

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Серія

«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 43

Серія заснована 2003 р.

BULLETIN

of V.N. Karazin Kharkiv National University

Series

«Mathematical Modeling.
Information Technology.
Automated Control Systems»

Issue 43

First published in 2003

Харків
2019

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних та технічних наук (наказ МОН України № 1328 від 21.12.2015 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 10 від 28.10.2019 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),

д.ф.-м.н., академік НАН України, проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора), д.т.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т. (заст. гол. редактора), д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Споров О.Є. (відповідальний секретар), к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Замула О. А., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ імені Б.І. Веркіна НАН України

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Рассомахін С. Г., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В. Н. Каразіна

Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Толстолузька О. Г. д.т.н., с.н.с., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Угрюмов М. Л., д.т.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"

Стрельнікова О.О., д.т.н., проф. Ін-т проблем машинобудування НАН України

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра прикладної інформатики, університет імені Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Professor of Technical Informatics and Computer Systems, Institute of Informatics, Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of computer science, Dep. of C. S., University of Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

ЗМІСТ

▪ L.V. Batyuk, N.N. Kizilova	4
Novel monitoring system for quantitative estimation of efficient medical treatment of diseases based on dielectric properties of blood samples	
▪ І.В. Гарячевська, Д.О. Протектор	11
Система комп'ютерного моделювання для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса	
▪ К.Г. Дегтярьов, Д.В. Крютченко, Р.П. Москаленко, Р.Г. Пальчиков	20
Комп'ютерне моделювання вимушених коливань елементів конструкцій, що взаємодіють з рідиною, за умови дії гармонічних, імпульсних та сейсмічних впливів	
▪ Н.Н. Кизилова, Н.Л. Рычак, А.А. Халин	30
Математическое моделирование и прогнозирование динамики речного русла участка реки Северский Донец	
▪ V.Y. Kylynnyk, D.V. Kriutchenko, Y.V. Naumenko	38
Liquid oscillation in a cylindrical-conical shell under the action of vertical and horizontal excitation	
▪ В.М. Лазурик, Є.С. Тимошенко	46
Застосування графових баз даних для моделювання соціальних графів	
▪ М.Л. Мироненко	54
Побудова базисних функцій для задач коливання рідини в резервуарі	
▪ В.В. Яновский, М.В. Данилевский	65
Статистические свойства сети телефонных абонентов	
▪ CONTENTS	76

UDC 519.6 + 612.1

Novel monitoring system for quantitative estimation of efficient medical treatment of diseases based on dielectric properties of blood samples

L.V. Batyuk¹, N.N. Kizilova²¹ Kharkiv National Medical University, Kharkiv, Ukraine² V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

e-mail: n.kizilova@gmail.com

A new system for monitoring the effects of radiation and chemotherapy on patients with cancer and some other severe diseases based on the changes in the dielectric characteristics of their blood samples before and after the treatment using a pre-organized system of knowledge on the cancer dynamics, statistical long-term data processing either in the individual or for different cancer types, novel mathematical models and computations on them for interpreting the measurement data is presented. The elaborated system allows accumulating, storing and retrieving data for primary and repeated data processing, the real time decision making on the efficiency/inefficiency of the treatment procedures, and planning future treatment procedures.

Key words: monitoring system, oncology, chemotherapy, radiotherapy, efficiency, mathematical modeling, dielectric properties, medical diagnostics.

В работе представлена новая система мониторинга результатов влияния радиационной и химиотерапии на пациентов с онкологическими заболеваниями и ряда других заболеваний на основании изменения диэлектрических характеристик проб крови пациентов до и после лечения на основе предварительно организованной системы знаний о динамике развития онкологического заболевания, статистической обработки данных длительных измерений как у данного пациента, так и по видам заболеваний, специально разработанных математических моделей и результатов численных расчетов по ним для интерпретации экспериментальных данных. Разработанная система позволяет накапливать, хранить и извлекать данные для первичной и повторной статистической обработки информации, в реальном времени принимать решения об эффективности/неэффективности терапевтических процедур и планировать последующие лечебные мероприятия.

Ключевые слова: система мониторинга, онкология, химиотерапия, радиотерапия, эффективность, математические моделирование, диэлектрические свойства, медицинская диагностика.

У роботі представлена нова система моніторингу результатів впливу радіаційної та хіміотерапії на пацієнтів з онкологічними захворюваннями та ряду інших хвороб (ішемічний, геморагічний інсульт та інші) на основі зміни діелектричних характеристик проб крові пацієнтів до і після лікування з використанням попередньо організованої системи знань про динаміку онкологічних захворювань, статистичної обробки даних багаторічних вимірювань як у конкретного пацієнта, так і за типом хвороби, а також спеціально розроблених математичних моделей і результатів чисельних розрахунків для інтерпретації експериментальних даних. В першому розділі статті наданий детальний огляд сучасної літератури з досягнень сучасних індивідуальних фізіологічних та математичних моделей, автоматичних комп'ютерних систем збору медичних даних, результатів чисельних розрахунків за математичними моделями з урахуваннями реальної індивідуальної 3-вимірної геометрії досліджуваної системи, даних безпосередніх вимірювань швидкостей та тисків в окремих артеріальних сегментах, а також результатів чисельних розрахунків, у тому числі інтегральних параметрів, а саме об'ємних витрат крові в судинах та осереднених значень тисків. В другому розділі наведені математичні моделі, які є складниками запропонованої системи моніторингу, діагностики та лікування онкологічних захворювань на основі електрофізичних параметрів стандартних проб крові пацієнта за допомогою вимірювань діелектричних показників проби в зовнішньому електромагнітному випромінюванні СВЧ-діапазону при широкому варіюванні температури зразка в діапазоні $T=0-56$ С.

Розроблена система дозволяє накопичувати, зберігати та видавати дані для первинної та повторної статистичної обробки інформації, в реальному часі приймати рішення про ефективність/неефективність терапевтичних процедур і планувати подальші лікувальні заходи.

Ключові слова: система моніторингу, онкологія, хіміотерапія, радіотерапія, ефективність, математичні моделювання, діелектричні властивості, медична діагностика.

1 Introduction

Revolutionary technologies being currently developed in physics, chemistry, material and computer sciences are rapidly changing our life and healthcare. During the last decades many novel approaches to medical diagnostics, surgery planning with computer-based systems have changed the quality of medical care and promoted development of patient-specific medicine using complex individual mathematical models, automated medical data analysis systems, omics-based studies, and decision making algorithms with artificial intelligence (AI) [1-3]. Digital technologies are promoting the elaboration of novel materials for bone implants, orthodontic units and teeth restoration which are based on the computer-assisted mechanical analysis of the individual 3D models. Blood flow simulations with

computational fluid dynamics (CFD) in the patient-specific cardiovascular models allow estimation of the stenosis severity and decision making on the number of stents needed for the blood flow normalization [4]. Moreover, electromagnetic, acoustic, optical and other physical properties of tissues carry valuable diagnostic information [5]. Since blood is the most movable fluid that passes through any organ and tissue, in the case of cancer, blood is strongly influenced by the products of the cancer cell metabolism and tissue decay that changes chemical and physical properties of the red blood cells (RBC) and blood plasma [6]. Such changes can be observed even at the early stages of the cancer development and may serve as an excellent test for early diagnosis of cancer [7]. Since measurements and interpretations of mechanical, electric and other physical properties require coordinated efforts of engineers, mechanics, biologists, mathematicians and medical specialists; the modern medicine is becoming an interdisciplinary science.

Another dimension to the healthcare is added by One Health (OH) concept that is a new health policy framework of the XXI Century. The OH concept treats human health as connected with animal health and bacterial maps, environmental conditions (food and water quality, pollutions, etc.), economy and other factors [8, 9]. It is well recognized that the cancer diseases are mostly determined by environmental, economic and other factors included into the OH concept. Currently a breakthrough in cancer diagnosis has been demonstrated by high-fidelity cancer detection on medical images using AI [1, 2, 10]. The AI code based on convolution neural network (CNN) [11] has correctly recognized skin cancer in 95% cases, while the international team of 58 experienced dermatologists from 17 countries have succeeded in 86,6% cases [12]. AI based on GoogLeNet Inception CNN has demonstrated better abilities in recognition of lung cancer on the whole-slide images of human chest than an international team of recognized pulmonologists [13]. Reinforcement Learning algorithms have been trained for predicting individual optimal dosing in treatment of brain tumor [14].

Recently deep learning algorithms have been successfully trained using data from 284335 cardiovascular patients and validated on two independent datasets of 12026 and 999 patients with successful prediction of cardiovascular risks based on the image analysis of their retinal fundus photographs [15].

Therefore, AI demonstrated promising perspectives in analysis, recognition and classification of patterns on medical images, integrated arrays of different omic data including the incomplete datasets. The physicians could be augmented by AI creating the expert-in-the-loop system that is considered a new approach in the personal healthcare [3]. Information technologies and multidisciplinary approaches in cancer diagnosis and treatment are the main components of patient-specific predictive oncology. In this study such a system for monitoring human health and quantitative estimation of efficiency of the cancer treatment based on detailed measurements of dielectric properties of blood samples is presented.

2 Dielectric properties of biological materials

Biological cells and tissues are characterized by surface electric charge produced by the charged proteins, dissociation of the surface molecules, and adsorption of ions from the interstitial fluids or blood plasma. The charged particles form several compact and less compact layers around the cells in water-based solvents. In the external and internal electric fields (i.e. produced by heart, skeletal and smooth muscle contractions, electric signal propagation along nerve fibers and brain activity) the electric layers are polarized changing the dielectric permittivity $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ of biological cells and tissues [16]. The real part ε' corresponds to static dielectric permittivity, while ε'' corresponds to the energy loss in the material being an imperfect dielectric. The dielectric loss $\varphi_\varepsilon = a \tan(\varepsilon'' / \varepsilon')$ characterizes the amount of the energy converted into heat due to electric conductivity and dielectric losses. Dielectric permittivity of blood increases with the concentration of RBCs and blood plasma proteins.

The dielectric parameters of biological materials shows the dependence on the frequency ω of the applied electric field (dispersion) in the form $\varepsilon'(\omega)$, $\varepsilon''(\omega)$. The frequency dependencies for dielectric permittivity with single relaxation time τ (Debye model) have the form [15]

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty}{(1 + \omega\tau)^2}, \quad \varepsilon''(\omega) = \frac{\omega\tau(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)}{(1 + \omega\tau)^2}, \quad (1)$$

where ε_∞ and ε_s are permittivity measured at high $\omega\tau_n \gg 1$ (the THz frequency range) and low $\omega\tau \ll 1$ frequency ranges, ε_0 corresponds to the steady electric field.

The modified Cole-Cole dispersion model is described by the generalized equation

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_{dc} - \varepsilon_{\infty}}{1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha}} + \frac{\sigma_i}{i\omega\varepsilon_0}, \quad (2)$$

where α is the Cole-Cole parameter.

The dispersion relation for electric conductivity σ of the sample may be written then as [15]

$$\sigma(\omega) = \omega^2\tau \frac{\sigma_{\infty} - \sigma_0}{1 + (\omega\tau)^2}. \quad (3)$$

The curves $\varepsilon'(\omega)$, $\varepsilon''(\omega)$ can be measured by dielectric spectroscopy (DS) technique proved to be a useful approach for analyzing heterogeneous systems, especially biological cell suspensions and tissues [15]. Nowadays the DS technique can be applied to a single cell, which makes the theoretical analysis relatively simple because complex electrical interactions between cells need not to be accounted for. The proposed system of monitoring is based on the DS measurements on diluted suspensions of human RBC and the data analyses based on (1)-(3).

3. The monitoring system components

3.1. The dielectric spectroscopy unit

The dielectric parameters of the tissue samples have been measured by the method of microwave dielectrometry using a cylindrical resonator at a working frequency $f=9.2$ GHz in the temperature range $T=2-45$ °C that allows recording the structural changes in the electric layers and hydrated shells of the cells at a molecular level by the ratio between free and bound water contents [15]. For ε' measurements, the sample has been collected in a capillary (2 mm in diameter), placed in the resonator, and a shift of the resonant frequency between the natural frequency of the resonator and the resonator with the sample has been recorded. The values ε' and ε'' have been calculated from the gradient curves obtained for substances with known values ε' and ε'' . The value ε'' has been corrected for electrical conductivity due to the presence of inorganic ions in the medium. The electrical conductivity of the samples has been measured by a bridge method at $f=1$ kHz at room temperature. The error in the obtained values do not exceed ± 0.2 for ε' and ± 0.5 for ε'' . The temperature of the samples in the capillary has been measured with a copper-constantan thermocouple with an accuracy of ± 0.1 °C. The room temperature has been 20.0 °C, and the sample has been cooled/heated by keeping it in ice/hot water accordingly.

The measurement procedure has been as follows. A venous blood sampling (2 ml) has been performed on an empty stomach. The collected blood has been stabilized with an anticoagulant (0.1 ml of heparin solution with 5000 IU activity). Then the erythrocyte fraction has been separated from the plasma by centrifugation (three times) at 3000g (10 minutes per centrifugation cycle) with sodium phosphate buffer (0.15 M NaCl, 0.02 M $\text{Na}_2\text{HPO}_4/\text{NaH}_2\text{PO}_4$, pH=7.4). Then a suspension of cells has been prepared in the same buffer with natural concentrations 4.8×10^3 cells/mm³. The portion of the suspension has been placed into the unit for measurements of ε' and ε'' at different temperatures. The measured values have been submitted to the database.

3.2. Database

A convenient structure of the database has been elaborated. Each record related to a single patient or volunteer contains encrypted personal information; anamnesis with the prescribed treatment(s) and the treatment results; previously obtained clinical and biochemical blood examination results; current diagnosis and ε' (T) and ε'' (T) curves measured in the dielectric spectroscopy unit.

Currently, the datasets for healthy donors (67 records), patients with breast and lung cancer before and after chemical and/or X-ray therapy (78 records), patients with ischemic and haemorrhagic stroke before and after treatment (84 records), diabetes mellitus before and after treatment (53 records) are collected in the database.

3.3. Statistical analysis core

The data collected in the database have been thoroughly processed by different statistical methods (regression, correlation, factor analysis). The most important dependencies have been obtained and the

main differences between healthy donors and patients have been determined. Based on the statistical data, it has been shown that [6, 7, 15]:

- 1) The dielectric parameters are important non-specific indexes of the disease, the disease stage and the treatment success;
- 2) The differences in the $\epsilon'(T)$ and $\epsilon''(T)$ curves between the healthy blood samples and the patients' blood samples increase with progression of the disease;
- 3) In cases of successful treatment, the $\epsilon'(T)$ and $\epsilon''(T)$ curves become closer to the healthy ones;
- 4) The observed regularities are similar in the RBC and RBC ghost suspensions; therefore the changes in the dielectric parameters due to both disease progressing and treatment success are determined by the changes in the RBC membranes;
- 5) Since the dielectric measurements have been conducted in the TGz frequency when the water molecules are movable only, the hydration shells of the RBC and RBC ghosts can be responsible for the measured differences, therefore, the thickness and density of the hydration shells can be considered as the most informative indexes of the disease stage and the treatment success.

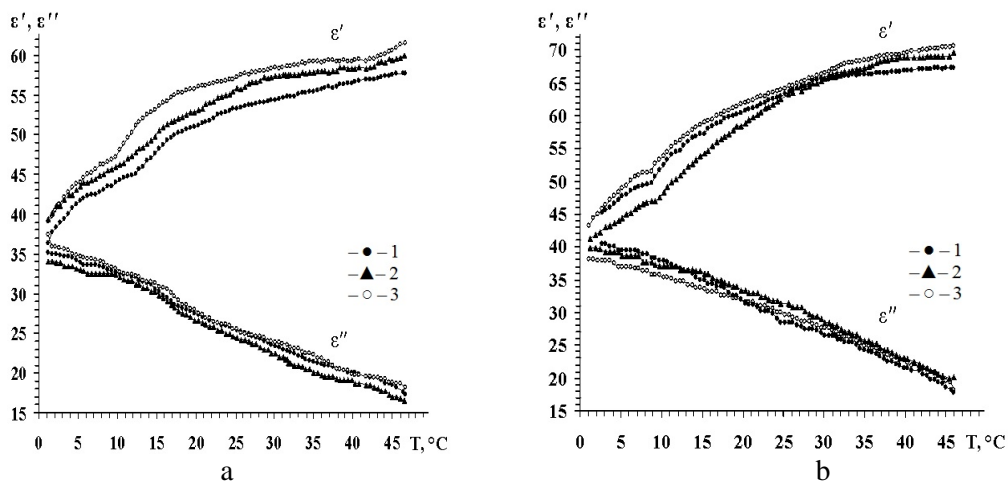


Fig.1 Dependencies $\epsilon'(T)$ and $\epsilon''(T)$ of RBC suspensions (a) and RBC ghosts (b): 1 – healthy donors, 2 – breast cancer, 3 – lung cancer

4. The monitoring system and its first implementation results

The components described in the previous chapter are combined by the feedback connections into the novel approach for the computer-assisted decision making in individual medical diagnostics, treatment planning and result estimation (Fig.2).

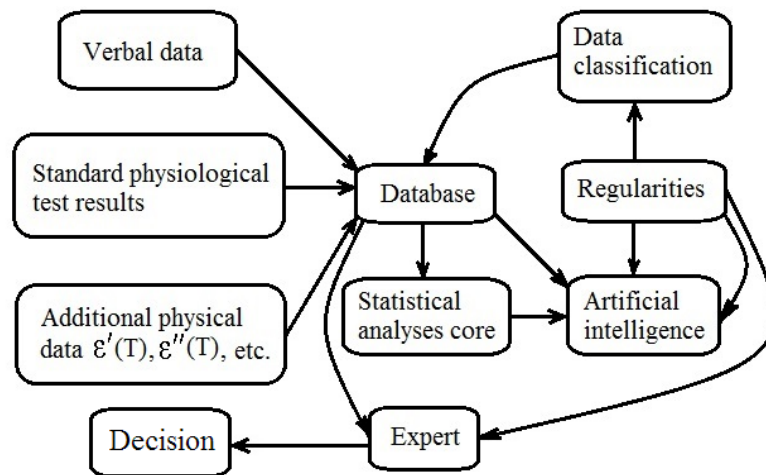


Fig.2 The monitoring system scheme

The monitoring system could be run by AI which will increase the diagnostic and treatment ability of the system. As shown with the AI algorithms used for the skin [12] and lung [13] cancer diagnostics, retina photographs based cardiovascular risks prediction [15], the AI algorithms trained on the combination of verbal (age, gender, smoking status, etc.), numerical (blood pressure, blood sample examinations, and other standard physiological test results), and additional dielectric ε' (T) and ε'' (T) curves can be helpful in the decision making by the expert-in-loop system.

The collected medical data are not sufficient for deriving any global conclusions on the statistical regularities on the type of disease or individual treatment prescription. They are insufficient for training of AI and its validation as well. The results obtained on the datasets described in the paragraph 3.2, have revealed that variations of the ε' and ε'' values at different temperatures in healthy donors and cancer patients are statistically similar, and the dielectric properties of RBC and their membranes can be used as a non-specific cancer diagnostic parameter and a treatment success indicator.

5. Conclusions

A new monitoring system for cancer diagnosis and quantitative estimation of efficient medical treatment of cancer disease based on the results of the standard medical tests and additional measurements of dielectric parameters of blood samples in the wide temperature range from $T=0$ C to the near protein denaturation temperatures $T\sim 50$ C has been developed and tested. The system is proposed for further validation and implementation for more accurate early diagnostics of cancer and other diseases as well as for quantitative estimation of treatment success. Based on the collected database for the healthy donors, the patients with breast and lung cancer before and after chemical and/or X-ray therapy, the patients with ischemic and haemorrhagic stroke and diabetes mellitus before and after treatment, it has been shown that the real and imaginary parts of the dielectric permittivity of the RBC and RBC ghosts suspensions can be considered as important non-specific indexes of the disease and its stage. The same index can be used for quantitative estimation of the treatment success.

REFERENCES

1. K. Yu, A.L. Beam, I.S. Kohane, "Artificial intelligence in healthcare", *Nature Biomedical Engineering*, Vol. 2, pp. 719–731, 2018.
2. C.J. Lynch, C. Liston, "New machine-learning technologies for computer-aided diagnosis", *Nature Medicine*, Vol. 24, pp. 1304–1305, 2018.
3. D. Girardi, J. Küng, R. Kleiser, M. Sonnberger, D.C. Johannes, T.A. Holzinger, "Interactive knowledge discovery with the doctor-in-the-loop: a practical example of cerebral aneurysms research", *Brain Informatics*, Vol.3, pp. 133–143, 2016.
4. N. Kizilova, "Diagnostics of Coronary Stenosis: Analysis of Arterial Blood Pressure and Mathematical Modeling", In: *Biomedical Engineering Systems and Technologies*. Springer Series on Communications in Computer and Information Science. Plantier, G., Schulz, T., Fred, A., Gamboa, H. (Eds.), pp. 299-312, 2015.
5. N. Kizilova, "Electromagnetic properties of blood and its interaction with electromagnetic fields", In: *Advances in Medicine and Biology*. Vol.137. L.V. Berhardt (ed.) NOVA Sci. Publ., pp. 1-74, 2019.
6. L. Batyuk, N. Kizilova, "Dielectric properties of red blood cells for cancer diagnostics and treatment", *AS Cancer Biology*, Vol. 2(10), pp. 55-60, 2018.
7. L. Batyuk, N. Kizilova, V. Berest, "Investigation of antiradiation and anticancer efficiency of nanodiamonds on rat erythrocytes", In: *Nanomaterials: Application & Properties*, pp. 04NB23, 2017.
8. P. Kingsley, E.M. Taylor, "One Health: competing perspectives in an emerging field", *Parasitology*, Vol. 144(1), pp. 7–14, 2017.
9. J. Zinnstag, E. Schelling, D. Waltner-Toews, M. Whittaker, M. Tanner (eds), *One Health: the theory and practice of integrated health approaches*, CAB International, 2015.
10. F. Azuaje, "Artificial intelligence for precision oncology: beyond patient stratification", *Nature Precision Oncology*, Vol. 3, pp. 6-11, 2019, doi:10.1038/s41698-019-0078-1.
11. W. Rawat, Z. Wang. "Deep convolutional neural networks for image classification: a comprehensive review", *Neural Computation*, Vol. 29, pp. 2352–2449, 2017.

12. A. Forschner, U. Keim, M. Hofmann, I. Spänkuch, D. Lomberg, B. Weide, I. Tampouri, T. Eigentler, C. Fink, C. Garbe, H.A. Haenssle, “Diagnostic accuracy of dermatofluoroscopy in cutaneous melanoma detection: results of a prospective multicentre clinical study in 476 pigmented lesions”, *British Journal of Dermatology*, Vol.179(2), pp. 478-485, 2018.
13. N. Coudray, P.S. Ocampo, T. Sakellaropoulos, N. Narula, M. Snuderl, D. Fenyö, A.L. Moreira, N. Razavian, A. Tsirigos, “Classification and mutation prediction from non-small cell lung cancer histopathology images using deep learning”, *Nature Medicine*, Vol. 24, pp. 1559–1567, 2018.
14. G. Yauney, P. Shah, “Reinforcement learning with action-derived rewards for chemotherapy and clinical trial dosing regimen selection”, *Proceedings of Machine Learning Research*, Vol.85, pp. 161–226, 2018.
15. R. Poplin, A.V. Varadarajan, K. Blumer, Y. Liu, M.V. McConnell, G.S. Corrado, L. Peng, D.R. Webster, “Prediction of cardiovascular risk factors from retinal fundus photographs via deep learning”, *Nature Biomedical Engineering*, Vol.2, pp.158–164, 2018.
16. L. Batyuk, N. Kizilova, “Modeling of dielectric permittivity of the erythrocytes membrane as a three-layer model”, In: Development trends in medical science and practice: the experience of countries of Eastern Europe and prospects of Ukraine, Riga, “Baltija Publishing”, pp. 18-37, 2018.

ЛІТЕРАТУРА

1. Yu K., Beam A.L., Kohane I.S. Artificial intelligence in healthcare. *Nature Biomedical Engineering*. 2018. Vol. 2. P. 719–731.
2. Lynch C.J., Liston C., New machine-learning technologies for computer-aided diagnosis. *Nature Medicine*. 2018. Vol. 24. P. 1304–1305.
3. Girardi D., Küng J., Kleiser R., Sonnberger M., Johannes D.C., Holzinger T.A. Interactive knowledge discovery with the doctor-in-the-loop: a practical example of cerebral aneurysms research. *Brain Informatics*. 2016. Vol.3. P. 133–143.
4. Kizilova N. Diagnostics of Coronary Stenosis: Analysis of Arterial Blood Pressure and Mathematical Modeling. In: *Biomedical Engineering Systems and Technologies*. Springer Series on Communications in Computer and Information Science. Plantier, G., Schulz, T., Fred, A., Gamboa, H. (Eds.). 2015. P. 299-312.
5. Kizilova N. Electromagnetic properties of blood and its interaction with electromagnetic fields”. In: *Advances in Medicine and Biology*. Vol.137. L.V. Berhardt (ed.) NOVA Sci. Publ. 2019. P. 1-74, 2019.
6. Batyuk L., Kizilova N. Dielectric properties of red blood cells for cancer diagnostics and treatment. *AS Cancer Biology*. 2018. Vol. 2(10). P. 55–60.
7. Batyuk L., Kizilova N., Berest V. Investigation of antiradiation and anticancer efficiency of nanodiamonds on rat erythrocytes. In: *Nanomaterials: Application & Properties*, 2017. P. 04NB23.
8. Kingsley P., Taylor E.M. One Health: competing perspectives in an emerging field. *Parasitology*. 2017. Vol. 144(1). P. 7–14.
9. Zinnstag J., Schelling E., Waltner-Toews D., Whittaker M., Tanner M. (eds) *One Health: the theory and practice of integrated health approaches*. CAB International. 2015.
10. Azuaje F. Artificial intelligence for precision oncology: beyond patient stratification. *Nature Precision Oncology*. 2019. Vol. 3. P. 6-11, doi:10.1038/s41698-019-0078-1.
11. Rawat W., Wang Z. Deep convolutional neural networks for image classification: a comprehensive review. *Neural Computation*. 2017. Vol. 29. P. 2352–2449.
12. Forschner A., Keim U., Hofmann M., Spänkuch I., Lomberg D., Weide B., Tampouri I., Eigentler T., Fink C., Garbe C., Haenssle H.A. Diagnostic accuracy of dermatofluoroscopy in cutaneous melanoma detection: results of a prospective multicentre clinical study in 476 pigmented lesions. *British Journal of Dermatology*. 2018. Vol.179(2). P. 478-485.
13. Coudray N., Ocampo P.S., Sakellaropoulos T., Narula N., Snuderl M., Fenyö D., Moreira A.L., Razavian N., Tsirigos A. Classification and mutation prediction from non-small cell lung cancer histopathology images using deep learning. *Nature Medicine*. 2018. Vol. 24. P. 1559–1567.

14. Yauney G., Shah P. Reinforcement learning with action-derived rewards for chemotherapy and clinical trial dosing regimen selection. *Proceedings of Machine Learning Research*. 2018. Vol.85. P. 161–226.
15. Poplin R., Varadarajan A.V., Blumer K., Liu Y., McConnell M.V., Corrado G.S., Peng L., Webster D.R. Prediction of cardiovascular risk factors from retinal fundus photographs via deep learning. *Nature. Biomedical Engineering*. 2018. Vol.2. P.158–164.
16. Batyuk L., Kizilova N. Modeling of dielectric permittivity of the erythrocytes membrane as a three-layer model. In: Development trends in medical science and practice: the experience of countries of Eastern Europe and prospects of Ukraine, Riga, “Baltija Publishing”. 2018. P. 18–37.

Батюк Лілія Василівна - кандидат біологічних наук, доцент кафедри медичної і біологічної фізики та медичної інформатики Харківського національного медичного університету, пр. Науки, 4, Харків, Україна 61000; e-mail: liliyabatyuk24@gmail.com; ORCID: 0000-0003-1863-0265.

Batyuk Liliya V. - PhD, Associate Professor of the Department of Medical and Biological Physics and Medical Informatics, Kharkov National Medical University, 4 Nauki Ave., Kharkov, Ukraine 61000; e-mail: liliyabatyuk24@gmail.com; ORCID: 0000-0003-1863-0265.

Батюк Лилия Васильевна – кандидат биологических наук, доцент кафедры медицинской и биологической физики и медицинской информатики Харьковского национального медицинского университета, пр. Науки, 4, Харьков, Украина 61000; e-mail: liliyabatyuk24@gmail.com; ORCID: 0000-0003-1863-0265.

Кізілова Наталія Миколаївна – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Kizilova Natalya M. - DSc, professor of the Department of Applied Mathematics, V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Кизилова Наталья Николаевна - доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

УДК 519.6

Система комп'ютерного моделювання для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса

І.В. Гарячевська, Д.О. Протектор

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua

У статті описується система комп'ютерного моделювання, яка призначена для числового вирішення нелінійного одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса. Числове вирішення диференціального рівняння Бюргерса здійснюється за безсітковою схемою з використанням методу часткових розв'язків і радіальних базисних функцій. Дискретизація за часом одновимірного диференціального рівняння Бюргерса здійснюється з використанням θ -схеми. В якості радіальних базисних функцій в системі комп'ютерного моделювання використовується зворотна мультіквадратична функція. Для вирішення диференціальних рівнянь в частинних похідних в системі комп'ютерного моделювання передбачено завдання початкових та крайових умов, а також завдання джерела як функції, що залежить від координат і часу. Система комп'ютерного моделювання дозволяє налаштовувати такі параметри вирішення як розмір області крайової задачі, кількість інтерполяційних вузлів, часовий інтервал на якому буде вирішуватися нестационарна крайова задача, крок за часом, параметр форми радіальної базисної функції, а також коефіцієнти в рівнянні Бюргерса. Розв'язок нелінійного одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса в системі комп'ютерного моделювання візуалізується у вигляді тривимірної поверхні. В системі комп'ютерного моделювання реалізована можливість візуалізації отриманого розв'язку на окремих проміжках часу у вигляді тривимірних графіків. Ефективність числового вирішення в системі комп'ютерного моделювання продемонстрована на прикладі двох тестових задач для яких були отримані числові розв'язки, а також порашовані середня відносна, середня абсолютна та максимальна похибки.

Ключові слова: нелінійне одновимірне рівняння Бюргерса, система комп'ютерного моделювання, нестационарна крайова задача, безсітковий метод, радіальні базисні функції, зворотна мультіквадратична функція.

В статье описывается система компьютерного моделирования, предназначенная для численного решения нелинейного одномерного нестационарного уравнения Бюргерса. Численное решение дифференциального уравнения Бюргерса осуществляется по бессеточной схеме с использованием метода частных решений и радиальных базисных функций. Дискретизация по времени одномерного дифференциального уравнения Бюргерса осуществляется с использованием θ -схемы. В качестве радиальных базисных функций в системе компьютерного моделирования используется обратная мультіквадратичная функция. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных в системе компьютерного моделирования предусмотрено задание начальных и граничных условий, а также задание источника как функции, зависящей от координат и времени. Система компьютерного моделирования позволяет настраивать такие параметры решения как размер области краевой задачи, количество интерполяционных узлов, временной интервал на котором будет решаться нестационарная краевая задача, шаг по времени, параметр формы радиальной базисной функции, а также коэффициенты в уравнении Бюргерса. Решение нелинейного одномерного нестационарного уравнения Бюргерса в системе компьютерного моделирования визуализируется в виде трехмерной поверхности. В системе компьютерного моделирования реализована возможность визуализации полученного решения на отдельных промежутках времени в виде трехмерных графиков. Эффективность численного решения в системе компьютерного моделирования продемонстрирована на примере двух тестовых задач для которых были получены численные решения, а также посчитаны средняя относительная, средняя абсолютная и максимальная погрешности.

Ключевые слова: нелинейное одномерное уравнение Бюргерса, система компьютерного моделирования, нестационарная краевая задача, бессеточный метод, радиальные базисные функции, обратная мультіквадратичная функция.

The computer modeling system for numerical solution of the nonlinear one-dimensional non-stationary Burgers' equation is described. The numerical solution of the Burgers' equation is obtained by a meshless scheme using the method of partial solutions and radial basis functions. Time discretization of the one-dimensional Burgers' equation is obtained by the generalized trapezoidal method (θ -scheme). The inverse multiquadric function is used as radial basis functions in the computer modeling system. The computer modeling system allows setting the initial conditions as a coordinate-dependent function, boundary conditions as a coordinate- and time-dependent function and setting the source function as a coordinate- and time-dependent function for solving partial differential equation. A computer modeling system allows setting such parameters as the domain of the boundary-value problem, number of interpolation nodes, the time interval of non-stationary boundary-value problem, the time step size, the shape parameter of the radial basis function, and coefficients in the Burgers' equation. The solution of the nonlinear one-dimensional non-stationary Burgers' equation is visualized as a three-dimensional surface plot in the computer modeling system. The computer modeling system allows visualizing the solution of the boundary-value problem at chosen time steps as three-dimensional plots. The computational effectiveness of the computer modeling system is demonstrated by solving two benchmark problems. For solved benchmark problems, the average relative error, the average absolute error, and the maximum error have been calculated.

Keywords: nonlinear one-dimensional Burgers' equation, computer modeling system, non-stationary boundary-value problem, meshless method, radial basis functions, inverse multiquadric function.

1 Вступ

У даній статті розглядається система комп'ютерного моделювання (СКМ), яка призначена для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса за безсітковою схемою. Рівняння Бюргерса було розв'язано аналітично тільки для кінцевого числа початкових та крайових умов [1, 2]. Бентон і Платцман [3] отримали близько 35 різних точних розв'язків одновимірного рівняння Бюргерса. Тому для отримання розв'язку рівняння Бюргерса з довільними початковими та крайовими умовами використовуються різні числові методи. Найбільш популярними серед них є метод скінченних різниць, метод скінченних елементів і спектральні методи. Огляди цих методів наведені в роботах [4, 5]. Однак згадані вище числові методи вимагають побудови інтерполяційної сітки всередині області крайової задачі, що розглядається. Генерація сітки, як і раніше, залишається найбільш трудомісткою частиною будь-якого числового моделювання заснованого на використанні сіткових методів.

Щоб уникнути труднощів пов'язаних з побудовою інтерполяційної сітки, протягом останніх двох десятиліть дослідниками активно розробляються різні безсіткові схеми. Огляди з безсіткових методів представлені в статтях [6, 9]. Безсіткові методи є простими в реалізації та обчислювально ефективними. Безсіткові схеми успішно застосовуються для моделювання водної поверхні, повітряних мас, хвильових процесів, високошвидкісного зіткнення, течії рідини, задач теплопровідності та інше. Однак, в даний час, все ще відсутні системи комп'ютерного моделювання, засновані на використанні безсіткових схем, для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса.

Метою дослідження є розробка та програмна реалізація системи комп'ютерного моделювання, яка призначена для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій.

2 Ітераційна схема

Розглянемо нелінійне одновимірне нестационарне рівняння Бюргерса в обмеженій області:

$$\mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \varepsilon u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T] \quad (2.1)$$

де μ, ε – відомі коефіцієнти, $\nu = \frac{1}{R}$ – кінематична в'язкість, R – число Рейнольдса, $f(x,t)$ – функція джерела.

Початкові умови задаються у вигляді:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [a, b] \quad (2.2)$$

Крайові умови Діріхле мають вигляд:

$$\begin{cases} u(a,t) = g_1(t) \\ u(b,t) = g_2(t) \end{cases}, \quad t \in [0, T] \quad (2.3)$$

Застосовуючи θ -схему для дискретизації за часом, отримуємо:

$$u(x,t) \approx \theta u^{n+1} + (1-\theta) u^n \quad (2.4)$$

$$f(x,t) \approx \theta f^{n+1} + (1-\theta) f^n \quad (2.5)$$

де $u^n = u(x, t^n)$, $f^n = f(x, t^n)$, $t^n = n\tau$, n – крок ітерації, τ – часовий інтервал, $0 \leq \theta \leq 1$ – ваговий коефіцієнт.

Тоді

$$\Delta u(x,t) \approx \theta \Delta u^{n+1} + (1-\theta) \Delta u^n \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \quad (2.7)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Підставимо рівняння (2.4) - (2.7) в рівняння (2.1):

$$\mu \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \theta \left[v \Delta u^{n+1} - \varepsilon u^{n+1} \nabla u^{n+1} + f^{n+1} \right] + (1 - \theta) \left[v \Delta u^n - \varepsilon u^n \nabla u^n + f^n \right] \quad (2.8)$$

де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$.

Перепишемо рівняння (2.8) наступним чином:

$$\mu u^{n+1} - \theta \tau \left[v \Delta u^{n+1} - \varepsilon u^{n+1} \nabla u^{n+1} + f^{n+1} \right] = \mu u^n - (1 - \theta) \tau \left[v \Delta u^n - \varepsilon u^n \nabla u^n + f^n \right] \quad (2.9)$$

Тоді

$$\Delta u^{n+1} = \frac{\mu}{\theta \tau v} u^{n+1} + \frac{\varepsilon}{v} u^{n+1} \nabla u^{n+1} - \frac{1}{v} f^{n+1} - \frac{\mu}{\theta \tau v} u^n - \frac{(1 - \theta)}{\theta v} \left[v \Delta u^n - \varepsilon u^n \nabla u^n + f^n \right] \quad (2.10)$$

Припустимо, що $u^{n+1}(x)$ – розв’язок даного диференціального рівняння. Представимо праву частину рівняння (2.10) як функцію $F(x)$. Це означає, що рівняння (2.10) є диференціальним рівнянням Пуассона:

$$\Delta u^{n+1} = F(x) \quad (2.11)$$

Отже, якщо функція $F(x)$ відома, то рівняння (2.10) еквівалентно рівнянню Пуассона (2.11) при тих самих крайових умовах.

Рівномірно оберемо $N - 2$ точки колокації $\{x_k\}_2^{N-1}$ всередині області (a, b) і дві точки на границі області $x_1 = a$ та $x_N = b$. $F(x)$ апроксимується радіальними базисними функціями $\varphi_j(x) = \varphi(r_j)$ наступним чином:

$$F(x) \approx \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi_j(x) \quad (2.12)$$

де $r_j = \left\| (x - x_j)^2 \right\|$ – евклідова відстань між вузлами.

Тоді $u^{n+1}(x)$ апроксимується як:

$$u^{n+1}(x) \approx \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \Phi_j(x) \quad (2.13)$$

де $\Phi_j(x)$ – розв’язок рівняння

$$\Delta \Phi_j(x) = \varphi_j(x) \quad (2.14)$$

У даній роботі, в якості радіальних базисних функцій, використовується зворотна мультіквадратична функція

$$\varphi(r_j) = \frac{1}{\sqrt{(r_j^2 + c^2)^3}} \quad (2.15)$$

де $c \neq 0$ – параметр форми, що обирається довільно.

Тоді $\Phi_j(x)$ матиме вигляд:

$$\Phi(r_j) = \frac{1}{c^2} \sqrt{r_j^2 + c^2} \quad (2.16)$$

Рівняння (2.10) являє собою рекурсивну формулу. Отже, дане диференціальне рівняння можна вирішувати крок за кроком, починаючи з початкових умов (2.2).

Вважаючи $\theta = 1$, рівняння (2.10) запишеться у вигляді:

$$u^{n+1} - \frac{\tau}{\mu} \left[v \Delta u^{n+1} - \varepsilon u^{n+1} \nabla u^{n+1} \right] = u^n + \frac{\tau}{\mu} f^{n+1} \quad (2.17)$$

Нелінійний член $u^{n+1} \nabla u^{n+1}$ лінеаризується наступним чином:

$$u^{n+1}\nabla u^{n+1} = u^{n+1}\nabla u^n + u^n\nabla u^{n+1} - u^n\nabla u^n \quad (2.18)$$

Підставимо рівняння (2.18) в рівняння (2.17):

$$u^{n+1} - \frac{\tau}{\mu} \left[v\Delta u^{n+1} - \varepsilon u^{n+1}\nabla u^n - \varepsilon u^n\nabla u^{n+1} \right] = u^n + \frac{\tau\varepsilon}{\mu} u^n\nabla u^n + \frac{\tau}{\mu} f^{n+1} \quad (2.19)$$

Запишемо рівняння (2.13) разом з крайовими умовами (2.3) в матричній формі:

$$[u]^n = A[\alpha]^n \quad (2.20)$$

де $[u]^n = [u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n]^T$, $[\alpha]^n = [\alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_N^n]^T$ та $A = [\Phi(r_{kj})]$, $1 \leq k, j \leq N$.

Матриця A може бути поділена наступним чином:

$$A = A_d + A_b \quad (2.21)$$

де

$$A_d = \begin{cases} \Phi(r_{kj}), & \text{якщо } 2 \leq k \leq N-1, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (2.22)$$

$$A_b = \begin{cases} \Phi(r_{kj}), & \text{якщо } k=1, N, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Застосовуючи співвідношення (2.21) до точок всередині області та до точок на границі області, рівняння (2.19) перепишеться в наступній матричній формі:

$$\left\{ A_d - \frac{\tau v}{\mu} \Delta A_d + \frac{\tau\varepsilon}{\mu} \left[\text{diag} \left(A_d [\alpha]^n \right) \nabla A_d + \text{diag} \left(\nabla A_d [\alpha]^n \right) A_d \right] + A_b \right\} [\alpha]^{n+1} =$$

$$= A_d [\alpha]^n + \frac{\tau\varepsilon}{\mu} \left(A_d [\alpha]^n \right) .* \left(\nabla A_d [\alpha]^n \right) + [F]^{n+1} \quad (2.23)$$

де $\text{diag} \left(A_d [\alpha]^n \right)$ – діагональна матриця з елементами $A_d [\alpha]^n$ на головній діагоналі,

$[F]^{n+1} = \left[g_1^{n+1}, \frac{\tau}{\mu} f_2^{n+1}, \dots, \frac{\tau}{\mu} f_{N-1}^{n+1}, g_2^{n+1} \right]^T$, “.*” означає покомпонентний добуток двох векторів.

Описана ітераційна схема була взята за основу розробленої системи комп’ютерного моделювання.

3 Опис системи комп’ютерного моделювання

Інтерфейс системи комп’ютерного моделювання для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса представлений на рис. 1.

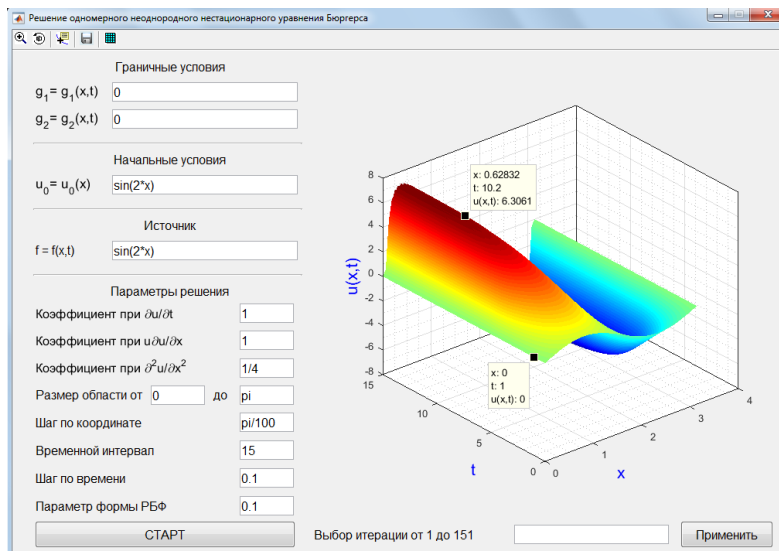


Рис. 1 Інтерфейс системи комп’ютерного моделювання

У верхній частині програми розміщується панель інструментів, зображена на рис. 2.

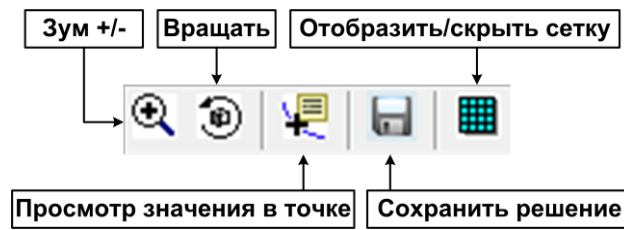


Рис. 2 Панель інструментів

На панелі інструментів розташовуються кнопки, які дозволяють змінювати масштаб координатних осей та здійснювати їх оберт на довільний кут, відображати числове значення розв'язку в обраній точці, зберігати отриманий розв'язок у вигляді растрового зображення, а також відображати та приховувати сітку на тривимірній поверхні.

Для вирішення диференціальних рівнянь в частинних похідних, необхідно задати значення початкових та крайових умов. У СКМ передбачено завдання крайових умов в числовому вигляді або як функції, що залежить від координат і часу. Система комп'ютерного моделювання дозволяє задавати як числові початкові умови, так і у вигляді функції, що залежить від координат. У СКМ функція джерела може бути задана в наступному вигляді $f = f(x, t)$.

Система дозволяє налаштовувати такі параметри вирішення як розмір області, кількість інтерполяційних вузлів, часовий інтервал, крок за часом, параметр форми радіальної базисної функції, а також коефіцієнти в рівнянні Бюргерса.

Розв'язок одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса в СКМ візуалізується у вигляді тривимірної поверхні (див. рис. 1). В системі реалізована можливість візуалізації розв'язку на окремих проміжках часу у вигляді тривимірних графіків (рис. 3).

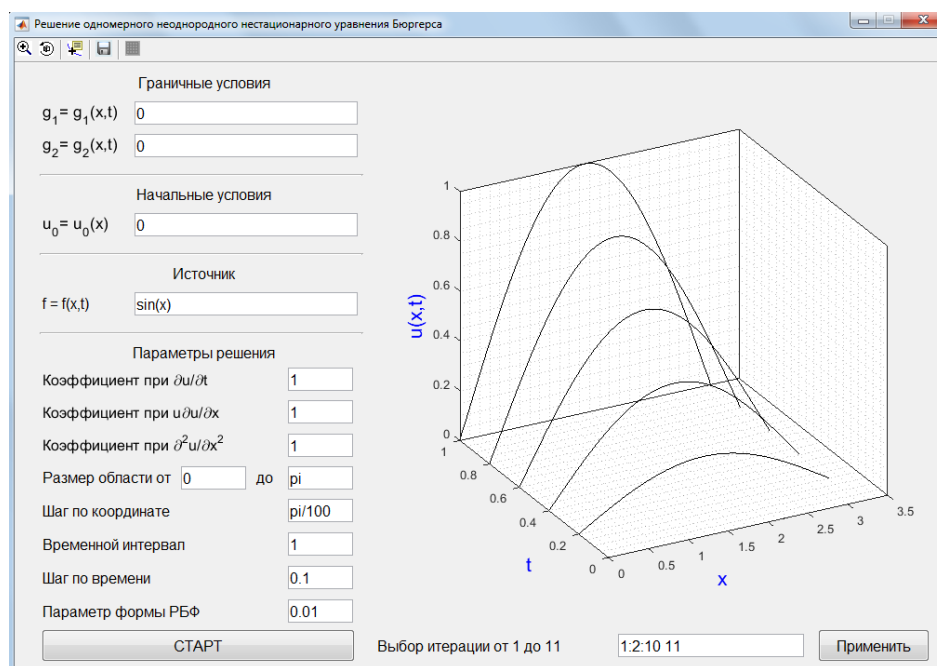


Рис. 3 Візуалізація розв'язку на окремих проміжках часу

4 Числові результати

В цьому розділі ілюструється застосування розробленої системи комп'ютерного моделювання на прикладі двох тестових задач і оцінюється точність отриманих розв'язків.

Для оцінки точності апроксимації використовуються середня відносна похибка $\text{err}(u)$, середня абсолютна похибка $\text{aerr}(u)$ і максимальна похибка $\text{merr}(u)$, які обчислюються за формулами:

$$\text{rerr}(u) = \sqrt{\frac{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (u_j - \tilde{u}_j)^2}{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (u_j)^2}} \quad (4.1)$$

$$\text{aerr}(u) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (u_j - \tilde{u}_j)^2} \quad (4.2)$$

$$\text{merr}(u) = \max_j |u_j - \tilde{u}_j| \quad (4.3)$$

де u_j та \tilde{u}_j є відповідно аналітичними та числовими розв'язками в вузлах $x_j \in [a, b]$, а L – загальна кількість інтерполяційних вузлів.

Задача №1

Розглянемо нелінійне одновимірне нестационарне рівняння Бюргерса:

$$\mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \varepsilon u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \sin(2x) e^{-2t\nu} \quad (4.4)$$

де $x \in [0, 2\pi]$, $d_x = \pi/10$, $t \in [0, 2]$, $\tau = 0.1$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$, $\nu = 0.0001$, $c = 5.45$.

Початкові умови:

$$u(x,0) = \cos(x) \quad (4.5)$$

Крайові умови:

$$u(x,t) = u(x + 2\pi, t) \quad (4.6)$$

Аналітичний розв'язок задано у вигляді:

$$u(x,t) = \cos(x) e^{-t\nu} \quad (4.7)$$

На рис. 4 представлена візуалізація наближеного розв'язку нестационарного рівняння Бюргерса, отриманого з використанням СКМ.

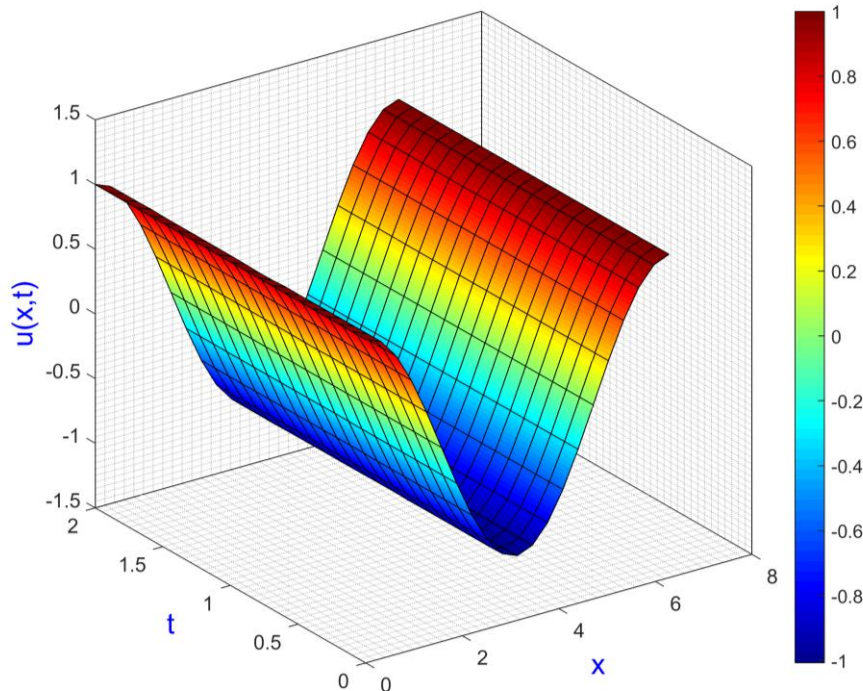


Рис. 4 Візуалізація наближеного розв'язку

В Таблиці 1 наведені похибки розв'язку Задачі №1 в різні проміжки часу.

Таблиця 1. Похибки розв'язку Задачі №1

t	$\text{regr}(u)$	$\text{aerr}(u)$	$\text{terr}(u)$
0.5	3.9309×10^{-4}	1.3036×10^{-3}	2.6162×10^{-3}
1	5.9474×10^{-4}	1.9723×10^{-3}	3.3835×10^{-3}
1.5	6.5737×10^{-4}	2.1799×10^{-3}	4.2149×10^{-3}
2	8.6270×10^{-4}	2.8606×10^{-3}	5.1334×10^{-3}

Задача №2

Розглянемо нелінійне одновимірне нестационарне рівняння Бюргерса:

$$\mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \varepsilon u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.8)$$

де $x \in [0, 1]$, $d_x = 0.01$, $t \in [0, 0.001]$, $\tau = 0.0001$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$, $\nu = 0.5$, $c = 0.01$.

Початкові умови:

$$u(x,0) = \frac{2\nu\pi \sin(\pi x)}{2 + \cos(\pi x)} \quad (4.9)$$

Крайові умови:

$$u(0,t) = 0 \quad (4.10)$$

$$u(1,t) = 0 \quad (4.11)$$

Аналітичний розв'язок задано у вигляді:

$$u(x,t) = \frac{2\nu\pi e^{-\pi^2\nu t} \sin(\pi x)}{2 + e^{-\pi^2\nu t} \cos(\pi x)} \quad (4.12)$$

На рис. 5 представлена візуалізація наближеного розв'язку нестационарного рівняння Бюргерса, отриманого з використанням СКМ.

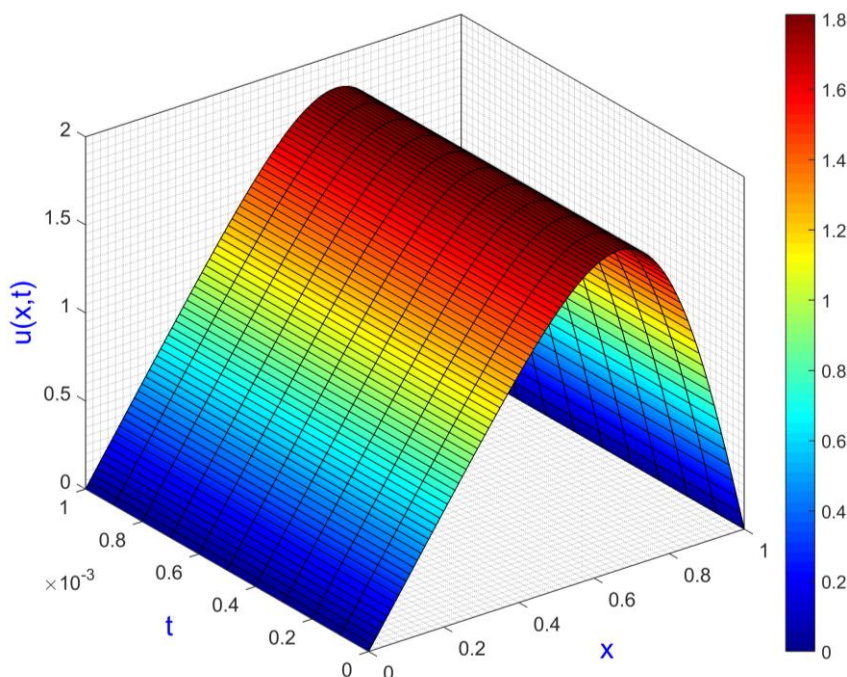


Рис. 5 Візуалізація наближеного розв'язку

В Таблиці 2 наведені похибки розв'язку Задачі №2 в різні проміжки часу.

Таблиця 2. Похибки розв'язку Задачі №2

t	$\text{regr}(u)$	$\text{aerr}(u)$	$\text{merr}(u)$
0.0001	6.3164×10^{-5}	7.8001×10^{-4}	1.3082×10^{-3}
0.0002	1.2635×10^{-4}	1.5593×10^{-3}	2.6150×10^{-3}
0.0003	1.8955×10^{-4}	2.3379×10^{-3}	3.9205×10^{-3}
0.0004	2.5278×10^{-4}	3.1158×10^{-3}	5.2245×10^{-3}
0.0005	3.1602×10^{-4}	3.8930×10^{-3}	6.5272×10^{-3}
0.0006	3.7929×10^{-4}	4.6695×10^{-3}	7.8285×10^{-3}
0.0007	4.4258×10^{-4}	5.4453×10^{-3}	9.1284×10^{-3}
0.0008	5.0589×10^{-4}	6.2204×10^{-3}	1.0426×10^{-2}
0.0009	5.6922×10^{-4}	6.9948×10^{-3}	1.1724×10^{-2}
0.001	6.3257×10^{-4}	7.7686×10^{-3}	1.3019×10^{-2}

5 Висновки

Розроблена та програмно реалізована система комп'ютерного моделювання для числового вирішення нелінійного одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса. Числове вирішення диференціального рівняння Бюргерса здійснюється за безсітковою схемою з використанням методу часткових розв'язків і радіальних базисних функцій. Ефективність числового вирішення в СКМ продемонстрована на прикладі двох тестових задач для яких були отримані наближені розв'язки, а також пораховані середня відносна, середня абсолютна та максимальна похибки.

Варто відзначити, що зворотна мультіквадратична функція, яка використовується в СКМ для апроксимації, містить параметр форми, який впливає як на точність отриманого розв'язку, так і на обумовленість системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Оптимальні параметри форми в Задачі №1 і в Задачі №2 для всіх розрахунків були знайдені експериментально. Вибір оптимальних параметрів форми РБФ все ще залишається невирішеним питанням.

ЛІТЕРАТУРА

1. Cole J. D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1951. Vol. 9. P. 225–236. doi: <https://doi.org/10.1090/qam/42889>.
2. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1950. Vol. 3. P. 201–230. doi: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160030302>.
3. Benton E. R., Platzman G. W. A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1972. Vol. 30. P. 195–212. doi: <https://doi.org/10.1090/qam/306736>.
4. Hassanien I. A., Salama A. A., Hosham H. A. Fourthorder finite difference method for solving Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2005. Vol. 170, Issue 2. P. 781–800. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.12.052>.
5. Kutluay S., Esen A., Dag I. Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2004. Vol. 167, Issue 1. P. 21–33. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.09.043>.
6. Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994. Vol. 37, Issue 2. P. 229–256. doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>.
7. Belytschko T., Rongauz Y., Organ D. Meshless methods: An overview and recently developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996. Vol. 139. P. 3–47. doi: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01078-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01078-X).
8. Протектор Д. О., Лисин Д. А., Лисина О. Ю. Численный анализ решений двумерных задач теплопроводности по бессеточной схеме с использованием фундаментальных и общих решений. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2, № 1. С. 98–111. doi: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-8>.
9. Xie H., Zhou J., Jiang Z. Approximations for Burgers' equations with C-N scheme and RBF collocation methods. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*. 2016. Vol. 9, Issue 6. P. 3727–3734. doi: <http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.06.23>.

REFERENCES

1. J. D. Cole, "On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics". *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 9, pp. 225-236, 1951. doi: <https://doi.org/10.1090/qam/42889>.
2. E. Hopf, "The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ ". *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 3, pp. 201-230, 1950. doi: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160030302>.
3. E. R. Benton and G. W. Platzman, "A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation". *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 30, pp. 195-212, 1972. doi: <https://doi.org/10.1090/qam/306736>.
4. A. Hassanien, A. A. Salama, and H. A. Hosham, "Fourthorder finite difference method for solving Burgers' equation". *Applied Mathematics and Computation*, vol. 170, no. 2, pp. 781-800, 2005. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.12.052>.
5. S. Kutluay, A. Esen, and I. Dag, "Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 167, no. 1, pp. 21-33, 2004. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.09.043>.
6. T. Belytschko, Y. Y. Lu and L. Gu "Element-free Galerkin methods". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, no. 2, pp. 229-256, 1994. doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>.
7. T. Belytschko, Y. Rongauz and D. Organ "Meshless methods: An overview and recently developments". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 3-47, 1996. doi: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01078-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01078-X).
8. D. O. Protector, D. A. Lisin and O. Yu. Lisina "Numerical analysis of solutions of two-dimensional heat conduction problems by meshless approach using fundamental and general solutions". *Applied Questions of Mathematical Modelling*, vol. 2, no. 1, pp. 98-111, 2019. doi: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-8>. [in Russian]
9. H. Xie, J. Zhou and Z. Jiang "Approximations for Burgers' equations with C-N scheme and RBF collocation methods". *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, vol. 9, no. 6, pp. 3727-3734, 2016. doi: <http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.06.23>.

Гарячевська Ірина Василівна – кандидат технічних наук, доцент; директор навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4630-9519.

Протектор Денис Олегович – аспірант; навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: d.protector@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3323-7058.

Garyachevskaya Irina V. PhD, Associate Professor, Director of the Education and Research Institute Computer Physics and Energy V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine; e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4630-9519.

Protector Denys O. Postgraduate student of the Education and Research Institute Computer Physics and Energy V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine; e-mail: d.protector@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3323-7058.

Гарячевская Ирина Васильевна – кандидат технических наук, доцент; директор учебно-научного института компьютерной физики и энергетики, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4630-9519.

Протектор Денис Олегович – аспирант; учебно-научный институт компьютерной физики и энергетики, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: d.protector@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3323-7058.

УДК 539.3

Комп'ютерне моделювання вимушених коливань елементів конструкцій, що взаємодіють з рідиною, за умови дії гармонічних, імпульсних та сейсмічних впливів

¹К.Г. Дегтярьов, ¹Д.В. Крютченко, ²Р.П. Москаленко, ¹Р.Г. Пальчиков

¹ Інститут проблем машинобудування НАН України ім. А.М. Підгорного
ул. Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна

² Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
майдан Свободи 4, Харків, 61022, Україна
rmphd2016@gmail.com

Розроблено метод розрахунку вимушених коливань елементів конструкцій, що взаємодіють з водним середовищем при експлуатації. Розглянуто гармонічні, імпульсні і сейсмічні зовнішні впливи. Вважається, що рідина, яка оточує конструктивний елемент, є ідеальною і нестисливою, а її рух, викликаний коливаннями елемента, що розглядається, є безвихровим. За такі умови існує потенціал швидкостей, що задовольняє рівнянню Лапласа. Для визначення тиску рідини на поверхні, що з нею контактують, використовується інтеграл Коші-Лагранжа. Знаходження потенціалу швидкостей здійснюється шляхом розв'язання крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа на розімкнутій поверхні. Як інтегральне подання для невідомого потенціалу швидкостей використаний потенціал подвійного шару. Цей потенціал задовольняє рівнянню Лапласа та умовам згасання швидкості на нескінченності. Виконання граничних умов непротікання призводить до необхідності розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння щодо перепаду тиску. Для розв'язання крайової задачі гідропружності застосований метод заданих форм. При цьому невідомі переміщення та потенціал швидкостей зображаються у вигляді рядів з невідомими коефіцієнтами. Базисними функціями в цих рядах обрані власні форми коливань елемента конструкції без урахування впливу рідини. Частоти коливань елемента конструкції в рідині обчислені з урахуванням приєднаних мас. Для аналізу вимушених коливань елементів конструкцій, що взаємодіють з рідиною, отримано систему диференціальних рівнянь другого порядку відносно невідомих коефіцієнтів рядів, які залежать лише від часу. Як приклад розглянуті коливання квадратної жорстко закріпленої пластинки за дії різних зовнішніх навантажень. Проаналізовано поведінку максимальної інтенсивності напружень в залежності від параметрів навантаження. Встановлено, при яких параметрах може відбутися руйнування.

Ключові слова: вимушені коливання, гідропружність, взаємодія, метод заданих форм, гіперсингулярне інтегральне рівняння.

Разработан метод расчета вынужденных колебаний элементов конструкций, взаимодействующих с водной средой при эксплуатации. Рассмотрены гармонические, импульсные и сейсмические внешние воздействия. Предполагается, что жидкость, окружающая конструктивный элемент, является идеальной и несжимаемой, а ее движение, вызванное колебаниями рассматриваемого элемента, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей, который удовлетворяет уравнению Лапласа. Для определения давления жидкости на контактирующие с ней поверхности используется интеграл Коши-Лагранжа. Нахождение потенциала скоростей осуществляется путем решения краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа на разомкнутой поверхности. В качестве интегрального представления использован потенциал двойного слоя. Такой потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа и условию затухания скорости на бесконечности. Выполнение граничных условий непротекания приводит к необходимости решения гиперсингулярного интегрального уравнения относительно перепада давления. Для решения краевой задачи гидроупругости применен метод заданных форм. При этом неизвестные перемещения и потенциал скоростей представляются в виде рядов с неизвестными коэффициентами. Как базисные функции выбирались формы колебаний элемента конструкции в воздухе, без учета влияния жидкости. Частоты колебаний в воде определялись с учетом присоединенных масс. Для исследования вынужденных колебаний получена система дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных коэффициентов рядов, зависящих только от времени. В качестве примера рассмотрены колебания квадратной жестко заземленной пластинки. Проанализировано поведение максимальной интенсивности напряжений в зависимости от параметров нагружения. Установлено, при каких параметрах может произойти разрушение.

Ключевые слова: вынужденные колебания, гидроупругое взаимодействие, метод заданных форм, гиперсингулярное интегральное уравнение

The method for simulating forced vibrations of structure elements, which interact with water medium during service is developed. Harmonic, impulse and seismic loadings are accounted for. It is assumed that the fluid surrounding the structure element is an ideal and incompressible one, and its movement caused by the vibrations of the element in question is vortex-free. Therefore the velocity potential that satisfies the Laplace equation exists. To determine the fluid pressure on the surfaces contacting with the liquid the Cauchy-Lagrange integral is used. The velocity potential is determined by solving the Neumann boundary value problem for the Laplace equation on an open surface. The potential of the double layer is used as an integral representation. This potential satisfies the Laplace equation and the conditions for vanishing velocity at infinity. The non-penetration condition leads to the necessity of solving the hypersingular integral equation for the pressure drop. To solve the boundary value problem of hydroelasticity the method of given forms is applied. The unknown displacements and potential are represented as series with unknown coefficients. The basic functions in these series are the modes of vibrations of the element

without liquid. The frequencies of the structure element vibrations in fluid are evaluated taking the added masses into account. For simulating forced vibrations the system of second order differential equations relatively to the unknown time-dependent coefficients is obtained. The vibrations of a rigidly clamped square plate are examined as an example. The behavior of the maximum stress intensity is analyzed in dependence with the loading parameters. The estimations for critical values of load parameters are provided.

Key words: forced vibrations, fluid-structure interaction, method of given forms, hypersingular integral equation.

1 Вступ.

Інтенсивний розвиток сучасної техніки вимагає створення нових приладів, обладнання та апаратури. Зазвичай це обладнання працює в умовах дії підвищених технологічних, температурних та інших експлуатаційних чинників. При цьому робота апаратури відбувається при взаємодії з оточуючим середовищем, рідиною або газом. Для надання надійних оцінок міцності та надійності такого обладнання слід проводити аналіз їх міцності з урахуванням явищ гідро-пружної або аеро-пружної взаємодії. До таких конструкцій відносяться посудини високого тиску [1,2], лопаті та кришки гідротурбін [3,4], паливні баки ракетноносіїв [5] та ін. Для математичного моделювання багатьох конструктивних елементів використовують тонкі пластини або оболонки. Дослідженню вільних коливань пластин при взаємодії з рідиною присвячено велику кількість наукових праць. Так, в [6-8] вивчався вплив умов закріплення на власні частоти коливань прямокутної пластинки, в [9-11] використані різні числові методи побудови матриць приєднаних мас рідини, в [9] запропоновано також експериментальний метод, в [12] досліджувались коливання плит з композитного матеріалу з урахуванням приєднаних мас рідини. Коливання пружних пластин з урахуванням дії рухомої рідини досліджені в [13-14], в [15] вважалось, що рідина здійснює пульсації. Але вивченню вимушених коливань пластин з урахуванням наявності рідини присвячено значно менша кількість наукових праць [16]. Разом з тим, ця проблема є актуальною при проектуванні гідротурбінного обладнання. Зауважимо, наприклад, що сучасні стандарти проектування ГЕС та ГАЕС [17] вимагають оцінки сейсмічної стійкості обладнання, а це, в свою чергу, веде до необхідності розрахунків вимушених коливань елементів гідротехнічних конструкцій та споруд в умовах дії імпульсних та сейсмічних впливів.

2 Загальне формулювання задачі розрахунку вимушених коливань елементів конструкцій, що занурені в рідину.

Розглядається елемент пружної конструкції, занурений у рідину, який здійснює коливання внаслідок дії деякого зовнішнього навантаження. Рівняння руху такого елемента в операторній формі має вигляд

$$M_S \ddot{\mathbf{U}} + K_S \mathbf{U} = P \mathbf{n} + F, \quad (2.1)$$

де \mathbf{U} – вектор переміщень пружного елемента, M_S та K_S – матриці мас та жорсткості відповідно, P – перепад тиску рідини, F – сила, що збуджує, \mathbf{n} – одинична нормаль до поверхні елемента.

Припустимо, що рідина є нестисливою та нев'язкою, а її рух внаслідок коливань зануреного елемента, є безвихровим. В цих умовах існує потенціал швидкостей $\mathbf{v}(x, y, z, t) = \text{grad}\Phi(x, y, z, t)$, який задовольняє рівнянню Лапласа. На бокових поверхнях елемента мають бути виконані умови непротікання. Ці умови сформульовано як таку крайову задачу:

$$\Delta\Phi = 0, \quad \frac{\partial\Phi^\pm}{\partial\mathbf{n}} = (\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{n}). \quad (2.2)$$

Визначення тиску рідини на поверхню зануреного елемента здійснюємо за допомогою інтегралу Коші-Лагранжа

$$P = -\rho_l \left[\frac{\partial\Phi^+(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial\Phi^-(x, y, z, t)}{\partial t} \right], \quad (2.3)$$

де ρ_l – густина рідини. Припустимо, що розв'язок крайової задачі (2.2) знайдено. При цьому будемо мати

$$\Phi(x, y, z, t) = G(\dot{\mathbf{U}}), \quad (2.4)$$

де G – деяка, поки що невідома операторна функція. З умов (2.3) та (2.4) знайдемо

$$P(x, y, z, t) = H\ddot{\mathbf{U}}. \quad (2.5)$$

Підставимо подання (2.5) в рівняння руху (2.1) та отримаємо

$$M_S \ddot{\mathbf{U}} + K_S \mathbf{U} = -H\ddot{\mathbf{U}} + F \quad (2.6)$$

В рівнянні (2.6) матриця H є матрицею приєднаних мас рідини. Засіб її побудови з використанням методу граничних елементів наведено в роботах [3,4]. При цьому як інтегральне подання для невідомого потенціалу швидкостей використано гармонічний потенціал подвійного шару [18]

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi, \quad \mathbf{x} = (x, y, z), \quad \xi = (\xi, \eta, \zeta), \quad (2.7)$$

де $\Gamma(\xi, t)$ - невідома густина потенціалу, \mathbf{n}_ξ є одиничним вектором нормалі до поверхні S_ξ , індекс ξ вказує на те, що інтегрування в (2.7) проводиться саме за цією змінною.

Оскільки $\Phi^+ - \Phi^- = \Gamma$, то перепад тиску є пропорційним густині потенціалу Γ .

3 Метод заданих форм при визначенні вільних та вимушених коливань елементів конструкцій, що взаємодіють з рідиною.

Зобразимо вектор невідомих переміщень конструкції в рідині у вигляді [2,5]

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \mathbf{U}_k(x, y, z), \quad (3.1)$$

де \mathbf{U}_k є формами вільних коливань елемента конструкції у повітрі. Згідно з (3.1) та граничної умови з (2.2) отримаємо ряд для невідомої густини $\Gamma(\xi, t)$ у такий вигляд:

$$\Gamma(\xi, t) = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \Gamma_k(\xi). \quad (3.2)$$

Функції $\Gamma_k(\xi)$ визначені як розв'язки таких гіперсингулярних інтегральних рівнянь:

$$N \Gamma_k = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi = (\mathbf{U}_k, \mathbf{n}). \quad (3.3)$$

Маємо далі

$$\Phi^+ - \Phi^- = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \Gamma_k(\mathbf{x}). \quad (3.4)$$

З виразів (3.4), (2.3) встановлюємо, що

$$P = -\rho_l \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \Gamma_k(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

Підставимо розкладення (3.1), (3.5) в рівняння руху (2.1). Отримаємо, користуючись лінійністю операторів M_S та K_S ,

$$\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) M_S \mathbf{U}_k(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N c_k(t) K_S \mathbf{U}_k(\mathbf{x}) + \rho_l \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \Gamma_k(\mathbf{x}) = F. \quad (3.6)$$

З рівняння (3.6) за умови, що $F = 0$ та $\rho_l = 0$ приходимо до проблеми власних значень для вільних коливань елемента конструкції в повітрі, а якщо $F = 0$ та $\rho_l \neq 0$ знаходимо власні значення з урахуванням приєднаних мас рідини. Вважаючи, що $c_k(t) = C_k \exp(i\Omega t)$, з використанням умов ортогональності отримаємо

$$K_S(\mathbf{U}_k) = \omega_k^2 M_S(\mathbf{U}_k), \quad (M_S(\mathbf{U}_k), \mathbf{U}_j) = \delta_{kj}, \quad (3.7)$$

де ω_l - частоти власних коливань елемента конструкції у повітрі.

Після виконання скалярного добутку рівняння (3.6) на функції \mathbf{U}_l визначаємо, що

$$\omega_l^2 \delta_{kl} C_l - \Omega^2 \left[C_l \delta_{kl} + \rho_l \sum_{k=1}^N C_k (\Gamma_k, \mathbf{U}_l) \right] = 0. \quad (3.8)$$

З (3.8) знаходимо частоти (Ω) та форми (коефіцієнти C_k) вільних коливань конструкції з урахуванням приєднаних мас рідини.

Якщо в рівнянні (3.6) $F \neq 0$ та $\rho_l \neq 0$, приходимо до розв'язання задачі розрахунку вимушених коливань елемента конструкції з урахуванням приєднаних мас рідини. Після

виконання скалярного добутку рівняння (3.6) на функції \mathbf{U}_l приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку у вигляді

$$\ddot{c}_k(t) \left[\delta_{kl} + \rho_l \sum_{k=1}^N (\Gamma_k, \mathbf{U}_l) \right] + \omega_k^2 \delta_{kl} c_k(t) = (F, \mathbf{U}_l), \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (3.9)$$

Для отримання однозначного розв'язку системи (3.9) необхідно сформулювати початкові умови. В подальшому обираємо нульові початкові умови, тобто вражаємо, що рух пластини в рідині почався із стану спокою.

Після розв'язання системи диференціальних рівнянь (3.9) знаходимо переміщення конструктивного елемента за формулою (3.1)

4 Вимушені коливання пластинки під дією гармонічного збудження.

Розглянуті коливання квадратної пластини $[0, a] \times [0, a]$ зі стороною $a = 1\text{ м}$ і товщиною $h = 0.003\text{ м}$, що знаходиться в рідині та піддана дії гармонічного навантаження

$$F = a_0 \cos \omega_0 t. \quad (4.1)$$

Механічні характеристики пластини та рідини є такими: модуль Юнга $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, густина пластини $\rho_1 = 7800$ кг/м³, густина рідини $\rho_2 = 7800$ кг/м³, границя плинності $\sigma_T = 650$ МПа.

Схематичне зображення пластини під дією зовнішнього навантаження подано на рис. 4.1 а).

Рівняння руху пластини має вигляд [19]

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P + F, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (4.2)$$

Вважаємо, що пластинка жорстко защемлена вздовж контуру. В [20] отримані такі форми коливань пластинки без урахування приєднаних мас рідини:

$$w_k(x, y) = w_{lm}(x, y) = \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (4.3)$$

Згідно з (3.1) в цьому випадку маємо

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) w_k(x, y), \quad (4.4)$$

де власні форми коливань $w_k(x, y)$ обчислювались за формулою (4.3). Вивчено залежність максимальної інтенсивності напружень σ_i від часу при різних параметрах збудження (4.1). Інтенсивність напружень обчислювалась за формулою [19]

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}, \quad (4.5)$$

де напруження визначені таким чином:

$$\sigma_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \sigma_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad \tau_{xy} = \frac{Eh}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.6)$$

На рис. 4.1 б) зображено графік інтенсивності напружень, яка визначена за першою формою коливань пластинки без врахування приєднаних мас рідини, тобто вважалось, що $l = m = 1$ в формулі (4.3). Зауважимо, що максимальне значення інтенсивності напружень приймає в точці $x_0 = y_0 = 0.5$, і це значення при обраних механічних характеристиках дорівнює $\sigma_{i \max} = 888.212$ МПа.

Зазначимо, що при обчисленні скалярних добутків в правій частині (3.9) з урахуванням вирізів (4.3) будемо мати

$$(F, \mathbf{U}_l) = 0, \quad l = 2, 3, 4. \quad (4.6)$$

Це дозволяє в першому наближенні обмежитись лише вивченням коливань за першою формою. Цій формі коливань відповідає власна частота, яка дорівнює 12,3 Гц [20].

Розглянуто коливання пластинки під дією гармонічного збудження при різних значеннях a_0 та ω_0 в формулі (4.1).

Досліджено залежність від часу максимальної інтенсивності напружень (4.5).

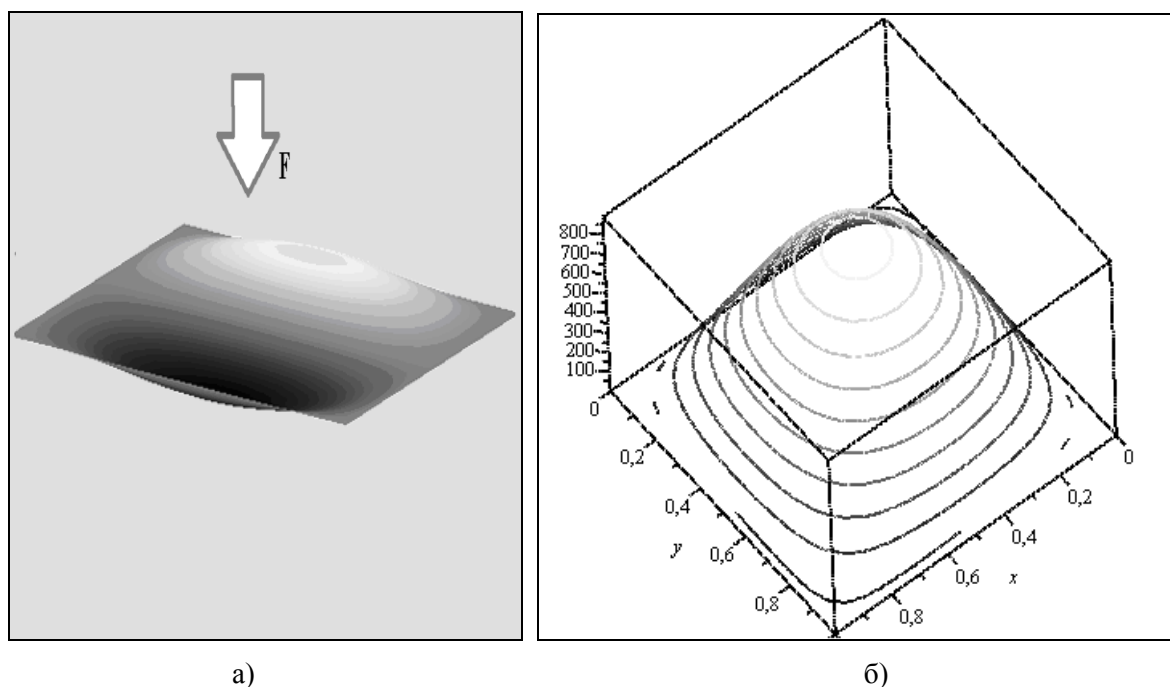


Рис.4.1. Розподіл інтенсивності напружень

На рис. 4.2 а) подано залежність максимальної інтенсивності напружень від часу при $a_0 = 0.1\text{МПа}$, $\omega_0 = 3\text{Гц}$ протягом 10 секунд, а на рис. 4.2 б) цю залежність побудовано при $a_0 = 0.1\text{МПа}$, $\omega_0 = 12.295\text{Гц}$ протягом 1000 секунд.

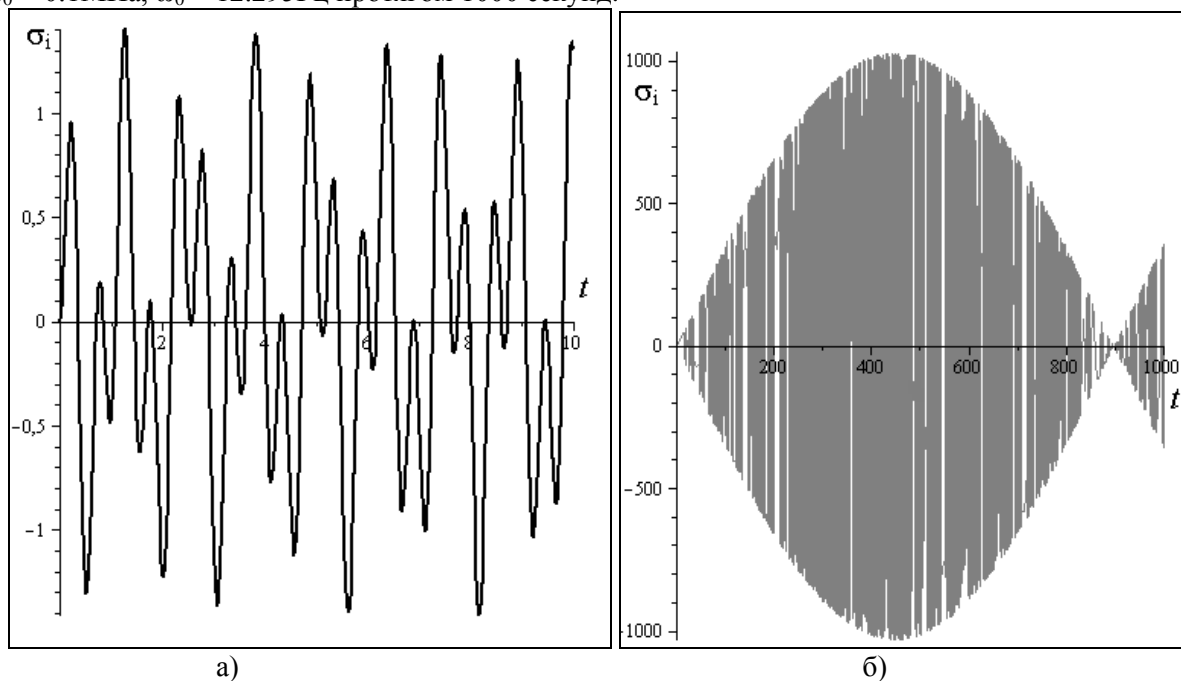


Рис.4.2 Залежність максимальної інтенсивності напружень σ_i від часу при різних частотах гармонічного навантаження

Частота $\omega_0 = 12.295\text{Гц}$ є близькою до частоти власних коливань пластини з урахуванням приєднаних мас рідини, тому при дії такого навантаження спостерігається режим биття. При цьому максимальна інтенсивність напружень при зміні за часом значно перевищує границю

плинності, що може призвести до руйнування конструктивного елементу. При частотах, відокремлених від власних, спостерігаються періодичні коливання з обмеженою амплітудою. Вихід на границю плинності при таких частотах здійснюється лише при $a_0 > 50$ МПа.

5 Вимушені коливання пластинки під дією імпульсного навантаження.

Розглянуто квадратну пластинку з тими ж механічними та геометричними характеристиками, що описані вище.

При цьому вважалось, що

$$F = Q_0 a(t), \quad (5.1)$$

де Q_0 є заданим розподіленим тиском,

$$a(t) = \begin{cases} 1, & t < T, \\ 0, & t \geq T. \end{cases} \quad (5.2)$$

час T є періодом дії імпульсного навантаження. На рис. 5.1а) зображено схематичний вигляд навантаження (5.1), (5.2).

З використанням методики [21] отримано такий розв'язок рівнянь (3.9):

$$c_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega_k^2} - \frac{1}{\Omega_k^2} \cos(\Omega_k t) & 0 \leq t \leq T \\ \frac{1}{\Omega_k^2} - \frac{1}{\Omega_k^2} \cos(\Omega_k t) - \frac{1}{\Omega_k^2} + \frac{1}{\Omega_k^2} \cos \Omega_k (t - T) & t > T \end{cases} \quad (5.3)$$

На рис. 5.1б) подано залежність максимальної інтенсивності напружень від часу протягом 40 сек при таких параметрах навантаження: $Q_0 = 0.1$ МПа, $T = 1.5$ сек.

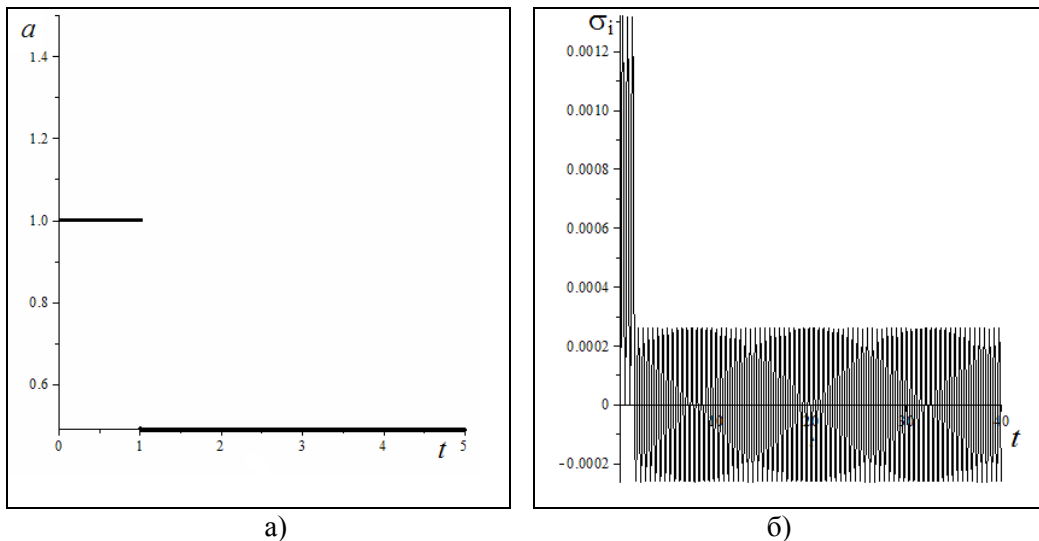


Рис. 5.1. Імпульсне навантаження та залежність максимальної інтенсивності напружень σ_i від часу

В цьому випадку максимальна інтенсивність напружень є значно меншою границі плинності, тому конструктивний елемент витримує таке навантаження.

6 Вимушені коливання пластинки під дією сейсмічного навантаження.

Розглянуто коливання квадратної пластинки з геометричними та механічними характеристиками, що надані в пункті 4, під дією сейсмічного навантаження [21]. При цьому припускалось, що

$$F = Q_0 a_s(t), \quad (6.1)$$

де Q_0 є заданим розподіленим тиском,

$$a_s(t) = \begin{cases} Q_0 \sin(12\pi t/5) \cos(2\pi t), & t < T, \\ 0, & t \geq T, \end{cases} \quad (6.2)$$

час T є періодом дії сейсмічного навантаження. На рис. 6.1а) зображено схематичний вигляд навантаження (6.1), (6.2).

Розв'язок рівнянь (3.9) отримано за методикою, описаною в [22]. На рис. 6.1б) зображено залежність максимальної інтенсивності напружень від часу при $Q_0=0.02$ Мпа. Це навантаження відповідає дії сейсмічного навантаження силою 5 балів [23].

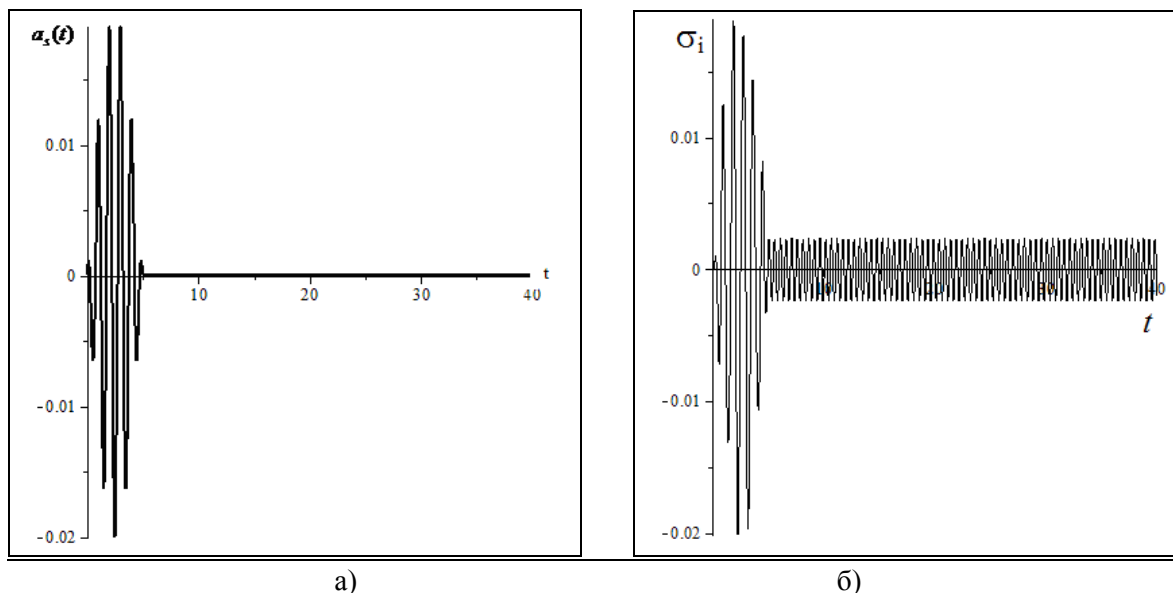


Рис. 6.1 Сейсмічне навантаження та залежність максимальної інтенсивності напружень σ_i від часу

Зауважимо, що при такому землетрусі не відбувається перевищення границі плинності, тобто конструктивний елемент може витримати вказане сейсмічне навантаження.

7 Висновки.

Розроблено метод розрахунку вимушених коливань конструктивних елементів, що взаємодіють з рідиною та знаходяться в умовах дії зовнішніх гармонічних, імпульсних або сейсмічних навантажень. Метод заснований на використанні розкладень невідомих переміщень елементів конструкцій в рідині в ряди за формами коливань цих елементів без урахування приєднаних мас рідини. Розглянуто коливання квадратної пружної, жорстко закріпленої пластинки, що здійснює коливання в рідині під дією різних зовнішніх навантажень. Отримані залежності зміни максимальної інтенсивності напружень від часу для різних параметрів навантаження. Це дає можливість оцінювати міцність конструктивного елементу та здійснювати вибір параметрів навантаження таким чином, щоб забезпечити надійність функціонування елементів конструкцій при вібраціях. В подальшому передбачається поширити запропонований підхід на аналіз стійкості та міцності лопатей поворотно-лопатевого гідротурбін з урахуванням демпфування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Проблемы машиностроения*. 2006. №1. С.105-118.
2. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 22 (4). 2017. pp. 867-881.

3. Ганчин Е.В., Ржевская И.Е., Стрельникова Е.А. Исследование динамических характеристик лопастей рабочих колес поворотных лопастных гидротурбин при взаимодействии с жидкостью. *Вісник Харківського національного університету*. 2009. № 847. С. 79-86.
4. Medvedovskaya T. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers / T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva. *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*. 2015. Vol. 1, No 1. P. 45–50. DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961.
5. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1). 2016. pp. 75-87.
6. Liang, C. C., Liao, C. C., Tai, Y. S. and Lai, W. H. The Free Vibration Analysis of Submerged Cantilever Plates, *Ocean Engineering*, 2001. Vol. 28, pp. 1225-1245.
7. L I Mogilevich, V S Popov, A A Popova and A V Christoforova. Mathematical Modeling of Hydroelastic Oscillations of the Stamp and the Plate, Resting on Pasternak Foundation *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 944 (2018). 012081.
8. Abdulkareem Abdulrazzaq Alhumdany, Muhannad Al-Waily, Mohammed Hussein Kadhim. Theoretical analysis of fundamental natural frequency with different boundary conditions of isotropic hyper composite plate. *International Journal of Energy and Environment (IJEE)*, Volume 7. Issue 3 .2016. pp. 229-240.
9. Yadykin, Y., Tenetov, V. and Levin, D. The Added Mass of a Flexible Plate Oscillating in a Fluid. *Journal of Fluids and Structures*. 2003. Vol. 17. pp. 115-123
10. Rezvani, S. S., Fazeli, H., Kiasat, M. S., and Haji-Hashemi, G. Effects of Added Mass Parameter on Fluid-Structure Natural Frequencies by using Analytical, Numerical and Experimental Methods. *Amirkabir Journal of Science and Research in Mechanical Engineering (ASJR-ME)*. (2015).Vol. 47. No. 2. pp. 61-70.
11. Khorshidi, K., Effect of Hydrostatic Pressure on Vibrating Rectangular Plates Coupled with Fluid. *Scientica Iranica Transaction of Civil Engineering*.2010. Vol. 17. No. 6. pp. 415-429.
12. Kerboua Y, Lakis A A, Thomas M, Marcouiller L 2008 Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid *Applied Mathematical Modelling* 32(12). pp 2570-2586.
13. Kerboua, Y., and Lakis, A. A., Dynamic Behavior of Plate Subjected to Flowing Fluid, *WSEAS Transaction of Fluid Mechanics*. 2008. Vol. 3, No. 2. pp. 101-115.
14. Chang, T. P., and Liu, M. F. On the Natural Frequency of a Rectangular Isotropic Plate in Contact with Fluid. *Journal of Sound and Vibration*. 2000. Vol. 236. No. 1. pp. 547-553.
15. Mogilevich L I, Popov V S and Popova A. A. Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017. 46(1). pp 12-19.
16. Chapman C J, Sorokin S. V. The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading. *Journal of Sound and Vibration*. 2005 281(3) pp 719-741.
17. О.В. Кендзера. Сейсмічна небезпека і сейсмічний захист в Україні. *Український географічний журнал*. 2015. No 3. С. 9-15.
18. Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в двумерных краевых задачах для уравнения Лапласа и уравнений Ламе. *Доп. НАН України*. 2001. №3. С. 27-31.
19. Биргер И.А., Шор Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1993. 640 с.
20. Москаленко Р.П., Пальчиков Р.Г., Стрельникова О.О. Метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь в задачах вільних та вимушених коливань лопатей гідротурбін при взаємодії з рідиною. *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Сер.: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. Харків : НТУ "ХПІ", 2019. № 8 (1333). С. 144-149.
21. Krutchenko D.V., Strelnikova E.A., Shuvalova Y.S. Discrete Singularities Method in Problems of Seismic and Impulse Impacts on Reservoirs. *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems»*. 2017. Т. 35. № 1. С. 31-37.
22. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*. 2019. V. 5. pp.31-41.
23. Оборудование атомных энергетических установок. Расчет на прочность при сейсмическом воздействии. РТМ 108.020.37-81.

REFERENCES

1. Eseleva E.V, Gnitko V.I., Strelnikova E.A., “Sobstvennyie kolebaniya sosudov vyisokogo davleniya pri vzaimodeystvii s zhidkostyu”. *Problemy mashinostroeniya*, N 1, S.105-118, 2006. [in Russian]
2. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. “Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles”. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 22 (4), pp.867-881, 2017.
3. Ganchin E.V., Rzhetskaya I.E., Strelnikova E.A. “Issledovanie dinamicheskikh harakteristik lopastej rabochih koles povorotno-lopastnyh gidroturbin pri vzaimodejstvii s zhidkostyu”. *Visnik Harkivskogo nacionalnogo universitetu*, № 847, S. 79-86, 2009. [in Russian]
4. T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva, “ Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers ” . *J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*, Vol. 1, No 1, P. 45–50, 2015. DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961.
5. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. “Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles”. *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), pp. 75-87, 2016.
6. Liang, C. C., Liao, C. C., Tai, Y. S. and Lai, W. H., 2001, The Free Vibration Analysis of Submerged Cantilever Plates, *Ocean Engineering*, Vol. 28, pp. 1225-1245.
7. Rezvani, S. S., Fazeli, H., Kiasat, M. S., and Haji-Hashemi, G., “Effects of Added Mass Parameter on Fluid-Structure Natural Frequencies by using Analytical, Numerical and Experimental Methods”. *Amirkabir Journal of Science and Research in Mechanical Engineering (ASJR-ME)*, Vol. 47, No. 2, pp. 61-70, (2015).
8. Abdulkareem Abdulrazzaq Alhumdany, Muhannad Al-Waily, Mohammed Hussein Kadhim, “Theoretical analysis of fundamental natural frequency with different boundary conditions of isotropic hyper composite plate”. *International Journal of Energy and Environment (IJEE)*, Volume 7, Issue 3, pp.229-240, 2016.
9. Yadykin, Y., Tenetov, V. and Levin, D., “ The Added Mass of a Flexible Plate Oscillating in a Fluid”. *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 17, pp. 115-123,2003.
10. Rezvani, S. S., Fazeli, H., Kiasat, M. S., and Haji-Hashemi, G., “Effects of Added Mass Parameter on Fluid-Structure Natural Frequencies by using Analytical, Numerical and Experimental Methods”. *Journal of Science and Research in Mechanical Engineering (ASJR-ME)*, Vol. 47, No. 2, pp. 61-70, (2015).
11. Khorshidi K., “Effect of Hydrostatic Pressure on Vibrating Rectangular Plates Coupled with Fluid ”. *Scientica Iranica Transaction of Civil Engineering*, Vol. 17, No. 6, pp. 415-429, (2010).
12. Kerboua Y, Lakis A A, Thomas M, Marcouiller L., “Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid ”. *Applied Mathematical Modelling*, 32(12) pp 2570-2586, 2008.
13. Kerboua, Y., and Lakis, A. A., “Dynamic Behavior of Plate Subjected to Flowing Fluid.” *WSEAS, Transaction of Fluid Mechanics*, Vol. 3, No. 2, pp. 101-115, (2008).
14. Chang, T. P., and Liu, M. F., “On the Natural Frequency of a Rectangular Isotropic Plate in Contact with Fluid.” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 236, No. 1, pp. 547-553, (2000).
15. Mogilevich L I, Popov V S and Popova A. A., “Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation.” *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 46(1) pp 12-19, 2017.
16. Chapman C J, Sorokin S. V., ”The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading”. *Journal of Sound and Vibration*, 281(3), pp 719-741, 2005.
17. O.V. Kendzera, “Sejsmichna nebezpeka i sejsmichnij zahist v Ukrayini”. *Ukrayinskij geografichnij zhurnal*, No 3, S. 9-15, 2015. [in Ukrainian]
18. Strelnikova E.A., Gipersingulyarnye integralnye uravneniya v dvumernyh kraevykh zadachah dlya uravneniya Laplasy i uravnenij Lame. *Dop. NAN Ukrayini*, №3. S. 27-31, 2001. [in Russian]
19. Birger I.A., Shor B.F., Iosilevich G.B. *Raschet na prochnost detalej mashin. M.: Mashinostroenie*, 1993, 640 s. [in Russian]
20. R. P. Moskalenko, R. G. Palchikov, O. O. Strelnikova, “Metod gipersingulyarnih integralnih rivnyan v zadachah vilnih ta vimushenih kolivan lopatej gidroturbin pri vzayemodiyi z

- ridinoyu.” *Visnik Nacionalnogo tehničnogo universitetu "HPI". Ser.: Matematichne modelyuvannya v tehnicі ta tehnologiyah*, Harkiv : NTU "HPI", № 8 (1333). S. 144-149, 2019. [in Ukrainian]
21. Krutchenko D.V., Strelnikova E.A., Shuvalova Y.S. Discrete Singularities Method in Problems of Seismic and Impulse Impacts on Reservoirs. *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems»*, T. 35, № 1, С. 31-37, 2017.
 22. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., “Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations”. *Journal of Mathematics and Statistical Science*, V. 5, pp.31-41, 2019.
 23. Oborudovanie atomnyh energeticheskikh ustanovok. Raschet na prochnost pri sejsmicheskom vozdeystvii. RTM 108.020.37-81. [in Russian]

Дегтярьов Кирило Георгійович – провідний інженер Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України; e-mail: kdeg89@gmail.com; orcid: 0000-0002-4486-2468.

Крютченко Денис Володимирович – аспірант Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України, телефон: +380932886753; e-mail: wollydenis@gmail.com; orcid 0000-0002-6804-6991.

Москаленко Роман Павлович – аспірант Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, факультет комп'ютерних наук. телефон: 050 598 7682; e-mail: rmpd2016@gmail.com; orcid: 0000-0002-5167-2793.

Пальчиков Роман Георгійович – аспірант Інституту проблем машинобудування НАН України імені А.М. Підгорного; e-mail: 19palchikovroman@gmail.com; orcid: 0000-0003-38-06-8708.

Дегтярев Кирилл Георгиевич – ведучий інженер Інституту проблем машиностроєння імені А.Н. Подгорного НАН України; e-mail: kdeg89@gmail.com; orcid: 0000-0002-4486-2468.

Крютченко Денис Владімірович – аспірант Інституту проблем машиностроєння імені А.Н. Подгорного НАН України, телефон: +380932886753; e-mail: wollydenis@gmail.com; orcid 0000-0002-6804-6991.

Москаленко Роман Павлович – аспірант Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, факультет комп'ютерних наук, телефон: 050 598 7682; e-mail: rmpd2016@gmail.com. orcid: 0000-0002-5167-2793.

Пальчиков Роман Георгиевич – аспірант Інституту проблем машиностроєння імені А.Н. Подгорного НАН України; e-mail: 19palchikovroman@gmail.com; orcid: 0000-0003-38-06-8708.

Degtyarev Kirill – Senior Engineer of A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems; e-mail: kdeg89@gmail.com; orcid: 0000-0002-4486-2468.

Kriutchenko Denys – Post-graduate of A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, phone: +380932886753; e-mail: wollydenis@gmail.com; orcid: 0000-0002-6804-6991.

Moskalenko Roman – Post-graduate of Karazin National University, Scholl of Computer Sciences, phone: 050 598 7682; e-mail: rmpd2016@gmail.com; orcid: 0000-0002-5167-2793.

Palchikov Roman – Post-graduate, A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, e-mail: 19palchikovroman@gmail.com; orcid: 0000-0003-38-06-8708.

УДК 532.5+51-7

Математическое моделирование и прогнозирование динамики речного русла участка реки Северский Донец

Н.Н. Кизилова, Н.Л. Рычак, А.А. Халин

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина**e-mail: n.kizilova@gmail.com*

Исследуется течение на участке реки Северский Донец на территории Харьковской области на основе данных многолетних измерений профиля русла с шагом 10 см. Геометрия участка русла на поверхности Земли определялась по гидрологическим картам, а профили восстанавливались сплайнами по данным измерений. Измерения показали вариабельность профиля в соответствии с изменением профиля дна и уровнем осадков. Разработана математическая модель, которая позволяет рассчитывать скорости потока, динамическое давление и вязкое трение, предсказывать эволюцию береговых линий русла, наличие застойных зон с медленной циркуляцией, прогнозировать динамику донных наносов и зарастание русла. Модель также позволяет планировать инженерно-гидрогеологические меры по предотвращению размыва и зарастания рек, улучшения циркуляции и повышения качества речных вод.

Ключевые слова: математическое моделирование, гидрогеология, речные русла, экология.

Досліджується течія на ділянці річки Сіверський Донець на території Харківської області на основі даних багаторічних вимірювань профілю русла з кроком 10 см. Геометрія досліджуваної ділянки русла на поверхні Землі визначалася по гідрологічним картками, а профілі поперечних перерізів відновлювалися сплайнами за результатами вимірювань. Аналіз результатів показав варіабельність профілю перерізів відповідно до зміни профілю дна і рівню опадів поточного року. Розроблено математичну модель, що описує параметри потоку в залежності від ухилу і профілю річкового русла. Модель дозволяє розраховувати швидкості потоку, динамічний тиск і в'язке тертя, передбачати еволюцію берегових ліній русла, наявність застійних зон з повільною циркуляцією, прогнозувати динаміку донних заметів і заростання русла. На основі тривимірної моделі течії води в руслі із заданою геометрією проведені чисельні розрахунки методом скінченних елементів. Розраховані швидкості течії і показано наявність відривних застійних зон з повільною циркуляцією, в яких прискорюється заростання русла і погіршення якості води. Розрахунки динамічного тиску і в'язкого тертя показали наявність ділянок з підвищеним тиском, яке може при тривалому впливі руйнувати берегову лінію, сприяти утворенню донних наносів, збільшенню площі застійних зон з повільною циркуляцією. Оскільки в таких випадках у річковій системі присутня система позитивних зворотних зв'язків, які викликають погіршення циркуляції і якості води та не можуть бути зупинені природним шляхом, а вимагають спеціальних інженерно-гідрогеологічних заходів. Розроблена модель дозволяє планувати різні конкретні заходи щодо запобігання розмиву і заростання річок, поліпшення циркуляції і підвищення якості річкових вод шляхом їх внесення у вихідну геометричну модель і кількісну оцінку викликаних ними змін гідродинамічних факторів, що впливають на еволюцію річкового русла.

Ключові слова: математичне моделювання, гідрогеологія, річкові русла, екологія.

The flow in the section of the Seversky Donets river in Kharkiv region is studied based on long-term measurements of the channel profile in a 10 cm increments. The geometry of the studied channel section on the Earth's surface has been determined by hydrological maps, and the cross-section profiles have been reconstructed by splines from the measurement results. The analysis of the results has revealed the profile variability in accordance with the change in the bottom sediments and the current year rainfall. A mathematical model describing the flow parameters in dependence on the slope and profile of the river channel has been developed. The model allows calculating flow velocities, dynamic pressure and viscous friction, predicting the evolution of coastal channel lines, the presence of stagnant zones with slow circulation, and predicting the dynamics of bottom drifts and channel overgrowing. Based on the three-dimensional flow of water in the channel with given geometry, numerical calculations by the finite element method are carried out. The flow rates are calculated and the presence of separated stagnant zones with slow circulation in which the channel overgrowing and water quality deterioration could be amplified is shown. Calculations of dynamic pressure and viscous friction shows the presence of areas with increased pressure which, in time, can ruin the riverbanks, contribute to the formation of bottom sediments, and increase the area of stagnant zones with slow circulation. Since there is a system of positive feedbacks in the river ecosystem, the resulting deterioration in circulation and water quality cannot be stopped naturally and require special engineering and hydrogeological measures. The developed model allows planning various specific measures to prevent river erosion and overgrowth, to improve circulation and water quality by introducing the changes into the original geometric model as well as quantifying the changes caused by hydrodynamic factors that affect the evolution of the river system.

Key words: mathematical modeling, hydrogeology, river channels, ecology.

1. Введение

Дискретные, континуальные и синтетические модели речных русел с учетом их геометрии, состава донных отложений, скорости течения воды, наличия поверхностного стока и др. параметров широко используются для расчета сноса придонных отложений и миграции русла, качества воды и переноса загрязнений, экологической экспертизы экосистемы и других практических задач [1-4].

Математическое моделирование и численные расчеты поля скоростей, завихренности, напряжений трения и других гидродинамических параметров позволяют оценить риски эрозии береговой линии, размывов дна, выявить участки с замедленными течениями, в которых вследствие недостаточной циркуляции воды будет происходить зарастание дна и ухудшение качества воды.

В данной работе приведены результаты математического моделирования и расчетов скорости движения воды, распределений давлений, трения и других гидродинамических параметров, способствующих миграции русла, его зарастанию и ухудшению качества воды.

2. Материалы и методы

Геометрия участка русла реки Северский Донец, расположенного на территории Харьковской области (Рис.1а,б), определялась по гидрогеологическим картам и данным Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) с разрешением 3¹.

Профили речного дна определялись путем осреднения данных в ходе полевых измерений вдоль четырех поперечных сечений (Рис.1а,б). Измерения проводились в первой декаде июня. При этом поперек русла от левого до правого берега протягивался канат с нанесенными с шагом 10 см метками. Лодка постепенно перемещалась вдоль каната, и глубина реки определялась около каждой метки с помощью грузила. Эволюция профилей дна в соответствующих сечениях показана на Рис.2а-г.

Измерялись также уклон вдоль русла и скорости течения реки вдоль серединной линии, вблизи левого и правого берегов. Была зафиксирована динамика изменений глубины и ширины реки, связанная с засушливым или дождливым летом соответственно, а также связанные с переносом наносов и зарастанием русла изменения профилей дна.



Рис. 1. Сегмент реки Северский Донец на спутниковом снимке (а) и географической карте (б).

¹ <https://www2.jpl.nasa.gov/srtm/>

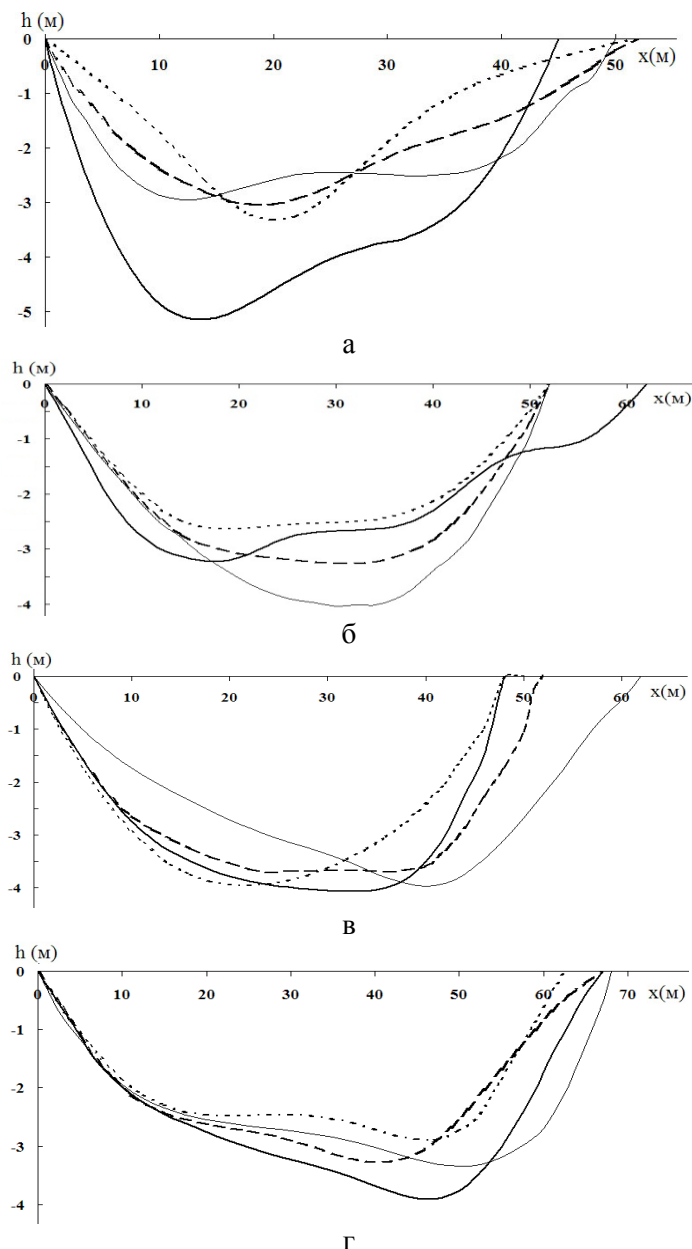


Рис.2. Профили исследуемого участка русла, измеренные в 2015-2018 гг. на участках 1(а), 2(б), 3(в), 4(г).

На всех профилях зафиксировано, что правый берег является более крутым, чем левый, в соответствии с действием силы Кориолиса в Северном полушарии, однако степень крутизны правого и пологости левого берегов изменяется в связи с эрозионными процессами и переносом донных отложений. Русло реки на исследованном участке извилистое; река дважды поворачивает в левую сторону и один раз – в правую сторону под углами $124.8^\circ, 116.7^\circ, 144.3^\circ$ соответственно. Следовательно, за счет инерции потока водная масса будет сноситься в сторону правого, правого и левого берега при трех соответствующих поворотах, вызывая дополнительный размыв соответствующих берегов и перенос донных отложений. Детальный ответ на вопрос о дальнейшей эволюции русла и зависимости этого процесса от уровня выпавших осадков и температуры воздуха, может быть дан с помощью математического моделирования течения речных вод в канале со сложной геометрией.

3. Математическая модель русловых потоков

Наиболее распространенными моделями речных русел являются одномерные модели [5], основанные на уравнении

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(\bar{q}) = q_c, \quad (1)$$

где $h = z + H + \frac{v^2}{2g}$ - динамический напор, v - скорость, g - ускорение свободного падения, $H(x)$ - глубина русла, z и x - вертикальная и продольная координаты, q_c - распределенные источники массы вдоль русла (притоки), $\bar{q} = -kK\sqrt{h}$ - поток, $k = H^{5/3}$ - проводимость сечения канала, $K = \sqrt{S}/m$ - трение на смоченной поверхности русла, $S = (\partial h / \partial x)^2 + (\partial h / \partial z)^2$ - уклон, m - коэффициент Маннинга.

Уравнение (1) достаточно хорошо описывает изменение скорости потока для слабоизвилистых рек, однако в рассматриваемом случае наличие нескольких последовательных разнонаправленных поворотов приводит к тому, что инерция потока и его снос в поперечном к течению направлении существенно влияют на гидродинамические параметры течения. Таким образом, необходимы расчеты на трехмерной модели с учетом реальной формы канала.

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости (воды) в открытом канале, форма которого соответствует оцифрованным берегам исследуемого участка Северского Донца, а смоченная поверхность восстанавливалась процедурой рендеринга по известным профилям в 4-х сечениях (Рис.1,2). Результат восстановления показан для профилей 2015 г. на Рис.3а.

Скорость и давление в потоке описывались уравнениями Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \text{div}(\bar{v}) &= 0, \\ \rho \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\nabla p + \mu \Delta \bar{v} + \rho \bar{g}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ρ и μ - плотность и вязкость жидкости, p - гидростатическое давление.

Граничные условия для уравнений (2) имеют вид

$$\bar{v}|_{\Gamma_1} = 0, \quad p|_{\Gamma_2} = p_{\text{atm}}, \quad (3)$$

где p_{atm} - атмосферное давление, Γ_1 и Γ_2 - смоченная и свободная поверхности речного русла соответственно.

Для произвольной поверхности канала Γ_1 система (2)-(3) может быть решена численно методом конечных элементов (МКЭ).

4. Численные расчеты и анализ результатов

По результатам оцифровки границ области Γ_2 для рассматриваемого участка реки Северский Донец была построена трехмерная геометрическая модель (Рис.3а) и однородная сетка. На Рис.2б показана сетка в одном из поперечных сечений русла, а на Рис.3в - на участке свободной поверхности. Общее число узлов и конечных элементов составило 3287240 и 2112328 соответственно. Выбранные значения определялись экспериментально путем получения mesh-независимого численного решения. Геометрия и сетка были построены в пакете AnSys 15.0 - версии популярного МКЭ-софта, которая является бесплатной для высших учебных заведений.

Характерные значения числа Рейнольдса для рассматриваемого случая $Re = 10^3 - 10^4$, поэтому были использованы модели как ламинарного, так и турбулентного течений (Spalart-Allmaras model) с численной схемой второго порядка и точностью расчетов 10^{-5} .

Результаты расчетов поля скоростей представлены на Рис.4а,б в виде линий тока на свободной поверхности, окрашенных в соответствии с величиной скорости. Хорошо видны участки ускоренного течения в наиболее узких поперечных сечениях русла, а также участки отрыва линий тока и областей с застойной вихревой циркуляцией вблизи расширенных зон русла. В силу низких значений скорости потока эти области являются наиболее вероятными для ускоренного зарастания различной водной растительностью и ухудшения качества воды. В соответствии с геофизическими данными [2-4], на участках с ускоряющимся течением происходит размыв дна и перенос донных отложений на участки с замедляющимся течением, что еще больше ухудшает циркуляцию и способствует зарастанию всего дна. На поворотах русла наблюдается снос ядра течения к одному из берегов, что приводит к размыванию береговой линии, что заметно как на виде сверху (Рис.4), так и в последовательных поперечных

сеченнях после поворотов русла (Рис.5). Рассчитанные значения скорости соответствуют данным измерений (Табл.1).

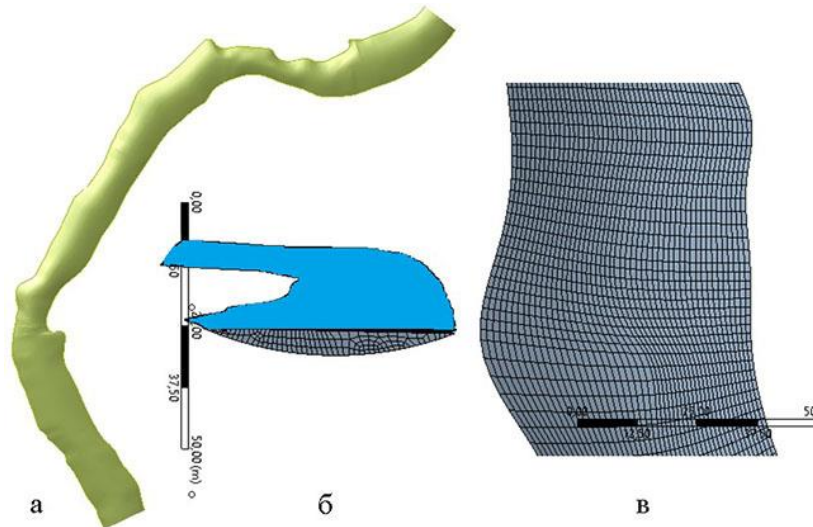


Рис.3. Трехмерная модель рассматриваемого речного русла (вид снизу) – а, сетка в поперечном сечении (вид сбоку) – б, сетка на участке свободной поверхности (вид сверху) – в.

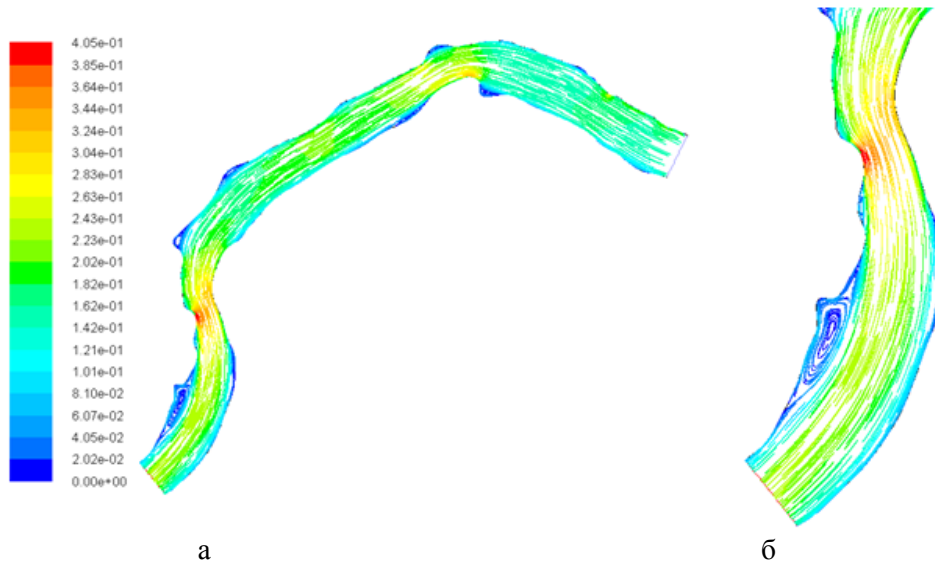
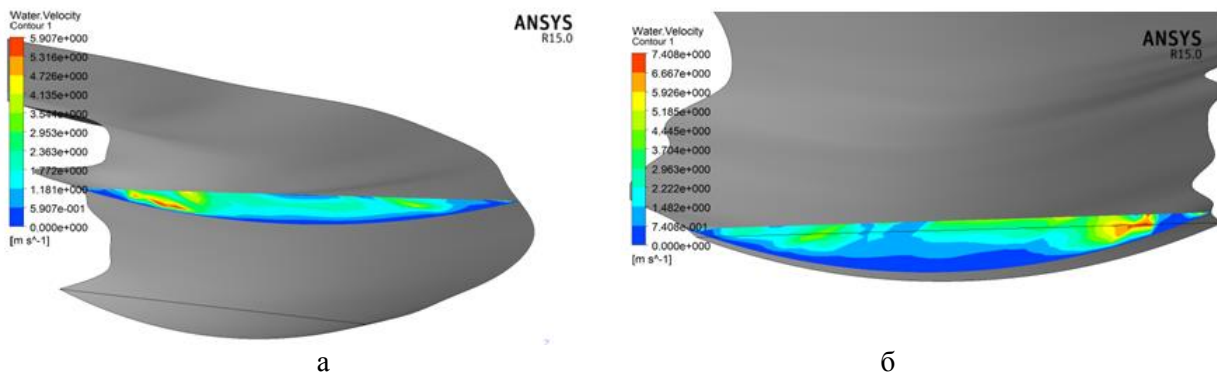
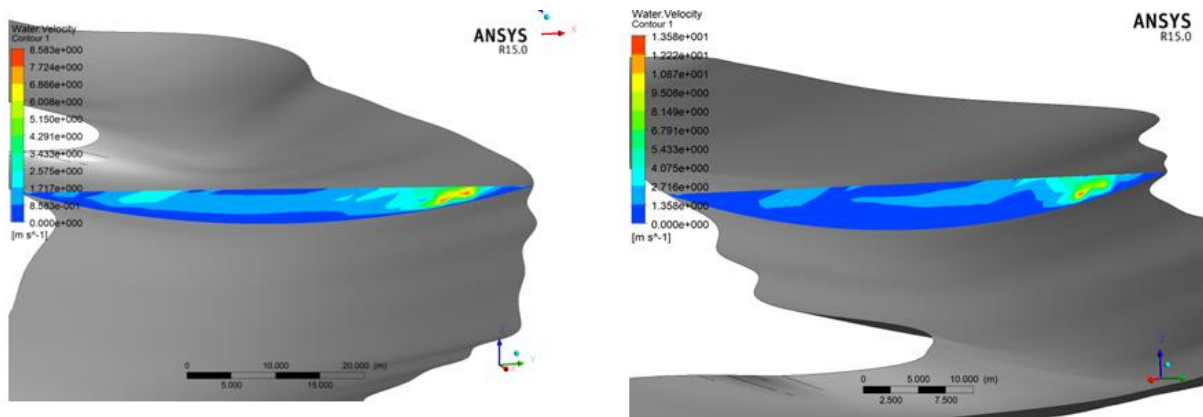


Рис.4. Линии тока на свободной поверхности рассматриваемого участка русла (а) и между сечениями 3 и 4 (б).





В Г
Рис.5. Контурные графики величины скорости в поперечных сечениях
1 (а), 2(б), 3 (в), 4 (г).

На Рис.6 представлены результаты расчетов напряжений трения на смоченной поверхности русла. На участках с резкими измерениями ширины русла, а также после поворотов отмечаются повышенные значения трения вплоть до $\sigma = 2.73$ Па, способные вызывать как эрозию береговой линии, так и перемещение донных отложений. Полученные численные результаты имеют один и тот же порядок значений при расчетах как на модели ламинарного течения в канале, так и модели Spalart-Allmaras турбулентного течения [5].

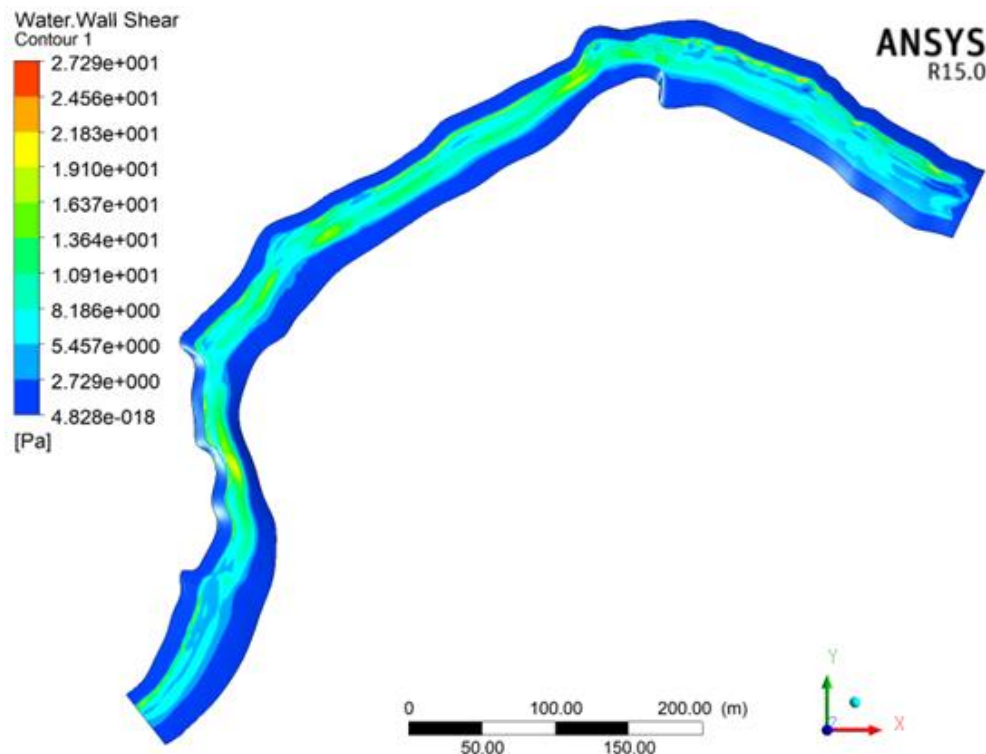


Рис.6. Контурный график напряжений трения на донной поверхности (вид сверху).

Валидация модели (2)-(3) проводилась путем сравнения величин скорости течения в трех точках (серединная линия, на расстоянии 20 см от левого и правого берега) 4-х сечений с профилями, соответствующими 2015-2018 гг., и данных измерений (Табл.1). Хорошее соответствие расчетных и измеренных величин подтверждает достоверность модели и возможность проводить количественную оценку результатов различных инженерных

гидрофизических сооружений по защите береговой линии и динамики эволюции русла и его пропускной способности методами system dynamics approach.

Табл.1. Величины скорости течения v (м/с) у поверхности воды на разных участках сечений 1-4; значения слева и справа от косой черты соответствуют рассчитанным и измеренным значениям.

	2015 г.	2016 г.	2017 г.	2018 г.
Сечение 1				
у левого берега	0.085/0.09	0.096/0.11	0.098/0.10	0.090/0.09
серединная линия	0.382/0.40	0.454/0.42	0.334/0.35	0.431/0.38
у правого берега	0.126/0.14	0.141/0.13	0.139/0.15	0.133/0.12
Сечение 2				
у левого берега	0.283/0.30	0.322/0.35	0.397/0.40	0.303/0.35
серединная линия	0.554/0.50	0.584/0.55	0.612/0.55	0.488/0.45
у правого берега	0.332/0.35	0.478/0.45	0.528/0.50	0.384/0.40
Сечение 3				
у левого берега	0.078/0.10	0.088/0.12	0.092/0.12	0.075/0.08
серединная линия	0.354/0.30	0.403/0.45	0.392/0.40	0.498/0.45
у правого берега	0.142/0.15	0.128/0.14	0.155/0.14	0.125/0.13
Сечение 4				
у левого берега	0.075/0.08	0.082/0.10	0.089/0.11	0.084/0.09
серединная линия	0.332/0.35	0.396/0.40	0.427/0.45	0.406/0.45
у правого берега	0.136/0.12	0.139/0.15	0.122/0.14	0.120/0.13

5. Выводы

В работе построена математическая модель динамики речного русла на примере участка реки Северский Донец, которая позволяет определять зоны, подверженные эрозии или зарастанию вследствие повышенных или пониженных скоростей течения, а также переносу донных отложений за счет касательных напряжений в придонных зонах. В дальнейшем модель будет использована для расчетов эволюции русла и эффективности инженерных гидрофизических мероприятий по улучшению циркуляции и качества воды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Thermo-Hydro-Mechanical-Chemical Processes in Porous Media: Benchmarks and Examples. Ed. By O. Kolditz, U.-J. Goerke, H. Shao, W. Wang. Springer Science Business Media. 2012. 399 p.
2. Гришанин К.В. Гидравлическое сопротивление естественных русел. СПб: Гидрометеоздат, 1992. 183с.
3. Латипов К.Ш., Шаюсупов М. О русловых потоках с переменным расходом. Ташкент: Изд-во „ФАН“, 1979. 192с.
4. Боровков В.С. Динамика русловых потоков на урбанизированных территориях. Ленинград: Гидрометеоздат, 1989. 286с.
5. Khalin A.A., Kizilova N.N., Rychak N.L. On numerical modeling of the river flows with validation on the measurement data. 3rd Intern. Conf. *Differential equations and Control Theory: Book of Abstracts*. Kharkiv, Ukraine, 2018. P.28-29.

REFERENCES

1. O. Kolditz, U.-J. Goerke, H. Shao, W. Wang (eds.), *Thermo-Hydro-Mechanical-Chemical Processes in Porous Media: Benchmarks and Examples*. Springer Science Business Media, 2012.
2. K. V. Grishanin, *Hydraulicheskoye soprotivleniye jestestvennyh rusel*. SPb: Hydrometeoizdat, 1992. [in Russian]
3. K.Sh. Latypov, M.O. Shajusupov, *O ruslovyh potokah s peremennym rashodom*. Tashkent: FAN, 1979. [in Russian]

4. V.S. Borovkov, *Dynamika ruslovykh potokov na urbanizirovannykh territorijah*. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1989. [in Russian]
5. A.A. Khalin, N.N. Kizilova, N.L. Rychak, "On numerical modeling of the river flows with validation on the measurement data", *3rd Intern. Conf. "Differential equations and Control Theory"*, *Book of Abstracts*, Kharkiv, 28-29, 2018.

Кизилова Наталья Николаевна - доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики, Харьковского национального университета имени В.Н. Каразіна, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Кізілова Наталія Миколаївна – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Kizilova Natalya M. - DSc, professor of the Department of Applied Mathematics, V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Рычак Наталия Львовна – кандидат географических наук, доцент кафедры экологии и неоекологии, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразіна, площадь Свободы, 6, Харьков – 22, Украина, 61022; e-mail: rychak@ukr.net ; ORCID: 0000-0003-1620-3059.

Ричак Наталія Львівна – кандидат географічних наук, доцент кафедри екології та неоекології, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків 22, Україна, 61022; e-mail: rychak@ukr.net ; ORCID: 0000-0003-1620-3059.

Rychak Nataliya L. – Ph.D., Associate Professor of the Department of Ecology and Neoeology, V.N. Karazin Kharkiv National University, 6 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; ; e-mail: rychak@ukr.net ; ORCID: 0000-0003-1620-3059.

Халин Анатолий Андреевич – студент Харьковского национального университета имени В.Н. Каразіна, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: khalinx21@gmail.com; ORCID: 0000-0002-3828-5086.

Халін Анатолій Андрійович – студент Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: khalinx21@gmail.com; ORCID: 0000-0002-3828-5086.

Khalin Anatoly A. – student of V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; e-mail: khalinx21@gmail.com; ORCID: 0000-0002-3828-5086.

УДК 519.6

Liquid oscillation in a cylindrical-conical shell under the action of vertical and horizontal excitation

¹V. Y. Kylynyk, ²D. V. Kriutchenko, ²Y. V. Naumenko¹V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine²A. Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences, vul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine;
email:vladakylynyk@gmail.com;

Vibrations of an ideal incompressible fluid in shells of revolution have been considered. The shells of revolution under consideration include cylindrical and conical parts. It is assumed that the shell is subjected to vertical and horizontal excitations. The liquid in the shells is supposed to be an ideal and incompressible one. The fluid flow is the irrotational. Therefore the velocity potential that satisfies the Laplace equation exists. The non-penetration conditions are applied to the wetted surfaces of the shell and the kinematic and dynamic conditions on the free surface have been considered. The liquid pressure as the function of the velocity potential is defined using the Bernoulli equation. The problem of determining the fluid pressure is reduced to solving a singular integral equation. The numerical solution of the equation has been obtained by the method of discrete singularities. The method of simulating the free and forced oscillations of the fluid in the shells of revolution has been developed.

Key words: compound shells of revolution, ideal incompressible fluid, methods of boundary elements and discrete singularities, frequencies and modes of vibrations.

Розглядаються коливання ідеальної нестисливої рідини в оболонках обертання. Рух рідини являється безвихровим, і розглядаються лише невеликі коливання цієї рідини (лінійна теорія). Оболонки включають циліндричну та конічну частини. Передбачається, що оболонка піддається вертикальним та горизонтальним збудженням. Сформульовані граничні умови для розв'язання рівняння Лапласа. На змоченій поверхні оболонки застосовуються умови непротікання, а на вільній поверхні розглядаються кінематичні та динамічні умови. Існує потенціал швидкості, який задовольняє рівнянню Лапласа. Тиск рідини як функція потенціалу швидкості визначається за допомогою лінеаризованого рівняння Бернуллі для потенційного потоку. Проблема визначення тиску рідини зводиться до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння. Числове рішення цього рівняння отримано за допомогою метода дискретних особливостей. Ядра інтегральних рівнянь містять повні еліптичні інтеграли першого та другого виду. Еліптичний інтеграл другого виду обчислюється за допомогою стандартної квадратичної формули Гаусса. Для еліптичного інтеграла першого виду застосовується підхідна основа на характерні властивості середнього арифметичного геометричного значення AGM. Зовнішні інтеграли мають які мають логарифмічну особливість обчислюються за допомогою спеціальної квадратурної формули Гаусса. Отримано незв'язану систему диференціальних рівнянь Матє другого порядку. Розроблено метод дослідження вільних і вимушених коливань рідини в оболонках обертання, заснований на використанні методу граничних інтегральних рівнянь та розкладу ряду Фур'є. Аналіз результатів показав, що спостерігається явище параметричного резонансу. Розглянуто сумарний вплив вертикальних і горизонтальних збуджень.

Ключові слова: складені оболонки обертання, ідеальна нестислива рідина, методи граничних елементів та дискретні особливості, частоти та форми коливань.

Рассматриваются колебания идеальной несжимаемой жидкости в оболочках вращения. Эти оболочки состоят из цилиндрической и конической частей. Предполагается, что оболочка подвергается вертикальному и горизонтальному возбуждению. Жидкость в оболочках рассматривается идеальной и несжимаемая. Ее движение в оболочке предполагается безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей, который удовлетворяет уравнению Лапласа. На смоченной поверхности оболочки задается условие непротекания, а на свободной поверхности рассматриваются кинематические и динамические условия. Давление жидкости как функция потенциала скорости определяется с помощью уравнения Бернуллі. Проблема определения давления жидкости сводится к решению сингулярного интегрального уравнения. Численное решение этого уравнения осуществляется с помощью метода дискретных особенностей. Разработан метод расчета свободных и вынужденных колебаний жидкости в оболочках вращения.

Ключевые слова: составные оболочки вращения, идеальная несжимаемая жидкость, методы граничных элементов и дискретных особенностей, частоты и формы колебаний.

1. Introduction

Shell structures for storage and transportation of fluid are the subject of numerous scientific researches. These shell structures are important for power plants, pumps, columns of oil evaporators, and other industrial constructions. There are a large number of various strength and vibration problems for shell structures that have been examined in recent decades.

The overview of scientific works has shown that many articles are focused on the problem of intense liquid sloshing in containers and fuel tanks. The overview on the problem of fluid splashing in cylindrical, conical and spherical reservoirs is presented in the works of R. A. Ibrahim [1, 2]. On the other hand, shells consisting of cylindrical and conical parts have received less attention in the scientific literature although such thin-walled structures are widely used in various installations. A review of researches on this topic [2, 3] shows that the dynamic characteristics of the reservoirs are significantly influenced by fluid sloshing and oscillations of the elastic walls. Free and forced oscillations of cylindrical reservoirs with a liquid are examined in [4-7]. It should be noted that the majority of studies do not take into account the impact of the force of gravity causing sloshing.

2. Formulation of the problem.

The problem of oscillation of a fluid in a compound rotation shell having cylindrical and conical parts has been considered. The moistened part of the surface of the shell is denoted as S_1 and the free surface as S_0 . Furthermore, it is suggested that the Cartesian coordinate system $Oxyz$ is bound to the shell, the free surface coincided with the plane $z = H = H_1 + H_2$ at state of rest (Fig. 1).

We assume that H_1 is the length of the cylindrical part, and H_2 is the height of the conical part, R_1 and R_2 are the radii of the lower and upper parts of the shell, Fig. 2.1.

The mathematical model for the fluid-occupied region is based on the following hypotheses: fluid is incompressible and non-dissipative, fluid motion is non-vortex, and only small fluctuations are considered (linear theory). Therefore, we could enter the scalar potential of velocities $\Phi(x, y, z, t)$ which satisfy the Laplace equation. The fluid pressure $p = p(x, y, z, t)$ which acts on the wetted surface is obtained from the linearized Bernoulli equation for the potential flux

$$p - p_0 = \rho_l \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + x a_x(t) + z(g + a_z(t)) \right], \quad (2.1)$$

where g is gravitational acceleration, z is vertical coordinate of the point in the fluid, ρ_l is a density of fluid, p_0 is an atmospheric pressure, $a_z(t) = a_0 \cos \omega t$ is a vertical acceleration of the excitatory force, $a_x(t) = a_1 \cos \omega t$ is a horizontal acceleration of the excitatory force, a_0 is an amplitude of the forced influence.

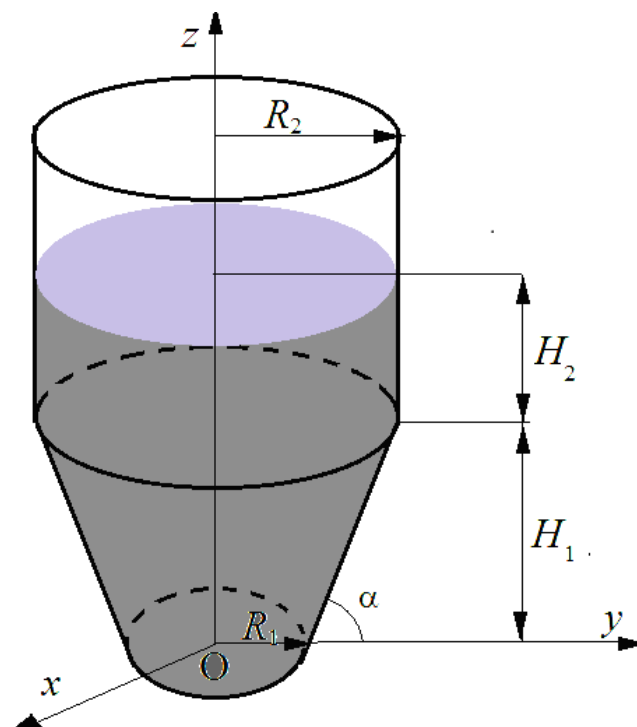


Figure 2.1. Shell rotation with fluid and the forms of oscillations of free surface

It should be noted that the assumption of flow potential is quite natural since, according to Kelvin's theorem, if the motion of an ideal incompressible fluid is potential at an initial moment, it will remain potential throughout the next period of motion.

First of all let us consider the problem of the shell free oscillations. We have formulated the boundary conditions for solving the Laplace equation. On the wetted surfaces of the shell, the boundary impermeability condition has been set [8]. The following boundary conditions have to be satisfied on the free surface of the liquid:

$$p - p_0|_{S_0} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

where \mathbf{n} is a unit outer normal to the surface S_0 . Function ζ describes the shape and position of the free surface. The first of these conditions is dynamic one and states that the pressure on the liquid surface equals atmospheric pressure. The second condition is kinematic and means that points on the free surface at the initial moment of motion remain on it thereafter.

Having made the transformations at the specified boundary conditions, similar to [8] to find the velocity potential in the problem of free oscillations of a liquid, we have the following boundary value problem:

$$\Delta \Phi = 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}|_{S_0} + g \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}|_{S_0} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}|_{S_1} = 0. \quad (2.2)$$

Here \mathbf{n} is an outer unit normal to the surface under consideration.

In order to fulfill the conditions of solvability of the boundary-value problem, the Neumann condition must be satisfied [8]:

$$\int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0.$$

Thus, a mixed boundary value problem for the Laplace equation is formulated.

3. The main research material

Consider the potential Φ in representation of the series.

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_k. \quad (3.1)$$

The modes φ_k are solutions of boundary-value problem (2.2) which, according to [3, 8], becomes the problem of eigenvalues. To define functions φ_k , we use the direct formulation of the boundary element method. The main integral relation is presented in the form [9]

$$2\pi\Phi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} dS - \iint_S \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} dS, S = S_0 \cup S_1,$$

where $S = S_1 \cup S_0$; points P and P_0 belong to the surface S . $|P - P_0|$ denote the Cartesian distance between points P and P_0 . Functions Φ , which is defined on the surface S_1 , is the pressure on the wetted surface, and the function $= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}$, that is defined on S_0 , is a flow. Using boundary conditions

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}|_{S_0} + g \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}|_{S_0} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}|_{S_1} = 0$$

and assuming that $\Phi(x, y, z, t) = \exp(i\chi t) \varphi(x, y, z, t)$, we obtain a system of singular integral equations in the form [7,10]

$$\begin{cases} 2\pi\varphi + \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P - P_0|} \right) dS - \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{|P - P_0|} dS + \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|P - P_0|} \right) dS = 0, \\ - \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P - P_0|} \right) dS - 2\pi\varphi_0 \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{|P - P_0|} dS = 0. \end{cases}$$

where φ_0 is value of the potential at the surface S_0 , φ is value of the potential at the surface S_1 . The numerical solution of the obtained system of singular integral equations is carried out by the method of discrete singularities. In [6] it is shown that the kernels of integral equations contain complete elliptic integrals of the 1st and 2nd kinds. Since the 2nd-order elliptic integral is a regular function, the standard Gaussian quadratic formula is used for the calculation. An approach base on the characteristic properties of the mean arithmetic geometric value of AGM (a, b), [11] is applied to the elliptic integral of the first kind. External integrals have a logarithmic feature. For their calculating the special Gaussian quadrature formulas [9] are used. The developed method of discrete singularities [12] is applied for the analysis of free and forced vibrations of shell structures.

For solving the forced oscillation problem we consider the Bernoulli equation (2.1) on a free surface. We represent the velocity potential in form (3.1), and write the function describing the position of the free surface as follows:

$$\zeta = \sum_{k=1}^M d_k(t) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}}. \quad (3.2)$$

The functions φ_k are modes of free fluid oscillation in a rigid tank. They are obtained by solving boundary-value problem (2.2). We substitute expressions (3.1) and (3.2) into the Bernoulli integral (2.1), taking into account that

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_k|_{s_0} \quad (3.3)$$

and receive the relation

$$\sum_{k=1}^M \ddot{d}_k \varphi_k + \sum_{k=1}^M \chi_k^2 d_k \varphi_k \left(1 + \frac{a_z(t)}{g}\right) + x a_x(t) = 0 \quad (3.4)$$

The values χ_k are the frequencies of free oscillation of the fluid in the rigid tank. It should be noted that according to [7, 10], the frequencies and modes of oscillations of the fluid are considered to correspond to certain harmonics, it is also assumed that the velocity potential and the function describing the level of lifting of the free surface. The formulas are presented below

$$\Phi = \sum_{\alpha=0}^N \cos \alpha \theta \sum_{k=1}^M \dot{d}_{\alpha k}(t) \varphi_{\alpha k}(r, z), \quad \zeta = \frac{1}{g} \sum_{\alpha=0}^N \cos \alpha \theta \sum_{k=1}^M \chi_{\alpha k}^2 d_{\alpha k}(t) \varphi_{\alpha k}(r, 0) \quad (3.5)$$

In equality (3.5) the wave number ζ characterizes the harmonic number, or the number of nodal diameters [7, 10].

Of especial importance is a value $\alpha = 0$, which determines the axisymmetric fluctuations of the fluid in the rigid reservoir, as well as $\alpha = 1$ which corresponds to antisymmetric oscillations.

Let us find the scalar product of equality (3.4) on the function $\varphi_l(l = \overline{1, M})$ using orthogonality of eigenmodes. We obtain a non-coupled system of 2nd order Mathieu differential equations:

$$\ddot{d}_k + \chi_k^2 \left(1 + \frac{a_z(t)}{g}\right) d_k = -a_x(t)(x, \varphi_k) \quad (3.6)$$

To obtain a solution to the system (3.6), the initial conditions must be set. We use hereinafter

$$\dot{d}_1(0) = 0.05, \dot{d}_k(0) = 0.0, k = \overline{2, M}, d_k(0) = 0, k = \overline{1, M}.$$

4. Numerical results

The liquid vibrations in the cylindrical-conical shell are considered. Suppose that $R_1 = H_1 = H_2 = 1$ m and $R_2 = 1$ m. Let horizontal and vertical accelerations be $a_x = a_1 \cos \omega_x t$, $a_z = a_2 \cos \omega_z t$. Time-histories of free surface elevation at different loadings are shown in Fig. 4.1-4.4. Hereinafter the dot points correspond to horizontal excitations ($a_1 = 0.1$, $a_2 = 0$), dash lines correspond to vertical excitations ($a_1 = 0$, $a_2 = 1.8$), solid lines in Fig. 4.1 and 4.3 correspond to the free surface elevation due to simultaneous action of vertical and horizontal excitations.

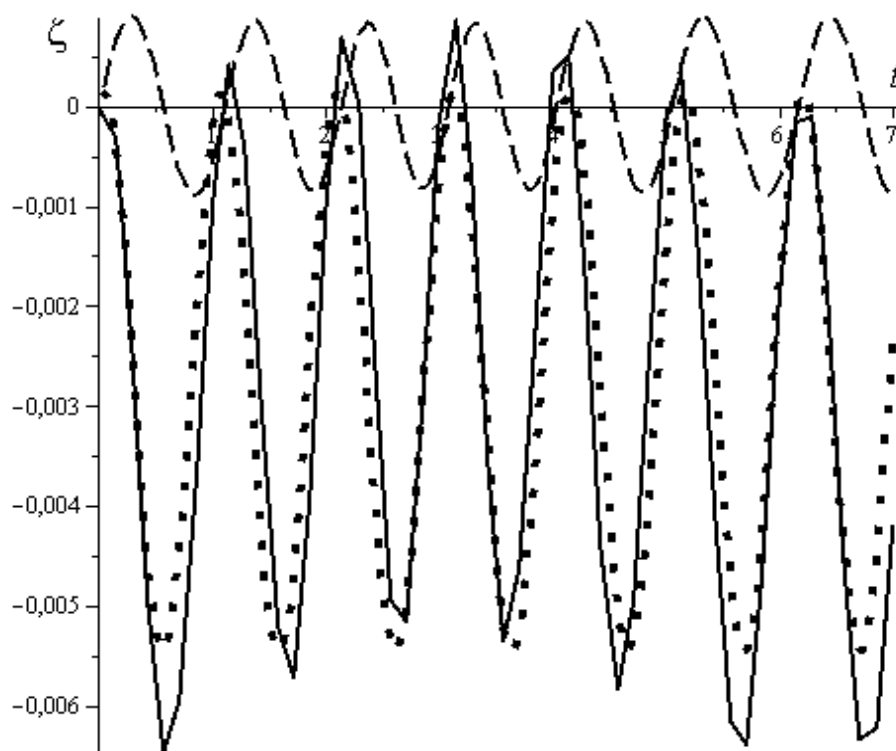


Figure 4.1. Time- histories of free surface elevation at different loadings, $\omega = 6.13\text{Hz}$, $\omega_z = 1.0\text{Hz}$, $\omega_x = 0.012\text{Hz}$.

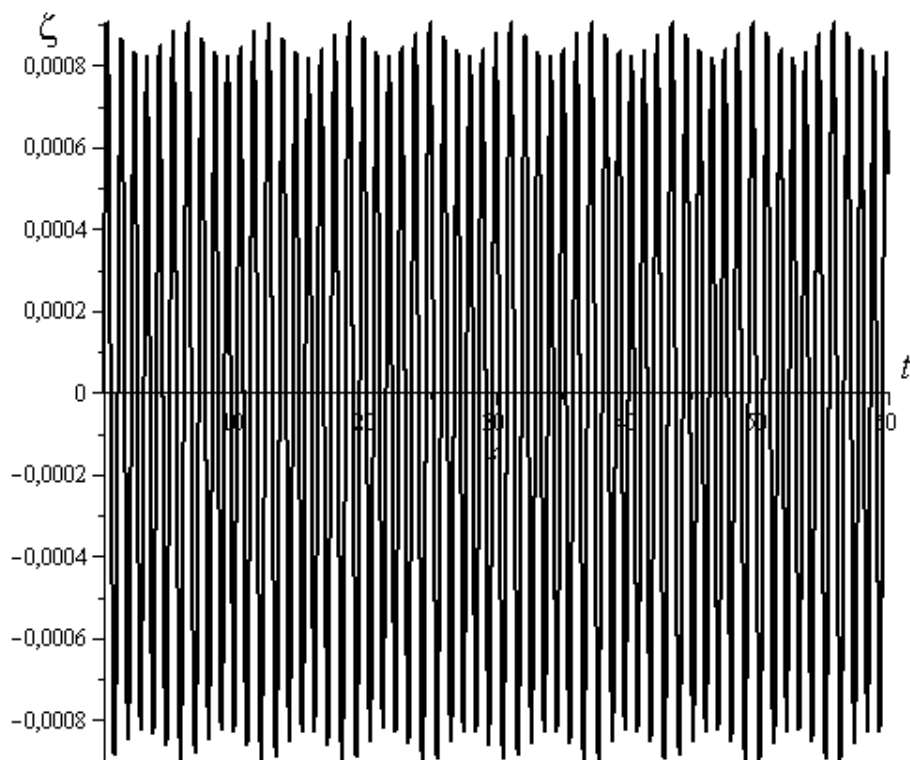


Figure 4.2. Time- history of free surface elevation at vertical loading, $\omega = 6.13\text{Hz}$, $\omega_z = 1.0\text{Hz}$, $a_2 = 1.8$.

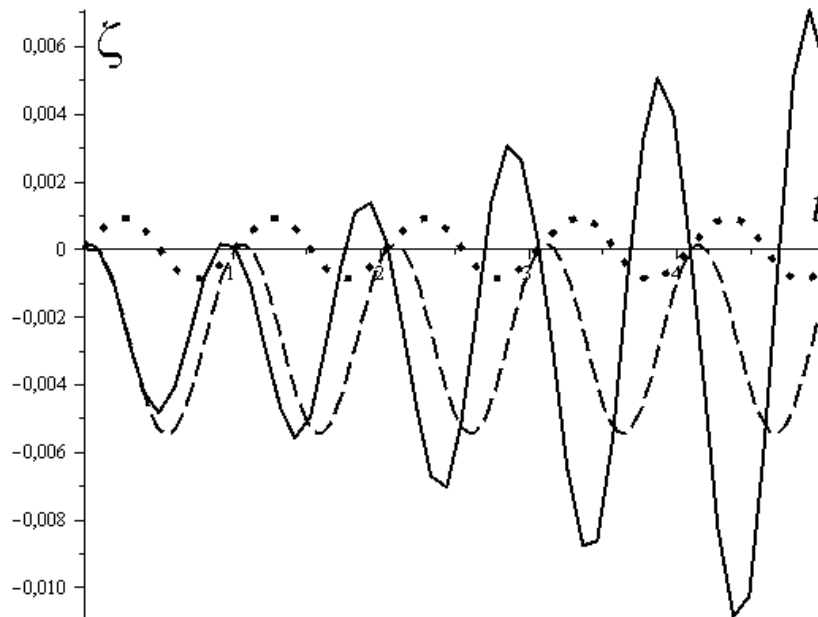


Figure 4.3. Time- histories of free surface elevation at different loadings, $\omega = 6.13\text{Hz}$, $\omega_z = 6.13\text{Hz}$, $\omega_x = 0.012\text{Hz}$, $a_1 = 0.1$; $a_2 = 1.8$.

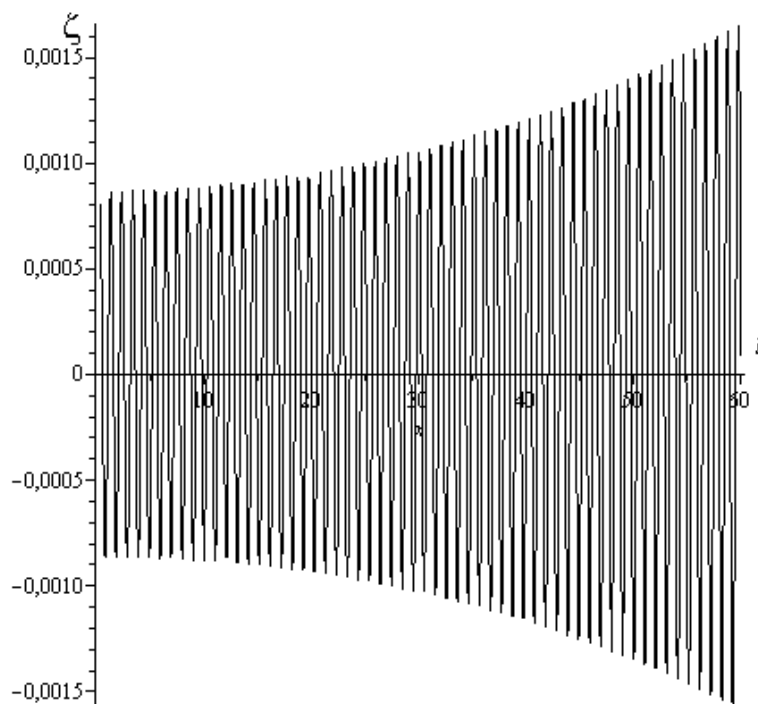


Figure 4.4. Time- history of free surface elevation at vertical loading, $\omega = 6.13\text{Hz}$, $\omega_z = 6.13\text{Hz}$, $a_2 = 1.8$.

The results depicted in Fig. 4.3, 4.4 demonstrate that the parameters of sloshing process correspond to the region of instability.

5. Conclusions

The method of estimation of forced vibrations of liquid in the shells of rotation based on the use of the method of boundary integral equations and the Fourier series decomposition has been developed. The integral equations have been solved using the method of discrete singularities. The analysis of the results has shown that the phenomenon of parametric resonance takes place. The joint effect of vertical and horizontal excitations has been considered.

REFERENCES

1. R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuck, T. Ikeda., "Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics". *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 54, No. 2, pp. 133-199, 2001.
2. R.A. Ibrahim. *Liquid Sloshing Dynamics: textbook*. Cambridge University Press, New York, 2005, 948 p.
3. Eseleva E., Gnitko V., Strelnikova E., "Natural oscillations of pressure vessels during interaction with a liquid". *Prob. mechanical engineering*, №1, pp.105-118, 2006. [in Russian]
4. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E." Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles". *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), pp. 75-87, 2016.
5. Gavrilyuk, I., M. Hermann, Lukovsky I., Solodun O., Timokha, A. "Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks". *Engineering Computations*, Vol. 25 Iss: 6, pp.518 – 540, 2008.
6. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. "Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles". *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 22 (4), pp.867-881, 2017.
7. Gnitko, V., Degtyarev, K., Naumenko, V., Strelnikova, E. "Coupled BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks". *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, Vol.6, No.6, pp. 976-988, 2018.
8. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. "Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles". *J. Modern Technology & Engineering*, Vol.3, No.1, pp.15-52, 2018.
9. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F & Wrobel, L.C., *Boundary element techniques: theory and applications in engineering: textbook*. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984, 464 p.
10. Kylynnyk V. Yu., Gnitko V. I., Naumenko Yu. V., Rozova L. V. "Numerical simulation of fluid oscillations in composed shells of rotation at overloads". *Applied Mathematical Modeling*, N 1., pp. 115-121, 2018. [in Ukrainian]
11. David A. Cox. "The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss". *L'Enseignement Mathématique*, t. 30, pp. 275 -330, 1984.
12. Yu. V. Gandel', T. S. Polyanskaya, "Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating Problems". *Differ. Equ*, 39:9, pp.1295–1307, 2003.

ЛІТЕРАТУРА

1. R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuck, T. Ikeda. Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics. *Applied Mechanics Reviews*. 2001. Vol. 54, No. 2. pp. 133-199.
2. R.A. Ibrahim. *Liquid Sloshing Dynamics: textbook*. Cambridge University Press, New York, 2005. 948 p.
3. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Пробл. машиностроения*. 2006. №1. С.105-118.
4. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*. 2016. 17(1). pp. 75-87.
5. Gavrilyuk, I., M. Hermann, Lukovsky I., Solodun O., Timokha, A. Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks. *Engineering Computations*. 2008. Vol. 25, Iss: 6. pp.518 – 540.
6. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles, *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017. 22 (4). pp.867-881.
7. Gnitko, V., Degtyarev, K., Naumenko, V., Strelnikova, E. Coupled BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. – *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018. Vol.6, No.6. pp. 976-988.

8. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles, *J. Modern Technology & Engineering*. 2018. Vol.3, No.1. pp.15-52.
9. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F & Wrobel, L.C., *Boundary element techniques: theory and applications in engineering:textbook*. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984. 464 p.
10. Килинник В.Ю., Гнітько В.І., Науменко Ю.В., Розова Л.В. Чисельне моделювання коливань рідини в складених оболонках обертання при перевантаженнях. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. N 1. S. 115-121.
11. David A. Cox. The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss.*L'Enseignement Mathématique*. 1984. t. 30. pp. 275 -330.
12. Yu. V. Gandel', T. S. Polyanskaya, Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating Problems, *Differ. Equ.* 2003. 39:9 pp.1295–1307.

Кылынник Влада Юріївна - bachelor, student of V. N. Karazin Kharkiv National University; 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine, 61022 ; e-mail: vladakylunnyk@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0631-9093.

Kriutchenko Denis Vladimirovich –MSc, post graduate, A.Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, ul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046, e-mail: wollydenis@gmail.com; ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Naumenko Yury Vytalievich – MSc, post graduate, A.Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, ul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046, e-mail: strelea@ukr.net; ORCID: 0000-0001-9058-6727.

Килинник Влада Юріївна - бакалавр, студентка Харківського національного університету ім.В.Н.Каразіна; Площа Свободи 4, Харків, Україна, 61022 ; e-mail: vladakylunnyk@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0631-9093.

Крютченко Денис Володимирович – магістр, аспірант Інституту проблем машинобудування ім.А.М.Підгорного, вулю Пожарськогооб 2/10, Харків, Україна, 61046, e-mail: wollydenis@gmail.com; ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Науменко Юрій Віталійович – магістр, аспірант Інституту проблем машинобудування ім.А.М.Підгорного, вулю Пожарськогооб 2/10, Харків, Україна, 61046, e-mail: strelea@ukr.net; ORCID: 0000-0001-9058-6727.

Кылынник Влада Юрьевна - бакалавр, студентка Харьковского национального университета им.В.Н.Каразина; Площадь Свободы 4, Харьков, Украина 61022 ; email: vladakylunnyk@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0631-9093.

Крютченко Денис Владимирович – магистр, аспирант, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного, ул. Пожарского, 2/10, Харьков, Украина, 61046, e-mail: wollydenis@gmail.com; ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Науменко Юрий Витальевич – магистр, аспирант, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного, ул. Пожарского, 2/10, Харьков, Украина, 61046, e-mail: strelea@ukr.net; ORCID: 0000-0001-9058-6727.

УДК 4.65

Застосування графових баз даних для моделювання соціальних графів

В.М. Лазурик, Є.С. Тимошенко

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: lazurik@hotmail.com

Стаття присвячена графовим системам керування базами даних. Розглянуті основні характеристики та можливості цих систем. Серед усієї множини завдань, які найкращим чином вирішуються з використанням графової моделі даних, обрані завдання, що виникають при розробці соціальних мереж. Щодо виділеного класу завдань, для дослідження обрані системи керування графовими базами даних, що найпопулярніші на теперішній час – Neo4J, OrientDB та ArangoDB. Приділено увагу таким характеристикам обраних баз даних, як проприетарне це програмне забезпечення чи вільне, чи має воно сучасну документацію, чи підтримується розробниками, чи є спільнота, де можна одержати відповіді на питання, чи багато часу треба витратити, щоб освоїти цю систему. З використанням мов Cypher, OrientDB SQL та AQL, що є мовами запитів у Neo4J, OrientDB та ArangoDB відповідно, сформовані запити, характерні щодо соціальних мереж, коли треба швидко одержувати результати з великою глибиною пошуку. Реалізоване порівняння швидкості виконання запитів. Для цього з використанням моделі Барабаші-Альберта згенеровано граф, який має 5000 вузлів та 24900 зав'язків. Сформовані тестові завдання для пошуку друзів трьох користувачів з глибиною, яка дорівнює 5. Проведене оцінювання середнього часу для кожного запиту за декілька виконань. Зроблені висновки та сформовані рекомендації щодо найкращого вибору графової бази даних при розробці програмного забезпечення, що реалізує соціальну мережу.

Ключові слова: NoSQL, граф, мультимодельні бази даних, графові бази даних, Neo4J, OrientDB, ArangoDB, мови запитів, Cypher, OrientDB SQL, AQL, час виконання запиту.

Статья посвящена графовым системам управления базами данных. Рассмотрены их основные характеристики и возможности. Среди всего множества задач, которые наилучшим образом решаются с использованием графовой модели данных, выбраны те, что которые могут возникнуть при разработке социальных сетей. Для выделенного класса задач в исследовании выбраны системы управления графовыми базами данных, наиболее популярные сегодня – Neo4J, OrientDB и ArangoDB. Уделено внимание таким характеристикам выбранных баз данных как проприетарное это программное обеспечение или свободно распространяемое, имеет ли оно современную документацию, поддерживается ли разработчиками, существует ли сообщество, где можно получить ответы на возникшие вопросы, и много ли времени необходимо затратить для того, чтобы освоить эту систему. С использованием языков запросов Cypher, OrientDB SQL и AQL, которые используются соответственно в Neo4J, OrientDB и ArangoDB, сформированы запросы, характерные для социальных сетей, когда необходимо быстро получать результаты с большой глубиной поиска. Реализовано сравнение скорости выполнения запросов в этих базах данных. Для этого с использованием модели Барабаша-Альберта сгенерирован граф, который имеет 5000 узлов и 24900 связей. Сформированы тестовые задания для поиска друзей трех пользователей с глубиной равной 5. Проведена оценка среднего времени для каждого запроса за несколько выполнений. Сделаны выводы и сформированы рекомендации относительно наилучшего выбора графовой базы данных при разработке программного обеспечения для реализации социальной сети.

Ключевые слова: NoSQL, граф, мультимодельные базы данных, графовые базы данных, Neo4J, OrientDB, ArangoDB, языки запросов, Cypher, OrientDB SQL, AQL, время выполнения запроса.

This article is devoted to graph database management systems. The main characteristics and capabilities of those systems have been contemplated. The problems that may occur during the social network development have been selected to be solved using a graph data model. The most popular database management systems nowadays, namely, Neo4J, OrientDB and ArangoDB have been chosen for the study. Such characteristics of the selected databases as whether the software is proprietary or freely distributed, whether databases have up-to-date documentation or not, whether they are supported by developers, whether there is a community where you can get answers to your questions, and how much time is needed to master the database have been elaborated. The typical social network queries, when you need to receive results with a large depth of search quickly, have been developed using the query languages Cypher, OrientDB SQL and AQL used in Neo4J, OrientDB and ArangoDB respectively. The comparison of query execution speed has been performed for the selected databases. For this purpose, a graph that has 5000 nodes and 24900 connections has been built by implementing the Barabashi-Albert model for generating random-scale networks. The test tasks for finding friends of three users with the depth of 5 have been generated. The average time for each request has been estimated for several executions. The conclusions have been drawn and the recommendations regarding the selection of the best graph database for social network implementation have been made. The results presented in the article can be useful for teachers in preparing lectures, as well as for students in studying databases.

Keywords: NoSQL, graph, multimodel databases, graph databases, Neo4J, OrientDB, ArangoDB, query languages, Cypher, OrientDB SQL, AQL, query execution time.

1 Вступ

У наш час кількість електронних даних зростає щосекунди. Такі цифрові гіганти, як Facebook чи Instagram щодня мають близько 500 мільйонів активних користувачів, які додають у мережу тисячі гігабайт даних. Цивілізоване людство вже не уявляє купівлю товарів без попереднього

вивчення рекомендацій чи відгуків інших користувачів Інтернету. Реляційні бази даних [1] понад двадцять років були успішною технологією, що забезпечувала персистентність, управління паралельністю і механізм інтеграції. Необхідність обробляти більші обсяги даних у великих системах обумовила появу NoSQL баз даних (БД) [2], що забезпечують перехід від вертикального масштабування до горизонтального масштабування на кластерах. Основними характеристиками NoSQL БД є відмова від використання реляційної моделі, ефективна робота на кластерах, відкритий вихідний код, врахування можливостей мережі Інтернет, відсутність структури даних [3].

Серед усіх NoSQL-моделей найбільший інтерес сьогодні представляє графова модель даних. Це пов'язано з тим, що графова модель сама по собі є найбільш природним підходом до моделювання, а також зі зростанням зв'язності даних [4]. Якщо планується розробка проекту з тих напрямків, де застосування графових систем керування базами даних (СКБД) є найбільш ефективним, на перший план виходить завдання правильного вибору серед існуючих популярних представників цих СКБД. Стаття присвячена розгляду та порівнянню на прикладі соціального графа популярних представників графових БД – Neo4J, OrientDB та ArangoDB.

2 Графові бази даних

Аналітичне агентство Gartner в 2018 році в своєму «Hype Cycle for Emerging Technologies» вказало на «Knowledge Graphs», як на висхідний тренд, і в 2019 році в «Technology Trends for 2019» [5] ці тенденції також зберігають своє місце. Графові бази даних (ГБД) [6] стоять трошки окремо від більшості NoSQL баз даних. Деякі з них забезпечують використання транзакцій – підтримують ACID, на відміну від інших представників NoSQL технології. Графові бази даних (ГБД) дозволяють зберігати суті і відносини між ними. Суті моделюються вузлами, які мають властивості. Вузол інтерпретується як екземпляр об'єкта в додатку. Відносини моделюються ребрами, які можуть мати властивості. Ребра мають напрямок; вузли організовані відповідно до відносин. Це дозволяє знаходити необхідні шаблони серед вузлів. Така організація графа дозволяє один раз записати дані, а потім інтерпретувати їх різними методами відповідно до відносин. Графові БД найкраще підходять для реалізації проектів, які передбачають природну графову структуру даних, в першу чергу соціальних мереж, а так само для створення семантичного павутиння. У подібних завданнях вони сильно випереджають реляційні БД по продуктивності, простоті внесення змін і наочності подання інформації.

Зараз багато систем керування базами даних в доповнення до основної моделі зберігання даних забезпечують своїх користувачів також іншими моделями. Такі системи називають мультимодельними. Наприклад, Oracle крім реляційної моделі дає можливість працювати з документами, застосовувати графи та RDF збереження даних. MS SQL сервер, що на початку теж підтримував тільки реляційну модель, зараз забезпечує своїх користувачів також графовими та документними можливостями. MariaDB також підтримує графові бази даних. За рейтингом DB-Engines [7], який проводить Solid IT щомісяця, на вересень 2019 р. найбільш популярними з мультимодельних СКБД (перша та третя сходинки) вважається Oracle та MS SQL сервер, MariaDB займає 14 місце, але її популярність зростає. Якщо передбачається застосування графової БД для реалізації проекту, то наведені мультимодельні СКБД можуть бути використані. Але існують СКБД, що мають підтримку графової моделі, як основної, а не допоміжної. Найбільш відома з них це Neo4j, що реалізує тільки модель орієнтованого графу, вона займає 22 місце. OrientDB та ArangoDB вважаються графовими СКБД, але дозволяють зберігати документи, та розробляти ключ-значення сховища. Вони займають 51 та 61 місце відповідно.

3 Постановка завдання

Виходячи з того, що існує досить багато СКБД, що підтримують графову модель, можна вважати важливим та актуальним завдання аналізу та порівняння деяких обраних СКБД. У цьому випадку можна зазначити досить вагомими такі критерії порівняння як час виконання однакових запитів в різних середовищах; наявність документації та підтримки розробниками; вартість, чи Open Source ліцензія; час, який треба затрати працівникам, щоб опанувати цю систему керування даними та мову розробки запитів. В роботі були обрані Neo4J, OrientDB та ArangoDB, як такі, що користуються найбільшою популярністю серед розробників ГБД. Для перевірки часу виконання запитів було обрано теж найбільш популярне завдання, а саме пошук даних у соціальному графі.

4 Neo4J

Neo4J [8] є СКБД із відкритим кодом на мові програмування JAVA. Вона використовується при розробці сервісів рекомендацій, соціальних мереж, системи менеджменту. Neo4J оптимізована для швидкого обходу графа, зменшуючи кількість вузлів, що беруть участь в обході, і знаючи вузол, де починається обхід. У Neo4J застосовується індексування для того, щоб також легко знайти вузол або відношення за певними властивостями, або щоб визначити стартовий вузол для обходу графа. Neo4J повністю підтримує ACID властивості баз даних і є транзакційною. Розробники забезпечують своїх користувачів інструментом для виконання запитів та візуалізації графа. Це Neo4J Browser, що має графічний інтерфейс на основі веб-браузера.

Спеціально для роботи із графом розробники спроектували мову запитів Cypher, яка використовує зіставлення за шаблоном як головний механізм відбору даних. Cypher – декларативна мова запитів. Neo4J також підтримує Gremlin. Ця мова імперативна, користувач описує як обходити граф.

Дослідження Neo4J на прикладі розробки рекомендаційної системи було розглянуте в [9]. Якщо в середовищі Neo4J розроблена база даних «Родичі», яка являє собою граф генеалогічного дерева, то запит на Cypher, який дозволяє знайти двоюрідних братів та сестер Тетяни виглядає, як наведено в лістингу 1. При цьому спочатку здійснюється пошук батьків Тетяни, потім пошук бабусь і дідусів, наступний крок – це пошук зв'язаних вузлів та повторення цього кроку для них.

Лістинг 1.

```
MATCH (Tanya:Woman {name:"Татьяна"})<- [r:PARENT] - (parent)
<- [:PARENT] - (grandparent) - [:PARENT] ->
(grandparentChild) - [:PARENT] -> (cousin)
RETURN cousin
```

Запит на мові Cypher, який вираховує друзів користувача у глибині пошуку, що дорівнює 3, наведений у лістингу 2.

Лістинг 2.

```
MATCH
(me:User {user_id:10})-[:FOLLOWS*3]->(myFriend:User)
RETURN myFriends
```

СКБД Neo4J легко встановлюється, підтримується і супроводжується розробниками, має безкоштовну версію та за передплатою, в співтоваристві Neo4J можна отримати відповіді на питання, що виникли. Мова Cypher проста в освоєнні, має строгий та чіткий синтаксис. СКБД має такі привабливі характеристики, як відсутність схеми БД, велику кількість драйверів для мов програмування, легкість у вивченні завдяки великій кількості ресурсів та документації.

5 OrientDB

На ринку представлена OrientDB [10], яка позиціонує себе як мультимодельна СКБД, що не має ніякої успадкованої основної моделі. OrientDB – це NoSQL СКБД з відкритим кодом, що розповсюджується за ліцензією Apache 2 Open Source License, написана на JAVA, і може працювати на будь-якій платформі без настройки і установки [11]. OrientDB підтримує збереження та обробку даних в документах, графах та як об'єкти «ключ-значення». Це транзакційна СКБД, її особливістю є збереження фізичних вузлів у якості документів. На відміну від більшості продуктів NoSQL, що ще й досі використовуються щоб забезпечити масштабованість додатків, що працюють на реляційних СКБД, OrientDB може бути використана, як єдина мультимодельна СКБД з відкритим кодом, що об'єднує в собі міць графіків і гнучкість документів в одній високопродуктивній операційній базі даних, що масштабується. Вона підтримує дистрибутивність на різних вузлах серверу.

У зв'язку з тим, що більшість розробників БД мають досвід з використання мови запитів SQL, автор OrientDB Luca Garulli теж зробив SQL як мову запитів. В діалект OrientDB SQL додані деякі розширення та зміни. Розширення стосуються підтримки функціональності графа, для цього введені команди створення та модифікації вузлів та ребер. Для ефективного обходу графа в діалекті застосовується команда MATCH, що підтримує пошук за шаблоном як у Neo4J. Великою перевагою вважається велика швидкість обходу окремих частин, чи усього графу в цілому, і відсутність Join об'єднань, – замість них використовуються фізичні посилання. В

OrientDB SQL підтримуються збережені процедури. В лістингу 3 наведений приклад об'єднання трьох класів за умовою в SQL та OrientDB SQL.

Лістинг 3.

SQL	OrientDB SQL
<pre>SELECT EmployeeName FROM Employee A, City B, Country C, WHERE A.city = B.id AND B.country = C.id AND C.name = 'Ukraine';</pre>	<pre>SELECT EmployeeName FROM Employee WHERE city.country.name = 'Ukraine';</pre>

Приклад запиту, який вираховує друзів користувача у глибині пошуку, що дорівнює 3, наведений у лістингу 4.

Лістинг 4.

```
MATCH {class: User, as: me,
where:
(user_id='10')}.out('Follows'){as:one}.out('Follows')
{as: second}.out('Follows'){as:third}
RETURN third
```

Незважаючи на привабливі особливості OrientDB, ця СКБД має недолік, такий як відсутність інструментів імпортування даних. Існують проблеми з оновленням документації, навіть таки, щоб використати якийсь метод, треба відкривати код OrientDB, дивитися та шукати в ньому. Це робить використання СКБД незручним та призводить до марної витрати часу.

6 ArangoDB

ArangoDB – багатоцільова відкрита СКБД, що надає гнучкі моделі зберігання документів, графів і даних у форматі ключ-значення [12]. Більшість коду реалізована на JavaScript. Робота з базою здійснюється через SQL-подібну мову запитів AQL, або через спеціальні розширення мовою JavaScript. Засоби для зберігання даних відповідають вимогам ACID (атомарність, узгодженість, ізольованість, надійність), підтримують транзакції й забезпечують як горизонтальну, так і вертикальну масштабованість. Управління СКБД може проводитися через веб-інтерфейс або консольний клієнт ArangoSH. Початковий код ArangoDB поширюється під ліцензією Apache 2.

В ArangoDB відсутня схема зберігання даних (Schema-free). Цю СКБД можна використовувати як сервер для веб додатків мовою JavaScript, вона має гнучку модель зберігання даних, в якій можуть бути комбіновані різні форми зберігання даних. Мова запитів AQL забезпечує користувача можливістю поєднувати типи сховищ у одному запиті. пари ключ—значення, документи і параметри, що визначають зв'язки між записами (надаються засоби для обходу вершин графа). Вузли графа в ArangoDB – це звичайні документи, а ребра – документи спеціального виду, що мають поряд зі звичайними системними полями ще системні поля `_from` і `_to`. Документи об'єднуються в колекції. Колекції документів – це ребра, які можуть виступати також і вузлами.

В лістингу 5 наведено приклад запиту на мові AQL [13], який дозволяє повернути підмножину активних користувачів (визначається атрибутом з ім'ям `status`), відсортоване по імені в порядку зростання.

Лістинг 5.

```
FOR doc IN users
FILTER doc.status == "active"
SORT doc.name
LIMIT 10
```

В лістингу 6 наведено приклад AQL запиту, який вираховує друзів користувача у глибині пошуку, що дорівнює 3.

Лістинг 6.

```
FOR vertex IN 3..3 OUTBOUND "users/100" follows
RETURN vertex
```

ArangoDB підтримує роботу із найпопулярнішими мовами програмування, має добру якість документацій та загальної інформації для початківців, але не користується такою популярністю, як перші два представники.

7 Порівняння швидкості виконання запитів

Для порівняння швидкості виконання запитів Neo4J, OrientDB та ArangoDB використаний приклад соціальної мережі. Для цього був згенерований граф з використанням моделі Барабаші-Альберта [14]. Принцип моделі полягає в тому, що чим більше зв'язків має вузол, тим більше ймовірність утворення нових зв'язків. Дійсно, принцип роботи моделі нагадує сучасні соціальні мережі. Згенерований граф має 5000 вузлів та 24900 зв'язків. Як можна побачити на рисунку 1 деякі вузли є більшими ніж інші, отже, ці вузли мають більше зв'язків.

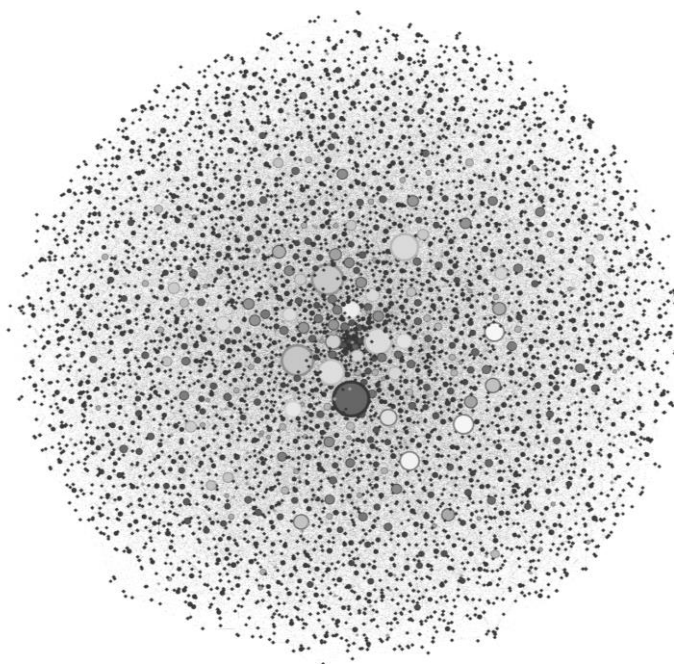


Рис1. Візуалізація графу соціальної мережі

Для порівняння часу виконання запитів на отримання зв'язків між користувачами були обрані такі стабільні версії серверів СКБД:

- Neo4J 3.5.7
- OrientDB 2.2.36
- ArangoDB 3.4.2

Тестування проводилось на комп'ютері з характеристиками:

- Операційна система Linux 16.04 64-bit
- Оперативна пам'ять 4 ГБ
- Процесор Intel Core i5-4210U
- CPU 1.70GHz

Вимір часу виконання запитів проводився виключно із використанням інтерфейсу користувачів СКБД, які поставляються із кожною базою, а саме, Neo4J Browser, ArangoDB Web Interface та OrientDB Studio. Для тестування були обрані ID трьох користувачів (10, 100, 555). Максимальна глибина пошуку складала 5. Для порівняння результатів був обраний середній час одного запиту за 6 виконань. На рисунку 2 відображено час у мілісекундах, у дужках вказана кількість вузлів на даній глибині. Тобто користувач «555» має 9 друзів, які, у свою чергу мають 29 друзів і т.д.

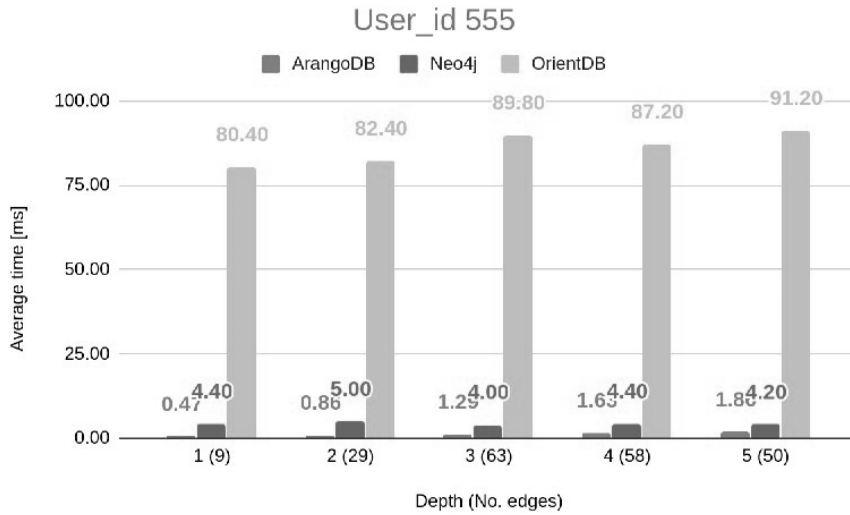


Рис 2. Графік часу виконання запиту на пошук друзів для користувача із номером 555

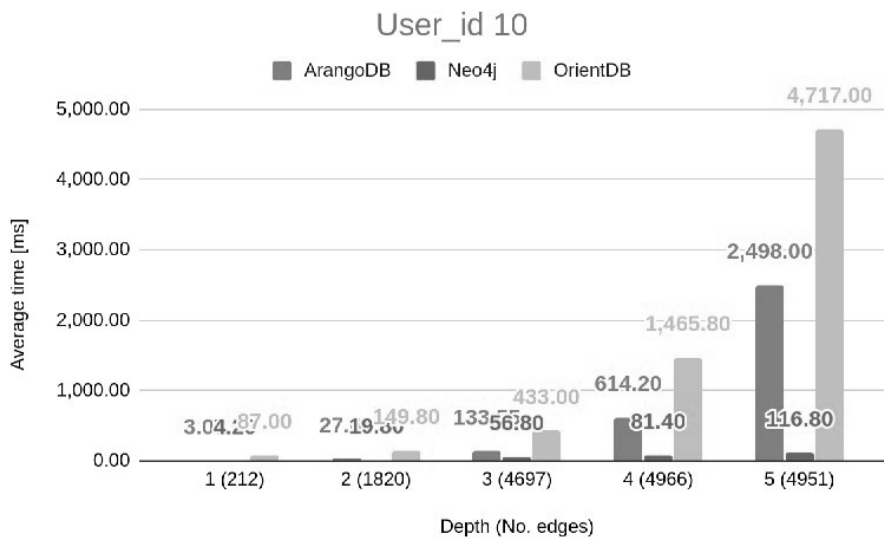


Рис 3. Графік часу виконання запиту на пошук друзів для користувача із номером 10

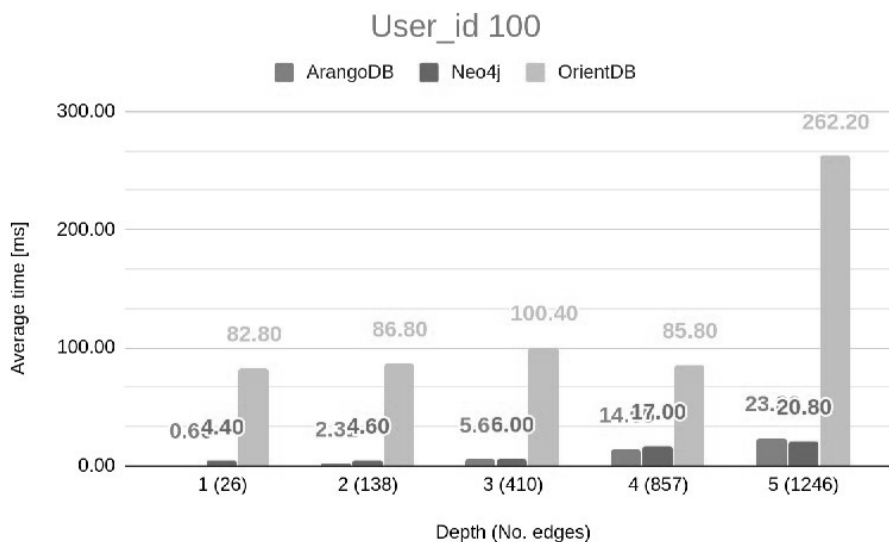


Рис 4. Графік часу виконання запиту на пошук друзів для користувача із номером 100

8 Висновки

За отриманими результатами тестування можна зробити наступні висновки. OrientDB є найповільнішою з трьох розглянутих СКБД. Причиною може бути використання неоптимальних запитів, але в зв'язку з браком документації оптимізувати їх важко. Отже, використання цієї СКБД для побудови соціального графу, на основі даного дослідження, не рекомендується. Щодо ArangoDB та Neo4J, вони конкурують між собою у деяких випадках. А саме, з рисунку 2 можна побачити, що Neo4J має приблизно однаковий час виконання для всіх 5-ти випадків, навіть, враховуючи різну кількість вузлів на кожному з них. Час ArangoDB зростає із кожною глибиною. Можна зробити висновок, що для отримання малої кількості вузлів, приблизно до 1000, ArangoDB випереджає Neo4J. Але, виходячи з аналізу результатів, відображених на рисунках 3 і 4, можна стверджувати, що Neo4J значно випереджає ArangoDB на великих об'ємах. Використання обох з них підходить для соціальних мереж, і завдяки швидкості виконання запитів, і за простотою написання самих запитів. Але, треба заважити, завдяки тому що Neo4J прекрасно справляється з великими об'ємами даних, ця СКБД може бути використана для Big Data.

Висновки, зроблені на підставі проведених досліджень, підтверджуються результатами ранжування систем управління базами даних відповідно до їх популярності, що проводяться Solid IT щомісячно [7]. Це стосується популярності Neo4J, але треба визначили, що ArangoDB, згідно нашому дослідженню, трохи випереджає OrientDB, хоча до Neo4J їм обом далеко.

ЛІТЕРАТУРА

1. Codd E.F. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. *Communications of the ACM*. 13 (6): 377–387. doi:10.1145/362384.362685 (June 1970).
2. NoSQL: Матеріал з Вікіпедії – вільної енциклопедії. [Електронний ресурс] Режим доступу: <https://ru.wikipedia.org/wiki/NoSQL>
3. Мартин Фаулер, Прамодкумар, Дж. Садаладж. NoSQL. Новая методология разработки нереляционных баз данных.: пер. с англ. М.: ООО "И.Д. Вильямс", 2013. 192 с.
4. NitrosData: Применение графовых баз данных. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://nitrosdata.ru/2019/02/20/primenenie-grafovyh-baz-dannyh/>
5. Gartner Identifies Top 10 Data and Analytics Technology Trends for 2019. [Електронний ресурс] Режим доступу: <https://www.gartner.com/en/newsroom/press-releases/2019-02-18-gartner-identifies-top-10-data-and-analytics-technolo>
6. Ian Robinson Graph Databases / Ian Robinson, Jim Webber, Emil Eifrem. O'Reilly Media, 2013. 178 p.
7. DB-Engines Ranking provided by solid IT, September 2019. [Електронний ресурс] Режим доступу: <https://db-engines.com/en/ranking>
8. Документація Neo4j. [Електронний ресурс] Режим доступу <https://neo4j.com/docs/>
9. Тимошенко Е.С., Лазурик В.М. Реляционные или графовые базы данных: Труды международной науч.-техн. конференции. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях*. Харьков: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2018 . С. 289-292.
10. OrientDB: Матеріал з Вікіпедії – вільної енциклопедії. [Електронний ресурс] Режим доступу: <https://ru.wikipedia.org/wiki/OrientDB>
11. OrientDB Community. [Електронний ресурс] Режим доступу <https://orientdb.org/docs/>
12. ArangoDB: Матеріал з Вікіпедії – вільної енциклопедії. [Електронний ресурс] Режим доступу: <https://ru.wikipedia.org/wiki/ArangoDB>
13. ArangoDB v3.5.0 Documentation. [Електронний ресурс] Режим доступу: <https://www.arangodb.com/docs/stable/>
14. Модель Барабаши — Альберт. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Модель_Барабаши_—_Альберт.

REFERENCES

1. E. F. Codd, "A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks." *Communications of the ACM*, vol. 13, pp. 377–387, 1970.

2. "NoSQL" *En.wikipedia.org*. Internet: <https://eu.wikipedia.org/wiki/NoSQL>, Aug 17, 2019 [Oct 25, 2019].
3. P. Sadalage and M. Fowler, *NoSQL distilled*. Upper Saddle River, NJ: Addison-Wesley, 2015.
4. NitrosData, "Usage of graph databases". Internet: <http://nitrosdata.ru/2019/02/20/primenenie-grafovyh-baz-dannyh/> [Oct 20, 2019].
5. "Gartner Identifies Top 10 Data and Analytics Technology Trends for 2019." Internet: <https://www.gartner.com/en/newsroom/press-releases/2019-02-18-gartner-identifies-top-10-data-and-analytics-technolo> Feb, 2019 [Sep 25, 2019].
6. I. Robinson, and J. Webber, E. Eifrem, *Graph Databases*. O'Reilly Media, 2013.
7. DB-Engines Ranking provided by solid IT. Internet: <https://db-engines.com/en/ranking>, Sep, 2019. [Sep 30, 2019]
8. Documentation Neo4j. Internet: <https://neo4j.com/docs/> [Oct 27, 2019]
9. Y. Tymoshenko and V. Lazurik "Rational vs graph databases" *Proceedings of the international scientific and technical conference "Computer modeling in high technology"*, Kharkiv: V. N. Karazin Kharkiv National University, pp. 289-292, 2018. [in Russian]
10. "OrientDB" *En.wikipedia.org*. Internet: <https://ru.wikipedia.org/wiki/OrientDB>, Oct 11, 2019 [Oct 27, 2019].
11. OrientDB Community. Internet: <https://orientdb.org/docs/> [Oct 27, 2019]
12. "ArangoDB" *En.wikipedia.org*. Internet: <https://en.wikipedia.org/wiki/ArangoDB> [Oct 27, 2019]
13. ArangoDB v3.5.0 Documentation. Internet : <https://www.arangodb.com/docs/stable/> , [Oct 27, 2019].
14. "Barabasi-Albert model" *En.wikipedia.org*. Internet: https://en.wikipedia.org/wiki/Barabasi-Albert_model, Oct 21, 2019 [Oct 27, 2019].

Лазурик Валентина Михайлівна – старший викладач кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;

e-mail: lazurik@hotmail.com; ORCID: 0000-0002-3340-9780.

Lazurik Valentina M. Senior lecturer of Department of Artificial Intelligence and Software V.N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine,

e-mail: lazurik@hotmail.com; ORCID: 0000-0002-3340-9780.

Лазурик Валентина Михайлівна – старший науковий співробітник кафедри програмного забезпечення та програмного забезпечення, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, площа Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: lazurik@hotmail.com; ORCID: 0000-0002-3340-9780.

Тимошенко Єлизавета Станіславівна – магістрант факультету комп'ютерних наук, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: liza.timoshenko0603@gmail.com; ORCID: 0000-0001-6885-289X.

Tymoshenko Yelyzaveta S. Undergraduate of the Faculty of Computer Science V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine ;

e-mail: liza.timoshenko0603@gmail.com; ORCID: 0000-0001-6885-289X.

Тимошенко Єлизавета Станіславівна - магістрант факультета комп'ютерних наук, Харківський національний університет ім. В.И. Н. Каразіна, площа Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: liza.timoshenko0603@gmail.com; ORCID: 0000-0001-6885-289X.

УДК 519.6

Побудова базисних функцій для задач коливання рідини в резервуарі

М.Л. Мироненко

Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10,

Харків, 61046, Україна

e-mail: mariamyronenko87@gmail.com

При визначенні коливань рідини в резервуарі враховано вплив кривини вільної поверхні заповнювача на частоти коливань. Припущено, що рідина є нестисливою та нев'язкою, а її рух є безвихровим. Розроблено метод розв'язання крайової задачі для визначення коливань рідини в резервуарі та побудовано інтегральне зображення невідомого потенціалу швидкостей. Отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих значень потенціалу та потоку. Для числового розв'язання системи використовувався метод граничних елементів з постійною апроксимацією невідомої щільності на елементах. Встановлено, що відхилення форми вільної поверхні від пласкої та навіть незначний підйом вільної поверхні призводять до помітних змін частот коливань. Форми коливань, отримані у дослідженні, практично збігаються з формами коливань для пласкої вільної поверхні та слугуватимуть базисною системою функцій в дослідженнях власних та вимушених коливань рідини в резервуарах за умови врахування поверхневого натягу.

Ключові слова: *вільна поверхня рідини, сингулярні інтегральні рівняння, частота коливань, ідеальна нестислива рідина, базисні функції*

При определении колебаний жидкости в резервуаре учтено влияние кривизны свободной поверхности заполнителя на частоты колебаний. Предполагается, что жидкость несжимаемая и невязкая, а ее движение является безвихревым. Разработан метод решения краевой задачи для определения колебаний жидкости в резервуаре и построено интегральное представление неизвестного потенциала скоростей. Относительно неизвестных значений потенциала и потока получена система сингулярных интегральных уравнений. Для численного решения системы использовался метод граничных элементов с постоянной аппроксимацией неизвестной плотности на элементах. Установлено, что отклонение формы свободной поверхности от плоской и даже незначительный подъем свободной поверхности приводят к заметным изменениям частот колебаний. Формы колебаний, полученные в работе, практически совпадают с формами колебаний для плоской свободной поверхности и будут служить базисной системой функций в исследованиях свободных и вынужденных колебаний жидкости в резервуарах при условии учета поверхностного натяжения.

Ключевые слова: *свободная поверхность жидкости, сингулярные интегральные уравнения, частота колебаний, идеальная несжимаемая жидкость, базисные функции*

Considerable number of studies and publications is devoted to issues of dynamic behavior of liquids, the impact on the surface tension of a liquid in partially filled tanks in particular. The study of liquid vibrations in partially fluid-filled cylindrical containers with the presence of a free surface is an important technical task. The influence of the free surface curvature of the tank filler on the oscillation frequency is taken into account. It is assumed that the liquid is incompressible and inviscid, and its motion is irrotational. The method to solve a boundary value problem for determining fluid oscillations in a reservoir has been developed, and an integral presentation of an unknown velocity potential is proposed. The geometrical characteristics of the free liquid surface have been determined. It is taken into account that the free liquid surface deviates from the equilibrium position and assumes a spherical shape. A system of singular integral equations has been obtained for unknown values of the potential and flow. The method of boundary elements with constant approximation of an unknown density on the elements has been used to solve the system numerically. The oscillation frequencies for the zero harmonic are determined in accordance with the level of the free-surface elevation. It has been determined that the deviation of the free surface shape from the flat and even a slight rise in the free surface level leads to noticeable changes in the vibration frequencies. The vibrational modes obtained in the study mostly coincide with the modes for a flat free surface and can serve as the basic system of functions in the studies of free and forced fluid vibrations in tanks, as well as, in the study of the intrinsic and forced sloshing in the reservoirs provided surface tension is taken into account.

Key words: *free liquid surface, singular integral equations, oscillation frequency, ideal incompressible liquid, basic functions.*

1 Вступ

Резервуари, частково наповнені рідиною, яка має вільну поверхню, мають широку сферу промислового використання (наприклад, паливні баки ракетоносіїв або автомобілів, залізничні або автомобільні цистерни для транспортування вантажів у рідкому стані, вантажні танкери тощо). Вивчення динаміки ємностей даного типу, що приводить до коливання рідини у резервуарі, має практичне значення. Жорсткі резервуари, частково заповнені рідиною, зазнають найбільш інтенсивного впливу від коливань рідини, що може призвести до втрати стійкості або навіть до руйнування конструкції. Тому дослідження коливань рідини у ємностях довільної форми при частковому заповненні та наявності вільної поверхні є важливим технічним завданням.

2 Аналіз останніх досліджень та публікацій

Вивчення даного питання проводиться більше п'яти десятиріч провідними вітчизняними та закордонними вченими. До числа найбільш важливих праць можна долучити роботи Луковського І.О.[1], Мікішева Г. М. та Рабіновича Б. І.[2], Мойсєєва М. М. та Румянцева В.В. [3]. Дані монографії присвячені аналітичним та числовим методам розв'язання задач про вільні малі коливання рідини у резервуарах. Існують статті, присвячені даній тематиці [4, 5]. Зміни форми вільної поверхні в даних роботах майже не розглядаються.

Плескання вільної поверхні рідкого палива у великих ракетних прискорювачах є загальновідомою технологічною проблемою, особливо у випадках незначного осьового прискорення, коли окрім взаємодії рідини з пружними стінками баків враховуються сили міжмолекулярної взаємодії (поверхневого натягу) рідини та гравітаційні сили. Відбувається плескання палива в умовах низької гравітації. Експериментально-теоретична робота з дослідження цього явища почалась ще в 60-х роках [6]. Було визначено, що в експериментальних умовах помірно низької гравітації вільна поверхня рідини відхиляється від рівноважного плаского положення та набуває кривизни.

Низка робіт Р. Дж. Хунга та інших учених присвячена дослідженням поведінки рідини в умовах мікрогравітації, а також пов'язана з науковою діяльністю дослідника в Університеті Алабами в Хантсвіллі. Динамічну поведінку рідини, зокрема вплив поверхневого натягу на частково заповнені рідиною резервуари в мікрогравітаційному середовищі розглянуто у [7]. Результати показують, що під дією силового поля сили тяжіння і відцентрових сил виникає ряд хвиль у поперечному та поздовжньому напрямках з різними амплітудами та довжинами. Проте низькочастотне плескання рідини є режимом більш високої енергії хвилі у порівнянні з хвилями більш високих частот. Ще одна робота присвячена динаміці плескання, обумовленого градієнтом орбітальної сили тяжіння та квазістаціонарним залишковим прискоренням, зокрема впливом поверхневого натягу рідини при частково заповненому паливному баку в умовах мікрогравітації стосовно повномасштабного літального апарату [8]. В залежності від різних умов орбітальних прискорень чітко візуалізуються деформації форми коливань вздовж границі поділу рідина-пар. Математична постановка задачі динаміки плескання рідкого палива у частково заповнених контейнерах, обумовленого прискоренням сили тяжіння, подана у дослідженні [9]. Питання щодо вимірювання форми рівноваги рідини, що обертається, в умовах мікрогравітації вільного падіння літака розглянуто Ф. Леслі з співавторами [10]. Визначається залежність форми вільної поверхні від кута змочування, радіусу контейнера, а також параметра, який є мірою відносного значення відцентрової сили для поверхневого натягу. Більш ранні дослідження Р. Дж. Хунга розглядають вплив поверхневого натягу на динамічну поведінку рідини у частково заповнених балонах космічного корабля [11], а також часові зміни форми вільної поверхні рідини у циліндричній, частково заповненій ємності в умовах низької гравітації та мікрогравітаційного середовища [12].

Оглядова робота десятирічних експериментальних досліджень китайських вчених та їх досягнень стосується поведінки рідини у мікрогравітаційному середовищі [13]. Розглянуто проведені теоретичні та експериментальні дослідження у області мікрогравітації, як перспективної галузі розвитку та застосування високих технологій.

Моделювання вільної поверхні рідини у частково наповненому паливному баці в умовах мікрогравітації можливо здійснювати у спеціалізованих програмних середовищах. Це питання було розглянуто під час конференції AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference [14], [15], [16]. Моделювання плескання палива дозволяє прогнозувати динамічний вплив на залежні системи, а отже, боротися з нестабільністю літального апарату. Передбачити різні випадки взаємодії рідкої складової паливного баку та системи управління ракети-носія, включаючи в аналіз різні динамічні середовища, дозволяє модель на основі середовища Mathworks MATLAB [14], [15]. Хоча ця модель не підходить для середовища з низькою гравітацією, майбутні дослідження передбачають отримання швидких оцінок інерційного стану системи та її внутрішнього об'єму. Це надає можливість тестування впливу ракетного пального на систему керування ракетоносієм у мікрогравітаційному середовищі, коли рідина поводить себе інакше в залежності від дії сил зчеплення, що домінують за рахунок поверхневого натягу [16]. Ось чому вивчення цього питання є важливим та перспективним.

3 Постановка задачі

Розглянемо оболонку, частково заповнену рідиною. Змочену поверхню оболонки позначимо як S_1 , а вільну поверхню як S_0 . В даній роботі ми будемо вивчати непласку поверхню S_0 . Змочена поверхня оболонки позначена як S_1 , а вільна поверхня – S_0 . Нехай циліндрична частина оболонки радіусом R має змочену поверхню висотою H . Зазначимо, що вільна поверхня S_0 розподіляє два середовища: рідина-газ та розглядається як тонка мембрана, враховуючи вплив поверхневого натягу.

Припустимо, що рідина нестислива та $\rho_l = \text{const}$; в безвихровому потоці рідини існує потенціал швидкості $\mathbf{v} = \nabla\varphi$; рідина знаходиться під впливом гравітаційного поля, а на систему діє сила тяжіння $\mathbf{F} = \rho_l \mathbf{g}$. – єдина зовнішня сила. Величина гравітаційної сталої \mathbf{g} може зазнавати змін під час місії. Оскільки оболонка має жорсткі стінки, а швидкість \mathbf{v} – лише тангенціальну складову, тоді:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0,$$

де \mathbf{n} – зовнішня одинична нормаль до поверхні.

Нехай σ – поверхневий натяг. За формулою Лапласа-Юнга [10] маємо

$$p_s = \sigma \kappa \quad (3.1)$$

де κ – кривина поверхні. Вираз для κ можна лінеаризувати [10]:

$$\kappa = -\Delta_s \zeta, \quad (3.2)$$

де Δ_s – поверхневий оператор Лапласа. Таким чином, динамічна гранична умова на вільній поверхні приймає вигляд:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\zeta - \frac{\sigma}{\rho_l} \Delta_s \zeta \right|_{S_0} = 0. \quad (3.3)$$

Припустимо, що

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

Отримуємо таку крайову задачу для функції ψ :

$$\Delta\psi = 0, \quad \left. \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\omega^2}{g} \psi|_{S_0}, \quad \left. \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (3.5)$$

В цих рівняннях S_0 не є пласкою поверхнею, а має ненульову кривину. Надалі наведемо основні співвідношення, що характеризують поверхню.

4 Геометричні характеристики вільної поверхні

Розглянемо рух ідеальної рідини, що наповнює резервуар циліндричної форми з радіусом основи R на висоту H . Вважаємо, що рідина, яка заповнює резервуар, є ідеальною та нестисловою. В стані рівноваги об'єм рідини, що заповнює резервуар буде рівний:

$$V_1 = \pi R^2 H \quad (4.1)$$

Вирішуючи задачу, беремо до уваги, що вільна поверхня рідини має відхилення від положення рівноваги, а область, зайнята рідиною, приймає сферичну форму (рис. 4.1 а).

У цьому випадку об'єм рідини, який позначимо V_2 , складатиметься з суми об'ємів сферичного сегмента з висотою h та радіусом основи сферичного сегмента r та циліндру, висотою H_1 . Об'єм сферичного сегмента визначаємо за формулою:

$$V_{\text{сф.сег.}} = \pi h^2 (3R_1 - h) / 3, \quad (4.2)$$

де h - висота сферичного сегмента;

R_1 - радіус сфери.

$$V_2 = V_1$$

$$R_1 = \frac{R^2 + h^2}{2h} \quad (4.3)$$

$$V_{\text{сф.сег.}} = \pi h^2 \left(\frac{R^2 + h^2}{2h} - \frac{1}{3} h \right) = \frac{3\pi h R^2 + \pi h^3}{6} \quad (4.4)$$

$$\pi R^2 H = \pi R^2 H_1 + \frac{3\pi h R^2 + \pi h^3}{6} \quad (4.5)$$

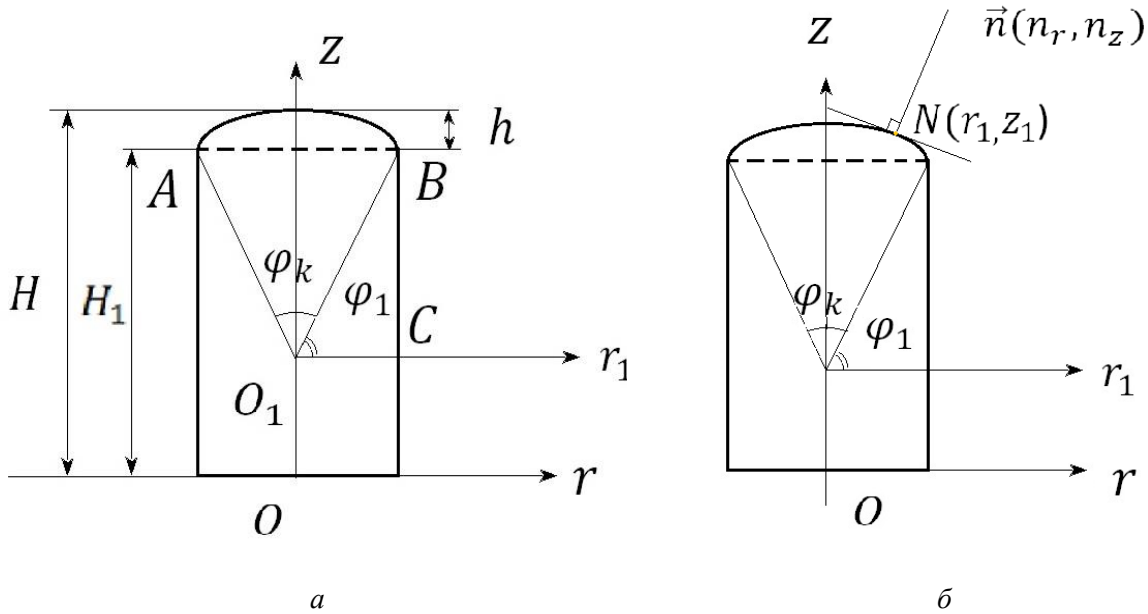


Рис. 4.1 Схема резервуару, заповненого рідиною

Висота рідини H_1 , яка заповнює резервуар, становитиме:

$$H_1 = H - \frac{1}{2}h - \frac{h^3}{6R^2} \quad (4.6)$$

Розглянемо випадок, коли $h = r$, тоді:

$$V_{\text{сф. сег.}} = \frac{2}{3}\pi R^2, \quad (4.7)$$

$$\pi R^2 H = \pi R^2 H_1 + \frac{2}{3}\pi R^3, \quad (4.8)$$

$$H_1 = H - \frac{2}{3}R \text{ при } \alpha = 0. \quad (4.9)$$

Вільна поверхня рідини, що має сферичну форму, у системі координат zOr являє собою частину дуги, що опирається на центральний кут φ_k ($\angle AO_1B$) кола з центром в т. O_1 з радіусом R_1 . Розглянувши $\triangle O_1CB$, визначимо значення косинуса кута φ_1 :

$$\cos \varphi_1 = \frac{R_1 - h}{R_1} \quad (4.10)$$

Підставивши у (4.10) формулу (4.3) отримаємо:

$$\varphi_1 = \cos^{-1}\left(1 - \frac{2h^2}{R^2 + h^2}\right) \quad (4.11)$$

Положення будь-якої точки N (рис. 4.1 б) на вільній поверхні рідини у системі координат zO_1r визначається полярними координатами $N(r_1, z_1)$:

$$r_1 = R_1 * \cos \varphi_k \quad (4.12)$$

$$z_1 = R_1 * \sin \varphi_k \quad (4.13)$$

Враховуючи (4.11) визначимо, що значення параметра φ_k змінюватиметься у діапазоні:

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \leq \varphi_k \leq \frac{3}{2}\pi + \varphi_1, \quad (4.14)$$

$$\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(1 - \frac{2h^2}{R^2 + h^2}\right) \leq \varphi_k \leq \frac{3}{2}\pi + \cos^{-1}\left(1 - \frac{2h^2}{R^2 + h^2}\right)$$

Визначимо координати точки N у системі координат zOr , враховуючи, що точки O та O_1 по осі зрозташовані на відстані $H - R_1$ та прийнявши до уваги формули (4.3), (4.12) та (4.13) отримаємо:

$$r = \frac{R^2 + h^2}{2h} * \cos \varphi_k \quad (4.15)$$

$$z = \frac{R^2+h^2}{2h} * \sin \varphi_k + H - \frac{R^2+h^2}{2h} = \frac{R^2+h^2}{2h} (\sin \varphi_k - 1) + H \quad (4.16)$$

Визначимо рівняння нормалі до графіку функції, що описує вільну поверхню рідини. Для цього введемо рівняння окружності, що має центр у точці O_1 та радіусом R_1 у системі координат zOr :

$$(z - z_{01})^2 + r^2 = R_1^2 \quad (4.17)$$

$$z = z_{01} + \sqrt{(R_1^2 - r^2)} \quad (4.18)$$

Рівняння нормалі у будь-якій точці $N(z_0; r_0)$ на вільній поверхні матиме вигляд:

$$z - z_0 = -\frac{1}{f'(r_0)} * (r - r_0) \quad (4.19)$$

Визначивши похідну $f'(r_0)$, підставимо значення у (4.19) та отримаємо наступне рівняння:

$$f'(r_0) = -\frac{r_0}{\sqrt{(R_1^2 - r_0^2)}} \\ z - z_0 = \frac{r_0}{\sqrt{(R_1^2 - r_0^2)}} * (r - r_0) \quad (4.20)$$

Вектор нормалі у загальному вигляді $\vec{n}(n_r, n_z)$ матиме координати:

$$n_z = 1, n_r = \frac{r_0}{\sqrt{(R_1^2 - r_0^2)}} \quad (4.21)$$

Підставимо у n_r (4.21) значення R_1 (4.3) та r_0 (4.14):

$$n_r = \frac{\frac{R^2+h^2}{2h} * \cos \varphi_k}{\sqrt{\left(\frac{R^2+h^2}{2h}\right)^2 - \left(\frac{R^2+h^2}{2h}\right)^2 * \cos^2 \varphi_k}} \quad (4.22)$$

Отримаємо в результаті тригонометричних перетворень та спрощення:

$$n_r = \cot \varphi_k \quad (4.23)$$

Вектор нормалі матиме вигляд $\vec{n}(1, \cot \varphi_k)$. Визначимо орт \vec{e} вектора \vec{n} за формулою:

$$\vec{e} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{n_z}{\sqrt{n_z^2 + n_r^2}} \right); \left(\frac{n_r}{\sqrt{n_z^2 + n_r^2}} \right) \quad (4.24)$$

де \vec{n} – вектор на площині, заданий координатами $\vec{n}(n_z, n_r)$;

$|\vec{n}|$ – довжина вектора \vec{n} .

Довжина вектора $|\vec{n}|$:

$$|\vec{n}| = \sqrt{\cot^2 \varphi_k + 1} = \frac{1}{\sin \varphi_k} \quad (4.25)$$

Отже, орт \vec{e} вектора $|\vec{n}|$:

$$\vec{e} = \left(\frac{1}{1/\sin \varphi_k}; \frac{\cot \varphi_k}{1/\sin \varphi_k} \right) = (\sin \varphi_k; \cos \varphi_k) \quad (4.26)$$

5 Метод сингулярних інтегральних рівнянь

Співвідношення (3.5) приводять до задачі на власні значення. Власні значення є частотами вільних коливань χ_k , а власні вектори $\varphi_k(\mathbf{r})$ – формами вільних коливань. Кожен з цих власних векторів є розв'язком системи (3.5), а потенціал швидкості, що описує задачу (3.5), приймає вигляд

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) \varphi_k(\mathbf{r}, t). \quad (5.1)$$

Вираз для функції $\zeta(\rho, t)$ знаходимо з рівняння (5.1) на вільній поверхні, тобто маємо

$$\zeta(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, \zeta_0(\rho))}{\partial \mathbf{n}}. \quad (5.2)$$

Крайова задача (3.5) зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь з використанням методу граничних елементів у його прямому формулюванні [18].

Задача визначення функцій $\varphi_k(\mathbf{r})$ і частот χ_k розв'язується за допомогою методів, описаних у [19,20], де не враховувалися ефекти поверхневого натягу. Відмінність запропонованого підходу полягає в тому, що S_0 має ненульову кривизну.

Зобразимо невідомий потенціал швидкостей у вигляді:

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S q \frac{1}{|P - P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS, \quad (5.3)$$

де $q = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$

Внаслідок зображення (5.1) необхідно знайти частинні потенціали $\varphi_k(r, t)$. Ці функції знаходяться з розв'язання крайової задачі (3.5). На поверхні S_1 маємо наступне рівняння:

$$2\pi\varphi_k^1 + \iint_{S_1} \varphi_k^1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_0 = 0, \quad P_0 \in S_1, \quad (5.4)$$

де $r = |P - P_0|$ – Декартова відстань між точками P та P_0 .

Інтегральне рівняння на поверхні S_0 має вигляд:

$$2\pi\varphi_k^1 + \iint_{S_1} \varphi_k^1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_0 = 0 \quad (5.5)$$

$$-\iint_{S_1} \varphi_k^1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - 2\pi\varphi_k^0 + \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_0 = 0 \quad (5.6)$$

Щоб визначити потенціал $\varphi_k(\mathbf{r})$, необхідно побудувати функції φ_k^1 – значення φ_k на змоченій поверхні S_1 і φ_k^0 – значення φ_k на вільній поверхні S_0 . Для розв'язання крайової задачі (3.5) використовуємо пряме формулювання методу граничних елементів. Запишемо наступну систему сингулярних інтегральних рівнянь:

$$2\pi\varphi_k^1 + \iint_{S_1} \varphi_k^1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_0 = 0 \quad (5.7)$$

$$-\iint_{S_1} \varphi_k^1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - 2\pi\varphi_k^0 + \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{1}{r} dS_0 = 0$$

Припускаючи, що

$$\varphi = \varphi(r, z) \cos \alpha \theta,$$

отримуємо для кожної гармоніки співвідношення виду

$$\iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(P, P_0)} \right) dS_1 = \int_{\Gamma_1} \varphi(z) \Theta(z, z_0) \Gamma_1(z) d\Gamma_1; \quad (5.8)$$

$$\iint_{S_0} \varphi \left(\frac{1}{r(P, P_0)} \right) dS_0 = \int_0^R \varphi(\rho) \Phi(P, P_0) \rho d\rho. \quad (5.9)$$

$$\iint_{S_0} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(P, P_0)} \right) dS_0 = \int_{\Gamma_0} \varphi(z) \Theta(z, z_0) r(z) d\Gamma_0 \quad (5.10)$$

Тут Γ_0 і Γ_1 є твірними поверхонь обертання S_0 і S_1 від ядра $\Theta(z, z_0)$ і $\Phi(P, P_0)$ і мають вигляд:

$$Q(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_\alpha(k) - F_\alpha(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_\alpha(k) n_z \right\}; \quad (5.11)$$

$$\Phi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_\alpha(k); E_\alpha(k) = (-1)^\alpha (1 - 4\alpha^2) \int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi; \quad (5.12)$$

$$F_\alpha(k) = (-1)^\alpha \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}; a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2; b = 2\rho\rho_0; k^2 = \frac{2b}{a+b}. \quad (5.13)$$

З урахуванням $\alpha = 0$ у виразі (5.12) отримуємо стандартні еліптичні інтеграли першого і другого роду. Вирази для компонент нормалі отримані вище і мають вигляд:

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{1/\sin \varphi_k}; \frac{\cot \varphi_k}{1/\sin \varphi_k} \right) = (\sin \varphi_k; \cos \varphi_k), \quad (5.14)$$

де φ_k :

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \leq \varphi_k \leq \frac{3}{2}\pi + \varphi_1, \quad (5.15)$$

$$\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left(1 - \frac{2h^2}{R^2 + h^2} \right) \leq \varphi_k \leq \frac{3}{2}\pi + \cos^{-1} \left(1 - \frac{2h^2}{R^2 + h^2} \right).$$

Таким чином, $\varphi_k(r)$ задовольняють крайовій задачі (3.5).

Для числового розв'язання систем, описаних рівняннями (5.3), використовувався метод граничних елементів з постійною апроксимацією невідомої щільності на елементах [19-21].

6 Визначення частот коливань рідини в резервуарі

Підставляючи ряди (5.1), (5.2) з N складовими для потенціалу φ і рівня підйому висоти вільної поверхні ζ в граничну умову (3.5), можна отримати

$$\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \varphi_k(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^N c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\sigma}{\rho_l g} \sum_{k=1}^N c_k(t) \Delta_s \left(\frac{\partial \varphi_k(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) = 0. \quad (6.1)$$

Припустимо, $c_k(t) = a_k e^{i\omega t}$ і отримаємо скалярний добуток виразу (6.1) і функцій $\varphi_i(\mathbf{r})$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Внаслідок ортогональності форм коливань маємо

$$-\omega^2 a_i + \chi_i^2 a_i - \frac{\sigma}{\rho_l g} \sum_{k=1}^N a_k \chi_k^2 \frac{(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} = 0. \quad (6.2)$$

Це приводить до задачі власних значень у такому вигляді:

$$\mathbf{G}\mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T, \quad \mathbf{G}_\sigma = \left\{ \chi_k^2 \left[\delta_{ik} - \frac{\sigma}{\rho_l g} \frac{(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} \right] \right\}_{i,k=1}^N. \quad (6.3)$$

Для циліндричних і складених оболонок обертання поверхневий оператор Лапласа Δ_s в циліндричних координатах для осесиметричних задач має вигляд $\Delta_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$. Таким чином, використовуючи інтеграцію частинами в скалярному добутку $(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)$ і враховуючи, що $(\varphi_i)'_\rho \Big|_{\rho=R} = 0$, отримаємо $(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i) = -((\varphi_k)'_\rho, (\varphi_i)'_\rho)$.

Якщо розглядаються вимушені коливання рідини в резервуарі, то з (5.1) отримуємо рівняння:

$$\ddot{c}_j(t) + \omega_j^2 c_j(t) - \frac{\sigma}{\rho_l g} \sum_{k=1}^N c_k \omega_k^2 \int_S (\Delta_s \varphi_j) dS = Q, \quad (6.4)$$

де Q – сила, що збуджує.

7 Аналіз числових результатів

Розглянуто коливання рідини в жорсткій оболонці обертання (рис. 7.1).

При $R=1\text{м}$ та $H=2\text{м}$, користуючись результатами [19, 20], застосовано 180 граничних елементів вздовж меридіану оболонки та 60 граничних елементів вздовж радіусу вільної поверхні, при цьому досягається точність $\varepsilon = 10^{-3}$ у порівнянні з аналітичним розв'язком [17]. Тому саме таке число елементів було використано при числовому моделюванні коливань рідини в циліндричній оболонці (рис. 7.1).

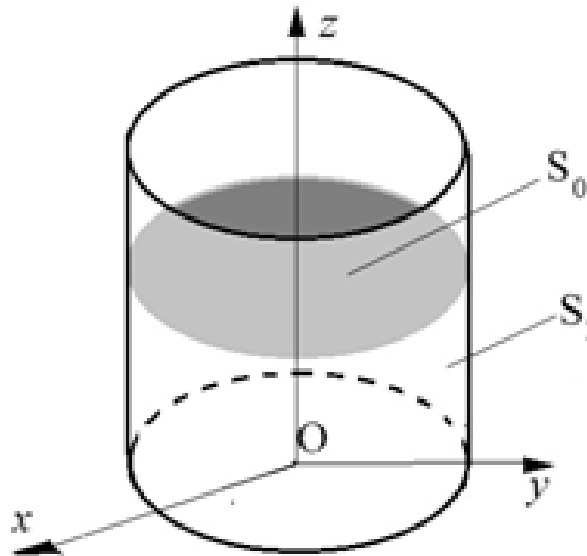


Рис. 7.1 Оболонка обертання, частково заповнена рідиною

Частоти коливань для нульової гармоніки в залежності від рівня підйому вільної поверхні наведено в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 – Частоти коливань для нульової гармоніки

Параметри				n					
R_1	H	H_1	$\alpha, ^\circ$	1	2	3	4	5	6
1	2.0	0.0	0.0	3.84	7.03	10.2	13.3	16.5	19.7
10.0	1.9975	0.0	7.12	3.82	7.00	10.1	13.3	16.4	19.6
5.05	1.990	0.1	18.4	3.71	6.86	9.99	13.1	16.2	19.4

Бачимо, що навіть незначний підйом вільної поверхні призводить до зміни частот коливань рідини у резервуарі.

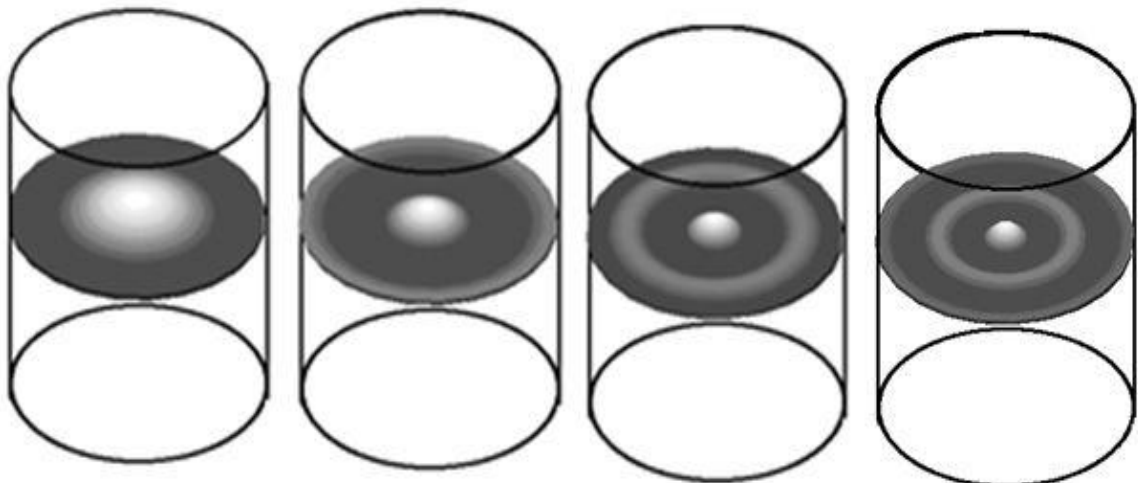


Рис. 7.2 Форми коливань вільної поверхні

На рисунку 7.2 зображені форми коливань вільної поверхні для циліндричної оболонки. Зауважимо, що форми коливань, отримані в даному дослідженні, практично співпадають з формами коливань рідини за умови пласкої вільної поверхні. Отримані форми слугуватимуть базисними функціями для розв'язання задачі знаходження частот та форм коливань оболонки з рідиною за умов низької гравітації.

8 Перспективи подальших досліджень

Передбачається провести дослідження вимушених коливань рідини за умов низької гравітації.

9 Висновки

Розроблено метод розв'язання крайової задачі для визначення коливань рідини в резервуарі за умови, що вільна поверхня рідини може мати неплоску форму. У припущенні, що рідина є нестисливою та нев'язкою, а її рух є безвихровим, побудовано інтегральне зображення невідомого потенціалу швидкостей. За допомогою цього подання отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих значень потенціалу та потоку. Цю систему розв'язано методом граничних елементів. Встановлено, що навіть незначне відхилення форми вільної поверхні від пласкої призводить до помітних змін частот коливань, проте форми коливань практично збігаються з формами коливань для пласкої вільної поверхні. Отримані форми слугуватимуть як базисна система функцій в дослідженнях власних та вимушених коливань рідини в резервуарах за умови врахування поверхневого натягу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Луковский И. А. *Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость*. Киев: Наукова думка, 1990. 296 с.
2. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. *Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью*. Москва: Машиностроение, 1968. 532 с.
3. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. *Динамика тела с полостями, содержащими жидкость*. Москва: Наука, 1965. 439 с.
4. Motygin O.V. On trapping of surface water waves by cylindrical bodies in a channel. *Wave Motion*. 45(7-8). 2007. pp. 940–951. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2007.04.009.
5. D. Huang, W. Guo, X. Li An analytical solution of fluid–structure coupling oscillation in one-dimensional ideal condition under small disturbance. *Journal of Sound and Vibration*, 255(3). 2002. pp. 610–614. DOI:10.1006/jsvi.2002.5193.
6. Franklin T. Dodge, Luis R. Carza. Experimental and theoretical studies of liquid sloshing at simulated low gravities. *South West Research Institute, Department of Mechanical Sciences*. p.78
7. Hung R.J., Lee C.C., and Leslie F.W. Response of gravity level fluctuations on the Gravity Probe-B spacecraft propellant system. *Journal of Propulsion and Power*. no.7. 1991. pp. 556–564.
8. Hung R.J., Pan H.L. Sloshing dynamics modulated fluid angular momentum and moment fluctuations driven by orbital gravity gradient and jitter accelerations in microgravity. *Applied Scientific Research*. Volume 54, Issue 1. January 1995. pp. 51–68.
9. Hung R.J., Long Y.T., Pan H.L., Actuation of sloshing modulated force and moment on liquid container driven by jitter accelerations associated with siew motion in microgravity. *Applied Mathematics and Mechanics*. Volume 16. Issue 9. September 1995. pp. 859–876.
10. F. W. Leslie, Measurements of rotating bubble shapes in a low gravity environment. *Journal of fluid Mechanics*. no.161. 1985. pp. 269–275.
11. R. J. Hung, C. C. Lee and, F. W. Leslie, Spacecraft dynamical distribution of fluid stresses activated by gravity jitter induced slosh waves. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. no.15. 1992. pp. 817–824.
12. Hung R. J., Tsao Y. D., Hong B. B., and Leslie F. W. «Dynamical behavior of surface tension on rotating fluids in low and microgravity environments». *International Journal for Microgravity Research and Applications*. no. 11. 1989. pp. 81–95.

13. Hu WenRui, Long Mian, Kang Qi, Xie JingChang, Hou MeiYing, Zhao JianFu, Duan Li, Space experimental studies of microgravity fluid science in China. *Chinese Science Bulletin*. vol. 54, no. 22. November 2009. pp. 4035–4048.
14. Dillon Sances, Joshua Gibson, Shayna Neumann, Brenton Thompson, Sathya Gangadharan, Thomas Smith and Keith Schlee, Modeling of Free-Surface Fuel Slosh in Microgravity for Off-Axis Spacecraft Propellant Tanks. *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*. August 2009. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2009-6039>
15. Nathan Silvernail, Dillon Sances, Sathya Gangadharan and James Sudermann. Model of Spacecraft Fuel Slosh with Diaphragms in Microgravity. *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*. August 2009. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2009-6040>
16. Brandon Marsell, David Griffin, Dr. Paul Schallhorn, Jacob Roth. High Accuracy Liquid Propellant Slosh Predictions Using an Integrated CFD and Controls Analysis Interface. Conference Paper. *Thermal and Fluids Analysis Workshop 2012*. 13 Aug. 2012. Pasadena. CA; United States. January 01. 2012. Document ID: 20120010782 <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20120010782> 2019-10-08T13:08:49+00:00Z
17. R.A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press. New York. 2005.
18. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag: Berlin and New York. 1984. p. 462.
19. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Пробл. Машиностроения*. №1. 2006. с.105-118.
20. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*. no. 17(1). 2016. pp. 75–87.
21. Gnitko, V., Naumenko, Y., Strelnikova E. Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. no. 22 (4). 2017. pp.867–881.

REFERENCES

1. Lukovsky I. A. *Introduction to the nonlinear dynamics of a rigid body with cavities containing a liquid*. Kiev: Nauk.Dumka, pp.296, 1990. [in Russian]
2. Mikishev G.N., Rabinovich B.I. *Dynamics of a solid with cavities partially filled with liquid*. Moscow: Mechanical engineering, 1968. 464 p. (Rus. ed.: Mikishev G. N., Rabinovich B. I. Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkostyu. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 532 p.). [in Russian]
3. Moiseev N.N., Rumyantsev V.V. *Body dynamics with fluid-containing cavities*. Moscow: Science, pp.439, 1965. [in Russian]
4. O.V. Motygin «On trapping of surface water waves by cylindrical bodies in a channel», *Wave Motion*, 45(7-8), pp. 940–951, 2007. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2007.04.009.
5. D. Huang, W. Guo, X. Li «An analytical solution of fluid–structure coupling oscillation in one-dimensional ideal condition under small disturbance», *Journal of Sound and Vibration*, 255(3). pp. 610–614, 2002. DOI:10.1006/jsvi.2002.5193.
6. Franklin T. Dodge, Luis R. Carza «Experimental and theoretical studies of liquid sloshing at simulated low gravities», *South West Research Institute, Department of Mechanical Sciences*, p.78
7. R.J. Hung, C.C. Lee, and F.W. Leslie, «Response of gravity level fluctuations on the Gravity Probe-B spacecraft propellant system», *Journal of Propulsion and Power*, no.7, pp.556–564, 1991.
8. R. J. Hung H. L. Pan «Sloshing dynamics modulated fluid angular momentum and moment fluctuations driven by orbital gravity gradient and jitter accelerations in microgravity», *Applied Scientific Research*, Volume 54, Issue 1, pp. 51–68, January 1995.
9. R. J. Hung, Y. T. Long, H. L. Pan, «Actuation of sloshing modulated force and moment on liquid container driven by jitter accelerations associated with siew motion in microgravity», *Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 16, Issue 9, pp. 859–876, September 1995.
10. F. W. Leslie, «Measurements of rotating bubble shapes in a low gravity environment», *Journal of fluid Mechanics*, no.161, pp. 269–275, 1985.

11. R. J. Hung, C. C. Lee and, F. W. Leslie, «Spacecraft dynamical distribution of fluid stresses activated by gravity jitter induced slosh waves», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, no.15, pp. 817–824, 1992.
12. R. J. Hung, Y. D. Tsao, B. B. Hong, and F. W. Leslie, «Dynamical behavior of surface tension on rotating fluids in low and microgravity environments», *International Journal for Microgravity Research and Applications*, no.11, pp. 81–95, 1989.
13. Hu WenRui, Long Mian, Kang Qi, Xie JingChang, Hou MeiYing, Zhao JianFu, Duan Li, «Space experimental studies of microgravity fluid science in China», *Chinese Science Bulletin*, vol. 54, no. 22, pp. 4035–4048, November 2009.
14. Dillon Sances, Joshua Gibson, Shayna Neumann, Brenton Thompson, Sathya Gangadharan, Thomas Smith and Keith Schlee, «Modeling of Free-Surface Fuel Slosh in Microgravity for Off-Axis Spacecraft Propellant Tanks», *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*, August 2009. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2009-6039>
15. Nathan Silvernail, Dillon Sances, Sathya Gangadharan and James Sudermann, «Model of Spacecraft Fuel Slosh with Diaphragms in Microgravity», *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*, August 2009. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2009-6040>
16. Brandon Marsell, David Griffin, Dr. Paul Schallhorn, Jacob Roth «High Accuracy Liquid Propellant Slosh Predictions Using an Integrated CFD and Controls Analysis Interface», Conference Paper. *Thermal and Fluids Analysis Workshop 2012*, 13 Aug. 2012; Pasadena, CA; United States. January 01, 2012. Document ID: 20120010782 <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20120010782> 2019-10-08T13:08:49+00:00Z
17. R.A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2005.
18. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C., *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag: Berlin and New York, p. 462, 1984.
19. Eseleva E.V., Gnitko V.I., Strelnikova E.A. «Natural oscillations of pressure vessels during interaction with a liquid», *Prob. mechanical engineering*. No. 1, pp.105-118, 2006. [in Russian]
20. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. «Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles», *Journal of Basic and Applied Research International*, no. 17(1), pp. 75-87, 2016.
21. Gnitko V., Naumemko Y., Strelnikova E. «Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles», *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, no. 22 (4), pp. 867-881, 2017.

Мироненко Марія Леонідівна – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків; тел.: (098) 931-85-19; e-mail: mariamyronenko87@gmail.com. IDORCID: 0000-0002-0266-4463.

Myronenko Maria L. – PhD student, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: mariamyronenko87@gmail.com; IDORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0266-4463>.

Мироненко Марія Леонидовна – аспірант, Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного НАН України, ул. Пожарського, 2/10, г. Харків, Україна, 61046; e-mail: mariamyronenko87@gmail.com; IDORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0266-4463>.

УДК 519.216

Статистические свойства сети телефонных абонентов

В.В. Яновский^{1,2}, М.В. Данилевский¹¹ Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61000, Харьков, Украина² Институт монокристаллов, НАНУ, пр. Науки 60, 61001 Харьков, Украина

e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

Рассмотрена направленная сеть телефонных абонентов. Это своеобразная динамическая сеть с вершинами(абонентами) и возникающими направленными связями(ребрами). Связь (или направленное ребро) и ее направление определяется входящим и исходящим звонком из соответствующих вершин. В работе изучаются свойства связей абонентов телефонной сети. Такие связи носят динамический характер, появляясь и исчезая. В качестве основной характеристики используется число исходящих(входящих) связей, возникших за один день у некоторой выбранной вершины. Используя экспериментальные данные, анализируем плотность распределения числа исходящих(входящих) связей(звонков) такой сети. Обнаружено, что такая плотность распределения по числу звонков подчиняется логнормальной плотности распределения. В работе обсуждаются причины возникновения логнормальной плотности распределения по числу входящих(или исходящих) связей. Рассмотрены статистические свойства и других групп абонентов. Показано, что и для этих групп, например, спамеров, характерна логнормальная плотность распределения по числу звонков, но с другими средними значениями и дисперсией.

Ключевые слова: сложная сеть, графы, вершины, ребра, плотность функции распределения, дисперсия, среднее значение, логнормальная плотность распределения.

Розглянуто орієнтовану мережу телефонних абонентів. Це своєрідна динамічна мережа з вузлами, які відповідають абонентам телефонної мережі та виникаючими спрямованими ребрами, які відповідають зв'язкам між відповідними абонентами. Положення ребра та його напрямок визначається вхідним та вихідним дзвінком з відповідних вузлів. В роботі вивчаються статистичні властивості зв'язків деякої підмножини абонентів телефонної мережі. Такі зв'язки носять динамічний характер, вони з'являються та зникають з часом. В якості головної характеристики у роботі використовується кількість вихідних (або вхідних) зв'язків, що виникли за один день у деякій обраній вершині. Використовуючи експериментальні дані, аналізуємо щільність розподілу числа вихідних (або вхідних) зв'язків (або дзвінків) такої мережі. Доведено, що така щільність розподілу за кількістю дзвінків відповідає логнормальній щільності розподілу. Така щільність розподілу залежить від двох параметрів. Встановлені значення цих параметрів це середнє значення та дисперсія, які визначають логнормальну щільність розподілу. У роботі обговорюються причина виникнення логнормальної щільності розподілу по кількості вхідних (або вихідних) зв'язків. Розглянуто статистичні властивості й інших груп абонентів. В якості однієї з таких груп розглянуто групу, яка здійснює велику кількість вихідних дзвінків різним абонентам телефонної мережі. Таких абонентів які створюють та поширюють спам можна назвати спамерами. Доведено, що і для цих груп, наприклад, спамерів, характерна логнормальна щільність розподілу за кількістю дзвінків, але з іншими середніми значеннями та дисперсією.

Ключові слова: складна мережа, графи, вершини, ребра, щільність функції розподілу, дисперсія, середнє значення, логнормальна щільність розподілу.

The directed network of telephone subscribers is considered in the article. It can be described as a dynamic network with vertices that correspond to the subscribers of the telephone network and emerging directional edges that correspond to the connections between the respective subscribers. The position of the edge and its direction is determined by the incoming and outgoing calls from the corresponding vertices. The subject of the article is the statistical properties of the connections of a certain subset of telephone network subscribers. Such connections are dynamic in nature due to their appearance and disappearance. The number of outgoing (or incoming) connections occurred during a day at a selected vertex is used as the main characteristic. The distribution density of the number of outgoing (or incoming) connections (or calls) of such a network has been analyzed using the experimental data. It has been shown that such a distribution density over the number of calls obeys the lognormal distribution density, which depends on the two parameters. The values of two parameters, namely the mean value and the variance, determining the lognormal distribution density are established. The reasons for the appearance of a lognormal distribution density over the number of incoming (or outgoing) connections have been discussed. The statistical properties of other groups of subscribers have been considered as well. In particular, the group that makes a large number of outgoing calls to various subscribers of the telephone network has been selected for a separate study. The members of this group, who create and distribute spam can be called spammers. It has been shown that these groups, spammers for example, also obeys the lognormal distribution density over the number of calls but they are characterized by the different mean value and variance.

Keywords: complex network, directed network, graphs, vertices, edges, probability density function, variance, mean value, lognormal distribution density, degree distribution.

1 Вступ

Исследование сложных сетей и их свойств в последнее время интенсивно развивается. Началось их исследование еще Эйлером, решившим проблему семи мостов и давшим начало теории графов. Одним из известных достижений теории графов можно считать доказательство теоремы о четырех красках, доказанной Апелем и Хакеном [1]. Следующим шагом к теории

сложных сетей послужило появление случайных графов в работах Эрдеша и Реньи [2]. Увеличившееся число примеров нетрадиционных сложных сетей привело к их интенсивному исследованию. Существенные результаты были получены в статистической физике, обзор которых можно найти в работах [3, 4, 5, 6]. Область сложных сетей проникла в биологию [7, 8, 9], экономику и социальные системы [10, 11, 12, 13], экологию [14, 15, 16] и множество других областей.

В работах [17, 18], изучая свойства интернет-сети установили распределения степеней сети близкое к степенному. Аналогичное поведение было обнаружено и в работах [21, 22]. Повидимому распределение, близкое к степенному, широко распространено в различных сетях. В работах [19, 20] предложена двухпараметрическая модель случайных графов, которая демонстрирует такое распределение степеней вершин. В работе [23] показали, что множество степеней так называемого графа вызовов хорошо аппроксимируется степенным распределением. Графы вызовов - это графы вызовов, обрабатываемых некоторыми подгруппами операторов телефонной связи за определенный период времени. В работе [20] также замечены небольшие отличия от степенного поведения.

В этой работе мы рассматриваем свойства телефонной сети, близкой к графам вызовов. Вершинам графа соответствуют определенные абоненты телефонной сети, т.е. некоторое подмножество телефонных абонентов. Каждая вершина осуществляет некоторое количество звонков и принимает другое число звонков за некоторый интервал времени. Как обычно будем различать входящие и исходящие звонки. Тогда возникает динамический граф с определенным числом входящих и выходящих ребер. Ребра то появляются, то исчезают. Его можно рассматривать как сложную динамическую сеть звонков. Основной вопрос сводится к плотности распределения количества исходящих(или входящих) звонков за определенный интервал времени. Другими словами, какова вероятность осуществления n звонков некоторым абонентом за определенный интервал времени (например, за день). Для выбранной вершины число входящих звонков за один день соответствует числу входящих в нее ребер или интегральной степени вершины за этот промежуток времени. Это соответствует распределению количества вершин от величин их степеней. В работе построена такая плотность распределения по экспериментальным данным. Показано, что она является логнормальной плотностью распределения. Обсуждаются свойства такой плотности распределения по разным группам абонентов, включая спамеров. Кроме этого приводится возможная причина появления такой плотности распределения.

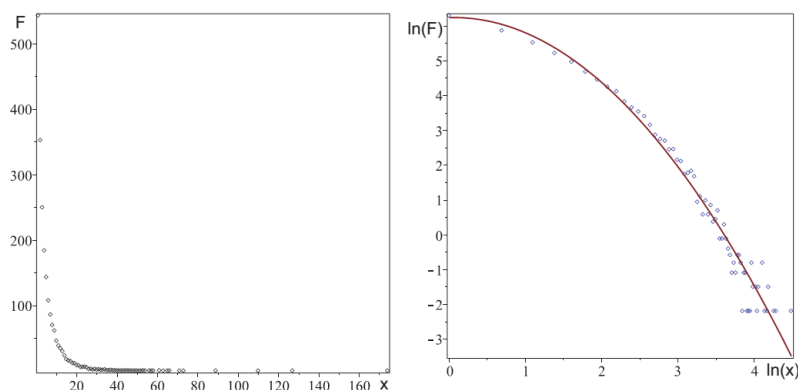


Рис.1 Слева функции распределения F исходящих звонков x за один день по их количеству. x - число исходящих звонков за один день, $F(x)$ - число абонентов, сделавших x звонков каждый в течении дня. Усреднение проведено по 9 дням. Справа эти данные в логарифмических координатах

2 Функция распределения звонков

Выберем некоторое подмножество абонентов телефонной сети США. Их количество $N_0 \approx 4200$. Рассмотрим их активность по входящим и исходящим звонкам за 1 день. Начнем с обсуждения экспериментальных данных об исходящих звонках телефонной сети. Для этого, используя данные о звонках за день, построим гистограмму распределения исходящих звонков за этот день. Такая гистограмма может быть сглажена, используя усреднение таких гистограмм,

полученных по данным за разные дни. В работе используются данные за 9 дней (с 2017-11-01 по 2017-11-9 включительно). На Рис.1 показана гистограмма где ромбиками изображено экспериментальное количество абонентов, позвонивших за один день определенное количество раз (горизонтальная координата). Гистограмма получена путем усреднения по данным за 9 дней. Общее количество исходящих звонков этого подмножества, согласно экспериментальным данным гистограммы соответствует $N_{out} \approx 2110$. Другими словами, за день позвонило меньше половины абонентов выбранного подмножества. Для установления зависимости плотности функции распределения построим эту гистограмму в логарифмических масштабах. Соответствующий график приведен на Рис.1 справа. Легко заметить характерное для параболической кривой расположение экспериментальных значений. Квадратичная аппроксимация этих значений методом наименьших квадратов приводит к функции $\ln(y) = 6.24 + 0.62 \cdot \ln(x) - 0.50 \cdot \ln(x)^2$. Такая зависимость характерна для логнормального распределения.

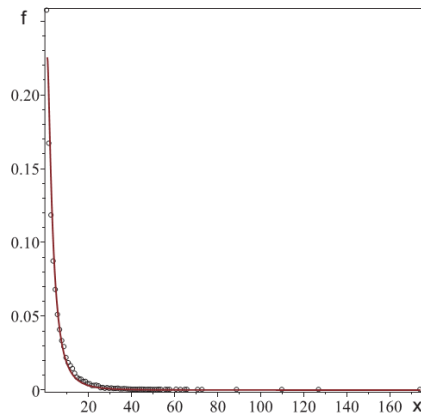


Рис.2 Нормированная плотность распределения исходящих звонков показана кружками. Непрерывная кривая соответствует логнормальной плотности распределения с полученными параметрами σ и μ из аппроксимирующей зависимости

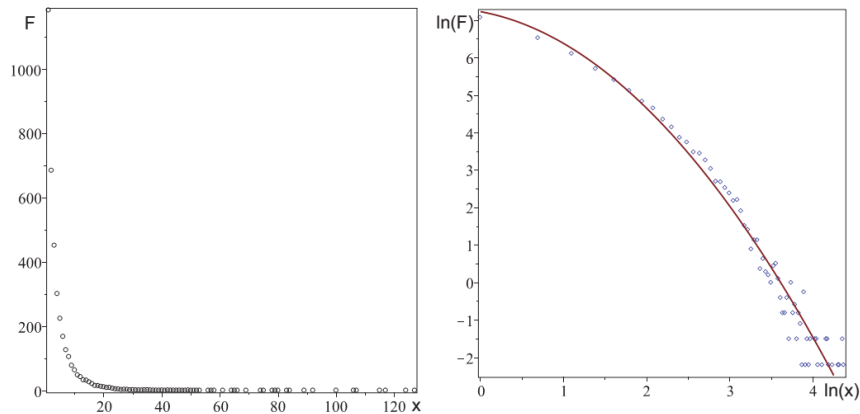


Рис.3 Слева распределение входящих звонков за день по их количеству. Здесь x число входящих звонков абоненту. Это усредненные данные за 9 дней. Справа те же данные в логарифмических координатах

Таким образом, используя экспериментальные данные, получим вид экспериментальной плотности распределения исходящих звонков, нормируя значения гистограммы на общее количество звонков. Соответствующая зависимость приведена на Рис.2

Логнормальная плотность распределение имеет вид [24],[25]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{(\ln x - \mu)}{2\sigma^2}}}{x\sigma\sqrt{2\pi}} & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Где σ и μ два параметра, определяющие логнормальную плотность распределения. Так математическое ожидание $\mu^* = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ и дисперсия логнормального распределения $\sigma^{*2} = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$ выражаются через эти параметры. Если обозначить коэффициенты, входящие в аппроксимирующую функцию как $\ln(y) = c + b \cdot \ln(x) - a \cdot \ln(x)^2$, то можно установить параметры логнормальной плотности распределения. Действительно легко получить, что $\mu = \frac{b+1}{2a}$ и $\sigma^2 = \frac{1}{2a}$. Используя экспериментальные значения a , b , получим $\mu \approx 1.1$ и $\sigma^2 \approx 1.0$. Следует подчеркнуть, что полученные значения параметров близки к единице. Тогда математическое ожидание логнормального распределения $\mu^* \approx 8$, а дисперсия $\sigma^{*2} \approx 40$.

Следовательно, плотность распределения по количеству исходящих звонков совпадает с логнормальным распределением. Параметры этого распределения $\mu \approx 1.1$ и $\sigma^2 \approx 1.0$ согласно экспериментальным данным.

Перейдем теперь к обсуждению плотности распределения входящих звонков на протяжении одного дня. Фиксируются входящие звонки тому же подмножества абонентов за прежний период времени. Экспериментальные данные в виде гистограммы приведены на Рис.3. Усреднение гистограммы также выполнено по 9 дням. Общее число входящих звонков согласно гистограммы $N_{in} = 3706$.

Квадратичная аппроксимация данных, приведенных на Рис.3 справа, методом наименьших квадратов приводит к зависимости $\ln(y) = 7.24 - 0.41 \ln(x) - 0.442 \ln(x)^2$. Как и выше, известные значения коэффициентов позволяют установить значения параметров логнормальной плотности распределений. Для входящих звонков $\mu \approx 0.67$, а $\sigma^2 \approx 1.13$. На Рис.4 приведены экспериментальные значения нормированные на $N_{in} = 3706$ и непрерывная кривая, соответствующая логнормальной плотности распределения при найденных значениях σ и μ . Видно хорошее соответствие этих зависимостей. На самом деле можно достичь и лучшего согласия, учитывая, что нормировка экспериментальных точек бралась по заниженному значению. Причина этого в недостаточной статистике и наличии большого числа нулей на хвосте функции распределения.

Таким образом, статистика входящих звонков также приводит к логнормальному распределению с параметрами $\mu \approx 0.7$, а $\sigma^2 \approx 1.1$. Среднее значение входящих звонков $\mu^* \approx 3.4$ и дисперсия $\sigma^{*2} \approx 6.7$ согласно логнормальному закону.

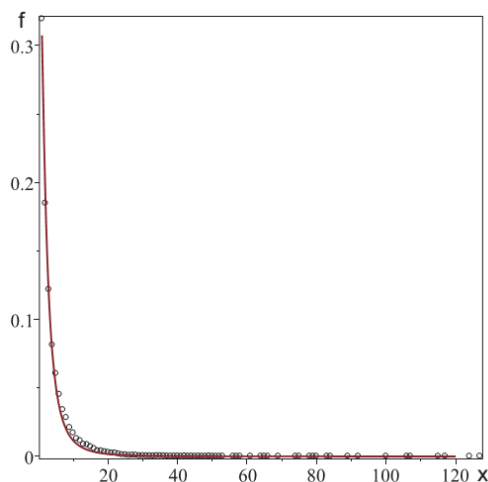


Рис.4 Нормированная плотность распределения входящих звонков показана кружками. Непрерывная кривая соответствует логнормальной плотности распределения с полученными параметрами σ и μ из аппроксимирующей зависимости

Сравнивая распределения исходящих и входящих звонков можно заметить, что среднее значение исходящих звонков $\mu^* \approx 8$ существенно превышает среднее значение входящих звонков $\mu^* \approx 3.4$. Это означает, что множество абонентов позвонивших за день меньше множества всех абонентов. Используя логнормальную функцию распределения, в принципе, можно вычислить их количество. Кроме этого, используя суммарные экспериментальные данные за 9 дней, можно установить количество абонентов, позвонивших 1 раз за 9 дней.

3 Распределение спамеров

Рассмотрим теперь еще два типа абонентов. Одних из них можно назвать спамерами, которые досаждают другим своими звонками, рекламами и т.п. Второй тип абонентов это активные абоненты, которые сообщают о номерах спамеров с требованиями их блокирования. Этим абонентов далее будем называть активными. Начнем с обсуждения статистических данных о звонках спамеров, ориентируясь на информацию о них, поступающую от активных абонентов. Усредненные статистические данные о спамерах приведены на гистограмме на Рис.5 слева. Период наблюдения и усреднения прежний. Те же данные в двойном логарифмическом масштабе приведены на Рис.5 справа. Непрерывная кривая демонстрирует аппроксимационную зависимость, полученную методом наименьших квадратов. Эта зависимость соответствует квадратичной

$$\ln f = 2.95 + 0.33 \cdot \ln(x) - 0.25 \cdot \ln(x)^2$$

Используя это соотношение, можно убедиться, что плотность функции распределения соответствует логнормальной плотности распределения с параметрами $\mu \approx 2$ и $\sigma^2 \approx 3$. Нормировочный множитель для получения плотности распределения по гистограмме равен $N_s = 186$. Используя эту плотность распределения, можно вычислить среднее значение $\mu^* \approx 18$ и дисперсию $\sigma^{*2} \approx 146$ звонков спамеров. Легко заметить существенное превышение среднего значения исходящих звонков от спамеров по сравнению со средним значением исходящих звонков от обычных абонентов. Также большое значение дисперсии означает, что отдельные абоненты могут получать значительно больше звонков, чем среднее значение.

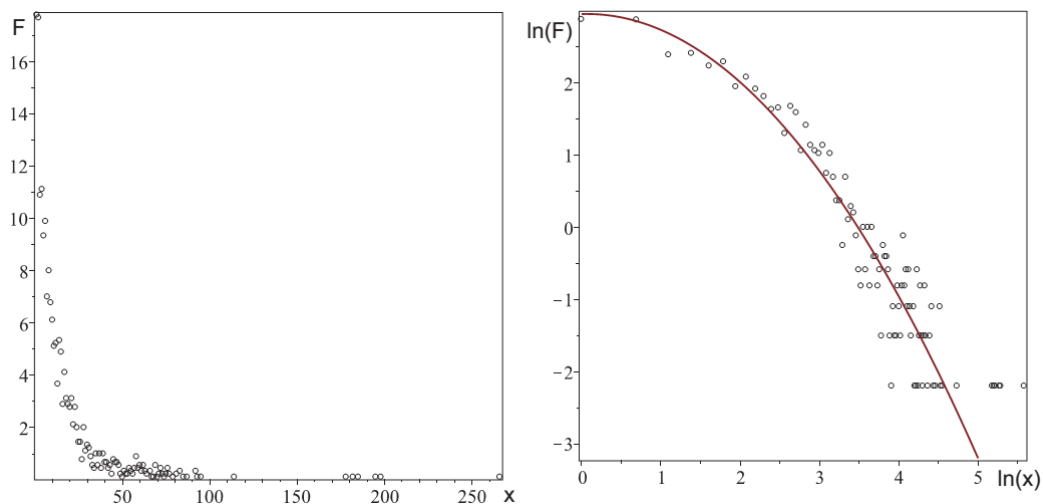


Рис.5 Слева распределение входящих звонков за день от спамеров. Это усредненные данные за 9 дней. Справа те же данные в логарифмических координатах. Непрерывная кривая это зависимость, полученная методом наименьших квадратов

Согласованность экспериментальных данных и логнормальной плотности распределения показана на Рис.6. Видно хорошее соответствие этих зависимостей.

Перейдем теперь к данным об активных абонентах. Начнем со статистики об исходящих звонках этой группы абонентов. Соответствующая гистограмма приведена на Рис.7 справа. В двойном логарифмическом масштабе эти данные показаны слева.

Видна характерная квадратичная зависимость. Аналогичная аппроксимация приводит к зависимости вида

$$\ln f = 5.11 - 0.161 \cdot \ln(x) - 0.45 \cdot \ln(x)^2$$

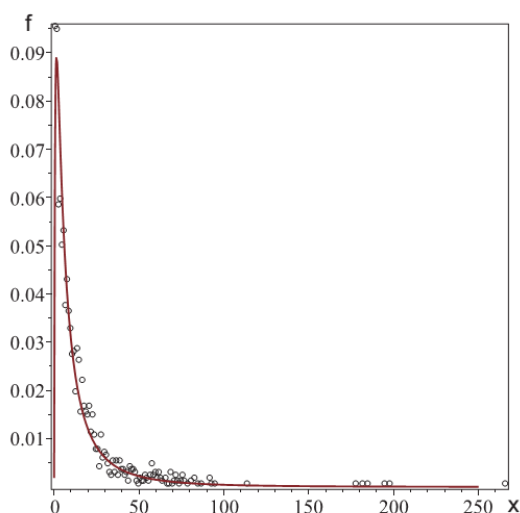


Рис.6 Нормированная плотность распределения входящих звонков спамеров показана кружками. Непрерывная кривая соответствует логнормальной плотности распределения с полученными параметрами σ и μ из аппроксимирующей зависимости

Как и ранее коэффициенты этой зависимости определяют параметры логнормальной плотности распределения. Так для исходящих звонков $\mu \approx 0.93$, а $\sigma^2 \approx 5$. Значения этих параметров близки к их значениям для абонентов в целом. Средние значения логнормальной плотности распределения $\mu^* \approx 4$ и $\sigma^{*2} \approx 11$ так же отличаются незначительно. Так абонентов в целом $\mu^* \approx 8$, а $\sigma^{*2} \approx 40$. Интересно отметить, что в среднем активные абоненты звонят реже и отклонение от среднего меньше. Можно предположить, что именно это делает их <<чувствительными>> к звонкам спамеров.

На Рис.8 показана плотность распределения построенная по экспериментальным данным (кружочки) и непрерывная кривая логнормальной плотности распределения. Видно хорошее согласие зависимостей.

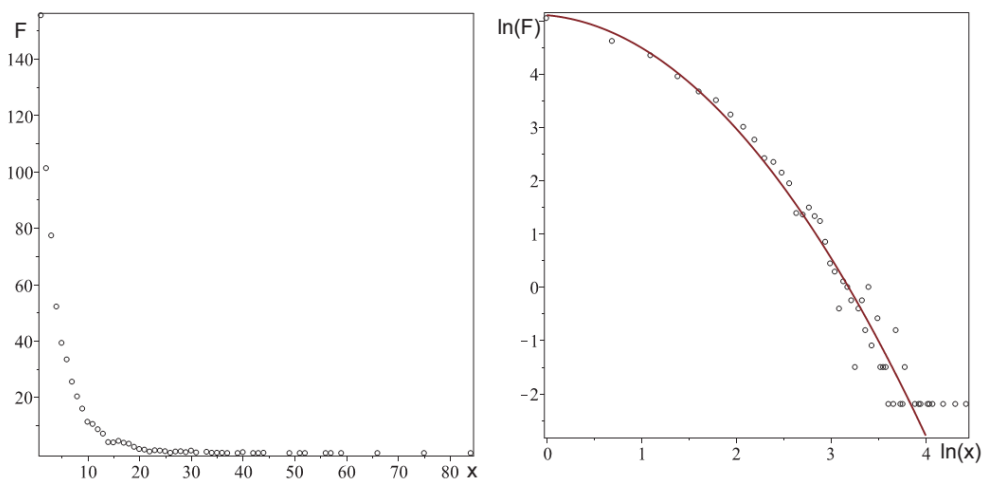


Рис.7 Слева распределение исходящих звонков за день от активных абонентов. Это усредненные данные за 9 дней. Справа те же данные в логарифмических координатах. Непрерывная кривая это зависимость, полученная методом наименьших квадратов

Обсудим теперь статистику входящих звонков активным абонентам. На Рис.8 приведены соответствующие данные в обычных и в логарифмических координатах. По этим данным снова находим параметры логнормальной плотности распределения, используя аппроксимацию $\ln f = 5.06 + 0.82 \cdot \ln(x) - 0.67 \cdot \ln(x)^2$ экспериментальных данных. Для статистики входящих звонков параметры принимают значения $\mu \approx 1.36$, $\sigma^2 \approx 5$. Как и ранее это приводит к среднему числу входящих звонков $\mu^* \approx 6$ и дисперсии $\sigma^{*2} \approx 22$. Эти значения превышают соответствующие значения для обычных абонентов. Следовательно, активные абоненты действительно получают больше входящих звонков.

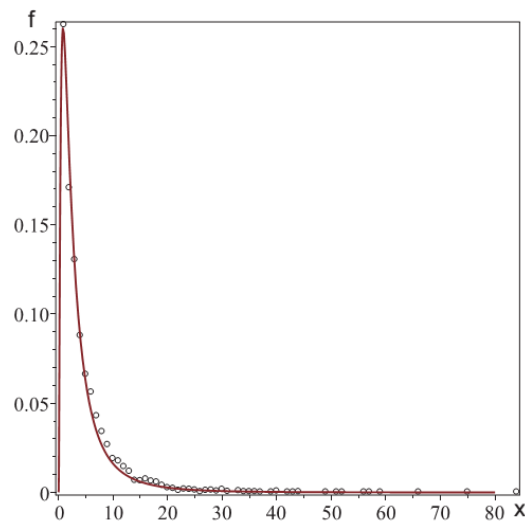


Рис.8 Нормированная плотность распределения исходящих звонков от активных абонентов показана кружками. Непрерывная кривая соответствует логнормальной плотности распределения с полученными параметрами σ и μ из аппроксимирующей зависимости

Таким образом, статистические свойства абонентов телефонной сети определяются логнормальной плотностью распределения, параметры которого зависят от способа выбора типа связи и подмножества абонентов. Причина, по которой реализуется логнормальное распределение, возможно связана с механизмом, который был обнаружен достаточно давно в работе [26]. Переформулируем их на языке звонков абонентов. Пусть число звонков N_i определяется в дискретном времени следующим уравнением

$$N_{i+1} - N_i = \omega_i N_i$$

Здесь ω_i - случайная частота звонка. Другими словами, скорость изменения числа звонков пропорциональна случайной частоте и числу сделанных звонков до этого. Решая это уравнение с начальным условием $N_0 = 1$, легко получить

$$N_i = \prod_{j=0}^{i-1} (1 + \omega_j)$$

После вычисления логарифма этого решения приходим к равенству

$$\ln N_i = \sum_{j=0}^{i-1} \ln(1 + \omega_j)$$

Теперь заметим, что случайные частоты должны быть маленькими. В противном случае мы бы звонили очень часто. Тогда, учитывая малость частот, ограничимся первым членом разложения логарифма и получим

$$\ln N_i \approx \sum_{j=0}^{i-1} \omega_j$$

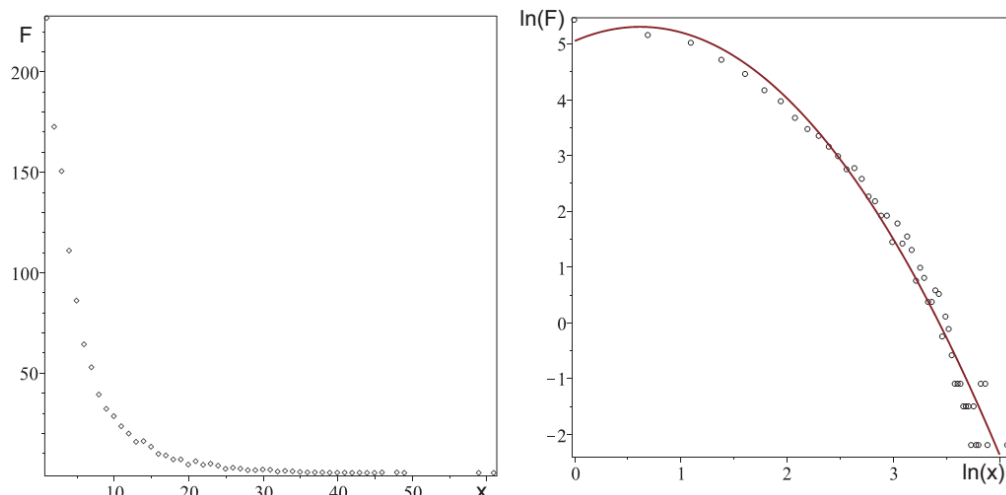


Рис.9 Слева распределение входящих звонков за день от активных абонентов. Это усредненные данные за 9 дней. Справа те же данные в логарифмических координатах. Непрерывная кривая это зависимость, полученная методом наименьших квадратов

Таким образом, статистические свойства логарифма числа звонков определяются статистическими свойствами сумм малых случайных величин. Тогда мы можем воспользоваться центральной предельной теоремой о распределении сумм независимых случайных величин (см. например [27]). Согласно которой суммы достаточно большого числа независимых величин, имеющих конечные средние значения и дисперсию, нормально распределены. Это означает в нашем случае нормальность распределения логарифмов или, что плотность распределения числа звонков логнормальная.

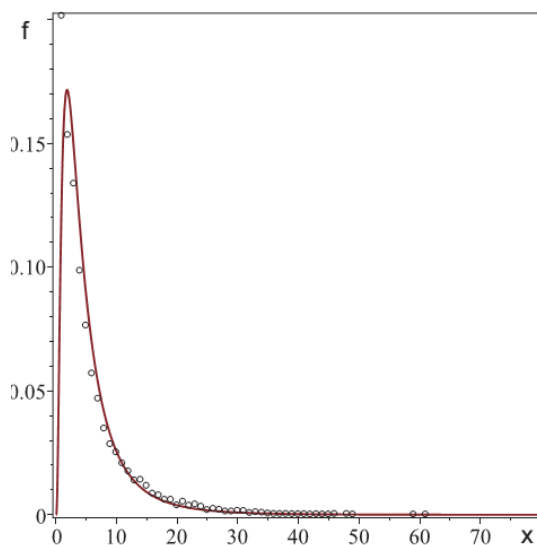


Рис.10 Нормированная плотность распределения входящих звонков к активным абонентам показана кружками. Непрерывная кривая соответствует логнормальной плотности распределения с полученными параметрами σ и μ из аппроксимирующей зависимости

4 Обсуждение результатов

Таким образом, число связей как входящих так и исходящих подчиняются логнормальному распределению. Отличие состоит в значениях параметров μ и σ , которые определяют эти распределения. Для входящих и исходящих связей отличия этих параметров небольшие. Так, например, параметры логнормального распределения исходящих $\mu_{out} \approx 1$, $\sigma_{out}^2 \approx 1$ незначительно отличаются от параметров входящих $\mu_{in} \approx 0.7$, $\sigma_{in}^2 \approx 1.1$.

Однако средние значения и дисперсия этих логнормальных плотностей распределения отличаются существенно. Так для приведенных выше значений $\mu_{*out} \approx 8$, $\sigma_{*out}^2 \approx 40$, а $\mu_{*in} \approx 3.4$, $\sigma_{*in}^2 \approx 6.7$. Поэтому для уточнения этих параметров следует использовать еще большие массивы экспериментальных данных. Фактически эти параметры определяют соответствующую сложную сеть связей.

Следует отметить, что хотя в работе обсуждалась телефонная сеть абонентов, но основной вывод о логнормальности вершин от степеней останется справедливым и для множества других сетей.

Например, ее можно ожидать, для сети фирм, банков и т.п., связывающихся с друг с другом. Все основные закономерности будут выполняться и для них.

REFERENCES

1. K. Appel and W. Haken, "Every map is four colourable". *Bulletin of the American Mathematical Society* 82, p.711–12, 1976.
2. P.Erdős, A.Rényi, "On the evolution of random graphs", *Magyar Tudományok Akademia Matematikai Kutató Intezetének Közleményei* (Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences), T. 5, p.17-61, 1960.
3. R.Albert, A.L.Barabasi, "Statistical mechanics of complex networks", *Rev. Mod. Phys.* 74, p.47-97; 2002. cond-mat 0106096.
4. S.N.Dorogovtsev, J.F.F.Mendes, *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*: Oxford University Press, Oxford, (2003).
5. Newman, M.E.J., "The structure and function of complex networks", *SIAM Review* 45, p.167-256, 2003, cond-mat 0303516.
6. S.Boccatti, V.Latora, Y.Moreno, M.Chavez, D.U.Hwang. "Complex Networks: Structure and Dynamics", *Physics Reports*, 424, p.175-308, 2006.
7. A-L.Barab'asi, Z.N.Oltvai., "Network biology: Understanding the cell's functional organization". *Nature Rev. Genet*, 5, p.101–13, 2003.
8. A.Gursoy, O.Keskin, and R.Nussinov, "Topological properties of protein interaction networks from a structural perspective". *Biochem. Soc. Trans.* 36, p.1386–1403, 2008.
9. O.Sporn, *Networks of the Brain*: MIT Press, Cambridge, MA, 2011.
10. G. F.Davis, M.Yoo, W. E.Baker, "The Small World of the American Corporate Elite", 1982–2001.*Strategic Organization*1, p.301–26. 2003.
11. W.Zachary, "An information flow model for conflict and fission in small groups", *J. Anthropol. Res*, 33, 452–73, 1977.
12. Barabasi et al, "Evolution of the social network of scientific collaborations", *Physica A*, 311 p.590–614, 2002.
13. A.Arenas, L.Danon, A.D az-Guilera, P. M.Gleiser, and R.Guimera, "Community analysis in social networks", *Eur. Phys. J. B.* 38, p.373–80, 2004.
14. P.Yodzis, "Local trophodynamics and the interaction of marine mammals and fisheries in the Benguela ecosystem", *J. Anim. Ecol*, 67, p.635–58, 1998.
15. D.Lusseau, "The emergent properties of a dolphin social network". *Proc. R. Soc. Lond. B*, (Suppl.)270, 186–8, 2003.
16. J.Lundberg, F.Moberg, "Mobile link organisms and ecosystem functioning: Implications for ecosystem resilience and management", *Ecosystems*, 6, p.87–98, 2003.
17. J. Kleinberg, S. R. Kumar, P. Raphavan, S. Rajagopalan and A. Tomkins, "The web as a graph: Measurements, models and methods", *Proceedings of the International Conference on Combinatorics and Computing*, July 26–28, 1999.
18. . R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan and A. Tomkins, "Extracting largescale knowledge bases from the web", *Proceedings of the 25th VLDB Conference*, Edinburgh, Scotland, September 7–10, (1999).
19. J.Abello, A.Buchsbaum, and J.Westbrook, "A functional approach to external graph algorithms", *Proc. 6th European Symposium on Algorithms*, p.332–343, 1998.
20. W.Aiello, F. Chung and L. Lu, "A random graph model for massive graphs", in *Proc. 32nd ACM Symp. Theor. Comp.*, p.171-180, 2000.

21. R. Albert, H. Jeong and A. Barabási, “Diameter of the World Wide Web ”, *Nature*, 401, September 9, p.130-131, 1999.
22. Barabási, and R. Albert, “Emergence of scaling in random networks ”, *Science*, 286, October 15, p.509-512, 1999.
23. J.Abello, A.Buchsbaum, J.Westbrook, “A functional approach to external graph algorithms ”, *Proc. 6th European Symposium on Algorithms*, p 332–343, 1998.
24. A.N.Kolmogorov, “On the log-normal distribution law of particle size in fragmentation process ”, *Doklady AN USSR*, Vol.31, No.2, p.99-101, 1941. [in Russian]
25. Edwin L.Crow, Kunio Shimizu, (Editors) *Lognormal Distributions, Theory and Applications*, vol. 88, Statistics: Textbooks and Monographs, New York: Marcel Dekker, (1988).
26. R.Gibrat, “Une loi des répartitions économiques: l’effet proportionnel ”, *Bull. Statist. Gén. Fr.*, 19, 469ff, p.469-513, 1930.
27. W.Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 2, M., Mir, 1967, 752c [in Russian].

ЛІТЕРАТУРА

1. K. Appel and W. Haken, Every map is four colourable. *Bulletin of the American Mathematical Society* 82. (1976). 711–12.
2. Erdős P., Rényi A. On the evolution of random graphs, *Magyar Tudományos Akademia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* (Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences).T. 5 (1960).17-61.
3. Albert, R. and Barabasi, A.L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.* 74. (2002) 47-97; cond-mat 0106096.
4. Dorogovtsev, S.N. and Mendes, J.F.F. *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*: Oxford University Press, Oxford. 2003. 264 pp.
5. Newman, M.E.J. The structure and function of complex networks. *SIAM Review* 45. (2003). 167. cond-mat 0303516.
6. S.Boccatti, V.Latora, Y.Moreno, M.Chavez, D.U.Hwang. Complex Networks: Structure and Dynamics. *Physics Reports*. 424(2006). 175-308.
7. Barabási, A-L., and Oltvai, Z. N.. Network biology: *Understanding the cell’s functional organization*. *Nature Rev. Genet.* 5. (2003). 101–13.
8. Gursoy, A., Keskin, O., and Nussinov, R. Topological properties of protein interaction networks from a structural perspective. *Biochem. Soc. Trans.* 36. (2008). 1386–1403.
9. Sporn, O.. *Networks of the Brain*: MIT Press, Cambridge. MA. 2011. 412 pp.
10. Davis, G. F., Yoo, M., and Baker, W. E. The Small World of the American Corporate Elite, 1982–2001. *Strategic Organization* 1. (2003). 301–26.
11. Zachary, W. An information flow model for conflict and fission in small groups. *J. Anthropol. Res.* 33. (1977). 452–73.
12. A. Barabasi et al. Evolution of the social network of scientific collaborations. *Physica A*. 311 (2002). 590–614.
13. Arenas, A., Danon, L., Diaz-Guilera, A., Gleiser, P. M., and Guimera, R. Community analysis in social networks. *Eur. Phys. J. B*. 38. (2004). 373–80.
14. Yodzis, P.. Local trophodynamics and the interaction of marine mammals and fisheries in the Benguela ecosystem. *J. Anim. Ecol.* 67. (1998). 635–58.
15. Lusseau, D. The emergent properties of a dolphin social network. *Proc. R. Soc. Lond. B. (Suppl.)* 270. (2003). 186–8.
16. Lundberg, J., and Moberg, F. Mobile link organisms and ecosystem functioning: Implications for ecosystem resilience and management. *Ecosystems*. 6. (2003). 87–98.
17. J. Kleinberg, S. R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan and A. Tomkins, The web as a graph: Measurements, models and methods, *Proceedings of the International Conference on Combinatorics and Computing*. July 26–28. (1999).
18. S. R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan and A. Tomkins. Extracting largescale knowledge bases from the web. *Proceedings of the 25th VLDB Conference*, Edinburgh. Scotland. September 7–10. (1999).

19. J. Abello, A. Buchsbaum, and J. Westbrook, A functional approach to external graph algorithms, *Proc. 6th European Symposium on Algorithms*. (1998). 332–343.
20. Aiello W., F. Chung and L. Lu. A random graph model for massive graphs. in *Proc. 32nd ACM Symp. Theor. Comp.* 2000.
21. R. Albert, H. Jeong and A. Barabási, Diameter of the World Wide Web. *Nature*. 401, September 9, (1999). 130-131.
22. A. Barabási, and R. Albert, Emergence of scaling in random networks. *Science*. 286. October 15. (1999). 509-512.
23. J. Abello, A. Buchsbaum, and J. Westbrook, A functional approach to external graph algorithms. *Proc. 6th European Symposium on Algorithms*. (1998). 332–343.
24. А.Н.Колмогоров, О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении: ДАН СССР, т.31. 1941. 93-101.
25. Crow, Edwin L. and Shimizu, Kunio (Editors) *Lognormal Distributions, Theory and Applications*, vol. 88, Statistics: Textbooks and Monographs. New York: Marcel Dekker. (1988). 387 pp.
26. Gibrat, R. Une loi des répartitions économiques: l'effet proportionnel. *Bull. Statist. Gén. Fr.* 19. 469ff. 1930. 469-513.
27. Фелер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. т.2. М.: Мир, 1967. 752с.

Яновський Володимир Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор; професор кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua: ORCID: 0000-0003-0461-749X.

Yanovsky Volodymyr Volodymyrovych. PhD, Doctor of Science, Professor, Professor of Department of Artificial Intelligence and Software V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua: ORCID: 0000-0003-0461-749X.

Яновский Владимир Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры искусственного интеллекта и программного обеспечения, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua: ORCID: 0000-0003-0461-749X.

Данилевський Михаїл Вікторович – студент кафедри моделювання систем і технологій, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: m.danilevskiy@gmail.com.

Danilevskiy Mikhail V. Student of Department of Artificial Intelligence and Software V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, e-mail: m.danilevskiy@gmail.com.

Данілевський Михайло В. – студент кафедри моделювання систем і технологій, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: , e-mail: m.danilevskiy@gmail.com.

CONTENTS

<p>▪ L.V. Batyuk, N.N. Kizilova 4 Novel monitoring system for quantitative estimation of efficient medical treatment of diseases based on dielectric properties of blood samples</p>	4
<p>▪ I.V. Garyachevskaya, D.O. Protektor 11 Computer modeling system for the numerical solution of the one-dimensional non-stationary Burgers' equation</p>	11
<p>▪ K.G. Degtyarev, D.V. Kriutchenko, R.P. Moskalenko, R.G. Palchikov 20 Computer simulating the forced vibrations of structure elements interacting with liquid under harmonic, impulse and seismic excitations</p>	20
<p>▪ N.N. Kizilova, N.L. Rychak., N.L. Rychak 30 Mathematical modeling and forecasting the dynamics of a segment of the river bed of Seversky Donets river</p>	30
<p>▪ V.Y. Kylynnik, D.V. Kriutchenko, Y.V. Naumenko 38 Liquid oscillation in a cylindrical-conical shell under the action of vertical and horizontal excitation</p>	38
<p>▪ V.M. Lazurik, Y.S. Tymoshenko 46 Usage of graph databases for social graph modeling</p>	46
<p>▪ M.L. Myronenko 54 Construction of basic functions for problems of fluid oscillations in a tank</p>	54
<p>▪ V.V. Yanovsky, M.V. Danilevsky 65 Statistical properties of the telephone network</p>	65
<p>▪ CONTENTS 76</p>	76

**ВІСНИК ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
імені В.Н. Каразіна**

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»

Випуски даної серії розповсюджуються у академічних та наукових колах України та за її межами з метою оперативного висвітлення досліджень у таких актуальних галузях: математичне та комп'ютерне моделювання, обчислювальний експеримент, теорія і прикладні методи обробки інформації, захист інформації, програмно-апаратні системи інформаційного або управляючого призначення, застосування математичного моделювання та системного аналізу у високих, наукоємних технологіях, враховуючи технології створення програмної продукції. Приймаються роботи, що відносяться до напрямів фізико-математичних і технічних наук (бажаний об'єм 6-18 сторінок). Усі рукописи рецензуються.

Примітка. Протягом 2019-20 рр. редакційна колегія при інших рівних умовах надаватиме перевагу роботам, що представлені англійською мовою, якщо стаття отримала схвалення при рецензуванні.

Офіційний сайт <http://periodicals.karazin.ua/mia>

<http://mia.univer.kharkov.ua>

Сайт редколегії <http://www.dsmmph.org.ua/bulletin.html>

Email: journal-mia@karazin.ua

**ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В.Н. Каразина**

Серія «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления»

Випуски данной серии распространяются в академических и научных кругах Украины и за ее пределами с целью оперативного освещения исследований в следующих актуальных областях: математическое и компьютерное моделирование, вычислительный эксперимент, теория и прикладные методы обработки информации, защита информации, программно-аппаратные системы информационного или управляющего назначения, приложения математического моделирования и системного анализа в высоких, наукоемких технологиях, включая технологии создания программной продукции. Принимаются работы, относящиеся к направлениям физико-математических и технических наук (желательный объем 6-18 страниц). Все рукописи рецензируются.

Примечание. На протяжении 2019-20 гг. редакционная коллегия при прочих равных условиях будет отдавать предпочтение работам, представленным на английском языке, если статья получила одобрение при рецензировании.

Официальный сайт <http://periodicals.karazin.ua/mia>

<http://mia.univer.kharkov.ua>

Сайт редколлегии <http://www.dsmmph.org.ua/bulletin.html>

Email: journal-mia@karazin.ua

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 43

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О.О. Афанасьєва

Підписано до друку 28.10.2019 р.
Формат 70×108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. – 8,2.
Обл.– вид. арк. – 9,5.
Наклад 50 пр. Зам. №
Безкоштовно

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна.
Видавництво

Надруковано: ХНУ імені В. Н. Каразіна
61022 м. Харків, майдан Свободи, 4,
тел.: 362-01-52
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09