i$  - числа стратегий  $i$ -ой глубины памяти  $i = 0, 1, 2$ .

Так стратегии с глубиной памяти 0 исчезают на 28200 этапе, самая агрессивная исчезает на 1174 этапе и самая «добропорядочная» на 17719 этапе. Стратегии с глубиной памяти 1 исчезают на 30300 этапе эволюции. Число оставшихся стратегий в стационаре равно 131.

Следующими величинами, за изменением которых при эволюции важно следить, являются численности стратегий определенной сложности  $n_i(t)$ . В рассматриваемом мире присутствуют стратегии сложности  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, 8$ . Результаты численного моделирования показаны на Рис.2.10. Эти зависимости демонстрируют, что примитивные стратегии малой сложности исчезают из сообщества на ранних этапах эволюции, не достигая заключительных этапов борьбы за существование. Так, первыми исчезают стратегии сложности 0 – на 1800 этапе, стратегии 1-ой сложности исчезают на 18300 этапе, стратегии сложности 2 – на 30300, стратегии сложности 3 – на 27300 этапе, сложности 4 – на 30800 этапе, сложности 5 – на 28800 этапе. Стратегии более высокой сложности полностью не исчезают и некоторые из них формируют стационарное состояние.

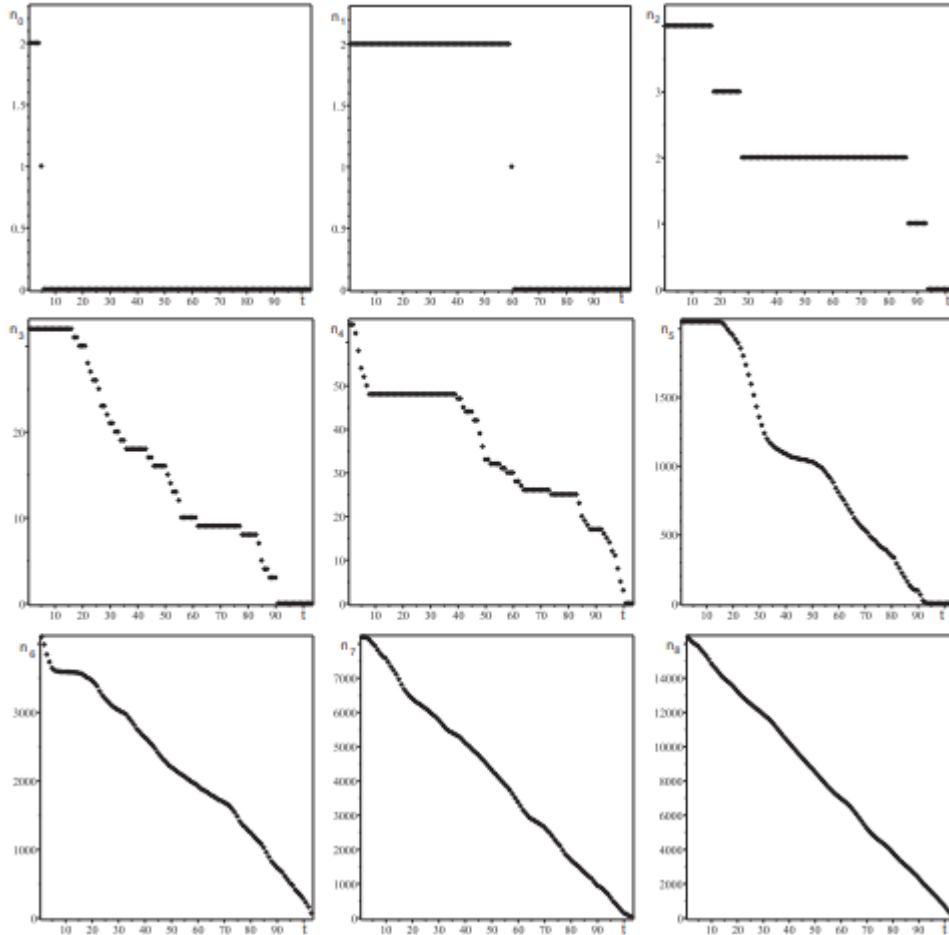


Рис.2.10 Изменение со временем  $\Pi_i$  - числа стратегий  $i$ -ой сложности,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Таким образом характерное поведение численности стратегий определенной сложности соответствует поведению этих характеристик и в предыдущем мире. Отличия носят количественный характер.

Перейдем к обсуждению доминирующих стратегий или стратегий, набравших максимальное число очков на соответствующем этапе эволюции этого мира. На Рис.2.11 показаны основные характеристики доминирующих стратегий на каждом этапе эволюции. Как и в предыдущем случае основная доля доминирования приходится на стратегии с максимальной глубиной памяти и максимальной сложности. Очевидная причина этого – большая численность таких стратегий и удаление победителя на каждом этапе. Кроме этого сохраняется высокая чувствительность агрессивности, победивших стратегий, к удалению победивших стратегий. Остальные зависимости отличаются только количественно, сохраняя типичный характер изменения со временем.

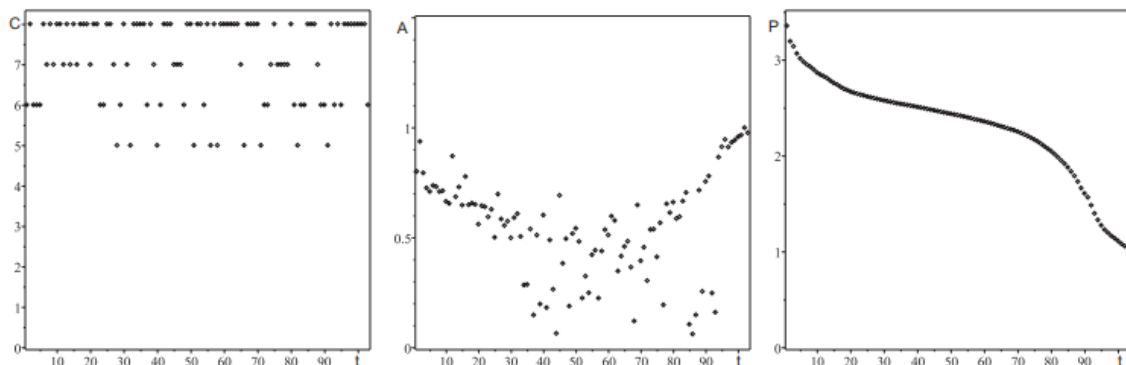


Рис.2.11 Слева – Сложность, в центре – агрессивность  $A$  и справа число очков на ход  $P$ , выигравшей стратегии на соответствующем этапе эволюции. Память выигравших стратегий на всех этапах равна 2.

Используя коллективные переменные можно получить средние характеристики сообщества стратегий и изучить их изменение со временем. На Рис.2.12 приведены изменения со временем средней сложности, агрессивности и числа выплат на ход. Среднее значение глубины памяти сохраняется близким к 2 на протяжении всей эволюции и из-за простоты поведения не приводится. Средняя сложность сохраняется на уровне среднего значения по всем стратегиям с глубиной памяти не превышающей 2. Небольшие флуктуации наблюдаются, как обычно, при уменьшении числа стратегий сообщества вблизи выхода на стационар. Средняя агрессивность после достижения минимума начинает увеличиваться и достигает максимума в стационаре. Стационар формируют абсолютно агрессивные по отношению к друг другу стратегии. Это изменение противоположное поведению средней агрессивности стратегий при нормальной эволюции [6]. Такое же качественное изменение претерпевает и среднее число выплат на ход стратегии. При этом связь между этими характеристиками сохраняется прежней (см. соотношение (1) и (3)).

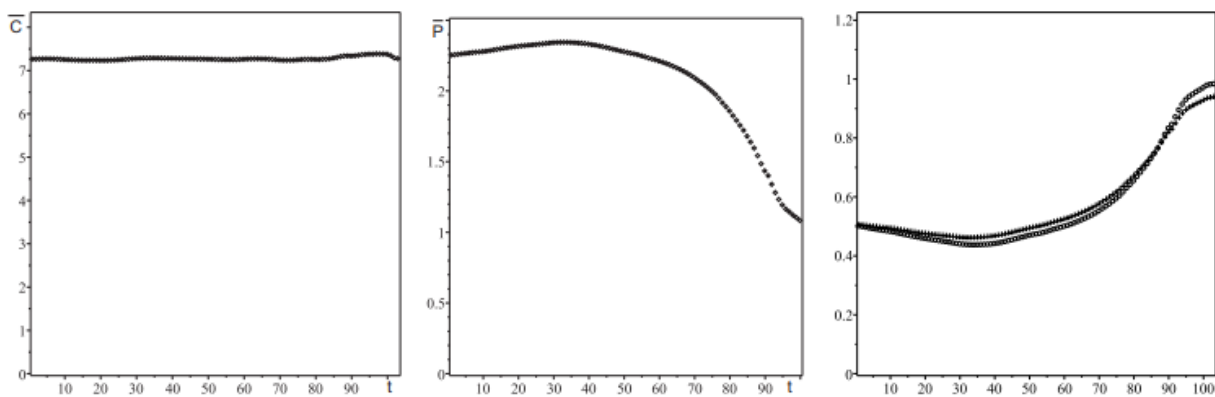


Рис.2.12 Слева – изменение средней сложности стратегий  $\bar{C}$ . Посредине – изменение числа выплат на ход стратегии в среднем  $\bar{P}$ . Справа – сравнение агрессивности, полученной моделированием (кружочки) с агрессивностью, построенной по данным о числе выплат на ход стратегии в среднем (крестики) (см. соотношение (1))

Теперь обсудим распределение стратегий в стационаре. На Рис.2.13 приведены соответствующие гистограммы полученные в результате моделирования альтернативной эволюции.

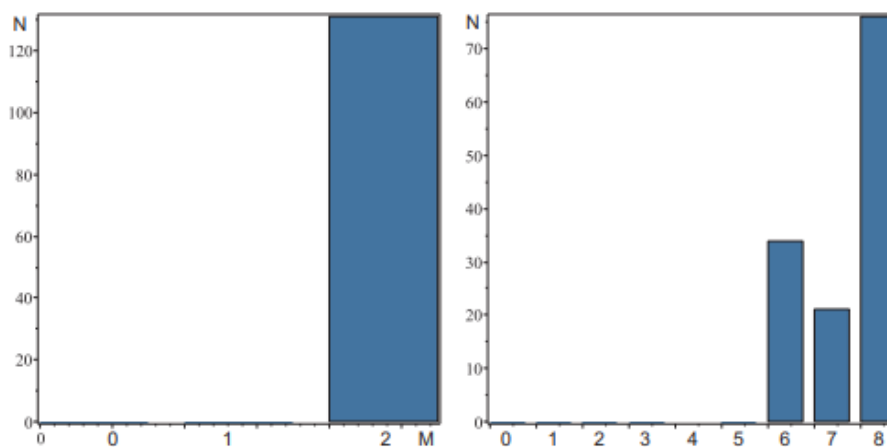


Рис.2.13 Слева численность стратегий определенной памяти, а справа численность стратегий определенной сложности в стационаре.

Легко видеть, что стационар формируют только стратегии с глубиной памяти 2. Кроме этого только стратегии сложности 6, 7 и 8 достигают стационарного состояния и большинство стратегий имеют максимальную для этого мира сложность. В определенном смысле альтернативная эволюция, как не парадоксально, поддерживает максимальную глубину памяти и сложность даже в большей степени чем обычная эволюция. Главное отличие состоит в абсолютной агрессивности стационарных стратегий относительно друг друга. Следует ожидать, что такое характерное поведение сохранится и при дальнейшем увеличении глубины памяти сообщества стратеги.

### 3 Заключение

Основное отличие альтернативной эволюции от обычной состоит в увеличении средней агрессивности сообщества стратегий после достижения минимума. Стационар формируют максимально агрессивные по отношению к друг другу стратегии. Образуется сообщество «пауков в банке». При этом по-прежнему глубина памяти и сложность стратегий являются эволюционно выгодными свойствами. Универсальная связь между средней агрессивностью и числом выплат на ход стратегии в среднем сохраняется и при альтернативной эволюции.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Вейбулл Дж. У. Эволюционная теория игр. MIT Press, Cambridge, MA. 1993.
2. Новак М.А. Эволюционная динамика. Кембридж, Массачусетс. 2006.
3. Claussen J.C. Дискретные стохастические процессы, уравнения репликатора и Фоккера-Планка коэволюционной динамики в конечных и бесконечных популяциях. *Banach Center Publications 80*. 2008. 17–31.
4. Аксельрод Р., Эволюция сотрудничества Basic Books. Нью-Йорк. 1984.
5. Куклин В.М., Приймак А.В., Яновский В.В. Влияние памяти на эволюцию популяций. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» т.29. 2016. с.41–66.
6. Куклин В.М., Приймак А.В., Яновский В.В. Память и эволюция сообществ, Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління».v.35. 2017. с.38–60.
7. Куклин В.М., Приймак А.В., Яновский В.В. Эволюция сообществ стратегий при наличии источников, Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». v.36. с.68–84., 2017.

### REFERENCES

1. J.W. Weibull, *Evolutionary Game Theory*. MIT Press, Cambridge, MA, 1993.
2. M.A. Novak, *Evolutionary Dynamics*. Cambridge, Massachusetts, 2006.
3. J.C. Claussen, Discrete stochastic processes, replicator and Fokker-Planck equations of coevolutionary dynamics in finite and infinite populations, *Banach Center Publications 80*, 17–31, 2008.
4. R. Axelrod, *The Evolution of Collaboration*, Basic Books, New York, 1984).
5. V. M. Kuklin, A. V. Priymak, V. V. Yanovsky, “The influence of memory on the evolution of populations”. *Visnik of the Kharkiv National University named after V. N. Karazin, series “Mathematical Modeling. Information technology. Automation of the control system*, v.29, p.41-66, 2016. [in Russian]
6. V. M. Kuklin, A. V. Priymak, V. V. Yanovsky, “Memory and evolution of communities”, *Visnik of the Kharkiv National University named after V. N. Karazin, series “Mathematical Modeling. Information technology. Automation and control systems”*, v.35, p.38-60, 2017. [in Russian].
7. V.M. Kuklin, A.V. Priimak, V.V. Yanovsky, “Evolution of strategy communities with sources available”, *Visnik of the Kharkiv National University named after V. N. Karazin, Series Mathematical*

“*Modeling. Information technology. Automation and control systems*”. v. 36, p. 68-84, 2017. [in Russian].

**Яновський Володимир Володимирович** – доктор фізико-математичних наук, професор; професор кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: yanov50@gmail.com; ORCID: 0000-0003-0461-749X.

**Yanovsky Volodymyr V.** PhD, Doctor of Science, Professor, Professor of Department of Artificial Intelligence and Software V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, e-mail: yanov50@gmail.com; ORCID: 0000-0003-0461-749X.

**Яновский Владимир Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры искусственного интеллекта и программного обеспечения, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: yanov50@gmail.com; ORCID: 0000-0003-0461-749X.

**Приймак Олексій Вікторович** – старший викладач кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: priymak@mail.com.

**Priymak Oleksiy V.** Senior Lecturer of Department of Artificial Intelligence and Software V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, e-mail: priymak@mail.com.

**Приймак Алексей Викторович** – старший преподаватель кафедры искусственного интеллекта и программного обеспечения, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: priymak@mail.com.

**Поричанський Володимир Володимирович** – студент кафедри моделювання систем і технологій, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: vladimir.porichansky@mail.com.

**Porichansky Volodimir V.** Student of Department of Artificial Intelligence and Software V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, e-mail: vladimir.porichansky@mail.com.

**Поричанский Владимир Владимирович** – студент кафедры моделирования систем и технологий, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: vladimir.porichansky@mail.com.

УДК 004.07

## Sensor node for wireless radiation monitoring network

O. Ridozub, V. Terokhin, M. Stervoyedov, S. Fomin

V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 6, 61022, Kharkiv, Ukraine

e-mail: kbs-com@karazin.ua

The structure of a sensor node for wireless network for environmental radiation monitoring is described in the article. The sensor node is developed on the base of semiconductor detector, modern microprocessor technology, and a last-generation telecommunications radio module. A new algorithm for measuring the power of the exposure dose of ionizing radiation has been investigated in the article. The amount of ionizing radiation energy absorbed by the human body affects the degree of radiation damage to its functional organs radically. In order to solve this problem we are working on improving the parameters of detectors, as well as the characteristics of electronic modules of detecting systems and creating software for controlling the detection process, collecting and processing information digitally, and presenting it properly to users in online mode. A wireless sensor network (WSN) is a distributed, self-organizing network of multiple sensors (sensors, motors, etc.) containing "Motes" (a specks of dust), so named because of the tendency to miniaturization and Executive devices combined with each other through the radio channel. The coverage area of such a network can range from several meters to several kilometers due to the ability to relay messages from one element to another. The motes usually contain battery-powered autonomous microcomputers (controllers) and transceivers. That allows the motes to self-organize into specialized networks, communicate with each other and exchange data. The role of human changes significantly in the model of sensor networks, since their elements – sensor microcomputers – become much more independent, often anticipating human requests long before they are received. "Homocentric" model of network computing with a human as a central link belongs to the past – a human moves from the center to the periphery and concentrates on the process managing, becoming a kind of an intermediary between the real world and computers.

**Keywords:** radiation monitoring, wireless sensor network, sensor node, microcontroller, algorithm, correction of energy dependence, charge-sensitive amplifier, radio transceiver.

Описано структуру сенсорного вузла для бездротової мережі радіаційного моніторингу навколишнього середовища. Сенсорний вузол розроблено на базі напівпровідникового детектору, сучасної мікропроцесорної техніки та і телекомунікаційного радіомодуля останнього покоління. Запропоновано новий алгоритм вимірювання потужності експозиційної дози іонізуючого випромінювання. Схема підключення детектору до попереднього заряду - чутливого підсилювача. Пошук шляхів вирішення цієї проблеми йде в напрямку поліпшення параметрів детекторів, удосконалення характеристик електронних модулів детектуючих систем і створення програмного забезпечення (ПЗ) для управління процесом детектування, збором інформації, її цифрової обробки і адекватного представлення користувачам в on-line режимі. Через те, що бездротові мережі можуть розгортатися у віддалених і важкодоступних місцях, апаратне, алгоритмічне та програмне забезпечення повинне забезпечувати максимальний час функціонування вузлів, надійність, відмовостійкість і автоматичне переконфігурування. Кількість поглиненої енергії іонізуючих випромінювань людським організмом радикально впливає на ступінь променевих уражень його функціональних органів. Пошук шляхів вирішення цієї проблеми йде в напрямку поліпшення параметрів детекторів, удосконалення характеристик електронних модулів детектуючих систем і створення програмного забезпечення (ПЗ) для управління процесом детектування, збором інформації, її цифрової обробки. При розробці ПЗ необхідно враховувати особливості взаємодії іонізуючого випромінювання з матеріалами і об'єктами, які опромінюються. Структура і запропоновані алгоритми роботи вузла дозволяють присвідчити процес вимірювання потужності експозиційної дози випромінювання, особливо при високих рівнях радіаційного забруднення. Розробка модуля є інноваційним методом дослідження радіаційного становища не тільки на території України, а і за її межами.

**Ключові слова:** радіаційний моніторинг, бездротова сенсорна мережа, сенсорний вузол, мікроконтролер, алгоритм, корекція енергетичної залежності, заряду - чутливий підсилювач, трансивер радіо.

Описана структура сенсорного узла для беспроводной сети радиационного мониторинга окружающей среды. Сенсорный узел разработан на базе полупроводникового детектора, современной микропроцессорной техники и телекоммуникационного радио модуля последнего поколения. Предложен новый алгоритм измерения мощности экспозиционной дозы ионизирующего излучения. Схема подключения детектора к предыдущему заряду - чувствительного усилителя. Поиск путей решения этой проблемы идет в направлении улучшения параметров детекторов, усовершенствование характеристик электронных модулей детектирующих систем и создание программного обеспечения (ПО) для управления процессом детектирования, сбором информации, ее цифровой обработки и адекватного представления пользователям в on-line режиме. За то, что беспроводные сети могут разворачиваться в отдаленных и труднодоступных местах, аппаратное, алгоритмическое и программное обеспечение должно обеспечивать максимальное время функционирования узлов, надежность, отказоустойчивость и автоматическое переконфигурирование. Количество поглощенной энергии ионизирующих излучений человеческим организмом радикально влияет на степень лучевых поражений его функциональных органов. Поиск путей решения этой проблемы идет в направлении улучшения параметров детекторов, усовершенствование характеристик электронных модулей детектирующих систем и создание программного обеспечения (ПО) для управления процессом детектирования, сбором информации, ее цифровой обработки. При разработке ПО необходимо учитывать особенности взаимодействия ионизирующего излучения с материалами и объектами, которые облучаются. Структура и предложенные алгоритмы работы узла позволяют убедить процесс измерения мощности экспозиционной дозы излучения, особенно при высоких уровнях радиационного загрязнения. Разработка модуля является инновационным методом исследования радиационной обстановки не только на территории Украины, а и за ее пределами.



**Ключевые слова:** радиационный мониторинг, беспроводная сенсорная сеть, сенсорный узел, микроконтроллер, алгоритм, коррекция энергетической зависимости, зарядо-чувствительный усилитель, трансивер радио.

## Introduction

Wireless sensor networks are the most promising technologies for monitoring large areas. They are a set of geographically distributed wireless sensor nodes designed to collect and sometimes pre-process information about environmental parameters, as well as to transmit this information to remote users. They are useful in applications where it is impossible, complicated, or expensive to operate wired sensors. The variety of available sensors and actuators makes it possible to use sensor networks in many industries, for example, in object security systems [3], in environmental monitoring [4], in medical systems for monitoring the condition of patients [5], in monitoring agricultural land [5, 6], in fire-extinguishing systems [7], in monitoring systems for complex objects and technical complexes, in automation systems for scientific research [8], etc.

Wireless sensor networks consist of small independent devices that allow measuring any parameters such as temperature, pressure, vibration, sound, movement of objects, pollution, and so on. These devices are called sensor nodes. Each of them is equipped with a microcontroller, a radio transceiver for wireless communication, and an autonomous power supply, excepting sensory components of sensor nodes - detectors. Hardware, algorithms, and software must ensure maximum node operation time, reliability, fault tolerance, and automatic reconfiguration because wireless networks can be deployed in remote and hard-to-reach locations.

### Structure of a sensor node for radiation monitoring

The first figure contains a block diagram of the developed node for wireless network for environmental radiation monitoring.

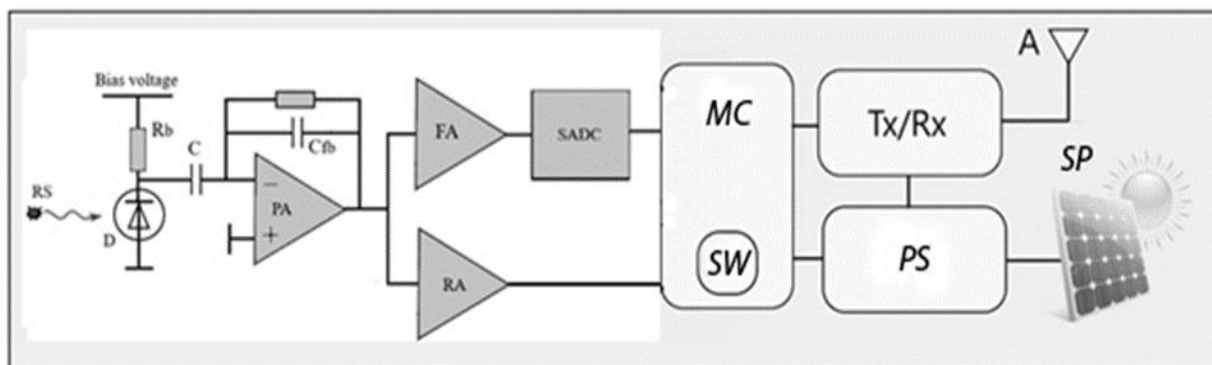


Fig. 1. Structure of a sensor node for a wireless radiation monitoring network.

The radiation detector D with the charge-sensitive PA amplifier is connected to the main spectrometric FA and fast RA amplifiers, the output of which is connected to the spectrometric analog-to-digital Converter SADC and then to the microcontroller MK STM32F4. Prepared data is transferred to the Tx/Rx using ESP32-SX1278-Lora module is a new convenient, efficient, and cost-effective solution for working with network programs. The main chip of the module is Lexin ESP32, dual-core Tensilica LX6 processor with a clock frequency of 240 MHz, processing power up to 600DMIPS, built-in 520 KB SRAM chip, 802.11 b/g/n HT40 Wi-Fi receiver, base frequency, protocol stack and LWIP, built-in dual-mode Bluetooth (Bluetooth-standard and Bluetooth with low power consumption). The module also contains built-in 32MByte Flash memory, Wi-Fi antenna, 0.96-inch blue OLED display, USB interface on CP2102 and supports the Arduino development environment which is convenient for programming the module. The power supply (PS) is based on lithium-ion batteries with a charger from a solar panel.

### The functioning algorithm of the microcontroller dosimeter.

The radiation dose calculation program operates in two modes: the preset exposure time mode or the preset statistical uncertainty mode. The second figure presents activity diagrams that contain the sequence of actions required to implement this task.

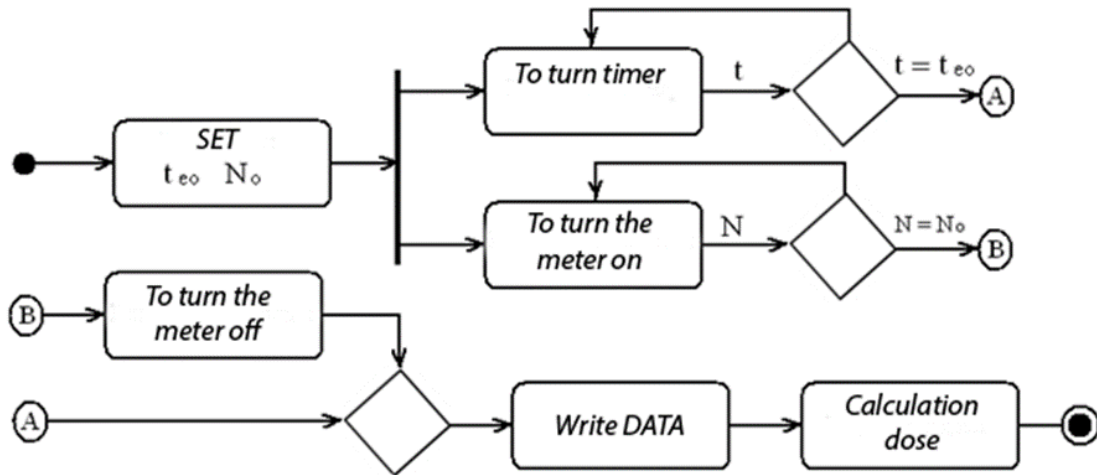


Fig. 2. Activity diagram.

After entering the program module, the exposure time  $t_{eo}$  and the number of pulses are set, which determines the specified statistical error. Then a countdown timer and a counter for the number of pulses from the detector are activated simultaneously. When the condition for reaching the number of pulses  $N$  set to  $N_o$  is met, the pulse counting stops. The third figure explains behavior of time values  $t_1$  and  $t_2$ . Data is to be written to the processor memory afterwards. Basing on the similarity of triangles, the program calculates quantity of impulses during the operation. Accordingly, those are denoted as  $N_4$  and  $N_3$ . If the number of pulses  $N$  does not reach the pre-set value of  $N_o$  during the maximum exposure time of  $t_{eo}$ , the pulse counting stops at  $t = t_{eo}$ . In this case, the statistical uncertainty ( $\sqrt{N/N}$ ) will be higher.

The next step is implementing the dose calculation module according to one of the proposed algorithms.

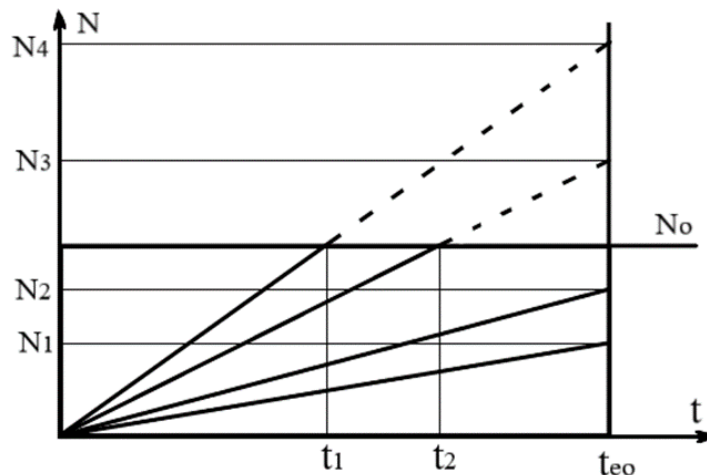


Fig. 3. The working algorithm of the module for radiation dose measurement and calculation in two modes: the preset exposure time mode and the preset statistical uncertainty mode.

#### Block diagram of a microcontroller dosimeter.

In contrast to popular schemes, described in [10], for example, the fourth figure presents a modified block diagram of the spectrometer-dosimeter, which corresponds to the proposed method for measuring and calculating the radiation dose. The dose is calculated by using data on the spectral sensitivity of the detector.

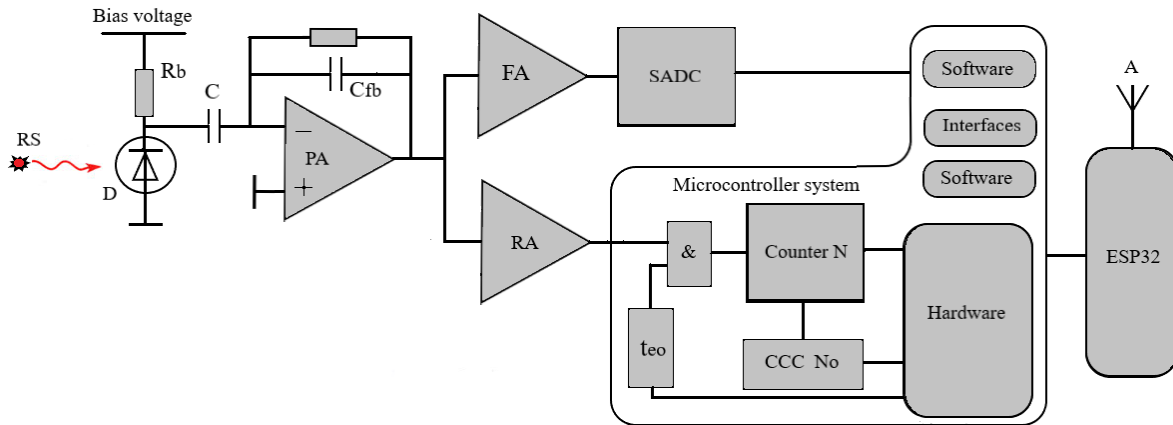


Fig. 4. Block diagram of the spectrometer-dosimeter.

The block diagram shows connection of the radiation detector to the charge-sensitive amplifier PA, the spectrometric amplifier FA forming the optimal signal-to-noise ratio and the spectrometric analog-to-digital converter SADC which are similar to the connection presented in Figure 1. The new channel is a pulse counting channel with a fast RA amplifier, generating at its output a logical signal for each gamma quantum registered by the d detector. This signal is sent to the microcontroller system, where hardware and software instruments solve the problem of counting the number of pulses  $N$  during the exposure time  $t_{eo}$ , or measuring the time  $t$ , during which the number of pulses in the Counter  $N$  reaches the value  $N_0$ .

The  $N_0$  number is written from the beginning of the measurement cycle to the code comparison device CCC No, which issues a command to stop counting. Afterwards, the radiation dose calculation process is performed. Calculating can be performed by the microprocessor system or by using the cloud service capabilities. ESP32 module provides a communication function.

### The correction of energy dependence of radiation detectors

The amount of absorbed ionizing radiation energy by the human body affects the degree of radiation damage to its functional organs radically. Therefore, the correct dosimetric measurements and founding the ways to increase the accuracy or reduce the uncertainty of the measured and calculated dosimetric values is an urgent problem. In order to solve this problem we are working on improving the parameters of detectors, as well as the characteristics of electronic modules of detecting systems and creating software for controlling the detection process, collecting and processing information digitally, and presenting it properly to users in online mode.

When developing software, it is necessary to consider the interaction of ionizing radiation with materials and objects being irradiated. In particular, their heterogeneity and the energy dependence of the detector sensitivity in a wide range of energy and radiation intensity should be accounted for, which is a non-trivial task.

One of the possible ways to correct the energy dependence, for example, of CdTe and CdZnTe detectors is to consider a hardware spectrum appropriate to the energy spectrum of real radiation. To study those detectors software should be developed. To perform it, the dosimetric equipment includes a multi-channel amplitude analyzer, which feeds the number of pulses and their amplitude distribution during the exposure time to the digital signal processor where it is processed in real-time by the separate program. The DEXP exposure dose is programmatically calculated with the formulas [1, 2]:

$$D_{\text{exp}} = N_t (M E_{ph} + C) \quad (1)$$

$$E_{ph} = \{ [\sum_k k N(k)] / N_t \} E_{adc} \quad (2)$$

where  $N_t$  is the total number of pulses during exposure in the selected energy range,  $M$  and  $C$  are constants determined during detector calibration,  $E_{ph}$  is the energy equivalent of the average pulse amplitude,  $N(k)$  is the number of impulses in channel  $k$ , and  $E_{adc}$  is energy channel width of a multi-channel amplitude analyzer.

The calculated exposure dose value is transmitted via a wireless interface to a dosimetry system computer or a cloud server.

### Conclusions

The sensor node for a wireless network for environmental radiation monitoring has been developed. The structure and the algorithms of the node allow us to simplify the process of measuring the power of the radiation exposure dose, especially at high levels of radiation pollution. In order to reduce measurement uncertainty, the hardware-software correction of the results including a spectrometric analog-to-digital converter and a microcontroller system for pre-processing data has been presented. The software has been developed. The network exchange protocol has been selected and justified. A working laboratory layout of the sensor node has been developed and tested. The work has been carried out with partial financial support from the UNTC Foundation, project No. 9903.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Applications of wireless sensor networks, URL: <http://wireless.ictp.it/wp-content/uploads/2012/02/WSN-Applications.pdf> (Last accessed: 20.01.2020).
2. NI Wireless Sensor Network (WSN) Application Areas, National Instruments, URL: <http://www.ni.com/wsn/applications> (Last accessed: 20.01.2020)
3. G. Vellidis. Wireless Sensor Network Applications in Agriculture, TransAtlantic Precision Agriculture Consortium, URL: <http://agri-sensing.technion.ac.il/Lectures%20PDF/PA/Vellidis%20Wednesday.pdf> (Last accessed: 20.01.2020)
4. K. Sha, W. Shi, O. Watkins. Using Wireless Sensor Networks for Fire Rescue applications: Requirements and Challenges, URL: <http://www.cs.wayne.edu/~weisong/papers/sha06-firenet.pdf> (Last accessed: 20.01.2020)
5. Беспроводной промышленный мониторинг. Интеллектуальные системы на базе сенсорных сетей, URL: [http://www.ipmce.ru/img/release/is\\_sensor.pdf](http://www.ipmce.ru/img/release/is_sensor.pdf) . (Last accessed: 20.01.2020)
6. Банзак О. В. Методы и системы спектрометрии ионизирующих излучений и контроля радиационной безопасности на основе полупроводниковых детекторов нового поколения. Диссертация на соискание научной степени доктора технических наук. Одеса, 2016. с28–31.
7. Захарченко А.А. Моделирование дозиметрических свойств детекторов гамма излучения на основе высокоомных полупроводников. Диссертация на соискание канд. физ. – мат. наук. Харьков, 2009.563с.
8. Захарченко А.А. Моделирование энергетической зависимости чувствительности CdTe (CdZnTe) детекторов гамма-излучения А.А. Захарченко, Д.В. Наконечный, И.Н. Шляхов, А.В. Рыбка, В.Е. Кутний, М.А. Хажмурадов Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2007. – № 1. – С. 28–31.

### REFERENCES

1. Applications of wireless sensor networks, URL: <http://wireless.ictp.it/wp-content/uploads/2012/02/WSN-Applications.pdf> (Last accessed: 20.01.2020)
2. NI Wireless Sensor Network (WSN) Application Areas, National Instruments, URL: <http://www.ni.com/wsn/applications/> (Last accessed: 20.01.2020)
3. G. Vellidis. Wireless Sensor Network Applications in Agriculture, TransAtlantic Precision Agriculture Consortium, URL: <http://agri-sensing.technion.ac.il/Lectures%20PDF/PA/Vellidis%20Wednesday.pdf> (Last accessed: 20.01.2020)
4. K. Sha, W. Shi, O. Watkins. Using Wireless Sensor Networks for Fire Rescue applications: Requirements and Challenges, URL: <http://www.cs.wayne.edu/~weisong/papers/sha06-firenet.pdf> (Last accessed: 20.01.2020)
5. Wireless industrial monitoring. Smart systems based on sensor networks, URL: [http://www.ipmce.ru/img/release/is\\_sensor.pdf](http://www.ipmce.ru/img/release/is_sensor.pdf) . (Last accessed: 20.01.2020) [in Russia]
6. Benzac O. V. Methods and system for spectrometry of ionizing radiation and radiation safety monitoring based on semiconductor detectors of the new generation. The dissertation on competition of a scientific degree of doctor of technical Sciences. Odessa, 2016. 28–31p.[in Russia]

7. Zakharchenko A. A. Modeling of dosimetric properties of gamma radiation detectors based on high-resistance semiconductors. Dissertation for the Cand. Phys. - Mat. sciences. Kharkiv, 2009 563p. [in Russia]
8. Zakharchenko A. A. Modeling of the energy dependence of the sensitivity Of CdTe (CdZnTe) gamma radiation detectors A. A. Zakharchenko, D. V. Nakonechny, I. N. Shlyakhov, A.V. Rybka, V.E. kutniy, M. A. Khazhmuradov Technology and design in electronic equipment. - 2007. - No. 1. - Pp. 28-31. [in Russia]

**Terokhin Vitaliy L.** - Aspirant of the Department of electronics and control systems, V. N. Karazin Kharkiv national University, 6 Svobody square, Kharkiv-22, Ukraine, 61022; e-mail: kbs-com@karazin.ua ORCID: 0000-0001-7653-4488.

**Stervoyedov Nikolay G.** - PhD (Technology), associate Professor; Head of the Department of electronics and control systems, V. N. Karazin Kharkiv national University, 6 Svobody square, Kharkiv-22, Ukraine, 61022; e-mail: styervoyedov@yahoo.com; ORCID: 0000-0003-0136-6437.

**Fomin Sergey P.** - PhD (Technology), of physical and mathematical Sciences, senior researcher of the Department of nuclear and medical physics of the faculty of physics and technology, V. N. Karazin Kharkiv national University, 6 Svobody square, Kharkiv-22, Ukraine, 61022; e-mail: Fomin@nas.gov.ua; ORCID: 0000-0002-4714-6141.

**Ridozub Oleh V.** - 4th year student of the faculty of Computer science, V. N. Karazin Kharkiv national University, 6 Svobody square, Kharkiv-22, Ukraine, 61022; e-mail: ridozub@gmail.com; ORCID: 0000-0003-0136-6437.

**Терьохін Віталій Леонідович** - аспірант кафедри електроніки та управляючих систем Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 6, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: kbs-com@karazin.ua ORCID: 0000-0001-7653-4488.

**Стервоєдов Микола Григорович** - кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри електроніки та управляючих систем Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, пл. Свободи, 6, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: styervoyedov@yahoo.com; ORCID: 0000-0003-0136-6437.

**Фомін Сергій Петрович** - кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник кафедри ядерної та медичної фізики фізико-технічного факультету Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 6, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: Fomin@nas.gov.ua; ORCID: 0000-0002-4714-6141.

**Рідозуб Олег Володимирович** - студент 4 курсу факультету комп'ютерних наук Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 6, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: ridozub@gmail.com; ORCID: 0000-0003-0136-6437.

**Терехин Віталій Леонідович** - аспірант кафедри електроніки та управляючих систем Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 6, Харків-22, Україна, 61022 e-mail: kbs-com@karazin.ua ORCID: 0000-0001-7653-4488.

**Стервоєдов Миколай Григорьевич** - кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри електроніки та управляючих систем Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 6, Харків-22, Україна, 61022 e-mail: styervoyedov@yahoo.com; ORCID: 0000-0003-0136-6437.

**Фомин Сергей Петрович** - кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры ядерной и медицинской физики физико-технического факультета Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 6, Харків-22, Україна, 61022 e-mail: Fomin@nas.gov.ua; ORCID: 0000-0002-4714-6141.

**Рідозуб Олег Владимирович** - студент 4 курса факультета компьютерных наук Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 6, Харків-22, Україна, 61022 e-mail: ridozub@gmail.com;

UDC 519.161+519.852+519.687.1

## Infinity substitute in exactly minimizing total tardiness in tight-tardy progressive 1-machine scheduling by idling-free preemptions of equal-length jobs

V. V. Romanuke

*O. S. Popov Odessa National Academy of Telecommunications, Ukraine**e-mail: romanukevadimv@gmail.com*

A schedule ensuring the exactly minimal total tardiness can be found by the respective integer linear programming problem with infinities. In real computations, the infinity which shows that the respective states are either forbidden or impossible is substituted with a sufficiently great positive integer. An open question is whether the substitute can be selected so that the computation time would be decreased. The goal is to ascertain how the increment of the infinity substitute in the respective model influences the computation time of exact schedules. If the influence appears to be significant, then a recommendation on selecting the infinity substitute is to be stated in order to decrease the computation time. A pattern of generating instances of the job scheduling problem is provided. The instances of the job scheduling problem are generated so that schedules which can be obtained trivially, without the exact model, are excluded. Nine versions of the infinity substitute have been proposed. The increment of the infinity substitute in the model of total tardiness exact minimization rendered to solving an integer linear programming problem involving the branch-and-bound approach may have bad influence on the computation time of exact schedules. At least, the greater value of the infinity substitute cannot produce an optimal schedule faster in tight-tardy progressive 1-machine scheduling by idling-free preemptions of equal-length jobs. Roughly the best value of the infinity substitute is the maximal value taken over all the finite triple-indexed weights in the model and increased then by 1. The influence of the “max” infinity substitution is extremely significant. Compared to the case when the infinity is substituted with a sufficiently great integer, the “max” infinity substitution saves up to 50 % of the computation time. This saves hours and even days or months when up to 8 jobs of a few equal processing periods are scheduled for a few thousands of cycles or longer. Therefore, it is strongly recommended always to select the infinity substitute as less as possible in order to decrease the computation time.

**Key words:** *job scheduling; preemptive 1-machine scheduling; exact model; total tardiness; computation time; infinity substitute.*

Розклад, що забезпечує строго мінімальне загальне запізнювання, можна знайти за відповідною цілочисловою задачею лінійного програмування з нескінченностями. У реальних обчисленнях нескінченність, котра показує, що відповідні стани є забороненими або неможливими, замінюється на достатньо велике додатне ціле. Відкритим є питання про те, чи така заміна може бути підібрана так, щоб час обчислень був би зменшений. Мета полягає у тому, щоб встановити, як збільшення заміника нескінченності у відповідній моделі впливає на час обчислення точних розкладів. Якщо вплив виявиться значним, то слід надати рекомендацію щодо вибору заміника нескінченності для зменшення часу обчислень. Наведено схему генерації екземплярів задачі планування завдань. Екземпляри задачі планування завдань генеруються так, що розклади, які можна отримати тривіально, без точної моделі, виключені. Запропоновано дев'ять варіантів заміника нескінченності. Приріст заміника нескінченності в моделі точної мінімізації загального запізнювання, зведеної до розв'язання цілочислової задачі лінійного програмування, що передбачає підхід методу гілок і меж, може мати поганий вплив на час обчислення точних розкладів. Принаймні більше значення заміника нескінченності не може створити оптимальний розклад швидше у щільному прогресуючому 1-машинному плануванні рівноцінних завдань з перемиканнями без простою. Приблизно найкращим значенням заміника нескінченності є максимум, взятий за усіма скінченними потрійно-індексованими вагами моделі і збільшений потім на 1. Вплив заміника нескінченності “max” є дуже значущим. Порівняно з випадком, коли нескінченність замінена на досить велике ціле, заміник нескінченності “max” заощаджує до 50 % часу обчислень. Це заощаджує години та навіть дні чи місяці, коли розплановується до 8 завдань за кількох рівних періодів до обробки протягом кількох тисяч циклів або довше. Тому настійно рекомендується завжди вибирати заміник нескінченності якомога меншим, щоб скоротити час обчислень.

**Ключові слова:** *планування завдань; 1-машинне планування з перемиканнями; точна модель; загальне запізнювання; час обчислення; заміник нескінченності.*

Расписание, обеспечивающее строго минимальное общее запаздывание, можно найти по соответствующей целочисленной задаче линейного программирования с бесконечностями. В реальных вычислениях бесконечность, показывающая, что соответствующие состояния запрещены или невозможны, заменяется достаточно большим положительным целым числом. Открытым является вопрос о том, можно ли выбрать замену так, чтобы время вычислений уменьшилось. Цель состоит в том, чтобы выяснить, как приращение заместителя бесконечности в соответствующей модели влияет на время вычисления точных расписаний. Если влияние окажется значительным, то следует дать рекомендацию по выбору заместителя бесконечности для уменьшения времени вычислений. Указана схема генерации экземпляров задачи планирования заданий. Экземпляры задачи планирования заданий генерируются таким образом, что расписания, которые можно получить тривиально, без точной модели, исключаются. Предлагаются девять вариантов замены бесконечности. Приращение заместителя бесконечности в модели точной минимизации общего запаздывания, сведённой к решению целочисленной задачи линейного программирования с использованием подхода ветвления и границ, может плохо влиять на время вычисления точных расписаний. По крайней мере, большее значение заместителя бесконечности не может дать оптимальное расписание быстрее в плотном прогрессирующем 1-машинном планировании равноценных заданий с переключениями без простоя. Примерно лучшим значением заместителя бесконечности является максимум, взятый по всем конечным трёхиндексным весам модели и увеличенный затем на 1. Влияние заместителя бесконечности “max” является очень значительным. По сравнению со случаем, когда бесконечность заменяется достаточно большим целым числом, заместителя бесконечности “max” экономит до 50 %

времени вычислений. Это экономит часы и даже дни или месяцы, когда планируется до 8 заданий с несколькими равными периодами к обработке в течение нескольких тысяч циклов или дольше. Поэтому настоятельно рекомендуется всегда выбирать заместитель бесконечности как можно меньшим, чтобы уменьшить время вычислений.

**Ключевые слова:** планирование заданий; 1-машинное планирование с переключениями; точная модель; общее запаздывание; время вычисления; заместитель бесконечности.

### The infinity in exact minimization of total tardiness

The model of exact minimization of total tardiness is rendered to solving an integer linear programming problem involving the branch-and-bound approach [1]. Owing to the fact that no weights are included (see, e.g., [2]), where release dates are set at non-repeating integers from 1 through the total number of equal-length jobs, and due dates are tightly set after the respective release dates (although a few jobs still can be completed without tardiness), the exact model is simplified for such tight-tardy progressive 1-machine scheduling [3]. Theoretically, this model contains infinities which are intended to show that the respective states are either forbidden or impossible. In real computations, the infinity is substituted with a sufficiently great positive integer [3, 4]. An open question is whether the substitute influences the computation time of exact schedules, i.e. whether it is possible to select the infinity substitute so that the computation time would be decreased.

### The goal of the research

A basis for the research is the well-known problem of minimizing total tardiness in tight-tardy progressive 1-machine scheduling by idling-free preemptions of equal-length jobs. The goal is to ascertain how the increment of the infinity substitute in the respective model influences the computation time of exact schedules. Occasionally, the influence, if present at all, can be insignificant also. If the influence proves to be significant, then a recommendation on selecting the infinity substitute will be stated in order to decrease the computation time.

### The infinity in exactly minimizing total tardiness

The problem of minimizing total tardiness in tight-tardy progressive 1-machine scheduling by idling-free preemptions of equal-length jobs is stated as follows [3, 4]. For  $N$  jobs,  $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , where job  $n$  is divided into  $H$  equal parts (i.e., has a processing period  $H$ ), has a release date (the time moment, at which job  $n$  becomes available for processing)

$$r_n = n \text{ for } n = \overline{1, N} \quad (1)$$

and a due date

$$d_n = H + n - 1 + b_n \text{ for } n = \overline{1, N} \quad (2)$$

by a random due date shift

$$b_n = \psi(H \cdot \zeta) \text{ for } n = \overline{1, N} \quad (3)$$

with a pseudorandom number  $\zeta$  drawn from the standard normal distribution (with zero mean and unit variance), and function  $\psi(\xi)$  returning the integer part of number  $\xi$  (see, e.g., [5]), the goal is to schedule those  $N$  jobs so that sum [3, 4, 6]

$$\sum_{n=1}^N \max\{0, \theta(n; H) - d_n\} \quad (4)$$

would be minimal, where job  $n$  is completed after moment  $\theta(n; H)$ , which is  $\theta(n; H) \in \{\overline{1, N \cdot H}\}$ . This goal is equivalent to minimizing sum

$$\sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^H \sum_{t=1}^{N \cdot H} \lambda_{nht} x_{nht}, \quad (5)$$

where  $x_{nht}$  is the decision variable about assigning the  $h$ -th part of job  $n$  to time moment  $t$ :  $x_{nht} = 1$  if it is assigned;  $x_{nht} = 0$  otherwise. The decision variables are constrained by the following relationships:

$$x_{nht} \in \{0, 1\} \text{ by } n = \overline{1, N} \text{ and } h = \overline{1, H} \text{ and } t = \overline{1, N \cdot H}, \quad (6)$$

$$\sum_{t=1}^{N \cdot H} x_{nht} = 1 \text{ by } n = \overline{1, N} \text{ and } h = \overline{1, H}, \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^H x_{nht} = 1 \text{ by } t = \overline{1, N \cdot H}, \quad (8)$$

$$\sum_{j=t+1}^{N-H} \sum_{h=1}^{H-1} x_{nhj} + Hx_{nHt} \leq H \quad \text{by } n = \overline{1, N} \quad \text{and } t = \overline{1, N \cdot H - 1}. \quad (9)$$

The triple-indexed weights (these ones are not the job priority weights)

$$\left\{ \left\{ \left\{ \lambda_{nht} \right\}_{t=1}^{N \cdot H} \right\}_{h=1}^H \right\}_{n=1}^N \quad (10)$$

are theoretically defined as follows:

$$\lambda_{nht} = 0 \quad (11)$$

by

$$n-1+h \leq t \leq (N-1)H+h \quad \forall h = \overline{1, H-1} \quad (12)$$

and

$$\lambda_{nht} = \infty \quad (13)$$

when (12) is not true;

$$\lambda_{nHt} = 0 \quad (14)$$

by

$$n-1+H \leq t \leq n-1+H+b_n \quad (15)$$

and

$$\lambda_{nHt} = t-H-n+1-b_n \quad (16)$$

by

$$H+n-1+b_n < t \leq N \cdot H \quad (17)$$

and

$$\lambda_{nHt} = \infty \quad (18)$$

when both (15) and (17) are not true. For computations, the infinity in (13) and (18) must be substituted with a sufficiently great positive integer (it can be a sufficiently great positive real number, but the integer is taken for convenience and memory saving in further arithmetic operations). So, instead of (13) and (18),

$$\lambda_{nht} = \alpha \quad (19)$$

and

$$\lambda_{nHt} = \alpha, \quad (20)$$

are substituted, respectively, by a sufficiently great positive integer  $\alpha$ .

### A pattern of generating instances of the job scheduling problem

An optimal job schedule

$$\mathbf{S}^* = [s_t^*]_{1 \times (N \cdot H)} \quad \text{by } s_t^* \in \{ \overline{1, N} \} \quad \text{for every } t = \overline{1, N \cdot H} \quad (21)$$

is built by the decision variables at which sum (5) is minimal, where

$$s_{\theta^*(n;h)}^* = n \quad \forall h = \overline{1, H} \quad \text{by } \theta^*(n;h) \in \{ \overline{1, N \cdot H} \} \\ \text{and } \theta^*(n;h) < \theta^*(n;h+1) \quad \text{for } h = \overline{1, H-1}.$$

Thus,  $\theta^*(n;H)$  is a moment after which job  $n$  is completed, and, according to sum (4),

$$\mathfrak{S}^*(N, H) = \sum_{n=1}^N \max \{ 0, \theta^*(n;H) - d_n \} \quad (22)$$

is the exactly minimal total tardiness for those  $N$  jobs. Meanwhile, schedules for cases with release dates (1) and due dates satisfying inequalities

$$d_n \leq d_{n+1} \quad \forall n = \overline{1, N-1} \quad (23)$$

are built trivially, where the job with an earlier release date is scheduled first. To avoid such triviality, due date shifts (3) are re-generated if all inequalities (23) turn to be true. Besides, due date shift (3) for job  $n$  is re-generated if  $d_n < 1$ .

At fixed numbers of jobs  $N$  and job parts  $H$ , for a job scheduling problem instance tagged by an integer  $c$ , denote the schedule computation time by  $\delta(N, H, c, \alpha)$  by integer  $\alpha$  as an infinity substitute in model (1) – (20). Value  $\delta(N, H, c, \alpha)$  implies computation time spent on just searching a solution of the respective integer linear programming problem, i.e. on exploring nodes by the branch-and-bound algorithm. If the total number of the instances is  $C$ , then the averaged computation time is

$$\tilde{\delta}(N, H, \alpha) = \frac{1}{C} \sum_{c=1}^C \delta(N, H, c, \alpha). \quad (24)$$

Computation times (24) will be estimated by  $N = \overline{2, 8}$  and  $H = \overline{2, 4}$  for  $C = 10$  and the following nine versions of the infinity substitute:



1) the infinity is substituted with the sum of all finite triple-indexed weights (10), i.e.

$$\alpha = \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^H \sum_{t=1}^{N-H} \lambda_{nht}; \tag{25}$$

2) the infinity is substituted with the maximal value over all finite triple-indexed weights (10) increased by 1, i.e.

$$\alpha = 1 + \max_{\lambda_{nht} \neq \infty} \max_{h=1, H} \max_{t=1, N-H} \lambda_{nht}; \tag{26}$$

3) – 6) the infinity is substituted with multiple maximums in (26) given by

$$\alpha = 2 \cdot \max_{\lambda_{nht} \neq \infty} \max_{h=1, H} \max_{t=1, N-H} \lambda_{nht}, \tag{27}$$

$$\alpha = 3 \cdot \max_{\lambda_{nht} \neq \infty} \max_{h=1, H} \max_{t=1, N-H} \lambda_{nht}, \tag{28}$$

$$\alpha = 4 \cdot \max_{\lambda_{nht} \neq \infty} \max_{h=1, H} \max_{t=1, N-H} \lambda_{nht}, \tag{29}$$

$$\alpha = 5 \cdot \max_{\lambda_{nht} \neq \infty} \max_{h=1, H} \max_{t=1, N-H} \lambda_{nht}, \tag{30}$$

respectively;

7) – 9) the infinity is substituted with a sufficiently great integer given by  $\alpha = 10^4$ ,  $\alpha = 10^5$ ,  $\alpha = 10^6$ .

Obviously, model (1) – (20) cannot be run for infinitely long time. So, its timeout is set at 7200 seconds (i.e., 2 hours). If the solution of the respective integer linear programming problem is not found in 2 hours, the model is stopped and its current solution (which may be non-optimal) is returned.

**Computational study**

To study how the increment of the infinity substitute in model (1) – (20) influences the computation time of exact schedules, the nine versions of the infinity substitute are to be used. Instead of directly writing integer  $\alpha$  into averaged computation time (24), it will be written as a tag within quotation marks by the following correspondence table:

The tag to $\alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
The real value of $\alpha$	formula (26)	formula (27)	formula (28)	formula (29)	formula (30)	formula (25)	$\alpha = 10^4$	$\alpha = 10^5$	$\alpha = 10^6$

Thus, the averaged computation time is re-denoted as  $\tilde{\delta}(N, H, "6")$  for the case of sum (25), as  $\tilde{\delta}(N, H, "1")$  for maximum (26), as  $\tilde{\delta}(N, H, "2")$  for maximum (27), and so on. Fig. 1 shows averaged computation times (24) versus the nine tags to  $\alpha$  (the horizontal axes) as the number of job parts and the job length increase (the entire scheduling problem volume is shown as a stack of small red squares, where the job length is measured horizontally, and the number of job parts is measured vertically). The shortest computation time has occurred 13 times (out of 21 volumes of the entire

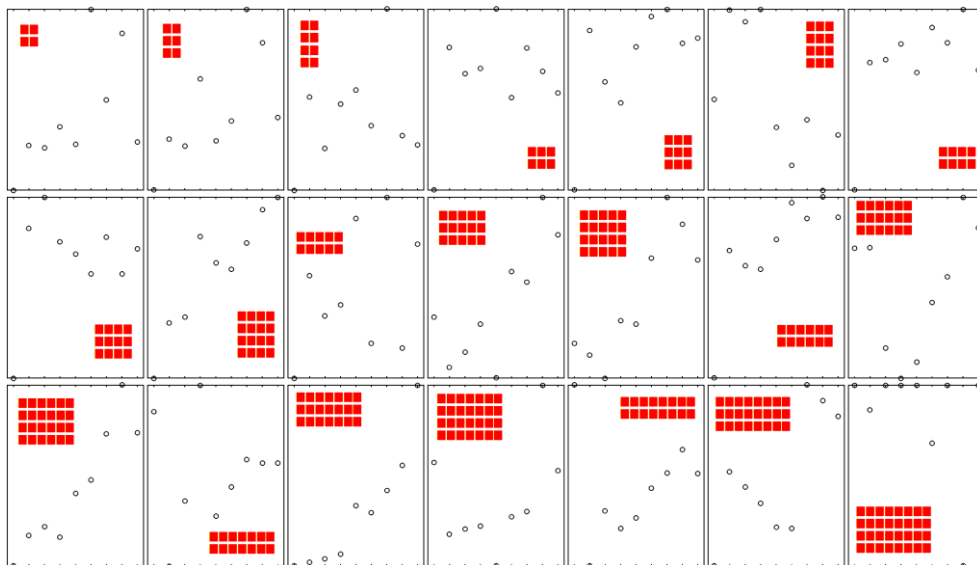


Fig. 1. Averaged computation times (24) versus the nine tags to  $\alpha$  (the horizontal axes) by the increasing volume of the entire scheduling problem

scheduling problem) at the infinity substitute as (26) whose value is minimal amongst those nine versions

of infinity substitute. The version with the sum by (25) has not resulted in the shortest computation time. Occasionally,  $\alpha = 10^5$  has resulted in the shortest computation time twice (at  $N = 3, H = 4$ , and at  $N = 8, H = 4$ ), although the case with the greatest volume of the entire scheduling problem ( $N = 8, H = 4$ ) has had six timeouts (tags 1, 3, 4, 5, 7, 9). Except for this case, the longest computation time has occurred 14 times at the infinity substitute as a sufficiently great integer given by  $\alpha = 10^4, \alpha = 10^5, \alpha = 10^6$ .

The worst cases with the maximal computation times

$$\delta^*(N, H, \alpha) = \max_{c=1,10} \delta(N, H, c, \alpha) \quad (31)$$

are shown in Fig. 2 having the 21 stacked subplots analogously to Fig. 1. These subplots have some resemblance to the subplots in Fig. 1. Now, the infinity substitute as  $\alpha = 10^5$  (tag 8) has resulted in the shortest computation time only twice, whereas the other versions (tags 1, 2, 3, 4, 5, 6, where integers are far less, indeed) have been the best for the rest of 19 job scheduling problems.

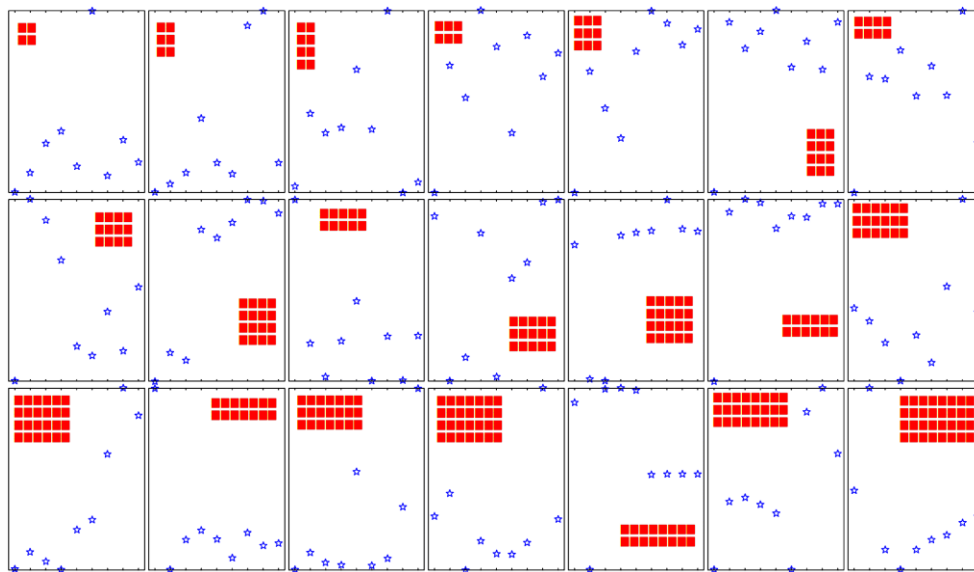


Fig. 2. Maximal computation times (31)

The cases with the minimal computation times

$$\delta_{\square}(N, H, \alpha) = \min_{c=1,10} \delta(N, H, c, \alpha) \quad (32)$$

are shown in Fig. 3. The resemblance to either Fig. 1 or Fig. 2 is weaker here. The case with the greatest volume of the entire scheduling problem ( $N = 8, H = 4$ ) which has had six timeouts (tags 1, 3, 4, 5, 7, 9) and the case with  $N = 8, H = 2$  are the only two cases where the infinity substitute as  $\alpha = 10^5$  (tag 8) has resulted in the shortest computation. Sum (29) has occurred to be the best at the same case with  $N = 3$  and  $H = 4$ . Among the rest of 19 job scheduling problems, the least integer as the infinity substitute (tag 1) by (26) have been the best for 14 cases.

The further averaging is shown in Fig. 4, where each of the three subplots is the average of 21 subplots in Fig. 1 – 3, respectively. The best average computation time (24) has occurred at the least integer as the infinity substitute (tag 1) by (26). It has been close to the best maximal computation time (31), but here sum (25) has eventually “won”. Although the version with  $\alpha = 10^5$  (tag 8) has ensured the best minimal computation time (32), it has been an occasional computational artifact caused itself by the six timeouts at the greatest volume of the entire scheduling problem ( $N = 8, H = 4$ ).

The first rough inference from the obtained results is that the model with the lesser integer substitute produces an optimal schedule expectedly faster. The difference in real time units (not shown in Fig. 1 – 4, though) depends on the volume of the entire scheduling problem. Nevertheless, the average relative difference between  $\tilde{\delta}(N, H, "1")$  and the other versions of the infinity substitute is not less than 2%. Furthermore, the least value of the infinity substitute produces optimal schedules by 8.51% to 10.46% faster than the infinity substitute as a sufficiently great integer given by  $\alpha = 10^4, \alpha = 10^5, \alpha = 10^6$ .

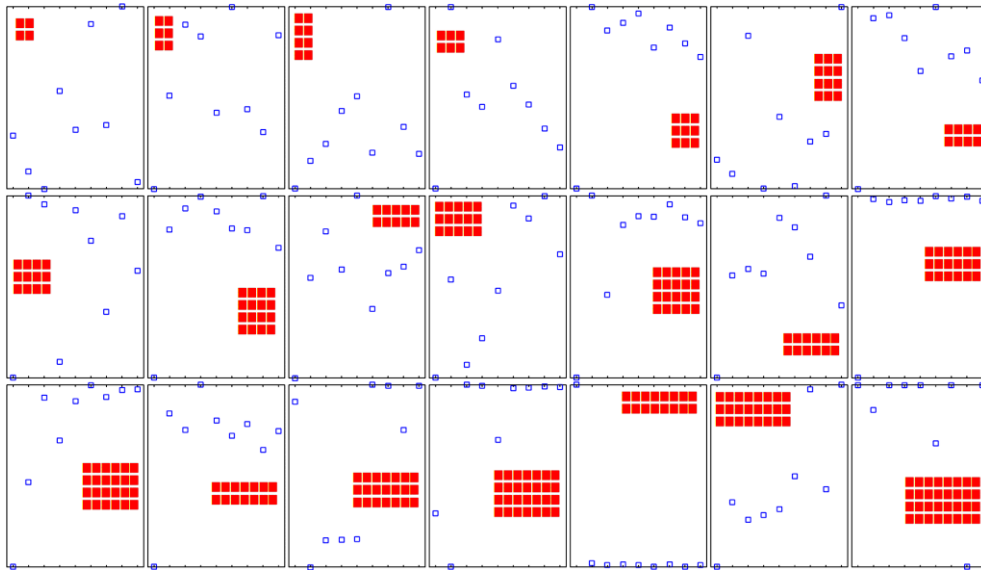


Fig. 3. Minimal computation times (32)

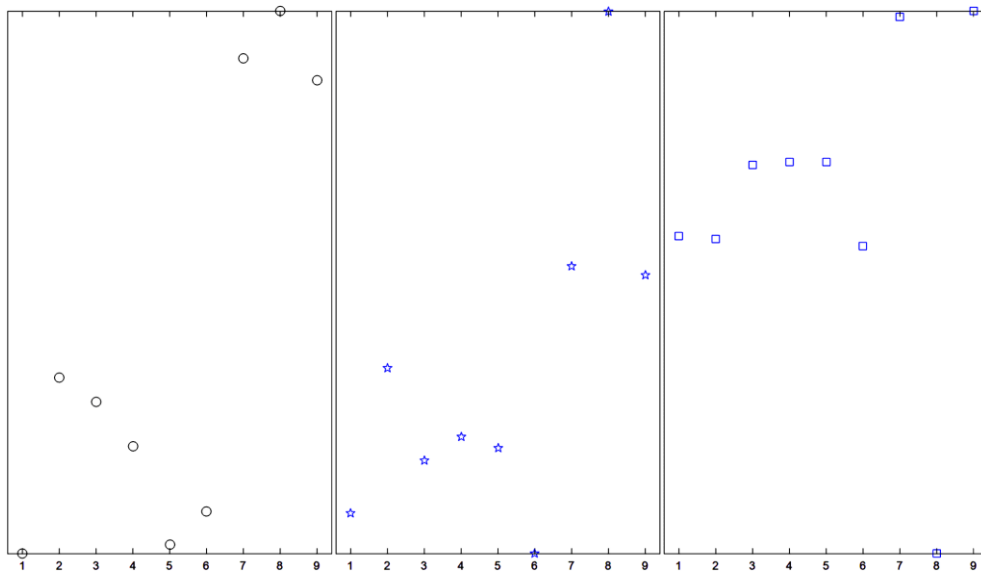


Fig. 4. The averages (from the left to the right) to average computation times (24), to maximal computation times (31), and to minimal computation times (32) versus the nine tags to  $\alpha$  (the horizontal axes)

**Discussion**

The main difficulty is that it is hard to find any regularities in the subplots of Fig. 1 – 3. This makes the inference about faster schedules by the lesser integer substitute looser (or rough to some extent), although the inference is expectedly reliable.

The computation time which is saved by substituting the infinity with “max” by (26) instead of using  $\alpha = 10^6$  can be really impressive. For example, an optimal schedule

$$\mathbf{S}^* = [s_i^*]_{1 \times 24} = [1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6] \quad (33)$$

for scheduling 6 jobs by  $H = 4$  with due dates

$$\mathbf{D} = [d_n]_{1 \times 6} = [9 \ 2 \ 8 \ 6 \ 3 \ 10] \quad (34)$$

is computed in 52.65 seconds by  $\alpha = 10^6$ , whereas it takes 39.68 seconds to compute schedule (33) with “max” by (26). Total tardiness of schedule (33) is

$$\begin{aligned} \vartheta^*(6, 4) &= \sum_{n=1}^6 \max \{0, \theta^*(n; 4) - d_n\} = \max \{0, 12 - 9\} + \max \{0, 5 - 2\} + \\ &+ \max \{0, 20 - 8\} + \max \{0, 16 - 6\} + \max \{0, 9 - 3\} + \max \{0, 24 - 10\} = 48. \end{aligned}$$

So, the “max” substitution saves here 12.97 seconds (24.64 % of the initial computation time). In another example, for  $H = 3$  and due dates

$$\mathbf{D} = [d_n]_{1 \times 8} = [4 \ 4 \ 5 \ 7 \ 5 \ 8 \ 10 \ 13], \quad (35)$$

an optimal schedule

$$\mathbf{S}^* = [s_t^*]_{1 \times 24} = [1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 3 \ 3 \ 5 \ 5 \ 5 \ 2 \ 2 \ 2 \ 7 \ 7 \ 7 \ 4 \ 4 \ 4 \ 8 \ 8 \ 8 \ 6 \ 6 \ 6] \quad (36)$$

obtained by  $\alpha = 10^6$  and an optimal schedule

$$\mathbf{S}^* = [s_t^*]_{1 \times 24} = [1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 5 \ 5 \ 5 \ 7 \ 7 \ 7 \ 8 \ 8 \ 8 \ 6 \ 6 \ 6 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4] \quad (37)$$

obtained by the “max” substitution (here the two infinity substitute versions produce slightly different schedules) have the same length as schedule (33), where total tardiness of schedule (36) is

$$\mathcal{G}^*(8, 3) = \sum_{n=1}^8 \max\{0, \theta^*(n; 3) - d_n\} = \max\{0, 4 - 4\} + \max\{0, 12 - 4\} + \max\{0, 6 - 5\} + \\ + \max\{0, 18 - 7\} + \max\{0, 9 - 5\} + \max\{0, 24 - 8\} + \max\{0, 15 - 10\} + \max\{0, 21 - 13\} = 53$$

being surely the same as total tardiness

$$\mathcal{G}^*(8, 3) = \sum_{n=1}^8 \max\{0, \theta^*(n; 3) - d_n\} = \max\{0, 3 - 4\} + \max\{0, 6 - 4\} + \max\{0, 21 - 5\} + \\ + \max\{0, 24 - 7\} + \max\{0, 9 - 5\} + \max\{0, 18 - 8\} + \max\{0, 12 - 10\} + \max\{0, 15 - 13\} = 53$$

of schedule (37). However, the difference between the computation times is more impressive here: schedule (36) is computed in 900.736 seconds by  $\alpha = 10^6$ , whereas it takes 560.61 seconds to compute schedule (37), which is equivalent to (36), with “max”. So, the “max” substitution saves 340.126 seconds (37.76 % of the initial computation time) for the problem with due dates (35). Another, the most demonstrative, example is for scheduling 8 three-parted jobs ( $H = 3$ ) whose due dates are

$$\mathbf{D} = [d_n]_{1 \times 8} = [4 \ 4 \ 4 \ 10 \ 2 \ 11 \ 13 \ 10]. \quad (38)$$

An optimal schedule

$$\mathbf{S}^* = [s_t^*]_{1 \times 24} = [1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 5 \ 5 \ 5 \ 8 \ 8 \ 8 \ 4 \ 4 \ 4 \ 6 \ 6 \ 6 \ 7 \ 7 \ 7 \ 2 \ 2 \ 2] \quad (39)$$

obtained by  $\alpha = 10^6$  and an optimal schedule

$$\mathbf{S}^* = [s_t^*]_{1 \times 24} = [1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 8 \ 8 \ 8 \ 4 \ 4 \ 4 \ 7 \ 7 \ 7 \ 5 \ 5 \ 5 \ 6 \ 6 \ 6] \quad (40)$$

obtained by the “max” substitution (once again the two infinity substitute versions produce slightly different schedules) have the same length as schedules in the previous examples, where total tardiness of schedule (39) is

$$\mathcal{G}^*(8, 3) = \sum_{n=1}^8 \max\{0, \theta^*(n; 3) - d_n\} = \max\{0, 3 - 4\} + \max\{0, 24 - 4\} + \max\{0, 6 - 4\} + \\ + \max\{0, 15 - 10\} + \max\{0, 9 - 2\} + \max\{0, 18 - 11\} + \max\{0, 21 - 13\} + \max\{0, 12 - 10\} = 51$$

being surely the same as total tardiness

$$\mathcal{G}^*(8, 3) = \sum_{n=1}^8 \max\{0, \theta^*(n; 3) - d_n\} = \max\{0, 4 - 4\} + \max\{0, 9 - 4\} + \max\{0, 6 - 4\} + \\ + \max\{0, 15 - 10\} + \max\{0, 21 - 2\} + \max\{0, 24 - 11\} + \max\{0, 18 - 13\} + \max\{0, 12 - 10\} = 51$$

of schedule (40). However, the difference between the computation times is very impressive here: schedule (39) is computed in 641.405 seconds by  $\alpha = 10^6$ , whereas it takes just 326.53 seconds to compute schedule (40), which is equivalent to (39), with “max”. So, for the problem with due dates (38), the “max” substitution saves 314.878 seconds (49.09 % of the initial computation time). And this is just for a single job scheduling problem! Obviously, when such a problem is repeatedly solved, the “max” infinity substitution by (26) saves pretty huge amounts of the computation time. If, for example, there are 10000 job scheduling problems similar to the problem with due dates (38), the “max” substitution saves about 36.4442 days.

## Conclusion

The increment of the infinity substitute in the model of total tardiness exact minimization rendered to solving an integer linear programming problem involving the branch-and-bound approach may have bad influence on the computation time of exact schedules. At least, the greater value of the infinity substitute cannot produce an optimal schedule faster in tight-tardy progressive 1-machine scheduling by idling-free preemptions of equal-length jobs. Roughly the best value of the infinity substitute is the maximal value taken over all the finite triple-indexed weights in the model and increased then by 1. Meanwhile, substituting the infinity with just “a sufficiently great positive integer” is not recommended, unless this integer is close to the mentioned maximum or the sum of all the finite triple-indexed weights.

The influence of the “max” infinity substitution is extremely significant. Compared to the case when the infinity is substituted with a sufficiently great integer, the “max” infinity substitution saves up to 50 % of the computation time. This saves hours and even days or months (!) when up to 8 jobs of a few equal parts (processing periods) are scheduled for a few thousands of cycles or longer. Therefore, it is strongly recommended to select the infinity substitute as less as possible in order to decrease the computation time. In scheduling more than 9 jobs with more than 2 processing periods, the exact model becomes practically intractable taking too much computation time whichever infinity substitution is used.

It is uncertain whether those recommendations should be kept for the case when the jobs have different processing periods. So, the research may be furthered by studying this case. Besides, the job priority weights can be also considered for exactly minimizing total weighted tardiness.

## REFERENCES

1. M. L. Pinedo, *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*. Springer Int. Publ., 2016.
2. R. Panneerselvam, “Simple heuristic to minimize total tardiness in a single machine scheduling problem”, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 30, iss. 7–8, pp. 722–726, 2006.
3. V. V. Romanuke, “Minimal total weighted tardiness in tight-tardy single machine preemptive idling-free scheduling”, *Applied Computer Systems*, vol. 24, no. 2, pp. 150–160, 2019.
4. V. V. Romanuke, “Accurate total weighted tardiness minimization in tight-tardy progressive single machine scheduling with preemptions by no idle periods”, *KPI Science News*, no. 5–6, pp. 26–42, 2019.
5. V. V. Romanuke, “Decision making criteria hybridization for finding optimal decisions’ subset regarding changes of the decision function”, *Journal of Uncertain Systems*, vol. 12, no. 4, pp. 279–291, 2018.
6. P. Brucker, *Scheduling Algorithms*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Pinedo M. L. *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*. Springer Int. Publ., 2016. 670 p.
2. Panneerselvam R. Simple heuristic to minimize total tardiness in a single machine scheduling problem. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2006. Vol. 30, Iss. 7–8. P. 722–726.
3. Romanuke V. V. Minimal total weighted tardiness in tight-tardy single machine preemptive idling-free scheduling. *Applied Computer Systems*. 2019. Vol. 24, No. 2. P. 150–160.
4. Romanuke V. V. Accurate total weighted tardiness minimization in tight-tardy progressive single machine scheduling with preemptions by no idle periods. *KPI Science News*. 2019. No. 5–6. P. 26–42.
5. Romanuke V. V. Decision making criteria hybridization for finding optimal decisions’ subset regarding changes of the decision function. *Journal of Uncertain Systems*. 2018. Vol. 12, No. 4. P. 279–291.
6. Brucker P. *Scheduling Algorithms*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. 371 p.

**Romanuke Vadim Vasylyovych** – doctor of technical sciences, professor; professor of department of information technologies, O. S. Popov Odessa National Academy of Telecommunications, Kuznecznaya str., 1, Odessa, Ukraine, 65029; e-mail: romanukevadimv@gmail.com;

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3543-3087>

**Романюк Вадим Васильович** – доктор технічних наук, професор; професор кафедри інформаційних технологій, Одеська національна академія зв'язку ім. О. С. Попова, вул. Кузнечна, 1, Одеса, Україна, 65029; e-mail: romanukevadimv@gmail.com;

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3543-3087>

**Романюк Вадим Васильевич** – доктор технических наук, профессор; профессор кафедры информационных технологий, Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова, ул. Кузнечная, 1, Одесса, Украина, 65029; e-mail: romanukevadimv@gmail.com;

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3543-3087>

## CONTENTS

<p>▪ <b>A. O. Borysyuk</b> . . . . .</p> <p>Flow modelling in a straight rigid-walled duct with two rectangular axisymmetric narrowings. Part 1. A theory</p>	4
<p>▪ <b>N.V. Varlamova, V.T. Lazurik, N.G. Styerovodov</b> . . . . .</p> <p>Model and hardware-software implementation of information-measuring system for psychophysical and psychophysiological researches</p>	16
<p>▪ <b>O.I. Voronkov, V.M. Kolodiazhnyi, O.Yu. Lisina, I.M. Nikitchenko.</b> . . . . .</p> <p>Calculation of the total cross-sectional area of the spool air of the distributor of an automobile air motor</p>	23
<p>▪ <b>K. Degtyarev, O.L. Zaydenvarg, R.P. Moskalenko, Yu.V. Naumenko</b> . . . . .</p> <p>Calculation model for assessing the durability of structural elements in the presence of holes and cracks</p>	34
<p>▪ <b>D. Kriutchenko</b> . . . . .</p> <p>Liquid vibration modeling in prismatic tanks with quarter baffles</p>	43
<p>▪ <b>O.M. Melkozerova, S.G. Rassomakhin</b> . . . . .</p> <p>Identification of fingers on the basis of Hamiltonian cycles of local features</p>	51
<p>▪ <b>R. Palchikov, E. Strelnikova, O. Usatova</b> . . . . .</p> <p>The method for calculating singular integrals in problems of axially symmetric Stokes flows</p>	66
<p>▪ <b>V.V. Porichansky, A.V. Priymak, V.V. Yanovsky</b> . . . . .</p> <p>Alternative evolution of strategies with memory</p>	74
<p>▪ <b>O. Ridozub, V. Terokhin, M. Stervovodov, S. Fomin</b> . . . . .</p> <p>Sensor node for wireless radiation monitoring network</p>	88
<p>▪ <b>V.V. Romanuke</b> . . . . .</p> <p>Infinity substitute in exactly minimizing total tardiness in tight-tardy progressive 1-machine scheduling by idling-free preemptions of equal-length jobs</p>	94
<p>▪ <b>CONTENTS</b> . . . . .</p>	102

**ВІСНИК ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
імені В.Н. Каразіна**

**Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»**

*Випуски даної серії розповсюджуються у академічних та наукових колах України та за її межами з метою оперативного висвітлення досліджень у таких актуальних галузях: математичне та комп'ютерне моделювання, обчислювальний експеримент, теорія і прикладні методи обробки інформації, захист інформації, програмно-апаратні системи інформаційного або управляючого призначення, застосування математичного моделювання та системного аналізу у високих, наукоємних технологіях, враховуючи технології створення програмної продукції. Приймаються роботи, що відносяться до напрямів фізико-математичних і технічних наук (бажаний об'єм 6-18 сторінок). Усі рукописи рецензуються.*

*Примітка. Протягом 2020-21 рр. редакційна колегія при інших рівних умовах надаватиме перевагу роботам, що представлені англійською мовою, якщо стаття отримала схвалення при рецензуванні.*

Офіційний сайт <http://periodicals.karazin.ua/mia>

<http://mia.univer.kharkov.ua>

Сайт редколегії <http://www.dsmmph.org.ua/bulletin.html>

Email: [journal-mia@karazin.ua](mailto:journal-mia@karazin.ua)

**ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА  
имени В.Н. Каразина**

**Серия «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления»**

*Випуски данної серії розповсюджуються в академічних та наукових колах України та за її межами з метою оперативного висвітлення досліджень у таких актуальних областях: математичне та комп'ютерне моделювання, вичислювальний експеримент, теорія і прикладні методи обробки інформації, захист інформації, програмно-апаратні системи інформаційного або управляючого призначення, програми математичного моделювання та системного аналізу в високих, наукоємних технологіях, включаючи технології створення програмної продукції. Приймаються роботи, що відносяться до напрямів фізико-математичних і технічних наук (бажаний об'єм 6-18 сторінок). Усі рукописи рецензуються.*

*Примечание. На протяжении 2020-21 гг. редакционная коллегия при прочих равных условиях будет отдавать предпочтение работам, представленным на английском языке, если статья получила одобрение при рецензировании.*

Официальный сайт <http://periodicals.karazin.ua/mia>

<http://mia.univer.kharkov.ua>

Сайт редколлегии <http://www.dsmmph.org.ua/bulletin.html>

Email: [journal-mia@karazin.ua](mailto:journal-mia@karazin.ua)

*Наукове видання*

**Вісник Харківського національного університету**

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.  
Автоматизовані системи управління»

Випуск 44

*Збірник наукових праць*

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О.О. Афанасьєва

Підписано до друку 23.12.2019 р.  
Формат 70×108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.  
Ум. друк. арк. – 11,3.  
Обл.– вид. арк. – 13,1.  
Наклад 50 пр. Зам. №  
Безкоштовно

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4  
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна.  
Видавництво

---

Надруковано: ХНУ імені В. Н. Каразіна  
61022 м. Харків, майдан Свободи, 4,  
тел.: 362-01-52  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09