

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Серія

«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 42

Серія заснована 2003 р.

BULLETIN

of V.N. Karazin Kharkiv National University

Series

«Mathematical Modeling.
Information Technology.
Automated Control Systems»

Issue 42

First published in 2003

Харків
2019

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних та технічних наук (наказ МОН України № 1328 від 21.12.2015 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 9 від 30.09.2019 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),

д.ф.-м.н., академік НАН України, проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора), д.т.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т. (заст. гол. редактора), д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Споров О.Є. (відповідальний секретар), к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Замула О. А., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ імені Б.І. Веркіна НАН України

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Рассомахін С. Г., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В. Н. Каразіна

Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Толстолузька О. Г. д.т.н., с.н.с., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Угрюмов М. Л., д.т.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"

Стрельнікова О.О., д.т.н., проф. Ін-т проблем машинобудування НАН України

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра прикладної інформатики, університет імені Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Professor of Technical Informatics and Computer Systems, Institute of Informatics, Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of computer science, Dep. of C. S., University of Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

ЗМІСТ

▪ В.А. Баранец, Н.Н. Кизилова, О.М. Дацок	4
Аппаратно-программный комплекс для исследования процессов оседания в технических и биологических суспензиях агрегирующих микро- и наночастиц	
▪ D.G. Boguto, K.K. Kadomskiy, P.K. Nikolyyuk, A.I. Pidgurska	12
Algorithm of Intelligent Urban Traffic	
▪ І.В. Гарячевська, В.В. Іванющенко, Д.О. Протектор	26
Система розрахунку окупності впровадження мережевих сонячних електростанцій в приватних домоволодіннях	
▪ В.И. Гнисько, К.Г. Дегтярев, Е.С. Кононенко, А.М. Тонконоженко	38
Сравнение методов конечных и граничных элементов в задачах о колебаниях составной оболочки вращения с жидкостью	
▪ D. Holovko, L. Vasylieva	46
Application of Agile methodologies for software development	
▪ О.П. Дем'янченко, О.Б. Кобильська, В.П. Ляшенко	58
Математична модель теплообміну у валковому калібрі	
▪ D.V. Kriutchenko	68
Forced liquid vibrations in prismatic tanks under vertical and horizontal loads	
▪ E.N. Solovyova, N.N. Kizilova	77
A system for monitoring the state of human cardiovascular system based on the most complete mathematical model of vascular bed	
▪ V.D. Khodusov, O.M. Pihnastyi	84
The statement of the task of optimal control of the production line using the additional time of equipment operation	
▪ CONTENTS	93

УДК 532+517.958:531.12

Аппаратно-программный комплекс для исследования процессов оседания в технических и биологических суспензиях агрегирующих микро- и наночастиц

В.А. Баранец¹, Н.Н. Кизилова¹, О.М. Дацок²¹Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы 4, г. Харьков, 61022, Украина²Харьковский национальный университет радиоелектроники, проспект Науки 14, г. Харьков, 61166, Украина

e-mail: cherevko.vita@mail.com

Предложен новый аппаратно-программный комплекс для автоматической регистрации, обработки и анализа седиментационных кривых в технических или биологических суспензиях агрегирующих микро- или наночастиц для оценки индекса старения технических жидкостей, состояния микробиологических суспензий или медицинской диагностики. Комплекс включает центрифугу для создания неоднородного поля сил, ускоряющих процесс оседания. Регистрация кривых оседания как высоты столбика агрегатов в нижней части седиментационной трубки проводится с помощью оптических датчиков. Разработаны трехфазная математическая модель суспензии и компьютерный код для обработки кривых и вычисления индексов, характеризующих состояние суспензии. Приведен пример использования комплекса для оценки показателя агрегации эритроцитов крови в целях диагностики наличия пищевой или лекарственной аллергии.

Ключевые слова: аппаратно-программный комплекс, микрочастицы, наночастицы, агрегация, седиментация, математическое моделирование.

Запропоновано новий апаратно-программний комплекс для автоматичної реєстрації, обробки та аналізу седиментаційних кривих в технічних або біологічних суспензіях мікро- або наночастинок, які агрегують, для оцінки індексу старіння технічних рідин, стану микробиологічних суспензій або медичної діагностики. Комплекс включає центрифугу для створення неоднорідного поля сил, що прискорюють процес осідання. Реєстрація кривих осідання як висоти стовпчика агрегатів в нижній частині седиментаційної трубки проводиться за допомогою оптичних датчиків. Криві можуть зніматися багаторазово з додаванням чи без додавання різних речовин, зберігатися і оброблятися в базі даних. Запропонований метод був протестований, а відповідність значень годинного показника швидкості осідання еритроцитів та 10-хвилинного тесту в центрифугі підтверджено на великому масиві даних. Розроблено трифазну математичну модель суспензії, яка враховує захват частини рідини всередині агрегату. Дана модель більш точніше описує динаміку процесів седиментації у порівнянні з двофазною моделлю. Розроблено комп'ютерний код для обробки кривих та обчислення індексів, що характеризують стан суспензії. На основі даної моделі запропоновано новий показник t_{\max} для оцінки стану суспензії. Він має переваги, оскільки не потребує приведення досліджуваних зразків до однакових концентрацій. За допомогою математичної моделі можна визначити t_{\max} , а також швидкість агрегації φ частинок суспензії. В результаті можлива швидка оцінка агрегаційної здатності суспензії, яка характеризує «вік» технічної суспензії. Наведено приклад використання комплексу для оцінки показника агрегації еритроцитів крові з метою діагностики наявності харчової або лікарської алергії.

Ключові слова: апаратно-программний комплекс, микрочастинки, наночастинки, агрегация, седиментация, математичне моделювання.

A new hardware-software complex for automatic registering, processing and analysing of sedimentation curves in technical or biological suspensions of aggregating micro- or nanoparticles as well as assessing the aging index of the industrial fluids, and the state of microbiological suspensions or medical diagnostics is proposed. The complex includes a centrifuge to create an inhomogeneous field of forces that accelerate the settling process. Registration of the sedimentation curves as the height of the column of aggregates in the lower part of the sedimentation tube is carried out using optical sensors. The curves can be taken repeatedly with or without the addition of various substances. The proposed method has been tested, and the correspondence of the values of the 1-hour index of erythrocyte sedimentation rate and the 10-minutes centrifuge test was confirmed on a large data set. A three-phase mathematical model of the suspension has been developed which describes the dynamics of sedimentation processes more accurately than a two-phase model. The computer code for the curves processing and calculating the indices characterizing the state of the suspension has been developed. Based on this model a new index t_{\max} is proposed to evaluate the state of suspension. Its advantage is that it does not require bringing the test samples to the same concentrations. Using the mathematical model we can determine t_{\max} and the rate of aggregation of suspension particles. As a result, a rapid assessment of the aggregation ability of suspension which characterizes the "age" of technical suspension is possible. An example of the complex usage, namely, assessing the indicator of aggregation of red blood cells in order to diagnose the presence of food or drug allergies is given.

Key words: hardware-software complex, microparticles, nanoparticles, aggregation, sedimentation, mathematical modeling.

1. Введение

В последнее десятилетие наблюдается революция в области нанонаук и нанотехнологий, включая нанофизику, нанореологию, нанотрибологию, которые позволяют манипулировать с отдельными молекулами и клетками, создавая искусственные материалы с любыми нужными свойствами, «распечатывать» на биопринтере живые ткани из клеток, используя технологии печати в биогеле, создавать высокооднородные смеси, проводить очистку и обессоливание воды с помощью наночистот и многие другие процессы. Новые науки микро- и нанофлюидика посвящены созданию и изучению физических свойств суспензий микрочастиц с диаметрами $d_p \sim 1-100$ мкм (микрожидкости) и суспензий наночастиц с $d_p \sim 1-100$ нм (наножидкости), соответственно. Оказалось, что течения таких жидкостей по микроканалам описываются классическими уравнениями гидродинамики [1,2]. Например, при течении по трубкам кругового сечения за счет постоянного перепада давлений δP на концах трубки (классическое течение Пуазейля) объемный расход Q , измеренный для микро- и нанотрубок оказывается выше рассчитанного по формуле Пуазейля [3,4]. Выяснено, что причиной этого является диффузионное рассеяние частиц жидкости на шероховатостях стенки трубки в направлении течения, что приводит к так называемому эффекту «проскальзывания» на стенке [1-4]. Это происходит потому, что на микро- и наноуровне размер частиц суспензии становится сравним с характерным размером шероховатости. Если при решении уравнений Навье-Стокса использовать граничные условия проскальзывания на стенке первого (для микрожидкостей) и второго (для наножидкостей) рода, то полученные соотношения $Q(\delta P)$ в точности соответствуют результатам измерений [5].

Биологические жидкости, суспензии клеток или бактерий, растворы полимеров, белков и ДНК являются микрожидкостями. Коллоидные взвеси твердых наночастиц золота, серебра, Al_2O_3 , CuO , SiO_2 , ZnO , углеводных, тубулиновых и др. нанотрубок, а также наноалмазов на основе воды, глицерина, этиленгликоля являются наиболее используемыми в технике и биологии наножидкостями [6]. Они позволяют эффективно отводить или доставлять тепло от или к работающим микродвигателям, компьютерным чипам и пр. работающим микроустройствам, проводить направленную доставку лекарств по кровеносной системе к заданному органу-мишени, способствовать гибели раковых клеток в опухоли, обеспечивать противорадиационную защиту организма [7] и многое другое.

Многие микро- и наночастицы способны образовывать агрегаты, что приводит к появлению более крупных частиц и снижает эффективность технических жидкостей, затрудняет процессы теплообмена в бактериальных суспензиях, увеличивает вязкость жидкостей, что приводит к необходимости увеличения δP для получения того же самого объемного расхода. Для диагностики индекса старения суспензий используется измерение скорости оседания агрегатов (СОА) в жидкости, помещенной в вертикальную или наклонную (метод Бойкотта) трубку [8]. Процесс оседания агрегирующих частиц является неустойчивым, т.е. малое изменение начального распределения частиц в суспензии может приводить к ускорению агрегации в верхней части седиментационной трубки с образованием крупных агрегатов. Поскольку скорость оседания крупного агрегата выше, чем у небольших агрегатов, он будет оседать быстрее, сближаясь с расположенными ниже частицами и присоединяя их, таким образом еще более ускоряя оседание. Было показано, что оседание крови как двухфазной суспензии является неустойчивым [9], в результате чего седиментационные кривые (СК), зарегистрированные для нескольких проб крови одного и того же пациента в разных трубках, могут отличаться [10]. Оседание эритроцитов крови как агрегирующих частиц можно стабилизировать, например, с помощью внешнего магнитного поля определенной конфигурации [11].

Исследование скорости оседания эритроцитов крови (СОЭ) имеет долгую историю [12]. В настоящее время в разных странах приняты разные стандарты (тесты Wintrobe, Westergren, Bergscki, Панченкова и др.), при которых используются седиментационные трубки с разными длинами и диаметрами. Во всех случаях проводится одноразовое измерение высоты h столбика чистой плазмы в верхней части седиментационной трубки через определенное время после начала оседания. Например, в тесте Панченкова используются капилляры длиной 10 см с внутренним диаметром 1 мм, а время оседания составляет 1 ч.

Модифікація стандартного теста СОЭ була зв'язана з измерением h через кожні 10-15 мин після початку оседання в течение двох годин (фракційна СОЭ или ФРОЭ). Для СК характерні початкове швидке оседання і наступуюче повільне, швидкості яких можуть бути вичислені як касательні до відповідючим участкам згладжених кривих ФРОЭ. Этот підхід додає додаткові індекси, характеризуючі динаміку оседання, такі як швидка і повільна швидкості оседання, максимальна швидкість оседання і время її досягнення і др. [13].

Прибори для автоматичної реєстрації СК були розроблені різними медичними корпораціями, наприклад, RR Mechatronics Corp. (2005), Clinical Data, Inc (2006), Greiner bio-one (2007) і іншими. Такі методи дозволяють проводити одночасну реєстрацію СК на декількох пробках крові одного пацієнта з наступуючим усередненням, усуваючи, таким образом, явлення, зв'язані з неустойчивістю оседання. Можно проводити измерения на пробках крові з різними добавками для определения наличия лекарственной, пищевой или другого типа аллергии к потенциальному аллергену. Представляет особый интерес регулярное сохранение результатов регистрации и обработки СК в персональной базе данных пациента для последующего анализа индивидуальной реакции на заболевание, суточной и сезонной динамики СОЭ, трендов по совокупностям пациентов и других показателей методами Big Data analysis. В данной работе приведены результаты разработки, тестирования и использования аппаратно-программного комплекса для исследования оседания частиц микрожидкостей и наножидкостей технических и биологических суспензий.

2. Компоненты аппаратно-программного комплекса

2.1. Центрифуга

Аппаратная часть комплекса представлена специально сконструированной центрифугой с прорезями для 12 капилляров Панченкова (Рис.1), в которые помещается исследуемая суспензия [10, 14]. Диск центрифуги размещен на роторе электромотора, а вдоль одной из прорезей с двух сторон размещены линейка светодиодов и линейка фотоприемников соответственно. Диск вращается с заданной угловой частотой $\omega = \text{const}$ и по мере вращения каждый из капилляров проходит между двумя линейками и интенсивность света, проходящего через каждый из капилляров измеряется фотоприемниками, а аналоговый сигнал трансформируется в цифровой с помощью АЦП. Цифровой сигнал фильтруется, сглаживается и по максимальному значению градиента светопропускания фиксируется положение СК в каждом из капилляров. Таким образом, за каждый оборот диска регистрируется положение границы раздела жидкость-агрегаты на 12 СК. Метод был протестирован и соответствие значений часового показателя СОЭ в капилляре Панченкова и 10-минутного теста в центрифуге было подтверждено на большом массиве данных [10, 14].

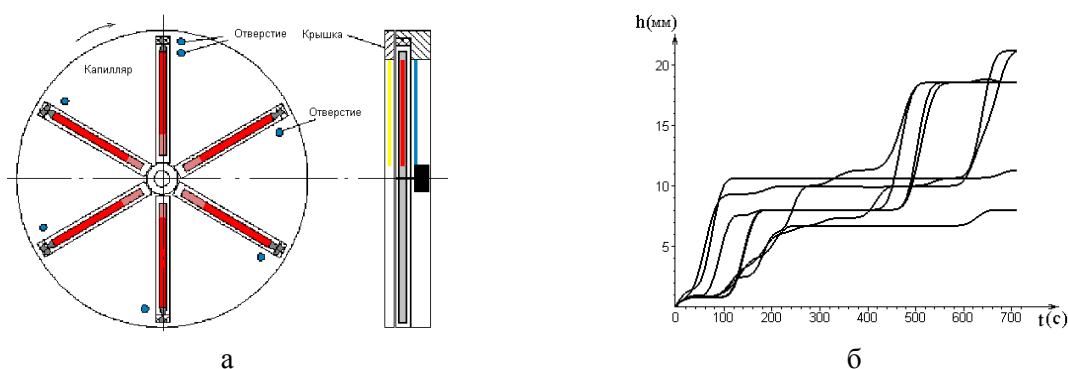


Рис.1. Схема устройства центрифуги (а) и пример записи СК (б).

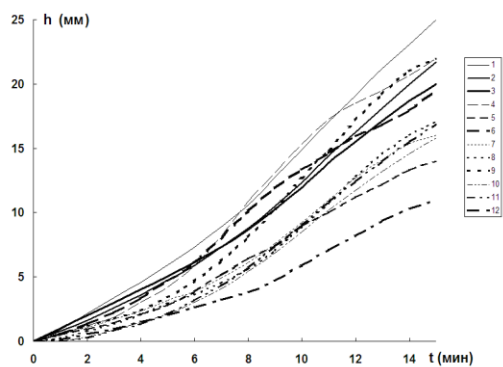
2.2. База данных

Зарегістровані прибором СА в оцифрованном виде заносяться в базу даних, где на каждого пацієнта збережена історія болізни, результати клінічних і біохімічних аналізів крові, а також зареєстровані раніше СК з указанням умов проведення теста СОЭ (с добавлением препаратов или нативная кровь, до или после лечения и др.). В случае

технических микро/наносuspензий также указывается состав суспензии и метод обработки (с присадками или без и т.д.). Оцифрованные СК могут быть сохранены в виде файла txt и затем импортированы в любой удобный статистический пакет (если это необходимо для совместимости с другими данными, последующей обработке в виде корреляционного, спектрального, кластерного, фрактального, вейвлет-анализа и др.).

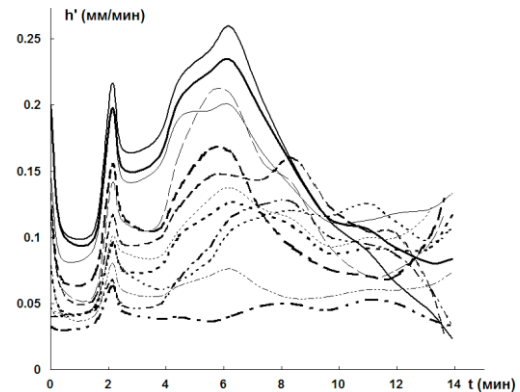
Пример записи в медицинской базе данных приведен на Рис.2а. Проведены 3 теста с нативной кровью пациента (столбцы 1-3) и по 3 теста с добавлением потенциальных аллергенов (столбцы 4-12). Соответствующие СК выведены в графическом виде на Рис.2б. Видно, что различаются не только показатели оседания, но и динамика кривых $h(t)$ в виде ускорения-замедления, что хорошо отражают производные по времени $h'(t)$. В силу неустойчивости процесса оседания три контрольных кривых 1-3 существенно отличаются и при $t=15$ минут показатель оседания составляет $h(15) = 17.5 \div 24.5$. При этом дифференциальные кривые $h'(t)$ показывают довольно стабильную динамику с первым пиком скорости оседания $v = v_{\max}$ в довольно узком диапазоне $t_{\max} \sim 2$ мин (Рис.2в).

Пациент:	Шевченко Василий Иванович (м) 62 года						нормодинин			гинатардиферон			
t (min)	контроль	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.9	0.766667	1	0.566667	0.5	0.6	0.533333	0.233333	0.533333	0	0	0.166667	0
2	2.18	1.6	2	1.24	0.92	1.36	1.1	0.8	1.22	0.366667	0.233333	0.6	0.6
3	3.38	2.6	3.02	1.88	1.42	2.26	1.7	1.34	1.78	0.9	0.84	1	1
4	4.58	3.6	4.04	3.06	2.12	3.36	2.38	2.04	2.42	1.46	1.34	1.54	1.54
5	5.94	4.74	5.08	4.24	2.82	4.7	3.18	2.94	3.46	2.12	2.14	2.04	2.04
6	7.3	5.9	6.12	5.88	3.9	6.1	3.9	3.62	4.66	3.04	3.2	2.64	2.64
7	8.9	7.3	7.32	8.14	5.14	8	4.92	4.54	6.24	4.1	4.34	3.24	3.24
8	10.6	8.8	8.7	10.9	6.44	10.1	6.12	5.6	8.08	5.46	5.74	3.84	3.84
9	12.76	10.5	10.28	13.1	7.44	11.9	7.62	7.08	10.28	6.9	7.44	4.7	4.7
10	14.86	12.32	11.92	15.3	8.94	13.36	9.22	8.84	12.68	8.5	9.04	5.9	5.9
11	17.1	14.46	13.88	17.3	10	14.66	10.98	10.7	14.88	10.2	10.84	7.1	7.1
12	19.12	16.26	15.52	18.5	11.2	15.96	12.72	12.78	17.2	11.76	12.44	8.2	8.2
13	21.22	18.1	17.12	19.5	12.2	16.86	14.12	14.6	19.2	13.2	14	9.4	9.4
14	23.1	19.96667	18.73333	20.66667	13.33333	18	15.36667	16.03333	21	14.6	15.54	10.33333	10.33333
15	25	21.7	20	22	14	19.5	16	17.1	22	15.83333	16.9	11	11



б

а



в

Рис.2. Образец записи СК одного пациента в БД (а) и соответствующие СК (б) и дифференциальные кривые (в).

2.3. Математическая модель суспензии

Для обработки и анализа СК была разработана специальная математическая модель. Микро- и наножидкости представляют собой двухфазные суспензии, содержащие твердую (частицы) и жидкую (несущая жидкость) фазы. Однако в случае агрегирующих суспензий часть несущей жидкости может захватываться частицами и оставаться внутри агрегата в виде запертой или абсорбированной жидкости (например, гидратных оболочек). В этом случае объем свободной жидкости уменьшается, поэтому трехфазная модель, включающая частицы (1), свободную (2) и запертую (3) жидкость, точнее описывает динамику процессов седиментации как в однородном [13], так и неоднородном [14, 15] поле сил, что было показано как для СК СОЭ [15], так и для технических микро/наносuspензий [16].

Общая система уравнений, включающая законы сохранения массы, импульсов и эволюции числовой концентрации агрегатов N трехфазной суспензии сводится к гиперболической системе квазилинейных уравнений для N , массовой C концентрации частиц в агрегатах и среднего объема w агрегатов, решение которой в виде рассчитанных СК, распределения N , C и w вдоль седиментационной трубки можно достаточно быстро найти с помощью метода характеристик [17].

2.4. Программный код

Благодаря простоте использованного метода решения системы квазилинейных уравнений, программная реализация численного кода в среде C^{++} позволяет имплементировать код в аппаратный комплекс даже с небольшим объемом оперативной памяти и проводить расчеты достаточно быстро. Пример скриншота с изображением трех семейств характеристик приведен на Рис.3. Здесь $G(x) = a + b(\omega)x$ - неоднородное поле сил центрифуги, $a = \text{const}$, ω - частота вращения центрифуги, I – зона чистой несущей жидкости в верхней части седиментационной трубки, II – зона оседающих агрегатов, III – компактная зона, занятая неподвижными агрегатами. Характеристика первого семейства, разделяющая зоны I и II – это СК, регистрируемая оптическими датчиками прибора. Характеристика третьего семейства, разделяющая зоны II и III, пересекает СК в точке, которая соответствует максимальной скорости оседания v_{\max} . Время достижения этой скорости t_{\max} – величина, слабо зависящая от начальной концентрации частиц, но существенно зависящая от скорости их агрегации, что было показано как при непрерывном [16], так и дискретном [17] моделировании. Таким образом, использование показателя t_{\max} для диагностической оценки состояния суспензии имеет преимущества, поскольку не нужно приводить исследуемые образцы к одинаковым концентрациям частиц.

Вводя значения параметров суспензии (плотности частиц и несущей жидкости, вязкость жидкости, начальную концентрацию частиц) можно с помощью математической модели определить значения t_{\max} и, используя расчетную формулу [15], определить значение скорости агрегации ϕ частиц суспензии. Для эритроцитов крови повышения агрегация связана с измененным в ходе заболевания белковым составом крови и изменением адгезивных свойств поверхностей эритроцитов. Сопоставляя рассчитанные значения со значениями ϕ , имеющимися в базе данных у того же пациента при проведении теста СОЭ в контроле, можно сделать вывод об успешности или неуспешности терапии, наличии или отсутствии аллергии и других выводов, важных для медицинской диагностики. Для технических суспензий микро/наночастиц этот подход изложен в [17].

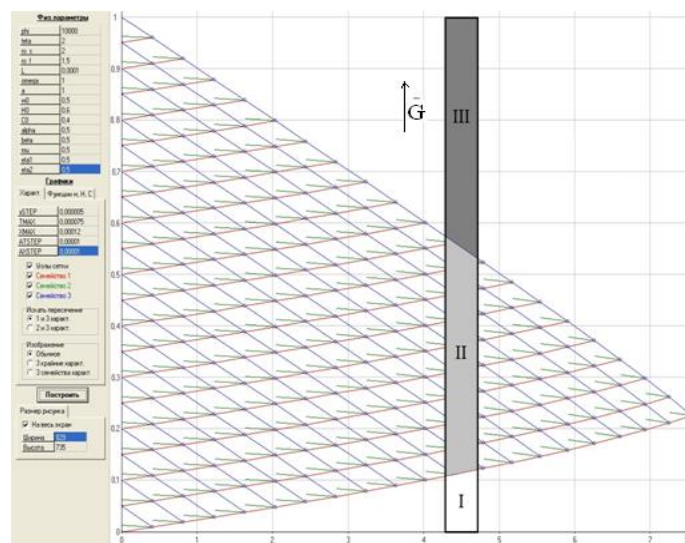


Рис.3. Результат работы разработанного кода с выводом трех семейств характеристик.

4. Выводы

Представлена структура, использованные методы и результаты работы аппаратно-программного комплекса, предназначенного для всестороннего исследования состояния технических или биологических суспензий микро/наночастиц путем количественной оценки их агрегационной способности путем автоматической регистрации кривых $h(t)$ оседания суспензии в неоднородном поле сил специально сконструированной центрифуги. Кривые могут сниматься многократно с добавлением или без добавления разных веществ (присадок), храниться и обрабатываться в базе данных. В частности, было подтверждено, что дифференциальные кривые $h'_t(t)$ более устойчивы к изменениям начального однородного распределения частиц и позволяют вычислить скорость агрегации по значениям времени достижения максимальной скорости оседания t_{\max} . Для расчетов разработана трехфазная математическая модель суспензии, решение которой получено численно с помощью достаточно быстрого алгоритма. В результате возможна быстрая оценка агрегационной способности суспензии, которая характеризует «возраст» технических суспензий и необходимость их специальной обработки для восстановления их физических свойств. Для биологических суспензий возможно детальное исследование влияния разных химических агентов в микробиологических реакторах, медицинской диагностике и пр. В частности, показана возможность надежной ранней диагностики пищевой и лекарственной аллергии путем сравнения показателей $h'_t(t)$ и t_{\max} в крови с добавлением потенциального аллергена по сравнению с нативным образцом. В дальнейшем планируется накопление базы данных и проведение детального статистического анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gad-el-Hak M. MEMS Introduction and fundamentals. The MEMS Handbook. N.-Y.: Taylor & Francis Group, 2006. 228 p.
2. Ghodssi R., and Lin P. (eds.). MEMS Materials and Processes Handbook. N.-Y.: Springer, 2011. 321 p.
3. Liou W., Fang Y. Microfluid Mechanics: Principles and Modeling (Nanoscience and Technology). N.-Y.: McGraw-Hill Education Publ., 2005. 198 p.
4. Karniadakis G.E., Beskok A., Aluru N. Microflows and nanoflows: Fundamentals and simulation. Interdisc. Appl. Math. Series, vol.29. – N.-Y.: Springer-Science, 2005. 295 p.
5. Noy A., Park H.G., Fornasiero F., Holt J.K., Grigoropoulos C.P., Bakajin O. Nanofluidics in carbon nanotubes. *Nano Today*. 2007. v. 2, N 6. P. 22-29.
6. Cherevko V., Kizilova N. Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions. *Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications, Springer Proceedings in Physics*. vol. 183. O. Fesenko, L. Yatsenko (eds.). N.-Y.: Springer. .2017. P. 207–230.
7. Batyuk L.V., Kizilova N.N., Berest V.P. Investigation of Antiradiation and Anticancer Efficiency of Nanodiamonds on Rat Erythrocytes. *IEEE 7th Intern. Conf. "Nanomaterials: Application & Properties*. Odessa, Ukraine. 2017. - 04NB23.
8. Kanagala H. K. Modeling of Particle Agglomeration in Nanofluids. PhD Thesis. Lehigh University Press, 2013. 47 p.
9. Thaker W.C., Lavelle J.W. Stability of settling of suspended sediments. *Phys. Fluids*. 1978. v. 21. P. 291-292.
10. Дацок О.М., Жолонский Е.Н., Кизилова Н.Н. Анализ оседания эритроцитов в неоднородном поле сил. *Электроника и связь*. 2002. №15. С.145-149.
11. Kizilova N. Stability of erythrocyte sedimentation in a constant magnetic field. *Fluid Dynamics*. 1989. v.24, N6. P.878-881.

12. Kushner I. The acute phase reactants and the erythrocyte sedimentation rate. In: Textbook of rheumatology/Eds. W. Kelly, E.Harris, S. Ruddy, C. Sledge. Philadelphia: W.B. Saunders, 1981. 668–676.
13. Losev E. S. Modeling the sedimentation of aggregating particles. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Zhidk. Gaza*. 1983. N3. P. 71-75.
14. Дацок О.М., Жолонский Е.Н., Кизилова Н.Н. Двухфазная модель оседания эритроцитов в неоднородном поле сил. *Вестник ХГПУ*. 2002. №135. С.61-66.
15. Кизилова Н.Н., Черевко В.А. Гравитационная седиментация эритроцитов: эксперименты и теоретическая модель. *Вестник ХНУ. Сер. Математика, прикладная математика, механика*. 2009. №875. С.80-94.
16. Кизилова Н.Н., Черевко В.А. Математические модели агрегации биологических макро- и наночастиц. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Сб. статей. Гомель. 2014. Вып.8. С.92-99.
17. Баранець В. А., Кизилова Н. Н. Дискретное моделирование агрегации и оседания микро- и наночастиц в суспензиях. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2018. т.40. С.4-14.

REFERENCES

1. M. Gad-el-Hak, *MEMS Introduction and fundamentals. The MEMS Handbook*. N.-Y.: Taylor & Francis Group, 228 p., 2006.
2. R. Ghodssi, and P. Lin (eds.), *MEMS Materials and Processes Handbook*. N.-Y.: Springer, 321 p., 2011.
3. W. Liou, and Y. Fang, *Microfluid Mechanics: Principles and Modeling (Nanoscience and Technology)*, N.-Y.: McGraw-Hill Education Publ., 198 p., 2005.
4. G.E. Karniadakis, and A. Beskok, and N. Aluru, *Microflows and nanoflows: Fundamentals and simulation*, Interdisc. Appl. Math. Series, vol.29. N.-Y.: Springer-Science, 295 p., 2005.
5. A. Noy, and H.G. Park, and F. Fornasiero, and J.K. Holt, and C.P. Grigoropoulos, and O. Bakajin, “Nanofluidics in carbon nanotubes. *Nano Today*.” vol. 2, N 6, pp. 22-29, 2007.
6. V.A. Cherevko, and N.N. Kizilova, “Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions.” *Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications, Springer Proceedings in Physics*, vol. 183, O. Fesenko, L. Yatsenko (eds.). N.-Y.: Springer, pp. 207–230, 2017.
7. L.V. Batyuk, and N.N. Kizilova, and V.P. Berest, “Investigation of Antiradiation and Anticancer Efficiency of Nanodiamonds on Rat Erythrocytes.” *IEEE 7th Intern. Conf. “Nanomaterials: Application & Properties”*, Odessa, Ukraine, 04NB23, 2017.
8. H. K. Kanagala, “Modeling of Particle Agglomeration in Nanofluids. PhD Thesis.” Lehigh University Press, 47 p., 2013.
9. W.C. Thaker, and J.W. Lavelle, “Stability of settling of suspended sediments.” *Phys. Fluids*, vol. 21, pp. 291-292, 1978.
10. O.M. Datsok, and Ye.N. Zholonsky, and N.N. Kizilova, “Analysis of erythrocyte sedimentation in a non-uniform force field.” *Electronics and Communication*, №15, pp.145-149, 2002. [in Russian]
11. N. Kizilova, “Stability of erythrocyte sedimentation in a constant magnetic field.” *Fluid Dynamics*, vol.24, N6, pp.878-881, 1989.
12. I. Kushner, “The acute phase reactants and the erythrocyte sedimentation rate.” In: Textbook of rheumatology/Eds. W. Kelly, E.Harris, S. Ruddy, C. Sledge. Philadelphia: W.B. Saunders, pp. 668—676, 1981.
13. E. S. Losev, “Modeling the sedimentation of aggregating particles.” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza*, N3, pp. 71-75, 1983.

14. O.M. Datsok, and Ye.N. Zholonsky, and N.N. Kizilova, "Two-phase model of the erythrocytes sedimentation in a non-uniform force field", *Visnyk Kharkov Polytechnic University*, №135, pp.61-66, 2002. [in Russian]
15. V.A. Cherevko, and N.N. Kizilova, "Gravitational sedimentation of erythrocytes: experiments and theoretical model." *Vestnik of KhNU, ser. "Mathematics, applied mathematics, mechanics"*, №875, pp.80-94, 2009. [in Russian]
16. N.N. Kizilova, and V.A. Cherevko, "Mathematical models of aggregation of biological macro- and nanoparticles." *Mechanics. Scientific research and educational development, Gomel*, vol.8, pp. 92-99, 2014. [in Russian]
17. V.A. Baranets, and N.N. Kizilova, "Discrete modelling of aggregation and sedimentation of micro- and nanoparticles in suspensions." *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Mathematical modelling. Information technology. Automated control systems"*, vol. 40, pp. 4-14, 2018. [in Russian]

Баранець Віталія Олександрівна – інженер кафедри прикладної математики; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: cherevko.vita@gmail.com; ORCID: 0000-0001-6386-3207.

Baranets Vitaliia O. - engineer of the Department of Applied Mathematics; V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine, 61022, e-mail: cherevko.vita@gmail.com; ORCID: 0000-0001-6386-3207.

Баранець Віталія Александровна - инженер кафедры прикладной математики; Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: cherevko.vita@gmail.com; ORCID: 0000-0001-6386-3207.

Кізілова Наталія Миколаївна – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Kizilova Natalya M. - DSc, professor of the Department of Applied Mathematics, V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Кизилова Наталья Николаевна - доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Дацок Олег Михайлович – кандидат технічних наук, доцент кафедри біомедичної електроніки; Харківський національний університет радіоелектроніки, проспект Науки, 14, Харків-166, Україна, 61166; e-mail: oleh.datsok@nure.ua; ORCID: 0000-0003-4489-3819.

Datsok Oleh M. – Cand. Sc. (Technology), Associate professor at Biomedical Electronics Department; Kharkiv National University of Radio Electronics, Nauky Ave., 14, Kharkiv-166, Ukraine, 61166, e-mail: oleh.datsok@nure.ua; ORCID: 0000-0003-4489-3819.

Дацок Олег Михайлович – кандидат технических наук, доцент кафедры биомедицинской электроники; Харьковский национальный университет радиоэлектроники, проспект Науки, 14, Харьков-166, Украина, 61166; e-mail: oleh.datsok@nure.ua; ORCID: 0000-0003-4489-3819.

UDC 004.942+656.052.1

Algorithm of Intelligent Urban Traffic

D.G. Boguto, K.K. Kadomskiy, P.K. Nikolyyuk, A.I. Pidgurska

*Faculty of Physics and Engineering, Vasyly' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, 21021, Ukraine**e-mail: p.nikolyuk@donnu.edu.ua*

The aim of this work is solution of a specific issue – traffic problem in a big city. To solve this problem we examined the city roads intersection - the main source of the traffic congestion. Intersection is a basic element in the technology of urban traffic regulation. Therefore, first of all, it is necessary to implement the intellectual regulation of vehicles movement through a separate intersection. Such regulation is carried out with a help of a computer program that takes into account the vehicle road situation at the intersection and the corresponding adjustment of the traffic lights signal phases. At a second stage it is necessary to plan an optimal route for each vehicle using, for example, A*-algorithm and the spectrum of data received from an infrastructure of the urban network. As a result of an application of these two phases of urban traffic regulation, an optimal movement regime of all city mobile transport is achieved.

Keywords: *intersection, piezoelectric sensor, A*-algorithm; traffic light, Java.*

Перехрестя у місті-мегаполісі є ключовим елементом при регулюванні потоків транспортних засобів. В нашому дослідженні представлена програма, що дозволяє оптимізувати проїзд транспортних засобів (ТЗ) через кожне окреме перехрестя. Проте це перший етап роботи. На другому, і найголовнішому, етапі розглядається проблема прокладання маршруту кожному ТЗ від його початкової позиції до кінцевого пункту. Важливо те, що приведена програма прокладає маршрут, оптимальний по часу, що корінним чином відрізняє її від сучасних технологій GPS-навігації, які прокладають геометрично оптимальні маршрути. Технічно реалізація процесу прокладання маршруту здійснюється з допомогою використання п'єзоелектричних датчиків, що монтуються на кожному перехресті. Ці датчики обраховують число колісних автомобільних пар, які перетнули перехрестя. Згадані пристрої поділяються на два типи – вхідні та вихідні. Перші реєструють число ТЗ, що в'їхали на дорогу одного напрямку між сусідніми перехрестями. Другі – число ТЗ, що виїжджають із кожної окремої смуги руху. Відповідно число таких датчиків повинно рівнятися числу смуг дороги одного напрямку між сусідніми перехрестями. Відношення між числом автомобілів, що в'їхали на дану ділянку дороги, до числа автомобілів, що виїхали з неї за час горіння зеленої фази світлофора, є вагомим критерієм, який свідчить про динаміку руху ТЗ. Чим ближчим є це відношення до одиниці, тим динаміка руху краща. Тому використовуваний у дослідженні алгоритм пошуку оптимального маршруту вибиратиме ділянки дороги, що формують маршрут, саме із таких компонентів. Зауважимо, що представлений у нашій роботі алгоритм прокладає оптимальні по часу, а не по шляху, маршрути. Це досягається шляхом введення в якості ваг ребер графів, що імітують транспортну мережу міста, динамічних величин з особливими характеристиками. Введення таких ваг дозволяє в режимі поточного часу відслідковувати зміни у трафіку та миттєво передавати їх на виконання водіям ТЗ. Пропонована технологія дозволить синхронізувати потоки ТЗ, суттєво зменшити час проїзду кожного автомобіля по маршруту, більш ефективно використовувати транспортні артерії – міський трафік перейде на якісно новий рівень.

Ключові слова: *перехрестя, мегаполіс, п'єзоелектричний сенсор, A*-алгоритм, світлофор, Java, оптимальний маршрут.*

Перекресток в городе-мегаполисе является ключевым элементом при регулировании потоков транспортных средств (ТС). В нашем исследовании представлена программа, позволяющая оптимизировать проезд ТС через каждый отдельный перекресток. Однако это первый этап работы. На втором, и главном, этапе рассматривается проблема прокладки маршрута каждому ТС от его начальной позиции до конечного пункта. Важно то, что приведенная программа прокладывает маршрут, оптимальный по времени, что коренным образом отличает ее от современных технологий GPS-навигации, которые прокладывают геометрически оптимальные маршруты. Технически реализация процесса прокладки маршрута осуществляется за счет использования пьезоэлектрических датчиков, монтируемых на каждом перекрестке. Эти датчики подсчитывают число колесных пар, пересекших перекресток. Упомянутые устройства делятся на два типа - входные и выходные. Первые регистрируют число ТС, въехавших на дорогу одного направления между соседними перекрестками. Вторые - число ТС, выезжающих с каждой отдельной полосы движения. Соответственно число таких датчиков должно равняться числу полос дороги одного направления между соседними перекрестками. Предлагаемая технология позволит синхронизировать потоки ТС и переведет городской трафик на качественно новый уровень.

Ключевые слова: *перекресток, мегаполис, пьезоэлектрический сенсор, A*-алгоритм, светофор, Java, оптимальный маршрут.*

1 Introduction

Traffic problems are extremely common for a modern metropolis but their resolution is to be achieved yet. First of all, such problems are due to traffic jam at the intersections and, as a consequence, the complexity of trip by each vehicle along chosen route. In order to prevent such phenomenon, the authors propose to apply a network of "smart" traffic lights at the first stage. Special sensors mounted at each intersection can significantly improve each individual crossroad capacity. But this is not enough. It is necessary to organize the optimal trip of each vehicle using mobile phones with a special applications

or GPS-navigators coordinating their routes with city traffic management system (CTMS). Thus, it is possible to control and to make optimal routes for all moving vehicles (drivers of such vehicles will be called IR-drivers). In detail the situation regarding the route planning for each vehicle is described in [1, 2]. Therefore, the main problem that will be solved in this article consists in the algorithms' combination for regulating the vehicles movement both through a separate intersection and throughout whole city. With this approach congestion level in metropolis can be much less than it is nowadays, and traffic functioning will move about to a qualitatively new level.

The basic problem of traffic regulation in urban network is optimization problem for vehicle traffic through a separate intersection which is a main source of traffic jams. By organizing effective traffic through crossroads, we will achieve higher traffic efficiency throughout a city. For organizing traffic, each vehicle needs to be registered. And there are many methods to register moving objects [1].

The most effective way to solve this problem is a method based on piezoelectric sensors mounted into a road surface. International Road Dynamics Inc. has developed a very effective design of the piezoelectric road traffic sensor RoadTrax BL [3]. The device is easily mounted into a roadway and is quite sensitive. A vehicle wheel pair riding on the sensor zone, 250 mV output signal is created, which is quite enough for registration. Generally, road sensors are divided into types, shown in Fig. 1.

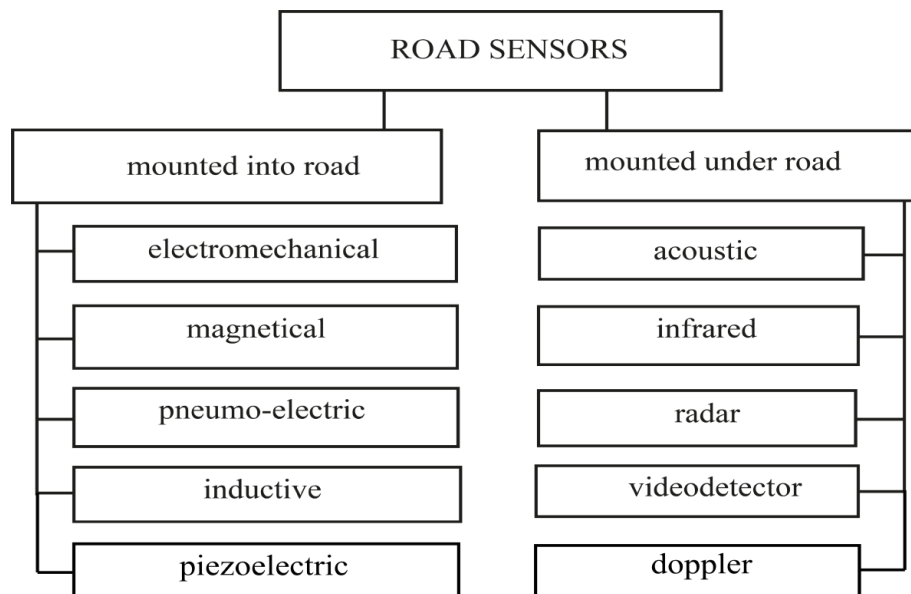


Fig.1 Classification of stationary sensors [4]. The most suitable for the solution of the posed problem are sensors mounted into a roadway, namely, piezoelectric and inductive sensors. However, mounting inductive sensors into a road is more problematic. That is why the authors have chosen simple but very effective piezoelectric sensors. The study [5] is focused on the investigation of the piezoelectric sensor characteristics 12-DOF type. This is a new high-sensitivity sensor capable of recording across a wide range of values. The device operates at a frequency of 11 kHz with an error margin no more than 1%. Vehicles registration algorithm which determines their positions is considered in [6].

Theoretical aspects of traffic optimizing on a separate overloaded crossroad are investigated in [7]. So-called discrete-time model for a cross-shaped intersection was considered and optimized system of equations had been created. The similar work is presented in the paper [8].

A large-scale study of the combined information methods obtained from a variety of road sensors, such as detectors, video cameras and radars, is explored in [9]. The technology of connected vehicles is also being investigated here, which enables to collect and analyze communications such as Vehicle-to-Infrastructure (V2I) and Vehicle-To-Vehicle (V2V) and thus reduces the probability of traffic congestion, increases traffic safety and reduces fuel consumption.

From the analytical point of view, it is necessary to create an algorithm and a computer program that will ensure the effective switching of traffic lights in accordance with the traffic load. From the technical side vehicle registration is carried out using piezoelectric sensors that fix a number of wheel pairs, proportional to a number of vehicles, which either to drive into part of the road between adjacent

intersections (so-called input sensors) or leave out this road segment – output sensors. In this case the input and output sensors at the neighboring intersections work consistently, transmitting data to CTMS. This allows controlling not only city crossings as autonomous objects, but all city routes as well.

2. Algorithms

The vehicle traffic regulation in a large city can be divided into two phases. The first phase includes a vehicle registration at separate intersections. The registration is organized as follows (Fig. 2). Here is shown a separate cross-shaped intersection equipped with piezoelectric sensors of RoadTrax BL mode [3], mounted into a road. Each sensor is a part of the signaling network connected to CTMS. When a vehicle wheel pair presses on such sensor, an electrical signal is being generated due to the piezoelectric effect and registered on CTMS.

The base of traffic regulation technology at the first phase is that an outgoing cell serves a separate regulated intersection. It is assumed that traffic lights cycle determined by a value that usually consists of the following components

$$T = tr_h + tgh + tyh + tp, \quad (1)$$

where tr_h – duration of the red light phase time in the horizontal direction;

tgh – duration of the green light phase in the horizontal direction;

tyh – duration of the yellow light phase in the horizontal direction;

tp – duration of the green light phase for pedestrians.

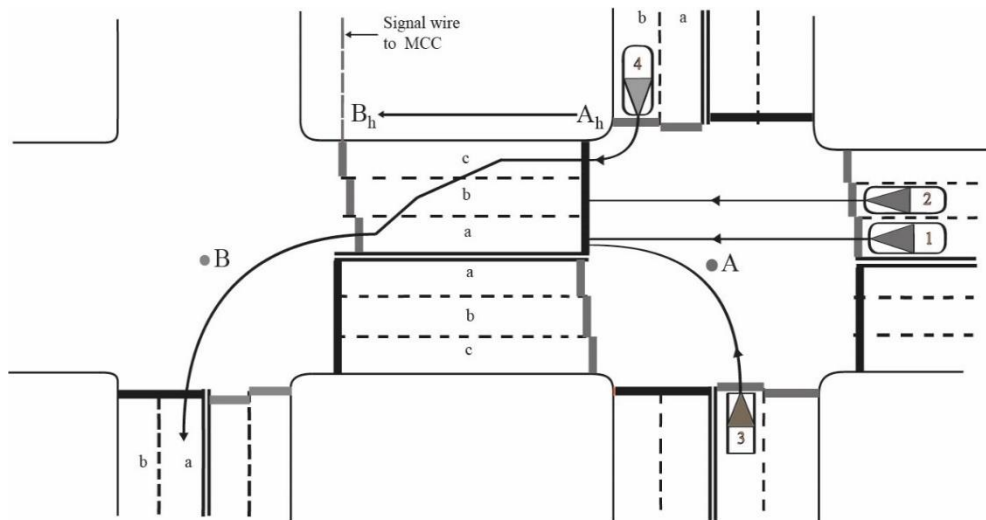


Fig.2. Crossroad A, connected with adjacent crossroad B [1]. The black rectangles depict the vehicles which move in the direction $A_h \rightarrow B_h$. Input sensors (black bars marked with letter A_h) and output sensors (three adjacent strips marked with letter B_h) are presented. Each input and output sensor is connected to the CTMS (only one signal wire is shown).

The corresponding notation is also available for the traffic lights cycle in the vertical direction: tr_v , tgv , tyv .

Using given variables, the traffic regulation program can be written as follows:

```
package IC;
import java.util.Random;
import static java.lang.StrictMath.abs;

interface Lights{
    int REDH =0;
    int YELLOWH =1;
    int GREENH =2;
    int REDV =3;
    int YELLOWV =4;
    int GREENV =5;
```

```
int GREENP = 6;
int ERROR = -1;
}
class T implements Lights {
    private int delay;
    private static int light = REDH;

    T(int sec) {
        delay = 1000 * sec;
    }

    public int shift() {
        int count = (light++) % 7;

        try {
            switch (count) {
                case REDH:
                    Thread.sleep(delay);
                    break;
                case YELLOWH:
                    Thread.sleep(delay / 3);
                    break;
                case GREENH:
                    Thread.sleep(delay / 2);
                    break;
                case REDV:
                    Thread.sleep(delay);
                    break;
                case YELLOWV:
                    Thread.sleep(delay / 3);
                    break;
                case GREENV:
                    Thread.sleep(delay / 2);
                    break;
                case GREENP:
                    Thread.sleep(delay);
                    break;
            }
        } catch (Exception e) {
            return ERROR;
        }
        return count;
    }
}

class TrafficRegulator {
    static int T = 96;
    private static IC.T t = new IC.T(1);
    static Random gn1 = new Random();
    static Random gn2 = new Random();
    static Random gn3 = new Random();
    static Random gn4 = new Random();

    public static void main(String[] args) {
        double k = abs ((gn1.nextDouble() + gn2.nextDouble()) /
            (gn3.nextDouble() + gn4.nextDouble()));
        double tg = 35;
```

```

double tp = 23;
double tyh = 2;

double tgh = k * tg;
double trh = (T - tyh - tgh - tp);
double tgv = abs(2*tg - tgh);
double trv = (T - trh);
double tgp = 23;
int tyv = 2;
for (int j = 0; j < 7; j++)
    switch (t.shift()) {
        case Lights.REDH:
            System.out.println("red horizontal!");
            System.out.format("%.1f%n",trh );
            break;
        case Lights.YELLOWH:
            System.out.println("yellow horizontal!");
            System.out.println(tyh);
            break;
        case Lights.GREENH:
            System.out.println("green horizontal!");
            System.out.format("%.1f%n",tgh);
            break;
        case Lights.REDV:
            System.out.println("red vertical!");
            System.out.format("%.1f%n",trv);
            break;
        case Lights.YELLOWV:
            System.out.println("yellow vertical!");
            System.out.println(tyv);
            break;
        case Lights.GREENV:
            System.out.println("green vertical!");
            System.out.format("%.1f%n",tgv);
            break;
        case Lights.GREENP:
            System.out.println("green pedestrian!");
            System.out.println(tgp);
            break;
        case Lights.ERROR:
            System.out.println("Time error!");
            break;
        default:
            System.err.println("Unknown light.");
            return;
    }
}
}

```

The program results are following:

red horizontal – 29.6; yellow horizontal! – 2.0; green horizontal! - 41.4; red vertical! – 66.4; yellow vertical! – 2; green vertical! – 28.6; green pedestrian! – 23.0. Process finished with exit code 0.

Let us analyze briefly this program regulating vehicle journeys through cross-shaped crossroads. Constant values of a type REDH are chosen – red light in horizontal direction. Basically, the program analyzes a traffic load of the crossroads: the more direction, horizontal or vertical is loaded the longer is

the green phase in the corresponding direction, within a traffic cycle, which is equal to 96 seconds in the chosen case. In order to simulate a real crossroad situation, the four generators of random variables are included in the program to simulate the loading. Actually, we are interested in ratio of the number of vehicles on the horizontal and vertical directions. In the program this ratio is denoted by coefficient k . The variation of this value simulates the traffic load changes at the intersection. Therefore, a range of numbers at the program output changes randomly each time. In particular, the value that specifies the green phase time (as well as the red one) in the horizontal and vertical directions changes from one traffic lights cycle to another.

Consequently, the presented program significantly improves the intersections capacity due to the "intellectual" mode of correlating the various traffic lights phases with the traffic loads on different directions at the crossroads. The program will produce different range of values at each run, but they will be correlated with the traffic load at the intersection: the more the direction is loaded the longer green phase in this direction will be and, accordingly, for the less loaded direction green light phase will be decreased proportionally. Generators of random variables $\text{Random gn} = \text{new Random}()$ are used as simulation values determining the loading of each direction. The generators are set randomly, but within a real number of vehicles that load the intersection in each traffic lights cycle. Thus, the traffic lights become "intelligent".

We now proceed to the second phase of a traffic regulation. Let us note that "intelligent" regulation is carried out not only at a separate intersection, but also between adjacent intersections. Fig. 2 represents the scheme of such a regulation, where the sensors belonging to a separate intersection are shown, as well as the sensors that regulate traffic on $A \rightarrow B$ lane, between adjacent intersections. This section of the road is controlled by the input and output sensors working as a unit for the purpose of a route planning (see below). In other words, each intersection does not work autonomously, but in close cooperation with adjacent intersections. The interaction is carried out due to the fact that input and output sensors (in Fig. 2 sensors A and B) work as a unit. Therefore it is possible to follow up the vehicle dynamics along the $A \rightarrow B$ road lane. On qualitative level, the movement dynamics is the ratio between the vehicles which have arrived to $A \rightarrow B$ lane during certain time (for example, during the traffic lights cycle) and vehicles that have left the lane. Technically, the process is organized as follows: the sensor A (input sensor) registers vehicles that enter the $A \rightarrow B$ lane from all possible directions of the intersection A. In turn, the complex of output sensors at the intersection B registers vehicles that have left the road lane. Thus, the entire transport network of the city is controlled by an intelligent traffic management system. The most important traffic problem is calculating for each IR-driver the requested route allowing to minimum possible travel time. For this purpose, it is necessary to calculate such a route for a given moment of time and for a given travel congestion.

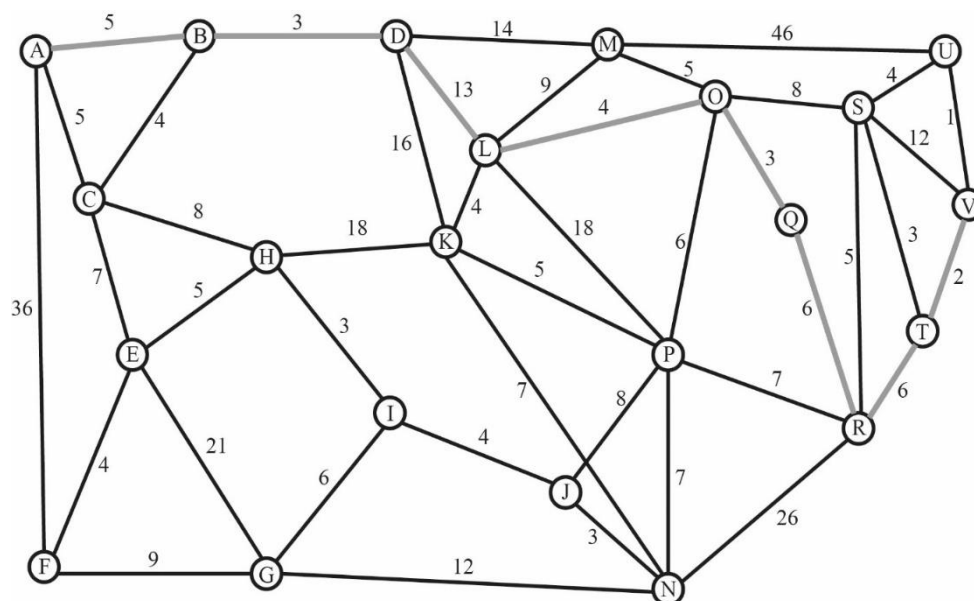


Fig. 3 The optimum route (gray thick line) between two vertices of weighted graph, planning by means of A^* -algorithm.

The city transport network can be represented as a weighted graph (Fig. 3). This is the first key message. Using a theory of graphs, it is possible to plan optimal routes by means of appropriate algorithms, namely, Dijkstra', Floyd-Warshall', or A* [10]. For our purposes, the most suitable option will be the A*-algorithm. This algorithm allows planning optimal route between two given vertices of the weighted graph (for example, A and V on fig.3). The second message is that weight of the graph edges rapidly change, so they need to be registered on-line, constantly updating the database where these values are stored. Input and output sensors, working as a pair, produce a spectrum of quantities $N_{A_h B_h}$ and $n_{A_h B_h}$. The first value is the number of vehicles that drive into the lane between adjacent intersections (on Fig. 2 it is $A \rightarrow B$ lane) during traffic light cycle, and the second – the number of vehicles that left the same road on the neighboring intersection B during the same time. The closer is the ratio $N_{A_h B_h} / n_{A_h B_h}$ to one; the better is the movement dynamics for the selected lane. On the contrary, the ratio less than one indicate either the blocked state of the intersection B (Fig. 2) or a nearly blocked state. Correspondingly, weight of an edge (in other words, the vehicle impedance of the lane $\rightarrow B$) assumes a bigger value, i.e. $\frac{N_{A_h B_h}}{n_{A_h B_h}} \gg 1$. In this situation the program looking for the optimal route in the graph dismisses such a weighed lane. Therefore, for optimal route planning on the graph (or in urban network), it is necessary to minimize the following value:

$$\sum_{h=1}^f (N_{A_h B_h} / n_{A_h B_h}) l_{A_h B_h} \rightarrow \min. \quad (2)$$

Here h is an index denoting lane numbers along the route (in other words, the edges of the graph), which are interconnected and form an inseparable trajectory (a simple chain path in the terms of graph theory), connecting the origin A and the destination V positions of IR-driver path (Fig. 3). The value $l_{A_h B_h}$ represents geometrical distance between adjacent intersections. The symbol f indicates a number of lanes of type $A_h B_h$. For each declared pair (A_i, B_i) the program forms an inseparable chain linking points A_i and V_i from (2). Thus, all city roads are under control of CMTS. The values on the left side of the expression (2) are weights of the graph edges (Fig. 3). These values should be updated every 10 seconds and, accordingly, the intelligent traffic control system will plan routes for all IR-drivers taking into account traffic situation for a given time period. In other words, the system works in "on-line" mode, which radically distinguishes it from the existing similar systems, Google-maps, for example. Transmission of data received by CMTS from city network sensors to each user (IR-driver) is used. Urban traffic situation is very dynamic and changeable. That is why CMTS database is updated every 10 seconds, and, accordingly, the data received by IR-drivers have an online mode too.

For planning a route for each IR-driver, A*-algorithm is used. The program [10] corresponding to the graph in Fig. 3 is following:

```
package IC-1;
import java.util.PriorityQueue;
import java.util.HashSet;
import java.util.Set;
import java.util.List;
import java.util.Comparator;
import java.util.ArrayList;
import java.util.Collections;

public class AstarSearchAlgo {
    //h scores is the stright-line distance from A to V
    public static void main(String[] args) {
        //initialize the graph map
        Node A = new Node("A", 34);
        Node B = new Node("B", 31);
        Node C = new Node("C", 30);
        Node D = new Node("D", 27);
        Node E = new Node("E", 29);
        Node F = new Node("F", 33);
```

```
Node G = new Node("G", 27);
Node H = new Node("H", 24);
Node I = new Node("I", 23);
Node J = new Node("J", 19);
Node K = new Node("K", 19);
Node L = new Node("L", 19);
Node M = new Node("M", 20);
Node N = new Node("N", 16);
Node O = new Node("O", 13);
Node P = new Node("P", 13);
Node Q = new Node("Q", 9);
Node R = new Node("R", 8);
Node S = new Node("S", 6);
Node T = new Node("T", 3);
Node U = new Node("U", 3);
Node V = new Node("V", 0);
//initialize the edges
A.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(B, 5),
    new Edge(C, 5),};
B.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(D, 3),
    new Edge(C, 4),
    new Edge(F, 36)};
C.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(B, 4),
    new Edge(D, 7),
    new Edge(E, 7),
    new Edge(H, 8)};
D.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(M, 14),
    new Edge(L, 13),
    new Edge(K, 16),
    new Edge(H, 11),
    new Edge(C, 7),
    new Edge(B, 3),};
E.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(C, 7),
    new Edge(H, 5),
    new Edge(F, 4),
    new Edge(G, 21),};
F.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(E, 4),
    new Edge(G, 9),
    new Edge(A, 36),};
G.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(F, 9),
    new Edge(N, 12),
    new Edge(I, 6),
    new Edge(E, 21),};
H.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(D, 11),
    new Edge(E, 5),
    new Edge(I, 3),
    new Edge(C, 8),
    new Edge(K, 18)};
```

```
I.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(J, 4),
    new Edge(H, 3),
    new Edge(I, 6),};
J.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(P, 8),
    new Edge(N, 3),
    new Edge(I, 4)};
K.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(L, 5),
    new Edge(P, 5),
    new Edge(N, 7),
    new Edge(D, 16),
    new Edge(H, 18)};
L.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(M, 9),
    new Edge(O, 4),
    new Edge(K, 5),
    new Edge(D, 13),
    new Edge(P, 18)};
M.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(O, 5),
    new Edge(L, 9),
    new Edge(D, 14),
    new Edge(U, 46),};
N.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(K, 7),
    new Edge(P, 7),
    new Edge(G, 12),
    new Edge(J, 3),
    new Edge(R, 26)};
O.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(M, 5),
    new Edge(L, 4),
    new Edge(Q, 3),};
P.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(K, 5),
    new Edge(J, 8),
    new Edge(N, 7),
    new Edge(Q, 4),
    new Edge(R, 7),
    new Edge(L, 18),};
Q.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(P, 4),
    new Edge(O, 3),
    new Edge(R, 6),};
R.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(P, 7),
    new Edge(Q, 6),
    new Edge(S, 5),
    new Edge(T, 6),
    new Edge(N, 26),};
S.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(O, 8),
    new Edge(R, 5),
```

```

    new Edge(U, 4),
    new Edge(T, 3),
    new Edge(V, 12),});
T.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(V, 2),
    new Edge(R, 6),
    new Edge(S, 3),});
U.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(S, 4),
    new Edge(V, 1),
    new Edge(M, 46),});
V.adjacencies = new Edge[]{
    new Edge(U, 1),
    new Edge(T, 2),
    new Edge(S, 12),});
AstarSearch(A, V);
List<Node> path = printPath(V);
    System.out.println("Path: " + path);
}

public static List<Node> printPath(Node target) {
    List<Node> path = new ArrayList<Node>();
    for (Node node = target; node != null; node = node.parent) {
        path.add(node);
    }
    Collections.reverse(path);
    return path;
}

public static void AstarSearch(Node source, Node goal) {
    Set<Node> explored = new HashSet<Node>();
    PriorityQueue<Node> queue = new PriorityQueue<Node>(30, new Comparator<Node>() {
        //override compare method
        public int compare(Node i, Node j) {
            if (i.f_scores > j.f_scores) {
                return 1;
            } else if (i.f_scores < j.f_scores) {
                return -1;
            } else {
                return 0;
            }
        }
    });
    //cost from start

    source.g_scores = 0;
    queue.add(source);
    boolean found = false;
    while ((!queue.isEmpty()) && (!found)) {
        //the node in having the lowest f_score value
        Node current = queue.poll();
        explored.add(current);
        //goal found
        if (current.value.equals(goal.value)) {
            found = true;
        }
    }
}

```


flows will occur, which will result in complete disappearance of congestions in a transport network and will allow each driver to arrive at the destination within a minimal period of time.

The testing of the program has been performed on graph with number of vertices up to 150 and number of edges 430. The execution time is 4s 580ms. An algorithmic complexity of A*-algorithm is $O(n)$, (n – input data volume) which makes it quite effective for programs with a large amount of input data.

It should be noted that information obtained from GPS is an important factor in improving the reliability of data derived from input and output sensors. The fact is that almost every driver has a GPS navigator or a smartphone with the Google Maps program. Therefore GPS data can be used as an additional source of information. The situation is described in details in [11-15]. Taking into account the specifics of task and statistical nature of received data there is no need to determine precisely a position of each vehicle: only statistical character of the data is important. Why is it important to combine the data from piezoelectric sensors with GPS data? The data received from the sensors – incoming and outgoing – located between adjacent intersections play the main role in our program. But the considered technology involves using GPS-navigators by IR-drivers. It is therefore logical to use the information synthesized from both GPS and sensors data. An expediency of combining stationary and mobile data received from GPS-devices or smartphones is indicated in [16], for example. The similar algorithm of using GPS data for planning optimal routes is discussed in details in [17, 18].

3. Conclusions

The aim of the work is to create solution for the urban traffic problems. It is planned to use this technology for practical purposes.

ЛІТЕРАТУРА

1. Богуто Д.Г., Волинець В.І., Ніколюк П.К., Ніколюк П.П. Автоматизована система керування рухом транспортних засобів в межах міста. *Вісник ХНУ серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2017. Вип.35. С.5 – 12.
2. Богуто Д.Г., Комаров В.Ф., Ніколюк П.К., Ніколюк П.П. Інтелектуальний алгоритм управління міським трафіком. *Вісник ХНУ серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2017. Вип.38. С.46 – 57.
3. *Piezoelectric RoadTraxB*. URL:<http://www.irdinc.com/pcategory/axle-sensors-accessories/piezoelectric-roadtrax-bl.html>. (дата звернення: 15.05.2019).
4. *Vehicle Sensing: Ten Technologies to Measure Traffic*. URL: <https://www.azosensors.com/article.aspx?ArticleID=95>. 06.06.2018 (дата звернення: 16.05.2019).
5. Jun Liu, Chuan-Wei Liang, Min Li, Ke Jian, Lan Qin, Jing-Cheng Liu. Principle Research on a Novel Piezoelectric 12-DOF Force/Acceleration Sensor. *J. of Sensors*. ID 2836365. 2017. P.116 – 124.
6. Yingfeng Cai, Ze Liu, Xiaoqiang Sun, Long Chen, Hai Wang, and Yong Zhang. Vehicle Detection Based on Deep Dual-Vehicle Deformable Part Models. *J. of Sensors*. ID 5627281. 2017. P.103 – 117.
7. Jiyuan Tan, Xiangyun Shi, Zhiheng Li, Kaidi Yang, Na Xie, Haiyang Yu, Li Wang, Zhengxi Li. Continuous Discrete-Time Optimal Controls for an Isolated Signalized Intersection. *Journal of Sensors*. ID 6290248. 2017. P. 11 – 19.
8. Ilya Ioslovich, Jack Haddad, Per-Olof Gutman, David Mahalel. Optimal traffic control synthesis for an isolated intersection. *Control Engineering Practice*. 2011. V.19, №8. P. 900-911.
9. Pang-wei Wang, Hong-bin Yu, Lin Xiao, Li Wang. Online Traffic Condition Evaluation Method for Connected Vehicles Based on Multisource Data Fusion. *J. of Sensors*. ID 7248189. 2017. P. 123 – 131.
10. *Java Programming Examples on Graph Problems & Algorithms*. URL: <https://www.sanfoundry.com/java-programming-examples-graph-problems-algorithms> (дата звертання: 06.04.2019).
11. Mohammed Quddu, Simon Washing-ton. Shortest path and vehicle trajectory aided map-matching for low frequency GPS data. *Transportation Research. Part C*. 2015. V.55. P. 328-339.
12. Sina Dabiri, Kevin Heaslip. Inferring transportation modes from GPS trajectories using a convolutional neural network. *Transportation Research, Part C*. 2018. V.86. P. 360–37.

13. Feilong Wang, Cynthia Chen. On data processing required to derive mobility patterns from passively-generated mobile phone data. *Transportation Research, Part C*. 2018. V.87. P. 58–74.
14. X. Ma, H. Yu, Y. Wang, Y. Wang, J. Gomez-Gardenes. Large-scale transportation network congestion evolution prediction using deep learning theory. *PLoS ONE*. 2015. V.10. №3. P. 171–185.
15. Mahdi Hashemi, Hassan A. Karimi. A weight-based map-matching algorithm for vehicle navigation in complex urban networks. *J. of Intel. Transp. Systems*. 2016. V.20, №6. P. 45-76.
16. Mahmood Rahmani, Eric Jenelius, Harilaos N. Koutsopoulos. Floating car and camera data fusion for non-parametric route travel time estimation. *Procedia Comp. Science*. 2014. V.37. P. 390-395.
17. Masoud Fadaei Oshyaniv, Marcus Sundberg, Anders Karlström. Consistently estimating link speed using sparse GPS data with measured errors. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. 2014. V.111. P. 829-838.
18. Ashish Kumar Patnaika, Prasanta Kumar Bhuyan, K.V. Krishna Rao. Divisive Analysis (DIANA) of hierarchical clustering and GPS data for level of service criteria of urban streets. *AEJ*. 2016. V. 55. P. 407-418.

REFERENCES

1. D.G.Bohuto, V.I.Volynets, P.K.Nikoluk, P.P.Nikolyuk, “Automated management system of vehicles movement within the city”. *Bulletin of the Kharkov University, series “Math. Mod., Inform. Technol., Automated Cont. Syst.”*, vol.35, pp. 5 –12, 2017. [in Ukrainian]
2. D.G.Bohuto, V.F.Komarov, P.K. Nikoluk, P.P. Nikolyuk, “Intelligent urban traffic management algorithm”. *Bulletin of the Kharkov University, series “Math. Mod., Inform. Technol., Automated Cont. Syst.”*, vol.39, pp. 51-62, 2018. [in Ukrainian]
3. Piezoelectric RoadTraxBL, <http://www.irdinc.com/pcategory/axle-sensors-accessories/piezoelectric-roadtrax-bl.html>. [May 06.2018].
4. Vehicle Sensing: Ten Technologies to Measure Traffic, <https://www.azosensors.com/article.aspx?ArticleID=95>. 06.06.2018.
5. Jun Liu, Chuan-Wei Liang, Min Li, Ke Jian, Lan Qin, and Jing-Cheng Liu, “Principle Research on a Novel Piezoelectric 12-DOF Force/Acceleration Sensor”. *J. of Sensors*, ID 2836365, pp. 116 – 124, 2017.
6. Yingfeng Cai, Ze Liu, Xiaoqiang Sun, Long Chen, Hai Wang, and Yong Zhang, “Vehicle Detection Based on Deep Dual-Vehicle Deformable Part Models”. *J. of Sensors*, ID 5627281, pp. 103 – 117, 2017.
7. Jiyuan Tan, Xiangyun Shi, Zhiheng Li, Kaidi Yang, Na Xie, Haiyang Yu, Li Wang, Zhengxi Li, “Continuous and Discrete-Time Optimal Controls for an Isolated Signalized Intersection”. *Journal of Sensors*, ID 6290248, pp.11 – 19, 2017.
8. Ilya Ioslovich, Jack Haddad, Per-Olof Gutman, David Mahalel, “Optimal traffic control synthesis for an isolated intersection”, *Control Engineering Practice*, vol.19, no.8, pp. 900 –911, 2011.
9. Pang-wei Wang, Hong-bin Yu, Lin Xiao, Li Wang, “Online Traffic Condition Evaluation Method for Connected Vehicles Based on Multisource Data Fusion”. *J. of Sensors*, ID 7248189, pp. 123–131, 2017.
10. Java Programming Examples on Graph Problems & Algorithms, <https://www.sanfoundry.com/java-programming-examples-graph-problems-algorithms>. [May 06.2018].
11. Mohammed Quddu, Simon Washing-ton, “Shortest path and vehicle trajectory aided map-matching for low frequency GPS data”. *Transportation Research Part C*, vol.55, pp. 328-339, 2015.
12. Sina Dabiri, Kevin Heaslip, “Inferring transportation modes from GPS trajectories using a convolutional neural network”. *Transportation Research, Part C*, vol.86, pp. 360–37, 2018.
13. Feilong Wang, Cynthia Chen, “On data processing required to derive mobility patterns from passively-generated mobile phone data”. *Transportation Research, Part C*, vol.87, pp. 58–74, 2018.
14. X. Ma, H. Yu, Y. Wang, Y. Wang, and J. Gomez-Gardenes, “Large-scale transportation network congestion evolution prediction using deep learning theory”. *PLoS ONE*, vol.10, no.3, pp. 171 – 185, 2015.
15. Mahdi Hashemi, Hassan A. Karimi, “A weight-based map-matching algorithm for vehicle navigation in complex urban networks”. *J. of Intel. Transp. Systems*, vol. 20, no.6, pp. 45-76, 2016.

16. Mahmood Rahmani, Eric Jenelius, Harilaos N. Koutsopoulos, "Floating car and camera data fusion for non-parametric route travel time estimation". *Procedia Comp. Science*, vol.37, pp. 390-395, 2014.
17. Masoud Fadaei Oshyaniv, Marcus Sundberg, Anders Karlström, "Consistently estimating link speed using sparse GPS data with measured errors". *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, vol. 111, pp. 829-838, 2014.
18. Ashish Kumar Patnaika, Prasanta Kumar Bhuyan, K.V. Krishna Rao, "Divisive Analysis (DIANA) of hierarchical clustering and GPS data for level of service criteria of urban streets". *AEJ*, vol.55, pp. 407-418, 2016.

Boguto Denys Gennadiyovich – post graduate student of physical and engineering department of Vasil' Stus Donetsk National University, Vinnytsia-21, 600-richchia str, 21, 21021; e-mail: d.boguto@donnu.edu.ua; ORCID: 0000-0001-6288-3070.

Богуто Денис Геннадійович – аспірант фізико-технічного факультету Донецького національного університету імені Василя Стуса, Вінниця-21, вул. 600-річчя, 21, 21021; e-mail: d.boguto@donnu.edu.ua; ORCID: 0000-0001-6288-3070.

Boguto Denys Gennadiyovich – аспірант фізико-технічного факультета Донецького національного університету імені Василя Стуса, Вінниця-21, ул. 600-летия, 21, 21021; e-mail: d.boguto@donnu.edu.ua; ORCID: 0000-0001-6288-3070.

Kadomskiy Kirilo Kostantinovich – senior lecturer of physical and engineering department of Vasil' Stus Donetsk National University, Vinnytsia-21, 600-richchia str, 21, 21021; e-mail: k.kadomsky@donnu.edu.ua; ORCID: 0000-0002-6163-3704.

Кадомський Кирило Костянтинович – старший викладач фізико-технічного факультету Донецького національного університету, Вінниця-21, вул.600-річчя, 21, 21021; e-mail: k.kadomsky@donnu.edu.ua; ORCID: 0000-0002-6163-3704.

Кадомский Кирилл Константинович – старший преподаватель физико-технического факультета Донецького національного університету імені Василя Стуса, Вінниця-21, ул. 600-летия, 21, 21021; e-mail: k.kadomsky@donnu.edu.ua; ORCID: 0000-0002-6163-3704.

Nikolyuk Peter Karpovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor of computer technologies chair of Vasil' Stus Donetsk National University, Vinnytsia-21, 600-richchia str, 21, 21021; e-mail: nikolyuk54@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0286-297X.

Ніколюк Петро Карпович – доктор фізико-математичних наук фізико-технічного факультету Донецького національного університету імені Василя Стуса, Вінниця-21, вул. 600-річчя, 21, 21021; e-mail: nikolyuk54@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0286-297X.

Николюк Петр Карпович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры компьютерных технологий и физико-технического факультета Донецького національного університету імені Василя Стуса, Вінниця-21, ул. 600-летия, 21, 21021; e-mail: nikolyuk54@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0286-297X.

Pidgurska Anastasia Igorivna – student of third course of physical and engineering department of Vasil' Stus Donetsk National University, Vinnytsia-21, 600-richchia str, 21, 21021; e-mail: pidhurska.a@donnu.edu.ua; ORCID: 0000-0001-5349-0689.

Підгурська Анастасія Ігорівна – студентка третього курсу фізико-технічного факультету Донецького національного університету імені Василя Стуса, Вінниця-21, вул.600-річчя, 21, 21021; e-mail: pidhurska.a@donnu.edu.ua; ORCID: 0000-0001-5349-0689.

Пидгурская Анастасия Игоревна – студентка третьего курса физико-технического факультета Донецького національного університету імені Василя Стуса, Вінниця-21, ул.600-летия, 21, 21021; e-mail: pidhurska.a@donnu.edu.ua; ORCID: 0000-0001-5349-0689.

УДК 004.42:621.311

Система розрахунку окупності впровадження мережевих сонячних електростанцій в приватних домоволодіннях

І.В. Гарячевська, В.В. Іванющенко, Д.О. Протектор

*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua*

У статті описується система розрахунку окупності впровадження мережевих сонячних електростанцій в приватних домоволодіннях, які розташовуються на території України. При розрахунку виробки мережевої сонячної електростанції враховуються такі параметри як пряме, розсіяне та відбите сонячне випромінювання з урахуванням атмосферного ослаблення, кут нахилу даху та його орієнтація, середньодобова температура фотоелементів в різні пори року, температурний коефіцієнт потужності сонячних панелей, а також коефіцієнт, що враховує втрати сонячної панелі при перетворенні та передачі електроенергії. Потік сонячного випромінювання, який падає на поверхню фотоелементів, визначається в рамках моделі Хей-Девіса. При розрахунку економічної складової, системою враховується річне споживання електроенергії, поточна ціна на електроенергію, ціна по «Зеленому тарифу», а також річне зростання цін на електроенергію. Середня ринкова вартість мережевої сонячної електростанції береться з розрахунку 1\$ за 1Вт встановленої потужності. На підставі отриманих даних система обчислює місячну, середньодобову та річну виробки мережевої сонячної електростанції, розраховує відносну вартість мережевої сонячної електростанції, будує прогноз витрат споживача на електроенергію протягом наступних двадцяти років, а також обчислює річний дохід по «Зеленому тарифу». Фінальним етапом роботи системи, є розрахунок періоду окупності впровадження мережевої сонячної електростанції з точністю до року. Місячна і середньодобова виробки мережевої сонячної електростанції, прогноз витрат споживача на електроенергію на протязі двадцяти років, а також окупність мережевої сонячної електростанції відображаються в системі у вигляді відповідних графіків і діаграм.

Ключові слова: мережева сонячна електростанція, «Зелений тариф», виробка, економічна ефективність, термін окупності, комп'ютерна програма.

В статье описывается система расчёта окупаемости внедрения сетевых солнечных электростанций в частных домовладениях, которые располагаются на территории Украины. При расчёте выработки сетевой солнечной электростанции учитываются такие параметры как прямое, рассеянное и отражённое солнечное излучение с учётом атмосферного ослабления, угол наклона кровли и её ориентация, среднесуточная температура фотоэлементов в различное время года, температурный коэффициент мощности солнечных панелей, а также коэффициент, учитывающий потери солнечной панели при преобразовании и передачи электроэнергии. Поток солнечного излучения, который падает на поверхность фотоэлементов, определяется в рамках модели Хэй-Дэвиса. При расчёте экономической составляющей, системой учитывается годовое потребление электроэнергии, текущая цена на электроэнергию, цена по «Зелёному тарифу», а также годовой рост цен на электроэнергию. Средняя рыночная стоимость сетевой солнечной электростанции берётся из расчёта 1 \$ за 1 Вт установленной мощности. На основании полученных данных система вычисляет месячную, среднесуточную и годовую выработки сетевой солнечной электростанции, рассчитывает относительную стоимость сетевой солнечной электростанции, строит прогноз затрат потребителя на электроэнергию в течение последующих двадцати лет, а также вычисляет годовой доход по «Зелёному тарифу». Завершающим этапом работы системы, является расчёт периода окупаемости внедрения сетевой солнечной электростанции с точностью до года. Месячная и среднесуточная выработки сетевой солнечной электростанции, прогноз затрат потребителя на электроэнергию в течение двадцати лет, а также окупаемость сетевой солнечной электростанции отображаются в системе в виде соответствующих графиков и диаграмм. В случае если капиталовложения, необходимые на постройку и введение в эксплуатацию сетевой солнечной электростанции не окупятся в течение двадцати лет, система отобразит данную информацию в соответствующем окне программы.

Ключевые слова: сетевая солнечная электростанция, «Зелёный тариф», выработка, экономическая эффективность, срок окупаемости, компьютерная программа.

The article presents the payback calculation system of introducing networked solar power plants for private Ukrainian households. The system takes into account such parameters as beam, ground-reflected and diffuse solar radiation accounting for atmospheric attenuation, the angle and the orientation of roofs, the daily average temperature of photovoltaic cells and the temperature coefficient of solar panels, when calculating the output of a networked solar power plant. The flux of solar radiation that falls on the surface of photovoltaic cells is determined using the Hay-Davis model. Calculating payback, the system takes into account such parameters as annual electricity consumption, current price of electricity, feed-in tariff and annual electricity price increase. The average market price of a networked solar power plant is taken at the rate of 1 dollar per 1 watt of installed capacity. Based on these parameters, the system calculates monthly, daily average and annual output of a networked solar power plant, calculates the relative cost of a networked solar power plant, calculates the electricity cost forecast over twenty years, and calculates a payback period of a networked solar power plant. Monthly and daily average output of a networked solar power plant, electricity cost forecast over twenty years and a payback period for a network solar power plant are displayed in the system as corresponding graphs and diagrams. In case if investments necessary for the construction and commissioning of a networked solar power plant do not pay off within twenty years, the system will display this information in the corresponding field.

Keywords: network solar power plant, feed-in tariff, generation, economic efficiency, payback period, computer program.

1 Вступ

Сонце – єдина зірка, розташована в центрі нашої сонячної системи. Земля й інші планети обертаються навколо Сонця. Сонячна енергія в формі сонячного випромінювання підтримує практично все життя на Землі за допомогою фотосинтезу та керує кліматом і погодою Землі.

Найбільшою перевагою сонячної енергії в порівнянні з іншими видами енергії є її екологічна чистота і можливість її використання без забруднення навколишнього середовища. За минуле століття горючі корисні копалини покрили більшу частину наших енергетичних потреб, оскільки їх вартість була набагато дешевшою в порівнянні з енергією, яка отримується з альтернативних джерел.

За підтвердженими даними світові запаси нафти складають 1341 млрд. барелів (2009 р.), світові запаси вугілля складають 948 000 млн. тонн (2008 р.), а світові запаси природного газу – 178.3 трлн. м³ (2009 р.) Поточний видобуток нафти дорівнює 87.4 млн. барелів на добу, вугілля – 21.9 млн. тонн на добу, природного газу – 9.05 млрд. м³ на добу. Таким чином, основна проблема полягає в тому, що підтверджених запасів нафти та газу при нинішніх темпах споживання вистачить для задоволення попиту ще на 37 і 49 років відповідно, а світові запаси вугілля зникнуть протягом наступних 115 років.

Якщо спробувати поглянути на наслідки, які виникнуть через обмеженість запасів горючих корисних копалин, то опинимось в ситуації, коли зростання цін на паливо буде прискорюватися по мірі зменшення їх запасів. Враховуючи, що ціна на нафту утвердилася в якості лідера цін на всі види палива, можна зробити висновок, що ціни на енергоносії будуть невпинно зростати протягом наступних десятиліть. Крім того, буде наростати все більше занепокоєння через забруднення навколишнього середовища, спричиненого спалюванням горючих корисних копалин.

2 Ступінь розробленості теми та постановка проблеми

Споконвіку людство усвідомило, що розумне використання сонячної енергії може приносити користь суспільству. Незважаючи на це, тільки недавно, протягом останніх 40 років, сонячна енергія почала використовуватися в якості альтернативного джерела енергії, головним чином тому, що вона є необмеженою і не завдає шкоди навколишньому середовищу. Сонячна енергія використовується для опалення та охолодження будинків, при нагріванні води для побутових і промислових потреб, для обігріву басейнів, в силових холодильниках, для роботи двигунів і насосів, при опрісненні води, для виробки електроенергії та інше.

Якщо світова інфраструктура буде і далі розвиватися, то попит на електроенергію збільшиться, навіть якщо буде вжито всіх зусиль для підвищення ефективності використання електроенергії. В даний час прийнято вважати, що технології засновані на використанні поновлюваних джерел енергії, можуть задовольнити більшу частину зростаючого попиту на електроенергію за цінами рівним, або навіть меншими, ніж ті, які зазвичай прогноуються при використанні традиційної енергетики.

До середини XXI століття електроенергія, яка виробляється електростанціями, що працюють від альтернативних джерел енергії, може становити три п'ятих світового ринку електроенергії. З кожним днем все більша кількість людей відмовляється від використання традиційної енергетики на користь альтернативних джерел енергії. Більш ніж в 50 країнах розроблено та впроваджено механізм «Зеленого тарифу» для залучення інвестицій в технології використання поновлюваних джерел енергії. В основі «Зеленого тарифу» лежать три основні чинники: гарантія підключення до мережі, довгостроковий контракт на покупку всієї виробленої відновлюваної електроенергії, а також надбавка до вартості виробки електроенергії. В Україні найбільшу ставку «Зеленого тарифу» має електроенергія, яка надходить з сонячного випромінювання [1], тобто виробляється сонячними електростанціями. У зв'язку з чим, серед населення все більше зростає попит на будівництво приватних мережевих сонячних електростанцій.

Незважаючи на всі переваги альтернативних енерготехнологій, головним стримуючим фактором при переході на сонячні електростанції є їх ціна. Середня ринкова вартість мережевої сонячної електростанції становить 1\$ за 1Вт встановленої потужності [2]. Спеціально для оцінки окупності сонячних електростанцій багатьма фірмами розробляються різні програмні продукти, які дозволяють розрахувати термін повернення інвестицій, витрачених на будівництво та введення в експлуатацію мережевої сонячної електростанції, від моменту її установки. Однак,

результати їх обчислень, носять приблизний характер, і в кращому випадку відрізняються від реальних показників на 15-20% [3-6].

Питання розрахунку окупності впровадження приватних мережевих сонячних електростанцій розглядаються в роботах [7-9].

3 Мета та постановка завдання

Метою роботи є розробка системи розрахунку окупності впровадження мережевих сонячних електростанцій, яка призначена для розрахунку виробки сонячної електростанції, що встановлюється в приватних домоволодіннях на території України, а також термінів повернення інвестицій витрачених на її впровадження.

Для досягнення поставленої мети були вирішені наступні завдання:

- досліджено принцип роботи мережевих сонячних електростанцій;
- проаналізована нормативна і законодавча база, що стосується функціонування мережевих сонячних електростанцій на території України;
- розглянуті типові рішення по впровадженню мережевих сонячних електростанцій в приватних домоволодіннях;
- проаналізована вартість електроенергії для населення, яке проживає в житлових будинках на території України;
- досліджено механізм роботи «Зеленого тарифу»;
- розглянуті алгоритми роботи готових програмних продуктів для розрахунку окупності мережевих сонячних електростанцій та виявлено їх суттєві недоліки;
- розроблено архітектуру системи розрахунку окупності впровадження мережевих сонячних електростанцій;
- розроблено інтерфейс програмного продукту;
- проведено тестування розробленої системи.

4 Розрахунок виробки мережевої сонячної електростанції

Основним фактором, що впливає на виробку сонячної електростанції, є загальне сонячне випромінювання S , яке поглинається сонячними панелями. Загальне сонячне випромінювання залежить від значень падаючого випромінювання G , атмосферної маси m , кута нахилу сонячної панелі від горизонтального напрямку β та її орієнтації. Для знаходження сонячного випромінювання, яке поглинається сонячними панелями, необхідно використовувати дані про сонячне випромінювання, що падає на горизонтальну поверхню та інформацію про кут падіння. Поглинене сонячне випромінювання складається з прямого, розсіяного і відбитого сонячного випромінювання. Для розрахунку загального поглиненого сонячного випромінювання S використовується модель Хей-Девіса:

$$S = m \left\{ (G_B (\tau\alpha)_B + G_D (\tau\alpha)_D A) R_B + G_D (\tau\alpha)_D (1 - A) \left[\frac{1 + \cos(\beta)}{2} \right] + \rho (G_B + G_D) (\tau\alpha)_G \left[\frac{1 - \cos(\beta)}{2} \right] \right\} \quad (4.1)$$

де G_B – пряме випромінювання, яке падає на горизонтальну поверхню, $(\tau\alpha)_B$ – коефіцієнт пропускання-поглинання для прямого випромінювання, G_D – розсіяне випромінювання, яке падає на горизонтальну поверхню, $(\tau\alpha)_D$ – коефіцієнт пропускання-поглинання для розсіяного випромінювання, A – коефіцієнт анізотропії, R_B – коефіцієнт нахилу випромінювання, ρ – відбивна здатність, $(\tau\alpha)_G$ – коефіцієнт пропускання-поглинання для відбитого від землі випромінювання.

Сумарна номінальна потужність сонячної електростанції W_{TOTAL} :

$$W_{TOTAL} = L W_{CELL} \quad (4.2)$$

де L – загальна кількість сонячних панелей, W_{CELL} – номінальна потужність однієї сонячної панелі.

Добова виробка сонячної електростанції P_{DAY} розраховується за формулою:

$$P_{DAY} = \frac{S K_{LOSS}}{I} \left[\left(\frac{K_P}{100} W_{TOTAL} \right) (T_C - 25) + W_{TOTAL} \right] \quad (4.3)$$

де K_{LOSS} – коефіцієнт, що враховує втрати сонячної панелі при перетворенні та передачі електроенергії, I – інтенсивність сонячного випромінювання, при якому тестуються сонячні панелі (умови STC) 1000 Вт/м^2 , K_P – температурний коефіцієнт потужності сонячної панелі, T_C – температура фотоелементів.

Продуктивність сонячної електростанції залежить від температури фотоелементів. Як правило, при підвищенні температури фотоелементів, ефективність сонячної електростанції знижується. Ласньє та Енг в 1990 році отримали емпіричну формулу, яка може бути використана для розрахунку температури фотоелементів сонячної електростанції, що складаються з полікристалічного кремнію [10]:

$$T_C = 30 + 0.0175(G_t - 300) + 1.14(T_A - 25) \quad (4.4)$$

де T_A – температура навколишнього середовища.

Місячна виробка сонячної електростанції P_{MONTH} :

$$P_{MONTH} = \sum_{i=1}^M P_{DAY}^i \quad (4.5)$$

де M – кількість днів у місяці, P_{DAY}^i – виробка сонячної електростанції в i -ий день місяця.

Середньодобова виробка сонячної електростанції \bar{P}_{DAY} :

$$\bar{P}_{DAY} = \frac{P_{MONTH}}{M} \quad (4.6)$$

де M – кількість днів у місяці.

Річна виробка сонячної електростанції P_{YEAR} :

$$P_{YEAR} = \sum_{i=1}^{12} P_{MONTH}^i \quad (4.7)$$

де P_{MONTH}^i – виробка сонячної електростанції в i -му місяці.

5 Розрахунок окупності мережевої сонячної електростанції

Середня ринкова вартість мережевої сонячної електростанції C_{SOLAR} становить 1\$ за 1Вт встановленої потужності.

Річні витрати споживача на оплату електроенергії C_{YEAR}^n розраховуються за формулою:

$$C_{YEAR}^n = P_{USER} \left(C_{YEAR}^{n-1} + \frac{K_{IN}}{100} C_{YEAR}^{n-1} \right), \quad n = 1, 2, \dots, 20 \quad (5.1)$$

де P_{USER} – загальний обсяг електроенергії, який споживається за рік (кВт*год.), C_{YEAR}^0 – поточна ціна за 1 кВт*год. електроенергії, C_{YEAR}^n – ціна за 1 кВт*год. електроенергії на n -му році, K_{IN} – річне зростання цін на електроенергію у відсотках, n – номер року.

Річний прибуток по Зеленому тарифу C_{YFT} дорівнює:

$$C_{YFT} = \begin{cases} (P_{YEAR} - P_{USER}) C_{FT}, & \text{якщо } P_{YEAR} > P_{USER} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (5.2)$$

де C_{FT} – ставка по Зеленому тарифу за 1 кВт*год.

Окупність витрат на n -му році після будівництва мережевої сонячної електростанції PB^n складає:

$$PB^n = \begin{cases} -C_{SOLAR} + C_{YEAR}^n + C_{YFT}, & \text{якщо } n = 1 \\ PB^{n-1} + C_{YEAR}^n + C_{YFT}, & \text{інакше} \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots, 20 \quad (5.3)$$

Номер року, на якому мережева сонячна електростанція повністю окупить інвестиції витрачені на її будівництво PY , розраховується за формулою:

$$PY = \begin{cases} \min_n \{n \in N \mid PB^n \geq 0\}, & \text{якщо } \exists PB^n \geq 0 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}, n = 1, 2, \dots, 20 \quad (5.4)$$

Загальний дохід від сонячної електростанції протягом двадцяти років з урахуванням економії на оплаті електроенергії PB_{TOTAL} :

$$PB_{TOTAL} = \begin{cases} PB^{20}, & \text{якщо } 1 \leq PY \leq 20 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (5.5)$$

6 Опис системи розрахунку окупності впровадження мережевих сонячних електростанцій в приватних домоволодіннях

6.1. Функціональне призначення та алгоритм роботи

Система розрахунку окупності впровадження мережевих сонячних електростанцій призначена для розрахунку виробки сонячної електростанції, яка встановлюється в приватних домоволодіннях на території України, а також термінів повернення інвестицій витрачених на її впровадження.

При розрахунку виробки сонячної електростанції враховуються такі параметри як пряме, розсіяне та відбите сонячне випромінювання з урахуванням атмосферного ослаблення, кут нахилу даху та його орієнтація, температура фотоелементів, температурний коефіцієнт потужності сонячних панелей, а також коефіцієнт, що враховує втрати сонячної панелі при перетворенні та передачі електроенергії.

При розрахунку економічної складової, системою враховується річне споживання електроенергії, поточна ціна на електроенергію, ціна по «Зеленому тарифу», а також річне зростання цін на електроенергію.

На підставі отриманих даних система обчислює місячну, середньодобову та річну виробку мережевої сонячної електростанції, розраховує відносну вартість мережевої сонячної електростанції, будує прогноз витрат споживача на електроенергію протягом наступних двадцяти років, а також обчислює річний дохід по «Зеленому тарифу». Завершальним етапом роботи системи, є розрахунок періоду окупності впровадження мережевої сонячної електростанції з точністю до року.

Загальна блок-схема алгоритму роботи системи розрахунку окупності впровадження мережевих сонячних електростанцій представлена на рис. 1.



Рис. 1 Загальна блок-схема алгоритму роботи системи розрахунку окупності впровадження мережевих сонячних електростанцій

6.2. Опис інтерфейсу системи

У момент запуску системи розрахунку окупності впровадження мережевих сонячних електростанцій, перед користувачем з'являється стартова заставка, зображена на рис. 2, яка свідчить про запуск системи.



Рис. 2 Стартова заставка

Система складається з 6 різних вкладок, розташованих послідовно. Перехід між вкладками здійснюється за допомогою натискання кнопок «Далее» і «Назад», розташованих в нижній частині робочої області програми.

На рис. 3 представлено інтерфейс вкладки «Выбор местонахождения». Дана вкладка відповідає за вибір області, в якій буде розміщуватися сонячна електростанція. Для обрання області на мапі України, слід підвести курсор миші на бажану область і натиснути ліву кнопку миші.

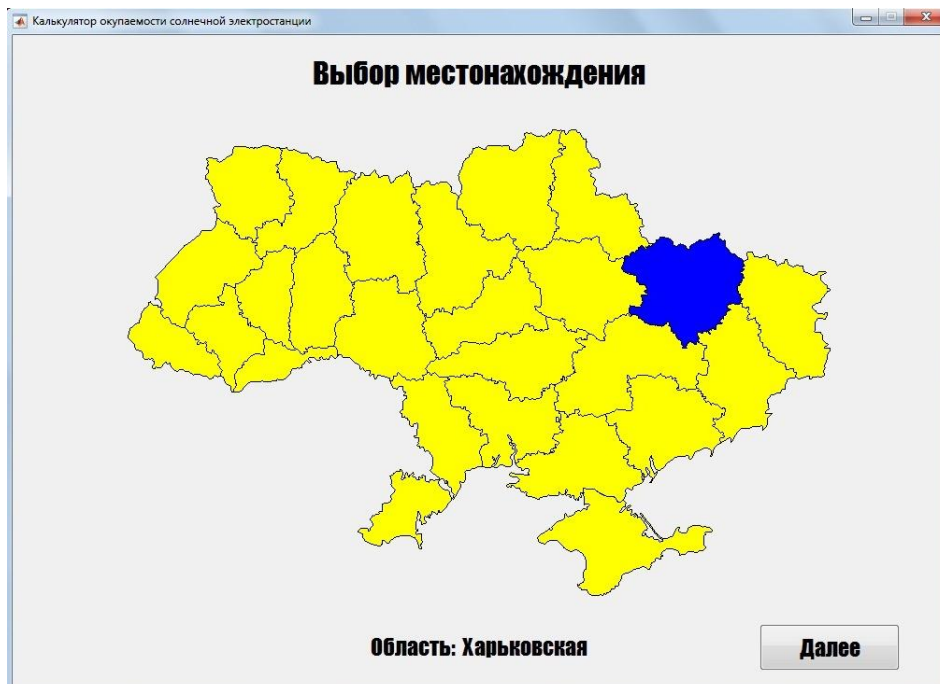


Рис. 3 Вкладка «Выбор местонахождения»

Після натискання кнопки «Далее» перед користувачем з'явиться вкладка «Параметры кровли», яка призначена для обрання розмірів даху, його нахилу та орієнтації (рис. 4). Робоча область даної вкладки умовно поділена на дві частини. У лівій частині робочої області розташовані елементи управління, що відповідають за вибір параметрів даху, а в правій частині знаходиться графічна область, яка відображає користувачу поточний кут нахилу даху. При переміщенні повзунка «Уклон кровли», відбувається автоматична зміна кута нахилу даху будинку в графічній області програми.

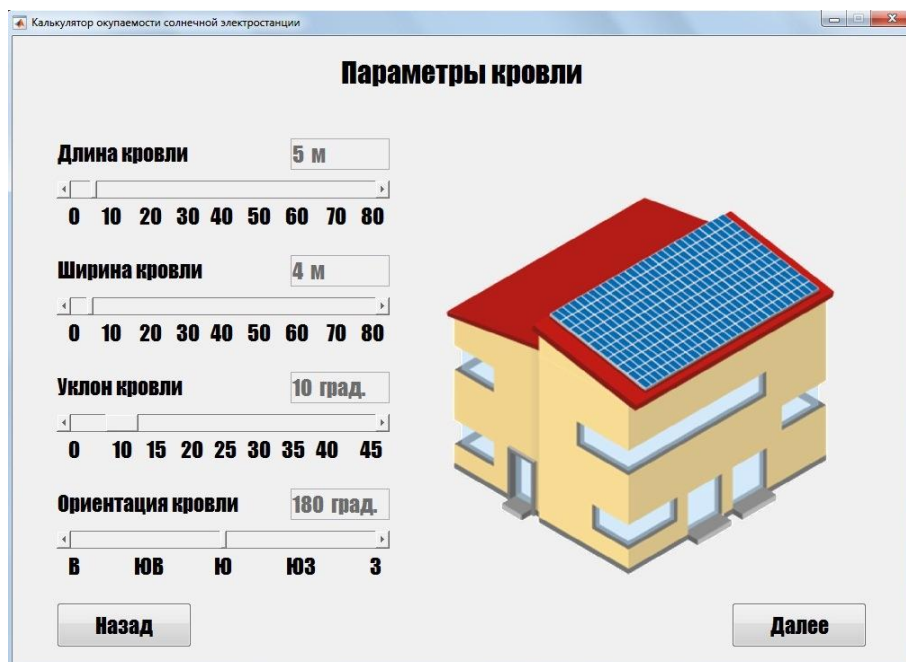


Рис. 4 Вкладка «Параметры кровли»

Вкладка «Солнечная электростанция» предназначена для выбора необходимой номинальной мощности солнечной электростанции (рис. 5). У верхней части рабочей области данной вкладки, размещается информация про текущую количество солнечных панелей, а также выводится информация про общую номинальную мощность солнечной электростанции. Максимально возможная количество солнечных панелей рассчитывается исходя из параметров даху.

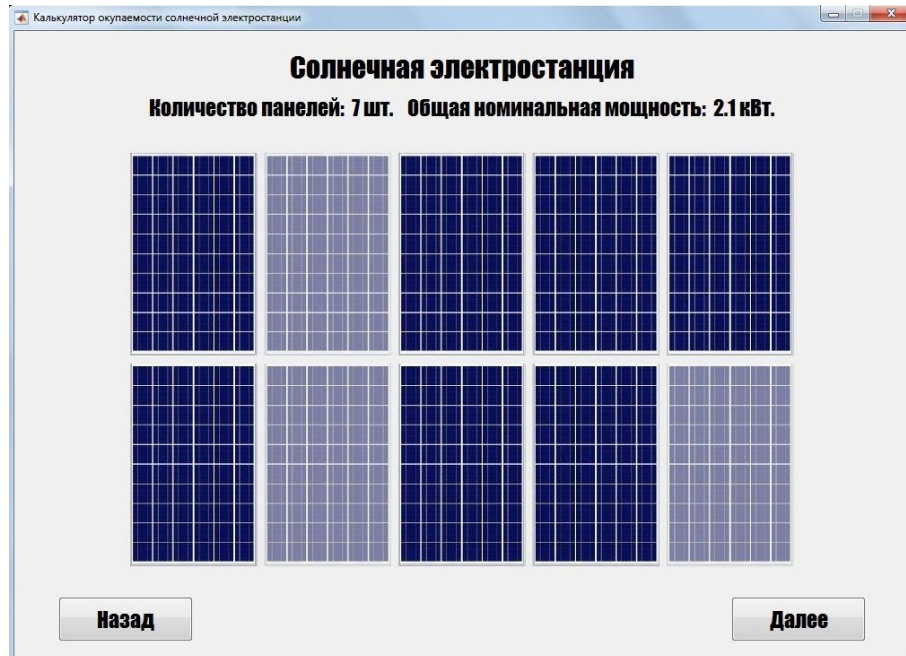


Рис. 5 Вкладка «Солнечная электростанция»

Основную часть рабочей области вкладки «Солнечная электростанция» занимает графическая область, в которой отображаются солнечные панели. При наведении курсора на солнечную панель и последующего нажатия левой кнопки мыши, происходит деактивация солнечной панели. Неактивные солнечные панели автоматически вычисляются из общей количества панелей, что составляют солнечную электростанцию, та не учитываются при подсчете общей номинальной мощности электростанции.

Вкладка «Энергопотребление» предназначена для задания рiчного споживання користувачем електроенергiї, поточної цiни на електроенергiю, рiчного зростання цiн на електроенергiю, а також цiни за «Зеленим тарифом» (рис. 6). У правiй частинi робочої областi знаходиться графiчна область, яка вiдображає прогноз рiчних витрат на оплату електроенергiї та загальнi витрати на оплату електроенергiю протягом наступних двадцяти рокiв.

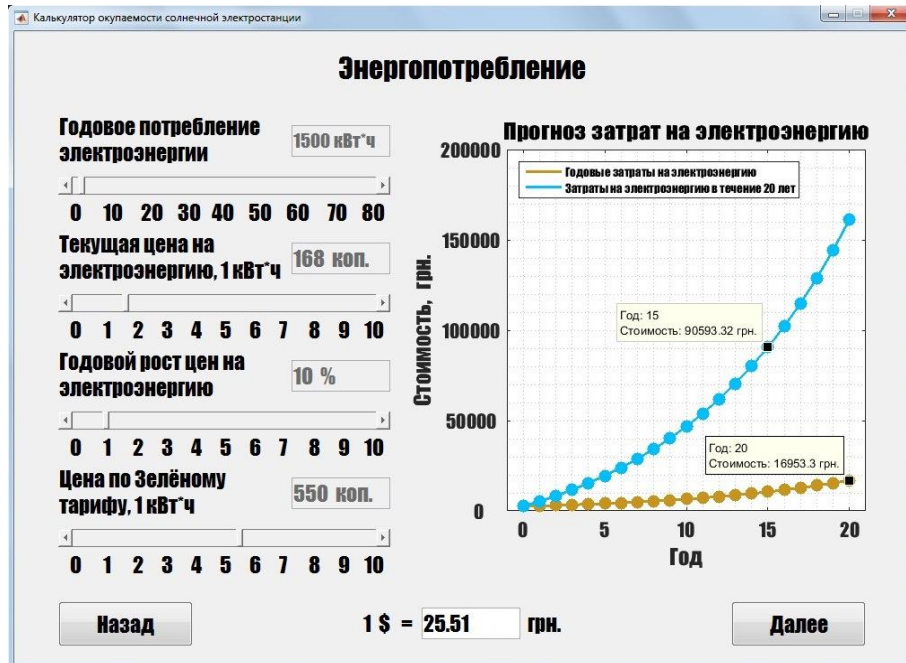


Рис. 6 Вкладка «Энергопотребление»

При наведеннi курсору на маркер графiка та подальшого натискання лiвої кнопки мишi, з'являється спливаюче вiкно, яке вiдображає інформацію про вартiсть електроенергiї в обраному році. При одночасному натисканнi лiвої кнопки мишi та клавішi «Shift» вiдбувається додавання нового спливаючого вiкна. При натисканнi клавішi «Delete» вiдбувається видалення поточного спливаючого вiкна.

Вкладка «Выработка электростанции» предназначена для вiдображення середньодобової, мiсячної та рiчної виробки сонячної електростанцiї (рис. 7).

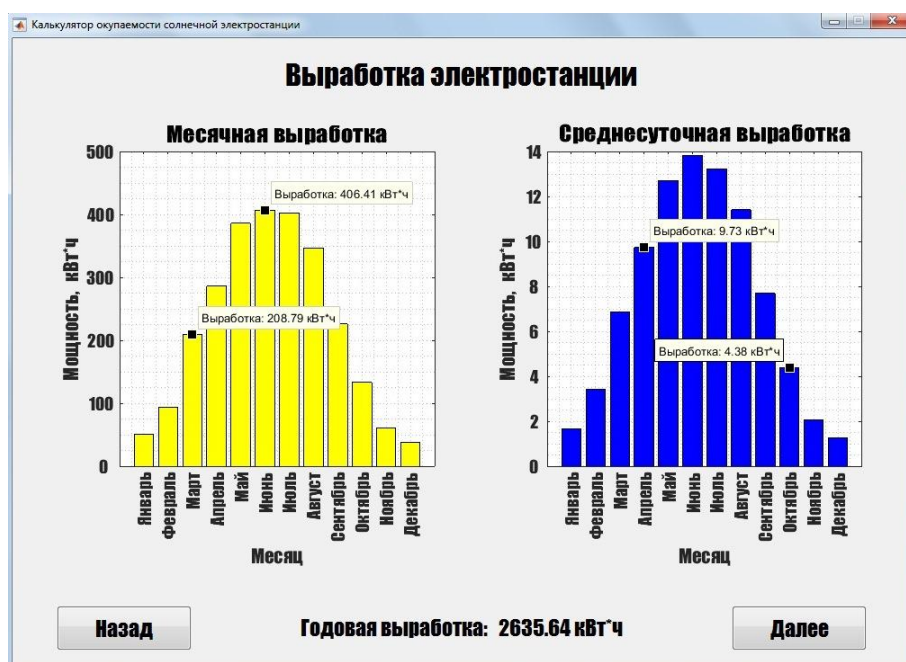


Рис. 7 Вкладка «Выработка электростанции»

Вкладка «Окупаемость электростанции» є останньою з 6 вкладок і призначена для відображення інформації про окупність сонячної електростанції (рис. 8). На даній вкладці відображається вартість сонячної електростанції, річний дохід по «Зеленому тарифу», виводиться інформація про сумарний дохід за двадцять років з урахуванням економії на оплаті електроенергії, а також період окупності сонячної електростанції. У правій частині робочої області програми розташована діаграма окупності сонячної електростанції, на якій відображається зміна бюджету користувача з моменту установки сонячної електростанції на протязі наступних двадцяти років.

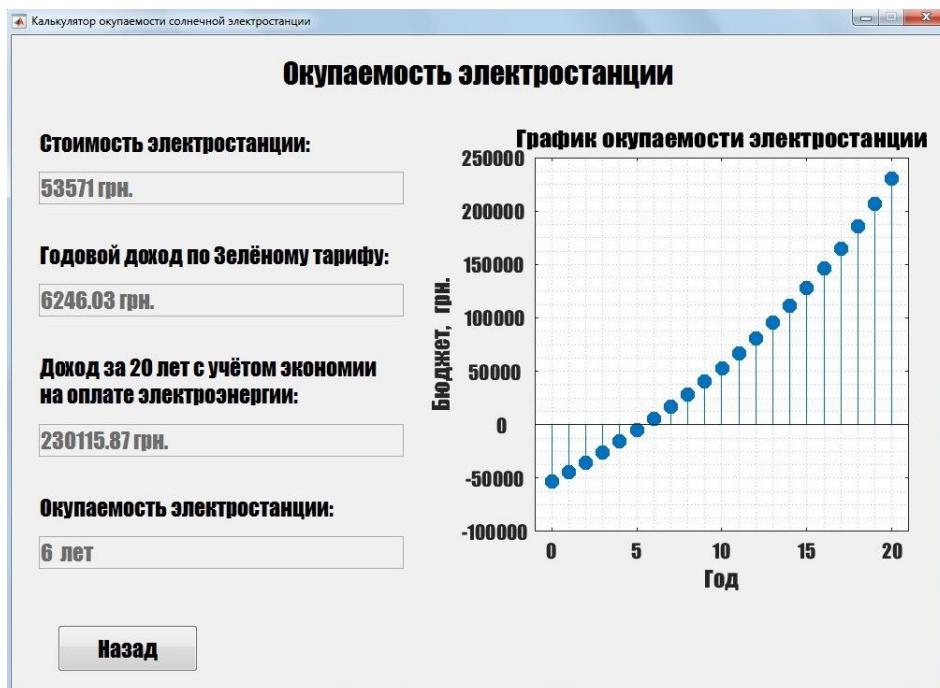


Рис. 8 Вкладка «Окупаемость электростанции»

Якщо інвестиції, необхідні на будівництво сонячної електростанції, не окупляться протягом двадцяти років, дана інформація відобразиться у відповідному полі системи (рис. 9).

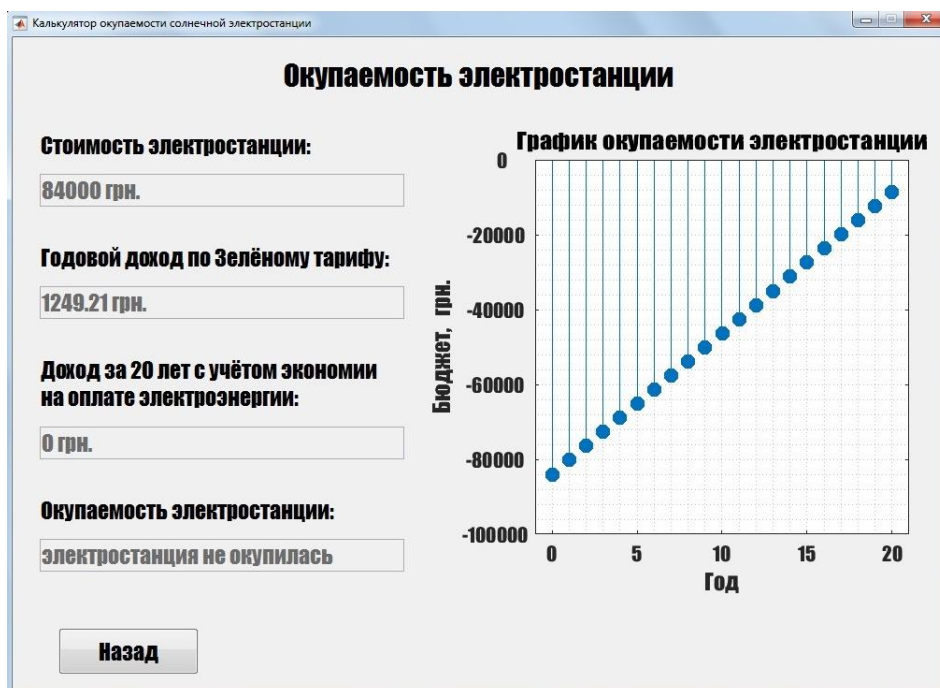


Рис. 9 Інформація щодо окупності впровадження сонячної електростанції

При наведенні курсору на маркер діаграми і подальшого натискання лівої кнопки миші, з'являється спливаюче вікно, яке відображає інформацію про бюджет користувача після установки сонячної електростанції на обраному році. При одночасному натисканні лівої кнопки миші та клавіші «Shift» відбувається додавання нового спливаючого вікна. При натисканні клавіші «Delete» відбувається видалення поточного спливаючого вікна.

7 Висновки

Розроблено систему розрахунку окупності впровадження мережевих сонячних електростанцій, яка призначена для розрахунку виробки сонячної електростанції, що встановлюється в приватних домоволодіннях на території України, а також термінів повернення інвестицій витрачених на її впровадження.

Система розрахунку окупності впровадження мережевих сонячних електростанцій має широкий спектр можливостей, який дозволяє:

- обрати область на мапі України, в межах якої буде розміщуватися мережева сонячна електростанція;
- задати параметри даху, на якому планується розміщення фотоелементів;
- задати номінальну потужність мережевої сонячної електростанції;
- задати параметри енергоспоживання житлового будинку за лічильником.

При розрахунку виробки сонячної електростанції враховуються такі параметри як пряме, розсіяне та відбите сонячне випромінювання з урахуванням атмосферного ослаблення, кут нахилу даху та його орієнтація, температура фотоелементів, температурний коефіцієнт потужності сонячних панелей, а також коефіцієнт, що враховує втрати сонячної панелі при перетворенні та передачі електроенергії.

Потік сонячного випромінювання, який падає на поверхню фотоелементів, визначається в рамках моделі Хей-Девіса.

При розрахунку економічної складової, системою враховується річне споживання електроенергії, поточна ціна на електроенергію, ціна по «Зеленому тарифу», а також річне зростання цін на електроенергію.

На підставі отриманих даних система обчислює місячну, середньодобову та річну виробку мережевої сонячної електростанції, розраховує відносну вартість мережевої сонячної електростанції, буде прогноз витрат споживача на електроенергію протягом наступних двадцяти років, а також обчислює річний дохід по «Зеленому тарифу».

Завершальним етапом роботи системи, є розрахунок періоду окупності впровадження мережевої сонячної електростанції з точністю до року.

Місячна та середньодобова виробки мережевої сонячної електростанції, прогноз витрат споживача на електроенергію протягом двадцяти років, а також окупність мережевої сонячної електростанції відображаються в системі у вигляді відповідних графіків і діаграм.

Результати обчислень виробки та періоду окупності мережевих сонячних електростанцій, отримані за допомогою розробленої системи, узгоджуються з розрахунковими даними, які надаються провідними компаніями по впровадженню мережевих сонячних електростанцій в приватних домоволодіннях.

Варто відзначити, що мережеві сонячні електростанції приносять прибуток тільки при досить великій номінальній потужності та за умови підключення їх до «Зеленого тарифу». Максимальний прибуток при мінімальному терміні окупності надають електростанції, потужність яких близька до максимально допустимої для мережевих електростанцій в приватних домоволодіннях.

ЛІТЕРАТУРА

1. НКРЕКП встановила "зелені" тарифи для приватних домогосподарств [Електронний ресурс]. *Українська асоціація відновлювальної енергетики*. URL: <https://uare.com.ua/novyny/388->

- nkrekp-vstanovila-zeleni-tarifi-dlya-privatnikh-domogospodarstv.html
(дата звернення: 10.09.2019).
2. "Зелёный" тариф для физических лиц [Электронный ресурс]. *Alteco*. URL: <https://alteco.in.ua/economics/zelenyj-tarif/zelenyj-tarif-dlya-fizicheskikh-lits> (дата обращения: 10.09.2019).
 3. Калькулятор Стоимости Солнечной Электростанции [Электронный ресурс]. *Solar Service*. URL: <https://solarservice.pro/kalkulyator/> (дата обращения: 11.09.2019).
 4. Калькулятор сонячної електростанції [Електронний ресурс]. *ATMOSFERA*. URL: <https://www.atmosfera.ua/uk/sonyachni-elektrostantsii/kalkulyator-sonyachnoi-elektrostantsii/> (дата звернення: 11.09.2019).
 5. Калькулятор Вартості дахової сонячної електростанції, яка працює по "зеленому" тарифу [Електронний ресурс]. *IKNET*. URL: <https://iknet.com.ua/uk/rooftop-solar-power-plant-cost-calculator/> (дата звернення: 11.09.2019).
 6. Калькулятор солнечной электростанции - СЭС зеленый тариф [Электронный ресурс]. *Artenergy*. URL: <https://www.artenergy.com.ua/novosti/kalkuliator-zelenyi-tarif> (дата обращения: 11.09.2019).
 7. Клён А. Н., Ефременко В. В. Экономическая эффективность использования сетевых солнечных электростанций в частных домовладениях. *Технологический аудит и резервы производства*. 2015. № 3/1 (23). С. 8-13. doi: 10.15587/2312-8372.2015.42789
 8. Peishi W., Xiaoming M., Junping J., Yunrong M. Review on Life Cycle Assessment of Energy Payback of Solar Photovoltaic Systems and a Case Study. *Energy Procedia*. 2017. V. 105. P. 68-74. doi: 10.1016/j.egypro.2017.03.281
 9. Marimuthu C., Kirubakaran V., Rajasekaran R. Energy payback period and carbon payback period for solar photovoltaic power plant. *International Journal of Chemical Science*. 2014. N. 12 (1). P. 293-305. URL: <https://www.tsijournals.com/articles/energy-pay-back-period-and-carbon-pay-back-period-for-solar-photovoltaic-power-plant.pdf> (Last accessed: 13.09.2019)
 10. Lasnier F., Ang T.G. *Photovoltaic Engineering Handbook*. CRC Press, Bristol, England. 1990. – 548 p.

REFERENCES

1. Ukrainian Association of Renewable Energy. NKREKP set feed-in tariffs for private households. (n.d.). Retrieved from <https://uare.com.ua/novyny/388-nkrekp-vstanovila-zeleni-tarifi-dlya-privatnikh-domogospodarstv.html> [in Ukrainian]
2. Alteco. Feed-in tariff for individuals. (n.d.). Retrieved from <https://alteco.in.ua/economics/zelenyj-tarif/zelenyj-tarif-dlya-fizicheskikh-lits> [in Russian]
3. Solar Service. Cost Calculator of Solar Power Plant. (n.d.). Retrieved from <https://solarservice.pro/kalkulyator/> [in Russian]
4. ATMOSFERA. Calculator of Solar Power Plant. (n.d.). Retrieved from <https://www.atmosfera.ua/uk/sonyachni-elektrostantsii/kalkulyator-sonyachnoi-elektrostantsii/> [in Ukrainian]
5. IKNET. Cost Calculator of Solar Power Plant which works on feed-in tariff. (n.d.). Retrieved from <https://iknet.com.ua/uk/rooftop-solar-power-plant-cost-calculator/> [in Ukrainian]
6. Artenergy. Calculator of Solar Power Plant - SPP feed-in tariff. (n.d.). Retrieved from <https://www.artenergy.com.ua/novosti/kalkuliator-zelenyi-tarif> [in Russian]
7. Klyon A., & Efremenko V. "Economic efficiency of using Solar Power Plants in private households". *Technology audit and production reserves*, vol. 23, no. 3(1), pp. 8-13, 2015. doi: 10.15587/2312-8372.2015.42789. [in Russian]
8. Peishi W., Xiaoming M., Junping J., & Yunrong M. "Review on Life Cycle Assessment of Energy Payback of Solar Photovoltaic Systems and a Case Study". *Energy Procedia*, vol. 105, pp. 68-74, 2017. doi: 10.1016/j.egypro.2017.03.281.
9. Marimuthu C., Kirubakaran V., & Rajasekaran, R. "Energy payback period and carbon payback period for solar photovoltaic power plant". *International Journal of Chemical Science*, vol. 12, no. 1, pp. 293-305, 2014. Retrieved from <https://www.tsijournals.com/articles/energy-pay-back-period-and-carbon-pay-back-period-for-solar-photovoltaic-power-plant.pdf>

10. Lasnier F., & Ang T.G. *Photovoltaic Engineering Handbook*. Bristol, England: CRC Press, 1990.

Гарячевська Ірина Василівна – кандидат технічних наук, доцент; декан фізико-енергетичного факультету, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;

e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4630-9519.

Іванющенко Вікторія Віталіївна – студент; фізико-енергетичний факультет, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;

e-mail: vivanushenko23@gmail.com; ORCID: 0000-0001-7201-926X.

Протектор Денис Олегович – аспірант; фізико-енергетичний факультет, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;

e-mail: d.protector@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3323-7058.

Garyachevskaya Irina V. PhD, Associate Professor, Dean of the School of Physics and Energy V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine; e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4630-9519.

Ivaniushchenko Viktoriia V. Student of the School of Physics and Energy V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine;

e-mail: vivanushenko23@gmail.com; ORCID: 0000-0001-7201-926X.

Протектор Денис О. Postgraduate student of the School of Physics and Energy V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine;

e-mail: d.protector@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3323-7058.

Гарячевская Ирина Васильевна – кандидат технических наук, доцент; декан физико-энергетического факультета, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022;

e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4630-9519.

Іванющенко Вікторія Віталіївна – студент; фізико-енергетичний факультет, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022;

e-mail: vivanushenko23@gmail.com; ORCID: 0000-0001-7201-926X.

Протектор Денис Олегович – аспирант; физико-энергетический факультет, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022;

e-mail: d.protector@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3323-7058.

УДК 539.3

Сравнение методов конечных и граничных элементов в задачах о колебаниях составной оболочки вращения с жидкостью

В.И. Гнитько¹, К.Г. Дегтярев¹, Е.С. Кононенко¹, А.М. Тонконоженко²¹Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, 61046, Украина²Конструкторское бюро «Южное» им. М.К. Янгеля
yehorkononenko@gmail.com

Плескания – это феномен, который представляет собой интенсивное движение свободной поверхности жидкости, содержащейся в резервуаре, под действием внезапно приложенных внешних воздействий. Общепринята следующая классификация колебаний свободной поверхности: а) горизонтальные плескания, б) вертикальные плескания, в) плескания вращения. Вибрации в реальных резервуарах обычно вызываются одновременным действием плесканий жидкости и осцилляциями упругих стенок. В полностью или почти полностью заполненных резервуарах свободная поверхность не имеет достаточного объема для плесканий. Такое состояние обычно отвечает старту ракетоносителя. Однако, на дальнейших этапах полета, когда уровень топлива существенно снижается, эффекты плесканий становятся доминирующими. Неоднократно замечалось, что интенсивные плескания были причиной потери устойчивости ряда ракетоносителей, например, при запусках Фалькон 1 в 2006, 2007 и 2008 годах. Еще одной важной проблемой является учет влияния упругости стенок резервуара на частоты свободных колебаний. В данной работе на основе эффективных вычислительных схем методов конечных и граничных элементов и их теоретического обоснования разработаны новый аналитический метод и компьютерная технология для анализа свободных и вынужденных колебаний составных топливных баков ракет носителей на различных стадиях полета: при перегрузках и в условиях микрогравитации, в том числе, с учетом плесканий топлива. Предлагаемый метод позволяет осуществлять более точный анализ колебаний топливных баков, учесть взаимное влияние упругих деформаций стенок баков и изменяющихся во время полета уровня заполнения баков и формы свободной поверхности жидкости, наличие упругих и жестких демпфирующих внутренних перегородок, изменение ускорения силы тяжести. Разработана математическая модель для анализа плесканий топлива при больших амплитудах. Рассмотрены свободные колебания баков ракет-носителей

Ключевые слова: топливные баки, вибрации, методы конечных и граничных элементов, плескания, идеальная несжимаемая жидкость.

The phenomenon of sloshing can be described as the movement of the free surface of a liquid contained in a reservoir under the action of a suddenly applied load. Some classifications of free-surface fluctuations in liquids identify three main forms of sloshing: a) longitudinal sloshing, b) vertical sloshing c) rotating sloshing. Sloshing is a phenomenon that is found in a wide range of industrial applications: in containers for storing liquefied gas, fuel tanks of missiles and airplanes, in tanks of cargo tankers. The vibrations of the real tanks are caused by sloshing of the fluid and vibration of the elastic walls. In completely (or almost completely) filled tanks, the free surface cannot experience strong oscillations. This corresponds to launching the launch vehicle. However, in further stages of flight, when the level of liquid aggregate falls, the sloshing effect becomes dominant. It was repeatedly noted that powerful sloshing can lead to a violation of the flight trajectory, as happened, for example, during the launch of the Falcon 1 launch vehicle in 2006, 2007 and 2008. The next important problem in the study of the oscillations of the fuel tanks is the study of the associated hydro-elastic oscillations of the fluid interacting with the elastic walls of the tank. New analytical method and computer technology have been developed for analyzing free and forced vibrations of composite fuel tanks of missiles at different stages of flight: during overloads and in microgravity conditions, including sloshing fuel. The proposed method allows for more accurate analysis of fuel tank oscillations; takes into account the mutual influence of elastic deformations of tank walls and changes in the tank filling levels during missions as well as the shape of the free surface of the liquid, the presence of elastic and rigid damping internal partitions, and the gravity acceleration changes. A mathematical model has been developed for the analysis of fuel sloshing at large amplitudes. The free oscillations of the launch vehicle tanks have been considered.

Keywords: fuel tanks, vibrations, finite and boundary element methods, sloshing, ideal incompressible fluid.

Плескання - це феномен, що є наслідком інтенсивного руху вільної поверхні рідини, що міститься в резервуарі, під дією раптово прикладених зовнішніх впливів. Загальноприйнята наступна класифікація коливань вільної поверхні: а) горизонтальні плескання, б) вертикальні плескання, в) плескання обертання. Вібrazioї в реальних резервуарах звичайно викликаються одночасною дією плескань рідини і осцилляциями пружних стінок. У повністю або майже повністю заповнених резервуарах вільна поверхня не має достатнього об'єму для плескань. Такий стан звичайно відповідає старту ракети-носія. Однак, на подальших стадіях місії, коли рівень палива істотно знижується, ефекти плескань стають домінуючими. Не раз зазначалося, що інтенсивні плескання були причиною втрати стійкості ряду ракетоносіїв, наприклад, при запусках Фалькон 1 в 2006, 2007 і 2008 роках. Ще одною важливою проблемою є вплив врахування пружності стінок паливного баку на частоти та форми власних коливань. В даній роботі на основі ефективних обчислювальних схем методів скінчених і граничних елементів і їх теоретичного обґрунтування розроблені новий аналітичний метод і комп'ютерна технологія для аналізу вільних і вимушених коливань складених паливних баків ракет носіїв на різних стадіях польоту: при перевантаженнях і в умовах мікрогравітації, в тому числі, з врахуванням плескань заповнювача. Запропонований метод дозволяє здійснювати більш точний аналіз коливань паливних баків, врахувати взаємний вплив пружних деформаций стінок баків, змінних під час польоту рівня заповнення баків і форми

вільної поверхні рідини, наявність пружних і жорстких демпфуючих внутрішніх перегородок, зміни прискорення сили тяжіння. Розроблено математичну модель для аналізу плескань палива при великих амплітудах. Розглянуто вільні коливання баків ракет-носіїв.

Ключові слова: паливні баки, вібрації, методи скінчених і граничних елементів, плескання, ідеальна нестислива рідина

1 Введение

Проблема колебаний конструкций с отсеками, содержащими жидкость, находится в центре внимания исследователей в течение нескольких последних десятилетий. Первые работы в этом направлении появились в начале 60-х годов прошлого века. Одна из них была опубликована в 1963 году [1]. В ней проведен анализ плесканий жидкости в цилиндрических баках при различных уровнях гравитации на основе аналитических методов. Частоты колебаний изучались в зависимости от числа Бонда. обстоятельный анализ исследований по динамике жидкости в сосудах и резервуарах был дан Р. Ибрагимом в монографии [2]. В [3] для вычисления сил давления жидкости в призматических и цилиндрических резервуарах применена нелинейная теория. Здесь изучалось изменение формы свободной поверхности. Отметим, что численные методы изучения движения жидкости со свободной поверхностью находят широкое применение во многих инженерных приложениях [4-6]. В полностью (или практически полностью) заполненных баках свободная поверхность не может испытывать сильных осцилляций. Это соответствует началу полета ракетносителя. Однако, на дальнейших стадиях полета, когда уровень жидкого заполнителя падает, эффект плескания становится доминирующим. Неоднократно отмечалось, что мощные плескания могут привести к нарушению полетной траектории, как это произошло, например, при запусках ракеты-носителя Фалькон 1 (Falcon 1) в 2006, 2007 и 2008 годах [7]. Следующей важной проблемой при изучении колебаний топливных баков является изучение связанных гидроупругих колебаний жидкости, взаимодействующей с упругими стенками бака.

Несмотря на имеющиеся теоретические достижения, проблема колебаний упругих контейнеров и баков с жидкостью остается в центре внимания многих научных школ. Феномен плесканий может быть описан как движение свободной поверхности жидкости, содержащейся в резервуаре, под действием внезапно приложенной нагрузки. Н. Olsen привел в [8] классификацию колебаний свободной поверхности жидкости в резервуарах, выделив три основные формы плесканий: а) продольные плескания, б) вертикальные плескания в) вращательные плескания. Плескание – это феномен, который обнаруживается в широком диапазоне промышленных приложений: в контейнерах для хранения сжиженного газа, топливных баках ракет и самолетов, в резервуарах грузовых танкеров. Колебания реальных баков вызываются одновременными плесканиями жидкости и вибрациями упругих стенок [9].

2 Постановка задачи оптимизации

Рассмотрим задачу о колебаниях оболочечной конструкции с отсеками, частично заполненными жидкостью (рис. 1).

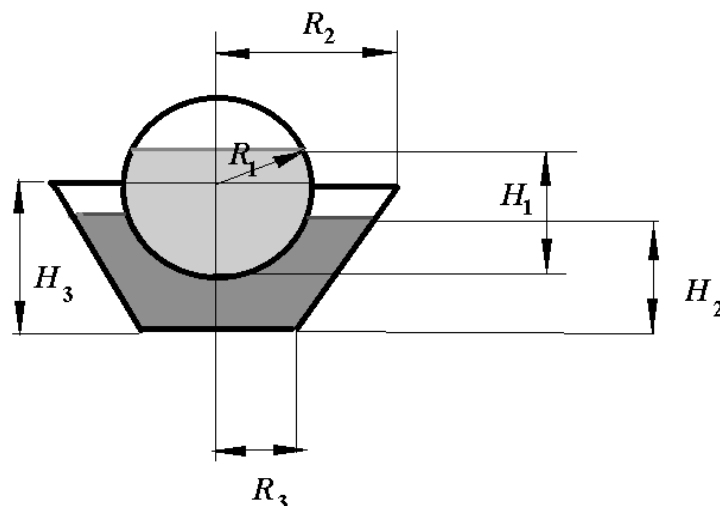


Рис. 1.1 Схема оболочечной конструкции с отсеками, частично заполненными жидкостью

Предполагается, что свойства жидкости (плотность, угол смачивания, поверхностное натяжение) могут быть разными в каждом из отсеков. Уровень заполнения жидкостью в каждом отсеке меняется во время полета. Требуется определить частоты и формы свободных гидроупругих колебаний оболочечной конструкции, с учетом плесканий, разного уровня заполнения баков, различного уровня гравитации, наличия внутренних перегородок.

В общем случае уравнение движения этой конструкции в операторной форме имеет вид

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}) = \mathbf{P}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{L} , \mathbf{M} – операторы упругих и массовых сил; \mathbf{P} – давление жидкости на смоченные поверхности конструкции; $\mathbf{U}=(u_1, u_2, u_3)$ – вектор - функция перемещений.

Представим вектор \mathbf{U} в форме $\mathbf{U}=\mathbf{u}e^{i\Omega t}$, где Ω – частота, а \mathbf{u} – собственная форма гидроупругих колебаний. Будем искать собственные формы оболочечной конструкции с отсеками, частично заполненными жидкостью, в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{u}_k,$$

где \mathbf{u}_k – собственные формы колебаний оболочечной конструкции, незаполненной жидкостью; c_k – неизвестные коэффициенты,

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) = \Omega_k^2 \mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \quad (\mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \delta_{kj}.$$

Таким образом,

$$(\mathbf{L}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \Omega_k^2 \delta_{kj},$$

где Ω_k – k -ая частота собственных колебаний незаполненной конструкции. Эти соотношения показывают, что собственные формы колебаний незаполненной конструкции ортонормированы по матрице масс.

Рассмотрим правую часть уравнения (1.1). Отметим, что вектор \mathbf{P} направлен по нормали к смоченным поверхностям рассматриваемой оболочечной конструкции, вследствие того, что идеальная жидкость создает только нормальную составляющую давления на смоченные поверхности. Считаем, что $|\mathbf{P}| = p$.

Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение, индуцированное колебаниями оболочки и начавшееся из состояния покоя, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей Φ

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

который удовлетворяет уравнению Лапласа.

Собственные формы незаполненной конструкции определены на боковых поверхностях, на перегородках и на днищах. Поверхность незаполненной конструкции будем обозначать S_1 . Для определения нестационарного давления на стенки и перегородки бака в общем случае необходимо задание скорости изменения уровня жидкости в каждом отсеке.

Пусть в первом отсеке скорость изменения уровня жидкости равна $V_1(t)$, во втором принимает значение $V_2(t)$. Области, занятые жидкостью, для первого и второго отсеков обозначаем Ω_1 и Ω_2 . Плотности жидкости в отсеках обозначаем соответственно, ρ_1 и ρ_2 .

Динамические составляющие давления жидкости на стенки резервуара в отсеках определяются по формулам, представляющим собой линеаризованные интегралы Коши-Лагранжа

$$\begin{aligned} p_1 &= -\rho_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (V_1(t) + g \cdot n_x) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + a_x(t)x \right); \\ p_2 &= -\rho_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (V_2(t) + g \cdot n_x) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + a_x(t)x \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь g – ускорение свободного падения, n_x – параметр перегрузки, $a_x(t)$ – ускорение вынуждающей силы в горизонтальном направлении.

Соотношения (2.4) позволяют рассматривать вынужденные колебания динамической системы «оболочечная конструкция - жидкость» при воздействии возмущений, действующих в продольном и поперечном направлениях.

Для определения потенциала скоростей Φ имеем смешанную краевую задачу для уравнения Лапласа в двусвязной области $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Обозначим нормальную составляющую перемещения оболочечной конструкции через w .

По заданной собственной форме u_k колебаний незаполненной оболочечной конструкции мы определяем компоненту w_k на всей поверхности оболочечной конструкции S_1 .

На поверхности S_1 требуем выполнения условия непротекания, которое имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = (\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{n}) \quad (2.5)$$

Здесь \mathbf{n} - единичная нормаль к поверхности S_1 . Отметим, что поверхность S_1 состоит из поверхностей, ограничивающих отсеки.

Аналогично [10] рассматриваемая задача решается в 3 этапа. На первом определяются частоты колебаний сухой оболочки, на втором - частоты плесканий, а на третьем решается связанная гидродинамическая задача.

3 Анализ точности и достоверности предложенных алгоритмов

Для анализа достоверности рассмотрены колебания упругой оболочки без учета действия силы тяжести и задача плесканий. Первая задача решена методом конечных элементов с помощью одномерного метода конечных элементов [11]. Вторая задача сведена к одномерным сингулярным уравнениям [6].

Определены частоты и формы свободных колебаний упругой полусферической оболочки с жидкостью. Жидкость считается идеальной несжимаемой, а ее движение – потенциальным.

Рассматривается полусферическая оболочка, заполненная жидкостью, со следующими параметрами: радиус $R = 5.08$ м, толщина $h = 0.0254$ м, модуль упругости $E=70$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu=0.3$, плотность материала $\rho = 2770$ кг / м³. Жидкость считается несжимаемой, ее плотность принимается равной 1000 кг / м³. условия закрепления - шарнирное опирание по контуру оболочки.

В таблице 3.1 приведены собственные частоты гидроупругих колебаний оболочки для различного числа α . Полученные результаты сравниваются с данными В.В.Мокеева (для сжимаемой жидкости) и с результатами его расчетов по комплексу ANSYS (для несжимаемой жидкости), [12].

Таблица 3.1. Собственные частоты гидроупругих колебаний оболочки

α	n	Частоты (Гц)		
		Предложенный метод (МКЭ-МГЭ)	[12]	ANSYS [12] (Shell63)
0	1	23.59	22.00	22.07
	2	35.70	33.38	33.41
	3	43.92	42.02	41.30
1	1	21.96	22.44	22.18
	2	33.40	36.88	34.68
	3	41.52	48.92	42.98
2		31.57	31.57	31.50
		40.44	41.55	40.50
		46.97	50.29	
3		37.30	36.98	36.65
		45.62	46.27	
		52.11	54.86	

Приведенные результаты показывают хорошее согласование, что свидетельствует об их достоверности.

Изучены так же колебания жидкости в жесткой сферической оболочке. Рассмотрим сферическую оболочку радиуса $R=1$ м, частично заполненную идеальной несжимаемой жидкостью, уровень заполнения h . Численный анализ проводился для $(0.2 < h/R < 1.99)$ и

различных α ($\alpha = \overline{0,3}$). Был использован метод граничных элементов. Меридиан смоченной поверхности оболочки разбивался на 200 элементов, а радиус свободной поверхности – на 150 элементов [13]. В таблице 3.2 приведены результаты расчета частот в Hz с помощью МГЭ, и дано сравнение с результатами работы [14], $h_1 = h/R$, $\alpha=0$.

Таблица 3.2. Частоты осесимметричных колебаний жидкости в сферической оболочке

m	Метод	Уровень заполнения h, м				
		$h_1=0.2$	$h_1=0.6$	$h_1=1.0$	$h_1=1.8$	$h_1=1.99$
1	[14]	3.8261	3.6501	3.7451	6.7641	29.0500
	МГЭ	3.8314	3.6510	3.7456	6.7665	29.1811
2	[14]	9.2561	7.2659	6.9763	12.1139	51.8122
	МГЭ	9.2686	7.2684	6.9780	12.1205	52.0255

Задача о колебаниях жидкости в цилиндрической оболочке изучена методом граничных элементов и методом конечных элементов. Результаты сравнения приведены в таблице 3.

Таблица 3.3

α	метод	Частоты колебаний				
		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0	МКЭ	3.8285	7.0159	10.1735	13.3243	6.47066
	МГЭ	3.8281	7.0156	10.1732	13.3233	6.47060
	[7]	3.8281	7.0156	10.1734	13.3236	6.47063
1	МКЭ	1.6579	5.3297	8.5372	11.7182	14.8925
	МГЭ	1.6573	5.3293	8.5366	11.7066	14.8665
	[7]	1.6573	5.3293	8.5363	11.7060	14.8635

4 Модель оболочки для модального анализа

Построена конечно-элементная модель для проведения модального анализа конструкции, не содержащей жидкость, построена из гексагональных элементов. Данная модель приведена на рис. 4.

Общее количество конечных элементов: 6684.

Общее количество узлов: 36645.

Количество элементов по ширине сектора: 7.

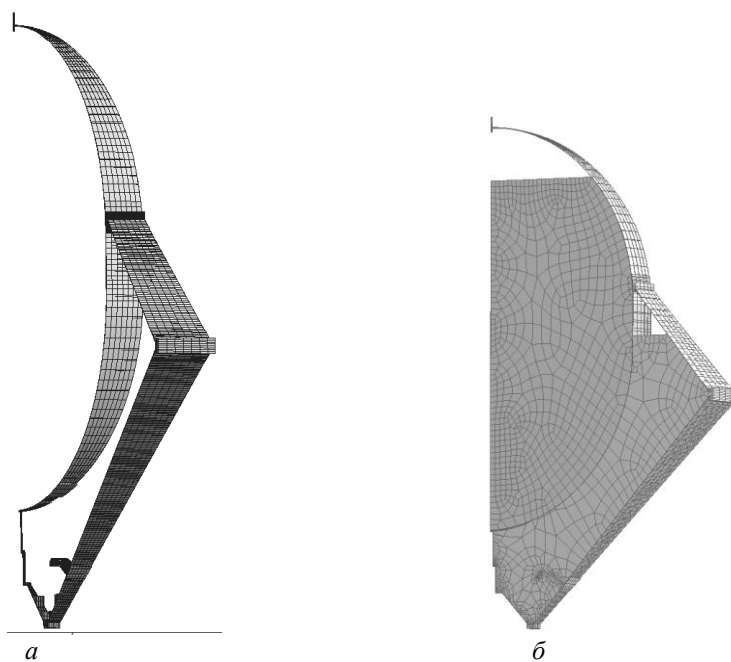
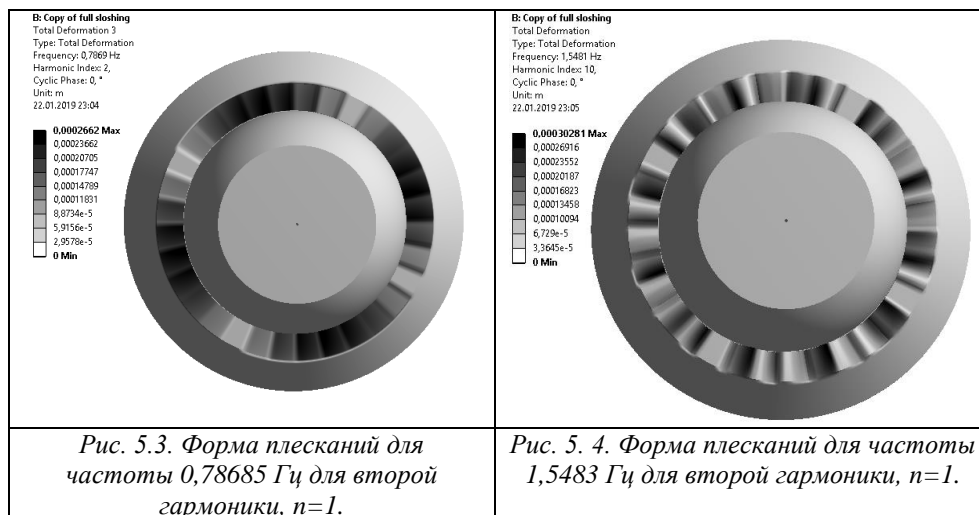
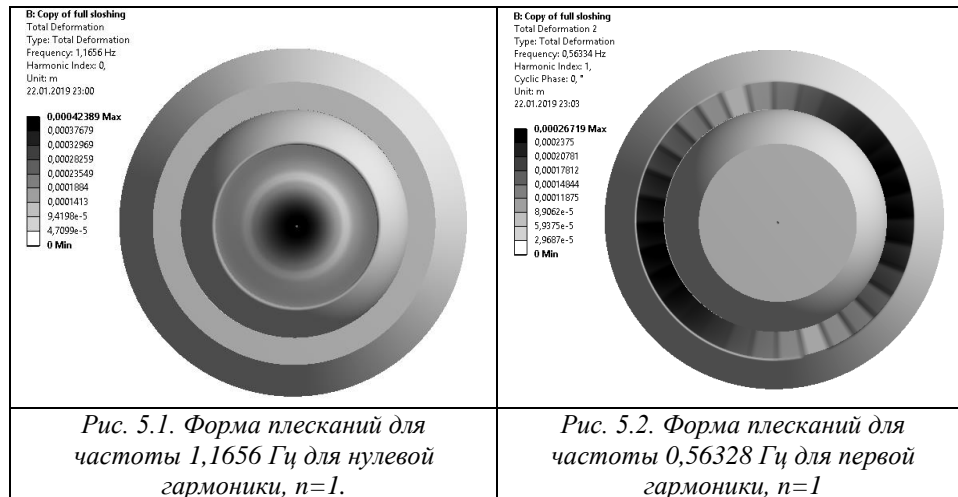


Рис. 4. а,б. Конечно элементные модели конструкции.

Следует заметить, что серия тестовых расчетов, не приводимых в отчете, продемонстрировала достаточность 5 конечных элементов по ширине сектора оболочки, так как результаты расчетов с пятью и семью конечными элементами оказались практически идентичными. Построена также конечно элементная модель, для проведения акустического модального анализа конструкции, содержащей жидкость, построена она из качественных гексагональных элементов. Данная модель приведена на рис. 4.4.б. Общее количество конечных элементов: 9146. Общее количество узлов: 38908.

5. Анализ численных результатов

Расчет частот проведен для 0, 1, и 10 гармоник. Формы колебаний поверхности жидкости приведены на рис. 5.1-5.4.



Следует отметить, что данные формы плесканий свободной поверхности соответствуют не только для полученным частотам, но и в целом практически неизменны для вычисляемых далее частот.

С учетом гидроупругого взаимодействия собственные формы конструкции полностью совпадают с формами «сухой» оболочки, однако частоты значительно снизились.

5 Выводы и перспективы дальнейших исследований

В результате проведенного анализа было установлено, что наименьшие частоты колебаний динамической системы «оболочка-жидкость» отвечают плесканиям свободной поверхности, учет упругости стенок баков приводит к существенному снижению частот колебаний по

сравнению с частотами незаполненной оболочки, при этом наименьшие частоты заполненной и незаполненной оболочечных конструкций могут отвечать разным волновым числам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abramson H.N. Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers. *Applied Mechanics Reviews*. 1963. № 16, P. 501 – 506.
2. Ibrahim R. A., Liquid sloshing dynamics: theory and applications: Cambridge University Press, 2005.
3. Yan-Sheng, Y., Xing-Rui, M., Ben-Li, W. Multidimensional modal analysis of liquid nonlinear sloshing in right circular cylindrical tank. *Appl. Math. and Mech.* 2007 . № 28 (8), pp. 1997–2018.
4. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid. Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods: WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. 2010. Vol.50. P. 203-211.
5. Avramov K.V., Strel'nikova E A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow. *Nonlinear Dynamics*. 2012. N 70. P. 1335 – 1354.
6. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016. 1 , N 1, P.14-27.
7. Faltinsen, O.M., Timokha, A.N. Sloshing: Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
8. Olsen H. What is sloshing? Seminar on Liquid Sloshing. Det Norske Veritas, 1976.
9. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM And FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks Int. *Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018. 6(6), P. 976-988.
10. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E., Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. 2011. Vol. 52. P. 285-296.
11. Еселева Е.В, Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Проблемы машиностроения*. 2006. №1. С.105-118.
12. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов. Изв. РАН. *Механика твердого тела*. 1998. № 6. С. 166–174.
13. Gnitko V.I., Naumenko Yu. V., Strelnikova E.A. Discrete singularities method in problems of liquid vibrations in spherical tanks. Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. 2017. Issue. 34. С. 29-37.
14. Mciver, P. Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers filled to an arbitrary depth. *J. Fluid Mech.* 1989. 201, P. 243–257.

REFERENCES

1. H.N. Abramson, “Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers”. *Applied Mechanics Reviews*, № 16, P. 501 – 506, 1963.
2. Ibrahim R. A., Liquid sloshing dynamics: theory and applications: Cambridge University Press, 2005.
3. Yan-Sheng Y., Xing-Rui M., Ben-Li W. “Multidimensional modal analysis of liquid nonlinear sloshing in right circular cylindrical tank”, *Appl. Math. and Mech.*, № 28 (8), pp. 1997–2018. 2007.
4. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. “Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid”, Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. Vol.50. P. 203-211, 2010.
5. Avramov K.V., Strel'nikova E A., Pierre C. “Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow”. *Nonlinear Dynamics*, N 70, P. 1335 – 1354, 2012.
6. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. “Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles”. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*, 1, N 1, P.14-27, 2016.

7. Faltinsen, O.M., Timokha, A.N. Sloshing. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
8. Olsen H. What is sloshing? Seminar on Liquid Sloshing. Det Norske Veritas, 1976.
9. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E., “Coupled BEM And FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks”. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, 6(6), P. 976-988, 2018.
10. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E., Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods*, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation, Vol. 52, P. 285-296, 2011.
11. Eseleva E.V, Gnitko V.I., Strelnikova E.A., “Sobstvennyie kolebaniya sosudov vyisokogo davleniya pri vzaimodeystvii s zhidkostyu”. *Problemyi mashinostroeniya*, N 1, S.105-118, 2006. [in Russian]
12. Mokeev V.V. “Issledovanie dinamiki konstruktsiy s zhidkostyu i gazom s pomoschyu metoda konechnyih elementov”, *Izv. RAN. Mehanika tverdogo tela*. N 6, S. 166–174, 1998. [in Russian]
13. Gnitko V.I., Naumenko Yu. V., Strelnikova E.A. “Discrete singularities method in problems of liquid vibrations in spherical tanks”, *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University*, Issue 34, S. 29-37, 2017.
14. Mciver, P. Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers filled to an arbitrary depth. *J. Fluid Mech*, N 201, R. 243–257, 1989.

Гнітько Василь Іванович – кандидат технічних наук, Інститут проблем машиностроєння ім. А. Н. Подгорного НАН України, Харків, Україна, Gnitkovi@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2475-5486>.

Гнітько Василь Іванович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна, 61046; e-mail: gnitkovi@gmail.com; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2475-5486>.

Gnitko Vasyl I. – PhD, Senior Research Fellow, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: gnitkovi@gmail.com; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2475-5486>.

Дегтярев Кирилл Георгиевич – ведучий інженер, Інститут проблем машиностроєння ім. А. Н. Подгорного НАН України, Харків, Україна, kdegt89@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4486-2468>.

Дегтярьов Кирило Георгійович – провідний інженер, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна, 61046; e-mail: kdegt89@gmail.com; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4486-2468>.

Degtyarev Kirill G. – Senior Engineer, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: kdegt89@gmail.com; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4486-2468>.

Кононенко Егор Сергеевич – аспірант, Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного НАН України, Харків, Україна, yehorkononenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6221-3608>.

Кононенко Егор Сергійович – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна, 61046; yehorkononenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6221-3608>.

Kononenko Yehor – post graduate, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail yehorkononenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6221-3608>.

Тонконоженко Анатолій Мстиславович – начальник сектора, Конструкторське бюро «Южное» ім. М.К. Янгеля, stcu-yuzhnoye@freemail.dnpr.net, <https://orcid.org/0000-0002-4721-6345>.

Тонконоженко Анатолій Мстиславович – керівник сектору, Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля, stcu-yuzhnoye@freemail.dnpr.net, <https://orcid.org/0000-0002-4721-6345>.

Tonkonozhenko Anatoly – head of department, M. K. Yange Yuzhnoye Design Office stcu-yuzhnoye@freemail.dnpr.net, <https://orcid.org/0000-0002-4721-6345>.

УДК 004.42

Application of Agile methodologies for software development

Holovko Dmytro, Vasylieva Larysa

V.N.Karazin Kharkiv National University, Svobody square 4, Kharkiv city, 61022, Ukraine

e-mail: ds.holovko@gmail.com

In this work evolution of software lifecycle models is explored. Firstly to lightweight and then to agile software development methodologies, and factors that have led to a search for ways to improve approaches to software development. Also "outdated" development designing approaches are compared with modern flexible and conclusions made whether the advantage of the latter over the firsts is absolute and whether or not the modern and only the modern should be used or maybe older approaches still have their advantages and it is too early to exclude them.

Keywords: *Agile, Scrum, Kanban, methodology, development, designing, agile methodologies, family of methodologies.*

В этой работе исследована эволюция моделей жизненного цикла программного обеспечения до сначала облегченных, а затем и гибких методологий разработки программного обеспечения, а также факторы, которые привели к поиску путей улучшения подходов к разработке программного обеспечения. Также сравнивались «устаревшие» подходы к организации разработки с современными гибкими, и сделаны выводы о том, является ли преимущество последних перед первыми абсолютным, и действительно ли они и только они должны использоваться на практике, или, возможно, более старые подходы все еще имеют свои преимущества, и еще слишком рано их исключать.

Ключевые слова: *Agile, Scrum, Kanban, методология, разработка, проектирование, гибкие методологии, семейство методологий.*

В даній роботі досліджено моделі життєвого циклу та сімейство Agile методологій, наведено цінності та принципи маніфесту Agile та пояснено значення перших, наведено закономірності, загальні для всіх наведених моделей життєвого циклу, наведено власне моделі життєвого циклу та пояснено сутність кожної моделі, досліджено еволюцію моделей життєвого циклу програмного забезпечення до спочатку легких і потім гнучких методів розробки програмних продуктів, наведено ці гнучкі методи розробки і дано коротку характеристику кожної, та досліджено чинники, що призвели до пошуку шляхів вдосконалення підходів до розробки програмного забезпечення. Тобто, освітлюються ті проблеми, які намагались вирішити досвідчені спеціалісти, з якою метою вони створювали маніфест Agile, і намагались винайти спосіб розробки, що має на увазі постійно мінливі ринок, вимоги замовника та бажання користувачів без втрат ефективності, часу, та фінансів. Ця тема є дуже актуальною, тому, як Agile-методології є доволі новим підходом до розробки програмних продуктів, навіть в такій загалом новій науці, як комп'ютерні технології, особливо в Україні, де з'являються останні 5-7 років, і досі відбувається процес їх впровадження, тому як часто їх використовують лише «номінально», тобто із порушеннями всіх правил методології та Agile загалом, або навпаки бездоганно виконують всі правила та ритуали, що призводить до зменшення ефективності роботи команди та створює зайвий стрес, а західні підприємства використовують їх дещо більше десятиліття, хоча ідеї для деяких було знайдено у підходах до організації виробництва ще 60-х років 20-го сторіччя. Також порівнено «застарілі» підходи до організації розробки із новими гнучкими, пояснено в чому полягає їхня перевага та наведено висновок чи є ця перевага останніх над першими абсолютною і чи лише Agile методології мають бути використовувані на практиці, або ж і старіші підходи все ще мають свої переваги і їх ще зарано виключати.

Ключові слова: *Agile, Scrum, Kanban, методология, розробка, проектування, гнучкі методології, сімейство методологій.*

Waterfall

The waterfall lifecycle model is probably the first to be met by a person who starts to study the development methodology. The essence of the model is that the work on the project consists of a rigid sequence of stages: definition of functional and non-functional requirements, analysis, design, implementation, testing, integration and support (Figure 1.1), and the next stage cannot begin, until the previous one is completed [1]. This is precisely a problem with the waterfall model: if, for example, significant errors are detected during the testing, the project redesign will be needed and the whole project will go back through design, implementation and testing phases [1]. Therefore, the main drawbacks of the waterfall model are discrepancy with the real software creation conditions, lack of the possibility to return to the previous stages of development, error correction performed only during the testing phase and the project result could be obtained only at the end of the development process. There are also the advantages, however: the waterfall model is understandable, therefore it makes it easy to manage a project and allows you to determine in advance the cost and time estimations of development, it has a certain sequence of stages and allows you to evaluate the quality of the product on each of them, and with a clear definition of requirements and means of their implementation let you get excellent result quite quickly [2].

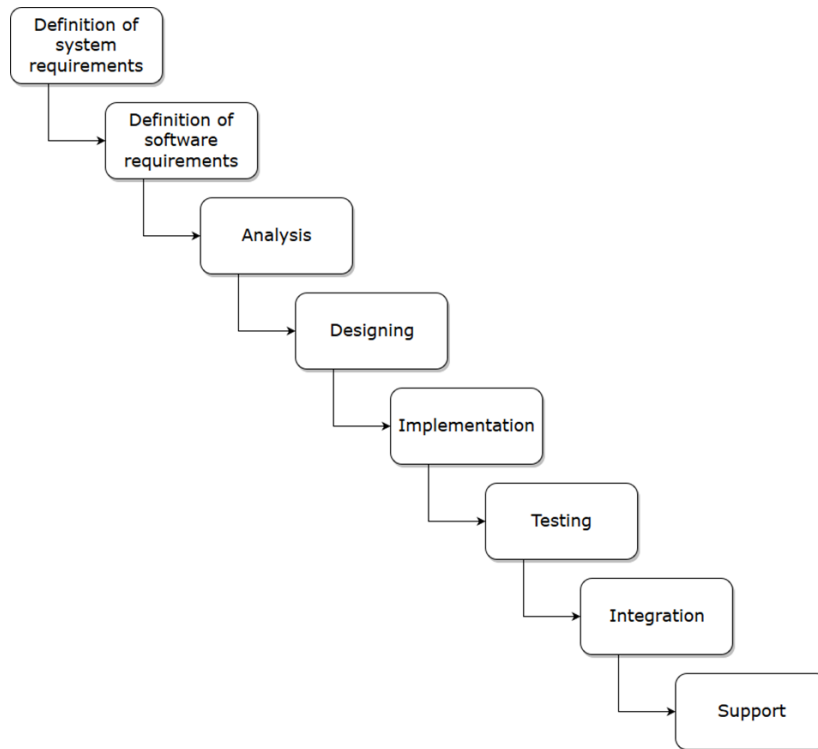


Figure 1.1. Waterfall lifecycle model

Waterfall model with intermediate monitoring

In order to eliminate the main disadvantage of the waterfall model, it has been improved by adding backward links between stages. That is, an opportunity to go back to the previous stage (Figure 1.2) has been added, which allows solving problems at each stage immediately after the problem is detected, and to return to the previous steps where an error has been made. However, such a model has showed a 10-fold increase in development costs [2]. It is caused by the fact that because of returning to previous stages the cost proved to be stretched over time [3].

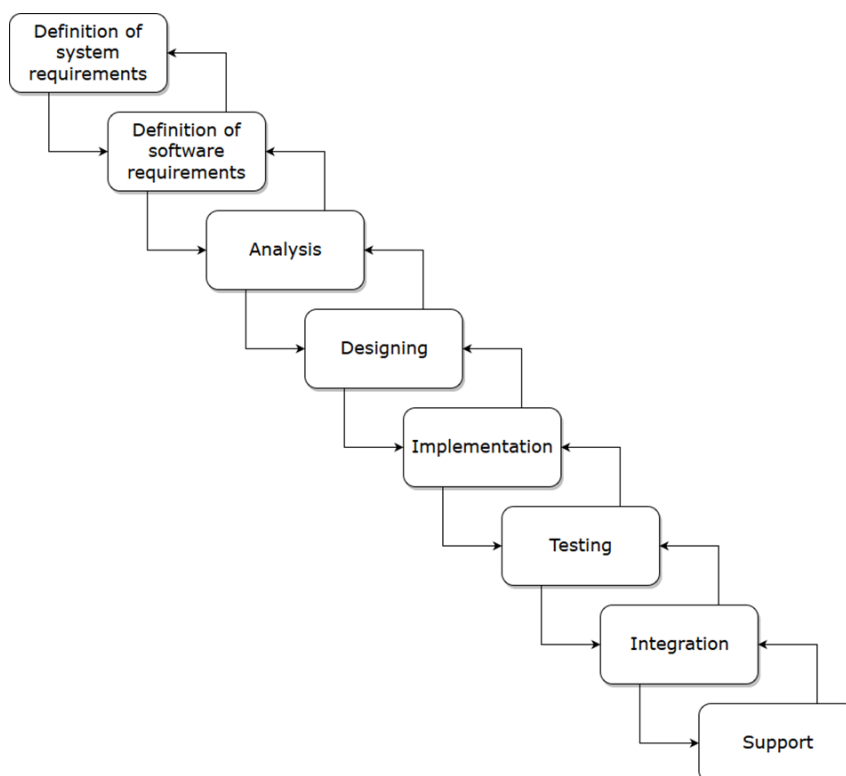


Figure 1.2. Waterfall lifecycle model with intermediate monitoring

V-model of software lifecycle

Development through testing (V-model) - a model created in attempt to find a program product development algorithm that is close to real-life conditions [2]. It has a phased structure, as well as a waterfall model, but pays a lot of attention to verification and testing of the product being done at the same time as the development phase (Fig. 1.3), therefore this model is optimal for systems where a smooth operation is particularly important [4]. The V-model had some disadvantages however; the main one is late testing, which makes it impossible to make changes without changing the schedule of the project.

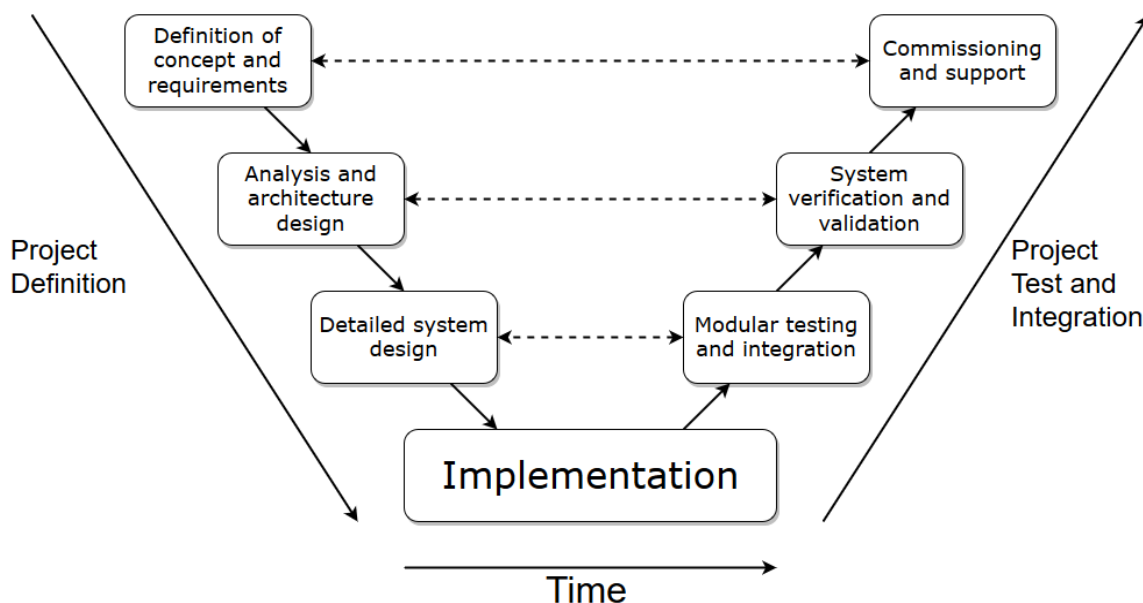


Figure 1.3. V-model of the software lifecycle

General features of lifecycle models

Lifecycle models similar to any described above reflect the same states, from the moment the need in this software product arises and to the moment of its complete decommissioning. The indicated models differ in the interrelation of the lifecycle stages, but each of these stages is present in each model in one form or another [3].

Strategy definition – the name of this stage in different models usually contains such keywords as: definition, concept, requirements, project planning. That is, this stage, which can be presented in a particular model as several stages, usually a business survey and an assessment of the scope of the project, the goals and objectives, aims to do. At this stage, the entities and functions are determined at a high level [3].

This is done usually by a team of highly skilled business analysts having access to a leading staff of the customer company; main users of the future system usually participate in this phase, as well as domain experts [3].

The purpose of this phase, as noted above, is to obtain as much information as possible about the system, customer requirements and to transfer all this information in a formalized form to system analysts, and this is usually done through discussions with the customer, experts and users [3].

The result of this stage (strategy determining) is the documentation, where it is clearly stated what the customer will get if they agree to finance the project, time and costs estimations for the finished product [3]. The document should contain not only the costs but also the possible profit for the customer; for example the payback time of the project, the expected economic effect in cases where it can be estimated [3].

The **analysis** phase involves a detailed study of the business processes and the information needed for their implementation [3]. All information about the system, collected at the strategy definition stage is being formalized and specified at the stage of analysis [3]. Particular attention is paid to the completeness of transferred information, information analysis for non-contradictoriness, as well as the search for unused or duplicated information, because as a rule, the customer initially forms

requirements not for system as a whole, but for separate components [3]. At this stage, the necessary components of the testing plan can also be determined [3].

Analysts collect and fix information in two related forms: functions and entities [3]. That is why results of the analysis stage traditionally a hierarchy of functions that divides the process of processing into components (what is done and what is it composed of), and the entity relationship model, which describes the entities, their attributes, and the relationships between them [3].

The **design** stage in its original historical form has been designed to create schematics of databases or data repositories, if any present in the project, and a set of specifications of future system modules, based on the data obtained from analysis phase. Also historically, a testing plan is finalized at the design stage, and a final document, a technical specification, according to which software will be developed, is created. As general, in mentioned above software lifecycle models, the design phase performs the following tasks:

1. complete verification of analysis stage's results;
2. determination of system constraints;
3. determination of the system's architecture;
4. determination of development tools to be used;
5. repository or database designing;
6. designing the interaction interfaces;
7. determination of specifications for system modules;
8. determination of testing requirements;
9. determination of system security requirements [3].

An important moment - all specifications should be as accurate as possible: those obtained after the stage of analysis as well as developed at this stage [3]. Quality of the design defines quality of the future product.

During the project **implementation** developers receive a specification and begin to write a code of the modules, strictly adhering to the designers' documentation [3]. The result of this stage is a program that is passed to the **testing** stage, which, in general, determines and evaluates quality of the system and its readiness for commissioning. That is why these two stages are not combined or parallel only in the waterfall model - as already mentioned, from the testing stage, it should return to the stage of implementation at least. In other models, this disadvantage has been eliminated in one way or another; actually attempts to eliminate the need to go back to the previous stages of testing have led to the emergence of such a number of software lifecycle models. In practice, the development and testing processes are running simultaneously, and developers are constantly cooperating with testers in order to eliminate most of the errors efficiently and in time. Sometimes these collaborations involve software designers who act as experts responding to developer requests for technical specifications.

The result of the testing phase is the system resistant to failures, malfunctions and capable to restore itself correctly [3].

The stage of **implementation or integration** involves the process of transition to a phase of operation. The system can be deployed completely, or gradually, depending on the model used, but in any case at this stage the system passes the so-called "user acceptance test" - the system begins to work "for real" [3].

The stage of **operation and technical support** (if present) is the last stage of the software lifecycle. It can be noted that if technical support is available, the terms of support, the necessary staff and equipment are discussed with the customer and fixed in a separate document [3].

Incremental lifecycle model

A significant step towards Agile methodologies was made by separating the entire product development process into several development cycles, each cycle passing through the same phases (Figure 1.4). Such decomposition instead of a large inert project, which then needs to be tested as a whole, presents some small easy-to-create modules that are much easier to test and fix. Complete system requirements are also divided according to modules that will be developed per cycle.

According to the incremental model, in the first large loop the product is released with the basic functionality, and then new functions are gradually added, that means, that at each new so-called "increment" a new extended and improved version of product is being developed, and this process continues until a complete system is created [4].

The main advantage of this model is the swift response to changes in customer requirements: if the customer wants to introduce an additional functionality - it will be designed, implemented and tested in the next cycle; and shortly after release of first version of the product the reaction of audience, expediency and development risks could be assessed.

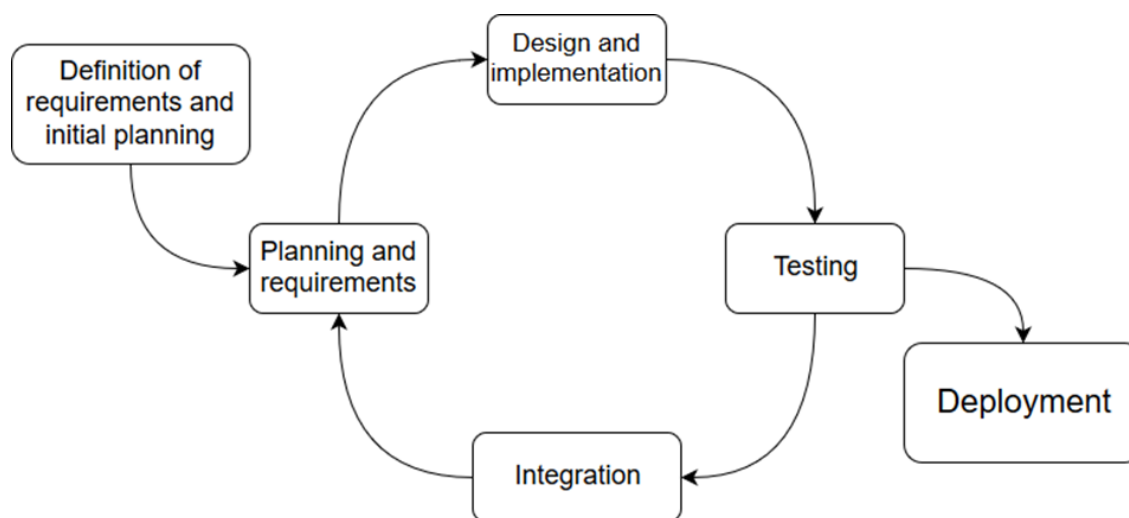


Figure 1.4. Incremental software development model

Nevertheless, requirements for the whole system still must be defined before the implementation of the first version of the product, which imposes limitations. Moreover, the customer's requests needs to be periodically processed, formalized and adjusted to users' feedback and changes in the market.

Iterative lifecycle model

The main difference between the iterative model and the incremental one is that the start of the project doesn't require a complete specification of project requirements; the first cycle develops a part of functionality, which becomes the basis for the further development and specification of the requirements [4]. The first version may not be ideal - it just has to work, but each subsequent version brings the project closer to the desired result, and the result of each cycle is the working version of the product [4].

Rapid application development

Attention should be paid to the rapid application development model, or just "rapid application development", hereinafter referred to as RAD. This is the incremental model and the main peculiarity of RAD is that modules, components, or functions are developed by several groups simultaneously (Figure 1.5).

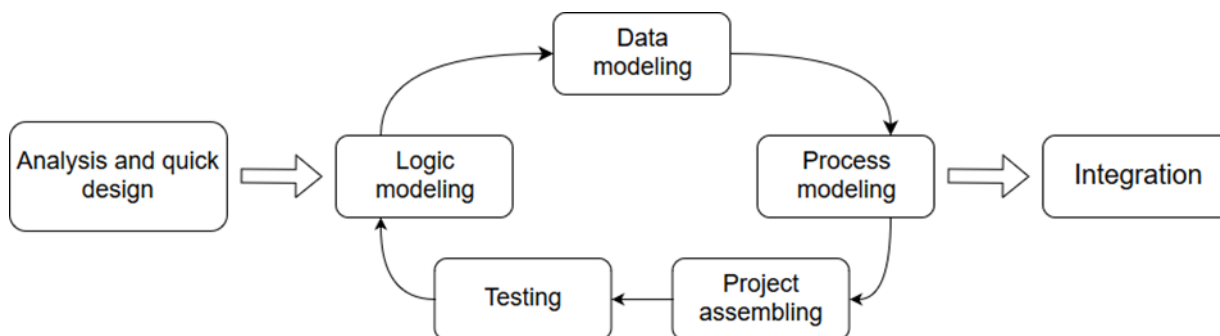


Figure 1.5. Rapid application development (RAD)

The time of one cycle is strictly limited, and upon completion, all created modules are combined into one working product [4]. The model cycle includes phases of "logic modelling", "data modelling", "process modelling", "project assembly" and "testing". In the first three phases the list of information flows, objects and entities, and relating objects is determined. RAD primarily uses automated

assembling tools, which transform the generated models into a code at the fourth stage, the "project assembly". That is why the main limitation of the model is the high personnel requirements, highly skilled and specialized developers are required. In addition, the budget of such a project is usually rather high due to the need to pay for specialists' services and automatic assembling tools [4]. Therefore this model is used for "fast development" - it is effective when the project must be finished in a short time [4].

Spiral model

The spiral model that combines design and staged prototyping should also be mentioned [2].

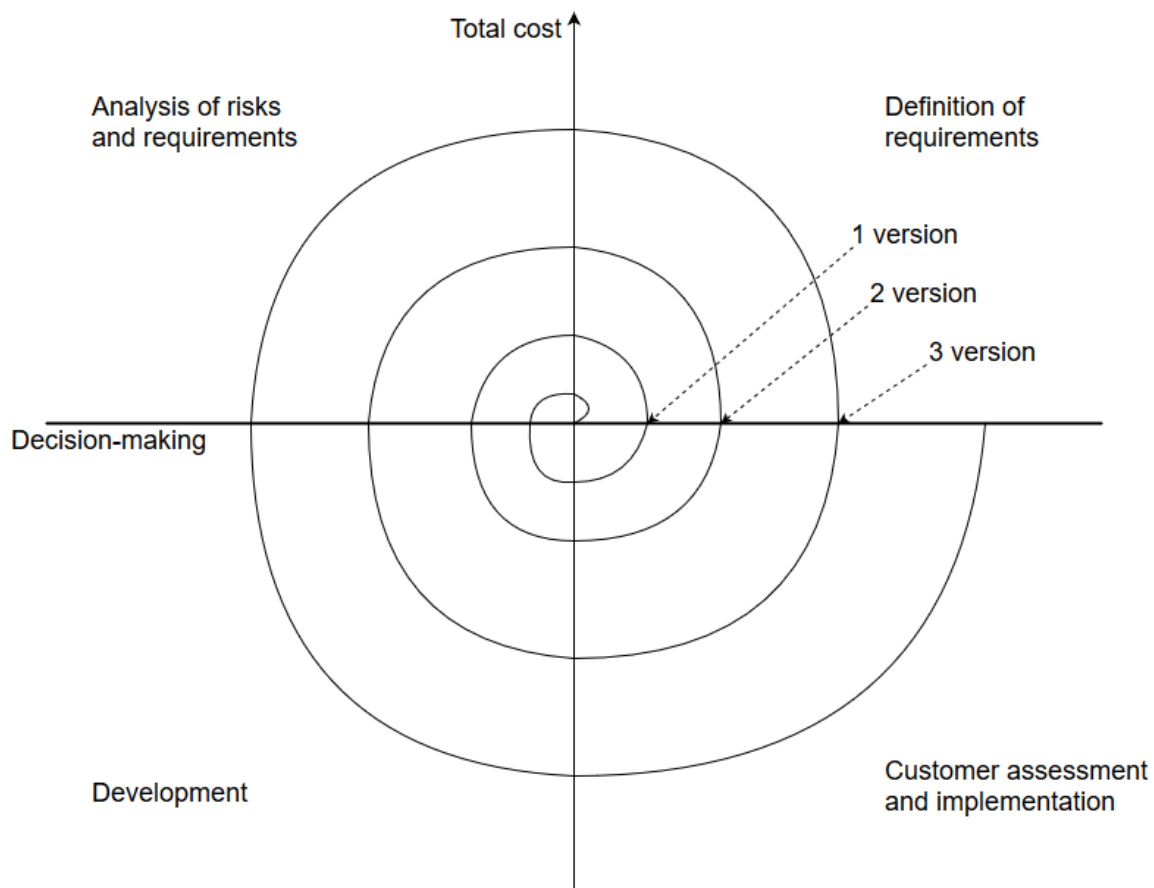


Figure 1.6. Spiral software lifecycle model

Each "turn" of spiral consists of sequentially placed stages that have no backlinks and result of each "turn" is analyzed at the end of this "turn", the results of analysis affects the next "turn" (Figure 1.6). The "development" in the spiral model combines traditional stages of design, implementation and testing, that is, at this stage detection and correction of part of errors are performed. The errors which cannot be fixed and require more profound structural changes can be corrected on the next "turn" [4]. The spiral model, therefore, is very similar to the incremental one, but there is risk analysis present in each cycle. Therefore this model is suitable for the projects where each solution is critical and a failure is unacceptable [4]. That is why the efficiency of this model increases along with the size and the complexity of the project [3].

Historical factors of the Agile manifesto emergence, its values and principles

Now let us consider the methodology, because Agile is a methodology, not a model. The methodology is a system of principles, ideas, means, methods, and tools for software development, while the model is a description of software product lifecycle in stages with detailed explanation of each stage within the system [5]. In other words the methodology is a set of strategies for managing a product development process.

Agile is also called the "Agile methodologies family" which means that Agile is not a particular methodology, a clear manual or algorithm, and therefore allows for freedom of choice and adaptation, which is why a large number of methodologies exists under the common name of "Agile methodologies family", all of which are based on Agile principles, but have specific methods, practices and project management strategies [1].

Agile is a very young family of methodologies, its principles were formed in February 2001 by seventeen IT professionals gathered at a ski resort. The official website highlights this event as follows: "On February 11-13, 2001, at The Lodge at Snowbird ski resort in the Wasatch mountains of Utah, seventeen people met to talk, ski, relax, and try to find common ground—and of course, to eat" [6].

Shortly before this event, in the 1990s, a number of "light" software development methods were developed in response to the prevailing "heavy" methods that critics described as "overly regulated, planned, and micromanaged" [7]:

- Rapid application development (rapid application development, RAD) – 1991;
- Unified process (unified process, UP) – 1994;
- Dynamic systems development method (DSDM) – 1994;
- Scrum – 1995;
- Crystal Clear – 1996;
- Extreme Programming (XP) – 1996;
- Feature-driven development – 1997.

It is no surprise that the leading experts in the lightweight development methods were among the authors of the Agile Manifesto, which, in turn, gave impetus to the development of flexible methodologies and laid the foundations for a flexible approach to software development in general [7].

The Manifesto consists of four values and 12 principles and it contains no specific instructions.

1. Individuals and interactions over processes and tools;
2. Working software over comprehensive documentation;
3. Customer collaboration over contract negotiation;
4. Responding to change over following a plan [6].

Those definitions raise many questions due to their abstractness; therefore Scott Ambler's explanation can be useful:

1. Tools and processes are important, but more important that competent people work together effectively;
2. Good documentation is useful because it helps people understand how software is created and how to use it, but the main purpose of the development is to create software, not documentation;
3. The contract is important, but it is not a substitute for close cooperation with customers, which is needed to understand what they need;
4. The project plan is important, but it should not be too rigid; it should take into account changes in technology or the environment, stakeholder priorities, and people's understanding of the problem and its solution.

The twelve principles of Agile as follow:

1. Our highest priority is to satisfy the customer through early and continuous delivery of valuable software;
2. Welcome changing requirements, even late in development. Agile processes harness change for the customer's competitive advantage;
3. Deliver working software frequently, from a couple of weeks to a couple of months, with a preference to the shorter timescale;
4. Business people and developers must work together daily throughout the project;
5. Build projects around motivated individuals. Give them the environment and support they need, and trust them to get the job done;
6. The most efficient and effective method of conveying information to and within a development team is face-to-face conversation;
7. Working software is the primary measure of progress;
8. Agile processes promote sustainable development. The sponsors, developers, and users should be able to maintain a constant pace indefinitely;
9. Continuous attention to technical excellence and good design enhances agility;

10. Simplicity - the art of maximizing the amount of work not done - is essential;
11. The best architectures, requirements, and designs emerge from self-organizing teams;
12. At regular intervals, the team reflects on how to become more effective, then tunes and adjusts its behavior accordingly [6].

Nowadays there are a number of methodologies constituting Agile family and some of them have been mentioned before:

- Agile Modelling (AM) - this approach basically defines modelling procedures (including model code verification) and documentation within software development. The procedures for designing and constructing UML diagrams are described in a lesser extent and stages of development, testing, project management, deployment and maintenance are not affected.
- The Agile Unified Process (AUP) is a unified version of the RUP (IBM Rational Unified Process) methodology formulated by Scott Ambler. AUP defines a software development model for business applications.
- Agile Data Method (ADM) is a set of iterative tools of flexible software development with an emphasis on the formation of requirements and solutions through the cooperation of various cross-functional teams.
- Dynamic Systems Development Method (DSDM) is an iterative and incremental approach based on the Rapid Application Development (RAD) concept, which focuses on maximizing the end-user involvement in developing a software product and "Concentration on the useful 80% of the system, which can be implemented in 20% of the time".
- Essential Unified Process (EssUP) - an approach developed by Ivar Jacobson that contains methods of iterative software development with an emphasis on the product architecture and optimal team practices (essentially borrowed from RUP, CMMI and Agile Development). The idea is that only applicable in a particular situation practices and methods should be used. Based on the chosen methods and practices, the target process is determined. In contrast to RUP, where all practices and methods are interconnected, in this approach, there is flexibility and the ability to isolate exactly the necessary elements (methods and practices) from the available ones.
- Extreme programming (XP) - the idea of extreme programming is to use the best existing practices in the area of software development, raising them to a new (extreme) level. For example, in contrast to the usual practice, when one programmer consistently checks the written code after his colleague, in extreme programming, this check is performed in parallel. That increases the speed of product release, but also the risks too.
- Feature driven development (FDD) - the main idea of this approach is that "each function should be implemented in no more than two weeks". Therefore, if it is unrealistic to develop a function as a whole, this function should be deconstructed into several functions and implemented gradually.
- Getting Real (GR) - this approach eliminates the functional specification procedures used for web applications. Development begins from the reverse, an interface and design are developed initially, and then the functionality itself.
- OpenUP (OUP) - this approach defines an iterative-incremental method of software development based on RUP. Within this method, the development lifecycle is defined (start-up phase, refinement phase, development and transfer phase to the customer). Due to certain stages and control points, the effectiveness of controlling and monitoring of the project's progress increases, which leads to the timely decision-making on the project.
- Lean software development - this approach is based on the concept of lean management of a manufacturing enterprise (lean production, lean manufacturing), the interaction of developers with customers and super-fast implementation of customer-critical functions.
- "Crystal" methodologies (Crystal Clear, Crystal Yellow and Crystal Orange, for example), the main points of which are choosing the policy, practical approaches and processes that will be valid for the entire project, and interacting with end-users.

And, of course, Scrum and Kanban, that are very common both in literature and real projects because for small projects and inexperienced teams they are quite optimal. Both methodologies are based on Agile principles and are designed for a small independent team of 5-9 people [8]. The team does not have an official head and decisions on the organization of the project are made without

external intervention [8]. This results in collective responsibility - any error is a mistake of the entire team, not a specific member [8]. It is also highly recommended to place the team in one room, preferably without partitions. Contacts and communication are of most importance here and nothing should interfere.

Kanban

This method of the workflow organization comes from the automotive industry; the name itself is a Japanese term for the conveyor production method of Toyota in the '60s of the 20th century [9]. Its essence is to use so-called "main conveyor" or "main production" and "additional conveyors" or "additional productions", the main conveyor puts the pace of production, and additional cannot exceed this pace, but they can slow it down [9].

Kanban is based on three basic principles:

1. visualization of what is done today (the process of work) - the vision of all elements in the context of each other is the most informative;
2. limited work volume - this helps to balance the workflow as a flow of elements in development, and does not allow the team to start or run too much work at the same time;
3. rate support - when one job is completed, a new one, with the highest priority, is taken from the list for processing [10].

Therefore, Kanban is based on a prioritized list of tasks and progress stages of a specific task capacity, for example: "to processing", "in development", "in testing" and "implementation" (Figure 2.1).

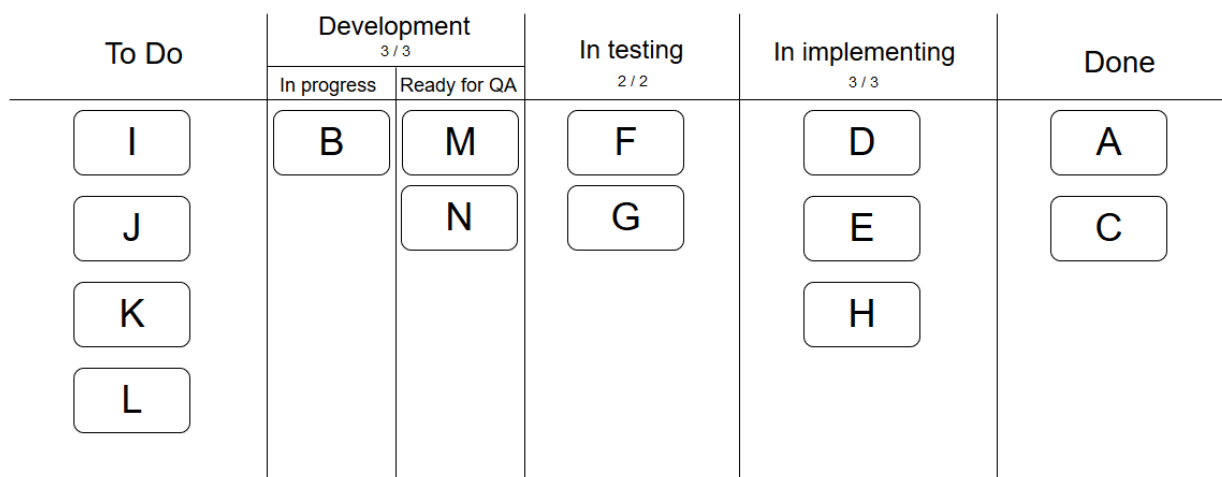


Figure 2.1. Example of workflow organisation with Kanban

This methodology is based on the priorities and developers' capabilities in terms of parallel work, rather than on time. When the developer is ready to take a new task, he takes it out of the list. When a new feature is enough to release a new version of the product – it is implemented on demand, and if there is an urgent important task – it is immediately taken to work. The capacity of each stage is limited by the total weight of tasks performed, and if a certain stage is divided into several, the capacity has a parental stage [8]. In the ideal case, all stages are filled to the maximum capacity, and in case of delays in one of stages, the developers from the least loaded stage can join temporarily (or permanently, if the delays at one and the same stage occur constantly) to eliminate delays throughout the product development process [9]. This liquidity is possible because teams in Agile are universal, and roles inside a team do not exist in Kanban [8].

The main purpose of Kanban - maximum speed of the passage of the task through all stages, which means the maximum development speed of new features of the product for the whole project, and this speed is more important than the number of simultaneously developed features, and Kanban itself is better suited for projects that have quickly and frequently changing priorities and requirements [10].

Scrum

Scrum has influenced the creation of the Agile Manifesto, but before it was the structure of projects, for which it was important to supply the new system features within more or less same time intervals, every two or four weeks, for example [10]. Therefore the first feature of Scrum is an iterative approach: all project work is divided into cycles of specific fixed duration, the so-called sprints (Figure 2.2).

The next feature is the two additional roles besides developers: a scrum-master and a product owner (PO) [8]. A scrum-master is a person whose duties are to organise the work, he is not a manager, does not hold a managerial position and does not gives instructions [8]. His direct duties are:

1. to hold a meetings;
2. to remove obstacles for teamwork;
3. to find and identify problems and to bring this information to the team;
4. to ensure that the team follows the methodology;
5. to monitor the progress of tasks [8].

In addition, the scrum-master is a member of the team and when not executing the duties above he works on the project as well [8].

The product owner defines the direction of the project development. It may be an external or internal client or a customer representative, but in any case, it is a person who has perfect knowledge of the market, the target audience and approves the results of the team's work [8].

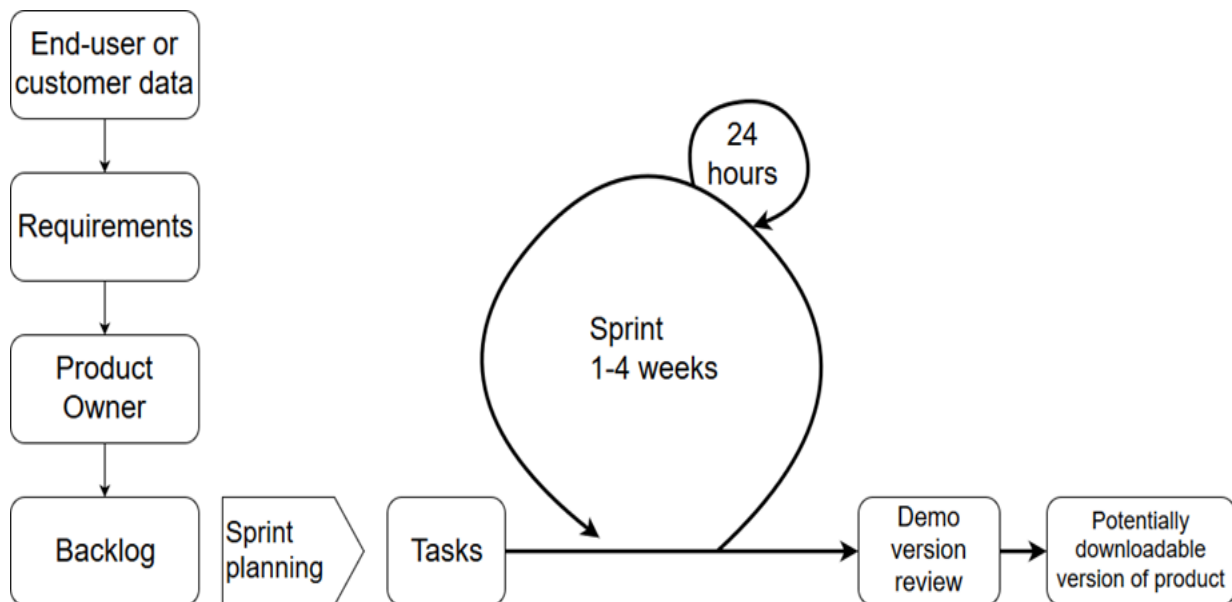


Fig. 2.2. Workflow scheme for scrum methodology.

Scrum sprint

Another Scrum's difference from Kanban is that the task priorities are defined not by the team but by the product owner, and all subsequent priority reviews during the project are performed by the product owner, not by the team. It's also worth paying attention to the sprint's composition - unlike the Kanban workflow, where all developers start from the beginning to work out the task and at completion take a new one, in Scrum each sprint begins with the planning, which conditionally could be named "sprint planning" stage. This stage usually takes the first few hours of sprint and team checks the list of development tasks because both the list and the priorities of tasks can be changed in time. Then the developers choose as many tasks with highest priority as the team could complete during sprint and start working. The bulk of the sprint can be named "realization", at this time the developers complete the tasks chosen at the planning stage. At last performed work is demonstrated to the product owner and integrated into the product – this stage can be named "release version" or simply "release". The sprint ends with a so-called "retrospective" - the team discusses the sprint, identifies which problems it has faced, whether they have been solved, how to improve the team's performance for the next sprint and how to improve the quality of the product. It is impossible to add tasks to the sprint even urgent and very important, therefore all unfulfilled tasks are returned to the task list for consideration at the next sprint planning stage.

Conclusions

The dependencies and general features of life cycle models have been determined and outlined above in "General particular features of lifecycle models". Advantages and disadvantages of software lifecycle models have been studied and analyzed, as well as the factors that have driven further searches and improvements of project management approaches and consequentially have led to the transition from life cycle models to "looped" approaches (iterative, incremental and spiral models).

Thus, this article emphasizes not only the need to introduce the latest developments in the field of work process organization to the Ukrainian IT sector but also points out, perhaps more importantly, the needless rejection of past achievements. Nowadays the problem of project management usually lies in the choice between Scrum and Kanban, not considering even other methodologies of Agile family, needless to say, the life cycle models. Those models, albeit outdated, still have their advantages in particular cases and moreover can sometimes surpass benefits of Agile methodologies.

ЛІТЕРАТУРА

1. Максим Пименов. Как создаются программы по методологии Agile. *Нетология-групп*, 2011-2018. URL: <https://netology.ru/blog/loveagile>. (Дата звернення: 11.03.2018)
2. Igor Mats. Модели жизненного цикла программного обеспечения. *Habr*, 2006 – 2018. URL: <https://habr.com/post/111674>. (Дата звернення: 10.03.2018)
3. Лилия Хаф. Методологии разработки программного обеспечения Часть 1. *КомпьютерПресс*, 1999 – 2018. URL: <https://compress.ru/article.aspx?id=11321#05>. (Дата звернення: 17.03.2018).
4. Thomas Alva. Ещё раз про семь основных методологий разработки. *Habr*, 2006 – 2018. URL: <https://habr.com/company/edison/blog/269789>. (Дата звернення: 15.04.2018)
5. Методологии разработки программного обеспечения. *Habr*, 2006-2018. URL: <https://habr.com/sandbox/43802>. (Дата звернення: 24.03.2018)
6. Agile Manifesto. *Manifesto for Agile Software Development*, 2001. URL: <http://agilemanifesto.org>. (Дата звернення: 07.04.2018)
7. Гибкая методология разработки (Agile). *Mahamba*. URL: <http://mahamba.com/ru/gibkaya-metodologiya-razrabotki-agile>. (Дата звернення: 08.04.2018)
8. Максим Пименов. Разбираемся в Scrum и Kanban. Нетология-групп, 2011-2018. URL: <https://netology.ru/blog/scrum-kanban>. (Дата звернення: 11.03.2018)
9. Александр Пушкарев. Методология Kanban: введение. *Habr*, 2006-2018. URL: <https://habr.com/post/230725>. (Дата звернення: 22.04.2018)
10. Mike McLaughlin. What Is Agile Methodology? VersionOne, Inc., 2018. URL: <https://www.versionone.com/agile-101/agile-methodologies>. (Дата звернення: 28.04.2018)
11. Маттиас Маршалл. КАНБАН / СКРАМ / АДЖАЙЛ — что лучше для вашего проекта? Brain Rain, 2017. URL: <https://brainrain.com.ua/%d1%81%d0%ba%d1%80%d0%b0%d0%bc-2>. (Дата звернення: 29.04.2018)
12. Agile Methodology: The Complete Guide to Understanding Agile Testing. QASymphony, Inc., 2018. URL: <https://www.qasymphony.com/blog/agile-methodology-guide-agile-testing>. (Дата звернення: 05.05.2018)
13. David Lowe. Theme, Epic, Story, Task. Scrum & Kanban Ltd, 2013-2018. URL: <https://scrumandkanban.co.uk/theme-epic-story-task>. (Дата звернення: 13.05.2018).

REFERENCES

1. M. Pimenov, "How programs are created using the Agile methodology", December 2016. [Online]. Available: Netology-group, <https://netology.ru/blog/loveagile>. [Accessed March 11, 2018].
2. I. Mats, "Software life cycle models", January 2011. [Online]. Available: Habr, <https://habr.com/post/111674>. [Accessed March 10, 2018].
3. L. Khaf, "Software Development Methodologies Part 1", 2004. [E-book]. Available: ComputerPress, <https://compress.ru/article.aspx?id=11321> [Accessed March 17, 2018].
4. T. Alva "Once again about the seven main development methodologies", November 2015. [Online]. Available: Habr, <https://habr.com/company/edison/blog/269789>. [Accessed April 15, 2018]
5. "Software development methodologies", April 2012. [Online]. Available: Habr, <https://habr.com/sandbox/43802>. [Accessed March 24, 2013].

6. “Agile Manifesto”, 2001. [Online]. Available: Manifesto for Agile Software Development, <http://agilemanifesto.org>. [Accessed April 15, 2018].
7. “Flexible development methodology (Agile)”. [Online]. Available: Mahamba, <http://mahamba.com/ru/gibkaya-metodologiya-razrabotki-agile>. [Accessed April 8, 2018].
8. M. Pimenov, “Understanding Scrum and Kanban”, December 2016. [Online]. Available: Netology-group, <https://netology.ru/blog/scrum-kanban>. [Accessed March 11, 2018].
9. A. Pushkarev, “Kanban Methodology”, July 2014. [Online]. Available: Habr, <https://habr.com/post/230725>. [Accessed April 22, 2018].
10. M. McLaughlin, “What Is Agile Methodology?”. [Online]. Available: CollabNet Inc., <https://www.versionone.com/agile-101/agile-methodologies>. [Accessed April 28, 2018].
11. M. Marschall, “Kanban vs Scrum vs Agile”, July 2015. [Online]. Available: Agile Web Development & Operations, <https://agileweboperations.com/2015/07/27/scrum-vs-kanban/>. [Accessed April 29, 2018].
12. “Agile Methodology: The Complete Guide to Understanding Agile Testing”. [Online]. Available: QASymphony Inc., <https://www.qasymphony.com/blog/agile-methodology-guide-agile-testing>. [Accessed May 05, 2018].
13. D. Lowe, “Theme, Epic, Story, Task”, January 2014. [Online]. Available: Scrum & Kanban Ltd, <https://scrumandkanban.co.uk/theme-epic-story-task/>. [Accessed May 13, 2018].

Головко Дмитро Сергійович - магістрант, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: ds.holovko@gmail.com; ORCID: 0000-0001-6134-3777.

Holovko Dmytro S. bachelor of computer science, V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, ds.holovko@gmail.com; ORCID: 0000-0001-6134-3777.

Головко Дмитрій Сергеевич- магістрант, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: ds.holovko@gmail.com; ORCID: 0000-0001-6134-3777.

Васильєва Лариса Валентинівна – кандидат біологічних наук, доцент кафедри електроніки і управляючих систем, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: ds.holovko@gmail.com; ORCID: 0000-0001-7926-3062.

Vasylieva Larysa V. - PhD of biology, Associate Professor at the Department of Electronics and Control Systems, V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, ds.holovko@gmail.com; ORCID: 0000-0001-7926-3062.

Васильєва Лариса Валентиновна – кандидат биологических наук, доцент кафедры электроники и управляющих систем, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: ds.holovko@gmail.com; ORCID: 0000-0001-7926-3062.

УДК 517.946.9

Математична модель теплообміну у валковому калібрі

О.П. Дем'янченко¹, О.Б. Кобильська², В.П. Ляшенко²

¹ Азовський морський інститут національного університету «Одеська морська академія», майдан, вул. Чорноморська 19, м. Маріуполь, 87517, Україна

² Кременчуцький національний університет ім. М. Остроградського, вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 61046, Україна
e-mail: kobilskaya1983@gmail.com

Побудована фізична модель теплового процесу у валковому калібрі під час прокатки стрічки на двохвалковому прокатному стані. Запропонована математична модель температурного поля рухомого порожнистого валка прокатного стану циліндричної форми, що обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю. У математичній моделі враховані різні умови теплообміну внутрішньої та зовнішньої поверхні валка зі стрічкою та оточуючим його середовищем. Температурне поле порожнистого валка прокатного стану розглядається у вигляді початково крайової задачі для однорідного рівняння теплопровідності з неоднорідними, нелінійними граничними умовами, що залежать від кута обертання валка навколо своєї осі. Розглянуто також спрощену задачу визначення квазістаціонарного температурного поля, розв'язок якої зведено до розв'язку еквівалентного їй інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна. За допомогою системи комп'ютерної математики Mathcad побудовано температурний розподіл поверхні валка. Розроблено алгоритм розв'язку неоднорідної задачі та побудовано температурний розподіл валка.

Ключові слова: математична модель, температурне поле, валковий калібр, крайова задача, інтегральне рівняння.

Построена физическая модель теплового процесса в валковом калибре во время прокатки ленты на двухвалковом прокатном стане. Предложена математическая модель температурного поля подвижного полого валка прокатного стана цилиндрической формы, который вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. В математической модели учтены различные условия теплообмена внутренней и внешней поверхности валка с лентой и окружающей его средой. Температурное поле полого валка прокатного стана рассматривается в виде начальной краевой задачи для однородного нестационарного уравнения теплопроводности с неоднородными, нелинейными граничными условиями, которые зависят в том числе и от угла поворота валка вокруг своей оси. Рассмотрена также упрощенная задача определения квазистационарного температурного поля, решение которой сведено к решению эквивалентного ей интегрального уравнения типа Гаммерштейна с ядром в виде функции Грина. С помощью системы компьютерной математики Mathcad построено температурное распределение поверхности валка. Разработан алгоритм решения неоднородной задачи и построено температурное распределение валка.

Ключевые слова: математическая модель, температурное поле, валковый калибр, краевая задача, интегральное уравнение.

A physical model of the thermal process in the roll caliber during the rolling of the tape on a two-roll rolling mill has been constructed. A mathematical model of the temperature field of a movable cylindrical hollow roll of a rolling mill rotating about its axis with constant angular velocity is proposed. The mathematical model takes into account different conditions of heat exchange of the inner and outer surfaces of the roll with the belt as well as surrounding environment. The temperature field of a hollow roll of a rolling mill is considered as an initial boundary-value problem for a homogeneous non-stationary heat equation with inhomogeneous, nonlinear boundary conditions, which also depend on the angle of rotation of the roll around its axis. The equation describes the temperature field of the rolls during uncontrolled heat transfer during rolling. It significantly depends on the time and number of revolutions around its axis. With a large number of revolutions of the roll around its axis, a quasi-stationary temperature distribution occurs. Therefore, the simplified problem of determining a quasistationary temperature field, which is associated with a thermal process that is time-independent, is considered. In this case, the temperature field is described using the boundary value problem in a ring for a homogeneous stationary heat equation with inhomogeneous boundary conditions and heat transfer conditions outside the ring, which lie from the angular coordinate. After the averaging operation, the solution of this problem is reduced to solving the equivalent integral equation of Hammerstein type with a kernel in the form of the Green's function. The temperature distribution of the roll surface has been built by the Mathcad computer mathematical system. An algorithm for solving an inhomogeneous problem has been developed and the temperature distribution of the roll has been constructed.

Keywords: mathematical model, temperature field, roll caliber, boundary value problem, integral equation.

1 Постановка проблеми

Сучасні вимоги щодо якості продукції у прокатному виробництві вимагають підвищення точності контролю температури валків у зоні прокатки [1-3]. Це можливо за рахунок керування температурним режимом роботи за допомогою математичної моделі теплового процесу у валковому калібрі. Однією із важливих умов оптимізації температурного режиму є чіткий контроль умов теплообміну валків з оточуючим їх середовищем. Для дослідження математичних моделей та розв'язку задач, що описують моделі теплообміну, необхідно мати достовірні експериментальні дані про теплове поле металу, що контактує з валками та про тепло

деформації під час прокатки [4-6]. У роботі [4] розглянута математична модель температурного поля слябу, що є заготовкою для гарячої прокатки листа, у вигляді двомірної задачі для нестационарного рівняння теплопровідності з подальшим розв'язком її явним кінцево-різницевим методом із залученням рівнянь балансу енергії.

2 Мета роботи

Метою роботи є побудова математичної моделі температурного поля порожнистого валка прокатного стану, який обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю, під час прокатки стрічки або профілю.

3 Матеріали і результати дослідження

Розглянемо фізичну модель. Зовнішня поверхня, у залежності від кута φ повороту валка прокатного стану навколо своєї осі, сприймає тепло від стрічки, що деформується, а потім втрачає його за межами зони деформації за законами Ньютона та Стефана-Больцмана. Внутрішня його поверхня втрачає тепло конвективним або кондуктивним способом, у окремих випадках ще і випромінюванням. У зоні контакту валка зі стрічкою тепло від поверхні передається до його осі теплопровідністю. У іншій частині валка тепло втрачається випромінюванням, конвективним або кондуктивним способом. Теплову взаємодію валка зі стрічкою, що обробляється, дозволяє враховувати умова спряження (гранична умова четвертого роду), або можна вважати, що температура поверхні валка і стрічки у зоні деформації однакові [7-9].

Така теплофізична модель процесу теплообміну під час прокатки приводить до математичної моделі, в основу якої покладено однорідне рівняння теплопровідності, яке в циліндричній системі координат має вигляд [10]

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

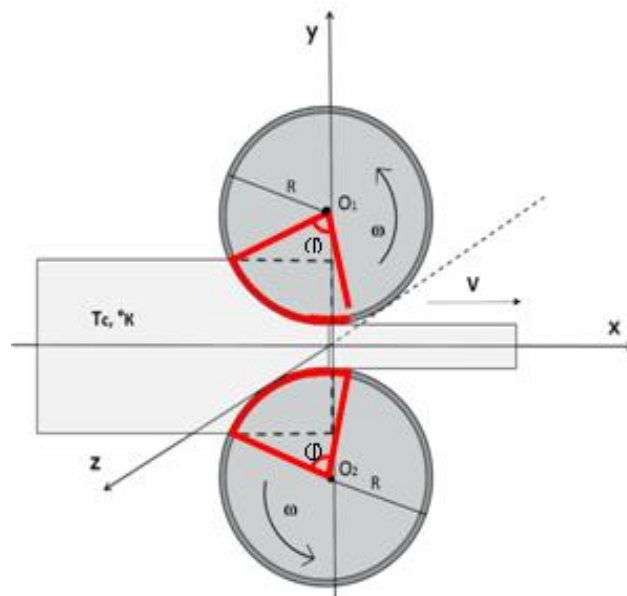


Рис.1. Схематичне зображення процесу прокатки

У випадку, коли $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, рівняння (1) описує квазістационарне температурне поле валкового калібру, коли після кожного оберту валка температура його поверхні не залежить від часу і залишається незмінною. Це ідеальний варіант, який можливий при жорсткому контролі умов

теплообміну під час прокатки. Така задача притаманна для процесу отримання стрічки у валковому кристалізаторі [11].

Нестационарне рівняння (1) описує температурне поле валків при неконтрольованому теплообміні під час прокатки. Воно суттєво залежить від часу, та кількості обертів навколо своєї осі.

Якщо вважати, що основи циліндричного валка теплоізолювані, а його температура не суттєво залежить від осьової координати, то можна покласти $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$, а задачу визначення температурного розподілу на поверхні і у тілі валка звести до задачі визначення температурного розподілу осьового перерізу порожнистого циліндра $T = T(r, \varphi, t)$, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Коли тепловий потік ортогональний осі обертання маємо початково-крайову задачу для рівняння (1) в області (Рис.2) $\Omega \times t = \{(r, \varphi) \mid R_1 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0\}$ [10-13].

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = 0,$$

$$T(r, \varphi, 0) = T_0, \quad T(r, \varphi + 2\pi, t) = T(r, \varphi, t)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1} = -h_2(T_{c_2} - T), \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \bar{F}(\varphi, t, T), \quad (2)$$

$$\bar{F}(\varphi, t, T) = \begin{cases} h_2 T_M, & \omega t < \varphi < \varphi_0 + \omega t \\ h_1(T_c - T) + \kappa(T_c^4 - T^4), & \omega t + \varphi_0 < \varphi < \omega t + 2\pi \end{cases}$$

де $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$; $h_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}$; λ – коефіцієнт теплопровідності; c – теплоємність; ρ – густина матеріалу; α_i – коефіцієнт теплообміну, $T_M = T_m + T_d$, T_m – температура металу, що потрапляє у зону деформації, T_d – середнє збільшення значення температури у зоні деформації (викликане деформацією металу), T_c – температура середовища зовні кільця, T_{c_2} – температура всередині кільця.

При великому числі обертів валків навколо своєї осі встановлюється квазістационарний розподіл температури який не залежить від часу. Задача (2) спрощується і ми маємо задачу для рівняння теплопровідності у кільці $\Omega = \{(r, \varphi) \mid R_1 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi\}$ [11] з неоднорідними граничними умовами та умовами теплообміну за межами кільця, що залежать від кутової координати φ .

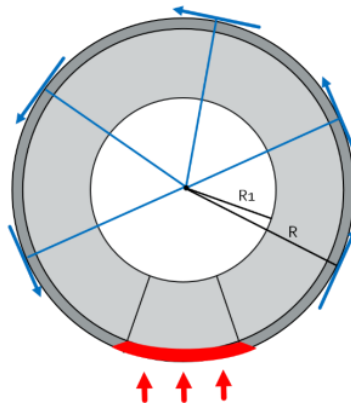


Рис.2. Радіальний переріз циліндричного валка

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \bar{F}_1(\varphi, T), \quad \bar{F}_1(\varphi, T) = \begin{cases} h_2 T_M & 0 < \varphi < \varphi_0, \\ h_1 (T_c - T) + \kappa (T_c^4 - T^4), & \varphi_0 < \varphi < 2\pi, \end{cases} \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1} = -h_2 (T_{c_2} - T), \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad (5)$$

$$T(r, \varphi + 2\pi) = T(r, \varphi). \quad (6)$$

Тут $\kappa = \frac{\varepsilon \sigma}{\lambda}$; ε – ступінь чорноти; σ – постійна Стефана-Больцмана. Якщо температурний розподіл кільця не залежить від радіуса, кільце термічно тонке, то можна перейти до розгляду усередненої за радіусом температури [9]. Розв’язок такої спрощеної задачі зведемо до розв’язку інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна [13]. Для цього помножимо рівняння (3) задачі (3)-(6) на $r dr$ та зінтегруємо його в межах $R_1 < r < R$, де r_c – середнє значення радіуса кільця, $S = \pi(R^2 - R_1^2)$ – площа кільця.

Після операції усереднення отримаємо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку, яка розпадається на дві крайові задачі в області $\Omega_\varphi = \{\Omega_{\varphi_1} + \Omega_{\varphi_2}\}$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} - \frac{2Rr_c^2 h_2}{S} u + \frac{2Rr_c^2}{S} \bar{F}(\varphi, u) + \frac{2Rr_c^2 h_1}{S} u = 0. \quad (7)$$

Перша задача в області $\Omega_{\varphi_1} = \{0 < \varphi < \varphi_0\}$ має вигляд

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} - \frac{2r_c^2}{S} (Rh_2 - R_1 h_1) u_1 + \frac{2Rr_c^2}{S} h_2 T_M = 0, \quad (8)$$

$$u_1(0) = T_m, \quad u_1(\varphi_0) = T_M.$$

Увівши позначення $g^2 = \frac{2r_c^2}{S} (Rh_2 - R_1 h_1)$, $g_1 = \frac{2Rr_c^2 h_2 T_M}{S}$, отримаємо розв’язок задачі (8) у вигляді

$$u_1(\varphi) = C_1 e^{g\varphi} + C_2 e^{-g\varphi} + \frac{2Rh_2 T_M}{Rh_2 - R_1 h_1}. \quad (9)$$

Друга задача в області $\Omega_{\varphi_2} = \{\varphi_0 < \varphi < 2\pi\}$ має вигляд

$$\frac{d^2 u_2}{d\varphi^2} + g^2 u_2 = -h_1 T_0 - \tau (T_c^4 - u_2^4), \quad (10)$$

$$-\frac{du_2(\varphi_0)}{d\varphi} = (h_2 - h_1) u_2 + h_1 T_0 + \kappa (T_c^4 - u_2^4); \quad u_2(2\pi) = T_m,$$

де $\tau = a \times \kappa$, $a = \frac{2Rr_c^2}{S}$.

Для побудови функції Гріна для задачі (10) запишемо рівняння (10) в операторному вигляді

$$Lu = \tau u_2^4 - \tau T_c^4, \quad L = \frac{d^2}{d\varphi^2} + g^2. \quad (11)$$

Для знаходження функції u_2 будемо функцію Гріна для спряженого оператора L^* до оператора L у кожній з підобластей області $\Omega_\varphi = \{\Omega_{\varphi_1} + \Omega_{\varphi_2}\}$

$$\begin{cases} L^* G_i(\varphi; \xi) = -\delta(\varphi - \xi), \\ G_1(0) = 0, G_1(\varphi_0) = 0, G_2(\varphi_0) = 0, G_2(2\pi) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

де $\delta(\varphi - \xi)$ – дельта-функція Дірака, $L^* = \frac{d^2}{d\varphi^2} - g^2$.

В області $\Omega_{\varphi_2} = \{\varphi_0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < 2\pi\}$ функція $G_2(\varphi; \xi)$ повинна задовольняти однорідним умовам

$$L^* G_2(\varphi; \xi) = 0, \quad \varphi < \xi, \quad \varphi > \xi. \quad (13)$$

У кожній із підобластей $\Omega_{\varphi_1}, \Omega_{\varphi_2}$ $\varphi < \xi, \varphi > \xi$ представимо φ як загальний розв'язок однорідного рівняння (13) з однорідними крайовими умовами

$$\frac{d^2 G_i}{d\varphi^2} - g^2 = 0, \quad G_1(0) = 0, \quad G_1(\varphi_0) = 0, \quad G_2(\varphi_0) = 0, \quad G_2(2\pi) = 0, \quad (14)$$

де $x_{1,2} = \pm g$ – корені характеристичного рівняння. Тоді функція Гріна, що задовольняє задачі (14), має вигляд

$$G_i(\varphi; \xi) = \begin{cases} C_{i1}(\xi)e^{x_1\varphi} + C_{i2}(\xi)e^{x_2\varphi}, & \varphi < \xi \\ C_{i3}(\xi)e^{x_1\varphi} + C_{i4}(\xi)e^{x_2\varphi}, & \varphi > \xi \end{cases} \quad 0 < \varphi < \varphi_0 < 2\pi. \quad (15)$$

Скориставшись властивостями функції Гріна та однорідними граничними умовами, визначимо коефіцієнти $C_{i1} \div C_{i4}$ у кожній із підобластей області $\Omega_\varphi = \{\Omega_{\varphi_1} + \Omega_{\varphi_2}\}$, $\Omega_{\varphi_1} = \{0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < \varphi_0\}$, $\Omega_{\varphi_2} = \{\varphi_0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < 2\pi\}$ [14].

$$\begin{cases} C_{11}(\xi) + C_{12}(\xi) = 0, \\ C_{13}(\xi)e^{\varphi_0 x_1} + C_{14}(\xi)e^{\varphi_0 x_2} = 0, \\ C_{11}(\xi)e^{x_1 \xi} + C_{12}(\xi)e^{x_2 \xi} = C_{13}(\xi)e^{x_1 \xi} + C_{14}(\xi)e^{x_2 \xi} \\ -C_{11}(\xi)x_1 e^{x_1 \xi} - C_{12}(\xi)x_2 e^{x_2 \xi} + C_{13}(\xi)x_1 e^{x_1 \xi} + C_{14}(\xi)x_2 e^{x_2 \xi} = -1 \end{cases} \quad (16)$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 2g(e^{x_1\varphi_0} - e^{x_2\varphi_0}), \quad g_{11}(\xi) = e^{x_2\varphi_0 + x_1\xi} + e^{x_1\varphi_0 + x_2\xi}, \\ g_{12}(\xi) &= e^{x_2\varphi_0 + x_1\xi} - e^{x_1\varphi_0 + x_2\xi}, \quad g_{13}(\xi) = (e^{x_2\xi} - e^{x_1\xi}), \\ \Delta_2 &= x_1(e^{x_2\varphi_0 + 2\pi x_1} - e^{x_1\varphi_0 + 2\pi x_2}) + x_2(e^{x_1\varphi_0 + 2\pi x_2} - e^{x_2\varphi_0 + 2\pi x_1}), \\ g_{21}(\xi) &= e^{x_2\xi + 2\pi x_1} - e^{x_1\xi + 2\pi x_2}, \quad g_{22}(\xi) = e^{x_1\varphi_0 + x_2\xi} - e^{x_2\varphi_0 + x_1\xi}.\end{aligned}\quad (17)$$

Враховавши, що $x_1 + x_2 = 0$, а $x_1 - x_2 = 2g$ та підставивши значення коефіцієнтів $C_{i1}(\xi) \div C_{i4}(\xi)$ в (15), будемо мати функцію Гріна в області, $\Omega_\varphi = \{\Omega_{\varphi_1} + \Omega_{\varphi_2}\}$, де $\Omega_{\varphi_1} = \{0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < \varphi_0\}$, $\Omega_{\varphi_2} = \{\varphi_0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < 2\pi\}$

$$G_1(\varphi; \xi) = \frac{1}{\Delta_1} \begin{cases} -g_{11}(\xi)e^{x_1\varphi} + g_{12}(\xi)e^{x_2\varphi}, & \varphi < \xi \\ g_{13}(\xi)(e^{x_2\varphi_0}e^{x_1\varphi} - e^{x_1\varphi_0}e^{x_2\varphi}), & \varphi > \xi \end{cases} \quad 0 < \varphi < \varphi_0 \quad (18)$$

$$G_2(\varphi; \xi) = \frac{1}{\Delta_2} \begin{cases} g_{21}(\xi)(e^{x_1\varphi} - e^{x_2\varphi}), & \varphi < \xi \\ g_{22}(\xi)(e^{x_1\varphi} - e^{x_2\varphi}), & \varphi > \xi \end{cases} \quad \varphi_0 < \varphi < 2\pi \quad (19)$$

Рівняння Гаммерштейна у кожній підобласті має вигляд

$$\begin{aligned}u_{21}(\xi) &= u_{21}(0)G'_{1\varphi}(0, \xi) - u_{21}(\varphi_0)G'_{1\varphi}(\varphi_0, \xi) + \\ &+ \omega_1 \int_0^{\varphi_0} G_\varphi(\varphi, \xi) d\varphi - \tau \int_0^{\varphi_0} G_\varphi(\varphi, \xi) u_{21}^4 d\varphi, \quad \Omega_{\varphi_1} = \{0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < \varphi_0\} \\ u_{22}(\xi) &= u_{22}(\varphi_0)G'_{2\varphi}(\varphi_0, \xi) - u_{22}(2\pi)G'_{2\varphi}(2\pi, \xi) + \\ &+ \omega_2 \int_{\varphi_0}^{2\pi} G_2(\varphi, \xi) d\varphi - \tau \int_{\varphi_0}^{2\pi} G_2(\varphi, \xi) u_{22}^4 d\varphi, \quad \Omega_{\varphi_2} = \{\varphi_0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < 2\pi\}\end{aligned}\quad (20)$$

Після перетворень та обчислення інтегралів $\int_0^{\varphi_0} G_1(\varphi, \xi) d\varphi$ та $\int_{\varphi_0}^{2\pi} G_2(\varphi, \xi) d\varphi$ запишемо рівняння Гаммерштейна у вигляді

$$\begin{aligned}u(\xi) &= u_L(\xi) - \tau \int_0^{2\pi} G_i(\varphi; \xi) u^4 d\varphi, \\ u_L(\xi) &= u_{21}(0)G'_{\varphi}(0, \xi) - u_{21}(\varphi_0)G'_{\varphi}(\varphi_0, \xi) + \omega_1 \int_0^{\varphi_0} G_1(\varphi, \xi) d\varphi + \\ &+ u_{22}(\varphi_0)G'_{\varphi}(0, \xi) - u_{22}(2\pi)G'_{\varphi}(2\pi, \xi) + \omega_2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_0} G_2(\varphi, \xi) d\varphi.\end{aligned}\quad (21)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (21) знайдено із застосуванням модифікованого методу Ньютона у вигляді [15]

$$u(\xi) = u_L - \tau \bar{u}^4 \left(\int_0^{\varphi_0} G_1(\varphi, \xi) d\varphi + \int_{\varphi_0}^{2\pi} G_2(\varphi, \xi) d\varphi \right), \quad (22)$$

де \bar{u} – середнє значення температури валка та корінь рівняння $\bar{u} = A - B\bar{u}^4$,

$$A = \frac{1}{2\pi - \varphi_0} \int_0^{2\pi} u_L(\xi) d\xi, \quad B = \frac{\tau}{2\pi - \varphi_0} \left(\int_0^{\varphi_0} d\xi \int_0^{\varphi_0} G(\varphi; \xi) d\varphi + \int_{\varphi_0}^{2\pi} d\xi \int_{\varphi_0}^{2\pi} G(\varphi; \xi) d\varphi \right).$$

За розв'язками задач проведені чисельні експерименти. На рис.3 зображений температурний розподіл радіального перерізу сталевого циліндричного валка, що сприймає тепло в залежності від зміни кута повороту в інтервалі $0 < \varphi < \varphi_0$, та втрачає його за законами Ньютона та Стефана-Больцмана в інтервалі $\varphi_0 < \varphi < 2\pi$. Для чисельного експерименту були взяті теплофізичні характеристики заліза [16] $\lambda = 60 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ – коефіцієнт теплопровідності, $\rho_0 = 7780 \text{ кг}/\text{м}^3$ – густина заліза, $c = 460 \text{ Дж}/\text{К}$ – теплоємність заліза, $T_0 = 300 \text{ К}$ – початкова температура, $T_c = 300 \text{ К}$ – температура середовища, $T_{M1} = 900 \text{ К}$, $T_{m1} = 615 \text{ К}$, – температура металу, що обробляється, та температура металу на виході із зони деформації, $h_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}$, $\alpha_1 = 100 \text{ Вт}/\text{м}^2\cdot\text{К}$, $\alpha_2 = 150 \text{ Вт}/\text{м}^2\cdot\text{К}$, $\varepsilon = 0.7$, $\sigma = 6.67 \times 10^{-8}$ – постійна Стефана-Больцмана, $R = 0.2 \text{ м}$ і $R_1 = 0.1 \text{ м}$ – зовнішній та внутрішній радіуси кільця. Графіки температурних розподілів поверхні та перерізу порожнистого циліндра побудовано за розв'язками задач (8),(9),(22) в середовищі Matcad та Matlab з допомогою GUI-додатка PDEToolbox.

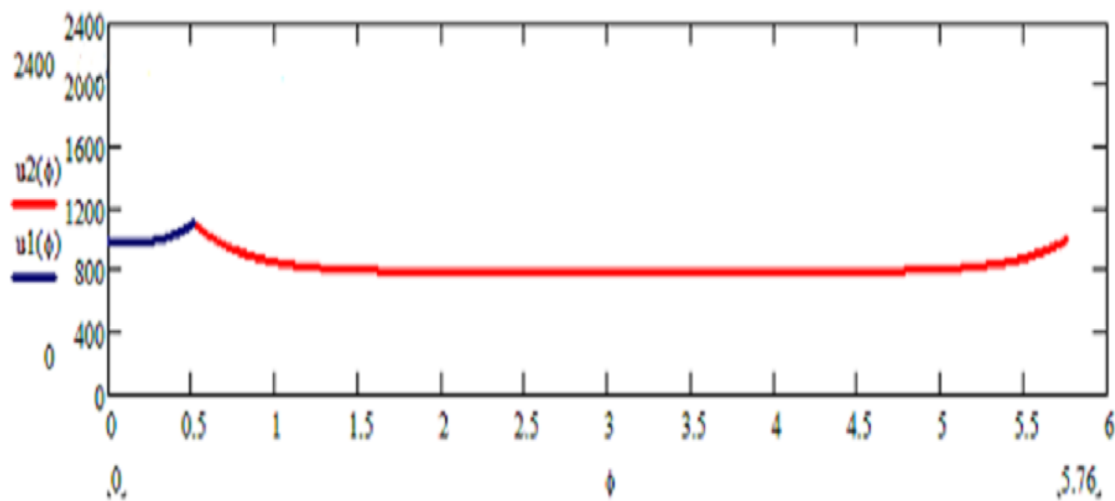


Рис.3. Квazистаціонарний температурний розподіл валка прокатного стану при умовах $T_{M2} = 1100 \text{ К}$, $T_{m2} = 995 \text{ К}$.

На рис. 4 зображений температурний розподіл перерізу сталевого циліндричного валка, який сприймає тепло в межах зміни кута повороту $0 < \varphi < \varphi_0$, а у межах $\varphi_0 < \varphi < 2\pi$ втрачає тепло за законами Ньютона та Стефана-Больцмана через 10с після початку процесу прокатки

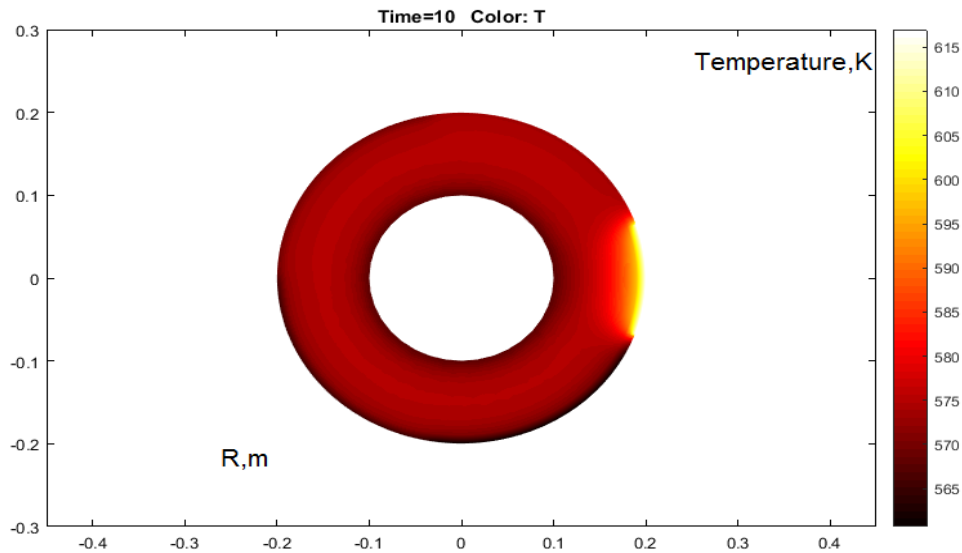


Рис.4. Температурний розподіл за розв'язком задачі (22) при $t=10$ с

4 Висновки

Побудовано фізичну модель теплового процесу у валковому калібрі під час прокатки стрічки на двохвалковому прокатному стані. Розглянуто математичну модель температурного поля рухомого порожнистого валка прокатного стану циліндричної форми, що обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю. У математичній моделі враховано різні умови теплообміну внутрішньої та зовнішньої поверхні валка зі стрічкою та оточуючим його середовищем. Температурне поле порожнистого валка прокатного стану розглянуто у вигляді початково крайової задачі для однорідного рівняння теплопровідності з неоднорідними, нелінійними граничними умовами, що залежать від кута обертання валка навколо своєї осі. Розглянуто спрощену математичну модель у вигляді задачі визначення квазістаціонарного температурного поля, розв'язок якої зведено до розв'язку еквівалентного їй інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна. За допомогою системи комп'ютерної математики Mathcad побудовано температурний розподіл поверхні валка. Розроблено алгоритм розв'язку неоднорідної задачі та за допомогою GUI-додатка PDEToolbox Matlab побудовано температурний розподіл валка.

ЛІТЕРАТУРА

1. De Paepe, Simon P., Moerkerke I., Hermann J. C. Control of the temperature of the bar on entry to the finisher. *ECSC Steel RTD Programme*. 2000. P. 1–9.
2. Trishevskii O. I., Saltavets N. V. Mathematical model of the thermal state of strip in rolling. *Steel in translation*. 2009. Vol 39. №2. P. 42–44.
3. Тришевський О. І., Салтавець Н. В. Розробка математическої моделі теплового станія валков при прокатке. *Сталь*. 2011. №12. С.22–23.
4. Тришевський О. І., Салтавець М. В. Поділ слябів сіткою при рішенні двомірної задачі нестационарної теплопровідності явним кінцево-від'ємним методом. *Вісник НТУ «ХП»*. 2015. № 48 (1167). С. 45–49.
5. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981. 216 с.
6. Тришевський О. І., Салтавець Н. В. Математическая модель теплового станія системи валок-полоса и её использование при реконструкции станов горячей прокатки. *Сборник научных трудов «Обработка металлов давлением»*. 2010. №2(23). С.53–59.
7. Березовский А. А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. Киев: Наукова думка, 1974. 452 с.
8. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Москва: Высшая школа, 1967. 599 с.

9. Березовская Л. М., Демьянченко О. П. Периодическая задача теплопроводности для цилиндра с термическим покрытием. *Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения*. 1998. С. 17 – 20.
10. Ляшенко В. П., Демьянченко О. П. К расчету температурного поля теплоизлучающего полого цилиндра. *Вестник ХГТУ*. 2002. т.2. № 15. С. 154–159.
11. Ляшенко В.П., Кобильська О.Б., Дем'янченко О.П. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатошарових областях. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2017. Вип. 6/2017 (106). С. 37–43.
12. Дем'янченко О. П. Математична модель теплообміну у двошарових валкових калібрах прокатних станів. Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях: праці Міжнародної науково-технічної конференції (22-25 травня, Харків, 2018р.). Харків, 2018. С.94–95.
13. Ляшенко В. П., Дем'янченко О. П. Математична модель температурного поля валків під час прокатки стрічки . *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2018. Вып. 3(66). С. 182–188.
14. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Бриль Т. С., Дем'янченко О. П. Нелінійні інтегральні рівняння у математичних моделях теплообміну рухомого осесиметричного середовища. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2017. Вип. 3(62), т 2. С. 133–137.
15. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1978. 292 с.
16. Кикоин И. К. Таблицы физических величин. Москва: Атомиздат, 1976. 1009 с.

REFERENCES

1. De Paere, P. Simon, I. Moerkerke, J. C. Hermann, “Controlling the temperature of the bar at the inlet to the finisher”. *ECSC Steel RTD Programme*. pp.1–9, 2000.
2. O. I. Trishevskii, N. V. Saltavets, “Mathematical model of the thermal state of strip in rolling”. *Steel in translation*, Vol. 39, №2, pp. 42–44, 2009.
3. O. I. Trishevsky, N. V. Saltavets, “Development of a mathematical model of the thermal state of the rolls during rolling”. *Steel*, №12, pp. 22–23, 2011. [in Russian]
4. O. I. Trishevsky, M. V. Saltavets, “The division of slab slabs in solving a two-dimensional problem of non-stationary thermal conductivity by an explicit finite-difference method”. *Bulletin of the National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”*, № 48 (1167), pp.45–49, 2015. [in Russian]
5. P. I. Lizorkin, *Course of differential and integral equations with additional chapters of analysis*. М.: Science, 1981, 216 p. [in Russian]
6. O. I. Trishevsky, N. V. Saltavets, “Mathematical model of the thermal state of the roll-strip system and its use in the reconstruction of hot rolling mills”. *Collection of scientific works "Processing of metals by pressure"*, №2 (23), pp.53–59, 2010. [in Russian]
7. A. A. Berezovsky, *Lectures on nonlinear boundary value problems of mathematical physics*. Kiev: Scientific Thought, 1974, 452 p. [in Russian]
8. A. V. Lykov, *The theory of thermal conductivity*. Moscow: Higher School, 1967, 599 p. [in Russian]
9. L. M. Berezovskaya, O. P. Demyanchenko, “Periodic problem of thermal conductivity for a cylinder with thermal coating “. *Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications*,. pp.17 – 20, 1998. [in Russian]
10. V. P. Lyashenko, O. P. Demyanchenko, “Calculation of the temperature field of a heat-radiating hollow cylinder”. *Bulletin of the Kherson National Technical University*, Vol. 2, No. 15, pp.154–159, 2002. [in Russian]
11. V. Lyashenko, E. Kobil'skaya, O. Demyanchenko, “Mathematical Model with complex heat transfer conduction in the spherical area”. *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyyi National University*, Vol. 6/2017 (106), pp. 37–43, 2017. [in Ukrainian]
12. O. P. Demyanchenko, “Mathematical model of heat transfer in two-layer roll calibers of rolling mills”. Computer simulation in high-tech technologies. Proceedings of the International Scientific and Technical Conference. pp. 94–95, 2018. [in Ukrainian]

13. V. P. Lyashenko, O. P. Dem'yanchenko, "Mathematical model of the temperature field of rolls during the rolling of the strip". *Bulletin of the Kherson National Technical University*, Issue 3 (66).pp. 182–188, 2018. [in Ukrainian]
14. V. P. Lyashenko, O. B. Kobyl'skaya, T. S. Bryl, O. P. Demyanchenko, "Nonlinear integral equations in mathematical models of heat transfer of a moving axisymmetric medium". *Bulletin of the Kherson National Technical University*, Issue 3 (62), Vol. 2, pp. 133–137, 2017. [in Ukrainian]
15. A. F. Verlan, V. S. Sizikov, *Methods for solving integral equations with software for computers*. Kiev: Naukova Dumka, 1978, 292 p. [in Russian]
16. I. K. Kikoin, *Tables of physical quantities*. Moscow: Atomizdat, 1976, 1009 p. [in Russian]

Дем'янченко Ольга Пантеліївна – старший викладач кафедри природничонаукових та гуманітарних дисциплін, Азовський морський інститут Національного університету "Одеська морська академія", вул. Чорноморська, 19, м. Маріуполь Україна, 87517; e-mail: olgademyanchenko@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4693-0364.

Дем'янченко Ольга Пантеліївна – старший преподаватель кафедры естественнонаучных и гуманитарных дисциплин, Азовский морской институт Национального университета "Одесская морская академия", ул. Черноморская, 19, г. Мариуполь Украина, 87517; e-mail: olgademyanchenko@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4693-0364.

Demyanchenko Olga Panteleivna – Senior Lecturer, Department of "Natural Science and Humanitarian Disciplines", Mariupol, Azov maritime institute of National university "Odessa maritime academy" 19, Chornomors'ka str. Ukraine, 87517, Mariupol e-mail: olgademyanchenko@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4693-0364.

Ляшенко Віктор Павлович – доктор технічних наук, професор; завідувач кафедри інформатики і вищої математики, Кременчуцький національний університет ім. Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 61046, Україна; e-mail: viklyash2903@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4538-631X.

Ляшенко Віктор Павлович – доктор технических наук, профессор заведующий кафедрой информатики и высшей математики, Кременчугский национальный университет им. Михаила Остроградского, ул. Первомайская, 20, г. Кременчук, 61046, Украина; e-mail: viklyash2903@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4538-631X.

Lyashenko Viktor Pavlovich – Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Department of Mathematics and Computer Science, Kremenchuk National University named after Mikhail Ostrogradsky, 39600, 20, Pershotravneva Street, Kremenchuk, Ukraine; e-mail: viklyash2903@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4538-631X.

Кобильська Олена Борисівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент; доцент кафедри інформатики і вищої математики, Кременчуцький національний університет ім. Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 61046, Україна; e-mail: kobilska1983@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4210-1534.

Кобыльская Елена Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры информатики и высшей математики, Кременчугский национальный университет им. Михаила Остроградского, ул. Первомайская, 20 39600, г. Кременчуг, Украина; e-mail: kobilska1983@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4210-1534.

Kobilska1983 Elena Borisovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Kremenchuk National University named after Mikhail Ostrogradsky, 39600, 20, Pershotravneva Street, Kremenchuk, Ukraine; e-mail: kobilska1983@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4210-1534.

УДК 539.3

Forced liquid vibrations in prismatic tanks under vertical and horizontal loads

D.V. Kriutchenko

*Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАНУ, Украина
wollydenis@gmail.com*

The method of studying forced vibrations of a liquid in rigid prismatic tanks partially filled with a liquid is offered. It is supposed that the liquid is an ideal and incompressible one, and its motion, caused by the action of external influences, is irrotational. For those assumptions there is velocity potential that satisfies the Laplace equation. The boundary value problem for this potential is formulated. On the wetted surfaces of the tank the non-penetration conditions have been chosen. On the free surface of the liquid, the kinematic and static conditions have been specified. The static condition is the equality of pressure on the free surface to atmospheric one. The liquid pressure is determined from the Cauchy-Lagrange integral. To formulate the kinematic condition an additional unspecified function describing the motion of the free surface is introduced. The kinematic condition is the equality of the velocity of the liquid described by the velocity potential, and the velocity of the free surface itself. The modes of free vibrations are used as a system of basic functions to solve the problems of forced fluid vibrations in reservoirs. Unspecified functions are presented as series of the basic functions. The coefficients of these series are generalized coordinates. Periodic excitation forces acting in the vertical and horizontal directions have been considered. The vertical excitation examination leads to appearance of additional acceleration. Therefore we obtain a system of unbounded differential equations of the Mathieu type. This allows us to investigate the phenomena of parametric resonance. The effect of parametrical resonance is considered when the vertical excitation frequency is equal to double own frequency of liquid vibrations. Dependences of change in the level of free surface via time under both separate and mutual action of horizontal and vertical forces have been obtained. The phase portraits of a dynamic system with indication of resonances are presented. The method allows us to carry out the adjustment of undesired excitation frequencies at the reservoir design stage in order to prevent the loss of stability.

Key words: *prismatic reservoirs, ideal incompressible fluid, vertical and horizontal excitations, Mathieu's equation, phase portraits*

Запропоновано метод дослідження вимушених коливань рідини в жорстких призматичних резервуарах, частково заповнених рідиною. Вважається, що рідина є ідеальною і нестисливою, а її рух, викликаний дією зовнішніх впливів, є безвихровим. У цих припущеннях існує потенціал швидкості, який задовольняє рівнянню Лапласа. Сформульована крайова задача для цього потенціалу. На змочених поверхнях резервуара мають виконуватись умови непротікання. На вільній поверхні рідини задаються кінематичні та статичні умови. Статична умова полягає в рівності тиску на вільній поверхні до атмосферного. Тиск рідини визначається інтегралом Коші-Лагранжа. Для формулювання кінематичної умови вводиться додаткова невідома функція, яка описує рух вільної поверхні. Кінематична умова - це рівність швидкості рідини, яка описується потенціалом швидкості, і швидкістю самої вільної поверхні. Ці форми вільних коливань використовуються як система цих функцій при вирішенні проблем вимушених коливань рідини у водоймах. Невідомі функції представлені у вигляді ряду основних функцій. Коефіцієнти цих рядів є узагальненими координатами. Розглянуто періодичні сили збудження, що діють у вертикальному та горизонтальному напрямках. Якщо вивчається вертикальне збудження, це призводить до появи додаткового прискорення. Тут ми отримуємо систему диференціальних рівнянь типу Матьє. Це дозволяє дослідити явища параметричного резонансу. Вплив параметричного резонансу вважається тоді, коли частота вертикального збудження дорівнює подвійній власній частоті коливань рідини. Отримані залежності зміни рівня вільної поверхні від часу внаслідок взаємної дії горизонтальних та вертикальних сил. Подані фазові портрети динамічної системи із зазначенням резонансів. Метод дозволяє здійснити регулювання небажаних частот збудження на етапі проектування при виробництві резервуара з метою запобігання втрати стійкості.

Ключові слова: *призматичні резервуари, ідеальна нестислива рідина, вертикальні та горизонтальні збудження, рівняння Матьє, фазові портрети*

Предложен метод исследования вынужденных колебаний жидкости в жестких призматических резервуарах, частично заполненных жидкостью. Предполагается, что жидкость является идеальной и несжимаемой, а ее движение, вызванное действием внешних воздействий, является безвихревым. В этих предположениях существует потенциал скорости, который удовлетворяет уравнению Лапласа. Сформулированная крайовая задача для этого потенциала. На смоченных поверхностях резервуара существуют условия непротекания. На свободной поверхности жидкости задаются кинематические и статические условия. Статические условия состоят в равенстве давления на свободной поверхности к атмосферному. Давление жидкости определяется интегралом Коши-Лагранжа. Для формулировки кинематического условия вводится дополнительная неизвестная функция, которая описывает движение свободной поверхности. Кинематическое условие - это равенство скорости жидкости, которая описывается потенциалом скорости, и скорости самой свободной поверхности. Формы свободных колебаний используются как система базисных функций при решении проблем вынужденных колебаний жидкости в резервуарах. Незвестные функции представлены в виде рядов по базисных функций. Коэффициенты этих рядов являются обобщенными координатами. Рассмотрены периодические силы возбуждения, действующие в вертикальном и горизонтальном направлениях. Если изучается вертикальное возбуждение, это приводит к появлению дополнительного ускорения. Здесь мы получаем систему дифференциальных уравнений типа Матье. Это позволяет исследовать явления параметрического резонанса. Влияние параметрического резонанса возникает тогда, когда частота вертикального возбуждения равна двойной

собственной частоте колебаний жидкости. Полученные зависимости изменения уровня свободной поверхности от времени при взаимном действии горизонтальных и вертикальных сил. Представлены фазовые портреты динамической системы с указанием резонансов. Метод позволяет осуществить отстройку от нежелательных частот возбуждения на этапе проектирования при изготовлении резервуаров с целью предотвращения потери устойчивости.

Ключевые слова: призматические резервуары, идеальная несжимаемая жидкость, вертикальные и горизонтальные нагрузки, уравнения Матье, фазовые портреты

1. Formulation of the problem and its relevance

Containers and reservoirs for the storage and transportation of different liquids are widely used in aerospace, chemical, oil and gas industry, power engineering, sea transport. These reservoirs and fuel tanks are usually filled with oil or other dangerously explosive, flammable or toxic substances. Fluid motion in liquid storage tanks due to intensive external loadings can be very complicated and violent. Therefore, studying the dynamic behavior of fluid in tanks is an urgent task. During past decades the significant progress in experimental technique and numerical methods based on using the computational fluid dynamics approach has been achieved. But these techniques are very expensive and time-consuming. Therefore the linear wave models based on the potential flow assumptions are suitable as the first approximation at designing the liquid storage reservoirs. The most important problems are associated with fluid motion in reservoirs caused by external loadings, especially applied suddenly.

The methods for solving fluid oscillation problems in rigid prismatic tanks under simultaneous action of horizontal and vertical excitations are proposed in this paper.

2. Analysis of recent research and publications

Sloshing is a phenomenon associated with the intense movement of fluid in partially filled tanks [1]. This phenomenon can lead to negative effects caused by suddenly applied loads (earthquakes, aircraft crashes, etc.). Most studies are devoted to the analysis of free liquid vibrations [2-4] or excitation forces acting only in the horizontal direction [5-7]. Liquid vibrations in fluid-filled prismatic tanks under action of horizontal loading have been studied in [8]. The liquid motion under action of harmonic force has been considered. Kim has carried out the numerical simulation of sloshing to predict impact loads and provided comparison of various numerical techniques in [9]. The effects of sloshing have been considered for viscid liquids in [10]. The authors of [11] have used the coupled finite and boundary elements method for sloshing in 3D tanks of different configurations. Parametric instability of liquid free surface in different fluid-filled reservoirs caused by vertical excitations has been the subject of extensive research in many scientific areas since Faraday's first works [12].

3. The aim of the study

The aim of the study is to create the methodology for estimating the amplitude of the liquid free surface vibrations in prismatic tanks under action of various external influences.

4. Outline of the main research material

This paper deals with the problems of free and forced oscillations of liquids in rigid prismatic tanks. It is assumed that the external load can act either horizontally or vertically. The scheme of the tank is shown in Fig. 1.

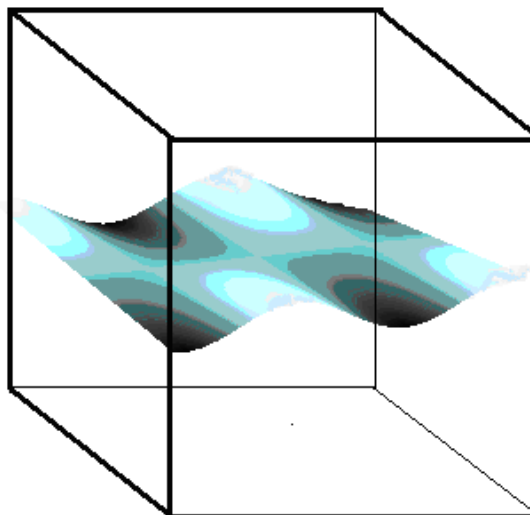


Figure 1. Sketch of fluid-filled prismatic tank

We suppose that the fluid is inviscid, incompressible, and its motion is irrotational. Under these conditions, there exists a potential of velocities $\varphi(x, y, z, t)$, such that

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

This potential satisfies the Laplace equation. The mixed boundary value problem for this equation is formulated. At the same time, non-penetration conditions are set on the lateral surfaces and the bottoms of the reservoir, and kinematic and dynamic conditions are set on the free surface. The kinematic condition is that the point on the free surface of the fluid in the reservoir at the initial time of motion remains on that surface throughout the whole movement. The dynamic condition characterizes the equilibrium of the atmospheric pressure and the fluid pressure on the free surface. The unknowns are the velocity potential φ and function ζ that describes the level the free surface elevation. The relationship between these two functions is given by the dynamic boundary condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta = 0.$$

where g is the gravity acceleration. Let the equation of the free surface at the initial instant of time have the form $\zeta = 0$. Designate a moistened shell surface by S_1 , and a free surface by S_0 .

The boundary wall and bottom conditions are

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0.$$

Supposing that the Cartesian coordinate system $Oxyz$ is connected with reservoirs under consideration, the liquid free surface S_0 coincides with the plane $z = 0$ at the state of rest. Let us assume that the liquid-filled shell is under vertical and horizontal driven forces with accelerations \mathbf{a}_x and \mathbf{a}_z

$$\mathbf{a}_x = a_x(t) \mathbf{i}, \quad \mathbf{a}_z = a_z(t) \mathbf{k}, \quad (4.1)$$

where factors $a_x(t)$, $a_z(t)$ depend on time t only. \mathbf{i} and \mathbf{k} are the unit vectors along Ox and Oz .

Firstly we obtain a relation between the velocity potential, the liquid pressure, and accelerations due to driving forces and gravity. We have

$$\mathbf{a}_x = \nabla[x \cdot a_x(t)], \quad \mathbf{a}_z = \nabla[z \cdot a_z(t)], \quad \mathbf{g} = -\nabla(\rho g z), \quad (4.2)$$

where x , z are coordinates of a point in the liquid.

Motion equations for the ideal incompressible liquid can be presented in the vector form as follows [18]:

$$\mathbf{w} + \nabla(x a_x(t)) + \nabla(z a_z(t)) + \nabla(g z) = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad (4.3)$$

where \mathbf{w} is the acceleration of the fluid flow, ρ is the liquid density, and p is the fluid pressure.

Therefore the acceleration of liquid particles under gravitational forces, horizontal, and vertical excitations always has the potential (an analog of the Prandtl's potential). Using equation (4.3) and assuming that the flow is irrotational, Bernoulli equation can be derived in the following form:

$$p - p_0 = -\rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))z + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right], \quad (4.4)$$

where p_0 is the atmospheric pressure. If small oscillations of the liquid are considered then $|\nabla \Phi|^2 \ll 1$, and we have the next expression:

$$p - p_0 = -\rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))z \right]. \quad (4.5)$$

Thus, for the velocity potential, we have the following boundary value problem:

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_w} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{S_0} = 0, \quad (4.6)$$

where $p - p_0$ is defined by formula (4.5), where $z = \zeta(x, y, t)$.

To satisfy the solvability conditions for the boundary value problem (4.6), it is also necessary to add the Neumann condition

$$\int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS = 0. \tag{4.7}$$

To solve the problem of forced oscillations we construct a system of basis functions, which are the solutions of the spectral boundary value problem

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_w} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{S_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta \right|_{S_0} = 0 \tag{4.8}$$

under additional condition (4.7).

We present the expressions for the first 8 eigenmodes of fluid oscillations obtained in [13]. This is a system of basis functions obtained as a solution to problem (4.6) - (4.7) for studying forced oscillations.

$$\begin{aligned} \Psi_{01}(x) &= C_1 \cos(0 \cdot x) \sin \frac{\pi}{2b} y & \Psi_{10}(x) &= C_2 \sin \frac{\pi}{2a} x \cos(0 \cdot y) & \Psi_{11}(x) &= C_3 \sin \frac{\pi}{2a} x \sin \frac{\pi}{2b} y \\ \Psi_{20}(x) &= C_5 s \cos \frac{\pi}{a} x \cos(0 y) \\ \Psi_{02}(x) &= C_5 s \cos 0 x \cos \left(\frac{\pi}{b} y\right) & \Psi_{21}(x) &= C_6 \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{2b} y \\ \Psi_{12}(x) &= C_7 \sin \frac{\pi}{2a} x \cos \frac{\pi}{b} y & \Psi_{22}(x) &= C_8 \cos \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \end{aligned} \tag{4.9}$$

In the Tab. 1 the natural frequencies of fluid oscillations in a prismatic reservoir are shown.

Fig. 1 shows the numerical values of the frequencies ω_{ij} and the frequency parameter λ_{ij} for a cube-shaped prismatic reservoir with geometric characteristics $a=b=H=1\text{m}$

Table 1. Natural frequencies of fluid oscillations in a prismatic reservoir

n	i	j	λ_{ij}	ω_{ij}
1	0	1	1.772453851	4.051164194
2	1	0	1.772453851	4.051164194
3	1	1	2.506628275	5.710012556
4	0	2	3.544907703	5.892165855
5	2	0	3.544907703	5.892165855
6	2	1	3.963327298	6.233151691
7	1	2	3.963327298	6.233151691
8	2	2	5.013256550	7.012538645

To find the function ζ we use the following expression for the velocity potential

$$\Phi = \sum_{n=1}^M \dot{c}_n(t) \Phi_n,$$

where the addition $n = n(i, j)$ is shown in Tab. 1, function Φ_n is determined by [13]

$$\Phi_n = \frac{1}{ab} \frac{\cosh(\lambda_{ij} z)}{\cosh(\lambda_{ij} H)} \Psi_{ij}(x, y); \quad n = n(i, j), \quad \lambda_{ij} = \sqrt{\left(\frac{\pi i}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi j}{2b}\right)^2}$$

where Ψ_{ij} are found using relation (4.9).

Then, provided that $z = H$, we obtain

$$\zeta = \sum_{n=1}^M c_k(t) \frac{\partial \Phi_k}{\partial \mathbf{n}}.$$

Orthogonality check gives the following relation:

$$\int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \Phi_k(x, y) \Phi_l(x, y) dx dy = ab \delta_{kl}.$$

5. Forced fluid oscillations in a rigid tank

Let us suppose that at the initial time, the liquid in the tank is at the state of rest. A combined periodic load is applied to the tank in horizontal and vertical directions.

We compose a system of differential equations of fluid motion based on the boundary condition on the free surface

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta = 0.$$

where

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \Phi_k(x, y, H), \quad (5.1)$$

$$\zeta = \sum_{k=1}^N c_k(t) \frac{\partial \Phi_k}{\partial z}(x, y, H).$$

Let us consider equation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta(x, y, t) = 0 \quad (5.2)$$

Substituting equations (5.1) to equation (5.2) we obtain

$$\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \Phi_k(x, y, H) + a_x(t)x + (g + a_z(t)) \sum_{k=1}^N c_k(t) \frac{\partial \Phi_k}{\partial z}(x, y, H) = 0 \quad (5.3)$$

where

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial z} = \frac{\sinh(\lambda_{ij}z) \lambda_{ij}}{\cosh(\lambda_{ij}H)} \psi_{ij}(x, y).$$

It should be noted that for $z=H$

$$\Phi_n(x, y, H) = \frac{1}{ab} \psi_{ij}(x, y), \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} = \frac{1}{g} \omega_n^2 \Phi_n.$$

After a dot product of equation (5.3) by $\Phi_l(x, y, H)$ we obtain the following system of differential equations of the second order:

$$ab \ddot{c}_l(t) + a_x(t)(x, \Phi_l) + \omega_l^2 (g + a_z(t)) abc_l(t) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (5.4)$$

It should be noted that $(x, \Phi_l) = 0$, for every modes except $i=2$. Therefore considering the following initial data:

$$c_i(0) = 0; \quad \dot{c}_i(0) = 0; \quad i = 1, 3, \dots \quad c_2(0) = 0; \quad \dot{c}_2(0) = 0.05. \quad (5.5)$$

we obtain:

$$ab \ddot{c}_2(t) + a_1 \cos \Omega_1 t (x, \Phi_2) + \omega_2^2 (g + a_2 \cos \Omega_2 t) c_2(t) = 0. \quad (5.6)$$

6. Numerical results

Let us consider liquid vibration in prismatic tank with following parameters: $a=b=1\text{m}$. $\omega_2 = 4.05\text{Hz}$ at different $a_1, a_2, \Omega_1, \Omega_2$. The results are shown in Fig. 2-6. In Fig. 2 the phase portraits for separate and mutual actions of horizontal and vertical excitations are demonstrated:

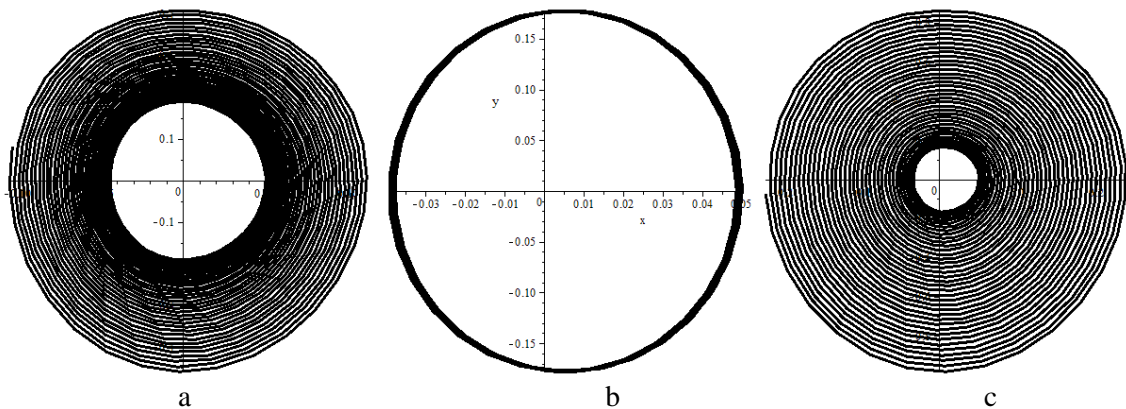


Figure 2. Phase portraits for $\Omega_2 = 4.05 \text{ Hz}$, $a_2 = 1.81$ during 60 sec.

Fig. 2(a) corresponds to $a_1 = 0$, $a_2 = 1.81$ for vertical excitation only. Fig. 2(b) corresponds to $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0$, $\Omega_1 = 0.01 \text{ Hz}$ for horizontal excitation only. Fig. 2(c) corresponds to mutual action of horizontal and vertical excitations with abovementioned parameters. The processes of vibrations shown in Fig. 2(a) and 2(b) are unstable, but the losing of stability due mutual action of horizontal and vertical loads begins earlier.

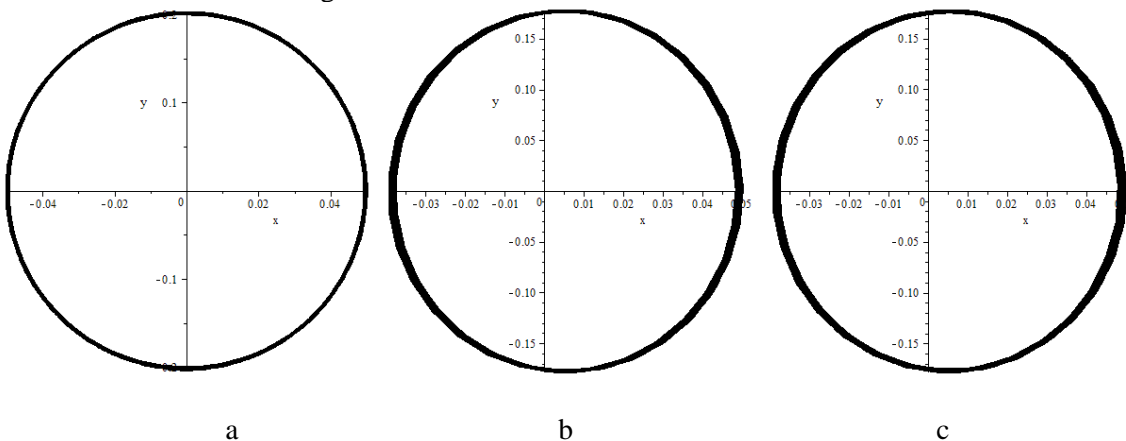


Figure 3. Phase portraits for $\Omega_2 = 4.05 \text{ Hz}$, $a_2 = 0.1$ during 60 sec.

Fig. 3(a) corresponds to $a_1 = 0$, $a_2 = 0.1$ for vertical excitation only. Fig. 3(b) corresponds to $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0$, $\Omega_1 = 0.01 \text{ Hz}$ for horizontal excitation only. Fig. 3(c) corresponds to mutual action of horizontal and vertical excitations with abovementioned parameters. In this case the stability of vibration process can be observed.

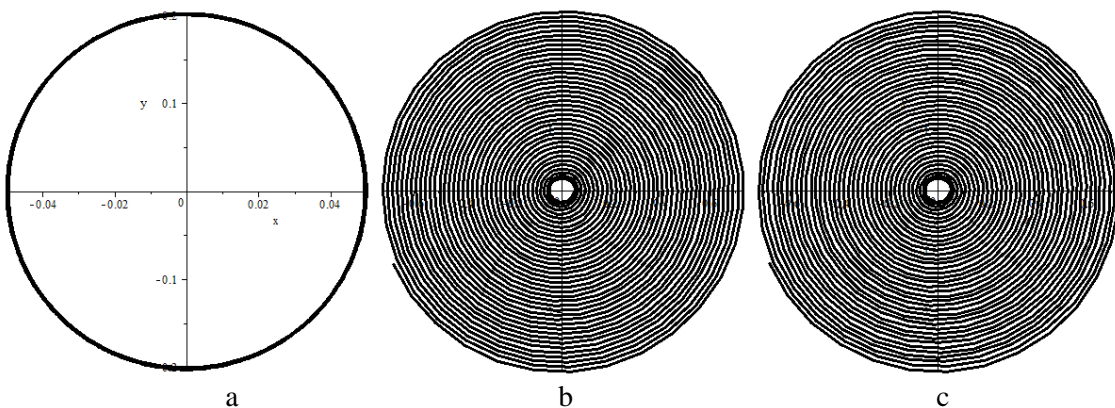


Figure 4. Phase portraits for $\Omega_1 = 4.05$, $\Omega_2 = 4.05 \text{ Hz}$, $a_2 = 0.1$ during 60 sec.

Fig. 4(a) corresponds to $a_1 = 0$, $a_2 = 0.1$ for vertical excitation only. Fig. 4(b) corresponds to $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0$, $\Omega_1 = 4.05\text{Hz}$ for horizontal excitation only. Fig. 4(c) corresponds to mutual action of horizontal and vertical excitations with abovementioned parameters. In this case the vibration process is unstable, and vertical excitation is not essential.

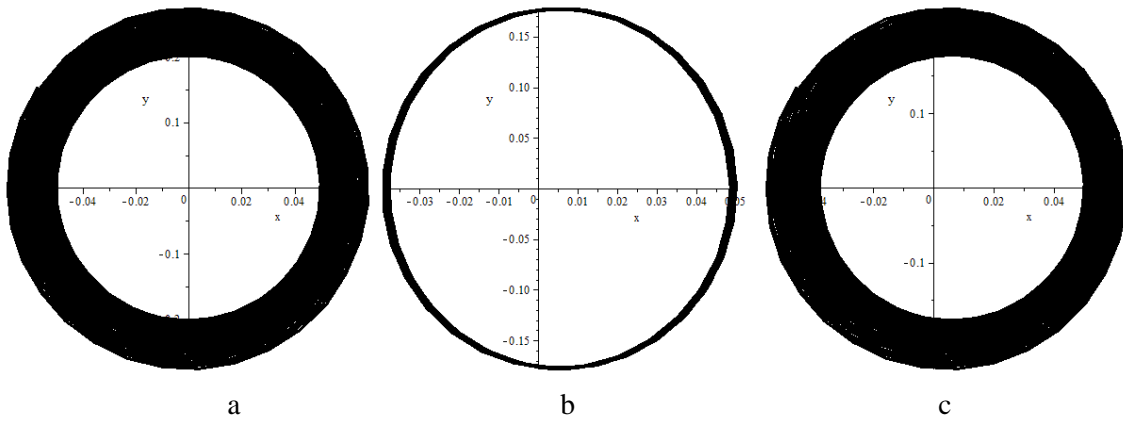


Figure 5. Phase portraits for $\Omega_1 = 0.012$, $\Omega_2 = 8.1\text{Hz}$, $a_2 = 0.1$ during 60 sec.

Fig. 5(a) corresponds to $a_1 = 0$, $a_2 = 0.1$ for vertical excitation only. Fig. 5(b) corresponds to $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0$, $\Omega_1 = 0.012\text{Hz}$ for horizontal excitation only. Fig. 5(c) corresponds to mutual action of horizontal and vertical excitations with abovementioned parameters. In this case the vibration process is unstable, but horizontal excitation is not essential.

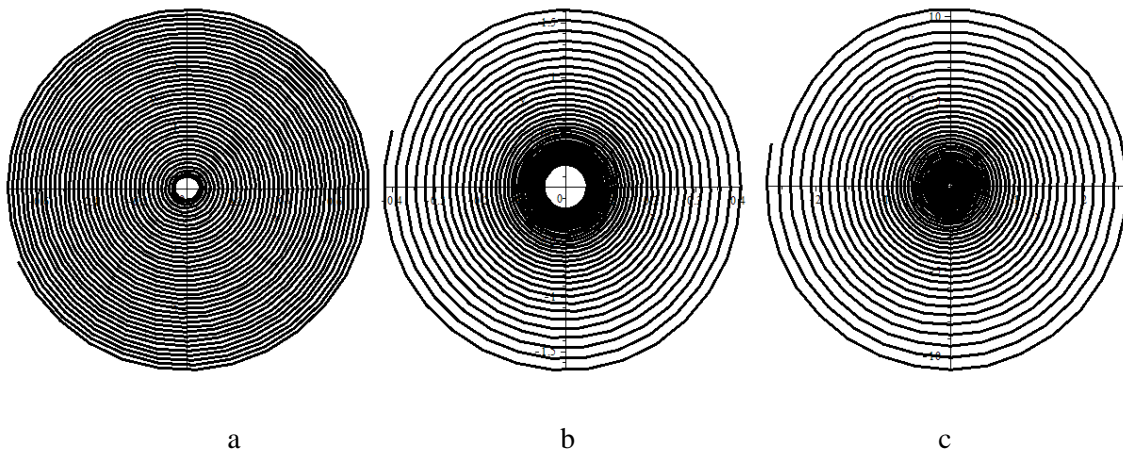


Figure 6. Phase portraits for $\Omega_1 = 4.05$, $\Omega_2 = 8.1\text{Hz}$, $a_2 = 0.1$ during 60 sec.

Fig. 6(a) corresponds to $a_1 = 0$, $a_2 = 0.4$ for vertical excitation only. Fig. 6(b) corresponds to $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0$, $\Omega_1 = 4.05\text{Hz}$ for horizontal excitation only. Fig. 6(c) corresponds to mutual action of horizontal and vertical excitations with abovementioned parameters. In this case the vibration process is unstable, both vertical and horizontal excitations are essential. The phenomenon of parametrical resonance can be observed.

7. Conclusion

The method for estimation of liquid vibration in prismatic reservoir under action of periodic horizontal and vertical loads is developed. The nature of the behavior of the liquid in the reservoir is established depending on the frequency of the driving forces. The effects of instability are investigated. The effect of parametrical resonance at vertical excitation frequency equals to double own frequency of liquid vibrations is considered. The most dangerous liquid vibrations occur when the frequency of horizontal excitation coincides to own frequency of liquid vibrations, and the vertical excitation frequency equals to double value of own frequency.

REFERENCES

1. R.A. Ibrahim. *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2005.
2. Eseev E., Gnitko V., Strelnikova E. Intrinsic oscillations of high pressure vessels when interacting with a liquid. *Institute of Mechanical Engineering problems*. №1, 2006, pp.105-118. [in Russian]
3. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. "Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles". *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), pp. 75-87, 2016.
4. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. "Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles", *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 22 (4), pp.867-881, 2017.
5. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. "Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations", *Journal of Mathematics and Statistical Science*, V. 5, pp.31-41, 2019.
6. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D. , Naumemko Y. "Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles" *J. Modern Technology & Engineering* Vol.3, No.1, pp.15-52, 2018.
7. D.V.Krutchenko, E.A.Strelnikova, Y.S.Shuvalova. "Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs". *Bulletin of the Kharkiv National University Karazin series «Mathematical modeling. Information Technology. Automated Control Systems»*, 35(1),2017, pp. 31-37.
8. Nanjundan Parthasarathy, Hyunjong Kim, Yoon-Hwan Choi, Yeon-Won Lee. "A numerical study on sloshing impact loads in prismatic tanks under forced horizontal motion". *Journal of the Korean Society of Marine Engineering*, Vol. 41, No. 2 pp. 150~155, 2017.
9. Kim Y., "Numerical simulation of sloshing flows with impact load", *Applied Ocean Research*, vol. 23, no. 1, pp. 53-62, 2001.
10. Hyunjong Kim, Mohan Kumar Dey, Nobuyuki Oshima and Yeon Won Lee. "Numerical Study on Sloshing Characteristics with Reynolds Number Variation in a Rectangular Tank", *Computation*, 6, 53;pp. 2-11, 2018.
11. Koh, Hyun Moo, Jae Kwan Kim, and Jang - Ho Park. "Fluid–structure interaction analysis of 3 - D rectangular tanks by a variationally coupled BEM–FEM and comparison with test results". *Earthquake engineering & structural dynamics*, 27.2 pp. 109-124, 1998.
12. Faraday, M., "On the forms and states of fluids on vibrating elastic surfaces", *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 52, pp. 319-340, 1831.
13. Kriutchenko D. "Computer simulation of forced fluid oscillations in a prismatic reservoir". *Bulletin of the Kharkiv National University Karazin*, pp. 42-47, 2018. [in Ukrainian]

ЛІТЕРАТУРА

1. R.A. Ibrahim. *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2005.
2. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Пробл. машиностроения*. №1. 2006. С.105-118.
3. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*. 17(1). 2016. pp. 75-87.

4. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 22 (4). 2017. pp.867-881.
5. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*. V. 5. 2019. pp.31-41.
6. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D. , Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles *J. Modern Technology & Engineering* Vol.3, No.1. 2018. pp.15-52.
7. D.V.Krutchenko, E.A.Strelnikova, Y.S.Shuvalova. Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 35(1). 2017. pp. 31-37.
8. Nanjundan Parthasarathy, Hyunjong Kim, Yoon-Hwan Choi, Yeon-Won Lee. A numerical study on sloshing impact loads in prismatic tanks under forced horizontal motion. *Journal of the Korean Society of Marine Engineering*. Vol. 41. No. 2. 2017. pp. 150~155.
9. Kim Y. Numerical simulation of sloshing flows with impact load. *Applied Ocean Research*. vol. 23. no. 1. 2001. pp. 53-62.
10. Hyunjong Kim, Mohan Kumar Dey, Nobuyuki Oshima and Yeon Won Lee. Numerical Study on Sloshing Characteristics with Reynolds Number Variation in a Rectangular Tank. *Computation*, 6. 53. 2018. pp. 2-11.
11. Koh, Hyun Moo, Jae Kwan Kim, and Jang - Ho Park. Fluid–structure interaction analysis of 3 - D rectangular tanks by a variationally coupled BEM–FEM and comparison with test results. *Earthquake engineering & structural dynamics*. 27.2. 1998. pp. 109-124.
12. Faraday, M. On the forms and states of fluids on vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*. 52. 1831. pp. 319-340.
13. Крютченко Д. Комп'ютерне моделювання вимушених коливань рідини у призматичному резервуарі. *Вісник Харківського національного Університету імені В.Н. Каразіна*. 2018. pp. 42-47.

Крютченко Денис Володимирович – аспірант; *Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного, вул. Пожарського, 2/10, г. Харків, Україна, 61046; e-mail: wollydenis@gmail.com; ORCID: 0000-0002-6804-6991.*

Крютченко Денис Владимирович – аспірант; *Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного, ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046; e-mail: wollydenis@gmail.com; ORCID: 0000-0002-6804-6991.*

Kriutchenko Denys - graduate student, *A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, vul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: wollydenis@gmail.com; ORCID: 0000-0002-6804-6991.*

УДК 519.6 + 612.1

A system for monitoring the state of human cardiovascular system based on the most complete mathematical model of vascular bed

E.N. Solovyova¹, N.N. Kizilova²¹ Kharkiv National Technical University 'KhPI', Kirpichova 2, 61002, Kharkiv, Ukraine² Kharkiv National University V.N. Karazina, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine
e-mail: helenfilippova@yahoo.co.uk

The structure of a new system for monitoring the state of the human cardiovascular system based on geometric and biomechanical models of the vascular bed as a branching tree of arteries is presented. The tree geometry has been obtained by averaging the data of postmortem measurements from five bodies, a statistical analysis of the patterns of the structure of vascular trees, and a new technique for generating an individual tree for a particular patient by performing several *in vivo* measurements. The developed biomechanical model allows for numerical calculations of pressures and blood flow velocities in each artery, storing information in a database, analyzing the distribution of blood volumes, calculating important diagnostic indices, identifying pathologies and planning surgical operations *in silico*.

Ключові слова: monitoring system, cardiovascular system, mathematical modeling, database, medical diagnostics.

У статті наведена структура нової системи моніторингу стану серцево-судинної системи людини на основі геометричної і біомеханічної моделей судинного русла як розгалуженого дерева артерій. В роботі викладені підходи, моделі і методи, які є компонентами нової системи моніторингу стану здоров'я людини. Геометрія дерева отримана шляхом усереднення даних вимірювань *postmortem* на п'яти тілах, статистичному аналізу закономірностей будови судинних дерев. Представлена нова методика генерації індивідуального дерева конкретного пацієнта та граничних умов для нього (термінальні мікроциркуляторні русла) шляхом виконання декількох вимірювань *in vivo*, з урахуванням віку, а також результатів біохімічного та клінічного аналізу крові. Для проведення чисельних розрахунків використовувалася модель, яка базується на рівняннях Нав'є-Стокса для вісесиметричних течій в'язкої нестисливої рідини і системи рівнянь класичної теорії в'язкопружної товстостінної трубки для реологічної моделі Кельвіна-Фойхта для матеріалу стінки судин, з урахуванням умови безперервності тиску і витрати рідини на біфуркаціях трубок, при чому на відкритих кінцях трубок моделі задавалися термінальні провідності мікроциркуляторних русел органів. Була проведена валідація математичної моделі на основі експериментальних даних і корекція значень реологічних параметрів моделей методом найменших квадратів. Розроблена біомеханічна модель дозволяє проводити чисельні розрахунки тисків і швидкостей кровотоку в кожній артерії, зберігати інформацію в базі даних, аналізувати розподіл об'ємів крові та швидкостей кровотоку, розраховувати важливі діагностичні індекси, планувати терапевтичне або хірургічне лікування недостатності кровообігу з кількісною оцінкою результатів лікування *in silico*.

Ключевые слова: система моніторингу, серцево-судинна система, математичне моделювання, база даних, медична діагностика.

В статье представлена структура новой системы мониторинга состояния сердечно-сосудистой системы человека на основе геометрической и биомеханической моделей сосудистого русла как ветвящегося дерева артерий. Геометрия дерева получена на основании усреднения данных измерений *postmortem* на пяти телах, статистическом анализе закономерностей строения сосудистых деревьев, новой методике генерации индивидуального дерева конкретного пациента путем выполнения нескольких измерений *in vivo*. Разработанная биомеханическая модель позволяет проводить численные расчеты давлений и скоростей кровотока в каждой артерии, хранить информацию в базе данных, анализировать распределение объемов крови, скорости кровотока, рассчитывать важные диагностические индексы, выявлять нарушения и планировать хирургические операции *in silico*.

Keywords: система моніторингу, серцево-судинна система, математичне моделювання, база даних, медична діагностика.

1 Introduction

New technologies developed in physics, chemistry, material and computer sciences have considerably changed our everyday life. During the last decades revolutionary *in silico* methods of medical diagnostics, quantitative planning of surgery, treatment and rehabilitation based on computer-assisted systems, medical data analysis, mathematical models, artificial intelligence (AI) and decision support systems have changed the quality of healthcare [1-3]. The newest medical apparatus and systems makes it possible to obtain detailed 3d images of blood vessels and inner organs (CT, MRI), to measure pressure $P(t)$ and blood flow velocity $V(t)$ in the vessels, and other information on physical and biochemical processes in the organism. Thus, the method of photoplethysmography with finger sensors allows registration of arterial pressure continuously with receiving big datasets. The most popular system Finapres (FINger Arterial PRESSure) (Fig.1a) was developed in 1980 [4]. Later,

Finometer, Portapres (FMS) and Nexfin appeared at the market. More complicated systems such as collection of monitors presented by two finger sensors, one wrist pressure sensor and cuff manometer for brachial artery have been recently introduced [5]. The long-term measurements makes it possible to define the heart rate, heart rate variability (HRV), short respiratory and long circadian waves, the pulse shape and many other parameters. HRV gives important information on the heart health. The corresponding spectral, fractal, wavelet analyses, Lyapunov exponent, entropy and other important diagnostic indices could be calculated based on the registered curves [5, 6].

In recent years portable sensors (Fig. 1b) and mobile applications (mobile apps), based on sensor panels of mobile phones and pads (Fig. 1c) or interacting with it through infrared port are getting popular. The measurements of optical transmission oscillations through finger tips with the help of a smartphone sensor panel allow us to register pressure and temperature curves, store and analyze them with corresponding software, and send to a doctor for monitoring the current state of the patient. Thus, the opportunity of continuous registration as time series of many human cardiovascular system parameters is essential for detailed and timely medical diagnostic. It requires the development of new approaches for the formats, the methods of encryption, the storage, the extraction, the statistical analysis and the biomechanical interpretation of the data measured as well as the elaboration of corresponding mathematical models, big data analysis, AI, and other mathematical approaches [7]. Thus medicine is becoming multidisciplinary science, which requires the participation of mathematicians, mechanics, and physicians for elaborating new methods for data processing and analysis of mathematical models of physical processes of a human organism.

In this work a new system for monitoring the state of human cardiovascular system based on the medical data analyses and mathematical modeling of the blood flow and pulse wave propagation along the vasculature system of particular patient is proposed. Similar modeling of systemic arteries as a binary tree composed by 55 elastic tubes (aorta and its branching, carotid arteries, high and low extremities) was proposed in [8]. The models of upper limbs vessels [9], a brain [10], coronary arteries [11] and an aorta [12] have also been developed and used for numerical computations of blood flow distributions and wave travel along the system. The vascular model presented in the proposed monitoring system is the most complete and allows obtaining valuable diagnostic information via real time numerical calculations (10-20 min).



Fig. 1. The finger sensors of pressure Checker Prank (Superior Technologies, Inc.) (a), Finger BP (SmartApps Ltd.) (b), and Blood Pressure Finger Prank (Google Play) (c).

2.2. Components of the monitoring system

2.1. Geometry model of human circulatory system and database.

The results of detailed postmortem opening measurements on 5 bodies (with age ranging from 38 to 62 (52 ± 9), height 155-177 cm (169 ± 7) [13] are used for the geometry model. The lengths L_j and diameters d_j of systemic (intraorgan) arteries have been measured on visible arteries of the body and on plastic casts of inner organs and muscles. The results have been stored in the database DB1. In the 5 datasets different numbers (from 870 to 1027) of the extraorgan arteries have been measured, since the structure of systemic vasculatures has considerable individual features [14]. The measured data for the aorta and its branches (93 segments) are given as a table in [12]. For the vasculatures of inner organs the lengths and diameters of $>10^4$ arteries till to the segments with $d^*=0.1$ mm have been measured [13].

The statistical analysis of the measured diameters and lengths has revealed statistically significant dependences ($R^2 > 0.87$) between the diameters in both bifurcations and trifurcations (Murray's law) in the systemic arteries [12] and in the inner organs [11]. The artery lengths have been normalized by the individual's height, and the inner diameters have been recomputed to have the tubes of circular cross sections with the same hydraulic conductivities as in the raw data geometry. Less significant correlations ($R^2 > 0.64$) have been found between L_j and d_j [13]. The obtained statistical dependences allow restoration of any individual arterial vasculature up to the vessels of diameter d^* [11, 16, 17] from the measured diameters of the aortic segments and feeding arteries of inner organs. The restored models of some of the inner organs are presented in Fig.2.

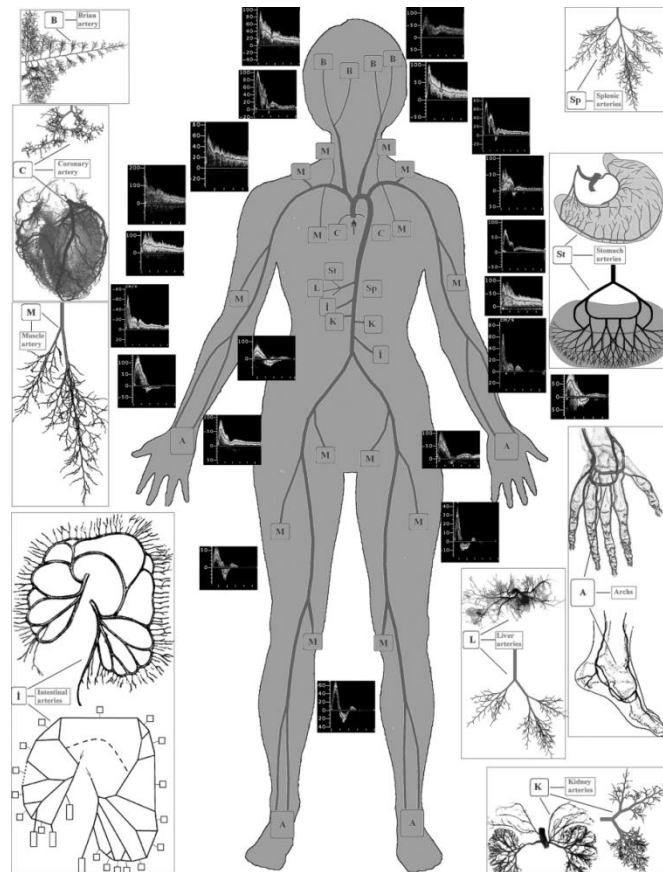


Fig.2. The scheme of systemic arterial tree, arteries of inner organs and muscles, and their restored models.

The systemic trees of five individuals with normalized lengths and diameters after comparison have been averaged, and the averaged geometric model of human systemic tree composed by 970 tubes has been built and stored in DB1. This model makes it possible to recalculate parameters of all tubes for an individual patient.

Similar ultrasound measurements (USG) have been done on five health volunteers (with age ranging from 31 to 10, height 155-177 cm (168 ± 5)) [15]. The measurements of L_j and d_j values and the Doppler blood flow curves have been done in 67 segments of the systemic arteries (Fig.1). The measured values have been recorded in database DB2 and used for validation of the restored models of arterial beds of volunteers based on the averaged model from DB1. The statistical analysis of DB2 has found the dependences between the values of L_j and d_j in the arterial bifurcations similar to the corresponding statistical dependencies computed on DB1 [15].

2.2. Mathematical model of human vascular bed

For numerical calculations of the $P(t)$ and $V(t)$ curves on the geometry models of systemic bed (55-tube), coronary, brain arteries and some other beds [8-10], 1D models of linear theory of plane waves in arteries developed by Sir J. Lighthill, 2D model of axisymmetric flow (cylindrical waves) based on the linearized Navier-Stokes equations, numerical solutions of 3D turbulent flow equations in tubes

with arbitrary geometry and rigid or compliant walls by finite element method can be used. The latter approach requires several months of calculations on big cluster even for 55 tubes and gives the results of comparable accuracy with simpler and faster 1D and 2D models [18]. In this monitoring system the mathematical model based on Navier-Stokes equations for axisymmetric flows of viscous incompressible fluid for blood, and the system of equations of classical theory of viscoelastic wall with Kelvin-Voigt rheology for the vessel wall material have been used [7,11,12,15-17]. At the bifurcations the pressure and blood flow continuity condition have been applied. At the entrance to the system (aortic root) the pressure curve $P(t)$ generated by the heart contraction can be taken either in the standard averaged shape [15-18] or from the measurement data of the particular patient. At the open ends of the tubes (Fig.2) the terminal conductivities of the microcirculatory beds of the inner organs and muscles could be assigned (see the table of typical values in [18]). The terminal wave reflection coefficients $G_j = G_j' + iG_j''$, where real G_j' and imaginary G_j'' parts correspond to the resistive and capacity properties of the microcirculatory bed could also be used [12,15-17]. The values of G_j have been calculated for each terminal tube as for *in vitro* 1000-tube model as *in vivo* 67-tube model based on the averaged datasets and statistical dependences from DB1 [13].

The values of density, Young's modulus and viscosity of the vessel walls have been obtained from statistical approximations of big datasets measured on arterial segments in available literature. The data can be presented in the form of statistical dependences of the material parameters on the vessel diameter, the age of person and type of a cardiovascular disease (hypertension, atherosclerosis, etc.). The density and viscosity of blood can be measured on a patient's blood sample.

The solution of the Navier-Stokes and viscoelastic wall equations in each tube of the model has been found as a composition of the forward and reflected waves. The linearized 2D model allows fast numerical computations on the ~1000-tree model in the form Fourier expansion (the calculation time <10 min). Validation of the proposed mathematical model has been done using Doppler ultrasound curves $V(t)$ from DB2. The correction of the values of rheological parameters of the individual models has been carried out by the least square method.

3 The results of work of the monitoring system

The methods and approaches developed in the proposed monitoring system are presented graphically in Fig.3.

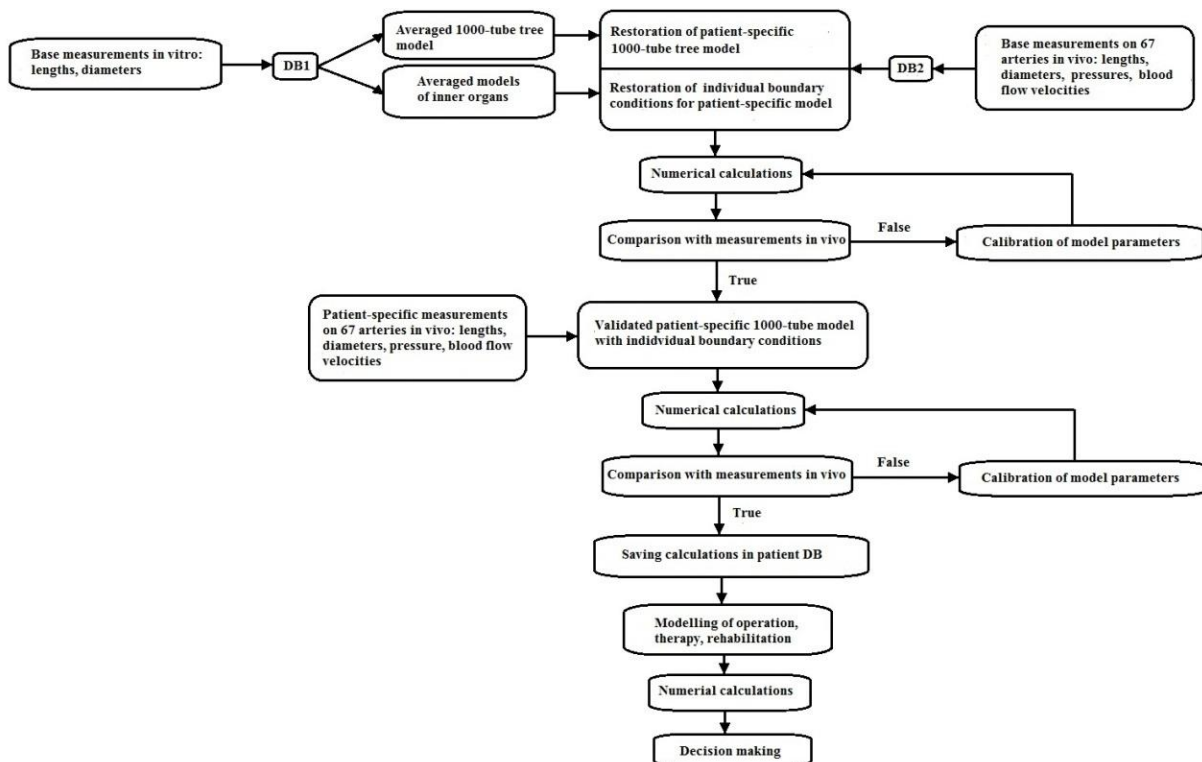


Fig. 3. The structure and principles of work of the monitoring system.

The developed monitoring system has been used for the modeling of pulse wave propagation and reflection, blood pressure wave evolution along the aorta, and blood flow distribution between inner organs [12,15] on the most complete model of aorta composed by 93 tubes, obtained in the correspondence to the presented algorithms (Fig.3) based on the data from DB1.

Conclusion

The approaches, models and methods that are components of the novel monitoring system of the state of human health, *in silico* planning of therapeutic and surgical treatment of circulatory diseases via quantitative evaluation of the treatment outcomes based on geometric and biomechanical models of human circulatory system as a complex branching arterial tree are presented. The algorithm of restoration of the individual 1000-tube model of systemic arterial bed and the boundary conditions (terminal microcirculatory bed) for numerical calculations, corrections of the individual model parameters using the personal data available (biochemical and clinical blood examination, CT, MRI, USG, et. al.) has been elaborated.

The presented monitoring system allows numerical calculations of the blood pressure and blood flow velocity in each artery; storing information as measurement and calculated datasets; calculations and analyses of the important diagnostic indices; decision support for diagnostics of local and global vascular impairments. The developed monitoring system can accumulate valuable information either for one patient in the course of long repeated monitoring or for a certain group of diseases that could be analyzed later by the methods of Big Data analysis and AI for independent expert assessment of the health state and decision making to pinpoint the most appropriate individual therapy or surgery.

ЛІТЕРАТУРА

1. Yu K, et al. Artificial intelligence in healthcare. *Nature Biomedical Engineering*. 2018. Vol. 2. P. 719–731.
2. Lynch C.J. and C Liston. New machine-learning technologies for computer-aided diagnosis. *Nature Medicine*. 2018. vol.24. P. 1304–1305.
3. LeCun Y, et al. Deep learning. *Nature*. 2015. Vol. 521. P. 436–444.
4. Imholz B.P., Wieling W., van Montfrans G.A. Wesseling K.H. Fifteen years experience with finger arterial pressure monitoring: assessment of the technology. *Cardiovasc Res*. 1998. vol. 38. P. 605-616.
5. Chung E., Chen G., Alexander B., Cannesson M. Non-invasive continuous blood pressure monitoring: A review of current applications. *Front Med*. 2013. vol. 7. P.91–101.
6. Milnor WR. *Hemodynamics*. Baltimore: Williams&Wilkins; 1989.
7. Kizilova N.N., Philippova E.N., Zenin O.K. From the 55-tube Westerhof's to Novel 1000-tube Model of the Human Systemic Arterial Tree: Blood Flow, Wave Propagation, Wave-Intensity Analysis and Medical Diagnostics. *Proc. of ESB Congress*. Edinburg. 2010. P.953.
8. Westerhof N., Bosman F., de Vries C.J., Noordegraaf A. Analog studies of the human systemic arterial tree. *Journal of Biomechanics*. 1969. vol. 2. P. 121–143.
9. Alastruey J., Parker K.H., Peiró J., Sherwin S.J. Can the modified Allen's test always detect sufficient collateral flow in the hand? *A computational study, computer methods in biomechanics and biomedical Engineering*. 2006. vol. 9. P. 353–361.
10. Alastruey J., Parker K.H., Peiró J., et al. Modelling the circle of Willis to assess the effects of anatomical variations and occlusions on cerebral flows. *Journal of Biomechanics*. 2007. vol.40. P.1794–1805.
11. Zenin O.K., Kizilova N.N., Philippova E.N. Studies on the Structure of Human Coronary Vasculature. *Biophysics*. 2007. vol. 52, N. 5. P.499–503.
12. Kizilova N., Solovyova H., Mizerski J. Modeling of pulse wave propagation and reflection along human aorta, *Biomechanics in Medicine and Biology*, K. Arkusz, R. Będziński, T. Klekiel, S. Piszczatowski (eds.), SpringerSeries “Advances in Intelligent Systems and Computing”. 2019. vol. 831. P. 23–35.
13. Зенин О.К., Гусак В.К., Кирьякулов Г.С. Артериальная система человека в цифрах и формулах. Донецк. 2002. 198с.

14. Лужа Д. Рентгеновская анатомия сосудистой системы. Издательство: АН Венгрии, 1973. 380 с.
15. Kizilova N., Philippova H., Zenin O. A realistic model of human arterial system: blood flow distribution, pulse wave propagation and modeling of pathology. *Mechanics in Medicine*. Korzynskiego M., Cwanka J. (eds). Rzeszow. 2010. Vol.10. P.103–118.
16. Балабанов В.О., Кізілова Н.М. Математичне моделювання стаціонарної та хвильової провідності артеріальних систем як бінарних дерев. *Вісник КНУ імені Т.Г.Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки»*. 2017. N3. С.19–23.
17. Балабанов В.А., Кизилова Н.Н. Исследование пространственного распределения крови по дереву коронарных артерий: влияние геометрии и режима течения. *Зб. праць XVIII Міжнародного симпозиуму «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2017)*. Харків. 2017. С. 32–36.
18. Xiao N., Alastruey J., Alberto F.C. A systematic comparison between 1-D and 3-D hemodynamics in compliant arterial models. *Int. J. Numer. Method. Biomed. Eng.* 2014. vol.30, N2. P.204–31.

REFERENCES

1. Yu K, et al. “Artificial intelligence in healthcare.” *Nature Biomedical Engineering*, vol. 2, pp. 719–731. 2018.
2. Lynch C.J. and C. Liston. “New machine-learning technologies for computer-aided diagnosis.” *Nature Medicine*, vol. 24, pp. 1304–1305, 2018.
3. LeCun Y, et al. “Deep learning” *Nature*, vol.52, pp. 436–444, 2015.
4. Imholz B.P., Wieling W., van Montfrans G.A., Wesseling K.H.” Fifteen years experience with finger arterial pressure monitoring: assessment of the technology.” *Cardiovasc Res*, vol.38, pp. 605-616, 1998.
5. Chung E., Chen G., Alexander B., Cannesson M. “Non-invasive continuous blood pressure monitoring: A review of current applications.” *Front Med.* vol.7, pp.91–101, 2013.
6. Milnor WR. “Hemodynamics.” Baltimore: Williams&Wilkins; 1989.
7. Kizilova N.N., Philippova E.N., Zenin O.K. “From the 55-tube Westerhof’s to Novel 1000-tube Model of the Human Systemic Arterial Tree: Blood Flow, Wave Propagation, Wave-Intensity Analysis and Medical Diagnostics.” *Proc. of ESB Congress*, Edinburg, P.953, 2010.
8. Westerhof N., Bosman F., de Vries C.J., Noordegraaf A. “Analog studies of the human systemic arterial tree.” *Journal of Biomechanics*, vol. 2., pp.121–143, 1969.
9. Alastruey J., Parker K.H., Peiró J., Sherwin S.J. “Can the modified Allen’s test always detect sufficient collateral flow in the hand?” *A computational study, Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering.* vol. 9, pp. 353–361, 2006.
10. Alastruey J., Parker K.H., Peiró J., et al. “Modelling the circle of Willis to assess the effects of anatomical variations and occlusions on cerebral flows”. *Journal of Biomechanics*, vol. 40, pp. 1794-1805, 2007.
11. Zenin O.K., Kizilova N.N., Philippova E.N. “Studies on the Structure of Human Coronary Vasculature.” *Biophysics*, vol. 52, no. 5, pp.499–503, 2007.
12. Kizilova N., Solovyova H., Mizerski J. “Modeling of pulse wave propagation and reflection along human aorta”. *Biomechanics in Medicine and Biology*, K. Arkusz, R. Będziński, T. Klekiel, S. Piszczatowski (eds.), *Springer Series “Advances in Intelligent Systems and Computing”*, vol. 831, pp. 23–35, 2019.
13. Zenin O.K., Gusak V.K., Kiryakulov G.S. “Arterial system of human in numbers and formulas. Donetsk, 198 p, 2002. [in Russian]
14. Luzha D. Лужа Д. *X-ray anatomy of the vascular system*. Hungarian publishing house, 380 p, 1973. [in Russian]
15. Kizilova N., Philippova H., Zenin O. “A realistic model of human arterial system: blood flow distribution, pulse wave propagation and modeling of pathology. “ *Mechanics in Medicine*. Korzynskiego M., Cwanka J. (eds). Rzeszow, vol.10, pp.103-118, 2010.
16. Balabanov V.O., Kizilova N.M. “Mathematical modeling of hydraulic conductivity and wave propagation of arterial systems as binary trees.” *Bulletin of the Taras Shevchenko National University. Physical and Mathematical Sciences Series.* no.3, pp. 19–23,

2017. [in Ukrainian]
17. Balabanov V.A., Kizilova N.N. "Investigation of the spatial distribution of blood along the coronary artery tree: the influence of geometry and flow regime." Coll. *Proceedings of the XVIII International Symposium "Methods of Discrete Features in Mathematical Physics Problems"* (MDOSMF-2017). Kharkiv, pp. 32–36, 2017. [in Russian]
 18. Xiao N., Alastruey J., Alberto F.C. "A systematic comparison between 1-D and 3-D hemodynamics in compliant arterial models." *Int. J. Numer. Method. Biomed. Eng.* v.30, no 2, pp. 204–31, 2014.

Кізілова Наталія Миколаївна – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Kizilova Natalya N. Doctor of Science, Professor of Department of Applied Mathematics V.N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Кизилова Наталья Николаевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022
e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Соловйова Олена Миколаївна – викладач кафедри вищої математики, Харківський національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», вул. Кирпичова 2, Харків, Україна, 61002;
e-mail: helenfilippova@yahoo.co.uk; ORCID: 0000-0003-3704-8350.

Solovyova Elena N. lecturer of Department of High Mathematics, Kharkiv National Technical University 'KhPI', Kirpichova 2, Kharkiv, Ukraine, 61002.
e-mail: helenfilippova@yahoo.co.uk; ORCID: 0000-0003-3704-8350.

Соловьева Елена Николаевна – преподаватель кафедры высшей математики, Харьковский национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева 2, Харьков, Украина, 61002;
e-mail: helenfilippova@yahoo.co.uk; ORCID: 0000-0003-3704-8350.

УДК 658.51.012

The statement of the task of optimal control of the production line using the additional time of equipment operation

V.D. Khodusov¹, O.M. Pihnastyi²¹ Kharkiv National University named after V.N. Karazin, Kharkov-22, Svobody Square, 4, 61022, Ukraine² National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute" Pushkinskaya 79-2, Kharkov, 61102, Ukraine, e-mail: pihnastyi@gmail.com

The production line of an enterprise with a line method of organizing production is considered as a dynamic distributed system. The technological route for manufacturing products in many modern enterprises contains several hundreds of technological operations and in the inter-operating reserve of each there are thousands of products awaiting processing. Technological routes of different parts for the products of the same type intersect. Therefore the distribution of objects of labor along the technological route has a significant impact on the throughput capacity of the production line. To describe such systems, a new class of production line models (PDE-model) has been introduced. Models of this class use partial differential equations to describe the behavior of production line flow parameters. In this article, a PDE-model of the production line is built, the flow parameters of which depend on the load factor of the process equipment for each operation. For the description of a distributed dynamic system, the PDE model of the production line was used. The single-shift mode of operation of a production enterprise is considered as a basic mode of operation.

Keywords: production line, PDE-model of production, balance equations, work in progress.

Виробнича лінія підприємства з поточним методом організації виробництва є складною динамічною розподіленою системою. Розподіл заготовок і напівфабрикатів уздовж технологічного маршруту істотно впливає на пропускну здатність виробничої лінії, може викликати зупинку технологічного обладнання через відсутність заготовок в накопичувальному бункері або в результаті його переповнення. Для опису розподілених виробничих систем введений новий клас моделей (PDE-модель). Моделі цього класу використовують диференціальні рівняння в приватних похідних, дозволяють визначити поведінку поточних параметрів уздовж виробничої лінії в довільний момент часу для заданої технологічної позиції обробки деталі. У даній роботі досліджується модель потокової лінії, синхронізація технологічних операцій на якій досягається за допомогою зміни коефіцієнта завантаження технологічного обладнання. Передбачається, що однозмінний режим роботи виробничого підприємства є основним режимом його функціонування. Підвищення коефіцієнта завантаження технологічного обладнання досягається за рахунок збільшення роботи устаткування для операцій з мінімальною продуктивністю. Для забезпечення безперервного одне змінного режиму роботи виробничої лінії технологічні операції синхронізуються протягом календарного дня. Для побудови оптимальної програми управління введений критерій якості, який враховує витрати виробничого підприємства, які потрібні для синхронізації технологічних операцій. При цьому враховується, що вартість однієї години функціонування технологічного обладнання залежить від виду технологічної операції. Для побудови диференціальних зв'язків при постановці завдання управління використано одно моментне рівняння, яке визначає взаємозв'язок лінійної щільності заготовок вздовж технологічного маршруту і темпу обробки заготовок на технологічній операції в довільний момент часу.

Ключові слова: виробнича лінія, PDE-модель виробництва, балансові рівняння, незавершене виробництво.

Производственная линия предприятия с поточным методом организации производства является сложной динамической распределенной системой. Распределение заготовок и полуфабрикатов вдоль технологического маршрута оказывает существенное влияние на пропускную способность производственной линии. Для описания распределенных производственных систем введен новый класс моделей (PDE-модель). Модели этого класса используют дифференциальные уравнения в частных производных, позволяют определить поведения поточных параметров вдоль производственной линии в произвольный момент времени. В настоящей работе исследуется модель поточной линии, синхронизация технологических операций на которой достигается посредством изменения коэффициента загрузки технологического оборудования. Предполагается, что односменный режим работы производственного предприятия является основным режимом его функционирования. Для обеспечения непрерывного односменного режима работы производственной линии технологические операции синхронизируются в течение календарного дня. Для построения оптимальной программы управления введен критерий качества, который учитывает затраты производственного предприятия, которые требуются для синхронизации технологических операций. При этом учитывается, что стоимость одного часа функционирования технологического оборудования зависит от вида технологической операции. В качестве дифференциальных связей при постановке задачи управления использовано одномоментное уравнение, которое определяет взаимосвязь линейной плотности заготовок вдоль технологического маршрута и темпа обработки заготовок на технологической операции в произвольный момент времени.

Ключевые слова: поточная линия, PDE-модель производства, уравнения баланса, незавершенное производство.

1 Introduction

The production line is required to process a batch of products on the enterprise [1]. For the process following factors are identified:

- a) the sequence of operations and their technological parameters;
- b) the equipment necessary to perform the operation, its working parameters and the layout scheme;
- c) the properties of the object of labor and the laws of the transfer of resources to objects of labor as a result of the impact of equipment.

It is assumed that the production technology during the production cycle does not change or the parameters which characterize the operation remain unchanged. The duration of the shift is fixed at eight hours. Reducing the duration of the production cycle is possible by changing the mode of equipment utilization. The amount of equipment load in the processing of a batch of products will be characterized by the shift factor of the equipment during the day K_{Sm} . We assume that the cost of one hour of equipment operation is different for each operation and depends on the time of day. The flow parameters of the model of the controlled production process in the two-step description are inter-operating reserve characterized by density $[\chi]_0(t, S)$, and by the flow of objects of labor $[\chi]_1(t, S)$ on the technological route [2-5]. To describe the behavior of flow parameters in space and time, we use the one-dimensional coordinate space (t, S) [6, 7]. The coordinate S determines the place of the object of labor in the technological route. The introduced one-dimensional coordinate space (t, S) allows us to construct compact models for controlling the parameters of a production line. We divide the coordinate axis $0S$ into segments $\Delta S_m \in [S_{m-1}, S_m]$. Coordinates S_{m-1} and S_m characterize the beginning and end of the m -th operation, $m = 1..M$. At the same time, we assume that, $S_0 = 0$, $S_M = S_d$, where S_d is the cost of production.

Let the function $z_c(t, S_m)$ determine the value of the excess costs of the resources required for the use of additional equipment within one hour of the m -th operation. The dependence of the function $z_c(t, S_m)$ on time implies that during the production cycle, the value of the excess costs of resources required to perform the operation on additional equipment may vary over time. By the use of additional equipment we mean the usage of backup equipment in the required time or the main equipment in additional time (shift factor $K_{Sm} < 3$) [8].

One of the approaches to synchronizing the processing performance of objects of labor in different operations of the production line is to use the main equipment in additional time between the main technological shifts (control of the shift of technological equipment for a given technological operation). If the time used by the equipment during single-shift operation is selected as the time axis of the state space, then the state of the backlog during the period between the end of the shift and the beginning of another shift in the case of using the main equipment during the second and the third shift will change abruptly by the number of processed products during the second and the third shift.

Let us introduce the distribution density of the value of the excess costs of technological resources required to use additional equipment within an hour for a technological route in the interval $[0; S_d]$:

$$\int_{S_{m-1}}^{S_m} \omega_z(t, S) dS = z_c(t, S_m), \quad \int_0^{S_d} \omega_z(t, S) dS = \sum_{m=1}^M \int_{S_{m-1}}^{S_m} \omega_z(t, S) dS = \sum_{m=1}^M z_c(t, S_m).$$

We introduce a function $W_\delta(t, S)$ that characterizes the work of additional equipment (main equipment in the second or third shift, shift factor $K_{Sm} > 1$).

Define $\int_{t_1}^{t_2} W_\delta(t, S) dt$ as the number of additional equipment (located in the vicinity S of the technological route coordinates) hours for a period of time $\Delta t = (t_2 - t_1)$. As a result of the inclusion of additional equipment that ensures the processing of objects of labor in the second and the third shift at a rate equal to the rate of operation of the main equipment $[\chi]_{1\psi}(t, S)$, the overall rate of movement of objects of labor at the point of the technological route with the coordinate S increases by $[\chi]_{1\psi}(t, S) \cdot W_\delta(t, S)$. During $\Delta t = (t_2 - t_1)$ the work of the additional equipment, an additional flow of objects of labor with the total number of units

$$\int_{t_1}^{t_2} [\chi]_{\text{II}\psi}(t, S) \cdot W_{\delta}(t, S) dt$$

will pass through the point of the technological route with the coordinate S .

The excess costs $C_{cb}(T_d)$ required to ensure the operation of additional equipment located on the segment $\Delta S_m \in [S_{m-1}, S_m]$ and used to perform the m -th operation for the duration of the production cycle T_d , and the integral is defined:

$$C_{cb}(T_d) = \int_0^{T_d} \int_0^{S_d} W_{\delta}(t, S) \cdot \omega_z(t, S) dS dt$$

Relevance and practical significance

The scientific novelty consists in the development of a method for designing control systems for the parameters of the production line in enterprises with a continuous method of organizing production based on the PDE model of the object control.

In this case, the object control, the production line is represented by a dynamic system with distributed parameters along the technological route. The optimal control of the parameters of the production line is sought in the form of superpositions of delta functions.

The proposed method of designing a system for controlling the flow parameters of a production line can be used as the basis for designing highly efficient production flow control systems for enterprises manufacturing semiconductor products for the automotive industry.

Production Line Model

Line parameters for continuous production flow with a sufficiently large number of operations satisfy the balance equation system:

$$\frac{\partial [\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_{\text{II}}(t, S)}{\partial S} = 0, \quad [\chi]_{\text{II}}(t, S) = [\chi]_{\text{II}\psi}(t, S). \quad (1)$$

The normative tempo $[\chi]_{\text{II}\psi}(t, S)$ of processing objects of labor for a production line is set at each point of the technological route and for each point in time. The parameters of the model of the controlled production process in the two-step description are the inter-operational reserves, which characterize $[\chi]_0(t, S)$ the density of distribution of objects of labor along the technological route and their rate of movement $[\chi]_{\text{II}}(t, S)$ [1].

We can control the value of the flow parameters $[\chi]_0(t, S)$, $[\chi]_{\text{II}}(t, S)$ by regulating the place of activation of additional equipment in the technological route and the duration of activation (change in the coefficient of the loading of the process equipment $K_{Sm} > 1$).

Control function $U_{\delta}(t, S) = W_{\delta}(t, S)$ determines the duration of additional equipment activation in the specified place of the technological route with the coordinate S at the time $t = t_q$, where t_q is the end time of the q -th shift ($q = 1, 2, 3, \dots$). The planning interval for the line in question is equal to the interval of three shifts (daily planning interval) with one-shift operation of the main equipment. As an additional, the main equipment is used, which processes $K_{Sm} > 1$ the objects of labor in the second and the third shift with the pace $[\chi]_{\text{II}\psi}(t, S)$.

The behavior of the parameters $[\chi]_0(t, S)$, $[\chi]_{\text{II}}(t, S)$ of the production line is limited by the initial conditions of the distribution of objects of labor along the technological route and the purpose of management:

$$[\chi]_0(0, S) = [\chi]_{00}(S), \quad [\chi]_0(T_d, S) = [\chi]_{0T_d}(S),$$

as well as the boundary conditions determining the receiving of raw materials from the warehouse, materials for the first operation and the output of finished products from the last operation:

$$[\chi]_0(t, 0) = [\chi]_{0S}(t), \quad [\chi]_{\text{II}}(t, 0) = [\chi]_{\text{II}S}(t).$$

In the absence of the activation of additional equipment parameters $[\chi]_0(t, S)$, $[\chi]_1(t, S)$, $[\chi]_{1\psi}(t, S)$ in the moment t_q the end of the q -th shift and the start of the $(q+1)$ -th shift are continuous functions of time t with the continuous derivatives of the n -th order:

$$\begin{aligned} [\chi]_0(t_{q-}, S) &= [\chi]_0(t_{q+}, S), & \frac{\partial^n [\chi]_0(t_{q-}, S)}{\partial t^n} &= \frac{\partial^n [\chi]_0(t_{q+}, S)}{\partial t^n}, \\ [\chi]_1(t_{q-}, S) &= [\chi]_1(t_{q+}, S), & \frac{\partial^n [\chi]_1(t_{q-}, S)}{\partial t^n} &= \frac{\partial^n [\chi]_1(t_{q+}, S)}{\partial t^n}, \\ [\chi]_{1\psi}(t_{q-}, S) &= [\chi]_{1\psi}(t_{q+}, S), & \frac{\partial^n [\chi]_{1\psi}(t_{q-}, S)}{\partial t^n} &= \frac{\partial^n [\chi]_{1\psi}(t_{q+}, S)}{\partial t^n}. \end{aligned}$$

The notation t_{q-} and t_{q+} , means that the functions $[\chi]_0(t, S)$, $[\chi]_1(t, S)$, $[\chi]_{1\psi}(t, S)$ are considered in the infinitely small neighborhood to the left and to the right of t_q . We assume that the regulatory parameters characterizing the operation during the production cycle T_d remain unchanged in time:

$$[\chi]_0(t, S) = [\chi]_0(0, S) - \frac{\partial [\chi]_{1q}(S)}{\partial S} t, \quad [\chi]_1(t, S) = [\chi]_{1\psi}(t, S) = [\chi]_{1q}(S). \tag{2}$$

Condition

$$\left. \frac{\partial [\chi]_{1q}(S)}{\partial S} \right|_{S=S_m} < 0$$

corresponds to the increase in the density of inter-operating reserve for a technological m -th operation during the cycle time T_d for the case when there is no activation of additional equipment in the second and third shifts. In this case, the rate of processing of parts at the technological operation will be considered as a constant over time. The average daily rate can be changed depending on the shift value of the process equipment. The time value corresponds to the time t_q of completion of works in the q -th shift under the single-mode operation mode of the main equipment (duration of the work shift, hours):

$$\Delta t_q = (t_q - t_{q-1}) = 8.$$

The number of inter-operating reserve at the moment of time corresponding to the completion of work in the q -th shift is equal to their number at the beginning of the work of the $(q+1)$ -th shift (2). The increase in the density of inter-operating reserves with time will lead to overflow of the capacity of the inter-operating bunker located in the point of the technological route defined by the coordinate S_m , and ultimately, to the overflow of bunkers on the section $[0, S_m]$ of the technological route with the subsequent stopping of the production line.

The conditions for the occurrence of the drive overflow process and the study of the evolution of its development for the technological route section $[0, S_m]$ are described in detail in [4, 6, 9-12].

To ensure the smooth operation of the production line, it is necessary to synchronize the rate of processing of objects of labor in individual operations within the time interval between the beginning of the t_q -th and the beginning of the t_{q+1} -th work shift.

We supplement equations (1) with the control function $U_\delta(t, S)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_{1q}(S)}{\partial S} &= - \frac{\partial ([\chi]_{1q}(S) \cdot U_\delta(t, S))}{\partial S}, & (3) \\ U_\delta(t, S) = W_\delta(t, S) &= W(t, S) \cdot \delta(t - t_q), \quad t_q = 8 \cdot q \quad W(t_q, S) \leq 8, \end{aligned}$$

determining the duration of the activation of equipment in the position S at the time between the end of the q -th and the beginning of $(q+1)$ -th shift ($q = 1, 2, 3, \dots$). The control of the flow parameters carried

out as a result of the use of additional equipment at the moment of time t_q between the end of the q -th shift and the beginning of the $(q+1)$ -th shift is determined through the Dirac delta function $\delta(t-t_q)$ [13, 14]. The equation for changing the density of inter-operating reserve (3) can be integrated over time:

$$[\chi]_0(\tau, S) = [\chi]_0(0, S) - \frac{\partial [\chi]_{1q}(S)}{\partial S} \tau - \sum_{q=1}^k \frac{\partial}{\partial S} ([\chi]_{1q}(S) W(t_q, S)), \quad (4)$$

where the replenishment time points of the production line are $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_q < t_{q+1} < \dots < t_k \leq \tau$ (hour) with the duration of the work the additional equipment $W(t_1, S), W(t_2, S), \dots, W(t_k, S)$ (hour).

Replenishment time moments t_q and the duration of additional equipment operation $W(t_q, S) \leq 8$ (h) depend on the choice of control. The total number of objects of labor in the inter-operational reserve of the technological operation bounded by the coordinates of the technological route S_{m-1} and S_m is the quantity:

$$\int_{S_{m-1}}^{S_m} ([\chi]_0(\tau, S) - [\chi]_0(0, S)) dS = -([\chi]_{1q}(S_m) - [\chi]_{1q}(S_{m-1}))\tau - \sum_{q=1}^k ([\chi]_{1q}(S_m) \cdot W(t_q, S_m) - [\chi]_{1q}(S_{m-1}) \cdot W(t_q, S_{m-1})),$$

where

$$\int_{S_{m-1}}^{S_m} ([\chi]_0(\tau, S) - [\chi]_0(0, S)) dS - \text{changing backlog } m\text{-th operation for time } \tau;$$

$[\chi]_{1q}(S_{m-1})\tau$ - the number of objects of labor, which arrived at the m -th operation with $(m-1)$ -th during the time τ (h);

$[\chi]_{1q}(S_m)\tau$ - the number of objects of labor, which took from m -th operation to $(m+1)$ -th in time τ (h); $[\chi]_{1q}(S_{m-1}) \cdot W(t_q, S_{m-1})$ - the number of objects of labor, which arrived at the m -th operation with the $(m-1)$ -th as a result of the work of additional equipment during the time $W(t_q, S_{m-1})$ between the beginning of the q -th and the beginning of the $(q+1)$ -th shift;

$[\chi]_{1q}(S_m) W(t_q, S_m)$ - the number of objects of labor, which went with the m -th operation on the $(m-1)$ -th as a result of the work of additional equipment during the time $W(t_q, S_m)$ between the beginning of the q -th and the beginning of the $(q+1)$ -th shift.

The discontinuity of the function $[\chi]_0(t, S)$ corresponding to the value $[\chi]_{1q}(S_m) W(t_q, S_m)$, is determined by the work of the additional equipment with the capacity $[\chi]_{1q}(S_m)$ included between t_q and t_{q+1} the shift for processing the subject of labor for a time $W(t_q, S_m)$.

Statement of the task of optimal control of the production line

In a general form, the task of building an optimal program for controlling flow parameters $[\chi]_0(t, S)$, $[\chi]_{1l}(t, S)$, when additional equipment is used, can be formulated as follows: determine the state of parameters $[\chi]_0(t, S) \in G_0, [\chi]_{1l}(t, S) \in G_1$ for each route point $S \in [0, S_d]$ during the period of time $t \in [0, T_d]$ while managing $U_\delta(t, S) \in G_U$ the additional equipment operation time

$$U_\delta(t, S) = W_\delta(t, S) = W(t, S) \delta(t - t_q), \quad t_q = 8 \cdot q,$$

delivering a minimum of functionality

$$C_{cb} = \int_0^{T_d} \int_0^{S_d} U_\delta(t, S) \cdot \omega_z(t, S) dS dt \rightarrow \min, \quad (5)$$

with differential connections

$$\frac{\partial [\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_{1q}(S)}{\partial S} = - \frac{\partial([\chi]_{1q}(S) \cdot U_\delta(t, S))}{\partial S},$$

with restrictions along the trajectory on the phase variables $[\chi]_0(t, S)$ determined by the storage capacity

$$0 \leq [\chi]_0(t, S), \quad [\chi]_0(t, S) \leq [\chi]_{0G}(S),$$

with constraints along the trajectory on the control [7]

$$0 \leq U_\delta(t, S), \quad 0 \leq \int_{t_q - 0.5\Delta t_q}^{t_q + 0.5\Delta t_q} U_\delta(t, S) dt \leq U_{\delta G}(S) = 8, \quad \Delta t_q \rightarrow 0, \quad (6)$$

initial conditions

$$[\chi]_0(0, S) = [\chi]_{00}(S),$$

final state (control goal)

$$[\chi]_0(T_d, S) = [\chi]_{0T_d}(S)$$

and boundary conditions

$$[\chi]_{11}(t, 0) = [\chi]_{11q}(0), \quad [\chi]_{11}(t, S_d) = [\chi]_{11q}(S_d),$$

where $t_q = 8q$ is the end time of the q -th shift; $\delta(t - t_q)$ - delta function. Control is carried out in the time interval between shifts

$$t \in \left[t_q - \frac{\Delta t_q}{2}, t_q + \frac{\Delta t_q}{2} \right], 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_q \dots \leq T_d \quad .$$

Control $U_\delta(t, S)$ should be understood as a certain impulse, which is an idealization of ordinary control, during a shift concentrated in a neighborhood of a point t_q [13]. The value of the function $U_\delta(t, S)$ at the time point t specifies the number of hours of operation of the additional equipment at the location of the technological route with a coordinate S .

Condition (6) for different parts of the route is recorded under the assumption that the duration of the work of additional equipment cannot exceed the duration of the technological shift equal to eight hours.

The tempo of processing of objects of labor along the technological route is a given function $[\chi]_{1q} = [\chi]_{1q}(S)$ from the coordinate S . The tempo of movement of objects of labor $[\chi]_{11}(t, 0) = [\chi]_{11q}(0)$,

coming in the form of raw materials and materials to the production line, and the tempo $[\chi]_{11}(t, S_d) = [\chi]_{11q}(S_d)$ final parts leaving the last operation, do not depend on time, consistent with the plan of supplying the production with raw materials and the plan of shipments of final products. Functional (5) defines the criterion for the quality of control of flow parameters during the production cycle T_d , reflects the excess costs for all technological operations associated with the use of additional equipment. It is assumed that the cost of an hour of operation of additional equipment is set different for each operation and depends on the time, determined by the function. In determining the optimal control program, we assume that the intervals between shifts are adjacent to each other $\omega_z(t, S)$. We assume that the main equipment works continuously during the work shift. To ensure the continuity of the flow of items of labor on the technological route

$$[\chi]_{0G}(S) \geq [\chi]_0(t, S) \geq 0,$$

the operation of the additional equipment must be controlled in such a way that during the shift in the interval $t \in] t_q, t_{q+1}[$ the main equipment functions continuously. Strict equality

$$[\chi]_{0G}(S) \equiv [\chi]_0(t, S), \quad [\chi]_0(t, S) \equiv 0,$$

which corresponds to filling the bunker with objects of labor and emptying it, is allowed only in the time interval

$$t \in \left[t_q - \frac{\Delta t_q}{2}, t_{q+1} - \frac{\Delta t_q}{2} \right].$$

Integrating the balance equations in the specified time interval, we get:

$$[\chi]_0 \left(t_{q+1} - \frac{\Delta t_q}{2}, S \right) = [\chi]_0 \left(t_q - \frac{\Delta t_q}{2}, S \right) - \frac{\partial [\chi]_{1q}(S)}{\partial S} \cdot 8 - \frac{\partial}{\partial S} \int_{t_q - \frac{\Delta t_q}{2}}^{t_q + \frac{\Delta t_q}{2}} [\chi]_{1q}(S) \cdot U_\delta(t, S) dt,$$

that allows us to write the condition of inadmissibility of overflow of the inter-operational bunker

$$[\chi]_{0G}(S) - [\chi]_0 \left(t_q - \frac{\Delta t_q}{2}, S \right) + \frac{\partial [\chi]_{1q}(S)}{\partial S} \cdot 8 + \frac{\partial}{\partial S} \int_{t_q - \frac{\Delta t_q}{2}}^{t_q + \frac{\Delta t_q}{2}} [\chi]_{1q}(S) \cdot U_\delta(t, S) dt \geq 0$$

and the condition of inadmissibility of the emptiness of the inter-operational bunker

$$[\chi]_0 \left(t_q - \frac{\Delta t_q}{2}, S \right) - \frac{\partial [\chi]_{1q}(S)}{\partial S} \cdot 8 - \frac{\partial}{\partial S} \int_{t_q - \frac{\Delta t_q}{2}}^{t_q + \frac{\Delta t_q}{2}} [\chi]_{1q}(S) \cdot U_\delta(t, S) dt \geq 0.$$

The function $[\chi]_0(t_q, S)$ determines the distribution of objects of labor according to the technological route at the moment of time $t = t_q$, corresponding to the beginning of the q -th shift.

Control $U_\delta(t, S)$ with restrictions on both phase variables and control, ensures the achievement of the control target with the minimum value of the integral (5) and with given differential constraints, is the optimal program for the flow parameters of the production line. In the absence of control, the equation of relations is (1). Changing the number of objects of labor in the area of the production line during the operation is only possible due to the receiving of objects of labor from the previous operation

and their leaving for the next as a result of technological processing. Term $\frac{\partial([\chi]_{1q}(S) \cdot U_\delta(t, S))}{\partial S}$

containing control $U_\delta(t, S)$, plays the role of a source or destination [1] of objects of labor in the considered element of the volume of phase space. The initial conditions and the management goals determine the distribution of objects of labor along the route at the initial and the final point in time.

Conclusion

Achievement of the production system with the initial distribution of objects of labor $[\chi]_{00}(S)$ along the technological route in a precise line over the duration of the production cycle T_d of the final state $[\chi]_{0T_d}(S)$ can be implemented in a variety of ways, each of which is called a control program. Among the technical problems of managing the state of the production line, finding the most optimal program for the use of resources (optimal control) is crucial. The mathematical reflection of this fact is that the control of the parameters of the production line should be chosen from the condition of minimum integral (5).

This paper shows that along with traditional models for controlling the parameters of production flow lines, control models associated with the use of partial differential equations (PDE models) play an important role. A PDE-model for controlling the parameters of a production line has been considered, taking into account the restrictions on the volume of inter-operating bunkers along the technological route.

The developed model allows us to determine the schedule of activating and deactivating the process equipment. A method for controlling the synchronization of technological operations of an industrial production line is considered. The quality criterion of the production system has been set, which allows building optimal control over the parameters of a production line operating in multi-shift mode. It is shown that partial differential equations that act as differential constraints for phase variables are replaced by a system of equations for the coefficients of decomposition of production line parameters, which allowed us to obtain the control function in the form of time dependence and position (coordinates) in the technological route.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пигнастый О. М., Ходусов В. Д. Расчет производственного цикла с применением статистической теории производственно-технических систем. *Доклады Национальной академии наук Украины*. 2009. №12. С. 38-44. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.36267.54562>
2. Азаренков Н. А., Пигнастый О. М., Ходусов В. Д. Кинетическая теория колебаний параметров поточной линии. *Доклады Национальной академии наук Украины*. 2014. №12. С. 36-43. <https://10.15407/dopovidi2014.12.036>
3. Pinxten J., Waqas U., Geilen M., Basten A. Online scheduling of 2re-entrant flexible manufacturing systems. *ACM Transactions on Embedded Computing Systems*. 2017. Vol. 16. P. 1–20. <https://doi.org/10.1145/3126551>
4. Ancona F., Cesaroni A., Coclite G., Garavello M. On the Optimization of Conservation Law Models at a Junction with Inflow and Flow Distribution Controls. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2018. Vol. 56. P. 3370–3403. <https://doi.org/10.1137/18M1176233>
5. Kaihara T., Katsumura Y., Suginishi Y., Kádár B. Simulation model study for manufacturing effectiveness evaluation in crowdsourced. *CIRP Annals*. 2017. Vol. 66. Issue 1. P. 445–448. <https://10.1016/j.cirp.2017.04.094>
6. Власов В. А., Тихомиров И. А., Локтев И. И. Моделирование технологических процессов изготовления промышленной продукции. Томск : Изд-во ГТТУ, 2006. 300 с.
7. Михайлов В. С. Теория управления. Киев : Высшая школа, 1988. 312 с.
8. Коробецкий Ю. П. Имитационные модели в гибких системах. Луганск: Изд-во ВНУ им. В. Даля, 2003. 280 с.
9. Пигнастый О. М. Задача оптимального оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции *Доклады Национальной академии наук Украины*. 2006. № 5. С. 79–85. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.29852.28802>
10. Tiacci L. Simultaneous balancing and buffer allocation decisions for the design of mixed-model assembly lines with parallel workstations and stochastic task times. *International Journal of Production Economics*. 2015. Vol.162. P. 201–215. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2015.01.022>
11. Kück M., Broda E., Freitag M., Hildebrandt T., Frazzon E. Towards adaptive simulation-based optimization to select individual dispatching rules for production *Winter Simulation Conference (WSC)*. Las Vegas, NV, USA, 2017. P.3852–3863. <https://doi.org/10.1109/WSC.2017.8248096>
12. Falco M., Mastrandrea N., Mansoor W., Rarità L. Situation Awareness and Environmental Factors: The EVO Oil Production *New Trends in Emerging Complex Real Life Problems*. Springer, 2018. P. 209–217. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00473-6_23
13. Дыхта В. А., Самсонюк О. Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. Москва: Физматлит, 2000. 255 с.
14. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля (новые проблемы). Москва: гос. изд-во технико-теорет. лит., 1951. 480 с.

REFERENCES

1. O.M. Pihnastyi and V. D. Khodusov “The calculation of a production cycle with application of the statistical theory of industrial-technical systems.” Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. vol.12. p.p.. 38-44. 2009. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.36267.54562> [in Russian]
2. N.A. Azarenkov, O.M. Pihnastyi and V.D. Khodusov “Kinetic theory of fluctuations of the parameters of a production line”. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*. vol.12. p.p.. 36-43. 2014. <https://10.15407/dopovidi2014.12.036> [in Russian]

3. J. Pinxten, U. Waqas, M. Geilen and A. Basten “Online scheduling of 2re-entrant flexible manufacturing systems.” *ACM Transactions on Embedded Computing Systems*, vol. 16, p.p. 1–20, 2017. <https://doi.org/10.1145/3126551>
4. F. Ancona, A. Cesaroni, G. Coclite, and M. Garavello “On the Optimization of Conservation Law Models at a Junction with Inflow and Flow Distribution Controls.” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 56, p.p. 3370–3403, 2018. <https://doi.org/10.1137/18M1176233>
5. T. Kaihara, Y. Katsumura, Y. Suginishi and B. Kádár “Simulation model study for manufacturing effectiveness evaluation in crowdsourced.” *CIRP Annals*, vol. 66, Issue 1, p.p. 445–448, 2017. <https://10.1016/j.cirp.2017.04.094>
6. V. A. Vlasov, I. A. Tihomirov and I. I. Loktev *Modelirovanie tehnologicheskikh processov izgotovleniya promyshlennoj produkcii*. Tomsk: izd-vo GTPU, 2006. [in Russian]
7. V. S. Mihajlov *Teoriya upravleniya*. Kiev: Vysshaja shkola, 1988. [in Russian]
8. Ju. P. Korobeckij *Imitacionnye modeli v gibkikh sistemah*. Lugansk: izd-vo VNU im. Dalja, 2003. [in Russian]
9. O.M. Pihnastyi “ The task of optimal operational control of macroparameters of a production system with mass production” *Доклады Национальной академии наук Украины*, vol. 5, p.p. 79–85, 2006. [in Russian]<https://doi.org/10.13140/RG.2.2.29852.28802>
10. L. Tiacci “Simultaneous balancing and buffer allocation decisions for the design of mixed-model assembly lines with parallel workstations and stochastic task times.” *International Journal of Production Economic*, vol.162, p.p. 201–215, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2015.01.022>
11. M. Kück, E. Broda, M. Freitag, T. Hildebrandt and E. Frazzon. “Towards adaptive simulation-based optimization to select individual dispatching rules for production” *Winter Simulation Conference (WSC)*. Las Vegas, NV, USA, 2017, p.p. 3852–3863. <https://doi.org/10.1109/WSC.2017.8248096>
12. M. Falco, N. Mastrandrea, W. Mansoor and L. Rarità “Situation Awareness and Environmental Factors: The EVO Oil Production” *New Trends in Emerging Complex Real Life Problems*. Springer, p.p. 209–217. 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00473-6_23
13. V. A. Dyhta and O. N. Samsonjuk *Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozhenijami*. Moskva: Fizmatlit, 2000. [in Russian]
14. D. D. Ivanenko and A. A. Sokolov *Klassicheskaja teoriya polja (novye problemy)*. Moskva: gos. izd-vo tehniko-teoret lit. 1951. [in Russian]

Ходусов Валерій Дмитрович - доктор фізико-математичних наук, професор; Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків-22, площа Свободи, 4, 61022; e-mail: vdkhodusov@karazin.ua; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1129-3462>.

Khodusov Valery Dmitrievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Kharkiv National University named after V.N. Karazin, Kharkov-22, Svobody Square, 4, 61022; e-mail: vdkhodusov@karazin.ua; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1129-3462>.

Ходусов Валерій Дмитрієвич - доктор фізико-математических наук, професор; Харьковський національний університет імені В.Н. Каразін, Харьков-22, площа Свободи, 4, 61022; e-mail: vdkhodusov@karazin.ua; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1129-3462>.

Пігнастій Олег Михайлович - доктор технічних наук, професор; Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут" Пушкінська 79-2, 1 поверх, Харків, Україна, 61102; e-mail: pihnastyi@gmail.com; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5424-9843>.

Pihnastyi Oleh Mikhailovich– Doctor of Engineering Science, Professor; National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute" Pushkinskaya 79-2, 1st Floor, Kharkov, Ukraine, 61102; e-mail: pihnastyi@gmail.com; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5424-9843>.

Пігнастій Олег Михайлович - доктор техніческих наук, професор; Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт" Пушкинская 79-2, 1 этаж, Харьков, Украина, 61102; e-mail: pihnastyi@gmail.com; ORCID <http://orcid.org/0000-0002-5424-9843>.

CONTENTS

▪ V.O. Baranets, N.M. Kizilova, O.M. Datsok	4
Hardware-software complex for the study of sedimentation processes in technical and biological suspensions of aggregating micro- and nanoparticles	
▪ D.G. Boguto, K.K. Kadomskiy, P.K. Nikolyyuk, A.I. Pidgurska	12
Algorithm of Intelligent Urban Traffic	
▪ I.V. Garyachevskaya, V.V. Ivaniushchenko, D.O. Protektor	26
Payback calculation system of introduction network solar power plants in private households	
▪ V.I. Gnitko, K.G. Degtyarev, Y.S. Kononenko, A.M. Tonkonozhenko	38
Comparison of methods of finite and boundary elements in the problems of oscillations of a composite shell of revolution with a liquid	
▪ D. Holovko, L. Vasylieva	46
Application of Agile methodologies for software development	
▪ O.P. Demyanchenko, E.B. Kobilskaya, V.P. Lyashenko	58
Mathematical model of heat transfer in roll caliber	
▪ D.V. Kriutchenko	68
Forced liquid vibrations in prismatic tanks under vertical and horizontal loads	
▪ E.N. Solovyova, N.N. Kizilova	77
A system for monitoring the state of human cardiovascular system based on the most complete mathematical model of vascular bed	
▪ V.D. Khodusov, O.M. Pihnastyi	84
The statement of the task of optimal control of the production line using the additional time of equipment operation	
▪ CONTENTS	93

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 42

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О.О. Афанасьєва

Підписано до друку 30.09.2019 р.
Формат 70×108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. – 9,3.
Обл.– вид. арк. – 10,8.
Наклад 50 пр. Зам. №
Безкоштовно

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна.
Видавництво

Надруковано: ХНУ імені В. Н. Каразіна
61022 м. Харків, майдан Свободи, 4,
тел.: 362-01-52
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09