

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Серія

«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 41

Серія заснована 2003 р.

BULLETIN

of V.N. Karazin Kharkiv National University

Series

«Mathematical Modeling.
Information Technology.
Automated Control Systems»

Issue 41

First published in 2003

Харків
2019

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних та технічних наук (наказ МОН України № 1328 від 21.12.2015 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 5 від 22.04.2019 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),

д.ф.-м.н., академік НАН України, проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора), д.т.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т. (заст. гол. редактора), д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Споров О.Є. (відповідальний секретар), к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Замула О. А., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ імені Б.І. Веркіна НАН України

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Рассомахін С. Г., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В. Н. Каразіна

Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Толстолузька О. Г. д.т.н., с.н.с., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Угрюмов М. Л., д.т.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"

Стрельнікова О.О., д.т.н., проф. Ін-т проблем машинобудування НАН України

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра прикладної інформатики, університет імені Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Professor of Technical Informatics and Computer Systems, Institute of Informatics, Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of computer science, Dep. of C. S., University of Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

ЗМІСТ

▪ Х.О. Афанасьєва, О.Ю. Мороз, О.Г. Толстолузька	4
Комп'ютерна модель урахування наукової діяльності працівників системи освіти	
▪ В. І. Гнітько, К. Г. Дегтярьов, М. Л. Мироненко	20
Метод дискретних особливостей у задачах коливань заповнювача паливних баків при перевантаженнях та в умовах низької гравітації	
▪ S.V. Zhuchenko	27
Numerical simulation of electromagnetic wave diffraction on a finite number of slits in a flat screen	
▪ Н.Н. Кизилова, Е.Н. Солов'єва	39
Комп'ютерне моделювання в біомеханіці кровообігу	
▪ A.I. Malykhina, D.O. Merkulov, O.V. Postnyi, N.V. Smetankina	46
Stationary problem of heat conductivity for complex-shape multilayer plates	
▪ К.А. Nagorny, I.O. Martinkus, M.V. Tkachuk	55
The impact of usage of post object-oriented technologies on defect reduction in software maintenance	
▪ Ю.В. Науменко, Л.В. Розова, Е.А. Стрельникова, О.А. Усатова	65
Метод сингулярних інтегральних рівнянь в задачах коливань жидкості в коаксіальних оболочках	
▪ В.А. Павлюченко, Е.А. Стрельникова, С.В. Филипковский	73
Метод оптимизации упруго-демпферных подвесок	
▪ V. V. Romanuke	80
A faster way to approximately schedule equally divided jobs with preemptions on a single machine by subsequent job importance growth	
▪ CONTENTS	88

УДК 004.9

Комп'ютерна модель урахування наукової діяльності працівників системи освіти

Х. О. Афанасьєва, О. Ю. Мороз, О. Г. Толстолюзька

*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: krisaaf98@gmail.com*

Робота присвячена огляду та аналізу ресурсів наукової інформації, дослідження можливостей розробки додаткових інформаційних масивів на базі існуючих джерел наукової та наукометричної інформації. В рамках роботи запропоновані підходи зберігання наукометричної інформації, способи отримання даних, що дозволить оптимізувати час роботи з інформацією і залучати менше ресурсів для реалізації робіт з пошуку наукової інформації і подальшої її обробки.

Результатом роботи є комп'ютерна модель, що надає можливість зберігання наукової інформації в базі даних, а також використання різного функціоналу, як на правах адміністратора бази даних, так і на правах користувача, за допомогою розробленого клієнта C++. Модель працює з інформаційними масивами, які формуються на базі ресурсів і містять бібліометричну і наукометричну інформацію і можуть виступати параметрами, які здатні впливати на прийняття рішень та розширення спектра можливої співпраці вчених.

Ключові слова: комп'ютерна модель, клієнт, роль, реляційна база даних, інформація, ресурс, пошук, оптимізація, інформаційний масив, зберігання, предметна область, індекс Хірша, Scopus, Web of Science, наукометричних показники, база даних, MySQL, запит, модуль, архітектура, C++.

Работа посвящена обзору и анализу ресурсов научной информации, исследованию возможностей разработки дополнительных информационных массивов на базе существующих источников научной и наукометрической информации. В рамках работы предложены подходы хранения наукометрической информации, способы получения данных, что позволит оптимизировать время работы с информацией и привлекать меньше ресурсов для реализации работ по поиску научной информации и последующей ее обработки.

Результатом работы является компьютерная модель, предоставляющая возможность хранения научной информации в базе данных, а также использование различного функционала как на правах администратора базы данных, так и на правах пользователя, посредством разработанного клиента C++. Модель работает с информационными массивами, которые формируются на базе ресурсов и содержат библиометрическую и наукометрическую информацию и могут выступать параметрами, которые способны влиять на принятие решений и расширения спектра возможного сотрудничества ученых.

Ключевые слова: компьютерная модель, клиент, роль, реляционная база данных, информация, ресурс, поиск, оптимизация, информационный массив, хранение, предметная область, индекс Хирша, Scopus, Web of Science, наукометрические показатели, база данных, MySQL, запрос, модуль, архитектура, C++.

The work is devoted to the review and analysis of resources of scientific information, the study of the possibilities of developing additional information arrays based on existing sources of scientific and scientometric information. As part of the work, proposed approaches for storing scientometric information, methods for obtaining data which will optimize the time of working with information and require less resources for the implementation of the search for scientific information and its subsequent processing.

The result of the work is a computer model that provides the ability to store scientific information in the database, as well as the use of various functions as a database administrator and user rights through the developed C++ client. The proposed model of accounting for scientific activity has the following functional capabilities of software modules: introduction of new and removal of outdated information into a database; submitting information based on some criteria. The architecture of a computer model consists of such software modules as the user role definition module, the database administrator module, and the user module. The model works with information arrays, which are formed on the basis of resources and contain bibliometric and scientometric information and can act as parameters that be able to influence decision making and expand the range of possible cooperation of scientists.

The application of the developed computer model allows organizing a flexible search for scientific information in the field of education.

Keywords: computer model, client, role, relational database, information, resource, search, optimization, information array, storage, subject area, Hirsh index, Scopus, Web of Science, science metrics, database, MySQL, query, module, architecture, C++.

1 Вступ

Бурхливий розвиток інформаційних технологій, їх впровадження в усі сфери людського життя в останні роки привели до різкого розширення поняття оброблюваних в комп'ютерних системах знань. Якщо на початку минулого століття загальна сума людських знань подвоювалася приблизно кожні п'ятдесят років, то в наступні роки - кожні п'ять років. Саме тому постає питання створення методів, які допоможуть раціонально організувати процес збереження та оперування інформацією.

З кожним роком наукова інформація зростає в своїх обсягах, стає все більше дослідів і публікацій за різними предметними напрямками, в наслідок цього збільшується потреба обліку наукометричної інформації.

Розвиток і використання наукометричних знань сучасними цифровими технологіями дозволить сформуванню всебічний погляд на аналіз публікаційної активності та можливість подальшого використання отриманих даних для прийняття важливих управлінських рішень.

Метою роботи є створення комп'ютерної моделі для оптимізації інформації про наукову діяльність працівників системи освіти в рамках факультету комп'ютерних наук.

2 Архітектура комп'ютерної моделі

Основні цільові групи:

- адміністратор БД;
- користувачі, які цікавляться науковою діяльністю.

Виходячи з групи, до якої відноситься користувач, він володіє різним функціоналом по роботі з ресурсом (див. Табл. 2.1).

Таблиця 2.1 – Можливості користувачів ресурсу.

Функціонал	Користувач	Адміністратор
Перегляд інформації за різними пошуковими критеріями	+	+
Додавати/Видаляти інформацію авторів	–	+
Додавати/Видаляти інформацію публікацій	–	+
Додавати/Видаляти інформацію журналу	–	+

Архітектура комп'ютерної моделі складається з таких програмних модулів, як модуль визначення ролі користувача, модуль адміністратора бази даних та модуль користувача.

Модуль визначення ролі користувача ідентифікує адміністратора та надає можливість внесення змін до бази даних, чи відхиляє запит і дозволяє лише перегляд інформації за вибраними параметрами. Модуль адміністратора бази даних реалізує функції внесення та видалення інформації з бази даних. Модуль користувача дозволяє отримати інформацію за різними критеріями пошуку.

2.1 Модуль визначення ролі

Головна сторінка містить елементи з якими є можливість взаємодіяти, а саме:

- Поля для авторизації;
- кнопка «Login»;
- кнопка «Пошук в БД».

Коли користувач вносить коректні дані, які включені в таблицю адміністраторів в базі даних, для авторизації та натискає кнопку «Login» з'являється вікно підтвердження (див. рис.) та відкривається сторінка «Кабінет адміністратора» – модуль адміністратора (див. рис.4.1). В випадку коли дані некоректні з'являється вікно помилки (див. рис.3.3) .

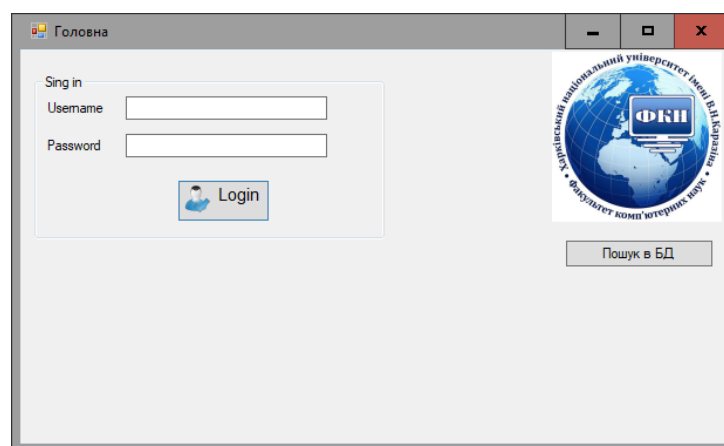


Рис.2.1.1 Головна сторінка

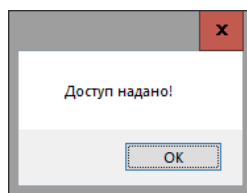


Рис.2.1.2 Вікно коректної авторизації

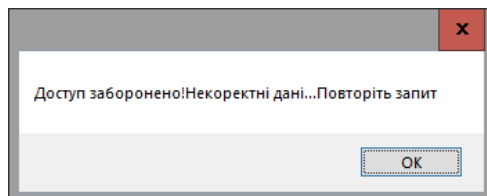


Рис.2.1.3 Вікно помилки авторизації

Натискаючи на кнопку «Пошук в БД» користувач опиняється на сторінці модуля користувача(див. рис.5.1).

2.2 Модуль адміністратора БД

Сторінка «Кабінет адміністратора» містить:

- Вкладки «Додати» та «Видалити»;
- Панель вибору «Додання інформації» на вкладці «Додати»;
- Панель вибору «Видалення інформації» на вкладці «Видалити»;
- Кнопку «На головну» на вкладці «Додати»;
- Кнопку «Зберегти» на вкладці «Додати»;
- Поля для внесення та вибору даних на вкладці «Додати»;
- Кнопка «На головну» на вкладці «Видалити»;
- Поля для внесення та вибору даних на вкладці «Видалити»;
- Кнопка «Видалити» на вкладці «Видалити».

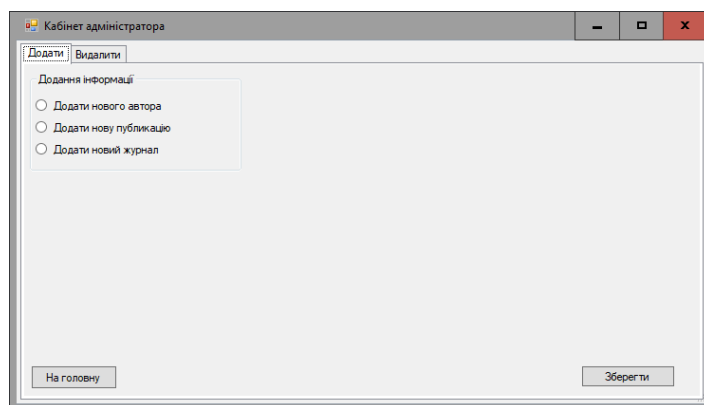


Рис.2.2.1 Початкова сторінка «Кабинет адміністратора»

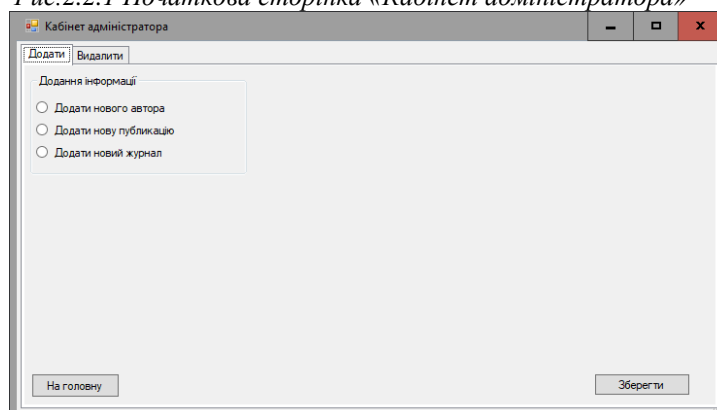


Рис. 2.2.2 Сторінка «Кабинет адміністратора» панель «Додати»

Панель вибору «Додання інформації» на вкладці «Додати» має три варіанти вибору «Додати нового автора», «Додати нову публікацію» та «Додати новий журнал».

Якщо користувач не зробивши вибір натискає кнопку «Зберегти» з'являється вікно попередження «Оберіть дію» (див. рис)

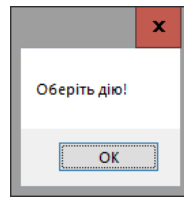


Рис.2.2.3 Вікно попередження «Оберіть дію»

При виборі першого варіанту «Додати нового автора» на сторінці «Кабінет адміністратора» з'являються відповідні поля внесення та вибору даних(див. рис). Поля вибору транслюють з бази даних відповідну інформацію (див. рис)

Після внесення даних в поля вводу та вибору натиснувши кнопку «Зберегти» запис буде додано в базу даних та користувач отримає повідомлення про успішне додання запису (див. рис.).

Рис.2.2.4 Сторінка вибору «Додати нового автора»

Рис.2.2.5 Поле вибору даних «Університет» на панелі «Додати»

Рис.2.2.6 Поле вибору даних «Вчене звання» на панелі «Додати»

Рис.2.2.7 Внесення нового автора

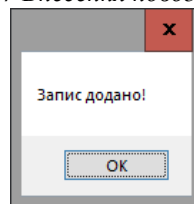


Рис. 2.2.8 Вікно успішного додання нового запису в БД

При виборі другого варіанту «Додати нову публікацію» на сторінці «Кабінет адміністратора» з'являються відповідні поля внесення та вибору даних (див. рис). Поля вибору транслюють з бази даних відповідну інформацію (див. рис)

Панель вибору наукометричної бази має три варіанти: «Scopus», «WoS» та «Null». В залежності від цього вибору інформація буде внесена до відповідної таблиці та з різними значеннями відповідних атрибутів.

Рис.2.2.9 Сторінка вибору «Додати нову публікацію»

Якщо наукометрична база не обрана з'явиться попередження (див. рис.)

Після внесення даних в поля вводу та вибору натиснувши кнопку «Зберегти» запис буде додано в базу даних та користувач отримає повідомлення про успішне додання запису (див. рис.).

Рис. 2.2.10 Поле вибору даних «Автор» на панелі «Додати»

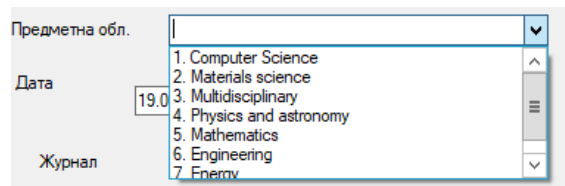


Рис. 2.2.11 Поле вибору даних «Предметна область» на панелі «Додати»

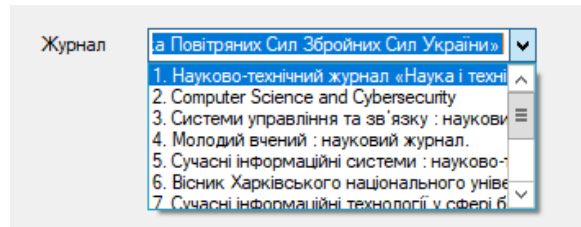


Рис. 2.2.12 Поле вибору даних «Журнал» на панелі «Додати» при виборі наукометричної бази «Scopus» або «WoS»

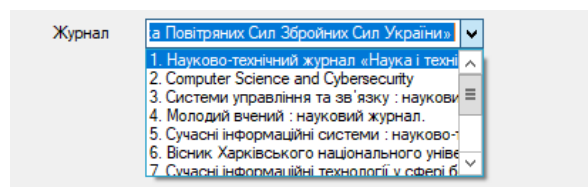


Рис. 2.2.13 Поле вибору даних «Журнал» на панелі «Додати» для локальних журналів

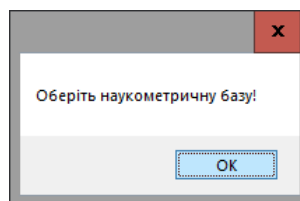


Рис. 2.2.14 Вікно попередження вибору наукометричної бази

Якщо користувач обирає третій варіант «Додати новий журнал» на сторінці «Кабінет адміністратора» з'являються відповідні поля внесення даних (див. рис).

Після внесення даних в поля вводу натиснувши кнопку «Зберегти» запис буде додано в базу даних та користувач отримає повідомлення про успішне додання запису (див. рис.).

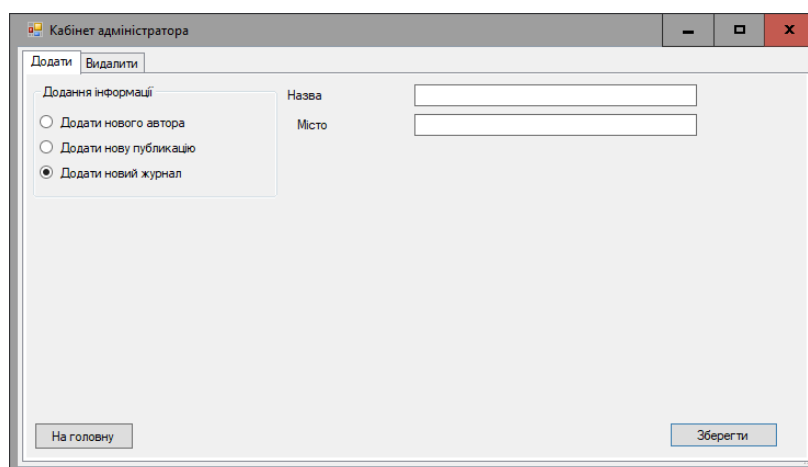


Рис. 2.2.15 Сторінка вибору «Додати новий журнал»

Панель вибору «Видалення інформації» на вкладці «Видалити» має три варіанти вибору «Видалити автора», «Видалити публікацію» та «Видалити журнал».

Якщо користувач не зробивши вибір натискає кнопку «зберегти» з'являється вікно попередження «Оберіть дію» (див. рис)

При виборі першого варіанту «Видалити автора» на сторінці «Кабінет адміністратора» з'являється відповідне поле вибору «Автор» (див. рис). Інформація поля транслюється з бази даних (див. рис)

Після вибору даних в полі натиснувши кнопку «Видалити» запис буде видалено з БД та користувач отримає повідомлення про успішне видалення запису (див. рис.).

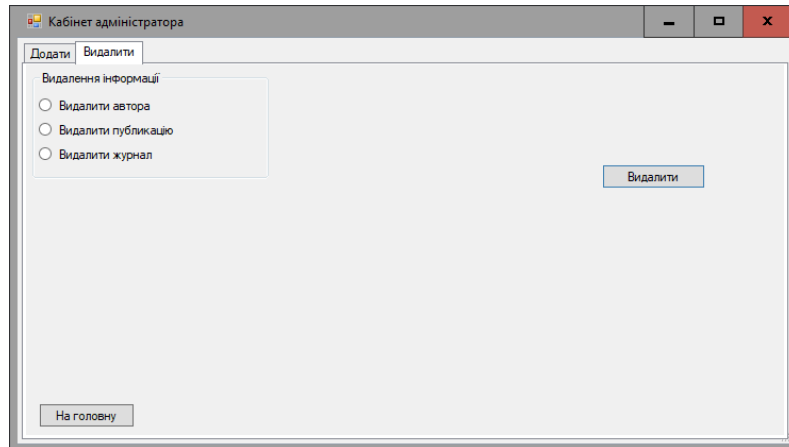


Рис. 2.2.16 Сторінка «Кабінет адміністратора» на панелі «Видалити»

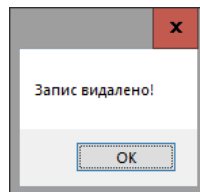


Рис. 2.2.17 Повідомлення про успішне видалення запису

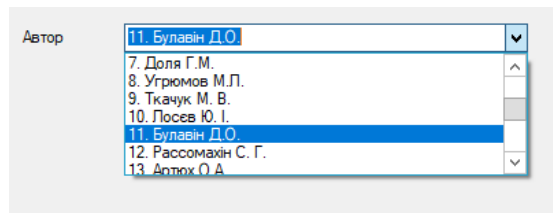


Рис.2.2.18 Поле вибору «Автор» на панелі «Видалити»

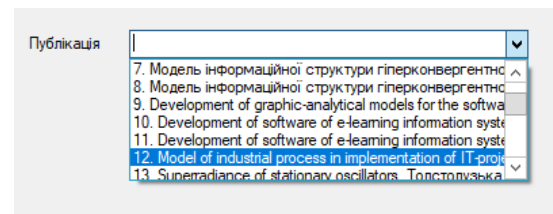


Рис. 2.2.19 Поле вибору «Публікація» на панелі «Видалити»

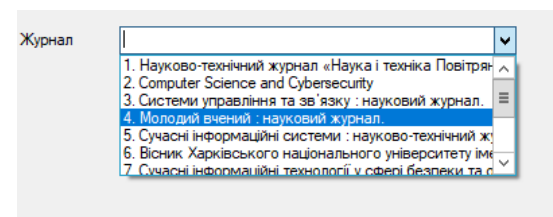


Рис. 2.2.20 Поле вибору «Журнал» на панелі «Видалити»

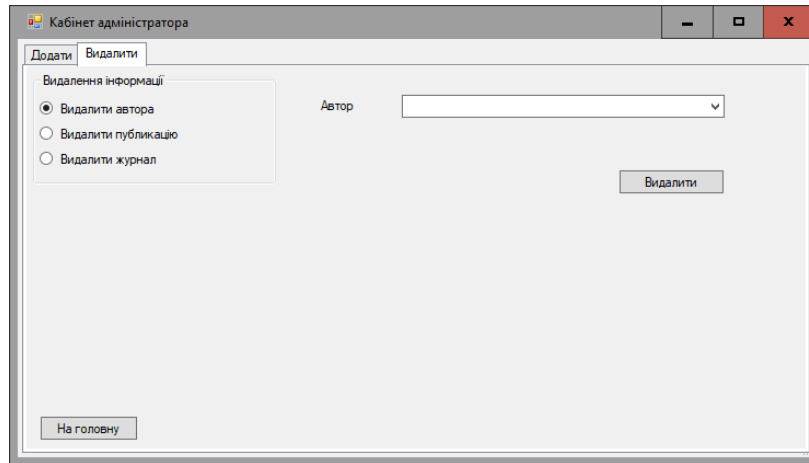


Рис.2.20.21 Сторінка вибору «Видалити автора»

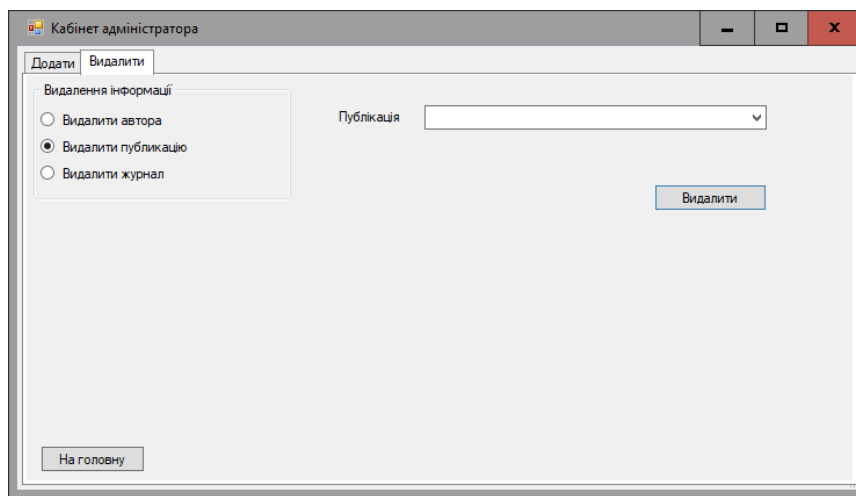


Рис. 2.2.22 Сторінка вибору «Видалити публікацію»

При виборі адміністратором БД другого варіанту «Видалити публікацію» на сторінці «Кабінет адміністратора» з'являються відповідне поле вибору «Публікація» (див. рис) інформація в яке транслюється з таблиці БД.

Після вибору даних в полі натиснувши кнопку «Видалити» запис буде видалено з БД та користувач отримає повідомлення про успішне видалення запису (див. рис.).

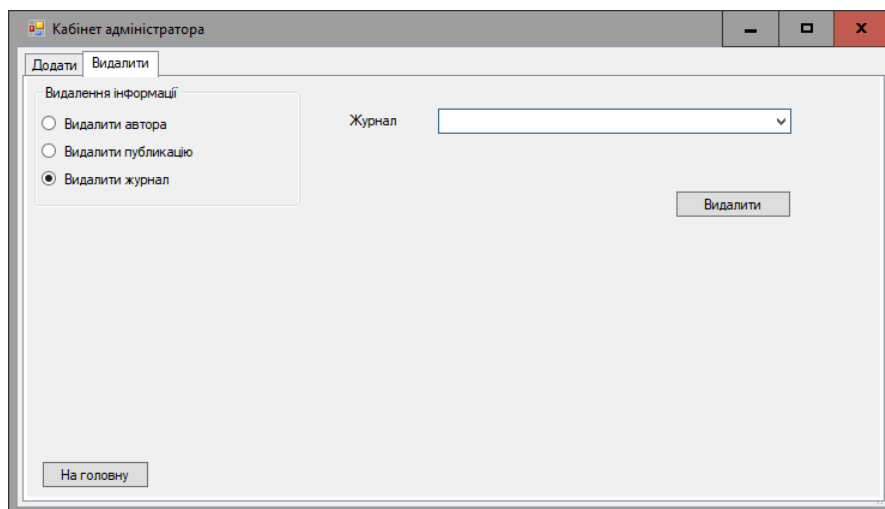


Рис. 2.2.23 Сторінка вибору «Видалити журнал»

Якщо адміністратор БД обирає третій варіант «Видалити журнал» на сторінці «Кабінет адміністратора» з'являються відповідне поле вибору даних «Журнал» (див. рис).

Після внесення даних в поле натиснувши кнопку «Видалити» запис буде видалено з БД та користувач отримає повідомлення про успішне видалення запису (див. рис.).

Якщо адміністратор натисне кнопку «На головну» на будь-якій з панелей сторінки «Кабінет адміністратора» він опиниться на сторінці «Головна» (див. рис.).

2.3 Модуль користувача

Сторінка «Пошук» містить:

- Панель вибору «Виберіть запит»;
- поле відображення результатів запитів;
- кнопку «Пошук»;
- кнопку «На головну»;
- поля для вибору пошукових даних.



Рис.2.3.1 Сторінка «Пошук»

Панель вибору «Виберіть запит» на сторінці «Пошук» має чотири варіанти вибору «Публікації автора», «Публікації автора за вибраний рік», «Публікація за вибраний рік» та «Наукометричні показники ФКН».

Якщо користувач не зробивши вибір натискає кнопку «Пошук» з'являється вікно попередження «Оберіть дію!» (див. рис)

При виборі першого варіанту «Публікації автора» на сторінці «Пошук» з'являється відповідне поле вибору «Автор» (див. рис). Інформація поля транслюється з відповідної таблиці бази даних (див. рис)



Рис.2.3.2 Сторінка вибору «Публікації автора»

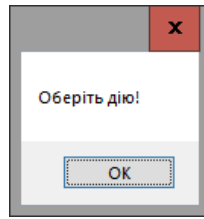


Рис. 2.3.3 Попередження «Оберіть дію!»

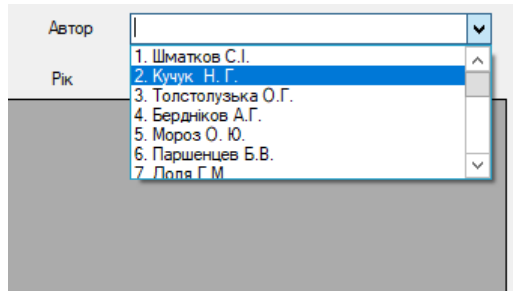


Рис. 2.3.4 Поле вибору «Автор» для сторінки «Пошук»

Після вибору даних та натиснутої кнопки «Пошук» з поля «Автор» зчитується інформація та до БД відправляється наступний SQL-запит:

```
SELECT (select fkn_info.info_author.Fio_ua from fkn_info.info_author where
idinfo_author=fkn_info.publications.id_aut) as Автор,
fkn_info.publications.Pub_name as '+'Назва публікації'+',
fkn_info.publications.flag_mag as '+'Наукометрична база'+',
fkn_info.publications.requisities as Реквізити,
(select fkn_info.subject_area.Subject from fkn_info.subject_area where
idSubject_area = fkn_info.publications.SJA)as '+'Наукова область'+',
year(fkn_info.publications.year) as '+'Рік видання'+',
(if (((fkn_info.publications.flag_mag = '+'scopus+') or
(fkn_info.publications.flag_mag = '+'wos+')), (select
fkn_info.magazine_in_db.name_m_db from fkn_info.magazine_in_db where
fkn_info.magazine_in_db.idMagazine_in_db = fkn_info.publications.magazine_in),
(select fkn_info.magazines.Name_mag from fkn_info.magazines where
fkn_info.magazines.idMagazines = fkn_info.publications.magazine_out))) as Журнал
FROM fkn_info.publications WHERE id_aut = '' + authCBIIn + '' ;
```

Далі в область відображення таблиць транслюється результат виконання запиту(див. рис.)

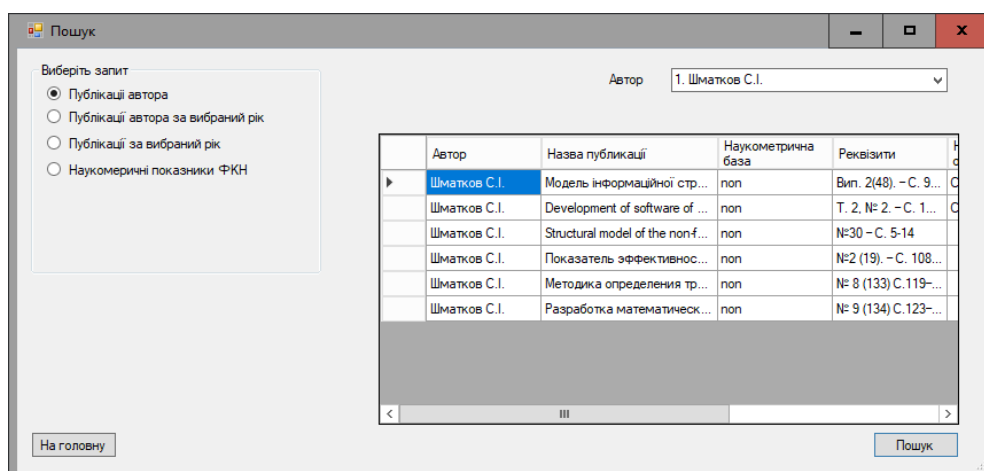


Рис. 2.3.5 Результат запиту «Публікації автора»

Обираючи другий варіант «Публікації автора за вибраний рік» на сторінці «Пошук» з'являється відповідні поля вибору «Автор» та «Рік» (див. рис). Інформація поля вибору «Автор» транслюється з відповідної таблиці БД (див. рис)

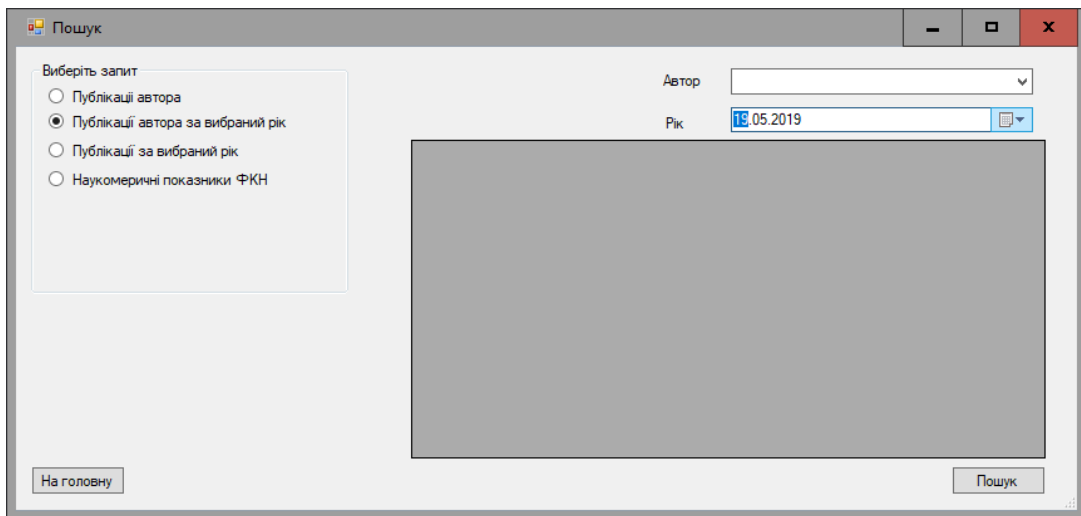


Рис. 2.3.6 Сторінка вибору «Публікації автора за вибраний рік»

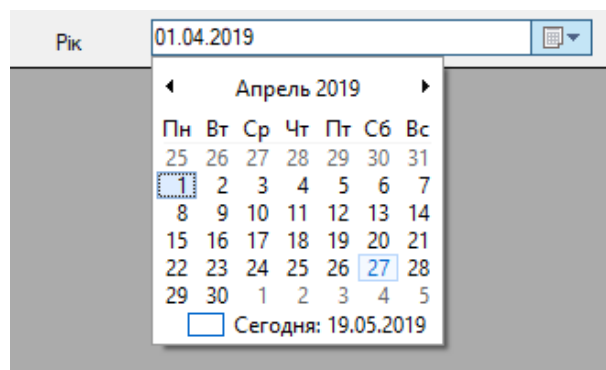


Рис. 2.3.7 Поле вибору «Рік» для сторінки «Пошук»

Після вибору даних та натиснутої кнопки «Пошук» з полів «Автор» та «Рік» зчитується інформація та до БД відправляється наступний SQL-запит:

```

SELECT          (select          fkn_info.info_author.Fio_ua          from
fkn_info.info_author          where
idinfo_author=fkn_info.publications.id_aut) as Автор,
fkn_info.publications.Pub_name as '"+"Назва публікації"+"',
year(fkn_info.publications.year) as Рік,
fkn_info.publications.flag_mag as '"+"Наукометрична база"+"',
fkn_info.publications.requisities as Реквізити,
( select fkn_info.subject_area.Subject from fkn_info.subject_area
where idSubject_area=fkn_info.publications.SJA)as '"+"Наукова
область"+"',
(if(((fkn_info.publications.flag_mag          ='"+"scopus"+"')          or
(fkn_info.publications.flag_mag          ='"+"wos"+"')), (select
fkn_info.magazine_in_db.name_m_db          from          fkn_info.magazine_in_db
where
fkn_info.magazine_in_db.idMagazine_in_db=fkn_info.publications.ma
gazine_in), (select          fkn_info.magazines.Name_mag          from
fkn_info.magazines          where fkn_info.magazines.idMagazines=
fkn_info.publications.magazine_out))) as Журнал

```

```

FROM          fkn_info.publications
year(fkn_info.publications.year)=
'" + DateforDB + "' and id_aut='"' + authCBIn + "'";
WHERE

```

Далі в область відображення таблиць транслюється результат виконання запиту(див. рис.)

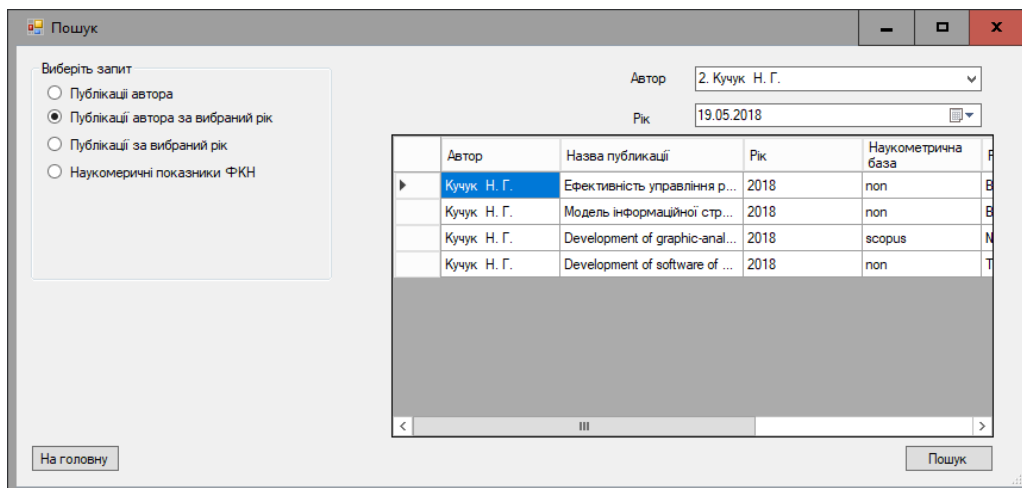


Рис. 2.3.8 Результат запиту «Публікації автора за вибраний рік»

При третьому варіанті «Публікації за вибраний рік» на сторінці «Пошук» з'являється відповідне поле вибору «Рік» (див. рис)



Рис. 2.3.9 Сторінка вибору «Публікації за вибраний рік»

Після вибору даних та натиснутої кнопки «Пошук» з поля «Рік» зчитується інформація та до БД відправляється наступний SQL-запит:

```

SELECT          (select          fkn_info.info_author.Fio_ua          from
fkn_info.info_author          where
idinfo_author=fkn_info.publications.id_aut)          as          Автор,
fkn_info.publications.Pub_name as '"' + "Назва публікації" + "',
year(fkn_info.publications.year)          as          Рік,
fkn_info.publications.flag_mag as '"' + "Наукометрична база" +
"',
fkn_info.publications.requisites as Реквізити,
(select fkn_info.subject_area.Subject from fkn_info.subject_area
where idSubject_area=fkn_info.publications.SJA)as '"' + "Наукова
область" + "',

```

```
(if(((fkn_info.publications.flag_mag ='" + "scopus" + "') or
(fkn_info.publications.flag_mag ='" + "wos" + "')), (select
fkn_info.magazine_in_db.name_m_db from fkn_info.magazine_in_db
where
fkn_info.magazine_in_db.idMagazine_in_db=fkn_info.publications.m
agazine_in), (select
fkn_info.magazines.Name_mag from
fkn_info.magazines where fkn_info.magazines.idMagazines=
fkn_info.publications.magazine_out))) as Журнал
FROM fkn_info.publications WHERE
year(fkn_info.publications.year)='" + DateforDB + "' ;
```

Далі в область відображення таблиць транслюється результат виконання запиту(див. рис.)

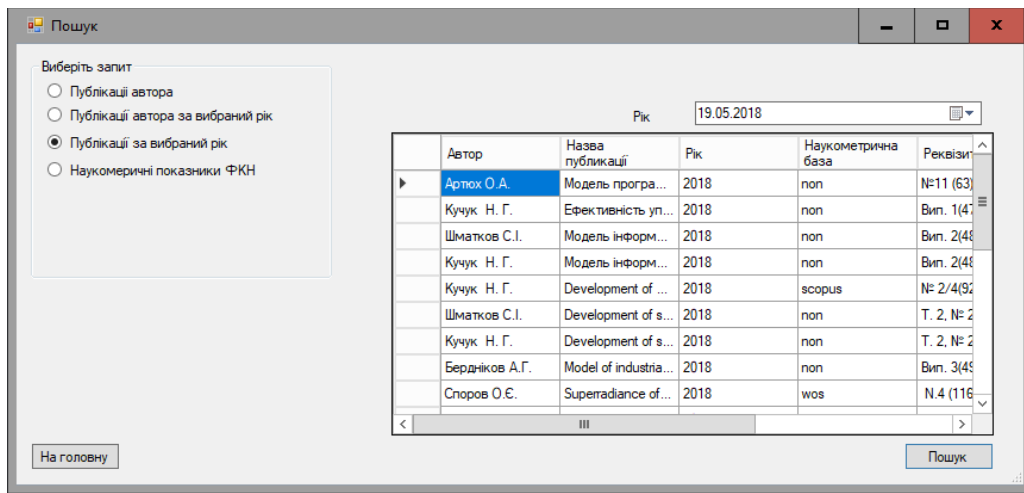


Рис. 2.3.10 Результат запиту «Публікації за вибраний рік»

При виборі четвертого варіанту «Наукометричні показники ФКН» на сторінці «Пошук» не з'являється поля вибору, достатньо натиснути кнопку «Пошук» після чого до БД відправляється наступний SQL-запит:

```
select fkn_info.info_author.faculty as Факультет ,
fkn_info.info_author.department as Кафедра,
fkn_info.info_author.Fio_ua as '"+"ПІБ науково-педагогічного
працівника"+"',
fkn_info.info_author.id_scopus as '"+"ID Scopus"+"',
(select
fkn_info.info_document_aut.h_Sc from
fkn_info.info_document_aut where
fkn_info.info_document_aut.id_auth_in
=fkn_info.info_author.idinfo_author )as '"+"Індекс Хірша
Scopus"+"',
fkn_info.info_author.id_wos as '"+"ID Web of Science"+"',
(select
fkn_info.info_document_aut.h_wos from
fkn_info.info_document_aut where
fkn_info.info_document_aut.id_auth_in
=fkn_info.info_author.idinfo_author )as '"+"Індекс Гірша Web of
Science"+"'
from fkn_info.info_author where fkn_info.info_author.faculty
=''"+"ФКН"+"';
```

Далі в область відображення таблиць транслюється результат виконання запиту(див. рис.)



Рис.2.3.11 Сторінка вибору «Наукометричні показники ФКН»

 A screenshot of the same web application window showing search results. The "Наукометричні показники ФКН" option is still selected. The results are displayed in a table with the following columns: "Факультет" (Faculty), "Кафедра" (Department), "ПІБ науково-педагогічного працівника" (Full name of the scientific-pedagogical worker), "ID Scopus", and "Індекс Scopus" (Scopus Index). The first row is highlighted in blue.

Факультет	Кафедра	ПІБ науково-педагогічного працівника	ID Scopus	Індекс Scopus
ФКН	ТПС	Доля Г.М.	8590318100	
ФКН	ШтаПЗ	Куклін В. М.	7005807989	
ФКН	МСТ	Лазурик В.Т.	6701689921	5
ФКН	ШтаПЗ	Лазурик В.М.	6701689920	
ФКН	БУС	Стервєєдов М.Г.	6602426638	
ФКН	ШтаПЗ	Споров О.Є.	6505934301	4
ФКН	ТПС	Кучук Н. Г.	57196006131	
ФКН	ТПС	Шматов С.І.		
ФКН	ТПС	Толстолуцька О...		

Рис.2.3.12 Результат запити «Наукометричні показники ФКН»

4 Висновки

Розвиток і використання наукометричних знань сучасними цифровими технологіями дозволить сформуванню всебічний погляд на аналіз публікаційної активності та можливість подальшого використання отриманих даних для прийняття важливих управлінських рішень.

Саме тому створення комп'ютерної моделі для оптимізації інформації про наукову діяльність працівників системи освіти є актуальним на сьогодні.

Для досягнення поставленої мети були вирішені наступні задачі:

- розглянуті та проаналізовані сучасні методи оптимізації інформації;
- розроблені UML-діаграми моделі урахування наукової діяльності;
- запропонована логіка збереження інформації в БД для подальшої гнучкої обробки знань;
- розроблена комп'ютерна реалізація моделі за допомогою обраних технологій розробки ПЗ;
- проведено тестування розробленого ПЗ;
- розроблені інструкції користувача;
- проведено аналіз якості та швидкодії випробувань розробленої моделі.

У роботі був проведений процес розробки і створення комп'ютерної моделі урахування наукової діяльності працівників системи освіти в межах факультету комп'ютерних наук.

Описана архітектура створеної комп'ютерної реалізації розроблюваної моделі, описані можливості модулів та представлені інструкції для користувача.

В результаті аналізу якості та швидкодії випробувань розробленої моделі можна зробити висновок, що розроблена модель однозначно поліпшує роботу з великими обсягами наукової інформації, дозволяє в лічені секунди отримати необхідну інформацію за обраними критеріями пошуку.

Модель має істотні переваги в порівнянні з ручною обробкою наукових даних. Дана програмна реалізація може бути використана в подальшому для створення звітів діяльності факультету, різноманітних статистичних документів, тощо.

В заключення можна сказати, що в результаті роботи з розробки і створення комп'ютерної моделі урахування наукової діяльності працівників системи освіти вдалося досягти поставлених цілей і вирішити заявлені завдання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Налимов В. В. Наукометрия. Изучение развития науки как информационного процесса / В. В. Налимов, З. М. Мульченко. М. : Наука, 1969. 192 с.
2. Руководство по наукометрии: индикаторы развития науки и технологии / М. А. Акоев [и др.] Екатеринбург : Изд-во Урал, ун-та, 2014. 250 с.
3. Bernai, J. D. *The Social Function of Science*. London: Faber&Faber, 1939. 482 p.
4. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных.: Пер. с англ. К. Дж. Дейт. 6-е изд. К.: Диалектика, 2008.
5. Грабер, М. Справочное руководство по SQL. Пер. с англ. М. Грабер. М: Издательство «ЛОРИ», 2007.
6. Минаси. М. Графический интерфейс пользователя: секреты проектирования. Москва: Мир, 2006.
7. Scott Meyers, *Effective Modern C++: 42 Specific Ways to Improve Your Use of C++11 and C++14* / O'Reilly Media, Incorporated; 1 edition (December 5, 2014). 334 p.
8. Стивен Прата. C++ Лекции и упражнения. 6-е издание: Вилямс, 2012. 1298 с.
9. Скот Маэрс. Эффективное использование C++. 55 верных советов улучшить структуру и код ваших программ. Третье издание. М.: ДМК-Прес, 2006. 300с.
10. Гамма, Р.Хелм, Р. Джонсон, Дж. Влссидес. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования. СПб: Питер, 2001. 368 с.
11. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms, Second Edition*. MIT Press and McGraw-Hill, 2001. ISBN 0-262-03293-7. Problem 2-2, pg.38.

REFERENCES

1. V.V. Nalimov, Z. M. Mulchenko, *Scientometrics. Studying the development of science as an information process*. V. V. Nalimov, M.: Science, 1969. 192 p. [in Russian]
2. M.A. Akoev [et al.], *A guide to scientometrics: indicators of the development of science and technology*. Ekaterinburg: Ural publishing house, University, 2014, 250 p. [in Russian]
3. Bernai, J. D., *The Social Function of Science*. London :Faber&Faber, 1939. - 482 p. 4. Дейт, К.
4. C.J. Date, *Introduction to database systems*. 6-e edition, K.: Dialectics, 2008.
5. M. Graber, *SQL Reference Guide. Per. from English*. M: LORI Publishing House, 2007. [in Russian]
6. M. Minasi, *Graphical User Interface: Design Secrets*. Moscow: World, 2006. [in Russian]
7. Scott Meyers, *Effective Modern C++: 42 Specific Ways to Improve Your Use of C++11 and C++14* / O'Reilly Media, Incorporated; 1 edition (December 5, 2014), 334 p.
8. Steven Pratta, *C ++ Lectures and Exercises*. 6th Edition, Vilyams, 2012, 1298 p. [in Russian]
9. Scott Maers, *Effective use of C ++*. 55 sure tips to improve the structure and code of your programs. the third edition,. M.: DMK-Pres, 2006, 300 p. [in Russian]
10. Gamma, R. Helm, R. Johnson, J. Vlissides, *Object-oriented design techniques. Design patterns*. Spb.Petersburg: Peter, 2001, 368 p. [in Russian]
11. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms, Second Edition*. MIT Press and McGraw-Hill, 2001. ISBN 0-262-03293-7. Problem 2-2, pg.38.

Афанасьєва Христина Олександрівна – студентка кафедри теоретичної та прикладної системотехніки; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків, майдан Свободи, 4, 61022; e-mail: krisaaf98@gmail.com; ORCID: 0000-0002-6262-4818.

Мороз Ольга Юрївна – старший викладач кафедри теоретичної та прикладної системотехніки; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків, майдан Свободи, 4, 61022; e-mail: o.moroz@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4920-4093.

Толстолузька Олена Геннадіївна – професор кафедри теоретичної та прикладної системотехніки, д. т. н., с. н. с.; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків, майдан Свободи, 4, 61022; e-mail: elena.tolstoluzka@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3085-2346.

Afanasiyeva Khrystyna - a student of the Department of Theoretical and Applied Systems Engineering; VN Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Freedom Square, 4, 61022; e-mail: krisaaf98@gmail.com; ORCID: 0000-0002-6262-4818.

Moroz Olga - Senior Lecturer in the Department of Theoretical and Applied Systems Engineering; VN Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Freedom Square, 4, 61022; e-mail: o.moroz@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4920-4093.

Tolstoluzka Olena - Professor of the Department of Theoretical and Applied Systems Engineering, Ph.D. N. with.; VN Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Freedom Square, 4, 61022; e-mail: elena.tolstoluzka@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3085-2346.

Афанасьева Кристина Александровна - студентка кафедри теоретической и прикладной системотехники; Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, г.. Харьков, площадь Свободы, 4, 61022; e-mail: krisaaf98@gmail.com; ORCID: 0000-0002-6262-4818.

Мороз Ольга Юрьевна - старший преподаватель кафедры теоретической и прикладной системотехники; Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, г.. Харьков, площадь Свободы, 4, 61022; e-mail: o.moroz@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4920-4093.

Толстолужская Елена Геннадьевна - профессор кафедры теоретической и прикладной системотехники, д. Т. Н., С. н. с. ; Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, г.. Харьков, площадь Свободы, 4, 61022; e-mail: elena.tolstoluzka@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3085-2346.

УДК 519.6

Метод дискретних особливостей у задачах коливань заповнювача паливних баків при перевантаженнях та в умовах низької гравітації

В.І. Гнітько, К.Г. Дегтярьов, М.Л. Мироненко

*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАНУ,
вул. Пожарського, 2/10., Харків, 61046, Україна*

Розглянуто задачі коливань рідини в паливних баках з різним рівнем заповнення в умовах дії перевантажень або низької гравітації. Припускається, що баки є жорсткими оболонками обертання. Розглядається ідеальна нестислива рідина. Її течія, індукована зовнішніми впливами, вважається потенційною. Сформульовано мішану крайову задачу та відповідні граничні умови на жорсткій поверхні оболонки та вільній поверхні рідини з урахуванням сил поверхневого натягу. Задачу визначення потенціалу швидкостей і функції, що характеризують рівень підйому вільної поверхні, зведено до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь. Числовий розв'язок цієї системи здійснюється методом дискретних особливостей.

Ключові слова: сингулярні інтегральні рівняння, ідеальна нестислива рідина, метод дискретних особливостей, плескання, низька гравітація, оболонка обертання.

Рассмотрены задачи колебаний жидкости в топливных баках с различным уровнем заполнения в условиях действия перегрузок или низкой гравитации. Предполагается, что баки представляют собой жесткие оболочки вращения. Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость. Ее течение предполагается потенциальным. Сформулирована смешанная краевая задача и соответствующие граничные условия на жестких смоченных поверхностях оболочки и на свободной поверхности жидкости с учетом сил поверхностного натяжения. Задача определения потенциала скоростей и функции, характеризующей уровень подъема свободной поверхности, сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Численное решение этой системы осуществляется методом дискретных особенностей.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, идеальная несжимаемая жидкость, метод дискретных особенностей, плескания, низкая гравитация, оболочка вращения.

The paper is about free vibration problems in fuel tanks with different levels of fillers both under overloads and low gravity. The fuel tanks are considered as rigid shells of revolution. The liquid, contained in the tanks, is supposed to be an ideal and incompressible one, and its flow, induced by external excitations, is irrotational. The problem of free axisymmetric harmonic oscillations of the fluid-filled rigid compound shell is considered. The mixed boundary value problem is formulated, and boundary conditions are received on the boundaries of the fluid domain. The non-penetration conditions is formulated on the rigid shell boundaries, and on the free liquid surface there are kinematic and dynamic boundary conditions. The flow fluctuations are described by using the velocity potential that for ideal and incompressible liquids satisfies the Laplace equation. For its solution, the integral representation is in use. But there are two unknown functions, the velocity potential and the function describing the shape and position of the free surface during time. The transformation of the boundary conditions leads to eliminating one of these unknown functions. So, the system of boundary singular integral equations is obtained to determine the velocity potential. The discrete singularity method and the boundary element method are applied for its numerical solution. The problem of determining own modes and frequencies is solved by using the techniques, where the surface tension effects are neglected. Then these modes are considered as basic functions to determine the modes and frequencies of the liquid taking into account the surface tension. Thus, in this work the method is developed which takes into account the surface tension effect on the frequency of fluid fluctuations in the rigid tank under low gravity conditions. The surface of the interaction between liquid media and gas is considered as a thin membrane, whose thickness is neglected. The fluid pressure on this surface is determined by the Laplace-Young equation. The developed method is useful for the investigation of free and forced fluid oscillations in rigid compound shells with arbitrary meridians.

Key words: singular integral equations, ideal incompressible liquid, discrete singularity method, sloshing, low gravity, shell of revolution.

1. Вступ

Проблема втрати стійкості космічних апаратів включає низку можливих причин та бере свій початок ще з тих етапів розвитку авіації, коли вперше спостерігали явища, які викликали нестійкість літального апарату. Було розроблено низку інженерних конструкторських рішень, які з розвитком ракетно-космічної техніки потребували перегляду. Розробка потужних ракетноносіїв призвела до появи нових форм нестійкості. Специфічні форми нестійкості ракетно-космічної техніки пов'язані з рухливістю палива, що частково заповнює паливні баки. Вирішення практичних та теоретичних задач щодо динамічної стійкості рідкопаливних ракетноносіїв дозволяє виділити фактори впливу та шляхи покращення динамічних характеристик ракетноносіїв з метою підвищення надійності ракетно-космічних систем.

2. Аналіз останніх досліджень та публікацій

Значна кількість робіт вітчизняних та зарубіжних вчених розглядає різні аспекти виникнення нестійкості, а також варіанти їх усунення. Дослідження спільних коливань твердих тіл і рідин, що їх заповнюють, були проведені радянським вченим Г.С. Нарімановим у 50-х роках минулого століття та започаткували низку оригінальних наукових результатів, які сприяли практичному вирішенню проблем стійкості ракетноносіїв. У книзі [1] автор надає модель пружних деформацій вигину корпусу ракетноносія без урахування коливань рідини. Вплив рухливості рідини з вільною поверхнею на стійкість вивчили Г.Н. Мікішев та Б.І. Рабінович [2] у своїх спільних дослідженнях. Також у книзі [3] значну увагу приділено впливу рухливості рідкого палива у баках та урахування пружності корпусу ракетноносія при визначенні динамічних характеристик ракет. Математичним моделям космічних літальних апаратів, як пружним конструкціям з рідиною, їх параметрам, методам визначення динамічних характеристик присвячено монографію Мікішева Г.Н. [4]. Книга Рабіновича Б.І. [5] основну увагу приділяє комплексу задач динаміки, а саме динамічній стійкості замкнутої системи корпус - рідина - автомат стабілізації - двигун з урахуванням рухливості палива та пружності корпусу. Велика кількість досліджень присвячена коливанням рідини в резервуарах за різних умов заповнення та рівня гравітації, [6] – [8] та ін. Праці американських вчених Абрамсона [9] та Ібрагіма [10] містять всебічний аналіз динамічної поведінки рідини в резервуарах, які рухаються, включаючи результати проведених аналітичних та експериментальних досліджень. Проте досить складно безпосередньо застосовувати обчислювальну тривимірну гідродинамічну модель при проектуванні резервуарів, оскільки проведення такого аналізу потребує значних витрат часу та зусиль. Тому актуальним є розроблення ефективних методів на основі числових алгоритмів, що використовують теорію потенціалу [11,12].

3. Постановка задачі

В даній роботі розглянуто задачу вільних осесиметричних гармонічних коливань рідини, що заповнює жорстку оболонку. Позначимо змочену поверхню оболонки як S_1 , а вільну поверхню – S_0 . Нехай R – радіус циліндричної частини, H – висота змоченої частини оболонки. Слід зазначити, що вільна поверхня S_0 є поверхнею розподілу між двома середовищами: рідина-газ. Її буде розглянуто як тонку мембрану, якщо враховується вплив поверхневого натягу.

Припустимо, що рідина є нестисливою, $\rho_l = \text{const}$; потік рідини безвихровий, тому існує потенціал швидкості $\mathbf{v} = \nabla\varphi$; на рідину впливає гравітаційне поле, тому єдиною зовнішньою силою, що діє на систему, є сила тяжіння $\mathbf{F} = \rho_l \mathbf{g}$. Значення гравітаційної сталої \mathbf{g} може змінюватись під час місії. Оскільки стінки оболонки є жорсткими, то швидкість \mathbf{v} має лише тангенціальну складову, тому:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0,$$

де \mathbf{n} – зовнішня одинична нормаль до поверхні. Динамічна гранична умова на вільній поверхні має такий вигляд:

$$\left. \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \right|_{S_0} + g \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_0} = 0.$$

Таким чином, отримано граничні та початкові умови для динамічної системи і сформульовано крайову задачу для рівняння Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0; \quad \left. \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \right|_{S_0} + g \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_0}. \quad (3.1)$$

Також врахуємо умову існування розв'язку

$$\iint_{S_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} dS_0 = 0$$

Тут невідома функція ζ описує форму вільної поверхні та її положення.

4. Математична модель. Вплив поверхневого натягу

Нехай σ – поверхневий натяг. За формулою Лапласа-Юнга [10] маємо

$$p_s = \sigma \kappa, \quad (4.1)$$

де κ – кривина поверхні. Вираз для κ можна лінеаризувати [10]:

$$\kappa = -\Delta_s \zeta, \quad (4.2)$$

де Δ_s – поверхневий оператор Лапласа. Таким чином, динамічна гранична умова на вільній поверхні приймає вигляд:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g \zeta - \frac{\sigma}{\rho_l} \Delta_s \zeta \Big|_{S_0} = 0. \quad (4.3)$$

Припустимо, що

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad (4.4)$$

Отримуємо таку крайову задачу для функції ψ :

$$\Delta \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\omega^2}{g} \psi \Big|_{S_0}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (4.5)$$

Ці співвідношення приводять до задачі на власні значення. Власні значення є частотами вільних коливань χ_k , а власні вектори $\varphi_k(\mathbf{r})$ – формами вільних коливань. Кожен з цих власних векторів є розв'язком системи (4.5), а потенціал швидкості, що описує задачу (3.1), приймає вигляд

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) \varphi_k(\mathbf{r}, t). \quad (4.6)$$

Вираз для функції $\zeta(\rho, t)$ знаходимо з рівняння (4.3) в (3.1) на вільній поверхні, тобто маємо

$$\zeta(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, \zeta_0(\rho))}{\partial \mathbf{n}}. \quad (4.7)$$

Крайова задача (4.5) зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь з використанням методу граничних елементів у його прямому формулюванні [13].

Задача визначення функцій $\varphi_k(\mathbf{r})$ і частот χ_k розв'язується за допомогою методів, описаних у [14,15], де не враховувалися ефекти поверхневого натягу.

5. Частоти коливань при врахуванні поверхневого натягу

Підставляючи ряди (4.6), (4.7) з N складовими для потенціалу φ і рівня підйому висоти вільної поверхні ζ в граничну умову (4.3), можна отримати

$$\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \varphi_k(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^N c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\sigma}{\rho_l} \sum_{k=1}^N c_k(t) \Delta_s \left(\frac{\partial \varphi_k(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) = 0. \quad (5.1)$$

Припустимо, $c_k(t) = a_k e^{i\omega t}$ і виконаємо скалярний добуток виразу (5.1) і функцій $\varphi_i(\mathbf{r})$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Отримуємо внаслідок ортогональності форм коливань

$$-\omega^2 a_i + \chi_i^2 a_i - \frac{\sigma}{\rho_l g} \sum_{k=1}^N a_k \chi_k^2 \frac{(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} = 0. \quad (5.2)$$

Це приводить до задачі власних значень у такому вигляді:

$$\mathbf{G} \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T, \quad \mathbf{G} = \left\{ \chi_k^2 \left[\delta_{ik} - \frac{\sigma}{\rho_l g} \frac{(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} \right] \right\}_{i,k=1}^N. \quad (5.3)$$

Для циліндричних і складених оболонок обертання поверхневий оператор Лапласа Δ_s в циліндричних координатах для осесиметричних задач має вигляд $\Delta_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$. Таким чином, використовуючи інтеграцію частинами в скалярному добутку $(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)$ і враховуючи, що $(\varphi_i)'_{\rho} \Big|_{\rho=R} = 0$, отримаємо $(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i) = -((\varphi_k)'_{\rho}, (\varphi_i)'_{\rho})$.

Для циліндричних оболонок аналітичні вирази для $\varphi_k(\mathbf{r})$ в осесиметричних випадках отримані через функції Бесселя першого роду [10], а саме:

$$\varphi_k(\rho, z) = J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\rho\right) \cosh\left(\frac{\mu_k}{R}z\right) \cosh^{-1}\left(\frac{\mu_k}{R}H\right), \quad (5.4)$$

де значення μ_k є коренями рівняння $J'_0(\rho) = 0$. Слід зазначити, що якщо μ – корінь рівняння $J'_0(\rho) = J_1(\rho) = 0$, то мають місце наступні формули:

$$\int_0^R \rho J_0^2\left(\frac{\mu}{R}\rho\right) d\rho = \frac{1}{2} J_0^2(\mu), \quad \int_0^R \rho J_1^2\left(\frac{\mu}{R}\rho\right) d\rho = \frac{1}{2} J_1^2(\mu), \quad 2J'_1(\mu) = J_0(\mu) - J_2(\mu),$$

$$2J_1(\mu) = \mu[J_0(\mu) + J_2(\mu)] = 0 \Rightarrow J_2(\mu) = -J_0(\mu). \quad (5.5)$$

Отже, можна отримати вираз $\frac{(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} = -\frac{\mu_k^2}{R^2} \delta_{ik}$ та наступну формулу для частот коливань з урахуванням поверхневого натягу:

$$\omega_k^2 = \chi_k^2 \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g R^2} \mu_k^2 \right).$$

Якщо ввести число Бонда $Bo = (\rho g R^2) / \sigma$, то результат врахування поверхневого натягу можна оцінити за формулою:

$$\omega_k^2 / \chi_k^2 = \left(1 + \mu_k^2 / Bo \right). \quad (5.6)$$

Формула (5.6) відповідає результатам, отриманим у [10]. Це свідчить, що запропонований підхід може бути застосований до оцінки частот коливань рідини в жорсткому резервуарі за умови низької гравітації.

6. Метод сингулярних інтегральних рівнянь

З використанням основного інтегрального співвідношення [13]

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS, \quad S = S_0 \cup S_1 \cup S_2, \quad (6.1)$$

де $|P-P_0|$ – декартова відстань між точками P_0 і P , що знаходяться на межі області S , зводимо задачу визначення власних форм $\varphi_k(\mathbf{r})$ та відповідних їм частот до системи інтегральних сингулярних рівнянь, як в [14, 15]

$$\begin{cases} 2\pi\varphi + \iint_{S_1 \cup S_2} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS - \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{|P-P_0|} dS + \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS = 0, \\ - \iint_{S_1 \cup S_2} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS - 2\pi\varphi_0 + \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{|P-P_0|} dS = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

Двовимірні інтеграли в (6.2) при цьому зводяться до одновимірних, які обчислюються вздовж контуру оболонки та радіусу вільної поверхні, при цьому застосовувався метод дискретних особливостей, запропонований Ю.В. Ганделем в [16].

7. Аналіз числових результатів

Розглянуто коливання рідини в жорсткій оболонці обертання, яка складається з циліндричної та сферичної частин (рис. 7.1а).

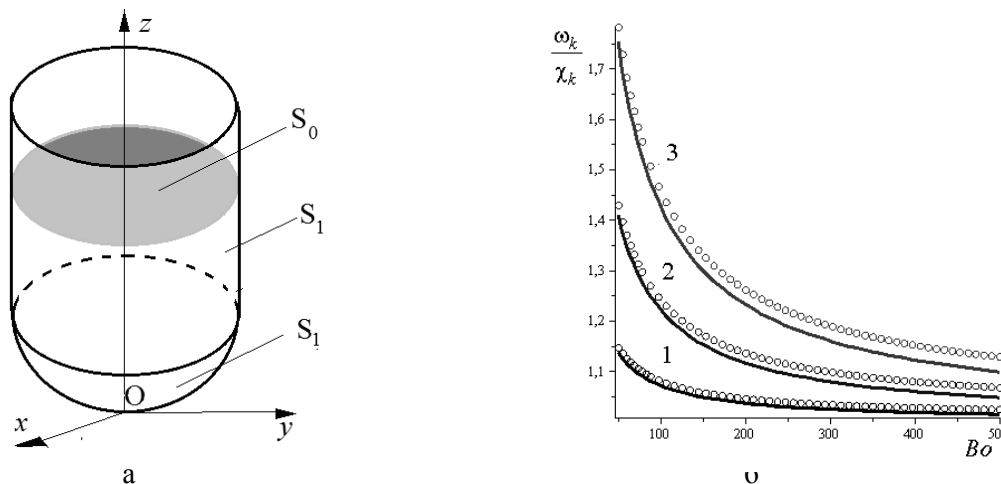


Рис. 7.1 Оболонка обертання, частково заповнена рідиною

Вважалось, що радіус оболонки дорівнював $R=1\text{м}$, а її рівень заповнення рідиною складав $H=2\text{м}$. Вільна поверхня у стані спокою займала положення $z=H$. Користуючись результатами, отриманими в [11, 14], було встановлено, що при застосуванні 180 граничних елементів вздовж меридіану оболонки та 60 граничних елементів вздовж радіусу вільної поверхні зі сталою апроксимацією густини (що відповідає ідеології методу дискретних особливостей) досягається точність $\varepsilon=10^{-3}$ у порівнянні з аналітичним розв'язком для циліндричної оболонки [10]. Тому саме таке число елементів було використано при числовому моделюванні коливань рідини в складеній оболонці обертання, (рис. 7.1б).

Бачимо, що ефект поверхневого натягу зменшується із зростанням числа Бонда, цей ефект є більш суттєвим на вищих частотах коливань.

У наведеному прикладі форма днища незначно впливає на значення частот.

8. Перспективи подальших досліджень

Передбачається провести дослідження впливу кривини вільної поверхні на частоти коливань заповнювача за умови низької гравітації.

9. Висновки

Таким чином, в даній роботі розроблено метод, що наближено враховує вплив поверхневого натягу на частоти коливань рідини в жорсткому резервуарі за умови низької гравітації. Поверхня взаємодії середовищ «рідкий заповнювач-газ» розглядається як тонка мембрана, товщиною якої можна знехтувати. Тиск рідини на цій поверхні визначається за допомогою рівняння Лапласа-Юнга. Слід також зауважити, що розроблений метод буде корисним для дослідження вільних і вимушених коливань рідини в жорстких оболонках обертання з довільним меридіаном.

ЛІТЕРАТУРА

1. Нариманов Г. С. Динамика деформируемых систем. М.: Военная арт. инж. академия им. Ф.Э. Дзержинского, 1958. 175 с.
2. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
3. Абгарян К. А., Калязин Э. Л., Мишин В. П. и др. под общ. ред. Мишина В. П. Динамика ракет: Учебник для студентов вузов / 2-е изд., перераб. и доп. М. : Машиностроение, 1990. 464 с.
4. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 248 с.
5. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975. 416 с.
6. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016. Vol. 1, no. 1. P.14-27.

7. Karagiozis K. N., Païdoussis M. P., Misra A. K. Transmural pressure effects on the stability of clamped cylindrical shells subjected to internal fluid flow: theory and experiments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2007. Vol. 42, Issue 1. P. 13-23.
8. Avramov K.V., Strel'nikova E A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow. *Nonlinear Dynamics*. 2012. N 70. P. 1335 – 1354.
9. Abramson, H.N., The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers, NASA SP- 106, Washington, D.C., 1966, updated by Dodge, F.T., Southwest Research Institute, 2000.
10. Ibrahim R. A., Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge University Press, 2005Bochkarev S.A., Matveyenko V.P. The dynamic behaviour of elastic coaxial cylindrical shells conveying fluid. *J. Appl. Math. Mech.*, 2010. Vol. 74, no. 4. P. 467–474.
11. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid: Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, *Transaction on Modeling and Simulation*. 2010. Vol.50. P. 203-211.
12. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM And FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018. 6(6). P. 976-988.
13. Brebbia C.A, Telles J.C.F & Wrobel, L.C. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
14. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, *Transaction on Modeling and Simulation*. 2011. Vol. 52. P. 285-296.
15. Gnitko V., Degtyariv K., Naumenko V., Strelnikova E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2017. Vol. 5(3). P. 317-328.
16. Yu. V. Gandel', T. S. Polyanskaya, Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating Problems, *Differ. Equ.* 2003. 39:9 P.1295–1307.

REFERENCES

1. Narimanov G. S. *Dynamics of deformable systems*. Moscow, Military artillery engineering academy named after F.E. Dzerzhinsky, 175 p. (Rus. ed.: Narimanov, G. S. Dinamika deformiruemyih sistem. Moscow, Voennaya art. inzh. akademiya im. F.E. Dzerzhinskogo, Russia, 1958, 175 p.). [in Russian]
2. Mikishev G.N., Rabinovich B.I. *Dynamics of a solid with cavities partially filled with liquid*. Moscow, Mechanical engineering, 1968, 464 p. (Rus. ed.: Mikishev G. N., Rabinovich B. I. Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkostyu. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 532 p.) [in Russian]
3. Abgaryan K. A., Kalyazin E. L., Mishin V. P. and others under the general editorship of Mishin V. P. *Rocket Dynamics*. Moscow, Mechanical Engineering, 1990, 464 p. (Rus. ed.: Mikishev G. N., Rabinovich B. I. Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkostyu. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 464 p.) [in Russian]
4. Mikishev G. N. *Experimental methods in the dynamics of spacecraft*. Moscow, Mechanical engineering, 1968, 248 p. (Rus. ed.: Mikishev G. N. Eksperimentalnyie metody v dinamike kosmicheskikh apparatov. Moscow, Mashinostroenie, 1978, 248 p.) [in Russian]
5. Rabinovich B. I. *Introduction to the dynamics of launch vehicles of spacecraft*. Moscow, Mechanical engineering, 1975, 416 p. (Rus. ed.: Rabinovich B. I. Vvedenie v dinamiku raketnositeley kosmicheskikh apparatov. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 416 p.) [in Russian]
6. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. “Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles”. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences* 1, N 1, pp.14-27, 2016.
7. Karagiozis K. N., Païdoussis M. P., Misra A. K. “Transmural pressure effects on the stability of clamped cylindrical shells subjected to internal fluid flow: theory and experiments”. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 42, Issue 1, P. 13-23, 2007.

8. Avramov K.V., Strel'nikova E. A., Pierre C. "Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow". *Nonlinear Dynamics*, N 70, P. 1335 – 1354, 2012.
9. Abramson H.N. *The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers*, NASA SP- 106, Washington, D.C., 1966, updated by Dodge, F.T., Southwest Research Institute, 2000.
10. Ibrahim R. A., "Liquid sloshing dynamics: theory and applications". *Cambridge University Press*, 2005.
11. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. "Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid", Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. 2010. Vol.50. P. 203-211.
12. Gnitko, V., Degtyarev, K., Naumenko, V., Strelnikova, E., "Coupled BEM And FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks" *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, 6(6), pp. 976-988, 2018.
13. Brebbia C.A, Telles J.C.F & Wrobel L.C., *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
14. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E., "Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. Vol. 52. P. 285-296. 2011.
15. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. "BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles". *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, Vol. 5(3), P. 317-328, 2017.
16. Yu. V. Gandel', T. S. Polyanskaya, "Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Problems", *Differ. Equ.* 39, P.1295–1307, 2003.

Мироненко Марія Леонідівна – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна, 61046; e-mail: mariamyronenko87@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0266-4463.

Myronenko Maria L. – PhD student, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: mariamyronenko87@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0266-4463.

Мироненко Марія Леонидовна – аспірант, Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного НАН України, ул. Пожарського, 2/10, г. Харьков, Україна, 61046; e-mail: mariamyronenko87@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0266-4463.

Гнітько Василь Іванович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна, 61046; e-mail: gnitkovi@gmail.com; ORCID: 0000-0003-2475-5486.

Gnitko Vasyl I. – PhD, Senior Research Fellow, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: gnitkovi@gmail.com; ORCID: 0000-0003-2475-5486.

Гнидько Василий Иванович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046; e-mail: gnitkovi@gmail.com; ORCID: 0000-0003-2475-5486.

Дегтярьов Кирило Георгійович – провідний інженер, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна, 61046; e-mail: kdeg89@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Degtyarev Kirill G. – Senior Engineer, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: kdeg89@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Дегтярев Кирилл Георгиевич – ведущий инженер, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046; e-mail: kdeg89@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4486-2468.

UDC 517.9

Numerical simulation of electromagnetic wave diffraction on a finite number of slits in a flat screen

S.V. Zhuchenko

*Kharkiv National University named after V.N. Karazin, Ukraine, Svobody square 4, Kharkiv, 61022, Ukraine
e-mail: stanislavzhuchenko@ukr.net*

The article presents an algorithm for modeling diffraction on slits made on a flat screen made of actual materials. As a result, the boundary conditions of Schukin-Leontovich lead to the mixed boundary value problem. According to the method of Y.V. Gandel and V.D. Dushkin the solution of the problem can be reduced to a system of paired integral equations with singular and logarithmic singularities. The author has created and debugged a PC program that performs the numerical solution of the arising problems, and a series of computational experiments has been performed. This work has been carried at School of Mathematics and Computer Sciences of V. N. Karazin Kharkiv National University within the state budget themes: "Modeling of the dynamics of folding systems with the method of identifying problem situations."

Key words: Sommerfeld radiation conditions, Meixner conditions, Fredholm integral equation of the second kind.

У статті видається алгоритм моделювання дифракції на щілинах проделаних в плоскому екрані виготовленому з реальних матеріалів. В результаті граничні умови Шукіна-Леонтовича призводять до третьє крайового завдання. По методу проф. Ю.В. Ганделя і В.Д. Душкіна рішення задачі зводиться до системи парних інтегральних рівнянь з сингулярною і логарифмічною особливостями. Створення програм ЕОМ що реалізують подібні чисельні моделі надзвичайно актуально для впровадження передових комп'ютерних технологій в практику реальних фізичних досліджень. Автор статті останнім часом багато уваги приділяє створенню і відладці програм ЕОМ впроваджувальних в практику творчу спадщину проф. Ю.В. Ганделя. Зокрема в этой статті автор пропонує варіант програма ПЕВМ виконующої чисельне рішення виникаючої задачі, а також з її допомогою проводить серію обчислювальних експериментів. Ця програма може використовуватися для широкого дослідження процесів розсіяння і дифракції на подібних структурах, а також для верифікації аналогічних програм складених з використанням гіперсингулярних інтегралів, формули використовувани при створенні яких набагато складніше і вимагають ретельніших перевірок. Ця робота виконана на мехматі ХНУ ім. В.Н. Каразіна у рамках держбюджетної тематики: "Моделювання динаміки складних систем з метою ідентифікації проблемних ситуацій"

Ключові слова : умови випромінювання Зоммерфельда, умови Майкснера, інтегральне рівняння Фредгольма другого роду, інтегральне рівняння ядром Коши і з логарифмічною особливістю система лінійних рівнянь алгебри.

В статье представляется алгоритм моделирования дифракции на щелях проделанных в плоском экране изготовленном из реальных материалов. В результате граничные условия Шукина-Леонтовича приводят к третьей краевой задаче. По методу проф. Ю.В. Ганделя и В.Д. Душкіна решение задачи сводится к системе парных интегральных уравнений с сингулярной и логарифмической особенностями. Автором составлена и отлажена программа ПЭВМ выполняющая численное решение возникающих задач, проводится серия вычислительных экспериментов. Создание программ ПЭВМ, которые реализуют подобные численные модели, чрезвычайно актуально для внедрения передовых компьютерных технологий в практику реальных физических исследований. Автор статьи в последнее время много внимания уделяет созданию и отладке программ ПЭВМ внедряющих в практику творческое наследие проф. Ю.В. Ганделя. Эта программа может использоваться для исследования процессов рассеяния и дифракции на подобных структурах, а также для верификации аналогичных программ составленных с использованием гиперсингулярных интегралов, формулы, которые используются при их создании намного сложнее и требуют более тщательных проверок. Данная работа выполнена на мехмате ХНУ им. В.Н. Каразіна в рамках госбюджетной тематики: «Моделювання динаміки складних систем з метою ідентифікації проблемних ситуацій».

Ключевые слова: условия излучения Зоммерфельда, условия Майкснера, интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

1 Introduction

One way of describing the interaction of electromagnetic waves with non PEC structures is to consider boundary-value problems for the Helmholtz equation with mixed boundary conditions [1] - [5]. Mixed conditions are consequences of Schukin-Leontovich boundary conditions (IBC). In [6]; [7], the systems of boundary integral equations for the problem of determining the direction of electromagnetic waves on an impedance tape were obtained. The method of parametric representations of integral transformations has been used to obtain these systems [8] - [10]. The numerical solution of these systems had been found by the method of discrete singularities [11]; [12]. This approach is widely used in modeling the scattering of electromagnetic waves on PEC structures [12] - [22].

The PC program created, debugged and used for the numerical modeling is based on the methods of solving diffraction problems developed by Y.V. Gandel and his students. In particular, the monography [12] in section 5.3 proposes a method for the numerical problem of diffraction of an electromagnetic

wave by a finite number of slits on a flat screen made of actual materials. The article is devoted to the numerical solution of this problem. The results of some computational experiments obtained by using the developed program are presented at the end of the article.

2 Arrangement and the method of solving the problem

There is flat panel in subspace $z=0$ with M slits which are parallel to the axis Ox . Fig. 1 shows the section of this screen by the YOZ subspace.

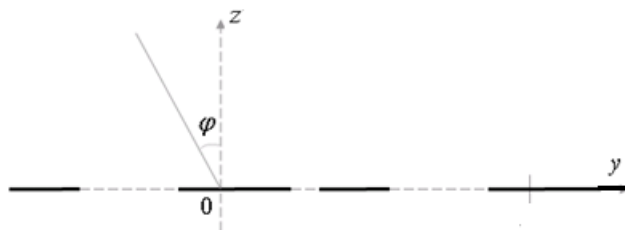


Fig. 1 Sectional drawing of the diffraction structure by the subspace YOZ

Let

$$L = \left\{ y \in \mathbf{R} \mid y \in \bigcup_{q=1}^M (\alpha_q, \beta_q), 0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_q < \beta_q \right\}, \quad (1)$$

where Y – the coordinates of metal-free points.

Let us set Ω^+ and Ω^- half-subspaces above and below the structure.

The flat electromagnetic wave of unit amplitude falls obliquely from infinity to the diffractive structure with the following x -coordinate:

$$u^*(y, z) = \exp(ik(y \cdot \sin \varphi - z \cdot \cos \varphi)). \quad (2)$$

It is necessary to find the full field resulting from the diffraction of a wave on a structure.

Let $u_0(y, z)$ be the field that is a result of diffraction of a given plane wave, when in the $z=0$ plane a solid conductive screen is present. Due to the boundary conditions of Shchukin-Leontovich, the equality on the screen is:

$$\frac{\partial u_0(y, 0)}{\partial z} h u_0(y, 0) = 0, \quad y \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

The field $u_0(y, z)$ has the form:

$$u_0(y, z) = \exp(ik(y \cdot \sin \varphi - z \cdot \cos \varphi)) + \frac{ik \cos \varphi + h}{ik \cos \varphi - h} \exp\{ik(y \cdot \sin \varphi + z \cdot \cos \varphi)\}, \quad (4)$$

and the property:

$$u_0(y, 0) = \frac{2ik \cos \varphi}{ik \cos \varphi - h} \cdot \exp\{ik(y \cdot \sin \varphi)\}. \quad (5)$$

The full field $u(y, z)$, arising from the diffraction of a wave on a structure can be derived in the form:

$$u(y, z) = \begin{cases} u_0(y, z) + u^+(y, z), & (y, z) \in \Omega^+; \\ u^-(y, z), & (y, z) \in \Omega^-. \end{cases} \quad (6)$$

The field $u^+(y, z)$ in the area Ω^+ is derived as:

$$u^+(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C^+(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y - \gamma(\lambda)z) d\lambda, \quad (7)$$

and in the area Ω^- $u^-(y, z)$ is derived as:

$$u^-(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C^-(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y + \gamma(\lambda)z) d\lambda, \quad (8)$$

$$\text{where } \gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad \text{Re}(\gamma(\lambda)) \geq 0, \quad \text{Im}(\gamma(\lambda)) \leq 0, \quad \lambda \in R. \quad (9)$$

From the boundary conditions of Schukin-Leontovich on the surface of the screen follows that:

$$\frac{\partial u^+}{\partial z}(y, 0) - hu^+(y, 0) = 0, \quad y \in CL; \quad (10)$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial z}(y, 0) + hu^-(y, 0) = 0, \quad y \in CL; \quad (11)$$

The consequence of the continuity of the field and its derivatives in the screen slits are:

$$u_0(y, 0) + u^+(y, 0) = u^-(y, 0), \quad y \in L; \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z}(y, 0) + \frac{\partial u^+}{\partial z}(y, 0) = \frac{\partial u^-}{\partial z}(y, 0), \quad y \in L; \quad (13)$$

From the boundary conditions (10), (11) and the conjugation conditions (12), (13), taking into account the representations of the fields (7) and (8) follows that:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\gamma(\lambda) + h] \cdot C^+(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma(\lambda) + h] \cdot C^-(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda = 0, \quad y \in CL; \quad (14)$$

$$u_0(y, 0) - \int_{-\infty}^{\infty} C^+(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} C^-(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda, \quad y \in L; \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z}(y, 0) - \int_{-\infty}^{\infty} C^+(\lambda) \cdot \gamma(\lambda) \exp(i\lambda y) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} C^-(\lambda) \cdot \gamma(\lambda) \exp(i\lambda y) d\lambda, \quad y \in L; \quad (16)$$

Let:

$$F^+(y) = \frac{\partial u^+}{\partial z}(y, 0) - hu^+(y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} C^+(\lambda) \cdot [\gamma(\lambda) + h] \exp(i\lambda y) d\lambda \quad (17)$$

$$F^-(y) = \frac{\partial u^-}{\partial z}(y, 0) + hu^-(y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} C^-(\lambda) \cdot [\gamma(\lambda) + h] \exp(i\lambda y) d\lambda. \quad (18)$$

By (10), (11) the functions $F^+(y)$ and $F^-(y)$ have the properties:

$$F^+(y) = 0, \quad F^-(y) = 0, \quad y \in CL. \quad (19)$$

Using the definition and properties of the functions $F^+(y)$ and $F^-(y)$, for the functions $C^+(\lambda)$ and $C^-(\lambda)$ we obtain the integral representations:

$$C^+(\lambda) = -\frac{1}{2\pi[\gamma(\lambda) + h]} \int_L F^+(t) \cdot e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in R; \quad (20)$$

$$C^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi[\gamma(\lambda) + h]} \int_L F^-(t) \cdot e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in R. \quad (21)$$

Considering (20), (21) for functions $u^+(y, 0)$ and $u^-(y, 0)$ we get integral representations:

$$\begin{aligned} u^+(y, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} C^+(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda = -\frac{1}{2\pi} \int_L F^+(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\lambda(y-t))}{\gamma(\lambda) + h} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_L \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda(y-t))}{\gamma(\lambda) + h} F^+(t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_L F^+(t) \left[\int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda(y-t))}{\gamma(\lambda)} d\lambda - h \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda(y-t))}{\gamma(\lambda) \cdot (\gamma(\lambda) + h)} d\lambda \right] dt; \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^-(y,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} C^-(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda = \frac{1}{2\pi_L} \int F^-(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\lambda(y-t))}{\gamma(\lambda) + h} d\lambda = \\
&= -\frac{1}{\pi_L} \int F^-(t) \left[\int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda(y-t))}{\gamma(\lambda)} d\lambda - h \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda(y-t))}{\gamma(\lambda) \cdot (\gamma(\lambda) + h)} d\lambda \right] dt; \quad (23)
\end{aligned}$$

It is known that

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda(y-t))}{\gamma(\lambda)} d\lambda = \frac{i\pi}{2} H_0^1(k|y-t|), \quad (24)$$

where $H_0^1(y) = J_0(y) + i \cdot N_0(y)$ – Hankel function of the first kind of zero order.

Considering (17), (18) we get:

$$u^+(y,0) = \int_{-\infty}^{\infty} C^+(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda = -\left[\frac{1}{\pi_L} \int \frac{i\pi}{2} H_0^1(k|y-t|) F^+(t) dt + \frac{1}{\pi_L} \int Q(y,t) F^+ dt \right], \quad (25)$$

$$u^-(y,0) = \int_{-\infty}^{\infty} C^-(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda = \left[\frac{1}{\pi_L} \int \frac{i\pi}{2} H_0^1(k|y-t|) F^-(t) dt + \frac{1}{\pi_L} \int Q(y,t) F^- dt \right], \quad (26)$$

where

$$Q(y,t) = -h \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda(y-t))}{\gamma(\lambda) \cdot (\gamma(\lambda) + h)} d\lambda. \quad (27)$$

For the convenience of further transformations we introduce the functions:

$$\Lambda^+(t) = [F^+(t) + F^-(t)], \quad \Lambda^-(t) = [F^+(t) - F^-(t)], \quad t \in R. \quad (28)$$

After substituting the integral representations (25), (26) for the functions $u^+(y,0)$ and $u^-(y,0)$ the conjugation condition (12), we obtain an integral equation of the first kind with a logarithmic singularity:

$$\frac{1}{\pi_L} \int \frac{i\pi}{2} H_0^1(k|y-t|) \Lambda^+(t) dt + \frac{1}{\pi_L} \int Q(y,t) \Lambda^+ dt = u_0(y,0), \quad y \in L. \quad (29)$$

From (17), (18), (25), (26) for the function $\frac{\partial u^+}{\partial z}(y,0)$, we obtain the integral representation:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^+}{\partial z}(y,0) &= -\int_{-\infty}^{\infty} C^+(\lambda) \cdot \gamma(\lambda) \exp(i\lambda y) d\lambda = -\int_{-\infty}^{\infty} C^+(\lambda) \cdot [\gamma(\lambda) + h] \exp(i\lambda y) d\lambda + \\
&+ h \int_{-\infty}^{\infty} C^+(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda = F^+(y) - h \left[\frac{1}{\pi_L} \int \frac{i\pi}{2} H_0^1(k|y-t|) F^+(t) dt + \frac{1}{\pi_L} \int Q(y,t) F^+ dt \right]. \quad (30)
\end{aligned}$$

Similarly, for the function $\frac{\partial u^-}{\partial z}(y,0)$, we obtain, using (18), (26), the integral representation:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^-}{\partial z}(y,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} C^-(\lambda) \cdot \gamma(\lambda) \exp(i\lambda y) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} C^-(\lambda) \cdot [\gamma(\lambda) + h] \exp(i\lambda y) d\lambda - \\
&- h \int_{-\infty}^{\infty} C^-(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda = F^-(y) - h \left[\frac{1}{\pi_L} \int \frac{i\pi}{2} H_0^1(k|y-t|) F^-(t) dt + \frac{1}{\pi_L} \int Q(y,t) F^- dt \right]. \quad (31)
\end{aligned}$$

After substituting the integral representations (30), (31) for the functions $\frac{\partial u^+}{\partial z}(y,0)$ and $\frac{\partial u^-}{\partial z}(y,0)$ into the conjugation condition (13), we obtain the Fredholm integral equation of the second kind:

$$\Lambda^-(y) - h \left[\frac{1}{\pi_L} \int \frac{i\pi}{2} H_0^1(k|y-t|) \Lambda^-(t) dt + \frac{1}{\pi_L} \int Q(y,t) \Lambda^- dt \right] = -\frac{\partial u_0}{\partial z}(y,0), \quad y \in L. \quad (32)$$

Meixner conditions will be fulfilled if we look for restrictions of functions $\Lambda^+(y)$ and $\Lambda^-(y)$ at intervals (α_q, β_q) in the form:

$$\Lambda^+(y) = \frac{V_q^+(y)}{\sqrt{(y - \alpha_q)(\beta_q - y)}}, \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M); \quad (33)$$

$$\Lambda^-(y) = \frac{V_q^-(y)}{\sqrt{(y - \alpha_q)(\beta_q - y)}}, \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M); \quad (34)$$

where $V_q^+(y) \in C[\alpha_q, \beta_q]$, $V_q^-(y) \in C[\alpha_q, \beta_q]$, $(q = 1, \dots, M)$.

Let:

$$g_q : [-1, 1] \rightarrow [\alpha_q, \beta_q], \quad g_q(t) = \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \tau + \frac{\beta_q + \alpha_q}{2}, \quad (q = 1, \dots, M) \quad (35)$$

From this point the following notation will be used:

$$f^-(y) = -\frac{\partial u_0}{\partial z}(y, 0); \quad (36)$$

$$f_1^+(y) = -u_0(y, 0); \quad (37)$$

$$K_{1,q,p}^+(\xi, \tau) = -\frac{i\pi}{2} H_0^1(k|g_q(\xi) - g_p(\tau)|) - \delta_{q,p} \ln|\tau - \xi| - Q(|g_q(\xi), g_p(\tau)|), \quad (q = 1, \dots, M), \quad (p = 1, \dots, M); \quad (38)$$

$$K_{q,p}^-(\xi, \tau) = h \left[\frac{i\pi}{2} H_0^1(k|g_q(\xi) - g_p(\tau)|) - \delta_{q,p} \ln|\tau - \xi| - Q(|g_q(\xi), g_p(\tau)|) \right], \quad (q = 1, \dots, M), \quad (p = 1, \dots, M); \quad (39)$$

From (32) and taking into account (33) - (39), we obtain a system of integral equations with a logarithmic singularity on the standard interval $(-1, 1)$:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\beta_q - \alpha_q} \frac{V_q^-(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{h}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau - \xi| \frac{V_q^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p}^-(\xi, \tau) \frac{V_p^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f^-(g_q(\xi)), \quad |\xi| \leq 1, \quad (q = 1, \dots, M). \end{aligned} \quad (40)$$

Taking into account (33) - (39), we transform the integral equation (29) to a system of integral equations of the first kind with a logarithmic singularity on the standard interval $(-1, 1)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau - \xi| \frac{V^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{1,q,p}^+(\xi, \tau) \frac{V^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f_1^+(g_q(\xi)), \quad |\xi| \leq 1, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (41)$$

Let us use the notation:

$$K_{2,q,p}^+(\xi, \tau) = -\frac{1}{g_q(\xi)} \cdot \frac{\partial K_{1,q,p}^+(\xi, \tau)}{\partial \xi} = -\frac{ik\pi}{2} H_1^1(k|g_q(\xi) - g_p(\tau)|) - \frac{\delta_{q,p}}{g_q(\xi) - g_q(\tau)} + \frac{1}{g_q(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} Q(|g_q(\xi), g_p(\tau)|), \quad (42)$$

$$f_2^+(y) = \frac{\partial u_0}{\partial z}(y, 0). \quad (43)$$

The system of integral equations with a logarithmic singularity (41) is equivalent to the SIE system:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{g_q(\tau) - g_q(\xi)} \frac{V_q^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{2,q,p}^+(\xi, \tau) \frac{V_p^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f_2^+(g_q(\xi)),$$

$$|\xi| \leq 1, \quad (q=1, \dots, M) \quad (44)$$

with additional conditions:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau - \xi| \frac{V_q^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{1,q,p}^+(\xi, \tau) \frac{V_p^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f_1^+(g_q(\xi)), \quad (q=1, \dots, M). \quad (45)$$

Thus, the solution of the problem is reduced to solving a system of integral equations with a logarithmic singularity (40) and the SIE system (44) with Cauchy kernel and with additional conditions (45), also having a logarithmic feature, on the standard interval $(-1, 1)$. It is assumed that the functions $\{g_q(\xi), f^-(g_q(\xi)), f_1^+(g_q(\xi)), f_2^+(g_q(\xi)), K_{q,p}^-(\xi, \tau), K_{1,q,p}^+(\xi, \tau), K_{2,q,p}^+(\xi, \tau)\} \in C_{[-1,1]}^{1,\gamma}$ for each of the variables are uniform with respect to the other variable. Here $C_{[-1,1]}^{1,\gamma}$ – the class of functions continuously differentiable on the interval $[-1, 1]$, whose derivative satisfies the Hölder condition with the exponent $0 < \gamma \leq 1$.

Let's proceed to the task (40):

We will look for approximate solutions of the SIE systems in (40) and (44), (45) as a vector of function $(V_{1,n_1}(\tau), \dots, V_{q,n_q}(\tau), \dots, V_{M,n_M}(\tau))$, each q -th coordinate of which is the Lagrange interpolation polynomial function $V_q(\tau)$ of the degree $(n_q - 1)$ over nodes $t_k^{n_q}$, $(k=1, \dots, n_q)$, that is, by the roots of the Chebyshev polynomial of the first kind.

Using Lagrange type 1 interpolation polynomials: $l_{n-1,k}^1(t) = \frac{T_n(t)}{T_n'(t_k^n)(t - t_k^n)}$, $k=1, \dots, n$ and

Lagrange type 2 polynomials:

$$l_{n-2,j}^2(t) = \frac{U_{n-1}(t)}{U_{n-1}'(t_{0j}^n)(t - t_{0j}^n)}, \quad j=1, \dots, n-1$$

we approximate the smooth kernel of the equation (40)

$$K_{q,p}^-(\xi, \tau) \approx \sum_{j=1}^{n_q-1} \sum_{k=1}^{n_p} K_{q,p}^-(t_{0j}^n, t_k^n) \cdot l_{n_q-1}^1(\tau) \cdot l_{n_q-2}^2(\xi) = K_{q,p,n_q-2,n_p-1}^-(\xi, \tau).$$

$T_n(t)$ and $U_{n-1}(t)$ are Chebyshev polynomials of the first and second kind, respectively. After that, to approximate the integral with a smooth kernel in (40), we use the well-known quadrature formula [12]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{q,p}^-(\xi, \tau) \frac{V_p^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \approx \frac{1}{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} K_{q,p,n_q-2,n_p-1}^-(\xi, t_k^{n_p}) \cdot V_{p,n_p}(t_k^{n_p}). \quad (46)$$

For integrals with a logarithmic kernel, we use the formula [12]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau - \xi| \frac{V_q^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = -\frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} V_{q,n_q}(t_k^{n_q}) \left[\ln 2 + 2 \sum_{l=1}^{n_q-1} T_l(\xi) \cdot \frac{T_l(t_k^{n_q})}{l} \right]; \quad (47)$$

Substituting the right-hand sides of the quadrature formulas (46) and (47) into the integral equation (40) and giving similar terms with respect to the unknown values of the vector functions in all nodes $t_k^{n_p}$, ($p = 1, \dots, M$), ($k = 1, \dots, n_p$), we obtain a linear algebraic equation for these unknowns (note in (47) $p = q$). The coefficients of these equations are functions which depend on ξ . Sequentially substituting in all these functions instead ξ the values of all nodes $t_l^{n_q}$, ($q = 1, \dots, M$), ($l = 1, \dots, n_q$), we obtain $\sum_{q=1}^M n_q$ of linear algebraic equations for the same number of unknowns. The solutions of this system are substituted into vector function $(V_{1,n_1}(\tau), \dots, V_{q,n_q}(\tau), \dots, V_{M,n_M}(\tau))$ presenting the solutions of equation (40).

To solve the system of integral equations (44) and (45) for smooth kernels and kernels with a logarithmic singularity, we use the same quadrature formulas (46) and (47). For the integral with the Cauchy kernel in equation (44), the quadrature formula [12] is used:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{g_q(\tau) - g_q(\xi)} \frac{V_q^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \frac{V_{q,n_q}(t_k^{n_q})}{g_q(t_k^{n_q}) - g_q(\xi)} \tag{48}$$

Substituting the right-hand sides of quadrature formulas (46), (47) and (48) into integral equations (44) and carrying out similar terms with respect to the unknown values of the vector functions at all nodes $t_k^{n_p}$, ($p = 1, \dots, M$), ($k = 1, \dots, n_p$), we obtain a linear algebraic equation with respect to these unknowns. The coefficients of this equation are functions which depend on ξ . In contrast to the previous case, in order to obtain a system of linear algebraic equations, successively substituted into all functions of equation (44) not the ξ values of all nodes $t_l^{n_q}$, ($q = 1, \dots, M$), ($l = 1, \dots, n_q$), but the values ξ of all nodes $t_{0j}^{n_q}$, ($q = 1, \dots, M$), ($j = 1, \dots, n_q - 1$). As a result we obtain $\sum_{q=1}^M (n_q - 1)$ of linear algebraic equations. It should be noted that $t_{0j}^{n_q}$ are the roots of the Chebyshev polynomial of the second kind. M equations which are absent will be obtained using the integral equation (45). To do this, in the quadrature formula instead ξ for each q , ($q = 1, \dots, M$) is substituted one arbitrary $t_{0j}^{n_q}$. The solutions of this system are substituted in vector functions $(V_{1,n_1}(\tau), \dots, V_{q,n_q}(\tau), \dots, V_{M,n_M}(\tau))$ presenting the solutions of equations (44) and (45).

3. Results of computational experiments

According to the method presented above, a PC program has been compiled and debugged. Below we present the results of calculations obtained with it.

As an example, we investigate a finite-dimensional analogue of the dependence of the functions $C^+(\lambda)$ on the dimensionless wavenumber k . To establish such a relationship, we use the representations of these functions introduced in the previous section as integral transformations (20) and (21). Then, using expressions (28), (33) and (34), we obtain integral representations $C^+(\lambda)$ and $C^-(\lambda)$ from solutions of integral equations (40), (44) and (45):

$$C^+(\lambda) = -\frac{1}{4\pi[\gamma(\lambda) + h]} \int_L \frac{(V_q^+(y) + V_q^-(y))}{\sqrt{(y - \alpha_q)(\beta_q - y)}} \cdot e^{-i\lambda t} dt, \quad (q = 1, \dots), \lambda \in R;$$

$$C^-(\lambda) = \frac{1}{4\pi[\gamma(\lambda) + h]} \int_L \frac{(V_q^+(y) - V_q^-(y))}{\sqrt{(y - \alpha_q)(\beta_q - y)}} \cdot e^{-i\lambda t} dt, \quad (q=1, \dots, M), \lambda \in R;$$

Then, using formula (35) for dimensionless variables and using quadrature formula (46) to calculate integrals with a smooth kernel, we obtain approximate formulas for calculating functions $C^+(\lambda)$ and $C^-(\lambda)$ for integer values λ :

$$C^+(n) = -\frac{1}{4[\gamma(n) + h]} \sum_{q=1}^M \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} (V_{q,n_q}^+(t_k^{n_q}) + V_{q,n_q}^-(t_k^{n_q})) \cdot e^{-in g_q(t_k^{n_q})}, \quad -N \leq n \leq N, \quad n \in Z;$$

$$C^-(n) = \frac{1}{4[\gamma(n) + h]} \sum_{q=1}^M \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} (V_{q,n_q}^+(t_k^{n_q}) - V_{q,n_q}^-(t_k^{n_q})) \cdot e^{-in g_q(t_k^{n_q})}, \quad -N \leq n \leq N, \quad n \in Z;$$

Fig. 2 presents the results of such calculations for the case when a plane electromagnetic wave of a single amplitude normally falls on a diffraction structure with a single slit. Y-coordinates of a slit are located on the segment $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Through C_n^\pm the modules of each of the n harmonics are denoted, and

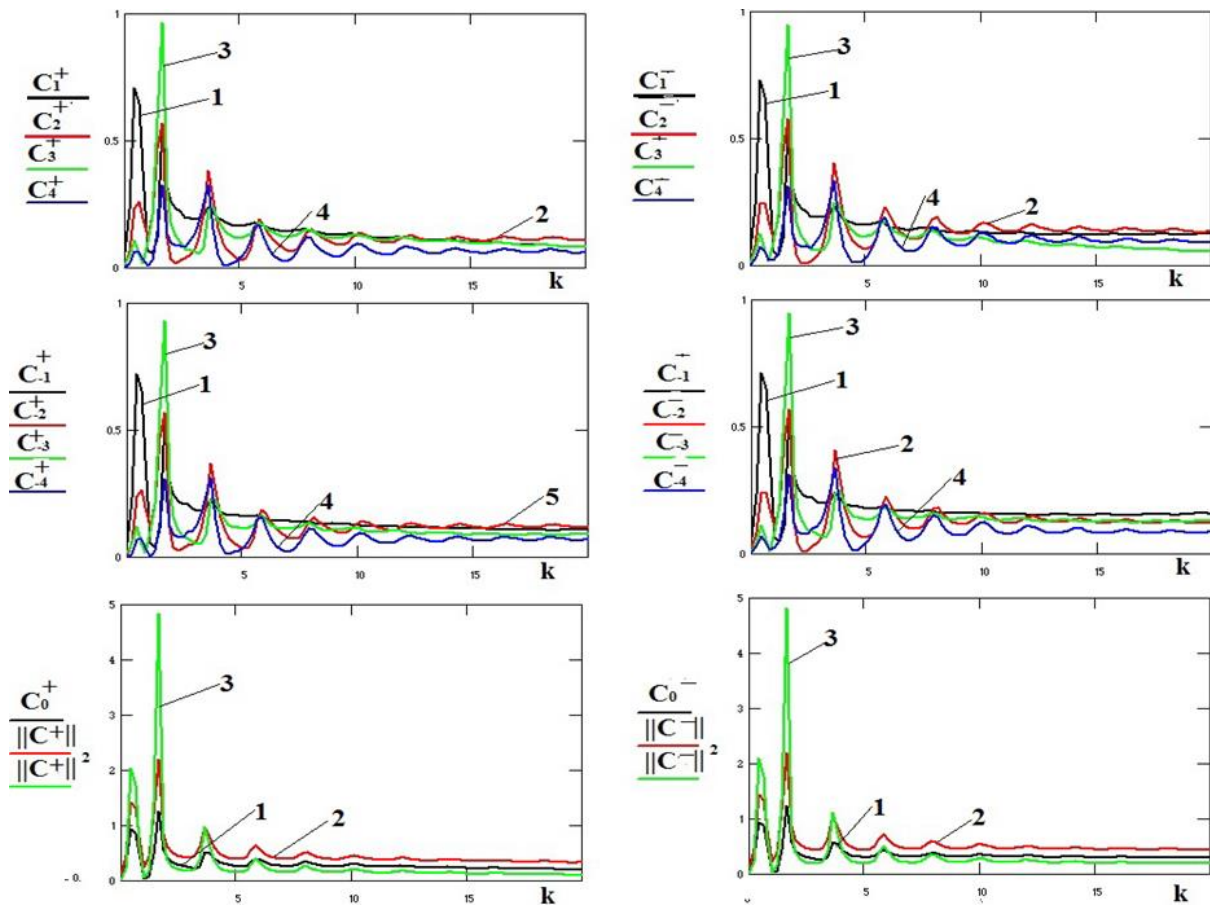


Fig.2 Dependencies of functions $C^+(\lambda)$ and $C^-(\lambda)$ on the dimensionless wavenumber k . Single slot structure

$\|C\|$ is the total modulus of all the considered harmonics $C_n^\pm = \sqrt{\text{real}(C^\pm(n))^2 + \text{imag}(C^\pm(n))^2}$, $\|C\| = \sum_{n=-N}^N \sqrt{\text{real}(C^\pm(n))^2 + \text{imag}(C^\pm(n))^2}$. In all experiments, the case of E-polarization is considered.

Fig. 3 presents similar graphs for the diffraction structure represented by two slits of different widths. Their y-coordinates are located on segments $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ and $[2\pi, 7\pi]$. To the slit, which is considered in the first experiment, a slit of noticeably larger sizes is added. As expected, in comparison with Fig. 2, in Fig. 3, the previous peaks of the curves remained in place, but many new ones appeared. This indicates the growth of the diffraction radiation spectrum in the second experiment, in comparison with the first. The power of diffraction radiation also increases. This is especially evident when comparing the latest graphs in these figures. In the last two graphs of Fig. 3, and especially for small k , the graphs of the curves C_0^+ and C_0^- coincide almost completely and that is why they are represented almost everywhere in red color. The same situation takes place for pairs of graphs $\|C^+\|, \|C^-\|$ и $\|C^+\|^2, \|C^-\|^2$.

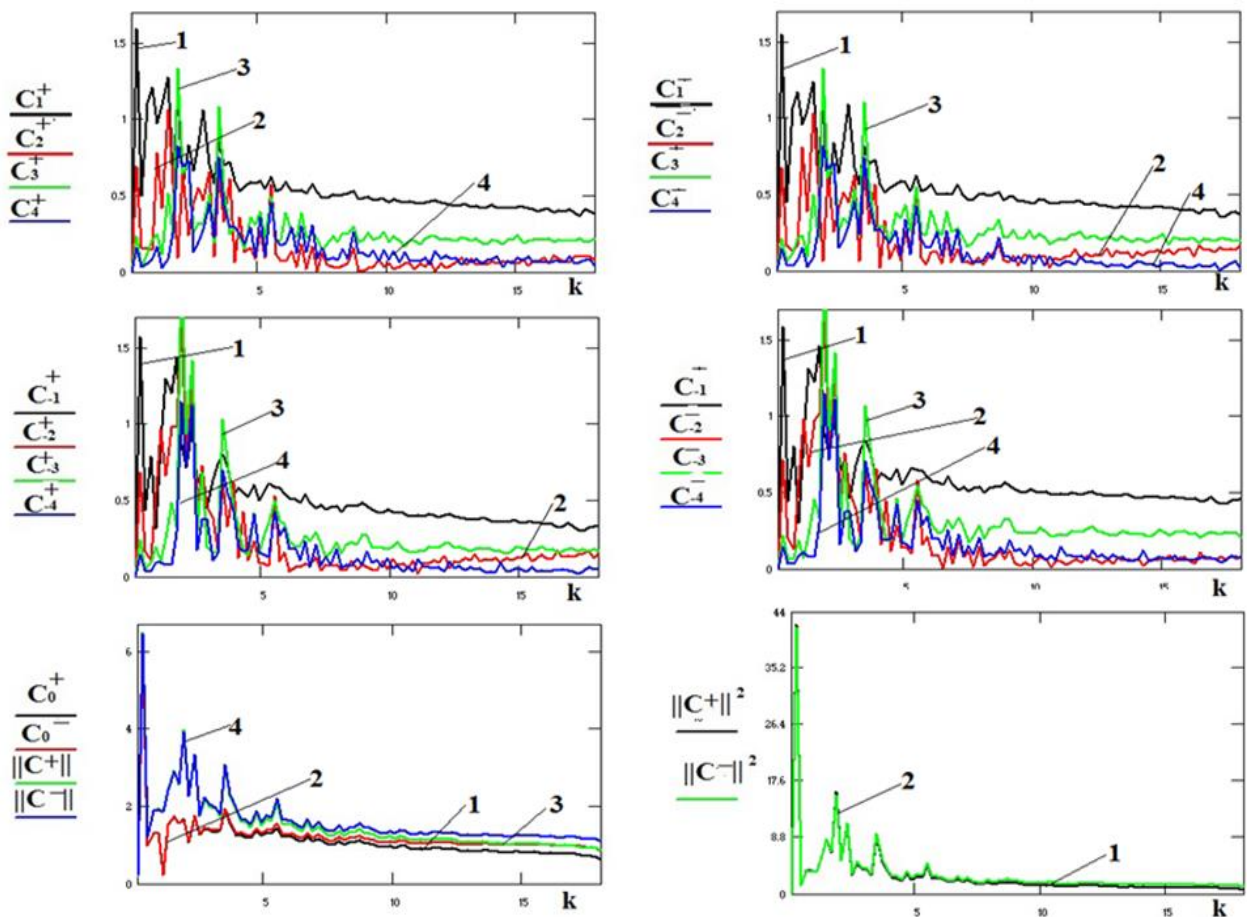


Fig.3. Dependencies of functions $C^+(\lambda)$ and $C^-(\lambda)$ on the dimensionless wavenumber k . The structure of two slits of different sizes

REFERENCES

1. A. S. Il'insky, A. Ja. Slepjan, G. Ja. Slepjan, Propagation, diffraction and dissipation of electromagnetic waves. London (UK): The IEE and Peter Peregrinous Ltd., Electromagnetic Waves, Ser. 36. 275 p. 1993.
2. T. L. Zinenko, A. I. Nosich, "Wave Scattering and Absorption by Flat Gratings of Impedance Strips". *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 54, No. 7, pp. 2088-2095, JULY 2006.
3. V. F. Kravchenko, *The electrodynamics of superconducting structures*. The theory, algorithms and computational methods: Moscow: Fizmatlit, 2006.
4. O. V. Kostenko, "Mathematical model of wave scattering by an impedance grating". *Cybernetics and systems analysis*, vol. 51, pp. 344-360, No. 3, 2015.
5. Yu. Penkin, V. Katrych, M. Nesterenko, S. Berdnik, "Coupling of Two Rectangular Waveguides Through a Slot With an Impedance Membrane," *VII th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*. Kyiv, Ukraine 2 – 5, July 2018, pp. 140-143.
6. Yu. V. Gandel', V.F. Kravchenko, V.I. Pustovoit, "Scattering of electromagnetic waves by a thin superconducting band". *Doklady Math*. 1996. 54, No. 3. pp. 959-961.
7. Yu.V. Gandel, V.F. Kravchenko, N.N. Morozova, "Solving the problem of electromagnetic wave diffraction by a superconducting thin stripes grating," *Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika)*, vol. 56, pp. 15-17, No.2, 2001.
8. N. I. Akhiezer, Lectures on integral transforms. Providence (R. I.): AMS, 1988.
9. Yu. V. Gandel', "Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models". *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 171, pp. 74-88. No.1, Springer Science+Business Media, Inc. 2010.
10. Y.V. Gandel, V.D. Dushkin, The method of parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems on electrodynamics structures: *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction DD 2012 (28 May-1 June 2012)*, St. Petersburg, 2012, pp.76-81.
11. I. K. Lifanov, Singular integral equations and discrete vortices. Utrecht (the Netherlands): VSP VB, 1996.
12. Yu.V. Gandel, V.D. Dushkin, Mathematical models of two-dimensional diffraction problems: Singular integral equations and numerical methods of discrete singularities method. Academy of IT of the MIA of Ukraine, Kharkiv, 2012. [in Russian]
13. Yu.V. Gandel', V.D. Dushkin, "Mathematical models based on SIE 2D diffraction problems on reflective multilayer periodic structures, Part I. The case of E-polarization, Scientific statements." *Series: Mathematics. Physics. Belgorod State National Research University*. vol. 5 (100), pp. 5-16, 2011.
14. V.A. Shcherbina, G.I. Zaginaylov, S.V. Zhuchenko, Numerical theory of excitation of axisymmetric open-ended finite length slow wave structure on the basis of the boundary singular integral equation method: *VII th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'98)*, Kharkov, Ukraine. vol. 1, 1998. pp. 263-265.
15. G.I. Zaginaylov, V.D. Dushkin, V. Korostyshevski, P.V. Turbin, Modeling the beam excitation of planar waveguide with rectangular irregularities: *Proceedings of the VII th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'98)*, Kharkov, Ukraine; 2 June 1998 through 5 June 1998; vol. 1, 1998, pp. 409-410.
16. Y.V. Gandel, V.D. Dushkin, G.I. Zaginaylov, "New numerical-analytical approach in the theory of excitation of super dimensional electro dynamical structures," *Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika)*.vol. 54, 7, pp. 36-48, 2000.
17. S.V. Zhuchenko, Numerical model diffraction of the plane electromagnetic wave onto axially symmetric parabolic reflector: *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, Series "Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems _Issue 22. No.1063*, pp. 63-71, 2013. [in Russian]
18. V.D. Dushkin, "Mathematical models of two-dimensional diffraction problems," *Proceedings of the VI th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'96)*; Lviv, V.1, 1996. DOI:10.1109/MMET.1996.565767, pp. 483-486.

19. V.S. Bulygin, A.I. Nosich, Y.V. Gandel, "Nystrom-type method in three dimensional electromagnetic diffraction by a finite PEC rotationally symmetric surface," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. pp. 4710-4718, 60 (10), 2012.
20. S.V. Zhuchenko, "Discrete mathematical model of electromagnetic wave 3D diffraction on axially symmetric reflector," *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, Series "Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems"*, Issue 23. No. 1089, pp. 50-68, 2013. [in Russian].
21. A. A. Nosich, Y. V. Gandel, "Numerical analysis of quasioptical multi-reflector antennas in 2-D with the method of discrete singularities," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 57, pp. 399-406, no. 2, 2007.
22. S.V. Dukhopelnikov, "Inhomogeneities in the antenna cavity and the diffractive properties of antennas of a special form Numerical analysis." Part 1, *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, Series "Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems"*. pp. 25-34, 32, 2016.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. S. Il'insky, A. Ja. Slepjan, G. Ja. Slepjan, Propagation, diffraction and dissipation of electromagnetic waves. - London (UK): The IEE and Peter Peregrinus Ltd., 1993. *Electromagnetic Waves*, Ser. 36. 275 p.
2. T. L. Zinenko, A. I. Nosich, Wave Scattering and Absorption by Flat Gratings of Impedance Strips, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. V. 54. No. 7. JULY 2006. P. 2088-2095.
3. V. F. Kravchenko, The electrodynamics of superconducting structures. The theory, algorithms and computational methods, Moscow: Fizmatlit, 2006. 280 p.
4. O. V. Kostenko, Mathematical model of wave scattering by an impedance grating, *Cybernetics and systems analysis*. V. 51, No. 3. 2015. P. 344-360.
5. Yu. Penkin, V. Katrych, M. Nesterenko, S. Berdnik, Coupling of Two Rectangular Waveguides Through a Slot With an Impedance Membrane, VII th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Kyiv. Ukraine 2 – 5. July 2018. P. 140-143.
6. Yu. V. Gandel', V.F. Kravchenko, V.I. Pustovoi, Scattering of electromagnetic waves by a thin superconducting band. *Doklady Math*. 1996. 54, No. 3. P. 959-961.
7. Yu.V. Gandel, V.F. Kravchenko, N.N. Morozova, Solving the problem of electromagnetic wave diffraction by a superconducting thin stripes grating, *Telecommunications and Radio Engineering* (English translation of *Elektrosvyaz and Radiotekhnika*). 2001. V. 56, No.2.-P. 15-17.
8. N. I. Akhiezer, Lectures on integral transforms. - Providence (R. I.): AMS, 1988. 108 p.
9. Yu. V. Gandel', Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models. *Journal of Mathematical Sciences*. 2010. V. 171, No.1. Springer Science+Business Media, Inc. P. 74-88.
10. Y.V. Gandel, V.D. Dushkin, The method of parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems on electrodynamics structures. *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction DD 2012* (28 May-1 June 2012), St. Petersburg, 2012. P.76-81.
11. I. K. Lifanov, Singular integral equations and discrete vortices. Utrecht (the Netherlands): VSP VB, 1996. 475 p.
12. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Математические модели двумерных задач дифракции: Сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей: монография. Х. : Акад. ВВ МВД Украины, 2012. 544с.
13. Гандель Ю.В., Душкин В.Д. Математические модели на основе СИУ 2D задач дифракции на многослойных периодических отражающих структурах. Часть I. Случай Е-поляризации. *Научные ведомости Бел Гу Серия Математика. Физика*. 2011. № 5(100). Вып. 22. С.5-16.
14. V.A. Shcherbina, G.I. Zaginaylov, S.V. Zhuchenko, Numerical theory of excitation of axisymmetric open-ended finite length slow wave structure on the basis of the boundary singular integral equation method. *VII th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (ММЕТ'98)*, Kharkov, Ukraine. V. 1. 1998. P. 263-265.
15. G.I. Zaginaylov, V.D. Dushkin, V. Korostyshevski, P.V. Turbin, Modeling the beam excitation of planar waveguide with rectangular irregularities. *Proceedings of the VII th International*

- Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory* (ММЕТ'98. Kharkov. Ukraine. 2 June 1998 through 5 June 1998. V. 1. 1998. P. 409-410.
16. Y.V. Gandel, V.D. Dushkin, G.I. Zaginaylov, New numerical-analytical approach in the theory of excitation of superdimensional electrodynamic structures. *Telecommunications and Radio Engineering* (English translation of *Elektrosvyaz and Radiotekhnika*). 2000. V. 54, 7. P. 36-48.
 17. Жученко С.В. Численная модель дифракции плоской электромагнитной волны на осесимметричном параболическом рефлекторе. *Вестник Харьковского национального университета Серия «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления»*. №1063. вып. 22. 2013. с. 63-71.
 18. V.D. Dushkin, Mathematical models of two-dimensional diffraction problems. *Proceedings of the VI th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory* (ММЕТ'96). Lviv. V.1. 1996. P. 483-486. DOI:10.1109/ММЕТ.1996.565767.
 19. V.S. Bulygin, A.I. Nosich, Y.V. Gandel, Nystrom-type method in three dimensional electromagnetic diffraction by a _finite PEC rotationally symmetric surface, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 60 (10). 2012. P. 4710-4718. [in Russian]
 20. Жученко С.В. Дискретная математическая модель 3D дифракции электромагнитной волны на осесимметричном рефлекторе. *Вестник Харьковского нац. Университета. Серия «Математическое моделирование, информационные технологии автоматизированных систем управления»*. № 1089. выпуск 23. 2013. С. 50-68.
 21. A. A. Nosich, Y. V. Gandel, Numerical analysis of quasioptical multi-reflector antennas in 2-D with the method of discrete singularities. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2007. V. 57, no. 2. P. 399-406.
 22. S.V. Dukhopelnikov, Inhomogeneities in the antenna cavity and the diffractive properties of antennas of a special form Numerical analysis. Part 1, *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, Series "Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems"*. 2016. 32. P. 25-34.

Zhuchenko Stanislav Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Kharkiv National University named after V.N. Karazin, Kharkiv-22, Svoboda Square, 461022; e-mail: stanislavzhuchenko@ukr.net; ORCID.org/0000-0002-1946-7044.

Жученко Станислав Владимирович – кандидат физико-математических наук; Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков-22, площадь Свободы, 4; 61022; e-mail: stanislavzhuchenko@ukr.net; ORCID.org/0000-0002-1946-7044.

Жученко Станіслав Володимирович - кандидат фізико-математичних наук; Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків-22, площа Свободи, 4; 61022; e-mail: stanislavzhuchenko@ukr.net; ORCID.org/0000-0002-1946-7044.

УДК 004.942

Комп'ютерне моделювання в біомеханіці кровообігу

Н.М. Кізілова¹, О.М. Соловйова²¹ Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Україна² Харківський національний технічний університет «ХПІ», Україна
e-mail: helenfilippova@yahoo.co.uk

У статті обговорюються можливості комп'ютерного моделювання для проведення розрахунків на детальних моделях кровоносної системи людини. Наведено короткий огляд існуючих математичних моделей і запропонована модель, яка дозволяє проводити розрахунки параметрів кровообігу – швидкості і тиску крові, переміщень стінок артерій – для складного дерева судин в реальному часі. На основі моделі проведено розрахунки параметрів кровообігу в моделі аорти (91 в'язкопружна трубка). Показано гарне відповідність результатів комп'ютерного моделювання вимірам тиску і швидкостей течії крові вздовж аорти.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, біомеханіка, кровообіг, пульсові хвилі, медична діагностика.

В статье обсуждаются возможности компьютерного моделирования для проведения расчетов на детальных моделях кровеносной системы человека. Приведен краткий обзор существующих математических моделей и предложена модель, которая позволяет проводить расчеты параметров кровообращения – скорости и давления крови, перемещений стенок артерии – для сложного дерева сосудов в реальном времени. На основе модели проведены расчеты параметров кровообращения в модели аорты (91 вязкоупругая трубка). Показано хорошее соответствие результатов компьютерного моделирования измерениям давлений и скоростей течения крови вдоль аорты.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, биомеханика, кровообращение, пульсовые волны, медицинская диагностика.

The possibilities of computer modeling for numerical computations on detailed models of human circulatory system are discussed. A brief review of existing mathematical models is presented, and the model based on the axisymmetric incompressible Navier-Stokes equations for blood as a Newtonian fluid and the momentum equations for the incompressible viscoelastic arterial wall allowing real time calculations of blood circulation parameters – velocity and blood pressure, movements of the arterial walls – for a complex tree of blood vessels is proposed. The pulse waves propagation is investigated in the form of small perturbations. The geometrical model is based on the morphometric data of extraorgan (systemic) arteries performed on five corpses preparations. Depending on the individual geometry, a model of the middle tree containing ~ 1000 segments, which is the most detailed of the existing models of the tree of the human systemic arteries. Based on the model, the blood circulation parameters have been calculated in the aortic model (91 viscoelastic tubes). A good agreement between the results of computer simulation and the measurements of pressure and velocity of blood flow along the aorta has been shown. An analysis of the wave reflection coefficients revealed areas with abnormal values of friction on the wall and pressure oscillations that can lead to damage of the wall, the development of aortic aneurysm, stenosis of the renal arteries, and other pathologies. The proposed model can be used to calculate cases of pathology (narrowing, expansion, atherosclerotic plaques, and others) on an individual model of the patient's aorta according to CT, MRT, ultrasound, etc., as well as for preliminary *in silico* modeling of vascular operations.

Key words: computer simulation, biomechanics, blood circulation, pulse waves, medical diagnostics.

1 Вступ

У сучасній біомеханіці кровообігу широко використовуються методи комп'ютерного моделювання течії крові по артеріях, венах, мікроциркуляторних руслах внутрішніх органів і м'язів, як у здорових судинах, так і з урахуванням наявності патологій у вигляді стенозів, аневризми, вікової дегенерації стінки та ін. [1]. Комп'ютерні кластери і платформи хмарних обчислень дозволяють проводити детальні розрахунки 3D течій в деформованих судинах з урахуванням взаємодії рідина-стінка на невеликих моделях судинних русел, що складаються з ~ 10-40 судин. Спрощені 2D і 1D моделі дозволяють проводити розрахунки на ПК для більш складних систем, що містять сотні і тисячі судин. Комп'ютерні моделі механіки кровообігу дозволяють будувати індивідуальні (patient-specific) моделі конкретного пацієнта, а потім шляхом чисельних розрахунків, планувати судинні операції, стентування, шунтування та інші хірургічні втручання. Такий підхід дозволяє оцінити кількісний ефект операції у вигляді ступеня відновлення кровотоку, зниження в'язкого тертя на стінках судин, осциляцій тиску та інших сприятливих або пошкоджуючих факторів, проводячи до операційне планування і вибір оптимального впливу.

Крім цього, зростає роль сучасних методів аналізу великих даних (big data analysis) у вигляді тимчасових рядів [2]. У механіці кровообігу ці дані безперервного добового і більш тривалого моніторингу тиску $p(t)$ і швидкості $v(t)$ течії крові в пальцевих (пальцевий датчик), плечових (манжетний манометр) і центральних (інвазивний датчик на катетері) артеріях, а також

електрокардіографічних сигналів. Метою комп'ютерного моделювання в біомеханіці кровообігу є розробка складних індивідуальних моделей як окремих самостійних ділянок судинного русла з урахуванням місцевої, нервової і гуморальної регуляції (систем коронарних, мозкових, легеневих артерій і ін.) [3,4], так і системного дерева позаорганних артерій [5]. Подібні моделі будуть використовуватися в комп'ютерній медицині майбутнього для кількісної оцінки рівня критичності патологій, прийняття рішення про вибір терапії, планування хірургічних втручань, оскільки дають можливість провести детальні чисельні розрахунки і оцінити результат виконання операції, наприклад, зі стентування стенозу, тромбування або пластики аневризми, створення шунта (bypass) та ін. Patient specific моделі засновані на результатах комп'ютерної (СТ) або магніторезонансної томографії (MRT), ультразвукового сканування (УЗД), ангіографії судинного русла пацієнта. Для проведення розрахунків в реальному часі на великому наборі моделей необхідно розумне спрощення завдання на основі комбінації математичних моделей різної складності.

2 Математичні моделі

Для детальних 3D розрахунків тисків і швидкості течії крові, деформацій стінок судин і інших гемодинамічних параметрів використовуються рівняння Нав'є-Стокса для крові як ньютонівської рідини і рівнянь в'язкопружності для судинної стінки. При відсутності зовнішніх сил, нестисливості матеріалу стінки і безперервності поля швидкостей і напруг на границях розділу рідина-стінка, пов'язана система рівнянь і граничні умови мають вигляд [2,5]:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad \rho_s \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\nabla p_s + \operatorname{div} \hat{\sigma} \quad (2)$$

$$r = 0: \quad v_r = 0 \quad (3)$$

$$r = R_0(x) + u_r(t, r, x) \Big|_{r=R_0(x)}:$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{v}, \quad -p + \mu \frac{\partial v_r}{\partial r} = -p_s + \sigma_{rr}, \quad \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) = \sigma_{rx} \quad (4)$$

$$r = R_0(x) + u_r(t, r, x) \Big|_{r=R_0(x)} + H + u_r(t, r, x) \Big|_{r=R_0(x)+H}: \quad \vec{u} = 0 \quad (5)$$

де $\vec{v} = (v_r, 0, v_x)$, $\vec{u} = (u_r, 0, u_x)$ - швидкість руху рідини і переміщення стінки в пов'язаній з артерією циліндричній системі координат, μ - в'язкість крові, ρ_s - щільність матеріалу стінки, p, p_s - гідростатичні тиску в рідині і стінці, де $R_0(x) = \sqrt{S_0(x)/\pi}$, $\hat{\sigma}$ - тензор напружень стінки:

$$\tau_s \frac{d\hat{\sigma}}{dt} + \hat{\sigma} = \hat{E} \hat{\varepsilon} + \mu_s \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} \quad (6)$$

де $\hat{\varepsilon}$ - тензор деформацій, \hat{E} - тензор модулів пружності матеріалу стінки, μ_s і τ_s - реологічні параметри. Умова (3) має місце тільки в припущенні осьової симетрії течії.

Умови (5) відповідають жорсткому закріпленню зовнішньої поверхні судини до навколишніх тканин. Для поверхневих артерій замість (5) використовують умови ненавантаження. Для поверхневих артерій, навантажених зовнішніми нормальними (стиснення манжетою) і дотичними (зсувні навантаження) силами, замість (5) використовується умова $\sigma_{rr} = \sigma_n$, $\sigma_{rx} = \sigma_\tau$.

Для невеликих за протяжністю систем кровеносних судин (1) - (2) вирішуються методом кінцевих елементів (AnSys Fluent, Multiphysics, MatLab та ін.) [5]. З метою прискорення часу розрахунків для складних систем, що містять 100 і більше судин, поширення пульсових хвиль досліджується у вигляді малих збурень. Для цього на вході в систему задається хвиля тиску, що генерується серцем, у вигляді Фур'є-розкладу

$$x = 0: \quad P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^0(r) e^{i\omega_k t}, \quad (7)$$

де перша гармоніка визначається частотою скорочень серця пацієнта.

Тоді рішення (1) - (2) для полей тисків, швидкостей і переміщень шукається у вигляді (7) на основі лінеаризованної моделі (1) - (2) [2]. Найбільш часто це рішення використовується для випадку осесиметричної течії крові і радіальних переміщень в'язкопружної стінки судини [1,5], однак можна отримати і торсіонні моди, відповідні спіральній течії крові в аорті і її великих відгалуженнях [1].

Найпростішою моделлю пульсових хвиль в артеріях є квазіодномірна (1D) модель руху в'язкої рідини по податливій трубці змінного $S(t,x)$ [1,2,5,6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(SU) &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + F(S,U), \\ P(t,x) - P_e &= G(S,x), \end{aligned} \quad (8)$$

де $F = 2\tau_w \sqrt{\pi/S} - S^{-1} \partial/\partial x \int_S (u_x - U) dS$, ρ, u_x - щільність і поздовжня компонента швидкості руху рідини, індекс w відноситься до значення на стінці трубки, $P(t,x)$ - середній по перетину тиск, $U = S^{-1} \int_S u_x dS$ - середня швидкість, P_e - тиск в оточуючих тканинах, $\tau_w(\mu)$ - середня по периметру напруга тертя на стінці, $G(S,x)$ - лінійний або нелінійний оператор, відповідний реологічному закону стінки судини. Якщо $P = P_e$, то $S = S_0$, де $G|_{S=S_0} = 0$, що відповідає ненапруженому стану стінки трубки. У нормальних фізіологічних умовах трансмуральний тиск $P_m = P - P_e > 0$. При цьому стінка судини зазнає значні поздовжні і окружні натягнення, залишається відносно жорсткою протягом серцевого циклу і відчуває малі коливання щодо незбуреного значення S_0 .

При проведенні розрахунків на конкретній моделі русла рівняння (8) записуються для кожної артерії, а в місцях біфуркації використовуються умови неперервності швидкості і динамічного тиску. На відкритих кінцях моделі використовуються граничні умови у вигляді заданого відображення пульсових хвиль на системах малих судин, які моделюються при цьому нульвимірними (0D) моделями типу Windkessel у вигляді комбінацій резистивних (Z), ємнісних (C) і індуктивних (L) властивостей (рис. 1) в сенсі механо-електричної аналогії [1-5].

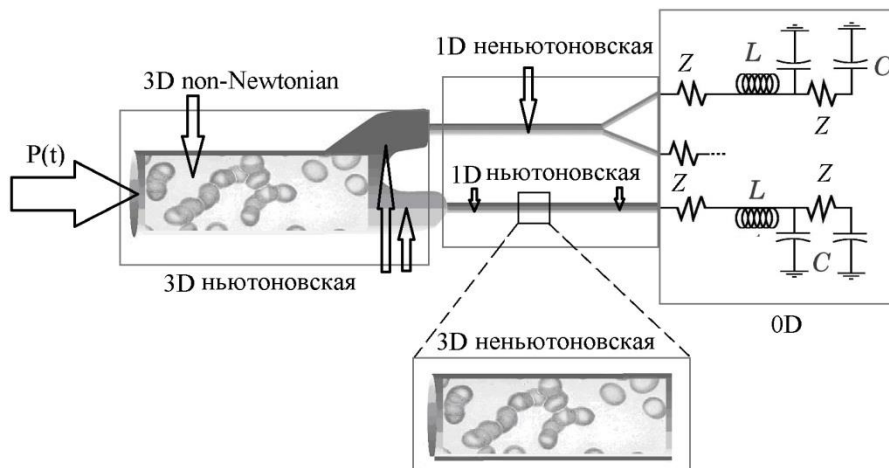


Рис. 1 Приклад синтетичної моделі частини судинної системи

У спеціальному дослідженні було показано, що чисельні розрахунки по моделі (8) для дерева системних артерій людини, що містить 55 артерій, з високою точністю відповідали результатам осереднення тисків і швидкостей в серединних поперечних перетинах всіх 55 трубок, розрахованих на кластері на повній 3D моделі дерева з 55 артерій [7]. Таким чином, для швидких попередніх розрахунків розподілів швидкостей кровотоку і тиску в артеріальній системі досить провести розрахунки по 1D моделі (8). Оскільки для практичних цілей (планування операції,

оцінка тяжкості судинної патології та ін.) необхідна деталізації картини течії крові по судині або декількох судинах, розрахунок значень напруги тертя на стінках, амплітуд і частот осциляції, то останнім часом посилюється інтерес до синтетичних моделей, заснованих на спрощених 2D або 1D моделях середніх і малих артерій, 0D моделі для мікроциркуляторних русел і детальних 3D моделей для окремих судин, що представляють інтерес для хірурга (рис.1).

3 Модель системного артеріального дерева людини.

У даній роботі використані результати морфометричних досліджень позаорганих (системних) артерій, виконаних на п'яти трупних препаратах [8]. Залежно від індивідуальної геометрії в кожному дереві налічувалося 780-1240 артеріальних сегментів, тому можна говорити про модель середнього дерева, що містить ~ 1000 сегментів, що представляє собою найбільш детальну з існуючих моделей дерева системних артерій людини. На рис.2 приведена модель аорти та її розгалужень, використана в даній роботі для чисельних розрахунків на основі моделей (1) - (7), (8) і 0D. Осередненні значення довжин і діаметрів наведені в [9].

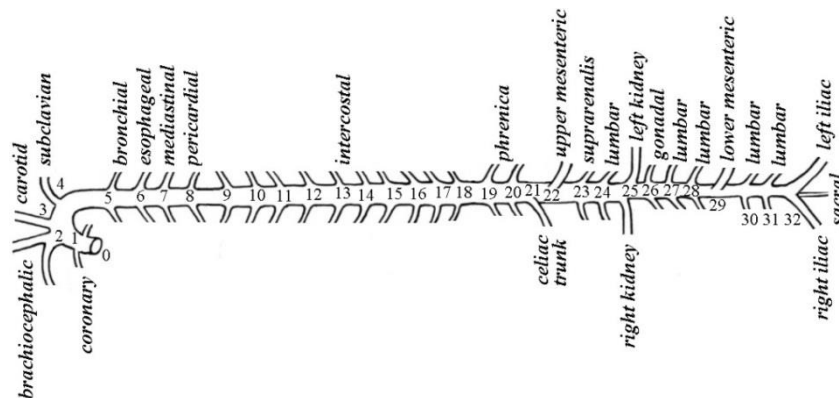


Рис. 2 Схема будови аорти та її розгалужень

4 Результати розрахунків.

Розрахунки проводилися на моделі (1) - (7), записаної для кожного сегмента аорти (рис.2). Використовувалися наступні значення параметрів моделі: $\rho_b = 1.05 \text{ кг/м}^3$, $\mu_b = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\rho_w = 1.12 \text{ кг/м}^3$, $\tau = 0.045 \text{ с}$, $\tau_2 = 0.035 \text{ с}$, $\sigma = 0.5$. Для товщини і модуля Юнга стінки використовувалися наступні апроксимації [10]: $(Eh / \rho_b d) = 15.18 \cdot d^{-1.0514}$,

$$h(d) = R_0(0.2802 \cdot \exp(-5.053R_0) + 0.1324 \exp(-0.1114R_0)), \quad R_0(x) = R_{in} - (R_{in} - R_{out})x/L.$$

На основі чисельних розрахунків на моделі (1) - (8) для аорти та її великих розгалужень 2-4,22,23,29,32, моделі (8) для інших гілок і моделей 0D для всіх відкритих кінців моделі були отримані вирази для коливань $P(t)$, $U(t)$, $u(t)$ в різних перетинах аорти і її гілок. Значення реологічних коефіцієнтів наведені в [9]. Були розраховані коефіцієнти розгалуження, швидкість пульсової хвилі і коефіцієнт відбиття хвиль на кожному розгалуженні уздовж аорти від її кореня до біфуркації. Результати розрахунків кривих тиску і об'ємної витрати крові на ділянках аорти, відповідних відгалуженням 5,19,31 (рис.2) наведені на рис.3. Аналіз коефіцієнтів відбиття хвиль дозволив виявити ділянки з аномальними значеннями тертя на стінці і осциляціями тиску, які можуть призводити до пошкоджень стінки, розвитку аневризми аорти, стенозу ниркових артерій та інших патологій.

Розрахунки хвиль тиску і швидкості вздовж аорти (рис.4 а, б) відповідають фізично правильній картині трансформації вхідної хвилі, а саме зростання ширини піку (steepening) і збільшення амплітуди тиску (peaking) (рис.4а) за рахунок збільшення швидкості хвилі при її поширенні від більш піддатливих до жорсткіших ділянок, а також зменшення амплітуди швидкості, утворення і збільшення амплітуди вторинної (дикротичної) хвилі за рахунок суперпозиції проходящих і відбитих хвиль (рис.4б). Розраховані криві добре відповідають результатам вимірювання за допомогою катетера вздовж аорти людини, собаки, кролика [11-13].

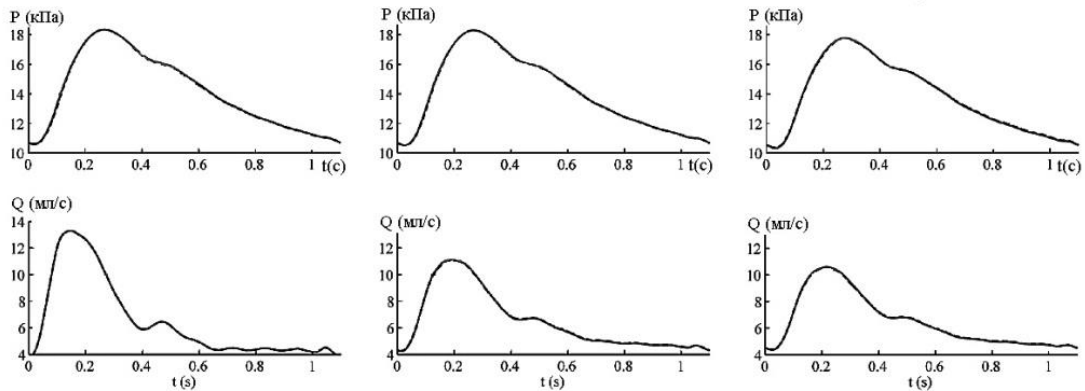


Рис. 3 Результати розрахунків кривих $P(t)$ і $Q(t)$ на участках 5 (а), 19 (б) и 31 (в) аорти

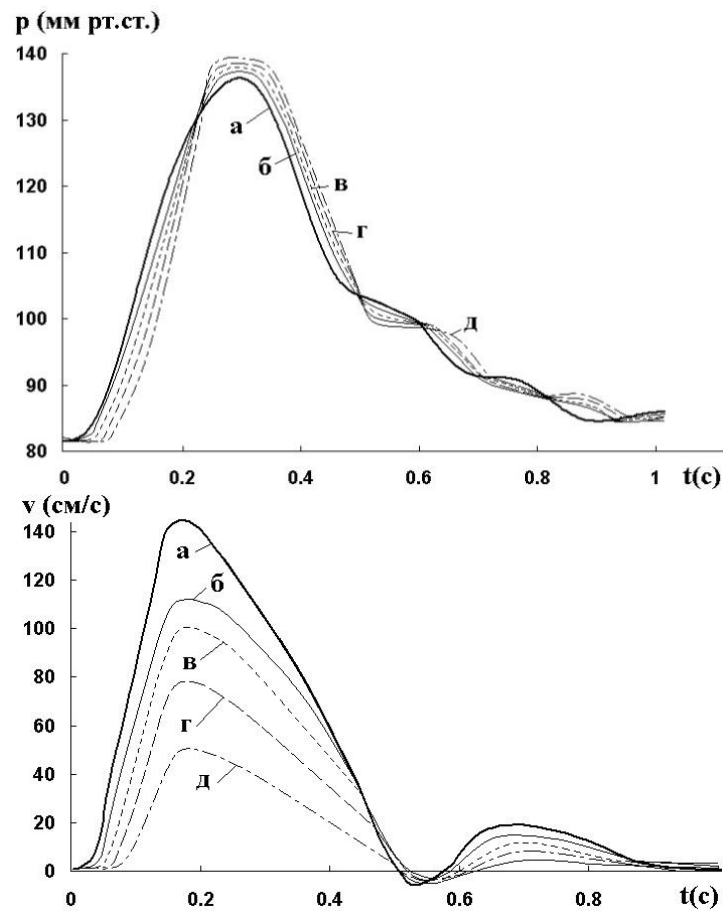


Рис. 4 Результати розрахунків кривих $P(t)$ і $v(t)$ вздовж аорти на участках (см. Рис.2) 1-2 (а), 4-5 (б), 18-19 (в), 23-24 (г), 31-32 (д)

5 Висновки.

Представлено математичну модель, яка дозволяє проводити швидкі розрахунки на досить складній моделі аорти людини, яка налічує 32 сегмента аорти і 59 її розгалужень. Отримано криві коливань тиску і швидкості кровотоку вздовж аорти, які добре відповідають фізичним уявленням про модифікацію хвиль $p(t)$ і $v(t)$ при поширенні їх по звуженій податливій трубці з відгалуженнями, а також відповідають кривим, вимірним *in vivo* мікроманометром в аорті людини і експериментальних тварин. Запропонована модель може бути далі використана для розрахунків випадків патології (звуження, розширення, атеросклеротичні бляшки та ін.) На індивідуальній моделі аорти пацієнта за даними СТ, МРТ, УЗД та ін., а також для попереднього *in silico* моделювання судинних операцій.

Показано, що багато розгалужень аорти мають негативний коефіцієнт відбиття пульсових хвиль, що сприяє прискоренню кровотоку завдяки підсмоктуючому ефекту (suction effect) і, таким чином, зменшенню навантаження на лівий шлуночок. Розраховані криві коливань $P(t)$ і $Q(t)$ добре відповідають даним клінічних вимірювань. На основі запропонованої моделі може бути розроблена система ранньої ідентифікації ділянок судинного русла пацієнта з аномально високим коефіцієнтом відбиття хвиль і превентивної корекції тих патологій, які мають високий ризик прогресуючого розвитку локального порушення кровообігу в органах і тканинах за рахунок відбиття хвиль і, таким чином, зниження хвильової провідності аорти як м'якого хвилеводу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Nichols W.N. McDonald's Blood Flow in Arteries, 6-th Ed.: Theoretical, Experimental and Clinical Principles. Nichols W.N., O'Rourke M., Vlachopoulos C. CRC Press, 2011. 768 p.
2. Кізілова Н.М. Нові напрямки і перспективи теорії пульсових хвиль в артеріях. *Сучасні проблеми біомеханіки*. М.: Вид-во Московського університету. 2006. Вип. 11. С. 44-63.
3. Kassab G.S. Biomechanics of the cardiovascular system: the aorta as an illustratory example. *J. R. Soc. Interface*. 2006. vol. 3. P. 719-740.
4. Zenin O.K., Kizilova N.N., Filippova E.N. Studies on the structure of human coronary vasculature. *Biophysics*. 2007. vol.52, No 5. pp. 499-503.
5. Taylor C.A, Figueroa C.A. Patient-specific modeling of cardiovascular mechanics. *Annu. Rev. Biomed. Eng.* 2009. vol.11. P. 109-134.
6. Соловійова О.М., Кізілова М.М. Комп'ютерне моделювання в біомеханіки кровообігу. *Праці міжнародної науково-технічної конференції "комп'ютерний моделювання в наукоємних технологіях"*. Харків, 2018. С. 282-285.
7. Xiao N., Alastruey J., Figueroa C.A. Systematic Comparison between 1-D and 3-D Hemodynamics in Compliant Arterial Models. *Int. J. Numer. Method. Biomed. Eng.* 2014. vol.30, N2. P. 204-231.
8. Зенін О.К. Артеріальна система людини в цифрах і формулах / Зенін О.К., Гусак В.К., Кірьякулов Г.С. та ін. Донецьк: «Донбас», 2002. 196с.
9. Kizilova N., Solovyova H., Mizerski J. Modeling of Pulse Wave Propagation and Reflection along Human Aort. Springer Series «*Advances in Intelligent Systems and Computing*». 2019. vol.831. P. 23-35.
10. Westerhof B.E., Guelen I., Westerhof N., et al. Quantification of Wave Reflection in the Human Aorta From Pressure Alone. A Proof of Principle. *Hypertension*. 2006. .vol. 48, N 4. P. 595-601.
11. Blanco P.J., Watanabe S.M., Passos M.A., et al. An anatomically detailed arterial network model for onedimensional computational hemodynamics. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2015. vol. 62, N 2. P.736–753.
12. Latham R.D., Westerhof N., Sipkema P., et al. Regional wave travel and reflections along the human aorta: a study with six simultaneous micromanometric pressures. *Circulation*. 1985. vol. 72, N 6. P. 1257-1269.
13. Vappou J., Luo J., Okajima K., et al. Aortic pulse wave velocity measured by pulse wave imaging (PWI): A comparison with applanation tonometry. *Artery Res.* 2011. vol. 5, N 2. P. 65-71.

REFERENCES

1. W.N. Nichols, M. O'Rourke, C. Vlachopoulos. McDonald's Blood Flow in Arteries, 6-th Ed.: Theoretical, Experimental and Clinical Principles: CRC Press, 2011, 768 p.
2. N.N. Kizilova, "New directions and perspectives of the theory of pulse waves in the arteries." *Modern problems of biomechanics*. M.: Publishing House of Moscow University, no. 11, pp. 44-63. 2006. [in Russian]
3. G.S. Kassab, "Biomechanics of the cardiovascular system: the aorta as an illustratory example." *J. R. Soc. Interface*, vol. 3, pp. 719-740, 2006.
4. O.K.Zenin, N.N.Kizilova, E.N.Filippova, "Studies on the structure of human coronary vasculature." *Biophysics*. vol.52, no 5, pp. 499-503, 2007.
5. C.A.Taylor and C.A. Figueroa, " Patient-specific modeling of cardiovascular mechanics", *Annu. Rev. Biomed. Eng.* vol.11, pp. 109-134, 2009.

6. E.N. Solovyova and N.N. Kizilova, "Computer simulation in blood circulation biomechanics." Proceedings of the International Scientific and Technical Conference "*Computer Modeling in High-Tech*", Kharkiv, 2018, pp. 282-285. [in Russian]
7. N.Xiao, J. Alastruey, C. Figueroa, "Systematic Comparison between 1-D and 3-D Hemodynamics in Compliant Arterial Models." *Int. J. Numer. Method. Biomed. Eng.*, vol.30, no. 2. pp. 204-231, 2014.
8. O.K.Zenin, V.K.Gusak, G.S. Kiryakulov. "Human arterial system in numbers and formulas." Donetsk: Donbass, 2002, 196 p.
9. N. Kizilova, H. Solovyova, J. Mizerski. "Modeling of Pulse Wave Propagation and Reflection along Human Aorta." *Springer Series «Advances in Intelligent Systems and Computing»*, vol.831, pp. 23-35, 2019.
10. B.E. Westerhof, I.Guelen, N. Westerhof, et al. "Quantification of Wave Reflection in the Human Aorta From Pressure Alone. A Proof of Principle", *Hypertension*, vol. 48, no. 4, pp. 595-601, 2006.
11. P.J. Blanco, S.M. Watanabe, M.A. Passos, et al., "An anatomically detailed arterial network model for onedimensional computational hemodynamics", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 62, no. 2, pp.736–753, 2015.
12. R.D. Latham, N. Westerhof, P. Sipkema, et al., "Regional wave travel and reflections along the human aorta: a study with six simultaneous micromanometric pressures", *Circulation*, vol. 72, no 6, pp. 1257-1269, 1985.
13. J.Vappou, J. Luo, K.Okajima, et al., "Aortic pulse wave velocity measured by pulse wave imaging (PWI): A comparison with applanation tonometry", *Artery Res.*, vol. 5, no. 2, pp. 65-71, 2011.

Кізілова Наталія Миколаївна – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Kizilova Natalya N. Doctor of Science, Professor of Department of Applied Mathematics V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Кизилова Наталья Николаевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022
e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Соловйова Олена Миколаївна – викладач кафедри вищої математики, Харківський національний технічний університет «ХПІ», вул. Кирпичова 2, Харків, Україна, 61002;
e-mail: helenfilippova@yahoo.co.uk; ORCID: 0000-0003-3704-8350.

Solovyova Elena N. lecturer of Department of High Mathematics, Kharkiv National Technical University 'KhPI', Kirpichova 2, Kharkiv, Ukraine, 61002;
helenfilippova@yahoo.co.uk; ORCID: 0000-0003-3704-8350.

Соловьева Елена Николаевна – преподаватель кафедры высшей математики, Харьковский национальный технический университет «ХПИ», ул. Кирпичева 2, Харьков, Украина, 61002;
e-mail: helenfilippova@yahoo.co.uk; ORCID: 0000-0003-3704-8350.

UDC 539.3

Stationary problem of heat conductivity for complex-shape multilayer plates

A.I. Malykhina, D.O. Merkulov, O.V. Postnyi, N.V. Smetankina

*A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine,
Pozharsky str., 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine
e-mail: nsmetankina@ukr.net*

A method for calculating stationary temperature fields in a complex-shape multilayer plate when it is heated with film heat sources is proposed. Convective heat exchange takes place on the outer surfaces of the plate. The solution of the stationary heat conduction problem is obtained for a three-dimensional formulation based on the immersion method. A comparative analysis of the temperature distribution along the thickness of a square plate with the results obtained by finite element method has been carried out. As an example, the problem of stationary thermal conductivity for a five-layer glazing element of a vehicle when heated with a film heat source has been solved.

Key words: *multilayer plate, complex form, stationary thermal conductivity, film heat source.*

Запропоновано метод розрахунку стаціонарних температурних полів у багатошаровій пластині складної форми при впливі плівкових джерел тепла. На зовнішніх поверхнях пластини відбувається конвективний теплообмін. Рівняння теплопровідності і граничні умови отримані з варіаційного рівняння теплового балансу. Розв'язок задачі стаціонарної теплопровідності отримано в тривимірній постановці на основі методу занурення. Похідні шуканої функції температури вздовж поперечної координати, що входять у рівняння теплопровідності, а також умови конвективного теплообміну на верхній і нижній поверхнях пластини та умови рівності потоків тепла й температур на межах контакту шарів, замінюються їх скінченно-різницею поданням. Для цього використовуються симетричні різниці. Вихідна багатошарова пластина довільної форми в плані занурюється в допоміжну багатошарову пластину, що охоплює, з тією же композицією шарів. Форма пластини, що охоплює, вибирається таким чином, щоб можливо було отримати простий аналітичний розв'язок. У даній роботі роль пластини, що охоплює, виконує прямокутна пластина з нульовими умовами на контурі. Щоб забезпечити виконання реальних граничних умов, до допоміжної пластини в кожній вузловій точці по товщині вздовж вихідного контуру додаються додаткові компенсуючі джерела. Їх інтенсивності визначаються з умови задоволення вихідним граничним умовам. Функції температури в шарах і на бічній поверхні, а також щільності внутрішніх теплових джерел розвиваються в тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють граничні умовам допоміжної пластини, а також у ряд уздовж вихідного контуру. У результаті перетворень система інтегральних рівнянь зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів розвинення в ряд функцій компенсуючих джерел. Проведено порівнювальний аналіз розподілу температури вздовж товщини квадратної пластини з результатами, одержаними методом скінченних елементів. Як приклад розв'язана задача стаціонарної теплопровідності для п'ятишарового елемента оскління транспортного засобу при нагріванні плівковим джерелом тепла.

Ключові слова: *багатошарова пластина, складна форма, стаціонарна теплопровідність, плівкове джерело тепла.*

Предложен метод расчета стационарных температурных полей в многослойной пластине сложной формы при воздействии пленочных источников тепла. На внешних поверхностях пластини происходит конвективный теплообмен. Уравнения теплопроводности и граничные условия получены из вариационного уравнения теплового баланса. Решение задачи стационарной теплопроводности получено в трехмерной постановке на основе метода погружения. Производные искомой функции температуры вдоль поперечной координаты, входящих в уравнение теплопроводности, а также условия конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях пластини и условия равенства потоков тепла и температур на границах контакта слоев, заменяются их конечно-разностным представлением. Для этого используются симметричные разности. Выходная многослойная пластина произвольной формы в плане погружается во вспомогательную многослойную пластину, которая охватывает, с той же композицией слоев. Форма пластини, которая охватывает, выбирается таким образом, чтобы можно было получить простое аналитическое решение. В данной работе роль охватывающей пластини выполняет прямоугольная пластина с нулевыми условиями на контуре. Чтобы обеспечить выполнение реальных граничных условий, к вспомогательной пластине в каждой узловой точке по толщине вдоль исходного контура добавляются дополнительные компенсирующие источники. Их интенсивности определяются из условия удовлетворения выходным граничным условиям. Функции температуры в слоях и на боковой поверхности, а также плотности внутренних тепловых источников развиваются в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющие предельные условиям вспомогательной пластини, а также в ряд вдоль исходного контура. В результате преобразований система интегральных уравнений сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения в ряд функций компенсирующих источников. Проведен сравнительный анализ распределения температуры вдоль толщины квадратной пластини с результатами, полученными методом конечных элементов. В качестве примера решена задача стационарной теплопроводности для пятислойного элемента остекления транспортного средства при нагревании пленочным источником тепла.

Ключевые слова: *многослойная пластина, сложная форма, стационарная теплопроводность, пленочный источник тепла.*

1 Introduction

Analysis of the literature shows that the problem of thermal conductivity of multilayer plates on the outer surfaces of which convective heat exchange takes place have been fully studied for the plates of a standard shape in the plane [1, 2]. For non-standard plates FEM and R-functions are mainly applied [3, 4]. As a rule, internal heat sources in the objects under consideration are absent.

Therefore, the development of methods for calculating temperature fields in multilayer plates having an arbitrary shape, with convective heat transfer on the outer surfaces and the presence of distributed interlayer film heat sources is an urgent problem.

In publications [5-7] similar problems were solved on the basis of a two-dimensional theory. This paper proposes an approach based on a three-dimensional theory.

2 Formulation of the problem

We consider a multilayer plate which is assembled from I layers with constant thickness h_i . The plate is referred to the Cartesian system of coordinates, which is related to the outer surface of the first layer (Fig.1). On the coordinate plane, the plate occupies the area Ω bounded by the contour

$L: x_L=x(s), y_L=y(s)$. On the outside S_0, S_I and the side $\left(S_L = \sum_{i=1}^I S_L^i \right)$ surfaces of the plate are convective heat transfer.

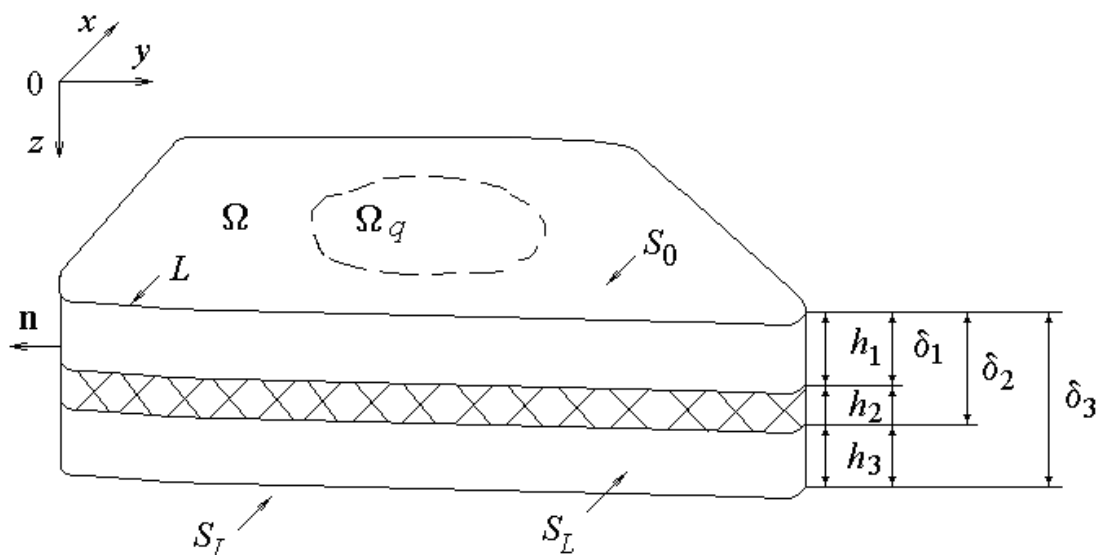


Fig.1 Multilayer plate

The temperature distribution in the layers of the plate is determined by the equation:

$$\Delta T^i = -\frac{Q^i}{k_i}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i, \quad (1)$$

where i is the layer number ($i = \overline{1, I}$); $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$; h_j is the thickness of the j -th layer, T^i is temperature of the i -th layer, Q^i is internal heat source of the i -th layer, k_i is thermal conductivity of the i -th layer.

Boundary conditions on the side surface:

$$\frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} + \frac{H_L^i}{k_j} (T^i - T_L^i) = 0, \quad (x, y, z) \in S_L^i, \quad (x, y, z) \in S_L^j, \quad i = \overline{1, I}, \quad (2)$$

where T_L^i is temperature on the side of the i -th layer, H_L^i is convective heat transfer coefficient on the side surface of the i -th layer.

Conditions of convective heat transfer on the upper and lower surfaces of the plate:

$$-\frac{\partial T^1}{\partial z} + \frac{H_1}{k_1}(T^1 - T_\infty^1) = 0, \quad z = 0, \quad \frac{\partial T^I}{\partial z} + \frac{H_I}{k_I}(T^I - T_\infty^I) = 0, \quad z = \delta_I, \quad (3)$$

where T_∞^1 and T_∞^I are environment temperatures at the boundary between the first and I -th layer, H_1 and H_I are coefficients of convective heat transfer on the outer and inner surface of the plate respectively.

Conditions for the equality of heat fluxes and temperatures at contact boundaries of layers, taking into account thermal loads on surfaces of the layers, are written as:

$$k_i \frac{\partial T^i}{\partial z} + k_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} - q_i = 0, \quad T^i = T^{i+1}, \quad z = \delta_i, \quad (4)$$

$$\text{where } q_i = \begin{cases} q_i^0, & x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2 \\ 0, & 0 \leq x < x_1, \quad x_2 < x \leq A, \quad 0 \leq y < y_1, \quad y_2 < y \leq B \end{cases},$$

q_i^0 is heat flux arising from the action of the film heat source located at the contact boundary of adjacent layers.

Derivatives of the desired function with respect to the transverse coordinate z included in equations (1) as well as conditions (3) and (4) will be replaced by their finite-difference representation. To do this, we use symmetric difference [8]:

$$\frac{\partial T_r^i}{\partial z} = \frac{T_{r+1}^i - T_{r-1}^i}{2\Delta_{h_i}}, \quad \frac{\partial^2 T_r^i}{\partial z^2} = \frac{T_{r+1}^i - 2T_r^i + T_{r-1}^i}{\Delta_{h_i}^2},$$

where $\Delta_{h_i} = \frac{h_i}{r_i}$ is grid spacing, $r_i + 1$ is the number of nodes in the i -th layer, T_r^i is the value of the desired function in the r -th node of the i -th layer.

As a result, the system of equations (1) takes the form:

$$T_{r-1}^i - (2 + \Delta_{h_i}^2 \left(\frac{d^2}{x^2} + \frac{d^2}{y^2} \right)) T_r^i + T_{r+1}^i = -\frac{\Delta_{h_i}^2}{k_i} Q_r^i. \quad (5)$$

The conditions of convective heat transfer on the upper and lower surfaces of the plate (3) and the conditions on the interface of the adjacent layers (4) take the following form:

$$-\left(\frac{T_1^1 - T_{-1}^1}{2\Delta_{h_1}} \right) + \frac{H_1}{k_1}(T_0^1 - T_\infty^1) = 0, \quad z = 0, \\ \left(\frac{T_{r+1}^I - T_{r-1}^I}{2\Delta_{h_I}} \right) + \frac{H_I}{k_I}(T_r^I - T_\infty^I) = 0, \quad z = \delta_I \quad (6)$$

$$k_i \left(\frac{T_{r+1}^i - T_{r-1}^i}{2\Delta_{h_i}} \right) + k_{i+1} \left(\frac{T_{r+1}^{i+1} - T_{r-1}^{i+1}}{2\Delta_{h_{i+1}}} \right) - q_i = 0, \quad T^i = T^{i+1}, \quad z = \delta_i \quad (7)$$

Conditions (6) and (7) allow excluding the values of the desired functions at the nodal points with the numbers: $r = -1$ and $r = r_i + 1$ in the i -th layer ($i = \overline{1, I}$), as well as with numbers $r = 0$ (in all layers, excepting the first layer) from the system (5)

As a result, we obtain a system of equations in the following form:

$$[A]\mathbf{T} = \mathbf{B} + [C]\mathbf{Q} \quad (8)$$

To solve the system (8) an approach similar to the immersion method [9] is applied. The original multilayer plate of arbitrary shape in the plane is immersed in the auxiliary covering multilayer plate with the same composition of layers. The shape of the enclosing plate is chosen so that it is possible to obtain a simple analytical solution. In this paper, a rectangular plate with zero conditions on the contour is used as a covering plate (Fig.2).

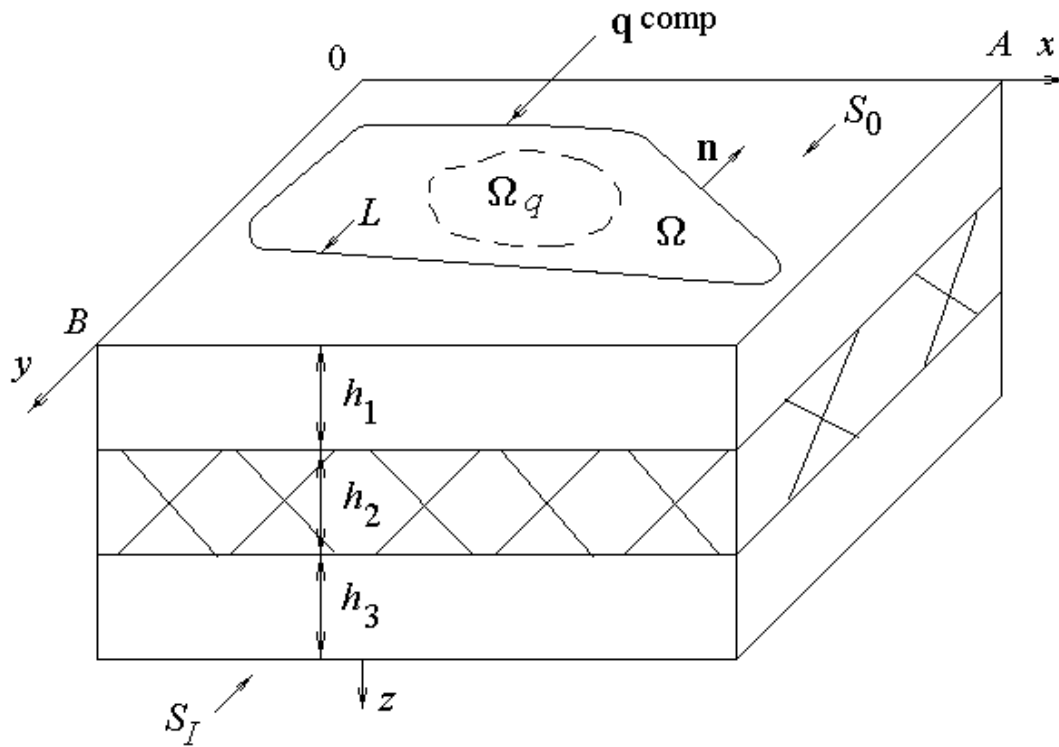


Fig.2 Auxiliary plate

The conditions of convective heat transfer on the upper and lower surfaces of the auxiliary plate coincide with the conditions of heat transfer on the surfaces of the original plate. To ensure that actual boundary conditions are met for the auxiliary plate at each node point in thickness along the border L additional compensating heat sources are attached $q_{ir}^{комп}(x, y)$, $(x, y) \in L$ and included in the system of heat conduction equations (8) in the form:

$$q_r^i(x, y) = \int_0^{s^*} q_{ir}^{комп}(x_L, y_L) \delta(x - x_L, y - y_L) ds, \quad r = 0, 1, 2,$$

where $\delta(x - x_L, y - y_L)$ – is two-dimensional Dirac δ -function, s^* is contour length L .

Satisfying the boundary conditions for the contour leads to a system of integral equations for determining the distributions of compensating sources:

$$\mathbf{B}^L \mathbf{T} | \mathbf{q}^{комп}(x, y) | = 0, \quad x, y \in L. \tag{9}$$

Further $T_r^i(x, y)$ and $q_r^i(x, y)$ are decomposed into trigonometric series in functions satisfying the boundary conditions at the boundary of the enclosing rectangular plate:

$$T_r^i(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N T_{mnr}^i \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B},$$

$$q_r^i(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mnr}^i \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B},$$

where A and B – side lengths of the enclosing rectangular plate.

In addition, the functions T_r^i and q_r^i , included in the boundary conditions of the original plate are decomposed in a row along the contour L [10-12]:

$$T_r^i(s) = \sum_{\mu=0}^{\mu^*} \sum_{\alpha=1,2} T_{\alpha\mu}^i d_{\alpha\mu}(s), \quad q_r^i(s) = \sum_{\mu=0}^{\mu^*} \sum_{\alpha=1,2} q_{\alpha\mu}^i d_{\alpha\mu}(s),$$

$$\text{where } d_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)], \quad d_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)], \quad \gamma(s) = \frac{2\pi \int_0^s d\tilde{s}}{\int_0^{s^*} d\tilde{s}}, \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi.$$

As a result of transformations, the system of integral equations (9) is reduced to a system of linear algebraic equations for coefficients of expansion in a series of functions of compensating sources $q_{\mu\alpha}^i$.

3 Numerical examples

A comparison of the results calculated on the basis of the proposed approach with the results obtained in [1] using the finite element method and on the basis of two-dimensional theory has been carried out. In this paper a square plate is considered.

Initial data are as $I = 5$ (the number of layers); $l_1 = l_2 = 0,9$ m (linear dimensions of the plate); $h_1 = 0,005$ m, $h_2 = 0,003$ m, $h_3 = 0,015$ m, $h_4 = 0,002$ m, $h_5 = 0,020$ m (layer thickness); $k_i = 1,60$ W/(m·°C) ($i = 1, 3, 5$); $k_i = 0,17$ W/(m·°C) ($i = 2, 4$) (thermal conductivity coefficients of the layer material); $H_1 = 80$ W/(m²·°C), $H_1 = 25$ W/(m²·°C) (convective heat exchange coefficients); $T_\infty^1 = -16$ °C, $T_\infty^1 = 20$ °C (ambient temperatures).

Fig. 3 shows the temperature distribution across the thickness of the five-layer plate at the midpoint. The calculation results are shown with a solid line. The results obtained by the finite element method are shown with a dashed line; results on the basis of the two-dimensional theory are presented with markers.

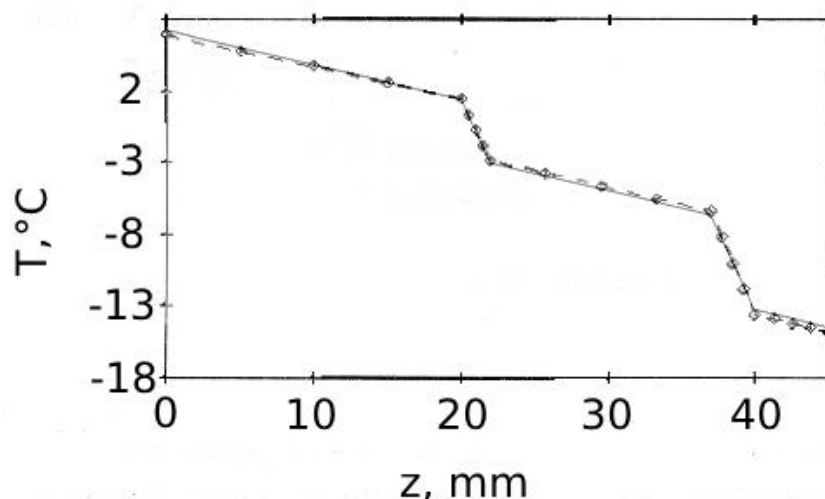


Fig.3 Temperature distribution over the thickness of a five-layer plate

Therefore we consider the thermal state of a five-layer plate, the design diagram of which is shown in Fig.4. The location of the heat source is shown in the figure with a dashed line.

The plate has the following geometrical and thermal characteristics: number of layers $I = 5$; sizes shown in Fig. 4, $l_1 = 0,95$ m, $l_2 = 0,55$ m, $l_3 = 0,89$ m, $l_4 = 0,46$ m, $R_1 = 0,15$ m, $R_2 = 0,15$ m, $R_3 = 0,17$ m, $R_4 = 0,16$ m; layer thickness $h_1 = 0,005$ m, $h_2 = 0,003$ m, $h_3 = 0,01$ m, $h_4 = 0,002$ m, $h_5 = 0,012$ m; thermal conductivity coefficients of layer material $k_i = 1,61$ W/(m·°C) ($i = 1, 3, 5$); $k_i = 0,17$ W/(m·°C) ($i = 2, 4$); convective heat transfer coefficients $H_1 = 90$ W/(m²·°C), $H_1 = 40$ W/(m²·°C); ambient temperature: $T_\infty^1 = -20$ °C, $T_\infty^1 = 20$ °C.

The power of the film heat source located between the first and second layers: $q_1 = 4000 \text{ W/m}^2$, and its dimensions (see Fig.4) – $a = 1 \text{ m}$, $b = 0,6 \text{ m}$.

On the contour of the original plate $T_L^i = 0$.

Fig.4 shows the temperature distribution over the plate thickness in section $A - A$ indicated in the design diagram with a thick dashed line.

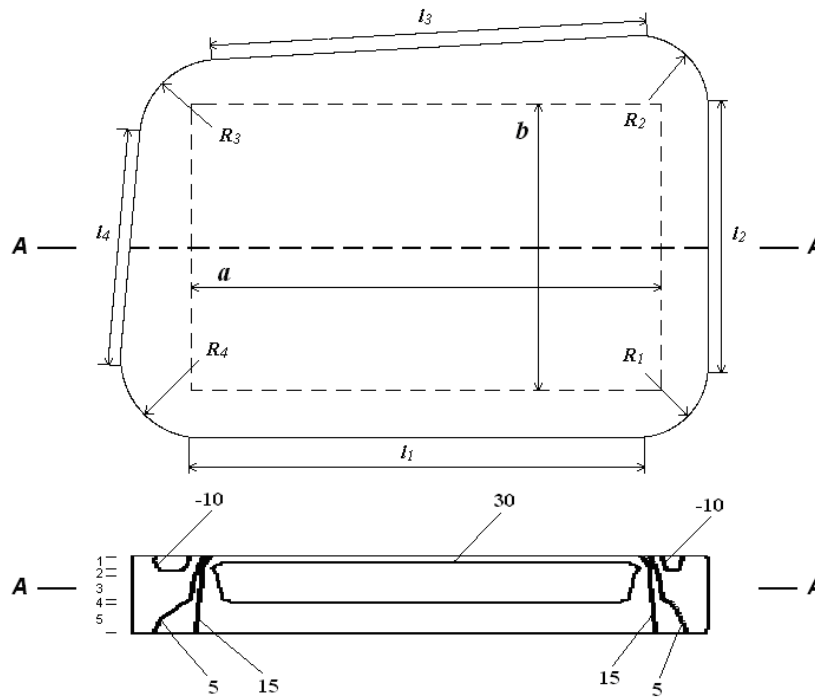


Fig.4 The design scheme and the temperature distribution across the thickness of the plate in cross section $A - A$

Fig. 5–7 show the temperature fields on the outer surfaces of the plate and the interface of the 1st and 2nd layers. On the outer surface of the first layer (Fig. 5) and the surface containing the heat source (Fig. 6) a sharp change in temperature is observed near the edge of the region occupied by the heat-generating film. Such changes can lead to significant temperature stresses in the layers of the plate. On the outer surface of the fifth layer (Fig. 7) the temperature takes only positive values.

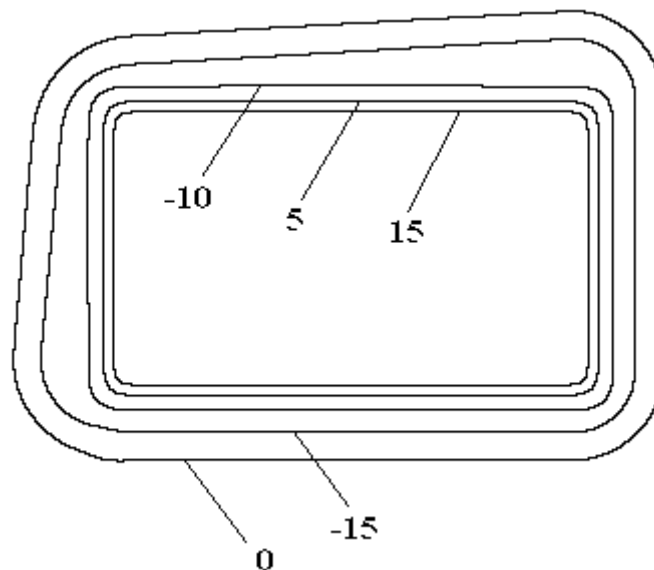


Fig.5 Surface temperature distribution S_1

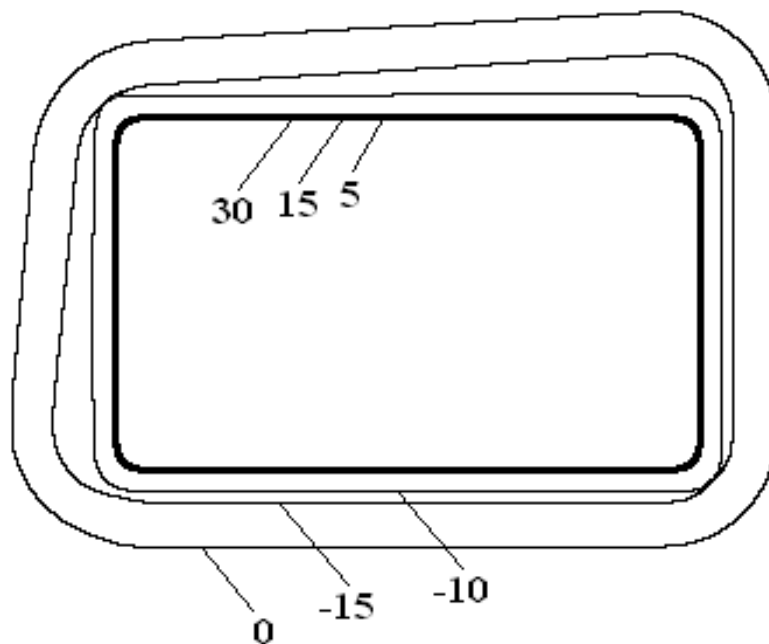


Fig.6 Temperature distribution on the surface S_2 (surface with heat source)

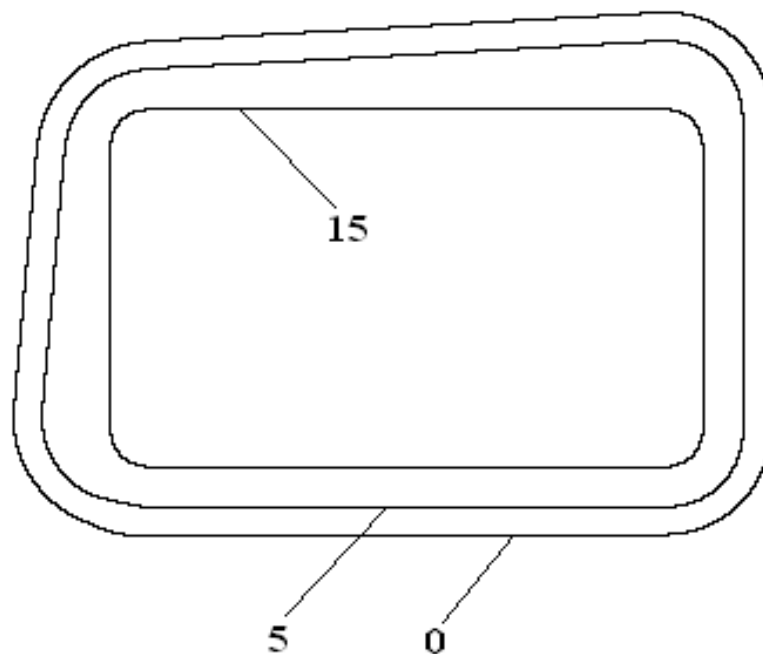


Fig.7 Temperature distribution on the surface S_5

4 Conclusion

The method for solving problems of stationary heat conduction in a three-dimensional formulation for multilayer plates has been developed. It allows describing the thermal state of non-standard plates.

The comparison of the obtained results with the results presented in [1] confirms the reliability of the proposed approach. The calculations carried out for the plate shown in Fig. 4 demonstrate the capabilities of the method.

The proposed approach can be applied in designing heating systems for multilayer glazing of various vehicles.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kantor B.Ya., Smetankina N.V., Shupikov A.N. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates. *Int. J. Solids and Structures*. 2001. Vol. 38. P. 8673 – 8684.
2. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
3. Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. редакцией А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1982. 480 с.
4. Рвачев В.Л., Слесаренко А.П., Литвин М.М. Расчет температурного поля кусочно-однородных тел сложной формы. *Теплофизика и теплотехника*. 1977. Вып. 32. С. 18–22.
5. Сметанкіна Н.В., Свет Є.В. Розрахунок температурних полів у багатошарових пластинах складної форми. *Машинознавство*. 2003. № 4. С. 8–12.
6. Сметанкіна Н.В., Свет Є.В., Шупиков А.Н. Задача стационарной теплопроводности многослойных пластин сложной формы в плане. *Пробл. машиностроения*. 2004. Т. 7, № 3. С. 25–31.
7. Smetankina N.V., Shupikov A.N., Svet Ye.V. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates. *Trans. ASME. J. of Heat Transfer*. March, 2007. Vol. 129. P. 335–341.
8. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975. 632 с.
9. Smetankina N. V., Shupikov A. N., Sotrikhin S. Yu., Yareschenko V. G. Dynamic response of an elliptic plate to impact loading. Theory and experiment. *Int. J. of Impact Engng*. 2007. Vol. 34 № 2 P. 264-276.
10. Zielinski A.P. On curvilinear distribution expressed by double Fourier series. *J. Appl. Math. and Phys.* 1980. Vol. 31. P. 717–729.
11. Zielinski A.P. Metoda trygonometrycznych szeregów określonych na konture w zastosowaniu do płyt o brzegu swobodnym i swobodnie podpartym. *Rozpr. inż.* 1982. Vol. 30, № 2. P. 151–165.
12. Zielinski A.P. A contour series method applied to shells. *Thin-Walled Struct.* 1985. N 3. P. 217–229.

REFERENCES

1. B. Ya. Kantor, N. V. Smetankina, A. N. Shupikov “Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates”. *Int. J. Solids and Structures*, vol. 38, pp. 8673 – 8684, 2001.
2. V. V. Bolotin, Iu. N. Novichkov. “Mechanics of multilayer structures” Moskva: Mashinostroenie, 1980. 375 p. [in Russian]
3. A. S. Sakharov The finite element method in solid mechanics. Kyiv: Vyshcha shkola, 1982, 480 p. [in Russian]
4. V. L. Rvachev, A. P. Slesarenko, M. M. Litvin “Calculation of the temperature field of piecewise homogeneous bodies of complex shape” *Teplofizika i teplotehnika*, no. 32, pp.18–22, 1977. [in Russian]
5. N. V. Smetankina, Ye. V. Svet “Calculation of temperature fields in multilayer plates of complex shape” *Mashinoznavstvo*, vol. 4, pp.8–12, 2003. [in Ukrainian]
6. N. V. Smetankina “Modeling of non-stationary heat condition in laminated strips” Seventeenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference (May 19–20, 2016, Kyiv): Conference materials. vol. 1. Differential and integral equations and its applications. Kyiv: NTUU «KPI», pp. 35-38, 2016.
7. N. V. Smetankina, A. N. Shupikov, Ye. V. Svet “Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates”, *Trans. ASME. J. of Heat Transfer*, vol. 129, pp. 335–341, March, 2007.
8. N. S. Bakhvalov. *Numerical methods*. Nauka, pp. 632, 1975. [in Russian]
9. N. V. Smetankina, A. N. Shupikov, S. Yu. Sotrikhin, V. G. Yareschenko. “Dynamic response of an elliptic plate to impact loading. Theory and experiment”. *Int. J. of Impact Engng*, vol. 34, no. 2, pp. 264-276, 2007.
10. A. P. Zielinski “On curvilinear distribution expressed by double Fourier series” *J. Appl. Math. and Phys.* vol. 31, pp. 717–729, 1980.
11. A. P. Zielinski “Metoda trygonometrycznych szeregów określonych na konture w zastosowaniu do płyt o brzegu swobodnym i swobodnie podpartym” *Rozpr. inż.*, vol. 30, no. 2. pp. 151–165, 1982.
12. A. P. Zielinski “A contour series method applied to shells” *Thin-Walled Struct*, no. 3, pp. 217–229, 1985.

Smetankina Natalia Volodymyrivna is Dr. Sci. (Tech.), Prof.; A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine, Kharkiv, Pozharsky str., 2/10, 61046; Ukraine; e-mail: nsmetankina@ukr.net; ORCID: 0000-0001-9528-3741.

Malykhina Alyona Igorevna is postgraduate student; A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine, Kharkiv, Pozharsky str., 2/10, 61046; Ukraine; e-mail: alyonamalukhina@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9659-2562.

Merkulov Dmytro Oleksandrovych is postgraduate student; A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine, Kharkiv, Pozharsky str., 2/10, 61046; Ukraine; e-mail: kulmerov@gmail.com; ORCID: 0000-0001-5697-200X.

Postnyi Oleksii Vitaliiovych is postgraduate student; A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine, Kharkiv, Pozharsky str., 2/10, 61046; Ukraine; e-mail: alekh.po@gmail.com; ORCID: 0000-0002-3151-3891.

Сметанкина Наталья Владимировна - доктор физико-математических наук. (Техн.), Проф.; Институт проблем машиностроения им. А. Подгорного НАН Украины, Харьков, ул. Пожарского, 2/10, 61046; Украина; электронная почта: nsmetankina@ukr.net; ORCID: 0000-0001-9528-3741.

Малыхина Алена Игоревна - аспирант; Институт проблем машиностроения им. А. Подгорного НАН Украины, Харьков, ул. Пожарского, 2/10, 61046; Украина; электронная почта: alyonamalukhina@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9659-2562.

Меркулов Дмитрий Александрович - аспирант; Институт проблем машиностроения им. А. Подгорного НАН Украины, Харьков, ул. Пожарского, 2/10, 61046; Украина; электронная почта: kulmerov@gmail.com; ORCID: 0000-0001-5697-200X.

Постный Алексей Виталиевич - аспирант; Институт проблем машиностроения им. А. Подгорного НАН Украины, Харьков, ул. Пожарского, 2/10, 61046; Украина; электронная почта: alekh.po@gmail.com; ORCID: 0000-0002-3151-3891.

Сметанкина Наталія Володимирівна - доктор фізико-математичних наук. (Технічна.), Проф.; Інститут проблем машинобудування ім. А. Підгорного НАН України, Харків, вул. Пожарського, 2/10, 61046; Україна; електронна пошта: nsmetankina@ukr.net; ORCID: 0000-0001-9528-3741.

Малыхина Олена Игорівна - аспірант; Інститут проблем машинобудування ім. А. Підгорного НАН України, Харків, вул. Пожарського, 2/10, 61046; Україна; електронна пошта: alyonamalukhina@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9659-2562.

Меркулов Дмитро Олександрович - аспірант; Інститут проблем машинобудування ім. А. Підгорного НАН України, Харків, вул. Пожарського, 2/10, 61046; Україна; електронна пошта: kulmerov@gmail.com; ORCID: 0000-0001-5697-200X.

Посний Олексій Віталійович - аспірант; Інститут проблем машинобудування ім. А. Підгорного НАН України, Харків, вул. Пожарського, 2/10, 61046; Україна; електронна пошта: alekh.po@gmail.com; ORCID: 0000-0002-3151-3891.

UDC 519.72

The impact of usage of post object-oriented technologies on defect reduction in software maintenance

K.A. Nagorni¹, I.O. Martinkus¹, M.V. Tkachuk¹

¹V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Square 4, Kharkov, 61022, Ukraine
e-mail: imartinkus@gmail.com

The article is dedicated to software quality improvement research within the maintenance phase based on post-object-oriented technologies. An important problem of the maintenance phase is surveyed, namely, the crosscutting functionality problem. Mechanisms of post-object-oriented technologies have been reviewed and basic tasks to be resolved have been formulated in order to reach the final goal of the research: defect reduction during the maintenance phase. The post object-oriented technologies utilization framework for software quality improvement based on a collection of 4 heuristic assumptions has been introduced. The conceptual scheme of the framework has been presented. An applied 2-steps procedure for defect reduction assessment based on quantitative crosscutting-functionality and defect metrics has been described. Twelve results of the experiments concerning calculation of the residual defect number have been presented and analyzed.

Keywords: *post object-oriented technology, crosscutting functionality, software, defect, maintenance, metric.*

Стаття присвячена дослідженню підвищення якості розробки програмного забезпечення на фазі супроводу із використанням пост об'єктно-орієнтованих технологій. Однією із особливостей фази супроводу програмного забезпечення є постійна зміна вимог користувачів, що на рівні вихідного коду призводить до проблеми наскрізної функціональності, яка в свою чергу викликає зростання рівня дефектів. Для вирішення проблеми наскрізної функціональності запропоновано використати механізми пост об'єктно-орієнтованих технологій та сформульовані базові завдання для досягнення фінальної цілі дослідження: зниження рівня дефектів під час фази супроводу. Представлений фреймворк для підвищення якості програмних систем із використанням пост об'єктно-орієнтованих технологій, який базується на концепті 3-вимірного простору, що поєднує у собі тип системи та вид пост об'єктно-орієнтованої технології, із використанням якої передбачається зниження рівня наскрізної функціональності у цільовій системі. Даний фреймворк базується на чотирьох базових евристичних припущеннях, що пов'язують рівень дефектів, наскрізну функціональність, пост об'єктно-орієнтовані технології та цільову програмну систему. Наведена концептуальна схема та запропонована двошагова процедура із використання даної пост об'єктно-орієнтованої технології для зменшення рівня дефектів на фазі супроводу цільової програмної системи. Процедура передбачає отримання кількісних оцінок на базі метрик наскрізної функціональності, таких як: рівень присутності наскрізної функціональності CF_{ratio} , її ступінь розсіювання DOS, залишковий рівень наскрізної функціональності RCR_{ratio} , та кількість дефектів у цільовій програмній системі NoD. Наведені дані 12 практичних експериментів із визначення залишкового рівня дефектів, що згруповані за чотирма типами програмних систем та трьома пост об'єктно-орієнтованими технологіями, такими як: аспектно-орієнтована технологія, властивість-орієнтована технологія та контекстно-орієнтована технологія. Результати відповідних експериментів були проаналізовані, що дало змогу проранжувати згадані вище пост об'єктно-орієнтовані технології за залишковим рівнем дефектів в досліджених системах та визначити найменш та найбільш ефективну технологію для використання в процесі супроводу програмних систем.

Ключові слова: *пост об'єктно-орієнтовані технології, наскрізна функціональність, програмне забезпечення, дефекти, супроводжуваність, метрики.*

Статья посвящена исследованию повышения качества разработки программного обеспечения на фазе сопровождения с использованием пост объектно-ориентированных технологий. Одной из особенностей фазы сопровождения программного обеспечения является постоянное изменение требований пользователей, на уровне исходного кода приводит к проблеме сквозной функциональности, которая в свою очередь вызывает рост уровня дефектов. Для решения проблемы сквозной функциональности предложено использовать механизмы пост объектно-ориентированные технологии и сформулированы базовые задачи для достижения финальной цели исследования: снижение уровня дефектов во время фазы сопровождения. Представленный фреймворк для повышения качества программных систем с использованием пост объектно-ориентированных технологий, основанный на концепте 3-мерного пространства, сочетает в себе тип системы и вид пост объектно-ориентированной технологии, с использованием которой предполагается снижение уровня сквозной функциональности в целевой системе. Данный фреймворк базируется на четырех базовых эвристических предположениях, связывающих уровень дефектов, сквозную функциональность, пост объектно-ориентированные технологии и целевую программную систему. Приведенная концептуальная схема и предложена двухэтапная процедура по использованию данной пост объектно-ориентированной технологии для уменьшения уровня дефектов на фазе сопровождения целевой программной системы. Процедура предусматривает получение количественных оценок на базе метрик сквозной функциональности, таких как: уровень присутствия сквозной функциональности CF_{ratio} , ее степень рассеивания DOS, остаточный уровень сквозной функциональности RCR_{ratio} , и количество дефектов в целевой программной системе NoD. Приведенные данные 12 практических экспериментов по определению остаточного уровня дефектов, сгруппированы по четырем типам программных систем и тремя пост объектно-ориентированными технологиями, такими как: аспектно-ориентированная технология, свойство-ориентированная технология и контекстно-ориентированная технология. Результаты соответствующих экспериментов были проанализированы, что позволило проранжировать упомянутые выше пост объектно-ориентированные технологии по остаточному уровню Дефекты в

исследованных системах и определить наименее и наиболее эффективную технологию для использования в процессе сопровождения программных систем.

Ключевые слова: пост объектно-ориентированные технологии, сквозная функциональность, программное обеспечение, дефекты, сопровождённость, метрики.

1 Introduction. Problem actuality and research goals

Nowadays object-oriented programming (OOP) is the most popular technology for software system development and maintenance [1]. For the maintenance of legacy software systems (LSS) one of the important problems is continuous modifications of major part of their sub-systems due to changes in user requirements and the development of new components to meet new user requirements. Permanent changes in LSS components lead to design instability which causes a so-called crosscutting functionality (CF) problem [2; 3]. The OOP approach increases source code complexity and does not resolve this issue in effective way, especially during a maintenance process of large legacy software systems.

During the last two decades post object-oriented technologies (POOT) have emerged and been intensively designed. The most known fully-fledged POOT are: aspect-oriented software design (AOSD) [4], feature-oriented software design (FOSD) [5] and context-oriented software development (COSD) [6]. These POOTs use core principles of the object-oriented software design but additionally include a complementary feature-set to resolve the crosscutting functionality problem. On the other hand, utilization of any of mentioned POOT for LSS maintenance results in extra time and efforts interconnecting software development. Hence most of researchers accentuate the necessity to elaborate approaches for the complex estimation of POOT's effectiveness usage in real-life software projects, see e.g. in [7; 8; 9]. Besides, the issues of relationship between specific features of different POOTs and software design defects caused by CF [10] as well as development of such sophisticated solutions as software product lines with FOSD [11] and evaluation of software quality with usage of AOSD [12] are presented and discussed intensively nowadays. Nevertheless a lack of applied researches related to the impact of POOTs on software defects behavior with respect to the factor of crosscutting functionality has to be emphasized.

Taking into account the above-mentioned issues the research goal of this paper is to assess the impact of different POOTs on defect reduction in software maintenance and to provide some methodological recommendations for choosing an appropriate POOT in real-life projects. In order to reach this research goal the following tasks are to be resolved:

- to analyse some critical CF-issues in maintenance of LSS by utilizing traditional OOP-methodology;
- to give a short review of the knowledge-oriented approach to the estimation of POOTs effectiveness;
- to define metrics to estimate a CF level and a method to calculate a number of software defects in LSS;
- to propose the conceptual scheme of quality improvement of software maintenance using POOTs;
- to check the proposed approach experimentally, to analyse the results obtained and to formulate some praxis-oriented recommendation for usage of POOTs in maintenance of different LSS.

The possible solutions for these tasks are presented below in more details, as well as, the outlook of the next steps concerning this research.

2 A framework for usage of post object-oriented technologies to improve a software quality in software maintenance.

A lot of studies investigate complexity of the maintenance process of OOP-based legacy software systems [13; 14], especially a crosscutting functionality (CF) problem. The crosscutting problem is a functionality which can't be modularized at the source code level, although represents a particular businesses feature from the requirement perspective. Some well-known representatives of the CF are: data validation, transaction management, logging, exception handling, etc. Complexity of the maintenance process of a software system which includes the CF increases dramatically [14]. There are some peculiarities which are common to those crosscutting features, namely: complication of software

requirements traceability; decrease of readability and understandability of diverse design artifacts; source code redundancy; lack of modularity which prevents further reuse of such CF-solutions.

Separation of Concerns (SoC) [10] is a principle which resolves CF problem. It presents a decomposition phase and a non-invasive composition phase of the CF-source code and the LSS basic source code. At the decomposition phase the source code of the crosscutting functionality should be localized, extracted and isolated, from the rest of the LSS-code, into well-structured modules (CF-modules). The composition phase involves reassembling of well-structured CF-modules with the LSS CF-free modules. Realization of the SoC principle allows solving CF-peculiarities listed above and implementing software system configuration in order to add or remove functionality, if it is required.

As mentioned in Section 1, there are three fully-fledged approaches in POOT-domain, namely: AOSD, COSD, FOSD. To represent main features of these approaches an interaction between basic OO-components and POOT-components should be restated [15]. AOSD was proposed about two decades ago in Xerox PARC research center, and now it is implemented in vast majority of programming languages, like Java, .Net, C++, JavaScript and so on. CF-related source code should be isolated in a special module, which is called the aspect. Further composition of this module and non-crosscutting functionality source code is based on the idea of intersection point – the point-cut and the injection. Schematically this interaction is shown in Fig. 1(a), where the white vertical rectangles C1, C2, C3 represent OOP-classes and gray horizontal rectangles A1, A2, A3 represent the aspects.

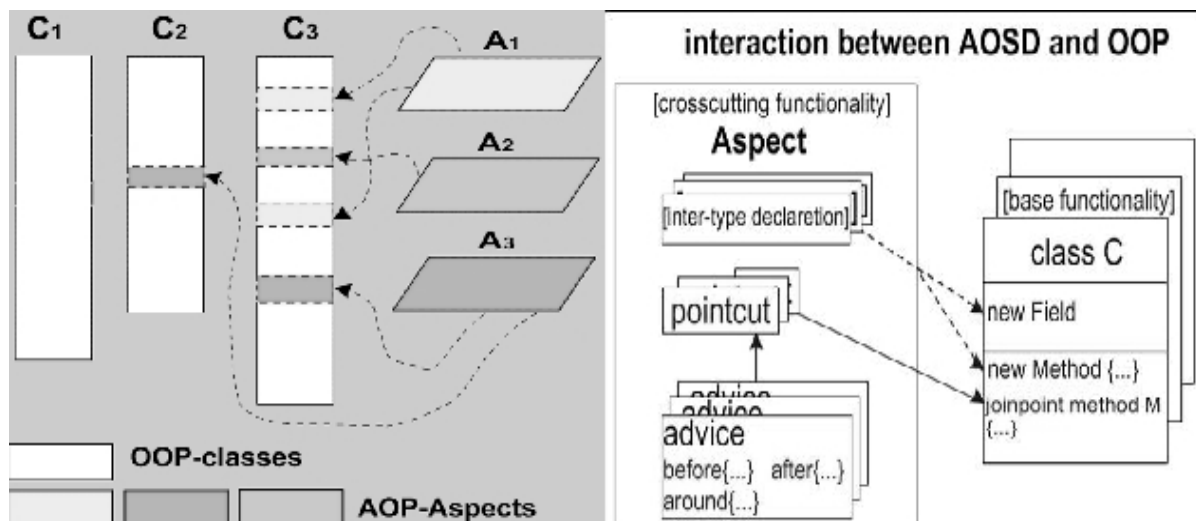


Fig. 1 AOSD: (a) – the conceptual scheme; (b) – the implementation facets [15]

A specific structure of the aspect is represented in Fig. 1(b). It includes point-cut, advice and inner-type declarations. The core function of point-cut is to define a set of join points between the aspect and the basic methods in OO-classes in order to inject advice source code. Advice represents a piece of source code of former CF, in other words it is a special kind of function written in a OO-programming language (e.g. Java). There are three types of advice: before – is invoked before target method execution, after – is invoked after target method execution, around – is invoked instead of a target method execution. Also it is possible to declare additional members of a target class such as fields and methods via inner-type declarations. Two other technologies, FOSD and COSD can be represented and analyzed in the similar way (see [15] for more details).

Even a short overview of CF issues shows that to make a decision about the effectiveness of using an appropriate POOT to resolve CF-problem in a given LSS, we need to consider a number of factors, which have to be formalized and evaluated in the appropriate modeling approach. This approach is elaborated in [15] and its main idea is to use the 3-D modeling information space which is graphically shown in Fig. 2. According to this modeling framework the integrated effectiveness level of a POOT usage depends on two interplaying factors, namely: 1) what type of LSS (System Type) has to be modified with an appropriate POOT; 2) what kind of POOT is used to eliminate the CF in this LSS.

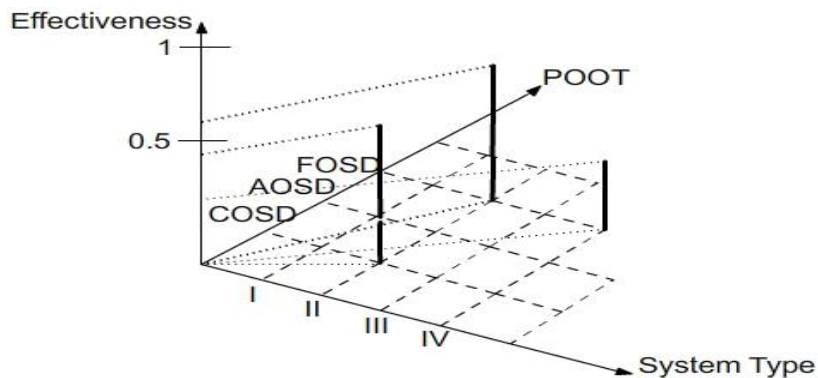


Fig. 2 The 3-D space for assessment of POOTs effectiveness [15]

In turn, an appropriate System Type for any given LSS can be defined as a set of two interconnected factors, namely: 1) the target software system Structural Complexity which can be evaluated from an appropriate collection of object-oriented source code metrics; 2) the system’s Requirement Rank which depicts the complex characteristics of functional requirements in the target software system (Fig. 3).

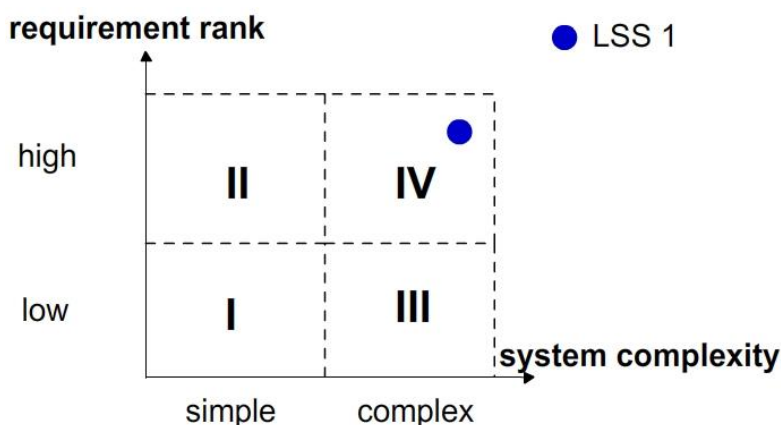


Fig. 3 The 2-D space to define the System Type for the target LSS

More details concerning the framework for estimation of effectiveness coefficient of POOTs usage in maintenance of different types of LSS can be found in [15].

In order to realize our research goal: to elaborate the approach to assessing an impact of POOT usage on defect reduction in software maintenance, we propose to formulate a collection of heuristic assumptions. Those assumptions are based on the study of modern information sources and on the generalization of our own experience of using different POOTS in software development and maintenance.

Assumption 1. A set T of post object-oriented technologies for software development does exist. AOSD, FOSD, COSD belong to this set.

$$(POOT)_j \in T, j = 1, 2, 3... \tag{1}$$

Assumption 2. Each LSS might relate to some particular system type, i.e. a set of system types S does exist.

$$(SysType)_i \in S, i = 1, 2, 3... \tag{2}$$

Assumption 3. CF-level decrease in a target LSS is possible by using one of the existent POOT, although it is accompanied with additional costs needed for software modification of a target LSS.

$$\Delta(CFR)_{i,j} = \delta((SysType)_i, (POOT)_j), \tag{3}$$

where $\Delta(CFR)_{i,j}$ is a ratio of CF-level decrease caused by usage of a j -th POOT within i -th LSS-type maintenance; $\delta()$ is a functional dependency between the corresponding values.

Assumption 4. There exists a positive correlation between crosscutting functionality level and an average number of defects in a target LSS, which are presented during the LSS maintenance process, i.e. there exists some functional dependency $\mu()$:

$$NoD((SysType)_i, (POOT)_j) = \mu(\Delta(CFR)_{i,j}). \tag{4}$$

It should be mentioned that the functions δ and μ cannot be defined in an analytical way, because there are a lot of weakly-formalized and complicated factors which characterize software development process in general, and the LSS maintenance phase in particular. Therefore we have decided to construct the appropriate metrics and to elaborate a procedure of assessing the impact of POOTs on possible software defects reduction in maintenance of LSS.

Taking into account the assumptions (1) - (4) mentioned above, we propose a conceptual scheme for usage an appropriate POOT in order to reduce a number of defects during maintenance of a given LSS. The elaborated conceptual scheme is shown on Fig. 4, and it can be described briefly as a set of the following steps:

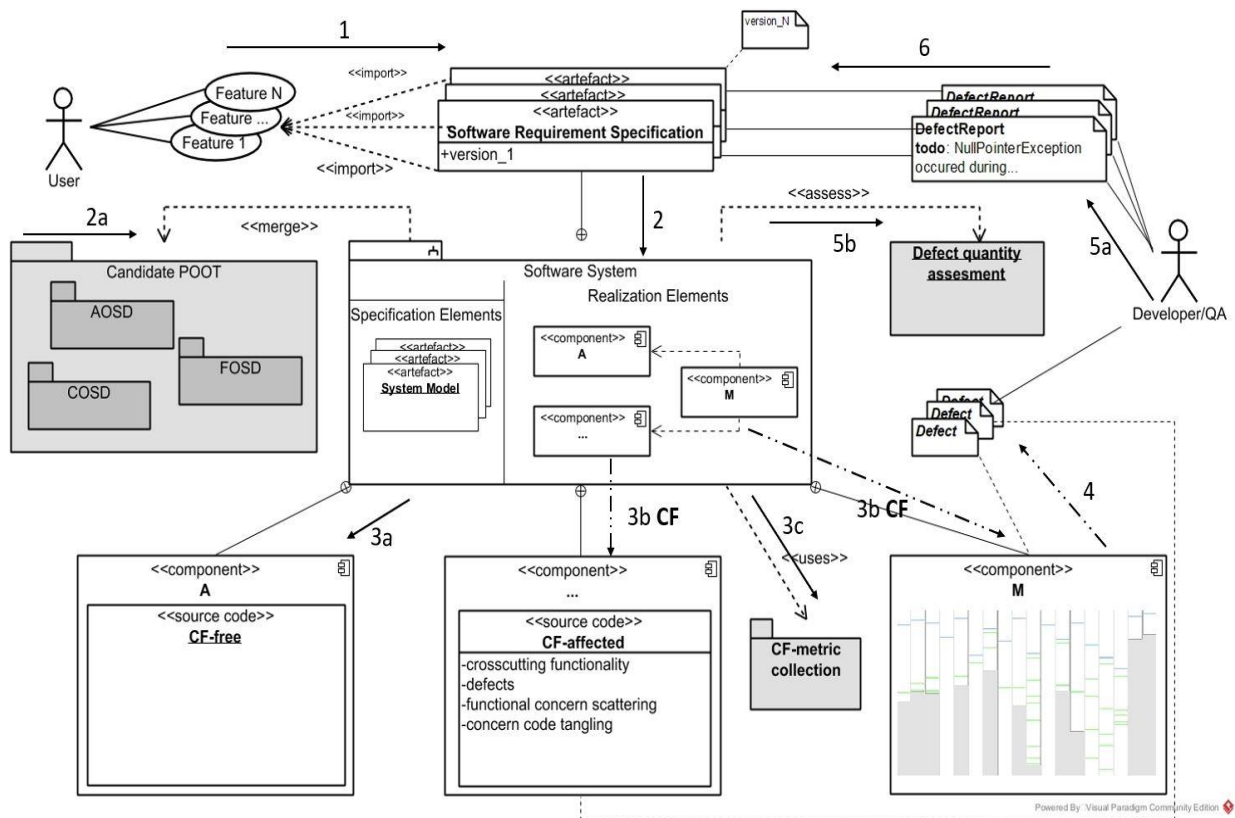


Fig. 4 The proposed conceptual scheme

1. Some User (presented as a role on the scheme) requires some additional/new features to be added to a target LSS. These user’s requirements have to be transformed into a new version of a software requirement specifications (SRS).

2. A given version of SRS precipitates the development a new version of a target LSS which embraces a set of project artifacts: a system model (e.g. architectural model, information model, etc.) and its realization, namely: a set of target software components.

3. A set of developed software components (source code) can be divided into the following groups, namely:

- a) a subset of components which are “healthy”, that is, they do not contain source code with CF;
 - b) a subset of components “infected” with a CF-code which leads to code scattering and tangling with a source code of another functional concern;
 - c) a collection of CF-focused metrics to be constructed in order to assess a level of CF, its negative factors, etc.;
 - d) using this metrics an appropriate CF-status of a given LSS has to be defined.
4. A current CF-status in LSS leads to some software defects to be fixed by Developer/Quality Assurance (QA) shown in conceptual scheme (Fig. 4).
 5. A Developer/QA takes a care of assessing the number of defects, namely
 - a) Completion of a defect reports;
 - b) Computing a number of defects.
 6. Basing on a given defect report the appropriate changes can be done in the next SRS versions.

The steps (1) - (6) in the real LSS maintenance cycle have to be repeated iteratively. Basing on the results obtained from 3.c (usage of a CF-metrics collection) and 5.b (assessing a number of defects), an effective POOT (from AOSD, COSD, and FOSD respectively) can be chosen within 2.a (see these logically interconnected icons shown in grey in Fig. 4).

3 The 2-steps procedure to assess the defect reduction with usage of different POOTs in software maintenance

According to the proposed conceptual scheme (Fig. 4), and taking into account formulas (3) and (4) in Section 2, it is possible to construct the quantitative metrics and to elaborate the appropriate procedure to

- 1) assess a crosscutting functionality level in a given LSS;
- 2) compute a number of software defects in this system before and after the usage of an chosen POOT.

To perform these 2 steps we have to localize source code which includes a particular CF in a given LSS, and for this purpose we could use some already existing source code analysis tools for CF localization, CIDE, for example [16]. After that it is possible to define a specific crosscutting coefficient of a particular CF in the system indicated as CF_{ratio} . This coefficient shows a ratio between OOP-classes “damaged” by a particular CF and all other OOP-classes in the given LSS, e.g. business logic realization without subordinate classes of a framework. This coefficient can be represented as:

$$CF_{ratio} = \frac{C_{cf}}{C_{cf} + C} \quad (5)$$

where C_{cf} is a number of programming classes in LSS with CF, C is a number of classes free of CF. Obviously, that $CF_{ratio} \in [0;1]$, and if $CF_{ratio} = 0$, a particular functionality is free from crosscutting; and if $CF_{ratio} = 1$, all programming classes are “damaged” with a particular CF.

After obtaining CF_{ratio} it is possible to calculate a residual crosscutting ratio (RCR) indicated as RCR_{ratio} . This metric, based on DOS (Degree of Scattering) value is proposed in [15]. But this metric actually does not allow assessing a “damage” degree caused by a particular CF, therefore we propose to refine DOS-metric in the following way

$$RCR_{ratio} = DOS \cdot CF_{ratio} \quad (6)$$

where DOS is a Degree of Scattering; and a CF_{ratio} is a specific crosscutting weight ratio of a particular CF. Similarly to CF_{ratio} , a value of $RCR_{ratio} \in [0;1]$, and if $RCR_{ratio} = 0$, CF is localized in a separate module and there is no more crosscutting; if $RCR_{ratio} = 1$, CF affects a whole LSS, and is uniformly distributed. Thus the proposed quantitative metrics (5) and (6) give to an expert a possibility to assess a distribution nature of a CF and to estimate a “CF-damage” for a whole given LSS.

As a next step we need to compute a number of defects (NoD) in a given LSS, and this can be done directly by using a special function known as a DefectCount (), namely

$$NoD = DefectCount(LSS). \quad (7)$$

This function can be realized by defect tracking focused on corresponding features of the target software system before and after POOT-modification of the source code.

In our research we have used one of existent defect-tracking system as a defect collector for POOT-modified source code of features in the target LSS. Then direct observation and calculation of a number of defects have been applied to get the final result.

4 Experimental results and their analysis

Taking into account the workflow in the proposed conceptual scheme (Fig. 4) and using the quantitative metrics given in formulas (5)–(7) the appropriate computerized experiments have been performed [17]. The final results are presented briefly in Table 1 and in Fig. 5 – 6. The number of software defects has been computed basing on the project reports obtained from the defect-tracking system and grouped according to the 4 system types: I, II, III and IV.

Table 1 – Number of defects

POOT	Basic number of defects in LSS (OOP-based) NoD				Number of defects in LSS (POOT-modified version) NoD				Residual number of defects (%)			
	System type				System type				System type			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
COSD	28	68	46	83	6	19	13	18	21.4	27.9	28.8	21.7
FOSD	28	68	46	83	4	24	22	56	14.3	35.3	47.8	67.4
AOSD	28	68	46	83	4	14	16	27	14.3	20.6	34.7	32.5

The first group of table columns shows NoD for LSS of corresponding types where maintenance is based on OOP approach. It is evident that when the System Type becomes more and more complex NoD increases dramatically. For further calculations this defect quantity is considered as 100%. The second group of columns represents NoD for the same LSS after their modification with usage of appropriate POOTs: COSD, FOSD and AOSD.

Fig. 5 shows the data presented in the first two groups of columns from Table 1 as a histogram, and it is obvious that NoD is decreasing with usage of any POOT for all system types (I, II, III and IV).

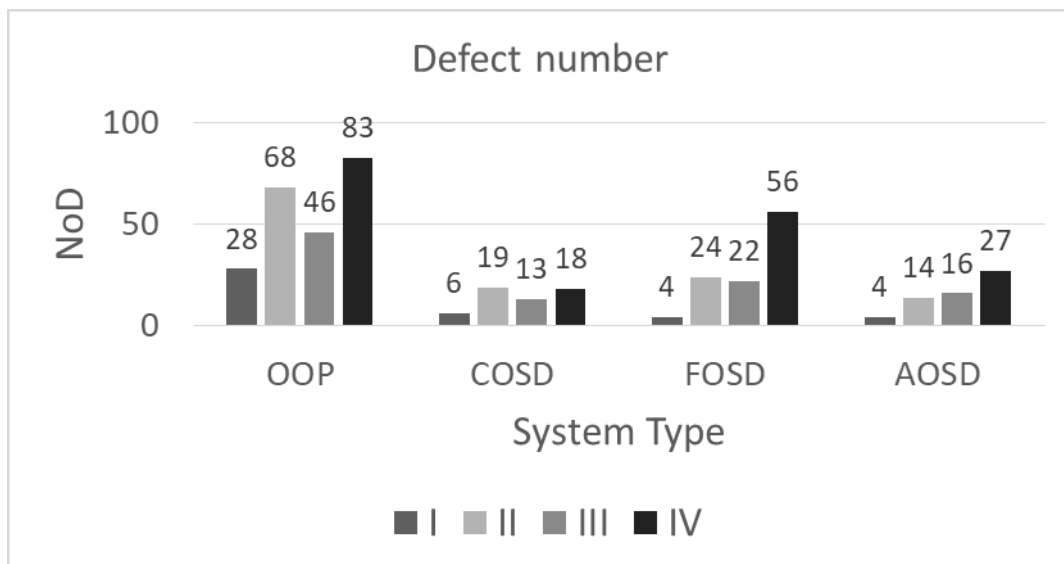


Fig. 5 Number of defects with POOTs impact

The values from the third group of columns in Table 1 are presented graphically in Fig. 5. It is possible to draw the following conclusions:

1. For LSS of the (I) and the (II) system types, all POOTs presents practically the same defect reduction. A low structural complexity of LSS could be a reason.
2. For LSS of type (III) the FOSD presents the lower defect reduction in comparison with AOSD and COSD. A difference between CF-weaving mechanisms in the corresponding POOTs is a reason.

3. For LSS of type (IV), the COSD provides the lowest level of residual number of defects, namely, about 20%.

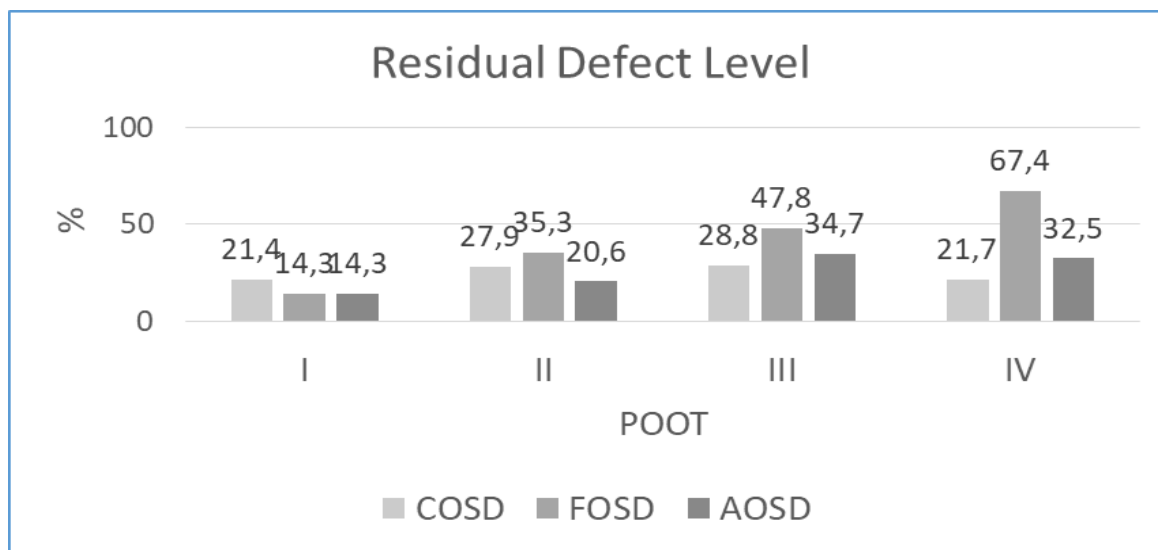


Fig. 6 Number of defects with POOTs impact

Finally, an average NoD value for all types of LSS can be computed:

$$COSD = \frac{21,4+27,9+28,8+21,7}{4} = 24,95;$$

$$FOSD = \frac{14,3+35,3+47,8+67,4}{4} = 41,20;$$

$$AOSD = \frac{14,3+20,6+34,7+32,5}{4} = 25,53;$$

To sum it up, COSD approach to CF-problem management has the strongest impact on a defect reduction for all System Types.

5 Conclusion and future work

This paper presents a framework for assessing the impact of post object-oriented technologies (POOT) usage on defect reduction in legacy software systems (LSS) maintenance. Some specific features of all existing POOTs, namely, AOSD, FOSD and COSD are considered. Particular attention is given to the crosscutting functionality (CF) problem. The heuristic assumptions to elaborate the assessment procedure for defects reduction are formulated. The collection of quantitative metrics to estimate of CF-level in LSS is provided. The conceptual scheme of the LSS maintenance process in respect to eliminating CF-problem by using POOTs is proposed. The scheme allows decreasing a number of software defects. The performed experiments show the impact of POOTs usage on defects reduction in real-life LSS maintenance projects.

Our future work will include advanced analysis of different defect types in LSS maintenance and detailed research of influence of each POOT on those defect types.

REFERENCES

1. I. Sommerville. *Software Engineering / 9th edition*. Addison Wesley, 2011.
2. S. Apel, et al. "On the Structure of Crosscutting Concerns: Using Aspects of Collaboration?" *In: Workshop on Aspect-Oriented Product Line Engineering*, 2006.
3. A. Przybytek, "Post Object-oriented Paradigms in Software Development: A Comparative Analysis", *In: Proceedings of the International Multi-conference on Computer Science and Information Technology*, pp. 1009-1020, 2007.
4. Official Web-site of Aspect-oriented Software Development community, [Online]. Available: <http://aosd.net>.

5. Official Web-site of Feature-oriented Software Development community, [Online]. Available: <http://fosd.de>.
6. Official Web-site of Context-oriented Software Development group, [Online]. Available: <http://www.hpi.uni-potsdam.de/hirschfeld/cop/events>.
7. S. Apel, *The Role of Features and Aspects in Software Development*. Diss., Otto-von-Guericke University Magdeburg, 2007.
8. E. Figueiredo, “Concern-Oriented Heuristic Assessment of Design Stability”, PhD thesis, Lancaster University, 2009.
9. N. Tkachuk, K. Nagornyi, “Towards Effectiveness Estimation of Post Object-oriented Technologies in Software Maintenance”, In: *J. Problems in Programming*, vol. 2-3 (special issue), pp.252 – 260, 2010.
10. Aversano L., Cerulo L., Penta M., Di. “The Relationship between Design Patterns Defects and Crosscutting Concern Scattering Degree: An Empirical Study”, In: *J. IET Software*, vol. 3, No. 5, pp. 395–409, 2009.
11. Abilio R., Vale G., Figueiredo E., “Metrics for Feature-Oriented Programming”, *Proceedings of WETSoM'16*, May 16-18, 2016, Austin, USA.
12. Mazen Ismaeel Ghareb, “State of the art metrics for aspect-oriented programming”, *AIP Conference Proceedings*, April 2018.
13. T. Sheldon, Kh. Jerath, H. Chung, “Metrics for Maintainability of Class Inheritance Hierarchies”, In: *J. of Software Maintenance and Evolution*, Vol. 14, pp. 1-14, 2002.
14. T. Gottardi et al.: “Model-based Reuse for Crosscutting Frameworks: Assessing Reuse and Maintenance Effort”, In: *J. of Software Engineering Research and Development*, pp. 1--34 (2013)
15. M. Tkachuk, “Models, Methods and Tools for Effectiveness Estimation of Post Object-Oriented Technologies in Software Maintenance” / M. Tkachuk, K. Nagorniy and R. Gamzayev // V. Yakovyna et al. (Eds.): ICTERI 2015: Revised Selected Papers, *Series title: Communications in Computer and Information Science*, Vol. 594: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 20-37, 2016.
16. Official Web-site of CIDE-project: [Online]. Available: http://wwwiti.cs.uni-magdeburg.de/iti_db/research/cide/
17. K. Nagorniy, “Models and tools for maintenance of program systems based on post object-oriented technologies”, Manuscript of PhD-dissertation thesis, NTU «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, 2016. [in Ukrainian]

ЛІТЕРАТУРА

1. Sommerville I. *Software Engineering / 9th edition*. Addison Wesley, 2011.
2. Apel S. et al. On the Structure of Crosscutting Concerns: Using Aspects of Collaboration? In: *Workshop on Aspect-Oriented Product Line Engineering*, 2006.
3. Przybyłek A. Post Object-oriented Paradigms in Software Development: A Comparative Analysis. In: *Proceedings of the International Multi-conference on Computer Science and Information Technology*. 2007. pp. 1009-1020.
4. Official Web-site of Aspect-oriented Software Development community, [Online]. Available: <http://aosd.net>.
5. Official Web-site of Feature-oriented Software Development community, [Online]. Available: <http://fosd.de>.
6. Official Web-site of Context-oriented Software Development group, [Online]. Available: <http://www.hpi.uni-potsdam.de/hirschfeld/cop/events>.
7. Apel S. *The Role of Features and Aspects in Software Development*. Diss., Otto-von-Guericke University Magdeburg, 2007.
8. Figueiredo. E. *Concern-Oriented Heuristic Assessment of Design Stability: PhD thesis*. Lancaster University, 2009.
9. Tkachuk N., Nagorniy K. *Towards Effectiveness Estimation of Post Object-oriented Technologies in Software Maintenance*. In: *J. Problems in Programming*. vol. 2-3 (special issue). 2010. pp.252 – 260.
10. Aversano L., Cerulo L., Penta M., Di. *The Relationship between Design Patterns Defects and Crosscutting Concern Scattering Degree: An Empirical Study*. In: *J. IET Software*. vol. 3, No. 5. 2009. pp. 395–409.

11. Abilio R., Vale G., Figueiredo E. Metrics for Feature-Oriented Programming. *Proceedings of WETSoM'16*, May 16-18, 2016. Austin. USA.
12. Mazen Ismaeel Ghareb. State of the art metrics for aspect-oriented programming. *AIP Conference Proceedings*. April 2018.
13. Sheldon, T., Jerath Kh., Chung H. Metrics for Maintainability of Class Inheritance Hierarchies. In: *J. of Software Maintenance and Evolution*. Vol. 14. 2002. pp. 1-14.
14. Gottardi T. et al.: Model-based Reuse for Crosscutting Frameworks: Assessing Reuse and Maintenance Effort. In: *J. of Software Engineering Research and Development*. 2013. pp. 1-34.
15. Tkachuk M. Models, Methods and Tools for Effectiveness Estimation of Post Object-Oriented Technologies in Software Maintenance / M. Tkachuk, K. Nagorniy and R. Gamzayev // V. Yakovyna et al. (Eds.): *ICTERI 2015: Revised Selected Papers, Series title: Communications in Computer and Information Science*, Vol. 594: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016. pp. 20-37.
16. Official Web-site of CIDE-project: [Online]. Available: http://www.iti.cs.uni-magdeburg.de/iti_db/research/cide/.
17. Нагорний К.А. Моделі та інструментальні засоби супроводу програмних систем на основі пост об'єктно-орієнтованих технологій: Автореф. Дис. на здобуття вченого ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю: 05.13.06 – Інформаційні технології. Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». Харків, 2016.

Nagornyi Kostiantyn A. – PhD, Candidate of Technical Sciences; Associate Professor of Department of System and Technologies Modeling, V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, Kharkiv - 22, Ukraine, 61022; e-mail: k.nagornyi@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5948-3682>

Martinkus Iryna O. – PhD, Candidate of Technical Sciences; Associate Professor of Department of System and Technologies Modeling, V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, Kharkiv- 22, Ukraine, 61022; e-mail: imartinkus@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4629-6583>.

Tkachuk Mykola V. – PhD, Doctor of Science, Professor; Head of Department of System and Technologies Modeling, V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, Kharkiv - 22, Ukraine, 61022; e-mail: tka.mobile@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0852-1081>.

Нагорний Костянтин Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент; Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, м. Харків, пл. Свободи 4, 61022; e-mail: k.nagornyi@gmail.com ORCID :[0000000159483682](https://orcid.org/0000000159483682).

Мартінкус Ірина Олегівна – кандидат технічних наук; доцент кафедри моделювання систем і технологій, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: imartinkus@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4629-6583>.

Ткачук Микола Вячелавович – доктор технічних наук, професор; Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, м. Харків, пл. Свободи 4, 61022; e-mail: tka.mobile@gmail.com ; ORCID: [0000000308521081](https://orcid.org/0000000308521081).

Нагорный Константин Анатольевич – кандидат технических наук; доцент кафедры моделирования систем и технологий, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина. 61022; e-mail: k.nagornyi@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5948-3682>

Мартинкус Ирина Олеговна – кандидат технических наук; доцент кафедры моделирования систем и технологий, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина. 61022; e-mail: imartinkus@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4629-6583>.

Ткачук Николай Вячелавович – доктор технических наук, профессор; Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, г. Харьков, пл. Свободы 4, 61022; e-mail: tka.mobile@gmail.com; ORCID: [0000000308521081](https://orcid.org/0000000308521081).

УДК 539.3

Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах колебаний жидкости в коаксиальных оболочках

¹Ю.В. Науменко, ²Л.В. Розова, ^{1,3}Е.А. Стрельникова, ¹О.А. Усатова

¹ *Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ,
ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина*

² *Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»
ул. Кирпичева 2, Харьков 61002, Украина*

³ *Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина
площадь Свободы 4, Харьков, 61022
elena15@gmx.com*

Рассматривается задача о свободных колебаниях идеальной несжимаемой жидкости в коаксиальных оболочках вращения. Предполагается, что движение жидкости является безвихревым. Это позволяет ввести потенциал скоростей. Относительно потенциала скоростей сформулирована краевая задача, которая далее сводится к проблеме собственных значений. Для решения краевой задачи для уравнения Лапласа применен метод граничных элементов в прямой формулировке. Полученное сингулярное уравнение решается методом дискретных особенностей. Область интегрирования содержит свободную поверхность жидкости, которая в случае коаксиальных оболочек представляет собой кольцо. Проведено численное исследование, позволившее определить частоты и формы плесканий жидкости в оболочках при разных отношениях радиусов внутренней и внешней цилиндрических коаксиальных оболочек.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, численное решение, коаксиальные оболочки, плескания жидкости, свободные колебания

Розглянуто задачу про вільні коливання ідеальної нестисливої рідини в коаксіальних оболонках обертання. Вважається, що рух рідини є безвихровим, що дозволяє ввести потенціал швидкостей. В зазначених умовах потенціал швидкостей задовольняє рівнянню Лапласа. Граничні умови сформульовано на змочених поверхнях оболонкової системи та на вільній поверхні рідини. Умова непротікання має виконуватись на змочених поверхнях. На вільній поверхні застосовуємо динамічну та кінематичну граничні умови. Динамічна гранична умова полягає в рівності тиску рідини на вільній поверхні атмосферному тиску. Кінематична гранична умова потребує виконання рівності нулю повної похідної за часом від функції, що описує рівень підйому вільної поверхні в кожний момент часу. Відносно потенціалу швидкостей сформульовано крайову задачу, яку далі зведено до проблеми власних значень. Для розв'язання крайової задачі для рівняння Лапласа застосований метод граничних елементів в прямому формулюванні. Осесиметрична форма оболонок обертання дозволяє звести отриману при цьому систему сингулярних інтегральних рівнянь до одновимірних рівнянь. Ядра сингулярних операторів в цих рівняннях зображені у термінах еліптичних інтегралів першого та другого роду та мають логарифмічні особливості. Розроблено спеціальну процедуру для ефективного обчислення таких інтегралів. Отримане сингулярне рівняння розв'язано методом дискретних особливостей. Область інтегрування містить вільну поверхню рідини, яка в разі коаксіальних оболонок має вигляд кільця. Таким чином, встановлено можливість використання методу граничних інтегральних рівнянь сумісно з методом дискретних особливостей для розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь з незв'язною межею. Проведено числове дослідження, яке дало можливість визначити частоти і форми плескань рідини в оболонкових системах при різних відношеннях радіусів внутрішньої і зовнішньої циліндричних коаксіальних оболонок. Отримані форми власних коливань рідини можна застосовувати як базисні функції при вивченні вимушених коливань рідини в резервуарах.

Ключові слова: сингулярне інтегральне рівняння, чисельний розв'язок, коаксіальні оболонки, плескання рідини, вільні коливання.

The paper deals with the problem of free vibrations of an ideal incompressible fluid in coaxial shells of revolution. It is assumed that the motion of the fluid is irrotational that allows us to introduce the velocity potential. In these suppositions the potential is satisfied to Laplace equation. The boundary conditions are formulated on the wetted surfaces of the shells and on the free liquid surface. The non-penetration conditions are applied to the wetted surfaces. On the free surface we consider dynamical and kinematical boundary conditions. The dynamical condition consists in equality of the liquid pressure on the free surface to the atmospheric one. The kinematic condition requires that total time derivative of the free surface elevation will be equal to zero at any instant. Regarding the potential of velocities, a boundary value problem is formulated that is further reduced to the eigenvalue problem. To solve the boundary value problem for the Laplace equation, the boundary element method is used in a direct formulation. The axial symmetric form of the shells allows us to reduce the obtained system of singular equations to one-dimensional equations. The kernels in singular operators of obtained integral equations are expressed on terms of elliptical integrals of the first and second kinds, and have the logarithmic singularities. The special numerical technique is elaborated to treat with such kind integral equations. The resulting one-dimensional singular equation is solved by the method of discrete singularities. The integration region contains the free surface of the fluid that in the case of coaxial shells is a ring. So, the possibility of using the boundary integral equation approach coupled with application of the discrete singularities method is established to solution of the singular integral equation with incoherent boundaries. A numerical study has been carried out that made it possible to determine the frequencies and modes of the liquid sloshing in the shells for

different ratios of the inner and outer radii of cylindrical coaxial shells. The obtained modes of natural vibrations will be used for numerical simulation of forced liquid vibrations in the tanks and reservoirs.

Key words: singular integral equations, numerical solution, coaxial shells, splashing fluid, free vibrations.

1. Вступ

Коаксиальні оболонки вращення, частично заповнені рідиною, широко використовуються як конструктивні елементи в різних інженерних прикладних, наприклад, в нафтохімічній і атомній промисловості. Системи трубопроводів також можуть моделюватися коаксиальними оболонками, між якими рухається рідина [1-3]. Застосування аналітичних методів для вивчення вібрацій таких систем можливо лише для порівняно невеликого класу коаксиальних оболонок. Тому багато проблем розрахунку частот і форм коливань рідини в коаксиальних оболонках залишаються нерешеними і вимагають розвитку сучасних ефективних чисельних методів. В даній роботі для розрахунку частот і форм вільних коливань рідини в жорстких коаксиальних оболонках вращення застосовано метод граничних елементів. Нами використані розроблені раніше методи розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь, що виникають в задачах про коливання оболонок, частично заповнених рідиною [4-6]. В [4] вивчені вільні і вимушені коливання пружних оболонок вращення з рідиною; в [5] розглянуто випадок дії сейсмічної навантаження; в [6] розглянуті великі амплітуди зовнішнього впливу, що призвело до появи хаотичного характеру коливань. Метою даної роботи є узагальнення методів граничних інтегральних рівнянь і дискретних особливостей для визначення частот і форм вільних коливань рідини в жорстких коаксиальних оболонках.

2. Общая постановка задачи

Розглядаються дві коаксиальні жорсткі оболонки. Область між оболонками може бути повністю або частично заповнена ідеальною несжимаємою рідиною, рис.2.1.

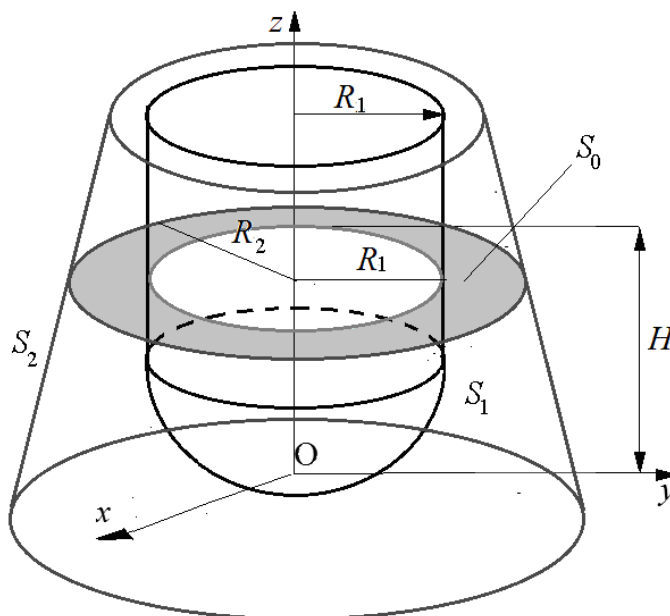


Рис. 2.1. Коаксиальні оболонки, що містять рідину

Потрібно знайти частоти і форми коливань рідини, що заповнює область між оболонками. Припускається, що рух рідини безвихревий. В цих умовах існує потенціал швидкостей Φ , що задовольняє всюди всередині області, зайнятої рідиною, рівнянню Лапласа. Давлення рідини p на смочені поверхні оболонкової системи визначається з лінеаризованого інтеграла Бернуллі

$$p - p_0 = -\rho_l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) \quad (2.1)$$

Здесь g - ускорение свободного падения, ρ_l - плотность жидкости, p_0 - атмосферное давление. Для решения уравнения Лапласа зададим краевые условия. На смоченных поверхностях коаксиальных оболочек S_1, S_2 потребуем выполнения условия непротекания

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_2} = 0. \quad (2.2)$$

На свободной поверхности S_0 зададим кинематическое и динамическое условия. Динамическое условие состоит в равенстве давления жидкости на свободной поверхности атмосферному давлению p_0 , а кинематическое условие заключается в требовании равенства нулю полной производной по времени от функции, описывающей уровень подъема свободной поверхности

$$p - p_0|_{S_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Здесь функция ζ описывает форму свободной поверхности и ее положение. Отметим, что на свободной поверхности динамическое условие приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (2.4)$$

Продифференцируем соотношение (2.4) по t и подставим полученное равенство во второе из соотношений (2.3). Приходим к следующей краевой задаче относительно неизвестного потенциала скоростей Φ

$$\Delta \Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right|_{S_0} + g \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1, S_2} = 0. \quad (2.5)$$

Для однозначной разрешимости краевой задачи (2.5) потребуем выполнения условия Неймана

$$\int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (2.6)$$

В предположении, что рассматривается задача о малых колебаниях жидкости, неизвестный потенциал скоростей представляем в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \quad i^2 = -1, \quad \mathbf{r} = (x, y, z). \quad (2.7)$$

Приходим к проблеме собственных значений

$$\Delta \varphi = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\omega^2}{g} \varphi|_{S_0}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1, 2} = 0, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (2.8)$$

Здесь ω - частота собственных колебаний жидкости в системе из коаксиальных оболочек.

3. Метод сингулярных интегральных уравнений

В области, занятой жидкостью и ограниченной поверхностями S_0, S_1, S_2 , для определения гармонической функции φ используем следующее интегральное представление [7]:

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} dS, \quad S = S_0 \cup S_1 \cup S_2. \quad (3.1)$$

Здесь $|P - P_0|$ - декартово расстояние между точками P_0 и P_1 , находящимися на границе области S , \mathbf{n} - орт внешней нормали к поверхности S .

В [8] показано, що при використанні інтегрального представлення (3.1) крайова задача (2.8), описуюча проблему власних значень, зводиться до наступної системи сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} 2\pi\varphi + \iint_{S_1 \cup S_2} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS - \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{|P-P_0|} dS + \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS = 0, \\ - \iint_{S_1 \cup S_2} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS - 2\pi\varphi_0 + \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{|P-P_0|} dS = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

В рівняннях (3.2) через φ позначені невідомі значення потенціала на поверхностях S_1, S_2 , а через φ_0 – значення потенціала на вільній поверхності S_0 .

Далі, аналогічно [9] вводимо інтегральні оператори

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\varphi &= 2\pi\mathbf{I}\varphi + \iint_{S_1 \cup S_2} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{r(P, P_0)} dS, \quad \mathbf{B}\varphi_0 = \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS, \quad \mathbf{C}\varphi_0 = \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dS, \\ \mathbf{D}\varphi &= - \iint_{S_1 \cup S_2} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS, \quad \mathbf{F}\varphi_0 = \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS. \end{aligned} \quad (3.3)$$

С використанням (3.3) приводимо крайову задачу (2.8) до наступної операторної форми:

$$\mathbf{A}\varphi = \frac{\chi^2}{g} \mathbf{B}\varphi_0 - \mathbf{C}\varphi_0, \quad P_0 \in S_1 \cup S_2, \quad \mathbf{D}\varphi = 2\pi\mathbf{I}\varphi_0 - \frac{\chi^2}{g} \mathbf{F}\varphi_0, \quad P_0 \in S_0. \quad (3.4)$$

Исключив из уравнений (3.4) функцию φ , получим задачу на собственные значения в операторной форме, при этом неизвестными будут лишь значения потенциала φ_0 на свободной поверхности

$$(\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} + 2\pi\mathbf{I})\varphi_0 - \lambda(\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{F})\varphi_0 = 0, \quad \lambda = \chi^2 / g. \quad (3.5)$$

Собственные значения и собственные векторы проблемы собственных значений (3.5) являются частотами и формами свободных колебаний жидкости в системе коаксиальных оболочек.

Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ - образующая составной оболочки вращения. В [8-9] получены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1 \cup S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS &= \int_{\Gamma} \varphi(z) \Theta(z, z_0) r(z) d\Gamma, \quad \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 = \int_0^R \varphi_0(r) \Phi(P, P_0) r dr, \\ \Theta(z, z_0) &= \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} \mathbf{E}_\alpha(k) - \mathbf{F}_\alpha(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} \mathbf{E}_\alpha(k) n_z \right\}, \\ \Phi(P, P_0) &= \frac{4}{\sqrt{a+b}} \mathbf{F}_\alpha(k); \quad \mathbf{E}_\alpha(k) = (-1)^\alpha (1 - 16\alpha^2) \int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha l \psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \\ \mathbf{F}_\alpha(k) &= (-1)^\alpha \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha l \psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2rr_0, \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}, \quad l = 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Формулы (3.5) позволяют свести двумерные интегралы (3.3) к одномерным, которые вычисляются по образующей составной оболочки и вдоль радиуса свободной поверхности. Полученное в результате применения формул (3.5) к интегралам (3.3) сингулярное интегральное уравнение решается методом дискретных особенностей [10].

В формулах (3.5) параметр α означает количество узловых диаметров (или волновое число). Если $\alpha=0$, то рассматриваются осесимметричные колебания.

4. Апробация метода

В качестве тестовой рассматривается задача о колебаниях жидкости в жесткой сферической оболочке. Рассмотрим сферическую оболочку радиуса $R=1\text{м}$, частично заполненную идеальной несжимаемой жидкостью, уровень заполнения h . Численный анализ проводился для $(0.2 < h/R < 1.99)$, $h_1 = h/R$. Применен метод граничных элементов (МГЭ), описанный выше, и аналитический подход [11]. При использовании метода граничных элементов использовалось 150 элементов вдоль радиуса свободной поверхности и 300 элементов вдоль смоченной части образующей. Рассматривались граничные элементы с постоянной аппроксимацией плотности, что соответствует идеологии метода дискретных особенностей [10]. Дальнейшее увеличение числа элементов не привело к существенному изменению результатов. В таблице 1 приведены результаты расчета частот осесимметричных колебаний жидкости (в Hz) с помощью указанных методов.

Таблица 1. Частоты осесимметричных колебаний жидкости в сферической оболочке

Метод	Уровень заполнения h , м				
	$h_1=0.2$	$h_1=0.6$	$h_1=1.0$	$h_1=1.8$	$h_1=1.99$
[11]	3.8261	3.6501	3.7451	6.7641	29.0500
МГЭ	3.8314	3.6510	3.7456	6.7665	29.1811

Рассмотрены различные уровни заполнения жидкостью, включая $h_1=1.99$, что соответствует «ice-fishing problem», [11]. Результаты расчетов близки, в некоторых случаях МГЭ дает более высокую точность. Заметим, что «ice-fishing problem» (малая свободная поверхность, проблема подледной рыбалки) является камнем преткновения для многих численных методов, включая метод конечных элементов. Метод граничных интегральных уравнений и в этом случае демонстрирует высокую точность и надежность. Это дает основание считать целесообразным применение метода дискретных особенностей (как численного аналога метода граничных интегральных уравнений) и в случае достаточно малого зазора между поверхностями коаксиальных оболочек.

5. Анализ численных результатов

Рассмотрены две цилиндрические коаксиальные оболочки разных радиусов. Пусть R_1 радиус внутренней оболочки, R_2 - радиус внешней оболочки, H – уровень заполнения жидкостью внутренней части оболочечной конструкции. Расчеты проводились при использовании 150 граничных элементов с постоянной аппроксимацией плотности вдоль радиуса свободной поверхности и 300 элементов вдоль образующей каждой из оболочек. В таблице 2 приведены частоты колебаний составной системы из коаксиальных цилиндрических оболочек. Принималось, что $R_2 = H = 1\text{м}$. Рассматривались различные значения внутреннего радиуса R_1 . В таблице 2 приведены значения частот колебаний жидкости в системе из коаксиальных оболочек при $\alpha = 1$ при разных отношениях радиусов R_1 / R_2 .

Таблица 2. Частоты осесимметричных колебаний жидкости в системе коаксиальных оболочек

R_1 / R_2	0.0	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9
ω	4.247	4.247	4.204	4.086	3.937	3.785	3.641	3.516	3.403	3.212

Формы колебаний жидкости в системе коаксиальных оболочек представлены на рис. 5.1, 5.2.

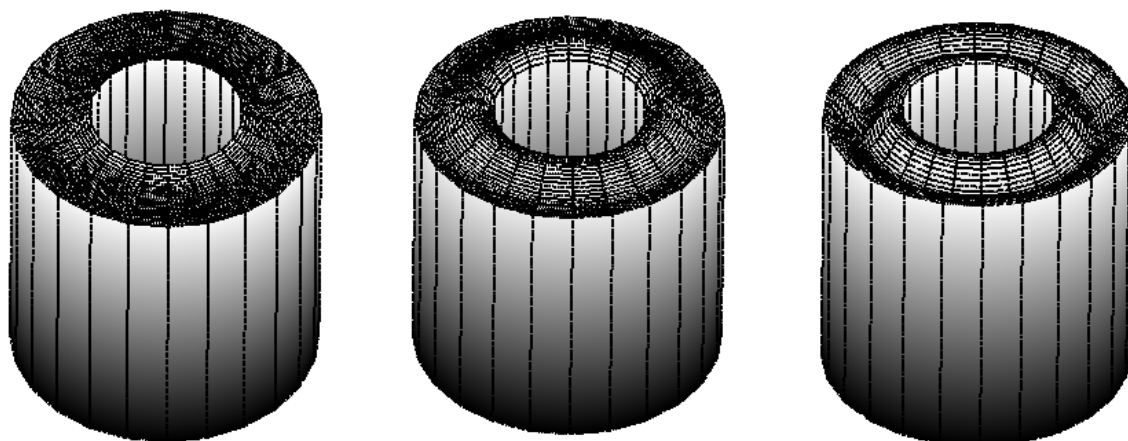


Рис. 5.1 Первые осесимметричные формы колебаний жидкости в системе коаксиальных цилиндрических оболочек, $\alpha = 0$

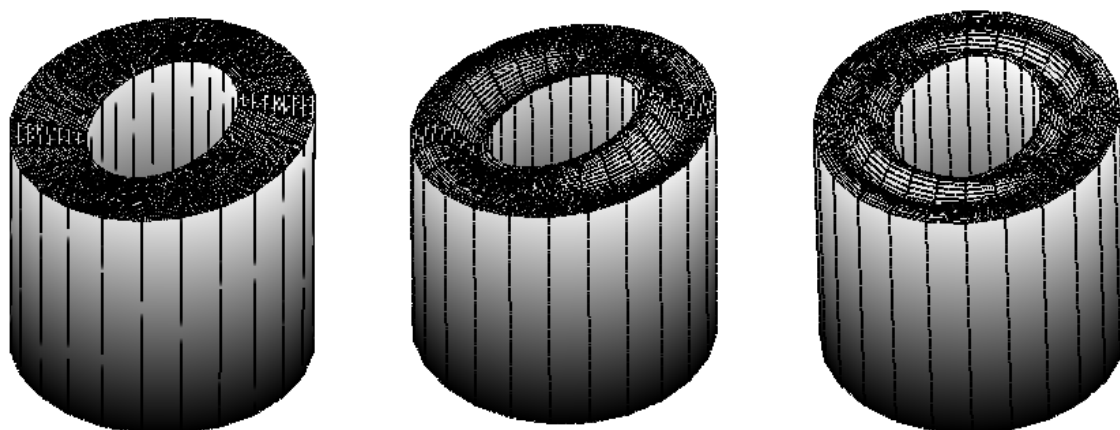


Рис. 5.2 Первые неосесимметричные формы колебаний жидкости в системе коаксиальных цилиндрических оболочек, $\alpha = 1$

Приведенные на рис. 5.1, 5.2 формы колебаний жидкости соответствуют следующему отношению $R_1/R_2 = 0.5$. Аналогично формам колебаний цилиндрических и конических оболочек, рассмотренных в [9], видим, что формы колебаний свободной поверхности имеют характер, присущий функциям Бесселя. Полученные формы колебаний являются ортогональными и могут быть использованы при решении задач о вынужденных колебаниях жидкости в коаксиальных оболочках, а также как базисная система функций при изучении нелинейных колебаний.

5. Выводы

Методы граничных интегральных уравнений и дискретных особенностей получили дальнейшее развитие при решении задач о колебаниях жидкости в жестких коаксиальных оболочках, когда свободная поверхность жидкости имеет вид кольца. Задача определения потенциала скоростей и давления жидкости сведена к решению системы одномерных сингулярных уравнений. Разработан эффективный численный метод ее решения. Проведено тестирование алгоритма, и установлено необходимое количество граничных элементов для получения заданной точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bochkarev S.A., Matveyenko V.P. The dynamic behaviour of elastic coaxial cylindrical shells conveying fluid. *J. Appl. Math. Mech.* 2010. Vol. 74, no. 4. P. 467–474.

2. Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017. Vol. 46, no 1. pp. 12-19.
3. Karagiozis K. N., Païdoussis M. P., Misra A. K. Transmural pressure effects on the stability of clamped cylindrical shells subjected to internal fluid flow: theory and experiments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2007. Vol. 42, Issue 1. P. 13-23.
4. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid, *Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2010. Vol.50. P. 203-211.
5. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2011. Vol. 52. P. 285-296.
6. Avramov K.V., Strel'nikova E A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow. *Nonlinear Dynamics*. 2012. N 70. P. 1335 – 1354.
7. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F & Wrobel, L.C. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
8. Gnitko, V., Degtyariov, K., Naumenko, V., Strelnikova E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, 2017. Vol. 5(3). P. 317-328.
9. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016. Vol. 1, no. 1. P.14-27.
10. Yu. V. Gandel', T. S. Polyanskaya, Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating Problems, *Differ. Equ.* 2003. 39:9 P.1295–1307.
11. Falinsen O.M., Timokha A.N. Analytically approximate natural sloshing modes for a spherical tank shape. *J. Fluid Mech.* 2012. V. 703. P. 391-401.

REFERENCES

1. S.A. Bochkarev, V.P. Matveyenko, “The dynamic behaviour of elastic coaxial cylindrical shells conveying fluid”. *J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 74, no. 4. P. 467–474, 2010.
2. L. I. Mogilevich, V. S. Popov, A. A. Popova, “Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation”. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, Vol. 46, no 1, pp. 12-19, 2017.
3. K. N. Karagiozis, M. P. Païdoussis, A. K. Misra, “Transmural pressure effects on the stability of clamped cylindrical shells subjected to internal fluid flow: theory and experiments”. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 42, Issue 1, P. 13-23, 2007.
4. E. Strelnikova, E. Yeseleva, V. Gnitko, V. Naumenko, “Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid”, *Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*, Vol.50, P. 203-211, 2010.
5. V. Gnitko, U. Marchenko, V. Naumenko, E. Strelnikova, “Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load”. *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*, Vol. 52, P. 285-296, 2011.
6. Avramov K.V., Strel'nikova E A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow. *Nonlinear Dynamics*, N 70, P. 1335 – 1354, 2012.
7. C.A Brebbia, J.C.F Telles, & L.C.Wrobel, *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
8. V.Gnitko, K. Degtyariov, V. Naumenko, E. Strelnikova, “BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles”. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, Vol. 5(3), P. 317-328, 2017.

9. K. Degtyariv, V. Gnitko, V. Naumenko, E. Strelnikova “Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles”. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*, Vol. 1, no. 1, P.14-27, 2016.
10. Yu. V. Gandel', T. S. Polyanskaya, Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Problems, *Differ. Equ*, 39, P.1295–1307. 2003.
11. O.M. Faltinsen, A.N. “Timokha Analytically approximate natural sloshing modes for a spherical tank shape”. *J. Fluid Mech*, V. 703, P. 391-401, 2012.

Науменко Юрий Виталиевич, – аспирант, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина;
ORCID: 0000-0001-9058-6727.

Розова Людмила Викторовна, – кандидат технических наук, доцент, ²Национальный технический университета «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева 2, Харьков 61002, Украина; ORCID: 0000-0002-0781-7473.

Стрельникова Елена Александровна, – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина; e-mail: elena15@gmx.co; ORCID:0000-0003-0707-7214.

Усатова Ольга Александровна, – аспирант, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина, ORCID 0000-0001-1267-2723.

Науменко Юрій Віталійович, – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10, Харьков, 61046, Україна;
ORCID: 0000-0001-9058-6727.

Розова Людмила Вікторівна, - кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева 2, Харьков 61002, Украина; ORCID: 0000-0002-0781-7473.

Стрельникова Елена Олександрівна, - доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10, Харьков, 61046, Україна, e-mail: elena15@gmx.co; ORCID: 0000-0003-0707-7214

Усатова Ольга Олександрівна, – аспірант, Інститут проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина;
ORCID: 0000-0001-1267-2723.

Naumenko Yury Vytalievich, post graduate, A.Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, ul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; ORCID: 0000-0001-9058-6727.

Rozova Ludmila Victorovna, assistant professor, PhD, National Technical University “Kharkov Polytechnic Institute” vul Kirpicheva,2, Kharkov, 61002, Ukraine; ORCID: 0000-0002-0781-7473.

Strelnikova Elena Alexandrovna, .DSc, Prof. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, ul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: elena15@gmx.co; ORCID: 0000-0003-0707-7214.

Usatova Olga Alexandrovna,. post graduate, A.Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, ul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; ORCID: 0000-0001-1267-2723.

УДК 629.7.01

Метод оптимизации упруго-демпферных подвесок

В.А. Павлюченко¹, Е.А. Стрельникова², С.В. Филипковский³¹Государственное предприятие «Антонов»²Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, 61046, Украина³Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
elena15@gmx.com

Целью данного исследования является усовершенствование методов оптимального поиска для определения параметров амортизаторов, которые обеспечивают защиту от вибраций и ударных эксплуатационных нагрузок. В предлагаемом подходе использован ряд методов, которые названы гибридами. Предлагаемый метод оптимизации является аналогом генетического алгоритма. Задан критерий, по которому выбирают наиболее эффективные в текущей ситуации методы. В указанный критерий входит информация, характеризующая признаки конструкции и метрические параметры пространства, где осуществляется поиск; предысторию вычислительного процесса, по которой устанавливается возможное продолжение; природу системы функций, определяющих решаемую задачу. Введено адаптивное управление, которое осуществляет получение векторов решений, направлений поиска и поисковых шагов, соответственно изменяющейся ситуации. Поскольку эффективно минимизировать массу удается только при совместной минимизации перегрузки – параметра, на границу которого выходит процесс поиска решения задачи, и массы системы, то наиболее логично использовать многокритериальную оптимизацию. В данном случае это означает одновременную оптимизацию массы и перегрузки. Ограничения накладываются на конструктивные размеры и прочность элементов оборудования. В результате проведенной оптимизации уменьшена масса элементов подвески и воздействующая на защищаемый элемент конструкции перегрузка. Определены пределы, до которых могут быть уменьшены масса и перегрузка.

Ключевые слова: амортизационная подвеска, масса, перегрузка, оптимизация, гибридный адаптивный метод.

The design of equipment at overloads in aircrafts requires effective methods for analyzing the vibration characteristics of suspensions, as well as the developing the synthesis methods to solve the topical problems. For these purposes the adaptive hybrid optimization method is developed. The objects of optimization are different suspensions of space-crafts and aircrafts units with asymmetrical distribution of masses and different arrangement of joints. Joints are the attachment points in the form of shock absorbers and bellows for joining with pipes. Blocks are considered as solid bodies. The links are highlighted as optimized elements. The main objective of the research is to improve the method of optimizing the parameters of shock absorbers that have to provide protection from vibrations and operating shock loads. The proposed optimization method uses a number of different methods that are operated together. Different criteria and their combination are chosen. These criterions include and overwork information that characterizes the changing situations; namely, mechanical and geometric information about structures, metric parameters of the space where the search is carried out, the prehistory of the computational process by which the possible continuation is established, and nature of the functions system that determine the problem under consideration. Adaptive control is introduced, and it obtains decision vectors, search directions and search steps, respectively to the changing situations. It is possible to effectively minimize the mass of system only with minimization of overload which is the variable parameter. Its boundary determines the domain where the search process of solution is accomplished. So, it is natural to use multi-criteria optimization. In this case, at the same time the optimization of masses and overloads is in progress. Restrictions are imposed on the structural dimensions and strength characteristics of the shock absorbers. As a result of the optimization, the weight of the suspension elements and the overload acting on the suspended block are reduced. The limits are determined of mass and overload diminishing.

Keywords: shock-proof suspension, mass, g-load, optimization, hybrid adaptive method.

Метою роботи є удосконалення методу оптимального пошуку для визначення параметрів амортизаторів, які забезпечують захист від вібрацій та ударних експлуатаційних навантажень. У запропонованій процедурі оптимізації використано ряд методів, які названо гібридами. Цей метод оптимального пошуку є аналогом генетичного алгоритму. Задается критерій, за яким вибирають найбільш ефективні в обчислювальній ситуації пошуку гібриди. В цей критерій входить інформація, яка характеризує ознаки структури і метричних властивостей простору, де здійснюється пошук; враховує передісторію обчислювального процесу. Це дає змогу встановити найбільш ефективне можливе продовження, знайти характеристики системи функцій, які визначають задачу, що розглядається. Введено адаптивне керування, яке здійснює отримання векторів розв'язків, напрямків пошуку і пошукових кроків відповідно ситуації, що змінюється. Встановлено, що ефективно мінімізувати масу вдається лише при спільній мінімізації перевантаження – параметра, на граничні характеристики якого виходить процес пошуку розв'язку задачі. Тому найбільш логічно використовувати багатокритеріальну оптимізацію. В даному випадку це означає одночасно мінімізувати масу і перевантаження. Обмеження накладають на конструктивні розміри і міцність елементів обладнання. У результаті проведеної оптимізації зменшено масу елементів підвіски і перевантаження, що діє на систему. Визначено межі, до яких може бути зменшено масу і перевантаження.

Ключові слова: амортизаційна підвіска, маса, перевантаження, оптимізація, гібридний адаптивний метод

1 Введение

Оборудование различного функционального назначения в летательных аппаратах требует тщательного исследования прочностных и динамических характеристик. Это приводит к необходимости разработки эффективных методов анализа вибрационных характеристик и напряженно-деформированного состояния подвески, а также соответствующего специфике задачи метода оптимального синтеза. Целью работы является усовершенствование метода оптимизации параметров амортизаторов, которые обеспечивают защиту от вибрации и ударных эксплуатационных нагрузок. Задача синтеза реальных конструкций моделируется сложными многомерными и нелинейными системами дифференциальных уравнений в частных производных со многими функциональными связями и ограничениями [1, 2]. В статье [3] предложены математические формулировки основных проблем оптимизации, дано описание и сравнение различных методов решения поставленных задач. В работе [4] рассмотрены задачи об определении оптимальных параметров, определяющих динамику полета. В [5] получены оптимальные параметры крупногабаритных ветроустановок. Практика решения оптимизационных задач такого уровня сложности показывает, что гарантированное достижение результата возможно лишь при последовательном и совместном использовании нескольких методов прямого поиска экстремума [6, 7]; это является более гибким и надежным подходом по сравнению с дифференциальными методами высокого порядка. В работе [8] проведен анализ предлагаемых в конечноэлементных комплексах методов оптимизации и показано, что они малоэффективны в задачах, в которых области изменения варьируемых параметров имеют сложную форму. Гибридный адаптивный метод оптимизации позволяет эффективно решать задачи оптимального синтеза упругих подвесок с нелинейным демпфированием.

2 Постановка задачи оптимизации

Оптимальное проектирование конструкций проводят путем минимизации (максимизации) некоторой функции цели путем надлежащего выбора варьируемых параметров при заданных ограничениях, которые в свою очередь, являются заданными функциями варьируемых исходных параметров. Рассматриваемая экстремальная задача, по сути, представляет собой задачу нелинейного программирования [6], когда требуется найти вектор варьируемых параметров

$$X^* = \arg \operatorname{extr}_{X \in G} F(X) \quad (2.1)$$

в допустимой области

$$G = \{X : G_i(X) \geq 0, i = \overline{1, m}\} \neq \emptyset \quad (2.2)$$

конечномерного параметрического пространства E_n , доставляющий экстремум заданной функции цели $F(X)$.

3 Гибридный адаптивный метод оптимизации

Предлагаемая схема гибридной оптимизации для решения задачи вида (2.1) – (2.2) построена таким образом, что обходится без каких-либо предварительных преобразований решаемой задачи и не предъявляет никаких специальных требований к функциям цели $F(X)$ и ограничениям $G^i(X) \geq 0, i = \overline{1, m}$. Учитывается только используемая коалиция гибридиентов (см. п. 4.1.2) и заранее описывается ограниченный набор наиболее характерных ситуаций $\{\sigma_i\}$, могущих возникнуть в реальной задаче оптимизации.

Суть предлагаемого метода оптимизации заключается в том, что выбран ряд методов-гибридиентов $\{M_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, N$). Задан критерий $Q(\sigma)$, который выясняет в процессе решения, какой из гибридиентов в данной ситуации σ наиболее эффективно может использоваться для достижения поставленной цели. В критерий ситуации Q входит независимая от методов информация, которая характеризует собственно меняющуюся ситуацию; а именно признаки структуры и метрические параметры пространства, где осуществляется поиск; предысторию вычислительного процесса, по которой устанавливается возможное продолжение; природу системы функций, определяющих решаемую задачу; и т. п.

Далее вводится функция управления, на основе которой устанавливают адаптивную стратегию введения в действие конкретного гибридиента или группы гибридиентов. Для того, чтобы общее действие гибридиентов обеспечивало более эффективное достижение цели, нежели каждый из них в отдельности, вводят специальное адаптивное управление, которое осуществляет получение минимизирующей последовательности векторов $\{X_k^r\}$, направлений поиска $\text{Dir } X_k^r$ и поисковых шагов h_k^r , адаптируемых соответственно изменяющейся ситуации σ .

Операцию гибридизации или получение гибридной точки на k -м шаге процесса можно определить в виде матрично-векторного «произведения»

$$X_k^r = (U_j^{(i)})(X_j^{(i)} V(r)),$$

$$\sum_{i=1}^N U_j^{(i)} = \sum_{j=k-r+1}^N V_j(r) = 1, \quad j = \overline{k-r+1, k}, \quad k \geq r,$$

где $(U_j^{(i)})$ и $(X_j^{(i)})$ – матрицы (размерности $r \times N$) управления и состояния, элементами которых являются управления (скаляры) $U_j^{(i)}$ и приближения (векторы размерности n) гибридиентов на данном шаге j ; $V(r)$ – r -мерный «сжимающий» вектор со скалярными компонентами; r – глубина памяти гибридиентов; N – их количество.

Специальное произведение скалярной $(U_j^{(i)})$ и векторной $(X_j^{(i)})$ матриц дает вектор Z , компонентами которого являются векторы в виде

$$Z_j = \sum_{i=1}^m U_j^{(i)} X_j^{(i)}, \quad j = \overline{k-r+1, k}, \quad k \geq r,$$

а результатом произведения этого вектора на вектор $V(r)$ является n -мерный вектор

$$X_k^r = \sum_{j=k-r+1}^N V_j(r) \sum_{i=1}^N U_j^{(i)} X_j^{(i)}, \quad k \geq r.$$

На каждом шаге процесса $k \geq r$ проводится изъятие верхней и присоединение нижней строк матриц $(U_j^{(i)})$ и $(X_j^{(i)})$ так, что общее количество строк остается неизменным. Принятая глубина памяти r гибридного метода требует некоторого знания предыстории процесса, в котором учитывается r предыдущих приближений, а сжимающий вектор $V(r)$ играет роль механизма последовательного забывания старой информации. Компоненты $V_j(r)$ вектора $V(r)$ изменяются согласно некоторым законам от предыдущих к текущим. В [9, 10] доказано, что гибридный метод может решать широкий круг задач более эффективно, чем каждый из упомянутых гибридиентов.

Предлагаемая схема *гибридной оптимизации* для решения задачи нелинейного программирования (2.1) – (2.2) построена таким образом, что обходится без каких-либо предварительных преобразований решаемой задачи и не предъявляет никаких специальных требований к функциям цели $F(X)$ и ограничениям $G^i(X) \geq 0, i = \overline{1, m}$. Рассматривается только используемая коалиция гибридиентов и заранее описывается ограниченный набор наиболее характерных ситуаций $\{\sigma_i\}$, могущих возникнуть в реальной задаче оптимизации.

Будем различать следующие ситуации и их признаки.

1. *Стационарные ситуации*: а) размерность задачи; б) уровень трудновычислимости системы функций $F(X)$ задачи нелинейного программирования; в) ограничения в виде равенств; г) ограничения в виде неравенств; д) общее количество ограничений; е) выпуклость (вогнутость) функции цели и ограничений; ж) характерные особенности допустимой области; з) дискретность или непрерывность функций задачи и т.п. Названные конкретные ситуации достаточно устойчивы в пределах отдельно взятой задачи.

2. *Динамические ситуации*: а) пологий спуск с плавным изменением направления; б) крутой спуск; в) прямолинейный овраг с пологим спуском; г) изогнутый овраг; д)

спиралеобразный овраг; е) эллипсоидальная яма; ж) изменяющееся количество нарушенных ограничений и т.д. Эти ситуации отнесены к числу динамических, поскольку они лишь локально стационарны, т.е. по мере продвижения к экстремуму степень их проявления постоянно изменяется в одной и той же задаче.

По описанному набору ситуаций $\{\sigma_i\}$ может быть выбрано некоторое число соответствующих гибридных методов $\{M_i\}$, не обязательно равное количеству ситуаций. Следовательно, выбор гибридных методов как бы предрешен самим существом задачи оптимизации, связанной с предполагаемым набором возможных ситуаций. Естественно, в данном случае гибридными методами должны быть, по возможности простые, но достаточно эффективные поисковые методы.

Для построенного здесь варианта гибридного метода оптимизации в качестве гибридных методов приняты следующие методы (или их модификации): а) пошаговый адаптивный спуск [10]; б) схема Абрамова [10]; в) овражная модификация [9]; г) метод параллельных касательных ПАРТАН [11]; д) модификация метода скользящего допуска [10]; е) секущее движение вдоль границы [12] и ряд приемов, учитывающих те или иные проявления описанного набора ситуаций. Среди них отметим метод мультистарта [13]. При его использовании из множества допустимых значений параметров случайно или детерминировано выбирается некоторое подмножество из L точек. На каждом i -том подмноестве из случайной начальной точки делается локальный спуск в ближайший минимум любым локальным методом поиска.

В рассматриваемом гибридном адаптивном методе использование мультистарта осуществляется при переходе на новую гиперплоскость, рис. 3.1.

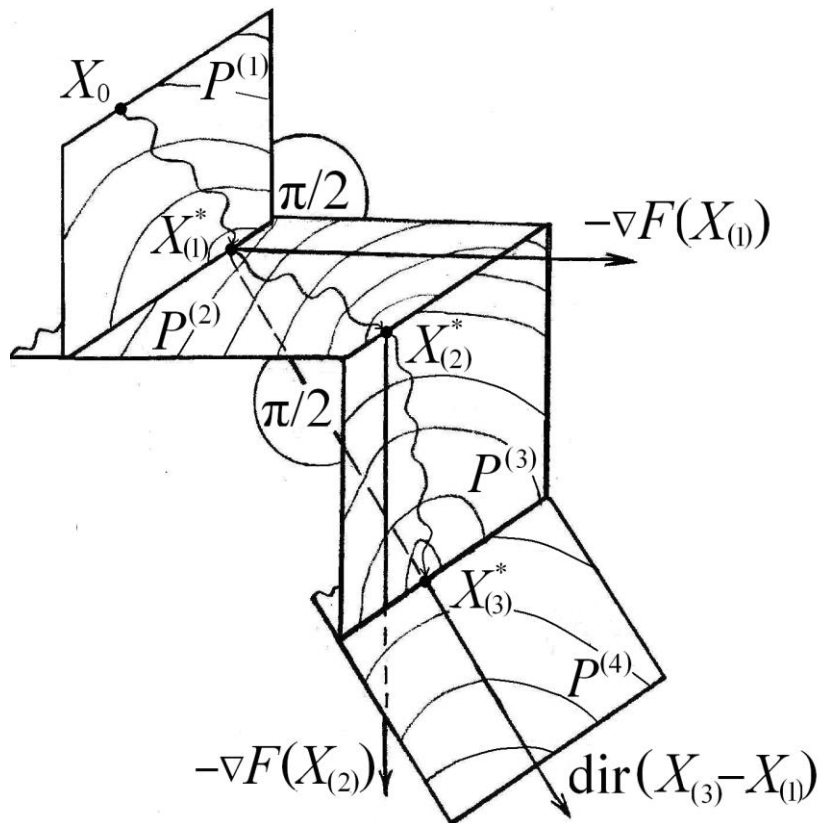


Рис. 3.1 Вариант поиска экстремума функции $F(X)$ в гиперплоскостном подпространстве $\{P^{(i)} \subset E_n\}$

Переход от точки $X_{(r-1)}^*$ к точке $X_{(r)}^*$ в $P^{(r)}$ происходит по ломаной траектории, определяющей гиперплоскость $P^{(r)}$, звеньями которой служат отрезки $\overline{X_{k0} X_{k+1,0}}$, а спуск по направлению $Y_k = \overline{\text{dir} X_{k0} X_{k+1,0}}$ осуществляется шагом $h_{kl}^{(r)}$ (k, l – номера направлений и шагов соответственно).

4 Оптимизация параметров подвески

Задача анализа – установить зависимости между параметрами объекта для задачи синтеза, решение которой даёт наиболее рациональные соотношения этих параметров, обеспечивающих выполнение необходимых критериев. В данном случае для определения перегрузок амортизатора и усилий в связях необходимо проинтегрировать уравнения движения.

Так как при колебаниях амортизатора на опорах угловые перемещения малы, используем уравнения движения, не учитывающие повороты тела [8]. Правая часть этой системы уравнений может быть вектором, состоящим из синусоидальных составляющих с одинаковой частотой в случае установившейся вибрации планера, ограниченной во времени функцией при внезапных и ударных воздействиях или произвольной функцией при переходных процессах нагружения.

В результате решения задачи анализа находим перегрузки G в каждой из опасных точек и сравниваем их с допустимым значением $[G]$. Остальные ограничения назначаем из конструктивных соображений и условий стандарта.

Перемещения амортизатора при колебательном движении ограничены размерами ниши, в которой он установлен, максимальным ходом штока амортизатора и допустимыми перемещениями фланцев компенсаторов, соединяющих агрегат с трубопроводами.

В наших расчетах принято такое ограничение перемещений вдоль продольной оси самолета: $[s_x] = 8 \text{ мм}$, допустимые перемещения вдоль вертикальной и поперечной осей равнялись $[s_y] = [s_z] = 5 \text{ мм}$, допустимые углы поворота вокруг этих осей выбраны равными $[\varphi] = 0,02 \text{ рад}$, $[\psi] = [\theta] = 0,04 \text{ рад}$.

Начальный вектор параметров X_0 состоит из величин коэффициентов жесткости k_x, k_y, k_z , отношения коэффициента демпфирования к коэффициенту жесткости β , относительных величин a_1, a_2, a_3, a_4 , характеризующих структурный состав подвески блока. Предполагается, что в зависимости от распределения масс в объекте, усилия и соответственно параметры амортизаторов в каждом узле могут быть различными. Эти величины есть отношения коэффициента жесткости амортизатора в соответствующем узле к некоторому его фиксированному значению.

Вибрация планера самолета, от которой следует защитить агрегат, задана в виде спектра перегрузок. На интервале частот от 1 Гц до 22 Гц виброперегрузки постоянны и равны 1, на интервале от 22 Гц до 60 Гц они линейно возрастают от 1 до 7 и далее, до наибольшей частоты, равной 2000 Гц, они остаются равными 7.ции

Процесс оптимизации в целом построен как поочередная последовательность решений задач минимизации массы m и перегрузки G . Для начального вектора X_0 первый этап оптимизации осуществлялся без учета перегрузки G и приводит к вектору X_1 . Следующий этап оптимизации проводится с минимизацией перегрузки G , но без ограничения массы m , в результате чего получен вектор X_2 . Процесс оптимизации повторяют дальше, чередуя функции цели m и G на каждом новом этапе. Отметим, что процесс оптимизации на этапах, где функцией цели была масса, ограничивался такой допустимой перегрузкой, которая достигалась как ее минимум на предыдущих этапах, когда функцией цели была перегрузка.

Примененный гибридный метод оптимизации относится к локальным поисковым. Поэтому для поиска глобального минимума использован метод мултистарта. При этом проводится серия спусков из заранее определенного множества начальных точек, равномерно распределенных по области допустимых значений варьируемых параметров. Точки локальных экстремумов принадлежат разным окрестностям области решений. Однако значения экстремумов в этих точках являются близкими. Указанное обстоятельство дает возможность выбора оптимального проекта, используя конструктивные соображения.

В результате проведенной оптимизации с помощью разработанного гибридного поискового метода уменьшены масса элементов подвески и воздействующие на подвешенный агрегат перегрузки. Определены пределы, до которых может быть уменьшена масса и перегрузка. В рассматриваемой конструкции при снятии ограничений на перегрузку суммарную массу можно довести до 3,96 кг.

При исследовании влияния на процесс поиска экстремума различных ограничений (геометрических параметров, усилий в амортизаторах и т.д.) установлено, что активным ограничением является перемещение агрегата s_x . По этому критерию процесс оптимизации

приходит на границу области допустимых решений, и далее процесс поиска происходит вдоль этой границы. По остальным параметрам процесс оптимизации не выходит на границу области допустимых параметров.

5 Выводы и перспективы дальнейших исследований

Гибридный метод оптимизации модифицирован применительно к оптимальному проектированию упруго-демпферных подвесок. Показано, что эффективность процесса минимизации какого-либо критерия, например, массы, увеличивается, если в качестве критерия оптимальности поочередно использовать те параметры, на границы которых выходит процесс поиска минимума. Тот факт, что при различных записях функции цели получаются близкие результаты, позволяет сделать вывод, о том, что в области решений имеется единственный минимум, которому соответствует вычисленный оптимальный вектор. Результаты работы найдут применение при проектировании таких элементов летательных аппаратов, на которые процесс эксплуатации накладывает разнообразные ограничения (перегрузки, допустимые перемещения, геометрические размеры и массы амортизаторов).

ЛИТЕРАТУРА

1. Динамика конструкций при воздействии кратковременных нагрузок / С. С. Кохманюк, А. С. Дмитриев, Г. А. Шелудько и др. К. : Наук. думка, 1989. 304 с.
2. Elliott J. and Peraire J. Practical three-dimensional aerodynamic design and optimization using unstructured meshes. *AIAA journal*. 1997. 35(9): P. 1479–1485.
3. Баландин, Д. В. Математическое моделирование и оптимизация противоударных систем. *Вестн. Нижнегород. ун-та. Сер.: Механика*. 2001. № 1. С. 52–54.
4. Makeev V. I., Strelnikova E. A., Trofimenko P. E., Bondar A. V. On Choice of Design Parameters for an Aircraft. *Int. Appl. Mech.* 2013. 49, N 5. P. 588 – 596.
5. Дегтярев К. Г., Стрельникова Е. А., Шелудько Г. А. Компьютерное моделирование лопастей ветроустановок с оптимальными параметрами. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. № 19. 2012. С. 81-86.
6. Васильев, Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М. : Наука, 1980. 520 с.
7. Батищев, Д. Е. Поисковые методы оптимального проектирования. М. : Сов. радио, 1975. 216 с.
8. Филипповский, С. В. Эффективность некоторых методов оптимизации упруго-демпферных подвесок агрегатов. *Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ»*. 2007. №. 38. С. 159–168.
9. Стрельникова Е. А. Гибридизация вычислительных процессов: в 2-х ч. Ч. 2. / Е. А. Стрельникова, Г. А. Шелудько. Харьков : Новое слово, 2007. 130 с.
10. Г. А. Шелудько, Е. А. Стрельникова, Б. Я. Кантор Гибридные методы в задачах оптимального проектирования. 1. Поисковые методы. Харьков : Новое слово, 2008. – 188 с.
11. Arezki Y. and Van Vliet D. A full analytical implementation of the PARTAN. Frank-Wolfe algorithm for equilibrium assignment. *Transportation Science*. 1990. Vol. 24, no. 1. P. 58–62.
12. Многокритериальная оптимизация. Математические аспекты / Б. А. Березовский, Ю. М. Барышников, В. И. Борзенко и др. М. : Наука, 1989. 128 с.
13. Mezma M., Melab N. and Talbi E. G. Using the multi-start and island models for parallel multi-objective optimization on the computational grid. In *Second IEEE International Conference on e-Science and Grid Computing*. 2006. P. 28-34.

REFERENCES

1. S. S. Kohmanyuk, A. S. Dmitriev, G. A. Sheludko i dr. *Dinamika konstruksiy pri vozdeystvii kratkovremennyih nagruzok* . K. : Nauk. dumka, 1989, 304 p. [in Russian]
2. Elliott J. and Peraire J. “Practical three-dimensional aerodynamic design and optimization using unstructured meshes”. *AIAA journal*, 35(9). P. 1479–1485, 1997.
3. D. V. Balandin, “Matematicheskoe modelirovanie i optimizatsiya protivoudarnyih system”. *Vestn. Nizhegorod. un-ta. Ser.: Mehanika*. N. 1. – S. 52–54. 2001. [in Russian]

4. V. I. Makeev, E. A. Strelnikova, P. E. Trofimenko, A. V. Bondar, "On Choice of Design Parameters for an Aircraft". *Int. Appl. Mech.*, 49, N. 5, P. 588 – 596, 2013.
5. K. G. Degtyarev, E. A. Strelnikova, G. A. Sheludko, "Kompyuternoe modelirovanie lopastey vetroustanovok s optimalnymi parametrami". *Vіsник Harkivskogo natsionalnogo unіversitetu Imenі V. N. Karazіna. Serіya: Matematichne modelyuvannya. Informatsynі tehnologiyi. Avtomatizovanі sistemi upravlinnya*, N 19, P. 81-86, 2012. [in Russian]
6. Vasilev F. P. *Chislennyye metodyi resheniya ekstremalnykh zadach* / F. P. Vasilev. – M. : Nauka, 1980. 520 s. [in Russian]
7. Batischev D. E. *Poiskovyye metodyi optimalnogo proektirovaniya*. M. : Sov. radio, 1975, 216 s. [in Russian]
8. Filipkovskiy S. V., "Effektivnost nekotorykh metodov optimizatsii uprugogo-dempfernykh podvesok agregatov". *Vestnik Nats. tehn. un-ta «HPI»*, № 38. S. 159–168, 2007. [in Russian]
9. Strelnikova E. A., "Gibridizatsiya vychislitelnykh protsessov: v 2-h ch. Ch. 2." / E. A. Strelnikova, G. A. Sheludko. Harkov : Novoe slovo, 2007, 130 s. [in Russian]
10. Sheludko, G. A. *Gibridnyie metodyi v zadachah optimalnogo proektirovaniya*. 1. Poiskovyye metodyi, G. A. Sheludko, E. A. Strelnikova, B. Ya. Kantor. Harkov : Novoe slovo, 2008, 188 s. [in Russian]
11. Arezki Y. and Van Vliet D., "A full analytical implementation of the PARTAN / Frank-Wolfe algorithm for equilibrium assignment". *Transportation Science*, vol. 24, N 1, P. 58–62, 1990.
12. B. A. Berezovskiy, Yu. M. Baryshnikov, V. I. Borzenko i dr., *Mnogokriterialnaya optimizatsiya. Matematicheskie aspektyi*. M. : Nauka, 1989, 128 p. [in Russian]
13. Mezmaiz M., Melab N., and Talbi E. G., "Using the multi-start and island models for parallel multi-objective optimization on the computational grid", *In Second IEEE International Conference on e-Science and Grid Computing*, 2006, P. 28-34.

Павлюченко Віталій Александрович – вєдуций конструктор, Государственное предприятие «Антонов», Киев, Украина <https://orcid.org/0000-0001-9304-8465>.

Стрєльникова Елена Александровна – д. т. н., проф., вєд. науч. сотр., Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина, elena15@gmx.com, <http://orcid.org/0000-0003-0707-7214>.

Филиповский Сергей Владимирович – кандидат технических наук, с. н. с., доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Украина, sfilipkovskij@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2861-8032>.

Павлюченко Віталій Александрович – вєдуций конструктор, Государственное предприятие «Антонов», Киев, Украина, <https://orcid.org/0000-0001-9304-8465>.

Стрєльникова Елена Александровна – д. т. н., проф., вєд. науч. сотр., Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина, elena15@gmx.com, <http://orcid.org/0000-0003-0707-7214>.

Филиповский Сергей Владимирович – кандидат технических наук, с. н. с., доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Украина, sfilipkovskij@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2861-8032>.

Pavlyuchenko Vitaliy - Lead Designer, State Enterprise "Antonov", Kiev, Ukraine, <https://orcid.org/0000-0001-9304-8465>.

Strelnikova Elena - Doctor of Technical Sciences, prof., Ved. scientific al., Institute of Mechanical Engineering. A.N. Podgorny, National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkov, Ukraine, elena15@gmx.com, <http://orcid.org/0000-0003-0707-7214>.

Filipkovsky Sergey - candidate of technical sciences, p. n S., Associate Professor, Kharkov National Automobile and Highway University, Ukraine, sfilipkovskij@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2861-8032>.

UDC 519.161+519.852+519.687.1

A faster way to approximately schedule equally divided jobs with preemptions on a single machine by subsequent job importance growth

V. V. Romanuke

*O. S. Popov Odessa National Academy of Telecommunications, Ukraine
romanukevadimv@gmail.com*

The goal of this work is to study whether the input order of the job release dates results in different time of computations in finding an approximate schedule for equally divided jobs with preemptions on a single machine by subsequent job importance growth. It has been ascertained that the descending job order has a 1 % relative advantage when scheduling more than 200 jobs. With increasing the number of jobs off 1000, the advantage tends to increase. The advantage can grow up to 22%. A maximally possible gain in computation time is obtained in scheduling longer series of bigger-sized job scheduling problems.

Key words: *heuristic, approximate schedule, job order, preemption, total weighted completion time, computation time gain.*

Мінімізація загального зваженого часу завершення є дуже важливою ціллю в організації та виконанні багатоступінних процесів обчислень, диспетчеризації, виробництва, компонування, будівництва тощо. Ця задача розв'язується теорією розкладів. Теорія розкладів надає підходи для знаходження як точних, так і приблизних розкладів виконання завдань. Точний розклад дозволяє виконати завдання за мінімальний загальний зважений час завершення. Приблизний розклад дозволяє виконати завдання за час, котрий є достатньо близьким до мінімального загального зваженого часу завершення. Однак приблизний розклад отримують незрівнянно швидше, тоді як точні підходи стають практично нездійсненними уже для декількох десятків завдань. Тому розглядається одна ефективна евристика для знаходження приблизного розкладу для випадку однаково розділених завдань з перемиканнями на єдиній машині зі зростанням значущості наступних завдань. При цьому вивчається питання того, чи призводить певний порядок введення дат запуску завдань до різного часу обчислень. Встановлюється, що спадний порядок завдань має відносну перевагу в 1 % при плануванні більш ніж 200 завдань. Зі зростанням кількості завдань від 1000 ця перевага має незначну тенденцію до зростання. Така перевага може досягти 22 %. Зокрема, послідовність з 240 задач зі 75000 завдань у кожній, де кожне завдання складається з 5 частин, за спадного порядку завдань розпланується за 17.2973 години, тоді як ця ж послідовність за зростаючого порядку завдань розпланується за 21.0691 години. Максимально можливий виграш часу обчислень досягається при роботі з більш довгими послідовностями задач планування завдань більшого розміру.

Ключові слова: *евристика, приблизний розклад, порядок завдань, перемикання, загальний зважений час завершення, виграш у часі обчислення.*

При нахожденні приблизительного расписания для одинаково разделённых заданий с переключениями на единственной машине при росте значимости последующих заданий изучается вопрос о том, приводит ли определённый порядок ввода дат запуска заданий к различному времени вычислений. Устанавливается, что убывающий порядок заданий имеет относительное преимущество в 1 % при планировании более чем 200 заданий. С возрастанием количества заданий от 1000 это преимущество имеет незначительную тенденцию к возрастанию. Такое преимущество может достигать 22 %. Максимально возможный выигрыш времени вычислений достигается при работе с более длинными последовательностями задач планирования заданий большего размера.

Ключевые слова: *евристика, приблизительное расписание, порядок заданий, переключение, общее взвешенное время завершення, выигрыш во времени вычисления.*

Total weighted completion time minimization in the preemptive scheduling problem

In planning, organizing, and executing complex or multistep processes of computing, dispatching, manufacturing, assembling, building, etc., there is a very important goal to minimize the total weighted completion time (TWCT). This problem is addressed by the scheduling theory [1, 2]. The scheduling theory provides approaches to finding both exact and approximate schedules of executing jobs. The exact schedule allows achieving an exactly minimal TWCT. The approximate schedule allows achieving a TWCT which is sufficiently close to the minimum [3]. Nevertheless, the approximate schedule is obtained incomparably faster, whereas the exact approaches become practically intractable just for a few tens of jobs [1].

The schedule is executed either on single machine or multiple machines. Obtaining an optimal single-machine schedule is commonly easier. Minimization of TWCT for a class of preemptive scheduling problems (PESPs), wherein a job can be interrupted in favor of another job [1, 3], is almost thoroughly studied for single-machine problems [4]. Meanwhile, a subclass of single-machine PESPs (SMPESPs) exists, in which importance of subsequent jobs grows, and it can be separated. This is a subclass consisting of SMPESPs by subsequent job importance growth (SJIG).

The subclass of SMPESPs by SJIG

SMPEPSPs by SJIG refer to those systems whose non-parallelizable development becomes more complicated along with its growing costs. Here, however, the non-parallelizability exists due to unavailability of two or more machines rather than a specific integrity of the system itself. Scheduling by SJIG is a common task in building (or assembling) hierarchical systems/objects whose build-ups above the basis are more complicated and expensive (see, e. g., [1, 2, 5, 6]). SMPEPSPs for such systems/objects are possible if they “start” functioning only after the assembling completion. A schedule for them is obtained by setting subsequent jobs to greater priority weights. Theoretically, such systems/objects still can be scheduled on multiple machines, so SMPEPSPs are just a specific case of when only a single machine is available.

An efficient approach to scheduling

In solving SMPEPSPs, exact schedules are obtainable for no more than a few tens of jobs. In real practice, a lot of heuristics are used to find the approximate schedule. Although the heuristics’ approximate schedule is not always executed in the exactly minimal TWCT, the inaccuracy is commonly not so great [1, 2, 4], being often equal to zero. A heuristic known to efficiently give approximate schedules by the minimal inaccuracy is an online scheduling algorithm, which applies the rule of the shortest processing period (SPP) [3].

In solving SMPEPSPs by SJIG using the SPP approach, there are two ways to input the job release dates and the respective priority weights. On the one hand, the release dates can be given in ascending order. Then the respective priority weights and the release dates will be sets of, generally speaking, non-decreasing values. On the other hand, the release dates can be given in descending order. Then the respective priority weights and the release dates will be sets of, generally speaking, non-increasing values. It is believed that the efficiency of the SPP approach could be increased more by selecting either job order with the shorter computation time (although, surely, both job orders give the same TWCT).

The goal of the article and five stages to achieve it

In finding an approximate schedule for SMPEPSPs by SJIG using the SPP approach, the goal is to study whether the order of inputting the job release dates results in different time of computations. The significance of the difference, if any, should be shown. As a simplification, the preemptive scheduling of equally divided jobs (EDJs) will be considered. For achieving the said goal for SMPEPSPs by SJIG of EDJs, the five stages are to be fulfilled:

1. To state an SMPEPSP by SJIG of EDJs, whose schedule should have no idle time intervals (see, e. g., [1, 2, 4]).
2. To state the SPP approach for finding an approximate schedule.
3. To design a model of generating the SMPEPSPs by SJIG of EDJs.
4. To estimate the averaged time of obtaining the approximate schedule by both ascending and descending orders of inputting the job release dates.
5. In finding an approximate schedule by the SPP heuristic for SMPEPSPs by SJIG of EDJs, to discuss and conclude on whether significant the order of inputting the job release dates is.

The SMPEPSP by SJIG of EDJs

In the SMPEPSP, the number of jobs is N by $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Job n is divided into H_n equal parts, i. e. job n has a processing period (or time) H_n , which, in the case of EDJs, is actually the same for every job. So, let

$$H_* = H_n \quad \forall n = \overline{1, N}.$$

It should be noted that the case

$$H_* = 1 \quad \forall n = \overline{1, N}$$

is excluded from consideration due to the fact that then the SMPEPSP would be trivial (would have a trivial solution). Job n has a release date r_n and a priority weight w_n , $n = \overline{1, N}$. So, in general,

$$\mathbf{H} = [H_n]_{1 \times N} \in \mathbb{N}^N, \quad \mathbf{W} = [w_n]_{1 \times N} \in \mathbb{N}^N, \quad \mathbf{R} = [r_n]_{1 \times N} \in \mathbb{N}^N$$

are a vector of job processing periods, a vector of job priority weights, and a vector of job release dates, respectively.

Priority weights in vector \mathbf{W} are either non-decreasing for the ascending job order (AJO) or non-increasing for the descending job order (DJO). Formally,

$$w_{l-1} \leq w_l \quad \forall l = \overline{2, N} \quad \text{but} \quad \exists l_* \in \{\overline{2, N}\} \quad \text{such that} \quad w_{l_*-1} < w_{l_*} \quad (1)$$

for AJO, and

$$w_{l-1} \geq w_l \quad \forall l = \overline{2, N} \quad \text{but} \quad \exists l_* \in \{\overline{2, N}\} \quad \text{such that} \quad w_{l_*-1} > w_{l_*} \quad (2)$$

for DJO. Release dates in vector \mathbf{R} are arranged similarly:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_{l-1} \leq r_l \quad \forall l = \overline{3, N} \quad \text{but} \quad \exists l_* \in \{\overline{3, N}\} \quad \text{such that} \quad r_{l_*-1} < r_{l_*} \quad (3)$$

for AJO, and

$$r_1 = N, \quad r_2 = N-1, \quad r_{l-1} \geq r_l \quad \forall l = \overline{3, N} \quad \text{but} \quad \exists l_* \in \{\overline{3, N}\} \quad \text{such that} \quad r_{l_*-1} > r_{l_*} \quad (4)$$

for DJO. Thus, either with (1) by (3) or with (2) by (4), the SMPESP has an SJIG.

The total length of the schedule is $T = \sum_{n=1}^N H_n = N \cdot H_*$ (which is measured in definite time units). Job n is completed after moment $\theta(n; H_*)$, which is

$$\theta(n; H_*) \in \{\overline{1, T}\}.$$

The goal is to minimize the TWCT, i. e. to schedule those N jobs so that sum $\sum_{n=1}^N w_n \theta(n; H_*)$ would be minimal. The resulting schedule is a set of job tags/numbers $\mathbf{S} = [s_t]_{1 \times T}$ along the grand total of job parts T , where $s_t \in \{\overline{1, N}\}$ for every $t = \overline{1, T}$.

The SPP heuristic to solve the SMPESP by SJIG of EDJs

Let $\mathbf{Q} = [q_n]_{1 \times N} = \mathbf{H}$ be a starting vector containing the remaining processing periods (RPPs). Later on, elements of vector \mathbf{Q} will be decreased as time t progresses. Denote an approximate schedule, given by the SPP heuristic, by $\tilde{\mathbf{S}} = [\tilde{s}_t]_{1 \times T}$, where $\tilde{s}_t \in \{\overline{1, N}\}$ for every $t = \overline{1, T}$. A set of available jobs

$$A(t) = \{i \in \{\overline{1, N}\} : r_i \leq t \text{ and } q_i > 0\} \subset \{\overline{1, N}\} \quad (5)$$

gives a set of RPP ratios $\{w_i/q_i\}_{i \in A(t)}$ for every $t = \overline{1, T}$, whence the maximal ratio is achieved at subset

$$A^*(t) = \arg \max_{i \in A(t)} \{w_i/q_i\} \quad \text{for every } t = \overline{1, T}. \quad (6)$$

If $|A^*(t)| = 1$, then

$$\tilde{s}_t = i^* \quad \text{by} \quad q_{i^*}^{(\text{obs})} = q_{i^*} \quad \text{and} \quad q_{i^*} = q_{i^*}^{(\text{obs})} - 1; \quad (7)$$

otherwise, if $|A^*(t)| > 1$, then a set

$$A^{**}(t) = \arg \max_{i^* \in A^*(t)} w_{i^*} \subset A^*(t) \subset A(t) \quad (8)$$

is found, where

$$A^{**}(t) = \{i_t^{**}\}_{l=1}^L \subset A^*(t) \subset A(t) \subset \{\overline{1}, N\}, \quad (9)$$

whence

$$\tilde{s}_t = i_1^{**} \quad \text{by} \quad q_{i_1^{**}}^{(\text{obs})} = q_{i_1^{**}} \quad \text{and} \quad q_{i_1^{**}} = q_{i_1^{**}}^{(\text{obs})} - 1. \quad (10)$$

Then an approximate TWCT is calculated successively for every $n = \overline{1}, N$ using the moments

$$\tilde{\theta}(n; H_*) \in \{\overline{1}, T\}$$

at which each job is completed. Finally,

$$\tilde{\rho}(N) = \sum_{n=1}^N w_n \tilde{\theta}(n; H_*) \quad (11)$$

is an approximately minimal TWCT that corresponds to the nearly optimal job schedule $\tilde{S} = [\tilde{s}_t]_{1 \times T}$.

A model of generating SMPESPs by SJIG of EDJs

As mentioned above, both the minimal numbers of jobs and job parts are 2. So, let

$$H_* = \overline{2, 14} \quad \forall n = \overline{1}, N \quad \text{and} \quad N = \overline{2, 1000}. \quad (12)$$

A vector of N priority weights and $N - 2$ release dates are generated respectively as follows [7]:

$$w_n = \psi(0.5N\zeta + 1) \quad \forall n = \overline{1}, N \quad \text{and} \quad r_n = \psi((N/3)\zeta + 1) \quad \forall n = \overline{3}, N \quad (13)$$

either with (1) by (3) or with (2) by (4), where ζ is a pseudorandom number drawn from the standard uniform distribution on the open interval $(0; 1)$, and function $\psi(\xi)$ returns the integer part of number ξ . Thus, SMPESPs by SJIG of EDJs will be generated for each H_* and N according to (12): the AJO problems are generated by (13) for (1) and (3); the DJO problems are generated by (13) for (2) and (4). Each problem will be repeated for 100 times to ensure good enough statistical confidence of the results. Mainly, this is about the reliable percentage of a job order relative advantage (PJORA).

Estimation of PJORA and its significance

Denote by $\tau_{As}(k, N)$ and $\tau_{Des}(k, N)$ averaged times of obtaining the heuristic's schedule by AJO and DJO, respectively, for definite H_* and N . The averaging is executed over those 100 repetitions. If

$$\beta(k, N) = 100 \cdot \frac{\tau_{As}(k, N) - \tau_{Des}(k, N)}{\tau_{Des}(k, N)} \quad (14)$$

then AJO has a relative advantage by $\beta(k, N) < 0$, and DJO has a relative advantage by $\beta(k, N) > 0$.

PJORAs (14) for the designed model of generating the SMPESPs by SJIG of EDJs are shown in Fig. 1. As there are a lot of artifacts (unexpected rapid fluctuations of computational speed), including those for a few tens of jobs (for, roughly, $N < 100$), these PJORAs are refreshed in Fig. 2 by ignoring the artifacts. Figure 3 re-refreshes the PJORAs zooming in the range of between 800 and 1000 jobs to schedule.

It is well seen even from Fig. 2 that DJO has a distinct relative advantage when, roughly, $N > 200$. This advantage is about 1%, which is confirmed by Fig. 3. The overall averaged PJORAs in each of Fig. 1, 2, and 3 prove that DJO is about 1% faster than ADJ for SMPESPs by SJIG of EDJs. Moreover, the overall averaged PJORA in Fig. 3 prompts that, with increasing the number of jobs off 1000, the advantage has a slight tendency to increase.

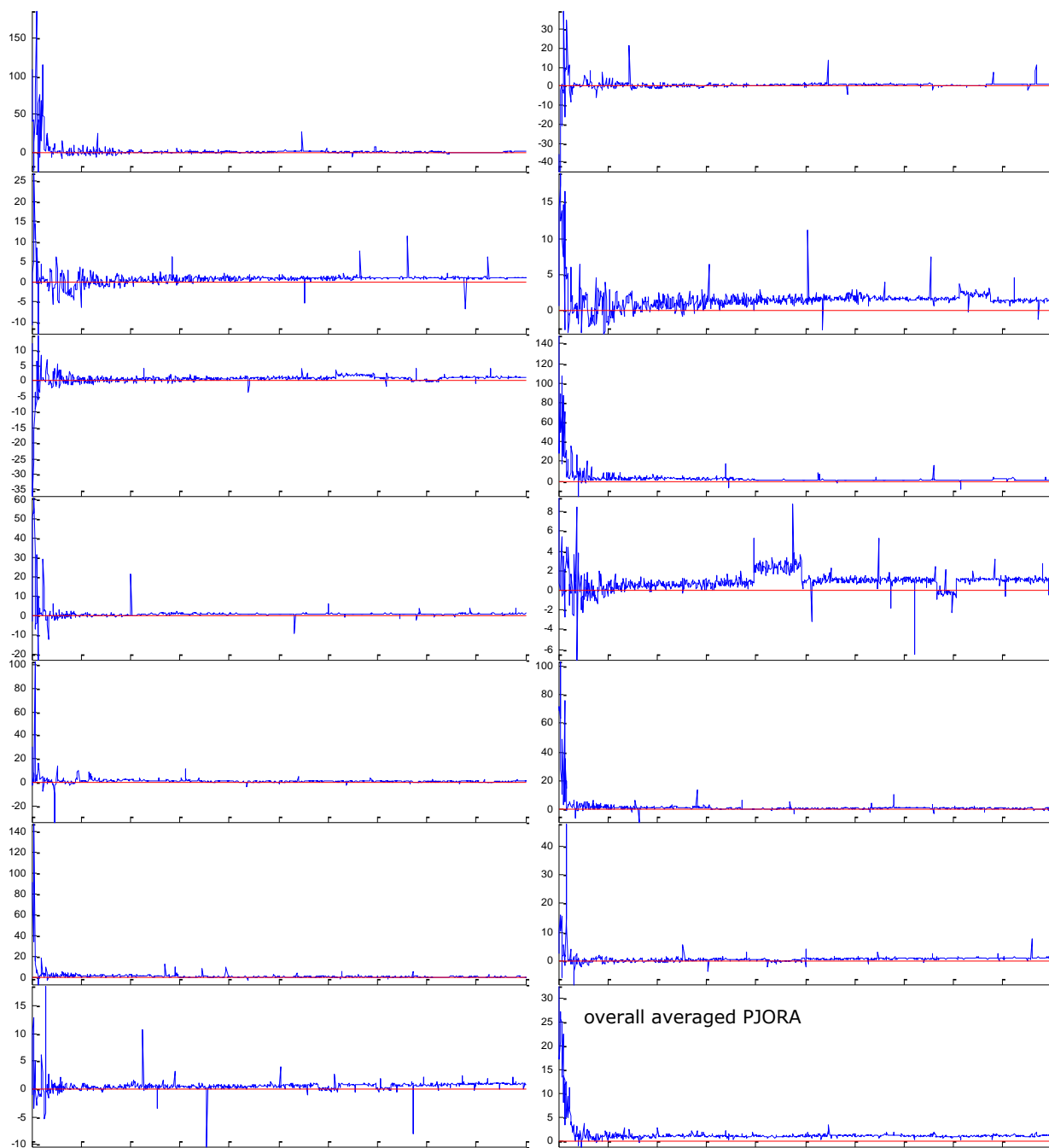


Fig. 1. PJORAs (14) by $H_ = \overline{2, 14}$ (left to right downward) versus $N = \overline{2, 1000}$ with the horizontal zero level; the overall averaged PJORA (over those 13 PJORAs) is at the right bottom*

Discussion of how significant the job order for SMPESPs by SJIG of EDJs is

At first sight, the 1% DJO advantage may seem not so significant. Nonetheless, it becomes very significant when scheduling thousands of jobs in a long series of repetitions. For instance, scheduling a series of 80 SMPESPs by SJIG of 25000 jobs divided each into 5 parts takes 2237 seconds with DJO, whereas AJO takes almost 2680 seconds (on the same processing unit). The DJO advantage here is 19.79%. Another, more impressive example: a series of 240 SMPESPs by SJIG of 75000 jobs divided each into 5 parts is scheduled with DJO in 17.2973 hours, whereas it is scheduled with AJO in 21.0691 hours. The DJO advantage here is 21.81%. Therefore, the job order significance grows as the size of the SMPESPs is increased. The growth, however, is slow and it seems to be close to an asymptote.

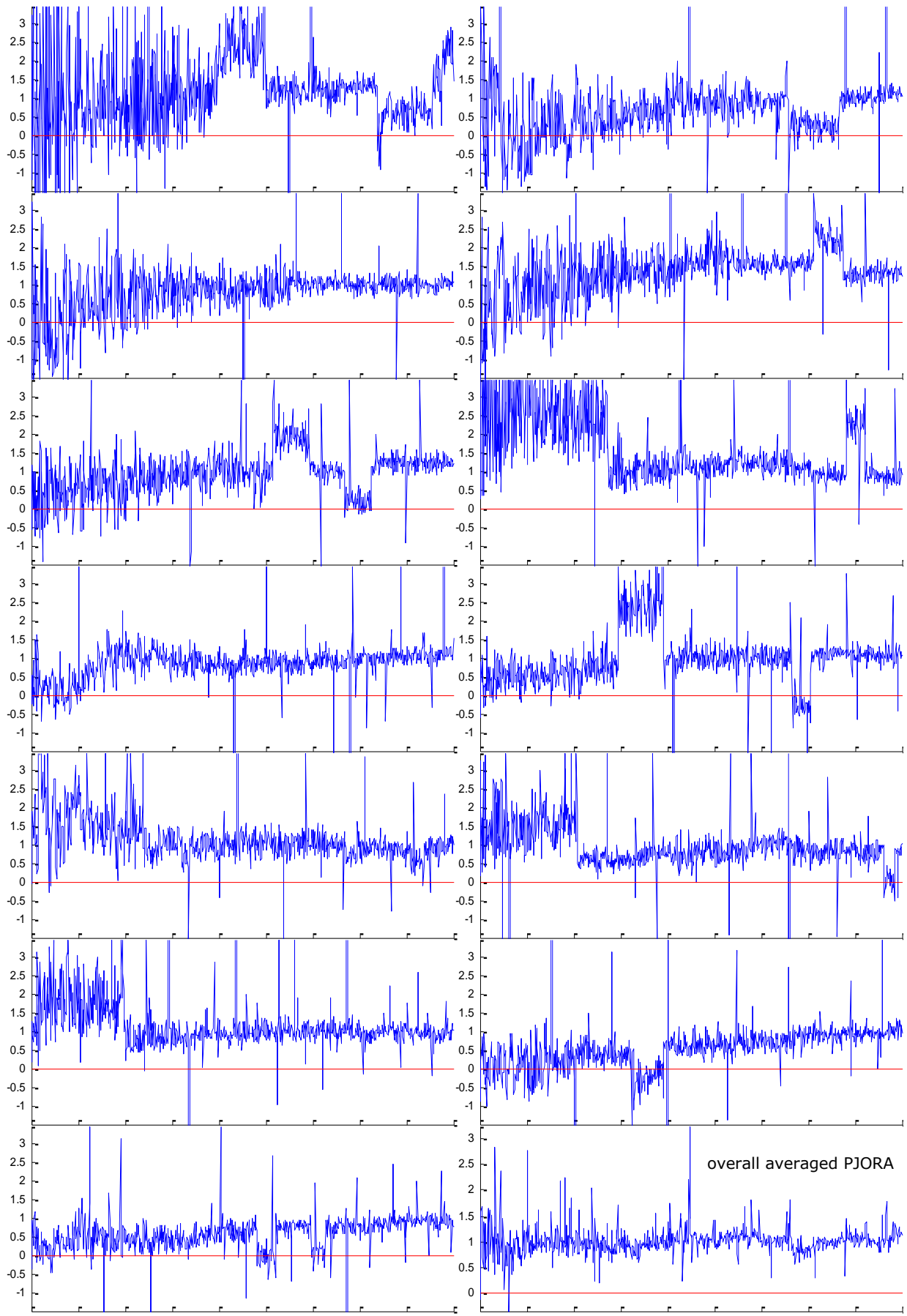


Fig. 2. PJORAs (14) taken off Fig. 1 versus $N = 100, 1000$ by ignoring the artifacts; the overall averaged PJORA (over those 13 PJORAs) is at the right bottom, wherein no artifacts are cut off

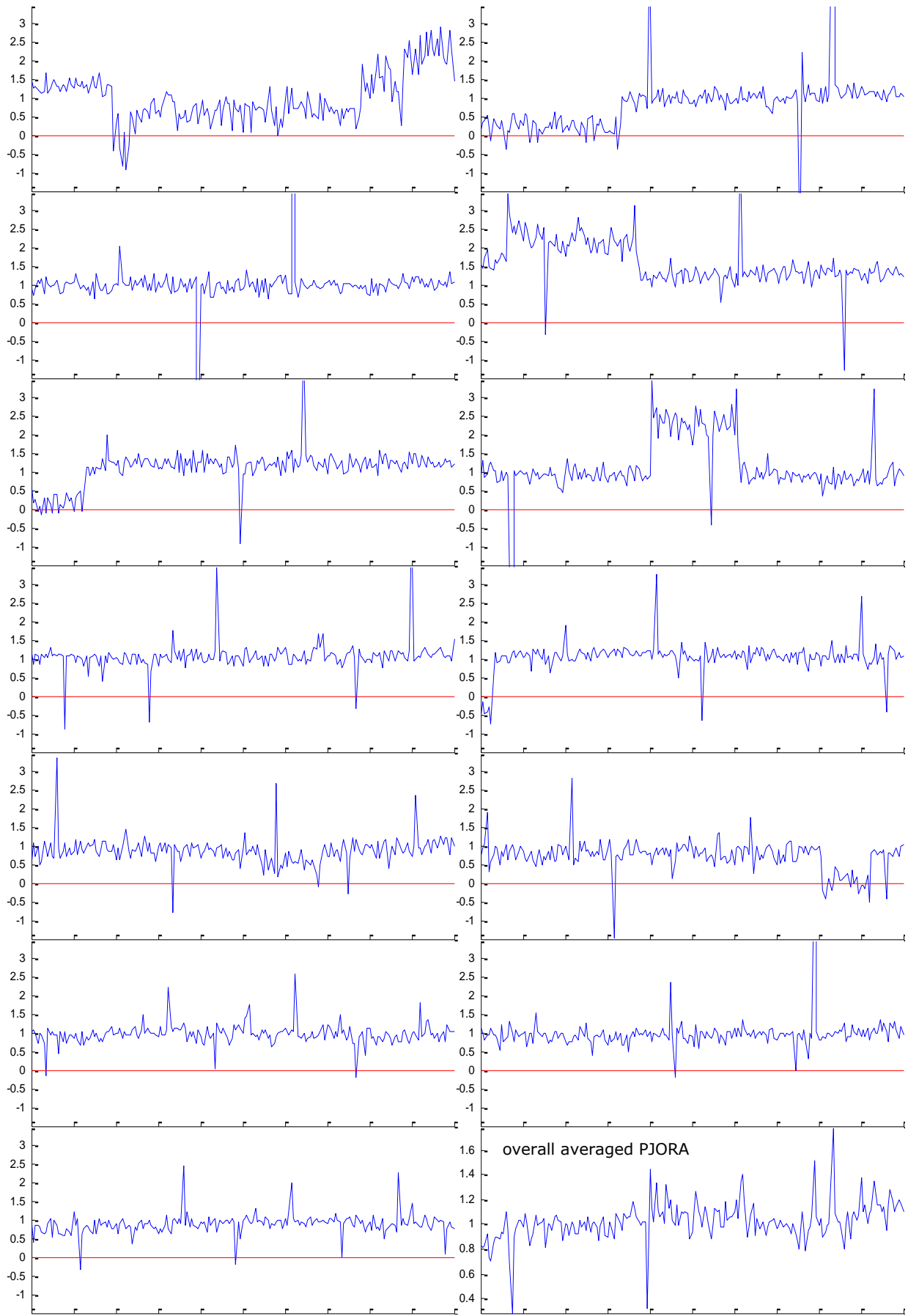


Fig. 3. PJORAs (14) taken off Fig. 1 versus $N = 800, 1000$ by ignoring the artifacts; the overall averaged PJORA (over those 13 PJORAs) is at the right bottom (the zero level is not seen), wherein no artifacts are cut off

Conclusion, practical recommendations, and a further research outlook

Based on the well-generalized model, solving SMPESPs by SJIG of EDJs is definitely faster with the DJO input. As the number of jobs increases off a few hundreds, the DJO advantage becomes clearly certain. Nevertheless, in scheduling a fewer jobs (up to a few tens), the AJO input may not concede the DJO input. To get a maximally possible DJO computation time gain, it is recommended to schedule as long series of SMPESPs, as well as SMPESPs of the biggest possible size (including the number of jobs and parts). A further research outlook will be focused on scheduling SMPESPs by SJIG without EDJs.

REFERENCES

1. M. L. Pinedo, *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*. Springer Int. Publ., 2016.
2. P. Brucker, *Scheduling Algorithms*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
3. H. Belouadah et al., “Scheduling with release dates on a single machine to minimize total weighted completion time”, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 36, iss. 3, pp. 213 – 231, 1992.
4. M. L. Pinedo, *Planning and Scheduling in Manufacturing and Services*. Springer, 2009.
5. I. A. Mandzyuk and V. V. Romanuke, “Rheometric research of polypropylene Licocene PP2602 melts”, *Archives of Materials Science and Engineering*, vol. 50, iss. 1, pp. 31 – 35, 2011.
6. V. V. Romanuke, “Appropriate number and allocation of ReLUs in convolutional neural networks”, *Research Bulletin of NTUU “Kyiv Polytechnic Institute”*, no. 1, pp. 69 – 78, 2017.
7. V. V. Romanuke, “Acyclic-and-asymmetric payoff triplet refinement of pure strategy efficient Nash equilibria in trimatrix games by maximinimin and superoptimality”, *KPI Science News*, no. 4, pp. 38 – 53, 2018.

ЛІТЕРАТУРА

1. Pinedo M. L. *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*. Springer Int. Publ., 2016. 670 p.
2. Brucker P. *Scheduling Algorithms*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. 371 p.
3. Belouadah H., Posner M. E., Potts C. N. Scheduling with release dates on a single machine to minimize total weighted completion time. *Discrete Applied Mathematics*. 1992. Vol. 36, Iss. 3.P. 213–231.
4. Pinedo M. L. *Planning and Scheduling in Manufacturing and Services*. Springer, 2009. 536 p.
5. Mandzyuk I. A., Romanuke V. V. Rheometric research of polypropylene Licocene PP2602 melts. *Archives of Materials Science and Engineering*. 2011. Vol. 50, Iss. 1. P. 31 – 35.
6. Romanuke V. V. Appropriate number and allocation of ReLUs in convolutional neural networks. *Research Bulletin of NTUU “Kyiv Polytechnic Institute*. 2017. No. 1. P. 69–78.
7. Romanuke V. V. Acyclic-and-asymmetric payoff triplet refinement of pure strategy efficient Nash equilibria in trimatrix games by maximinimin and superoptimality. *KPI Science News*. 2018. No. 4. P. 38 – 53.

Romanuke Vadim Vasylyovych – doctor of technical sciences, professor; professor of department of information technologies, O. S. Popov Odessa National Academy of Telecommunications, Kuzneczna str., 1, Odessa, Ukraine, 65029; e-mail: romanukevadimv@gmail.com;
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3543-3087>.

Романюк Вадим Васильович – доктор технічних наук, професор; професор кафедри інформаційних технологій, Одеська національна академія зв'язку ім. О. С. Попова, вул. Кузнечна, 1, Одеса, Україна, 65029; e-mail: romanukevadimv@gmail.com;
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3543-3087>.

Романюк Вадим Васильевич – доктор технических наук, профессор; профессор кафедры информационных технологий, Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова, ул. Кузнечная, 1, Одесса, Украина, 65029; e-mail: romanukevadimv@gmail.com;
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3543-3087>.

CONTENTS

<p>▪ K. Afanasieva, O. Moroz, O. Tolstoluzka</p> <p>Computer model for accounting of the scientific activity of the education system workers</p>	<p>4</p>
<p>▪ V.I. Gnitko, K.G. Degtiariov, M.L. Myronenko</p> <p>Method of discrete singularities for problems of liquid vibrations in fuel tanks under overloads and at low gravity</p>	<p>20</p>
<p>▪ S.V. Zhuchenko</p> <p>Numerical simulation of electromagnetic wave diffraction on a finite number of slits in a flat screen</p>	<p>27</p>
<p>▪ N.N. Kizilova, O.M. Solovyova</p> <p>Computer modeling of blood circulation biomechanics</p>	<p>39</p>
<p>▪ A.I. Malykhina, D.O. Merkulov, O.V. Postnyi, N.V. Smetankina</p> <p>Stationary problem of heat conductivity for complex-shape multilayer plates</p>	<p>46</p>
<p>▪ K.A. Nagorny, I.O. Martinkus, M.V. Tkachuk</p> <p>The impact of usage post object-oriented technologies on defects reducing in software maintenance</p>	<p>55</p>
<p>▪ Yu.V. Naumenko, L.V. Rozova, E.A. Strelnikova, O.A. Usatova</p> <p>Method of singular integral equations in liquid vibration problems for coaxial shells</p>	<p>65</p>
<p>▪ V.A. Pavluchenko, E.A. Strelniova, S.V. Filipkivsky</p> <p>Method of optimization for elastic damping suspensions</p>	<p>73</p>
<p>▪ V.V. Romanuke</p> <p>A faster way to approximately schedule equally divided jobs with preemptions on a single machine by subsequent job importance growth</p>	<p>80</p>
<p>▪ CONTENTS</p>	<p>88</p>

**ВІСНИК ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
імені В.Н. Каразіна**

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»

Випуски даної серії розповсюджуються у академічних та наукових колах України та за її межами з метою оперативного висвітлення досліджень у таких актуальних галузях: математичне та комп'ютерне моделювання, обчислювальний експеримент, теорія і прикладні методи обробки інформації, захист інформації, програмно-апаратні системи інформаційного або управляючого призначення, застосування математичного моделювання та системного аналізу у високих, наукоємних технологіях, враховуючи технології створення програмної продукції. Приймаються роботи, що відносяться до напрямів фізико-математичних і технічних наук (бажаний об'єм 6-18 сторінок). Усі рукописи рецензуються.

Примітка. Протягом 2019-20 рр. редакційна колегія при інших рівних умовах надаватиме перевагу роботам, що представлені англійською мовою, якщо стаття отримала схвалення при рецензуванні.

Офіційний сайт <http://periodicals.karazin.ua/mia>
<http://mia.univer.kharkov.ua>

Сайт редколегії <http://www.dsmmph.org.ua/bulletin.html>
Email: journal-mia@karazin.ua

**ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В.Н. Каразина**

Серия «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления»

Випуски даної серії розповсюджуються в академічних та наукових колах України та за її межами з метою оперативного освітлення досліджень в наступних актуальних областях: математичне та комп'ютерне моделювання, вичислювальний експеримент, теорія і прикладні методи обробки інформації, захист інформації, програмно-апаратні системи інформаційного або управляючого призначення, програми математичного моделювання та системного аналізу в високих, наукоємних технологіях, включаючи технології створення програмної продукції. Приймаються роботи, що відносяться до напрямів фізико-математичних і технічних наук (бажаний об'єм 6-18 сторінок). Усі рукописи рецензуються.

Примечание. На протяжении 2019-2020 гг. редакционная коллегия при прочих равных условиях будет отдавать предпочтение работам, представленным на английском языке, если статья получила одобрение при рецензировании.

Официальный сайт <http://periodicals.karazin.ua/mia>
<http://mia.univer.kharkov.ua>

Сайт редколлегии <http://www.dsmmph.org.ua/bulletin.html>
Email: journal-mia@karazin.ua

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 41

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О. О. Афанасьєва

Підписано до друку 22.04.2019 р.
Формат 70×108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. – 9,9.
Обл.– вид. арк. – 11,5.
Наклад 50 пр. Зам. №
Безкоштовно

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна.
Видавництво

Надруковано: ХНУ імені В. Н. Каразіна
61022 м. Харків, майдан Свободи, 4,
тел.: 362-01-52
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09