

ISSN 2304–6201

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна



№ 1105

Серія

«Математичне моделювання.

Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління»

Випуск 24

Серія заснована 2003 р.

Харків
2014

Вісник містить статті, присвячені дослідженням у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації, висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 5 від 28.04.2014 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор), д.ф.-м.н., академік НАН України, проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна
Гандель Ю.В., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна
Жолткевич Г.М., (заст. гол. редактора), д.т.н., проф. ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна
Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна
Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна
Лазурик В.Т., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна
Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of computer science, Dep. of C. S., University of Nice-Sophia Antipolis, France
Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна
Мищенко В.О. (відпов. секретар), д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"
Стрельнікова О.О., д.т.н., проф. Ін-т проблем машинобудування НАН України
Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В. Н. Каразіна
Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Professor of Technical Informatics and Computer Systems, Institute of Informatics, Technical University of Clausthal, Germany
Соколов О.Ю., д.т.н., проф., Національний аерокосмічний університет імені М.С. Жуковського "ХАІ"
Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна
Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна
Черваньов І.Г., д.т.н., проф., геолого-географічний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна
Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна
Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 538.
Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua .

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 11825-696 ПР від 04.10.2006.

© Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, оформлення, 2014

ЗМІСТ

▪ Е. В. Белкин, А. В. Киричок, В. М. Куклин, А. В. Приймак.	5
О верификации S-теории, используемой для описания модуляционных неустойчивостей волнового поля	
▪ Я. П. Василенко, Л. П. Дмитроца, М. В. Приймак.	21
Клас функцій зі змінним періодом	
▪ Л. С. Глоба, В. В. Курдеча, С. В. Суліма.	33
Процедура оновлення програмного забезпечення в системі Software Defined Radio	
▪ П. А. Глушич, О. В. Науменко, Е.А. Стрельникова.	44
Формы собственных колебаний жидкости в жестких цилиндрических резервуарах в условиях низкой гравитации	
▪ В. И. Гнитько, К. Г. Дегтярев, А. М. Тонконоженко.	51
Компьютерное моделирование разрушающей нагрузки на топливный бак	
▪ Т. А. Григорова, Ю. Г. Зіненко.	60
Створення мультимедійних підручників з урахуванням міждисциплінарних зв'язків	
▪ Т. А. Григорова, А. И. Мандрыка.	66
Особенности автоматизации подготовки лекций и презентаций для систем дистанционного обучения	
▪ Н. Д. Кахута.	75
Математические основания реляционных баз данных. Часть 1: представления основных табличных операций	
▪ А. В. Коробская.	85
Полугруппа оператора интегрирования и его свойства	
▪ Т. В. Кутя.	99
Математичне моделювання змочування ґрунту на схилі в умовах багатоконпонентного неізотермічного солеперенесення	

▪ С. Н. Ламтюгова, М. В. Сидоров.	111
Математическое моделирование задач обтекания в цилиндрической системе координат	
▪ Ю. С. Литвинова, К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко.	122
R-функции в математическом моделировании 3D-дома для реализации технологий 3D-печати	
▪ У. Е. Огородник, Е. А. Стрельникова, Ю. С. Шувалова.	129
Сингулярные интегральные уравнения в задаче о свободных колебаниях оболочки вращения с жидкостью	
▪ В. Б. Погрибный, Е. А. Стрельникова	136
Алгоритм численного решения системы уравнений Навье-Стокса методом конечных объемов	
▪ Н. В. Сметанкіна.	148
Моделювання коливань шаруватих оболонок зі складною формою плану при ударному навантаженні	
▪ М. Ю. Терновой, О. С. Штогріна.	156
Представлення баз нечітких знань за допомогою метаграфа та проведення нечіткого логічного виведення на його основі	
▪ CONTENTS	166

УДК 519.6

О верификации S-теории, используемой для описания модуляционных неустойчивостей волнового поля

Е. В. Белкин, А. В. Киричок, В. М. Куклин, А. В. Приймак
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

Рассмотрена модуляционная неустойчивость интенсивного волнового поля для модели, которая описывается уравнением Лайтхилла с учетом поглощения и внешнего источника. Обсуждается природа появления волн и огибающих волнового поля аномальной амплитуды в нелинейных средах, в частности на поверхности океана. Обсуждаются результаты упрощенного описания на основе модифицированной S-теории и результаты без использования упрощений. Показано, что многие характеристики обеих описаний оказываются достаточно близки, по крайней мере, на начальной стадии нелинейного режима неустойчивости.

Ключевые слова: модуляционная неустойчивость, волны аномальной амплитуды, S-теория, уравнение Лайтхилла.

Розглянута модуляційна нестійкість інтенсивного хвильового поля для моделі, яка описується рівнянням Лайтхілла з урахуванням поглинання і зовнішнього джерела. Обговорюється природа появи хвиль і обвідних хвильового поля аномальної амплітуди в нелінійних середовищах, зокрема на поверхні океану. Обговорюються результати спрощеного опису на основі модифікованої S-теорії та результати без використання спрощень. Показано, що багато характеристик обох описів виявляються досить близькими, принаймні, на початковій стадії нелінійного режиму нестійкості.

Ключові слова: модуляційна нестійкість, хвилі аномальної амплітуди, S-теорія, рівняння Лайтхілла.

The modulation instability of intense wave field is considered for a model described by the Lighthill equation, taking into account absorption and external source. The nature of the wave appearance and the wave field envelopes of the anomalous amplitude in nonlinear media are discussed, in particular on the ocean surface. The results of the simplified description based on a modified S-theory and the results without the use of simplifications are discussed. Many of the characteristics of both descriptions are close enough for at least in the initial stage of the nonlinear instability mode.

Key words: modulation instability, waves of the anomalous amplitude, S-theory, the equation of Lighthill.

1. Введение

Периодические волны конечной амплитуды в средах с локальной кубической нелинейностью являются неустойчивыми с возбуждением двух боковых спектров вынужденных возмущений, соответственно с большей и меньшей длиной волны [1-6]. Развитие такой неустойчивости приводит к амплитудной модуляции начальной волны [2]. Исследование модуляционной неустойчивости полезно для изучения эволюции волнового движения и транспортировки волновых пакетов. В консервативных средах с кубической нелинейностью при отсутствии затухания колебаний формируются нелинейные образования - автоволны [7-10], в частности, солитоны. Однако в открытых системах с внешними источниками и поглощением энергии возникают новые виды

нелинейных образований (см, например, [11-13]). Одними из первых изучение открытых нелинейных систем начали авторы работ [14-18], которые сформулировали подходы к описанию нелинейной стадии модуляционной неустойчивости спиновых волн на базе так называемой S-теории. Позднее была предложена модифицированная модель S-теории [19-22], позволившая детально изучить эволюцию волновых пакетов интенсивного волнового движения разной природы.

В данной работе проводится верификация применения S-теории для описания модуляционных неустойчивостей путем сравнения результатов расчетов на ее основе с результатами расчетов общей теории, которая учитывает различные виды взаимодействия мод спектра. Цель работы - показать сходство этих двух подходов, сравнить характеристики процесса неустойчивости, максимальные амплитуды модуляции (оггибающей) и отдельных волн, а также время их появления.

2. Математические модели описания модуляционных неустойчивостей волнового поля

Математические модели, представленные в [1-3,6], изложены в единой системе обозначений далее.

При наличии источника и стока (распределенного вывода, поглощения и диссипации) энергии волны уравнение Лайтхилла (разновидность нелинейного уравнения Шредингера) принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\delta A - i\hat{f}A - i\hat{h}A |A|^2 + g, \quad (1)$$

где δ - декремент поглощения и g - внешний источник волновой энергии, \hat{f} и \hat{h} - пространственные операторы. Медленно меняющаяся со временем амплитуда колебаний $A(t, x)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} A &= u_0(t) \exp\{i\phi_{k_0}(t) - ik_0x\} + \sum_{n \neq 0} u_n(t) \exp\{i\phi_{k_n}(t) - ik_nx\} = \\ &= \{u_0(t) + \\ &+ \sum_{n \neq 0} u_n(t) \exp[i(\phi_{k_n} - \phi_{k_0}) - i(k_n - k_0)x]\} \exp\{i\phi_{k_0}(t) - ik_0x\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Т.е. неустойчивость понимают как возбуждение спектра $\sum_{n \neq 0} u_n(t) \cdot \exp\{i\phi_{k_n}(t)\} \cdot \exp\{i\omega_0 t - ik_nx\}$, где $u_n(t) \cdot \exp\{i\phi_{k_n}(t)\}$ - медленно меняющаяся комплексная амплитуда n-ной моды спектра. Суммарное поле представляет собой модулированную волну на частоте ω_0 .

Действительно, выделяя отвечающий основной волне «быстрый» фазовый множитель $\exp\{i\omega_0 t - ik_0x\}$, получим в этом случае поле колебаний, как произведение

$$A = \exp\{i\omega_0 t - ik_0 x\} \cdot \{u_0 \exp[i\phi_{k_0}] + \sum_{n \neq 0} u_n \exp[i\phi_{k_n} - i(k_n - k_0)x]\}, \quad (3)$$

где $\exp\{i\omega_0 t - ik_0 x\}$ - быстро меняющаяся фаза.

Огибающую этого волнового процесса можно определить следующим образом. Обозначим быструю фазу $\omega_0 t - k_0 x + \phi_{k_0} = \varphi$, а медленную $(\phi_{k_n} - \phi_{k_0}) - (k_n - k_0)x = \psi_n$. Тогда, например,

$$\operatorname{Re} A = \bar{A} \cdot \{ \cos \varphi \cdot \sin \bar{\varphi} - \sin \varphi \cdot \cos \bar{\varphi} \} = -\bar{A} \cdot \sin(\varphi - \bar{\varphi}),$$

где $\sin \bar{\varphi} = (u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n \cos \psi_n) / \bar{A}$, $\cos \bar{\varphi} = \sum_{n \neq 0} u_n \sin \psi_n / \bar{A}$, причем

амплитуда огибающей

$$\bar{A} = \sqrt{(u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n \cos \psi_n)^2 + (\sum_{n \neq 0} u_n \sin \psi_n)^2}.$$

Или, возвращаясь к прежним обозначениям

$$\begin{aligned} \bar{A} = & \left\{ (u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n \cos[(\phi_{k_n} - \phi_{k_0}) - (k_n - k_0)x])^2 + \right. \\ & \left. + (\sum_{n \neq 0} u_n \sin[(\phi_{k_n} - \phi_{k_0}) - (k_n - k_0)x])^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

На линейной по амплитудам возмущений стадии модуляционной неустойчивости возбуждается спектр колебаний, волновые числа которых располагаются симметрично относительно волнового числа k_0 основной моды конечной амплитуды $k_n \equiv k_0 + K_n > k_0$ и $k_{-n} \equiv k_0 - K_n < k_0$, где $n > 0$. Каждая пара симметрично расположенных относительно основной волны мод k_n, k_{-n} непосредственно взаимодействует с полем основной волны, причем, выполняется соотношение $k_n + k_{-n} = 2k_0$, которое обусловлено видом нелинейности.

Основываясь на этой особенности модуляционной неустойчивости, была построена так называемая S-теория, которая учитывала взаимодействие только «спаренных» мод спектра, волновые вектора которых симметрично располагались относительно волнового вектора основной волны конечной амплитуды ($2k_0 = k_S + k_{-S} = k_n + k_{-n}$).

Более общее описание позволяет в выражении для нелинейного слагаемого вида $\{A|A|^2\}$ в уравнении (1) удерживать все слагаемые, не ограничиваясь симметричными по отношению к накачке модами спектра (то есть $2k_0 = k_S + k_{-S} = k_n + k_{-n}$), которые используются для формирования S-теории.

Описание огибающей волнового поля в средах со слабой дисперсией.

Подобные волны большой амплитуды возбуждаются в волноводах, как вакуумных, так и заполненных диэлектриком или плазмой. Уравнение Лайтхилла (1) для комплексной амплитуды волнового поля можно получить [19], полагая $\mathcal{F} = \partial^2 / \partial x^2$ и $\mathcal{K} = 1$. Уравнения для амплитуды и фазы малых мод $u_n(t) \cdot \exp\{i\varphi_n(t)\}$ в этом случае можно записать в виде

$$\frac{\partial u_n}{\partial \tau} = -\delta u_n - \beta_{1L} A_{n,1} - \beta_{2L} A_{n,2}, \quad (5)$$

$$u_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} = K_n^2 \cdot u_n - \beta_{1L} B_{n,1} - \beta_{2L} B_{n,2}, \quad (6)$$

а для амплитуды и фазы основной волны

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} = -\delta u_0 - \beta_{1L} A_{0,1} - \beta_{2L} A_{0,2} + G_0, \quad (7)$$

$$u_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} = -\beta_{1L} B_{0,1} - \beta_{2L} B_{0,2}, \quad (8)$$

где $G_{k_n} \equiv G_n = 0, k_n \neq k_0, n \neq 0$; $G_{k_n} \equiv G_n = \delta, k_n = k_0, n = 0, \varphi_n = \varphi_{k_n}$.

Причем для $A_{i,j}$ и $B_{i,j}$ справедливы выражения

$$A_{0,1} = +u_0 \sum_{m \neq 0} u_m u_{-m} \text{Sin}(2\varphi_0 - \varphi_m - \varphi_{-m}), \quad (9)$$

$$B_{n,1} = [u_0^3 + 2u_0 \sum_{m \neq 0} u_m^2 + u_0 \sum_{m \neq 0} u_m u_{-m} \text{Cos}(\varphi_m + \varphi_{-m} - 2\varphi_0)], \quad (10)$$

$$A_{0,2} = -\sum_m \sum_p u_{-m-p} u_{-p} u_m \cdot \text{Sin}(\varphi_{-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_0) - A_{0,1}, \quad (11)$$

$$B_{0,2} = +\sum_m \sum_p u_{-m-p} u_{-p} u_m \cdot \text{Cos}(\varphi_{-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_0) - B_{0,1}, \quad (12)$$

$$A_{n,1} = -[u_{-n} u_0^2 \text{Sin}(2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}) + u_{-n} \sum_{m \neq 0, n} u_m u_{-m} \text{Sin}(\varphi_m + \varphi_{-m} - \varphi_n - \varphi_{-n})], \quad (13)$$

$$B_{n,1} = [u_n u_n^2 + 2u_n u_0^2 + 2u_n \sum_{m \neq 0, n} u_m^2 + u_{-n} u_0^2 \text{Cos}(2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}) + u_{-n} \sum_{m \neq 0, n} u_m u_{-m} \text{Cos}(\varphi_m + \varphi_{-m} - \varphi_n - \varphi_{-n})], \quad (14)$$

$$A_{n,2} |_{n \neq 0} = -\sum_m \sum_p u_{n-m-p} u_{-p} u_m \cdot \text{Sin}(\varphi_{n-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_n) - A_{n,1}, \quad (15)$$

$$B_{n,2} |_{n \neq 0} = +\sum_m \sum_p u_{n-m-p} u_{-p} u_m \cdot \text{Cos}(\varphi_{n-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_n) - B_{n,1}, \quad (16)$$

где $-N < n < N = 200$, для нормировки амплитуды основной волны на единицу на начальной стадии процесса здесь и ниже был выбран уровень внешней накачки $G = \delta$. При $\beta_{1L} = 1$ и $\beta_{2L} = 0$ приходим к случаю S-теории (а)

[19], при $\beta_{1L} = 1$ и $\beta_{2L} = 1$ система уравнений есть следствие полного уравнения Лайтхилла, то есть без упрощений S-теории с данным типом дисперсионного слагаемого (b). Пространственно-временная структура волнового поля и его огибающей может быть представлена выражениями (3) и (4).

Описание волнового поля в средах с сильной дисперсией.

Рассмотрим для определенности случай модуляционной неустойчивости гравитационных поверхностных волн на глубокой воде в форме [21-22], представляющих особый интерес для судоходства в районах с высоким уровнем океанского волнения. Для частоты волн большой амплитуды [23] справедливо следующее выражение

$$\omega = kW = \sqrt{gk} \cdot \left\{ 1 + \frac{a^2 k^2}{2} + \dots \right\}, \quad (17)$$

где η - отклонение поверхности, W - скорость волны, g - ускорение свободного падения. Уравнение Лайтхилла-Невилла (1) для комплексной амплитуды отдельной моды спектра волнового поля при этом представляется в виде [21-22]

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_K}{\partial t} &= -\delta A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)}A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \{|A|^2\}_K = \\ &= -\delta A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)}A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot \\ &\cdot \{A_K [2|A_0|^2 + 2 \sum_{K' \neq K, 0} |A_{K'}|^2 + |A_K|^2] + A_{-K}^* \{A_0^2 + \sum_{K \neq K, 0} A_K \cdot A_{-K}\}\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения для амплитуды и фазы малых мод можно записать в виде

$$\frac{\partial u_n}{\partial \tau} = -\delta u_n - \beta_1 A_{n,1} - \beta_2 A_{n,2}, \quad (19)$$

$$u_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} = -2 \left\{ \frac{\sqrt{1+n \cdot \Delta} - 1}{\alpha} \right\} u_n - \beta_1 B_{n,1} - \beta_2 B_{n,2}. \quad (20)$$

Уравнения для амплитуды и фазы моды основной волны

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} = -\delta u_0 - \beta_1 A_{0,1} - \beta_2 A_{0,2} + G_0, \quad (21)$$

$$u_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} = -\beta_1 B_{0,1} - \beta_2 B_{0,2}, \quad (22)$$

где

$$A_{0,1} = -[u_0 \sum_{m \neq 0, n} u_m u_{-m} \text{Sin}(\varphi_m + \varphi_{-m} - 2\varphi_0)], \quad (23)$$

$$B_{0,1} = [u_0 u_0^2 + 2u_0 \sum_{m \neq 0} u_m^2 + u_0 \sum_{m \neq 0} u_m u_{-m} \text{Cos}(\varphi_m + \varphi_{-m} - 2\varphi_0)], \quad (24)$$

$$A_{0,2} = -\sum_m \sum_p u_{-m-p} u_{-p} u_m \cdot \text{Sin}(\varphi_{-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_0) - A_{0,1}, \quad (25)$$

$$B_{0,2} = +\sum_m \sum_p u_{-m-p} u_{-p} u_m \cdot \text{Cos}(\varphi_{-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_0) - B_{0,1}, \quad (26)$$

$$A_{n,1} = -(1+n \cdot \Delta)^{5/2} [u_{-n} u_0^2 \text{Sin}(2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}) + u_{-n} \sum_{m \neq 0, n} u_m u_{-m} \text{Sin}(\varphi_m + \varphi_{-m} - \varphi_n - \varphi_{-n})], \quad (27)$$

$$B_{n,1} = (1+n \cdot \Delta)^{5/2} [u_n u_n^2 + 2u_n u_0^2 + 2u_n \sum_{m \neq 0, n} u_m^2 + u_{-n} u_0^2 \text{Cos}(2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}) + u_{-n} \sum_{m \neq 0, n} u_m u_{-m} \text{Cos}(\varphi_m + \varphi_{-m} - \varphi_n - \varphi_{-n})], \quad (28)$$

$$A_{n,2} |_{n \neq 0} = -(1+n \cdot \Delta)^{5/2} \sum_m \sum_p u_{n-m-p} u_{-p} u_m \cdot \quad (29)$$

$$\cdot \text{Sin}(\varphi_{n-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_n) - A_{n,1},$$

$$B_{n,2} |_{n \neq 0} = +(1+n \cdot \Delta)^{5/2} \sum_m \sum_p u_{n-m-p} u_{-p} u_m \cdot \quad (30)$$

$$\cdot \text{Cos}(\varphi_{n-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_n) - B_{n,1}.$$

При $\beta_{1L} = 1$ и $\beta_{2L} = 0$ приходим к случаю S-теории (а) [21-22], при $\beta_{1L} = 1$ и $\beta_{2L} = 1$, система уравнений есть следствие полного уравнения Лайтхилла вида (18), то есть без упрощений S-теории (б). Пространственно-временная структура волнового поля в системе покоя основной волны может быть представлена выражением

$$E(\xi, \tau) = u_0 \text{Cos}(\xi + \varphi_0) + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n > 0}} [u_n \cdot \text{Cos}\{-2 \frac{\sqrt{(1+n \cdot \Delta)} - (1+n \cdot \Delta)}{\alpha} \tau + (1+n \cdot \Delta) \cdot \xi + \varphi_n\} + u_{-n} \cdot \text{Cos}\{2 \frac{\sqrt{(1-n \cdot \Delta)} - (1-n \cdot \Delta)}{\alpha} \tau + (1-n \cdot \Delta) \cdot \xi + \varphi_{-n}\}], \quad (31)$$

где $k_0 x = \xi$ и область пространства рассмотрения $-\pi / \Delta < \xi < \pi / \Delta$,

$$\alpha = k_0^2 |A_0|^2, \tau = t \cdot \omega_0 \frac{k_0^2 |A_0|^2}{2} = t \cdot \sqrt{g k_0} \frac{k_0^2 |A_0|^2}{2}, \quad k_n / k_0 = 1 + n \cdot \Delta,$$

$-N < n < N = 200$.

3. Численный анализ процессов модуляционной неустойчивости

Постановка задачи.

Для выполнения цели работы проводится ряд численных экспериментов и анализ результатов. Разработано программное обеспечение, реализующее представленные выше математические модели. Для среды со слабой дисперсией определяется поведение основной волны и ее энергии, спектров неустойчивости и их энергии, амплитуды огибающей волнового поля. Для среды с сильной дисперсией определяется поведение основной волны, спектров неустойчивости, распределение размахов (расстояний между гребнем и впадиной) волн и определение величины и частоты появления аномальных размахов.

Численный эксперимент представляет собой решение задачи Коши методом Эйлера. Численные эксперименты проводятся на графическом процессоре с помощью технологии CUDA. Все вычисления выполняются в двойной точности, кроме вычисления тригонометрических функций. Вычисление тригонометрических функций синуса и косинуса происходит в урезанной точности (функции `__sinf(x)`, `__cosf(x)`), что не влияет на точность вычислений в целом, при этом уменьшая время численного эксперимента на 70%.

Огибающая волнового поля в средах со слабой дисперсией. Практический интерес связан с транспортировкой волн большой амплитуды при малых уровнях поглощения вдали от порога $\delta = \delta_{thr} = 1$. Характерные времена модуляции амплитуды основной волны при уровне поглощения $\delta = 0.1$ при учете всех видов взаимодействия мод становятся менее регулярными (рис. 1).

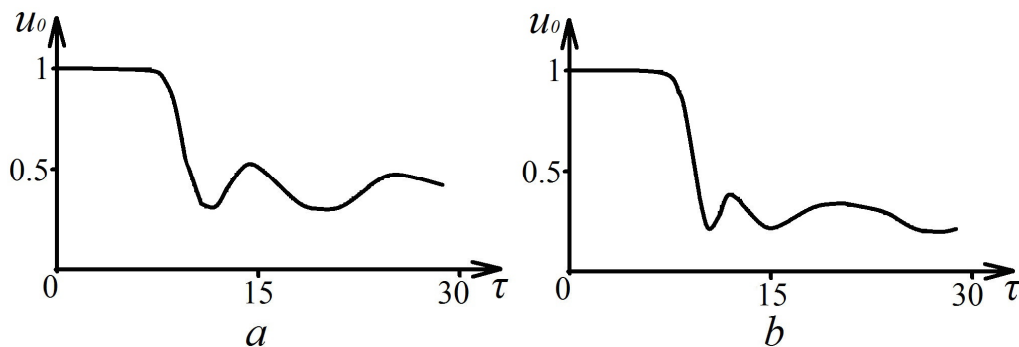


Рис. 1. Поведение амплитуды основной волны со временем для случаев применения S-теории (a) и рассмотрения без приближений (b) при $\delta = 0.1$, $N = 200$.

Зависимости энергии спектра мод $\sum_{m \neq 0} u_m^2$ и энергии основной волны u_0^2 от времени в процессе развития неустойчивости, представлены на рис. 2. Явно заметен осцилляторный характер обмена энергией между основной волной и спектром неустойчивых мод.

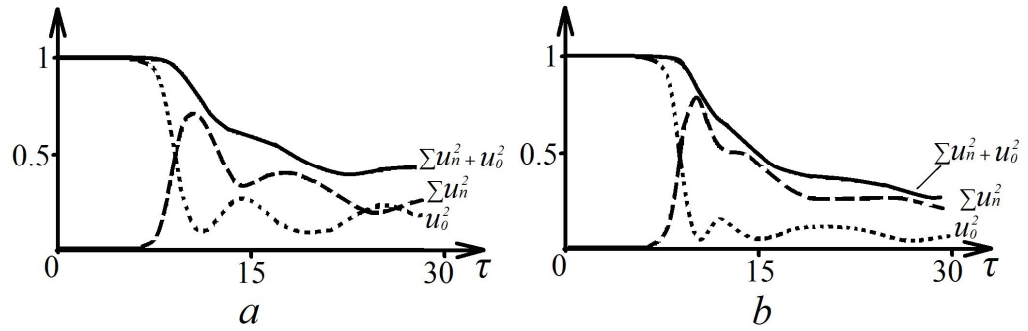


Рис.2. Зависимости энергии спектра мод $\sum_{m \neq 0} u_m^2$, энергии основной волны u_0^2 и их суммы от времени для случаев применения S-теории (a) и рассмотрения без приближений (b) при $\delta = 0.1$, $N = 200$.

Максимумы амплитуды огибающей в обоих случаях достигаются практически в одно время и примерно равны друг другу (рис.3).

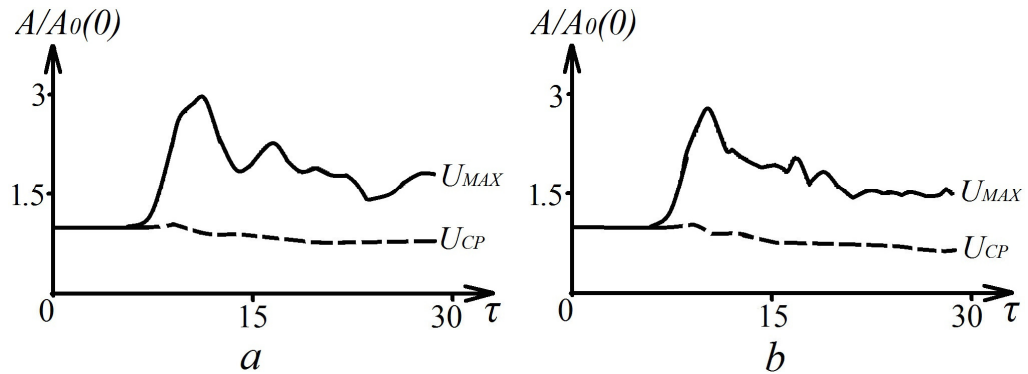


Рис.3. Максимальная (сплошная кривая) и средняя (пунктир) амплитуды огибающей волнового поля для случаев применения S-теории (a) и рассмотрения без приближений (b) при $\delta = 0.1$, $N = 200$.

Изменяется и поведение спектра неустойчивости. Характерный для модуляционной неустойчивости двугорбый спектр в случае описания в рамках S-теории (a) сужается, а при рассмотрении без приближений (b) наблюдается противоположная тенденция к расширению. Времена рассмотрения спектра выбраны на линейной по амплитудам возмущений стадии процесса, в момент достижения максимальной амплитуды огибающей волнового поля и в стадии развитой неустойчивости (рис.4).

В условиях слабого поглощения энергия спектра модуляционной неустойчивости достигает значений, сравнимых с начальной энергией волны конечной амплитуды. Из рис.3 видно, что на начальной стадии нелинейного режима процесса возможно появление волн и всплесков огибающей с весьма большой амплитудой. В дальнейшем происходит

снижение амплитуды основной волны (рис.2, рис.3) и ее влияние на интерференцию мод спектра ослабляется, а амплитуда мод уменьшается.

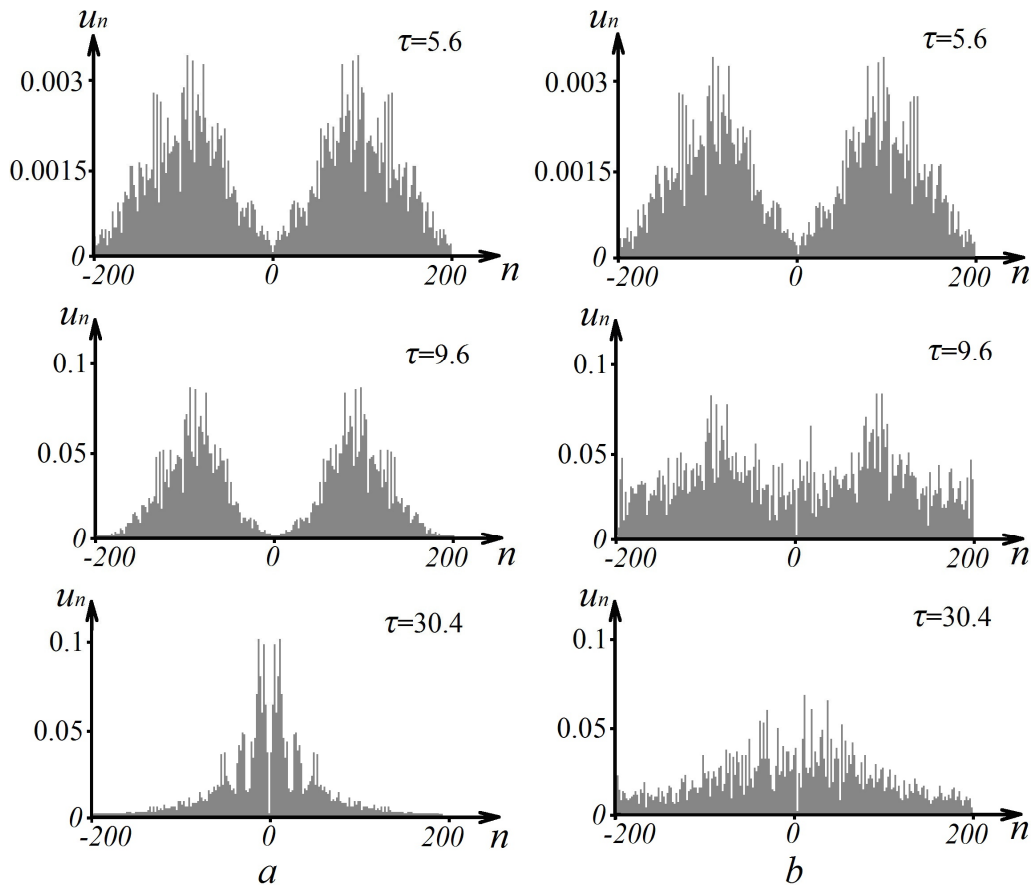


Рис.4. Спектры неустойчивости для трех моментов времени в случае описания в рамках S -теории (а) и рассмотрения без приближений (б) при $\delta = 0.1$, $N = 200$.

Характер модуляции основной волны в пространстве (фрагмент вблизи области с максимальной амплитудой огибающей) для тех же моментов времени для двух случаев описания неустойчивости представлен на рис.5.

Из результатов численного моделирования следует, что на начальной стадии процесса интенсивность поля в области максимума огибающей волн примерно на порядок превосходит средний уровень интенсивности.

Волновое поле в средах с сильной дисперсией. Океанские волны. В реальных условиях поглощение энергии гравитационных волн большой амплитуды на поверхности океана весьма мало. Поэтому рациональным будет проводить сравнение двух моделей описания для реалистичного случая очень малого поглощения $\delta = 0.01$ и значительной амплитуды волнения

$$\Delta = \frac{0.566}{N}; \alpha = 0.01.$$

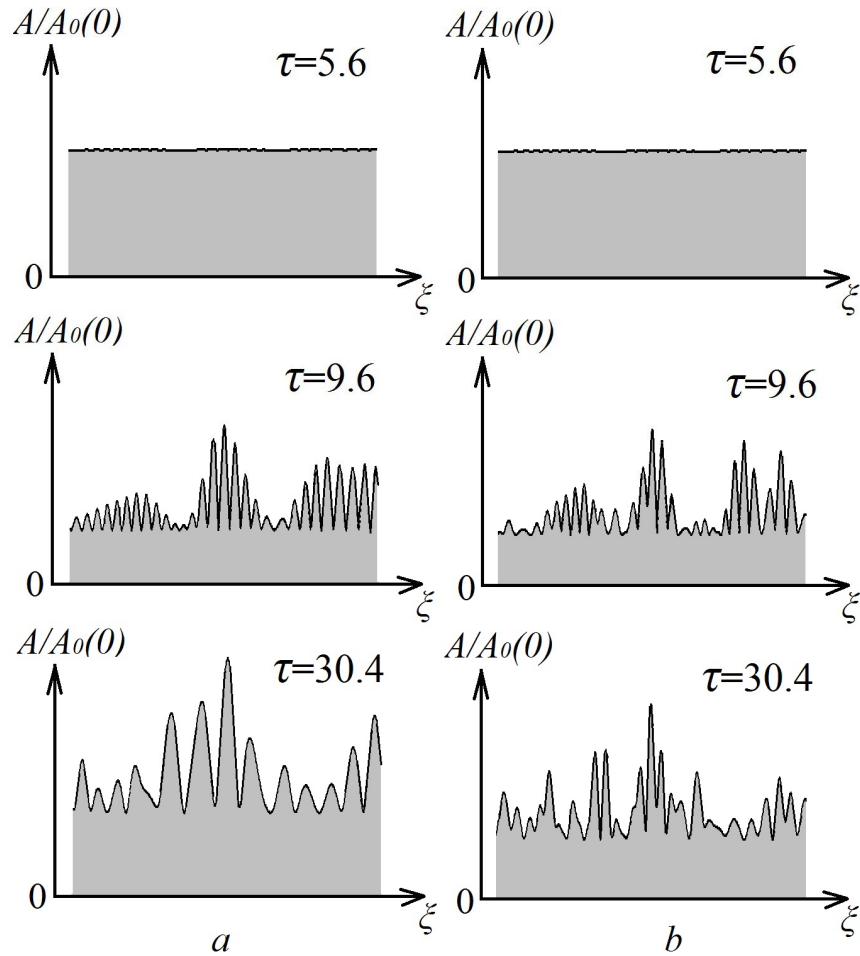


Рис.5. Модуляция основной волны для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (a) рассмотрения без приближений (b) при $\delta = 0.1$, $N = 200$.

Для анализа размахов волн (т.е. расстояния между верхней точкой гребня волны и нижней точкой впадины) выделим из них треть наибольших. Критерий, по которому выделяют anomalно большие волны обычно

$$U_{AG} > 2U_{SWH}, \quad (32)$$

где U_{AG} - anomalная волна, U_{SWH} - среднее значения размаха трети самых больших размахов.

На рис.6-10 приведем результаты расчетов, демонстрирующие развитие спектра неустойчивости для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (a) и в общем случае рассмотрения без приближений (b).

Легко видеть формирование характерного двугорбого спектра (рис.6) модуляционной неустойчивости. Если в случае описания в рамках S-теории такая форма спектра сохраняется, то в общем случае описания спектр с развитием неустойчивости сглаживается.

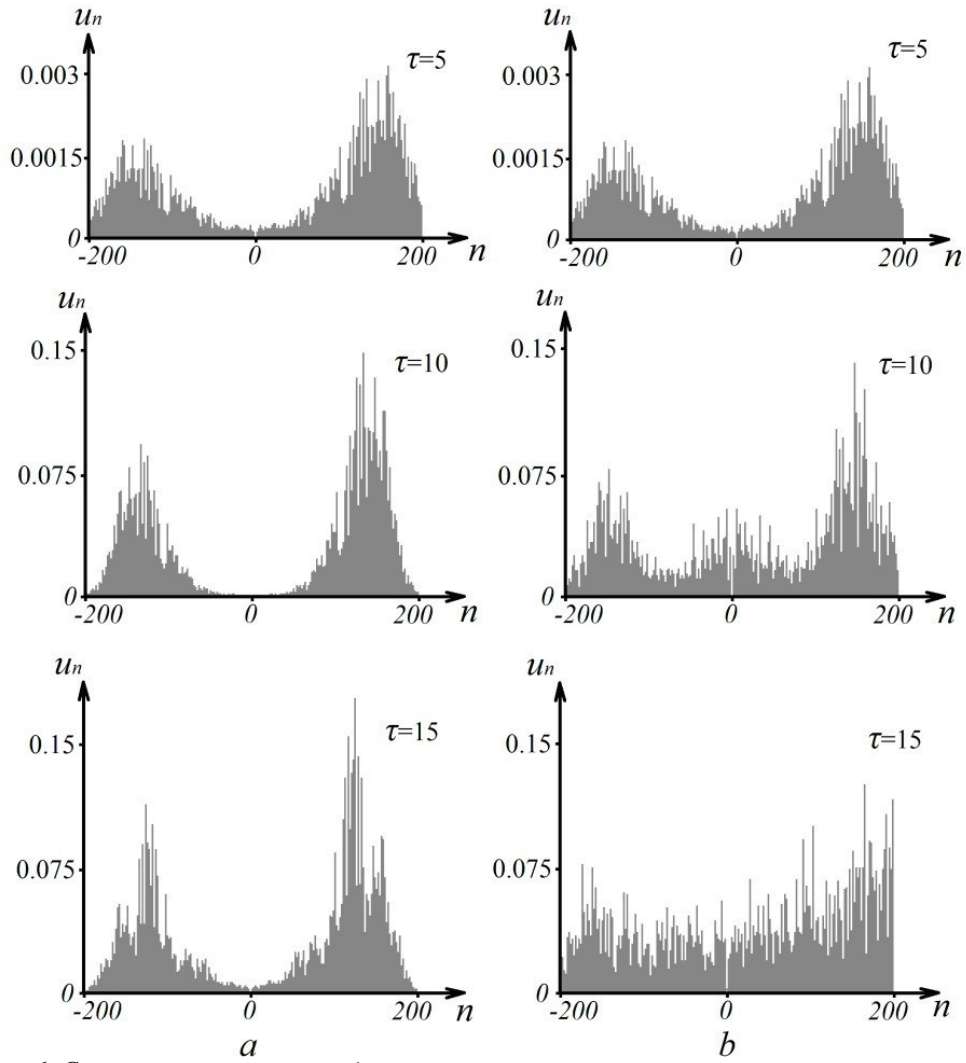


Рис.6. Спектр неустойчивости для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (a) и в общем случае рассмотрения без приближений (b).

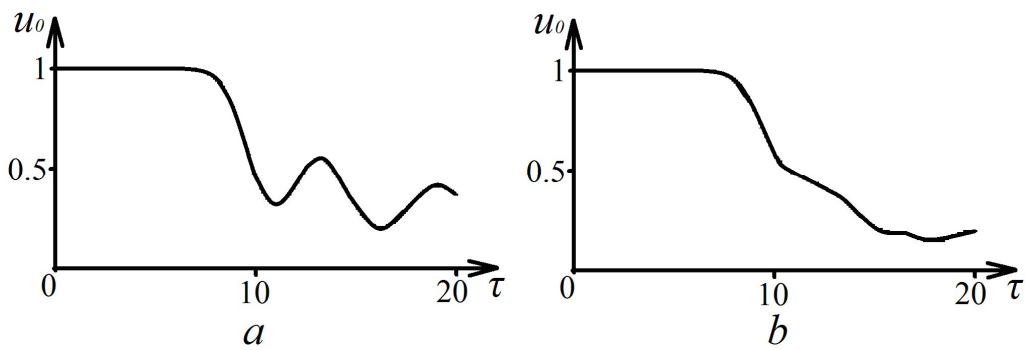


Рис.7. Изменение амплитуды основной волны со временем в случае описания в рамках S-теории (a) и в общем случае рассмотрения без приближений (b).

Из рис.7 видно, что нерезонансные взаимодействия, для которых не выполнены соотношения S-теории, приводят к срыву осцилляторного режима поведения амплитуды основной волны, характерного для режима резонансного взаимодействия, описываемого S-теорией [21-22].

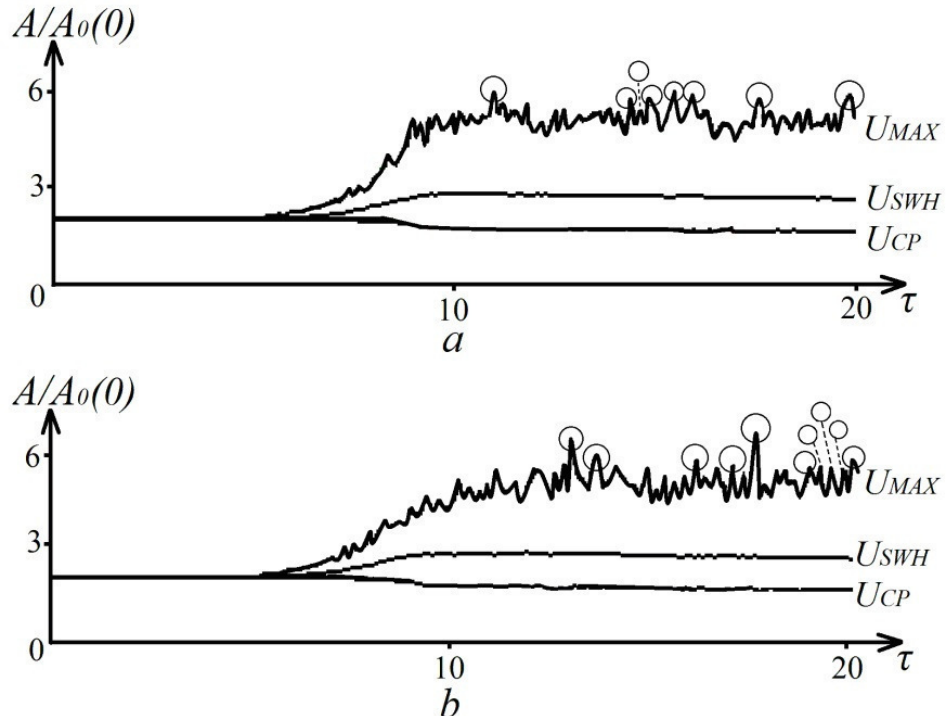


Рис.8. Средняя амплитуда U_{CP} , средняя амплитуда трети наибольших мод U_{SWH} и самый большой размах волны из ансамбля U_{Max} , как функции времени. Кружками отмечено появление волн аномальной амплитуды U_{AG} (32) в рамках S-теории (a) и в общем случае рассмотрения без приближений (b).

Распределения амплитуд размахов H , т.е. расстояний между верхней точкой гребня волны и нижней точкой впадины, в режиме развитой неустойчивости за все время расчетов представлены на рис. 9. Подсчет волн происходил в одном и том же варианте расчета через моменты времени, равные времени жизни аномально большой волны, в отличие от случая [21-22], где волны с разными амплитудами подсчитывались в многочисленных расчетах. В двух этих случаях частоты появления аномальных волн в статистике по ансамблям и времени почти не отличаются (одна аномальная волна на 15-20 тысяч волн).

Характер распределения размахов подобен [21-22], где их число подсчитывалось в разных реализациях и величины усреднялись по ансамблю реализаций. Число и распределение размахов обнаруженных волн аномальной амплитуды представлены в таблице 1. Следует обратить внимание на наличие выраженных «хвостов» распределений в обоих случаях.

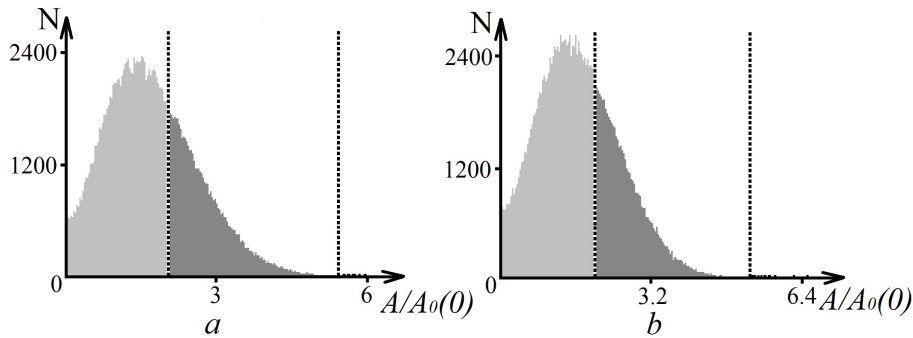


Рис.9. Распределение амплитуд размахов за все время расчетов в случае описания в рамках S-теории (a) и в общем случае рассмотрения без приближений (b). Пунктирные линии определяют границу между модами малой амплитуды и третью самых больших мод и величиной, в два раза превышающей среднее значение от трети самых больших мод. a) - всего размахов 173526, треть наибольших размахов 57842, размахов в 2 раза больше среднего трети наибольших размахов 8, b) - всего размахов 176386, треть наибольших размахов 58795, размахов в 2 раза больше среднего трети наибольших 10.

Табл.1. Число и распределение размахов обнаруженных волн аномальной амплитуды

$U_{AG} / 2U_{SWH}$	от 2 до 2.1	от 2.1 до 2.2	от 2.2 до 2.3	от 2.3 до 2.4	от 2.4 до 2.5	всего
Случай a: $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$	4	2	2	-	-	8
Случай b: $\beta_1 = 1, \beta_2 = 1$	7	1	-	1	1	10

Анализ наблюдений и численных экспериментов показывает [24-34], что аномальные волны часто возникают в составе групп волн, имеющих форму солитоноподобных образований. И в данном случае такие волны появляются в составе групп больших волн, причем в общем случае длина модуляции меньше, чем при описании в рамках S-теории (см. рис.10). Большая волна с амплитудой, сравнимой с $2U_{SWH}$ приходится на 10^4 волн, что согласуется со статистическими оценками, однако волны с амплитудой больше $2.5U_{SWH}$ появляются значительно чаще, чем можно ожидать при случайной интерференции волнового движения.

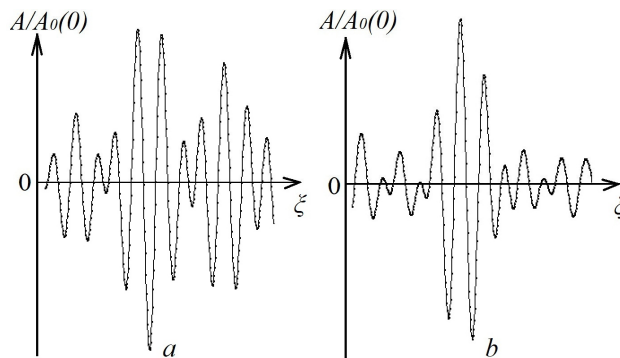


Рис.10. Характерный вид аномальных волн в составе групп волн в случае описания в рамках S-теории (a) и в общем случае рассмотрения без приближений (b).

4. Выводы

При сравнении S-теории и более общей теории (то есть без упрощений S-теории) модуляционных неустойчивостей определено, что многие характеристики процесса неустойчивости оказываются близки, по крайней мере, на начальной стадии нелинейного режима неустойчивости. Подобными оказываются достигаемые максимальные амплитуды модуляции (огибающей), отдельных волн, времена их появления. Таким образом, S-теория позволяет не только качественно, но количественно описывать начальную стадию нелинейного режима процесса модуляционной неустойчивости.

Результаты моделирования обнаруживают формирование цугов волн, короткое время жизни таких групп волн и поясняют природу расширения масштаба и уменьшения амплитуды модуляции волнового движения. Аномальные волны сверхвысокого размаха и амплитуды выявлены на начальной стадии модуляционной неустойчивости. На больших временах процесса амплитуда аномально больших волн оказывается меньше, чем на начальной стадии развитой неустойчивости. Определено, что частота появления аномальных волн и их амплитуды отвечают оценкам [33,35,36].

ЛИТЕРАТУРА

1. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system / M. J. Lighthill. // J. Inst. Math. Appl. 1965, V.1, N.2. p.269-306.
2. Zakharov V. E. Stability of nonlinear waves in dispersive media. // J. Theor. Prikl. Fiz., 1966. V. 51, p 668-671. Weak-turbulence spectrum in a plasma without a magnetic field // Sov. Phys. JETP. - 1967. - Vol. 24(2), P.455-459. The Instability of Waves in Nonlinear Dispersive Media // Sov. Phys. JETP. - 1967. - Vol. 24. - P.740.
3. Silin V.P. Parametric resonance in plasma. / JETP. - 1965. - Vol. 48, N6. - P. 1679-1691.
4. Aliev Ju.M., Silin V.P. Oscillations theory of plasma, which situated in HF electromagnetic field. // JETP. - 1965. - V.48, N.3. - P.901-912.
5. Gorbunov L.M., Silin V.P. On the plasma instability in strong HF field // JETP. - 1965. - V.49, N.6. - P.1973-1981.
6. T. B. Benjamin and J. E. Feir. The disintegration of wave trains on deep water, J. Fluid Mech. - 1967. - P.417-430.
7. Автоволновые процессы. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г., // под ред. Д.С.Чернавского. - М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. , 1987. - с.240.
8. Автоволновые процессы в системах с диффузией // под редакцией М.Т. Греховой. - Горький: ИПФ АН СССР, 1981. - с.246.
9. Теория солитонов: метод обратной задачи. // Под ред. С.П. Новикова. - М.: Наука, 1980. - 327с.
10. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука. - 1978. - 240с.
11. Space dissipative Structures / V. M. Chernousenko, V. M. Kuklin, I. P. Panchenko, V. M. Vorob'ev // Nonlinear World. - 1990. - Vol. 2 (IV

- International Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, 1989, Singapore). - P.776-803.
12. Роль поглинання та дисипації енергії у формуванні просторових нелінійних структур у нерівноважних середовищах/ В. М. Куклин // УФЖ. Огляди. - 2004. - Т. 1, № 1. - С. 49-81.
 13. Куклин В.М. Об интерференционной природе формирования тонкой структуры лазерных импульсов и аномальных всплесков амплитуды колебаний в модели Лайтхилла / VIII Харитоновские научные чтения. 21-24 марта, 2006 г. Саров, Россия, Сб. докладов. - Саров, 2006. - С. 450-456. Effect of induced interference and the formation of spatial perturbation fine structure in nonequilibrium open-ended system. / V. M. Kuklin // Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ) Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения». - 2006. - № 5 (5). - С. 63-68.
 14. Suhl H. Effective Nuclear Spin Interactions in Ferromagnets // Phys Rev. - 1958. - V.109, N2. - P.606.
 15. Schlomann E., Saunder J.H., Sirvets M.H. Band Ferromagnetic Resonance Experiments at High Peak Power Levels // J.Appl.Phys. - 1960. - V.31, Suppl. - P.386-395.
 16. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Новый механизм ограничения амплитуды СВ при параллельной накачке. // ФТТ. - 1969, т.11, с. 2047- 2055.
 17. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения // УФН. - 1974. - т. 114, №4. - с.609-654.
 18. Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. - М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1987. - 272 с.
 19. Об интерференции в многомодовых режимах модуляционных неустойчивостей / Белкин Е.В., Киричок А.В., Куклин В.М. // Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ), сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения». - 2008. - № 4 (6). - С. 222-227.
 20. Belkin E.V. The mathematical models of the modulation instability processes of waves in media with cubic nonlinearity/- manuscript. PhD-thesis by speciality 01.05.02 - mathematical modeling and computational methods. V.N.Karasin's Kharkiv National University, Kharkiv, 2010. 150 P.
 21. Модуляционная неустойчивость волн, поддерживаемых внешним источником в среде с поглощением. / Белкин Е.В., Киричок А.В., Куклин В.М. // ВАНТ, Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения, 2010, №4(68)), с.291-295.
 22. Belkin E.V., Kirichok A.V., Kuklin V.M. Development of modulation instabilities in media with damping and forcing / Мощная импульсная электрофизика. High-power pulsed electrophysics. Международная конференция XIV Харитоновские тематические научные чтения. International conference XIV Khariton's topical scientific readings. Сборник докладов. Digest of technical papers - Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2013. - 534 с. - ил. с. 14-20.
 23. Нелинейные волны в диспергирующих средах / Карпман В.И. - М. Наука. 1973. - 175 с.

24. Statistical theory of gravity and capillary waves on the surface of a finite-depth fluid. Three-dimensional aspects of air-sea interaction. / Zakharov V.E. // *Eur. J. Mech. B Fluids* 1999, V.18(3), P.327-344.
25. L.W. Schwartz, J.D. Fenton. Strongly nonlinear waves, *Ann. Rev. Fluid. Mech.* - 1982. - V.14. - P.39-60.
26. L. Debnath. *Nonlinear Water Waves*. Academic Press, Boston, 1994.
27. Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. Нижний Новгород: ННГУ, 2004.
28. Modulation instability of stokes wave - Freak wave. / Dyachenko A.I., Zakharov V.E. // *JETPLett* 2005, V.81(6). - P. 255-259.
29. Kharif C. and Pelinovsky E. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon, *Eur. J. Mech. B-Fluid.*, 2006. - V.22(6) . - P.603-633.
30. D.-I. Yeom, B.J. Eggleton. Photonics: rogue waves surface in light. *Nature*. 2007. - V.450. - P.953-962.
31. D.R. Solli, C. Ropers, P. Koonath, B. Jalali. Optical rogue waves. *Nature*. 2007. - V.450. - P.1054-1064.
32. L.F. Burlaga, N.F. Ness, M.H. Acuna. Linear magnetic holes in a unipolar region of the heliosheath observed by Voyager 1, *J. Geophys. Res.*, 112 (2007) A07106.
33. C. Kharif, E. Pelinovsky, A. Slunyaev. *Rogue Waves in the Ocean*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009.
34. M.S. Ruderman. Freak waves in laboratory and space plasmas, *Eur. Phys. J. Special Topics*. - 2010. - V.185. - P.57-66.
35. Влияние гигантских волн на безопасность морской добычи и транспортировки углеводородов / С.Бадулин, А.Иванов, А.Островский. // *Технологии, ТЭК, №2*, 2005.
36. Distributions of extreme wave, crest and trough heights measured in the North Sea. / Stansell, P. // *Ocean Engineering*, 2005, vol. 32, no. 8-9. - P.1015-1036.

УДК 517.5:621.3

Клас функцій зі змінним періодом

Я. П. Василенко, Л. П. Дмитроца, М. В. Приймак

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

В статті наголошено на фактах існування сигналів із змінним періодом та пов'язаних із ними задач дослідження таких сигналів. При цьому вказано на відсутність теорії сигналів із змінним періодом, а також готової методики аналітичного дослідження класу функцій зі змінним періодом. Враховуючи таку ситуацію, в роботі розглянуто клас функцій із змінним періодом та описано його важливий підклас, в якому виділено суперпозиції степеневих функцій з тригонометричними. Передбачається використати такі елементарні функції для побудови аналогів систем ортогональних тригонометричних функцій.

Ключові слова: сигнали, змінний період, функціональні класи, підкласи, елементарні функції, степеневі та тригонометричні функції, ортогональні системи.

В статье отмечены факты существования сигналов с переменным периодом и связанных с ними задач исследования таких сигналов. При этом указано на отсутствие теории сигналов с переменным периодом, а также готовой методики аналитического исследования класса функций с переменным периодом. Учитывая такую ситуацию, в работе рассмотрен класс функций с переменным периодом и описан его важный подкласс, в котором выделены суперпозиции степенных функций с тригонометрическими. Предполагается использовать такие элементарные функции для построения аналогов систем ортогональных тригонометрических функций.

Ключевые слова: сигналы, переменный период, функциональные классы, подклассы, элементарные, степенные и тригонометрические функции, ортогональные системы.

The article points that there exist signals having varying period and shows some mathematical problems related with such signals studying. It should be noticed however, that neither theory for such signals is available nor methods are developed to investigate analytically functions with varying period as a class. Taking into account this situation, the article discusses such class and describes its important subclass, in which special attention is paid to superpositions of power and trigonometric functions. The above-mentioned elementary functions are supposed to be used for creating analogues of systems of orthogonal trigonometric functions.

Key words: : signals, varying period, function classes, subclasses, elementary functions, power functions, trigonometric functions, orthogonal systems.

1. Вступ

В прикладних дослідженнях зустрічаються випадки необхідності дослідження сигналів (емпіричних функцій) із змінним періодом. Наглядним прикладом таких сигналів є електрокардіограма, але отримана в стані спокою, під час чи після дії на організм пацієнта певного збудника, найпростіше – фізичного навантаження. Якщо таку електрокардіограму розглядати протягом деякого проміжку часу, то при цьому, крім характерної для електрокардіограми повторюваності її основної форми, спостерігається ще одна особливість – період повторюваності неперервно змінюється. При зростанні частоти пульсу період зменшується і навпаки, при зменшенні частоти період зростає. Коли ж пульс приходить в «норму» (стабілізується), період електрокардіограми стає постійним. Приклад такої електрокардіограми показано на рис.1, де наведені три

відрізки електрокардіограми, кожний тривалістю 3 сек., взяті через певні проміжки часу після дії навантаження. На рис. 1а – електрокардіограма отримана через 60 сек. після дії навантаження, на рис 1б і 1в – відповідно через 120 сек. і 180 сек. після навантаження. Аналізуючи графіки, видно, що форма електрокардіограми повторюється як на кожному із графіків, так і на різних графіках. Але при цьому легко бачити, що період повторюваності змінюється: спочатку збільшується (порівняння графіків на рисунках 1а і 1б показує, що на інтервалах часу тривалістю 3 секунди на верхньому графіку розміщено п'ять періодів електрокардіограми, а на середньому графіку – чотири періоди), а із плином часом стабілізується (на середньому графіку, отриманому через дві хвилини після дії навантаження, розміщено чотири періоди електрокардіограми і стільки ж періодів розміщено на нижньому графіку, отриманому через три хвилини).

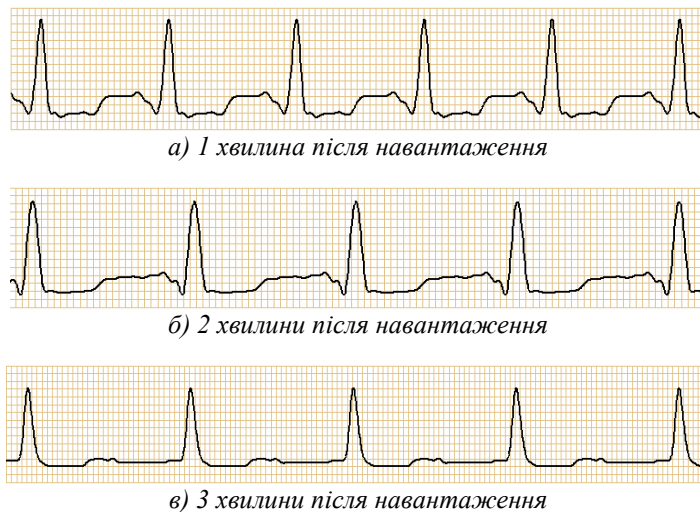


Рис.1. Відрізки електрокардіограми, отримані через різні проміжки часу після дії навантаження

Очевидно, подібною до кардіограми буде поведінка спірограми, теж отриманої після дії навантаження чи іншого збудника психофізичного стану людини. Приклади аналогічних сигналів можна також навести із функціонування деяких технічних систем.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій

Огляд літературних джерел показує, що хоча зустрічаються спроби дослідження сигналів із змінним періодом (особливо це стосується згаданих вище електрокардіограм), проте теорія таких сигналів відсутня, не існує аналітичних методів їх дослідження. Основоположний крок в напрямку вивчення сигналів із змінним періодом був здійснений в роботі [1], де була запропонована модель таких сигналів у вигляді функції із змінним періодом.

Наявність класу функцій із змінним періодом відкриває широкі можливості побудови їх теорії, розробки методів дослідження, подібно то того, як розвинута теорія звичайних періодичних функцій, або в термінології цієї статті – функцій із постійним періодом. Один із важливих напрямків дослідження стосується подання функцій із змінним періодом у вигляді тих чи інших аналітичних виразів, формул. Як показує огляд наукових праць, зокрема [2], для вирішення цієї задачі переважно використовується підхід, суть якого може бути висловлена одним словом «**заміна**». Досліджувана функція (оригінал) замінюється іншою функцією (для зручності назовемо її «копія»), яка в певному сенсі повинна бути «близькою» до «оригіналу» і разом з тим більш простою, зручнішою відносно «оригіналу» щодо можливостей її дослідження. Маючи таку «копію», в подальшому замість дослідження «оригіналу» передбачається досліджувати цю «копію». Ключовим в цьому підході є наступне положення. Якщо буде досягнута необхідна близькість між «оригіналом» і його «копією», то близькими, практично тотожним, будуть їхні властивості. Тому результатами, отриманими в процесі дослідження «копії» (а це значення тих чи інших параметрів «копії», виявлені її певні властивості тощо), буде наділятися і «оригінал».

Сама задача заміни «оригіналу» полягає в побудові його «копії». Для побудови переважно використовується алгоритм наближення [3, с.106-198], суть якого полягає в розкладі досліджуваної функції в деякий ряд, наприклад, ряд Фур'є. Але в нашому випадку проблемним є те, що для реалізації алгоритму наближення необхідно мати первинний «матеріал» – елементарні функції, які можна було б використовувати при побудові ряду, причому ці елементарні функції теж повинні відноситися до класу функцій зі змінним періодом.

3. Мета роботи та постановка задачі

Мета роботи – розглянути поняття функції із змінним періодом, навести аналітичні приклади елементарних функцій із змінним періодом, як первинного матеріалу для побудови систем тригонометричних функцій із змінним періодом, записати формули їх змінних періодів.

Функції із змінним періодом – порівняно новий об'єкт досліджень як в загальній теорії функцій, так і в прикладних областях, де приходиться досліджувати емпіричні функції (сигнали) із змінним періодом. Цілком природно, що розвиток теорії і методів аналізу функцій із змінним періодом супроводжується появою нових понять, термінів, позначень тощо. Тому, щоб перейти до основного змісту цієї роботи, нагадаємо деякі основоположні моменти, що стосуються цих функцій.

4. Поняття функції із змінним періодом та змінного періоду

Для сигналів із змінним періодом найбільш характерними є дві особливості: повторюваність значень сигналу та змінність періоду цієї повторюваності. Яким чином врахувати ці особливості сигналу в його моделі, розглядалося в [1]. Як один із основних результатів цієї роботи – був введений клас функцій із змінним періодом. У наступних підрозділах 4.1, 4.2 відтворимо означення та його пояснення за статтею [1].

4.1. Означення функції зі змінним періодом

Функція $f(x)$ дійсного аргументу $x \in I \subseteq R$ називається функцією із змінним періодом, якщо існує така функція $T(x) > 0$, що для всіх $x \in I$, таких, що $x + T(x) \in I$, виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)). \quad (4.1)$$

Функція $T(x)$, яку назвемо змінним періодом, вважається диференційовною функцією. Вважатимемо надалі, що область визначення $I = [a, b]$ в кожному конкретному випадку повинна уточнюватися, що буде зустрічатися нижче.

Із (4.1) випливає, що при $T(x) = T = \text{const}$ функція f є звичайною періодичною функцією з постійним періодом T .

Приклад змінного періоду $T(x)$ показано на рис.2. В точці x_1 період функції $f(x)$ дорівнює $T(x_1)$, тому значення функції в точках x_1 і $x_1 + T(x_1)$ рівні: $f(x_1) = f(x_1 + T(x_1))$. В точці x_2 періодом є число $T(x_2)$, причому значення періоду $T(x)$ в точках x_1 і x_2 різні: $T(x_1) > T(x_2)$.

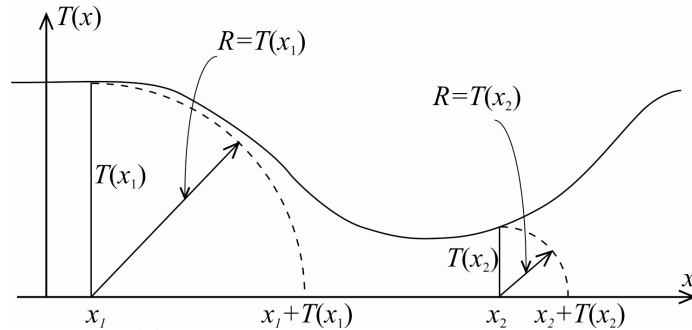


Рис.2. Змінний період $T(x)$, його значення в точках x_1 і x_2 та відповідні їм точки $x_1 + T(x_1)$ і $x_2 + T(x_2)$, в яких значення функції $f(x)$ повторюються.

4.2. Змінний період $T^-(x)$ та його взаємозв'язок із періодом $T(x)$

Відомо, що для періодичної функції $g(x)$ з постійним періодом T виконується рівність $g(x) = g(x + T) = g(x - T)$. Нескладні міркування, зокрема звернення до рис.1, показують, що для функції $f(x)$ із змінним періодом $T(x)$ аналогічна рівність $f(x) = f(x + T(x)) = f(x - T(x))$ в загальному не виконується. Тому для випадку, коли аргумент x зменшується, змінний період повторюваності функції $f(x)$ позначимо через $T^-(x)$. При цьому, якщо x і $x - T^-(x)$ належать області визначення I , то

$$f(x) = f(x - T^-(x)). \quad (4.2)$$

5. Елементарні функції із змінним періодом та їх змінні періоди

Вище мова йшла про наявність емпіричних функцій із змінним періодом та про загальне визначення таких функцій. Але при цьому відкритим залишається

цілком природне запитання щодо аналітичного подання функцій із змінним періодом. Щоб ця надзвичайно важлива задача могла бути реалізована, найперше необхідно мати «первинний матеріал» для такої реалізації, тобто деякі елементарні функції, які можна використовувати для побудови (наближення) «не елементарних», тобто більш складних функцій. Тут цілком природно йти шляхом аналогій. І подібно, як для періодичних функцій таким «матеріалом» є тригонометричні функції, для функцій із змінним періодом цим «матеріалом», цими елементарними функціями можуть бути теж тригонометричні функції, але вже із змінним періодом.

Для отримання елементарних функцій із змінним періодом використаємо основні елементарні періодичні функції $\sin x$, $\cos x$, $tg x$ і $ctg x$ та застосуємо до них принцип суперпозиції. Нехай для функцій $\sin t$, $\cos t$ аргумент $t = x^\alpha$, $\alpha > 0$, $x \geq 0$. В результаті суперпозиції цих функцій отримуємо функції

$$\sin x^\alpha, \cos x^\alpha, tg x^\alpha, ctg x^\alpha, \alpha > 0, x \geq 0, \quad (5.1)$$

які і будуть функціями із змінним періодом. Для цих функцій характерними є декілька особливостей, зокрема:

- при значеннях аргументу α таких, що $0 < \alpha < 1$, ці функції із збільшенням аргументу x «розтягуються», тобто хоча повторюваність їх значень зберігається, але при цьому період повторюваності збільшується;
- якщо $\alpha > 1$, функції (5.1) із зростанням аргументу «стискаються», тобто період їх повторюваності зменшується.

Ці особливості будуть проілюстровані нижче конкретними прикладами.

Простою підстановкою можна пересвідчитися, що для функцій

$$\sin x^\alpha, \cos x^\alpha, \alpha > 0, x \geq 0,$$

їх змінними періодами є функції

$$T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, x \in [0, \infty), \quad (5.2)$$

$$T_\alpha^-(x) = x - (x^\alpha - 2\pi)^{1/\alpha}, x \in [T(0), \infty). \quad (5.3)$$

Для функцій

$$tg x^\alpha, ctg x^\alpha \quad (5.4)$$

їх змінні періоди

$$T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + \pi)^{1/\alpha}, x \in [0, \infty), \quad (5.5)$$

$$T_\alpha^-(x) = x - (x^\alpha - \pi)^{1/\alpha}, x \in [T(0), \infty). \quad (5.6)$$

Розглянемо конкретні приклади для функцій $\sin x^\alpha$, $tg x^\alpha$ та їх періодів, при значеннях $\alpha = 13/16$ та $\alpha = 16/13$.

Приклад 1. Для функції $\sin x^{13/16}$ її графік поданий на рис.3 (неперервна лінія). Для порівняння наведений також графік функції $\sin x$ (пунктирна лінія).

Із поведінки графіка видно, що із збільшенням аргументу функція $\sin x^{13/16}$ розтягається. Якщо на інтервалі $[0, 30]$ вміщається більше чотирьох з половиною періодичних коливань функції $\sin x$, то для функція $\sin x^{13/16}$ – лише два з половиною.

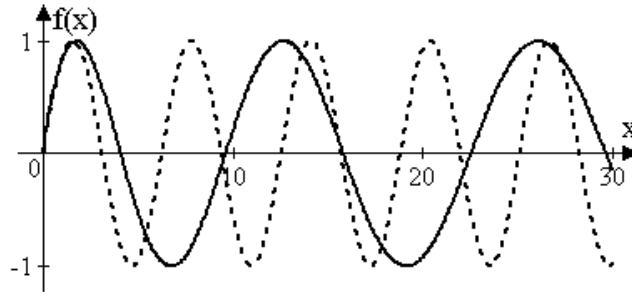


Рис.3. Графіки функцій $\sin x^{13/16}$ (неперервна лінія), $\sin x$ (пунктирна лінія).

Поведінку функції $\sin x^{13/16}$ підтверджують і її змінні періоди, отримані згідно (5.2) і (5.3) при $\alpha = 13/16$. На рис.4 зображений період

$$T(x) = -x + \left(x^{13/16} + 2\pi\right)^{16/13}, \quad x \geq 0 \text{ (неперервна лінія), та враховуючи значення}$$

$$T(0) = (2\pi)^{16/13} \approx 9,602, \quad \text{період} \quad T^-(x) = x - \left(x^{13/16} - 2\pi\right)^{16/13}, \quad x \geq 9,602,$$

(пунктирна лінія). Для порівняння також наведений період $T = 2\pi$ (штрих-пунктирна лінія) для функції $\sin x$.

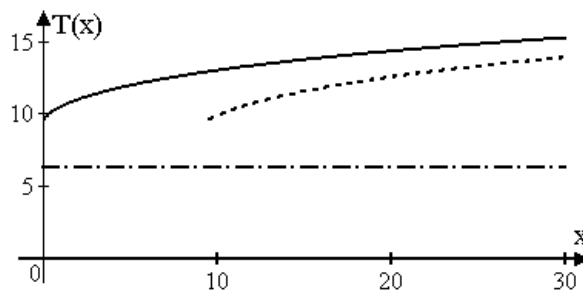


Рис.4. Змінні періоди для функції $\sin x^{13/16}$: $T(x)$, $x \geq 0$ (неперервна лінія), $T^-(x)$, $x \geq 9,602$, (пунктирна лінія); період $T = 2\pi$ (штрих-пунктирна лінія) функції $\sin x$.

Приклад 2. Розглянемо тепер функцію $\sin x^\alpha$ при $\alpha = 16/13$. Графік функції $\sin x^{16/13}$ показаний на рис.5 (неперервна лінія). Для порівняння пунктирною лінією зображений графік функції $\sin x$. На відміну від поведінки функції $\sin x^{13/16}$, розглянутої в прикладі 1, функція $\sin x^{16/13}$ із збільшенням аргументу стискається, тобто її період є спадною функцією. В той час, як на інтервалі $[0, 15]$ для функції $\sin x$ спостерігається менше двох з половиною коливань, для функції $\sin x^{16/13}$ на цьому ж інтервалі розміщується більше чотирьох періодичних коливань.

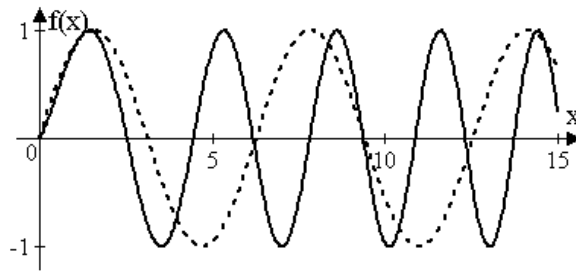


Рис.5.Графіки функцій $\sin x^{16/13}$ (неперервна лінія), $\sin x$ (пунктирна лінія).

Поведінку періодів функції $\sin x^{16/13}$ ілюструють графіки на рис.6. Період $T(x) = -x + \left(x^{16/13} + 2\pi\right)^{13/16}$ показаний неперервною лінією, період $T^-(x) = x - \left(x^{16/13} - 2\pi\right)^{13/16}$, $x \geq 4,452$ – пунктирною лінією, період $T = 2\pi$ для функції $\sin x$ – штрих-пунктирна лінія.

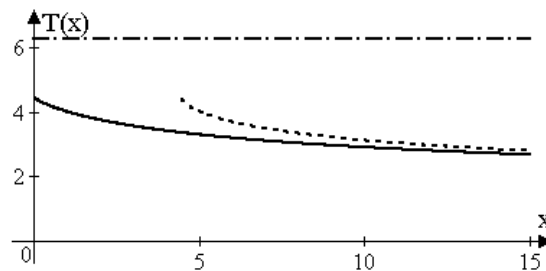


Рис.6.Змінні періоди для функції $\sin x^{16/13}$: $T(x)$ (неперервна лінія), $T^-(x)$, $x \geq 4,452$ (пунктирна лінія), період $T = 2\pi$ функції $\sin x$ (штрих-пунктирна лінія).

Зауважимо, що подібною до поведінки функцій $\sin x^{13/16}$ і $\sin x^{16/13}$ буде

поведінка функцій $\cos x^{13/16}$ і $\cos x^{16/13}$, а їх періоди $T(x)$ і $T^-(x)$, що в загальному випадку виражаються формулами (5.2) і (5.3), співпадають із періодами функцій $\sin x^{13/16}$ і $\sin x^{16/13}$.

Приклад 3. Розглянемо ще одну із тригонометричних функцій (5.4), а саме функцію $\operatorname{tg} x^\alpha$, $x \geq 0$. На рис.7 зображено графік функції $\operatorname{tg} x^{13/16}$ (неперервній лінії) та для порівняння графік функції $\operatorname{tg} x$ (штрих-пунктирній лінії). Із рисунка видно, що із збільшенням аргументу функція $\operatorname{tg} x^{13/16}$ в порівнянні із функцією $\operatorname{tg} x$ розтягується, тобто її періоди є зростаючими функціями. Про це свідчить поведінка періодів цієї функції, знайдених на основі формул (5.5) і (5.6):

$$T(x) = -x + \left(x^{13/16} + \pi \right)^{16/13}, \quad x \geq 0, \quad (5.7)$$

$$T^-(x) = x - \left(x^{13/16} - \pi \right)^{16/13}, \quad x \in [T(0) \approx 4.092, \infty). \quad (5.8)$$

Графіки цих періодів подані на рис.8 і для порівняння поміщено період $T = \pi$ функції $\operatorname{tg} x$.

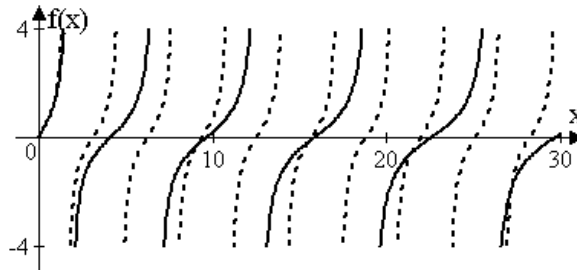


Рис.7. Графіки функцій $\operatorname{tg} x^{13/16}$ (неперервній лінії) та $\operatorname{tg} x$ (пунктирній лінії).

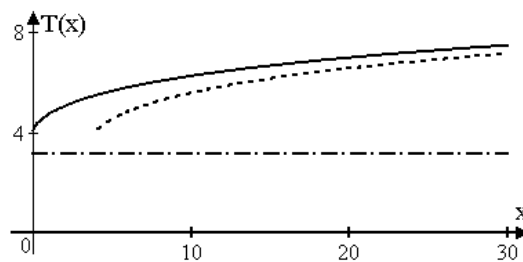


Рис.8. Змінні періоди для функції $\operatorname{tg} x^{13/16}$: $T(x)$, $x \geq 0$, (неперервна лінія), $T^-(x)$, $x \in [4.092, \infty)$ (пунктирна лінія). Період $T(x) = \pi$ (штрих-пунктирна лінія) для функції $\operatorname{tg} x$.

Метод отримання елементарних тригонометричних функцій із змінним періодом згідно формули (5.1) можна узагальнювати. Розглянемо деякі способи таких узагальнень.

6. Узагальнення методу отримання тригонометричних функцій із змінним періодом

Нехай функція $g(x)$, $x \in I = [a, b]$ – строгозростаюча (спадна) диференційовна функція, причому:

- ✓ відноситься до класу елементарних функцій;
- ✓ в області визначення $I = [a, b]$ її варіація $V_a^b(g) \gg 2\pi$.

При цих умовах функції

$$\sin g(x), \cos g(x), \operatorname{tg} g(x), \operatorname{ctg} g(x), \quad \alpha > 0, \quad x \in I, \quad (6.1)$$

є елементарними періодичними функціями.

Якщо для функції $g(\bullet)$ існує обернена функція $g^{-1}(\bullet)$, то для функцій (6.1) можна записати їх змінні періоди. Для функцій $\sin g(x)$, $\cos g(x)$ змінні періоди визначаються формулами

$$T(x) = -x + g^{-1}(g(x) + 2\pi), \quad x \geq 0, \quad (6.2)$$

$$T^-(x) = x - g^{-1}(g(x) - 2\pi), \quad x \in [T(0), \infty). \quad (6.3)$$

Для функцій $\operatorname{tg} g(x)$, $\operatorname{ctg} g(x)$ їх змінні періоди

$$T(x) = -x + g^{-1}(g(x) + \pi), \quad x \geq 0, \quad (6.4)$$

$$T^-(x) = x - g^{-1}(g(x) - \pi), \quad x \in [T(0), \infty). \quad (6.5)$$

Нагадаємо, що наявність змінних періодів для функцій (6.1) означає їх повторюваність через період. Наприклад, для функції $\sin g(x)$ виконуються рівності

$$\sin g(x + T(x)) = \sin g(x), \quad \sin g(x - T^-(x)) = \sin g(x).$$

Подібні рівності виконуються і для функцій $\cos g(x)$, $\operatorname{tg} g(x)$, $\operatorname{ctg} g(x)$.

Приклад 4. Нехай $g(x) = e^{\sqrt{x}}$. Розглянемо тригонометричну функцію $\sin e^{\sqrt{x}}$, $x \geq 0$. Графік цієї функції, а також для порівняння графік функції $\sin x$, показаний на рис.9.

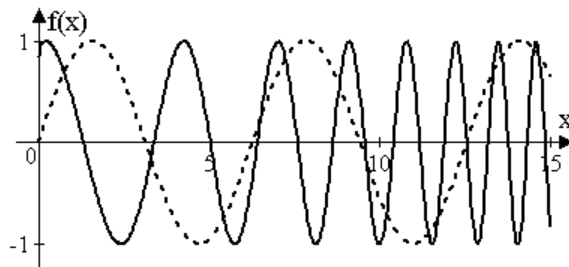


Рис.9. Графіки функцій $\sin e^{\sqrt{x}}$ (неперервна лінія) та $\sin x$ (пунктирна лінія).

Із рисунка видно, що графік функції $\sin e^{\sqrt{x}}$ із збільшенням аргументу швидко «стискається»: якщо на інтервалі $[0, 15]$ розміщується менше двох з половиною періодичних коливань функції $\sin x$, то для функції $\sin e^{\sqrt{x}}$ таких коливань спостерігається вже більше семи.

Змінні періоди функції $\sin e^{\sqrt{x}}$, знайдені на основі формул (6.2) і (6.3), мають вигляд

$$T(x) = -x + \ln^2(e^{\sqrt{x}} + 2\pi), \quad x \geq 0, \quad (6.6)$$

$$T^-(x) = x - \ln^2(e^{\sqrt{x}} - 2\pi), \quad x \in [T(0) \approx 3.942, \infty). \quad (6.7)$$

Графіки цих періодів зображені на рис.10: період $T(x) = -x + \ln^2(e^{\sqrt{x}} + 2\pi), x \geq 0$, – неперервна лінія, $T^-(x) = x - \ln^2(e^{\sqrt{x}} - 2\pi), x \in [T(0) \approx 3.942, \infty)$, – пунктирна лінія. Для порівняння показано також період $T(x) = T = 2\pi$ функції $\sin x$ (штрих-пунктирна лінія).

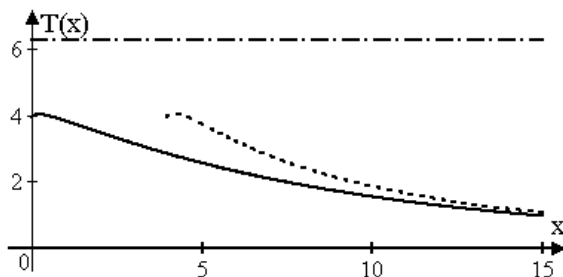


Рис.10. Змінні періоди для функції $\sin e^{\sqrt{x}}$: $T(x), x \geq 0$, (неперервна лінія), $T^-(x), x \in [3.942, \infty)$ (пунктирна лінія). Період $T(x) = 2\pi$ (штрих-пунктирна лінія).

Поведінка змінних періодів $T(x)$ і $T^-(x)$ підтверджує зроблені вище зауваження про те, функція $\sin e^{\sqrt{x}}$ із зростанням аргументу x стискається. Про швидкість стиснення можна судити по значеннях періодів, обчислених для деяких значень аргументу. Результати обчислення наведені в таблиці 1 (зауважимо, що згідно (6.7) період $T^-(x)$ для аргументу $x = 0$ не визначений).

Таблиця 1. Значення періодів $T(x)$ і $T^-(x)$ в дискретних точках

x	0	5	10	20	100	1000
$T(x)$	3.94248	2.56145	1.54715	0.62476	$5,70439 \times 10^{-3}$	$7,16227 \times 10^{-12}$
$T^-(x)$	–	3.73944	1.85992	0.66060	$5,70585 \times 10^{-3}$	$7,50333 \times 10^{-12}$

Множину елементарних тригонометричних функцій із змінним періодом можна розширювати. Один із таких методів розширення полягає в застосуванні до функцій $\sin g(x)$, $\cos g(x)$, $tg g(x)$, $ctg g(x)$, $x \in I$, які є суперпозицією функцій, нових суперпозицій і чотирьох основних арифметичних операцій – додавання, віднімання, множення і ділення. Якщо, наприклад, до функції із змінним періодом $\sin g(x)$ застосувати операцію додавання, а суперпозицію провести з використанням показникової функції, то отримаємо нову функцію

$$(\sin g(x) + s)^\theta, \quad (6.8)$$

період якої теж буде змінним. В (6.8) параметри $\theta > 0$, s – деякі числа. Метод отримання проілюструємо наступним прикладом.

Приклад 5. Вище розглядалася функція $\sin e^{\sqrt{x}}$. Застосуємо до цієї функції перетворення типу (6.8), взявши значення $s = 1$, $\theta = 2$. В результаті отримаємо функцію $(\sin e^{\sqrt{x}} + 1)^2$. Її графік зображений на рис.10 (неперервна лінія), а для порівняння показано також графік функції $(\sin x + 1)^2$ (пунктирна лінія). Із поведінки графіків добре видно, що період функції $(\sin e^{\sqrt{x}} + 1)^2$ змінюється, а саме зменшується, період функції $(\sin x + 1)^2$ залишається постійним. Можна показати, що як і для функції $\sin e^{\sqrt{x}}$, періоди функції $(\sin e^{\sqrt{x}} + 1)^2$ визначаються формулами (6.6) і (6.7).

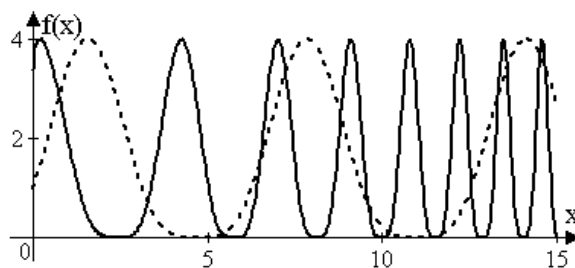


Рис.11. Графіки функцій $(\sin e^{\sqrt{x}} + 1)^2$ (неперервна лінія) та функції $(\sin x + 1)^2$ (пунктирна лінія).

Розглянуті приклади елементарних тригонометричних функцій із змінним періодом та їх змінні періоди є підставою для здійснення подальших кроків щодо розвитку теорії функцій із змінним періодом і розробки методів їх дослідження. Передбачається, що першим таким кроком повинно бути створення системи тригонометричних функцій із змінним періодом. Це надзвичайно важлива задача, оскільки наявність такої системи є необхідною умовою розв'язку задач наближення (по суті побудови рядів Фур'є) функцій із

змінним періодом (як емпіричних так і аналітично заданих) та дослідження їх аналітичними методами.

7. Висновки

Наведено приклади сигналів (емпіричних функцій) із змінним періодом та вказано на відсутність теорії таких сигналів та методів їх дослідження. Враховуючи, що раніше був введений клас функцій із змінним періодом, представники якого можуть бути використані як моделі емпіричних сигналів із змінним періодом, намічено шляхи дослідження таких функцій. Зроблено перший крок в цьому напрямку – введено нові елементарні функції, а саме тригонометричні функції із змінним періодом та записані формули їх змінних періодів. Передбачається на основі таких елементарних функцій створення ортогональних систем тригонометричних функцій із змінним періодом із подальшим використанням таких системи для розвитку теорії наближення функцій із змінним періодом, в першу чергу побудови їх рядів Фур'є.

ЛІТЕРАТУРА

1. Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т.10, №2. – С. 143-152.
2. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1949. – 454 с.
3. Гутер Р.С., Кудрявцев Л.Д., Левитан Б.М. Элементы теории функций (функции действительного переменного, приближение функций, почти периодические функции). – М.: Физматгиз, 1963. – 244 с.

УДК 621.391:004.7

Процедура оновлення програмного забезпечення в системі Software Defined Radio

Л. С. Глоба, В. В. Курдеча, С. В. Суліма

*Національний технічний університету України «Київський політехнічний інститут»,
Україна*

В статті розглянуто особливості застосування технології Software Defined Radio в мобільних радіосистемах зі здатністю реконфігуруватися. Представлена архітектура системи управління мережі, що має здатність до реконфігурації. Запропоновано алгоритми оновлення програмного забезпечення радіопристрою в такій мережі для двох випадків: коли процес ініціюється мережею або користувачем/прикладною програмою. Змодельовано і проаналізовано процес оновлення (завантаження) програмного забезпечення за допомогою системи GPSS World.

Ключові слова: мобільна мережа, SDR, радіосистеми з можливістю реконфігурації, модернізація мобільної мережі, оновлення програмного забезпечення.

В статье рассмотрены особенности использования технологии Software Defined Radio в мобильных реконфигурируемых радиосистемах. Представлена архитектура системы управления реконфигурируемой сети. Предложены алгоритмы обновления программного обеспечения радиоустройства в такой сети для двух случаев: когда процесс инициируется сетью или пользователем/приложением. Смоделирован и проанализирован процесс обновления (загрузки) программного обеспечения с помощью системы GPSS World.

Ключевые слова: мобильная сеть, SDR, реконфигурируемые радиосистемы, модернизация мобильной сети, обновление программного обеспечения.

In the paper the usage of Software Defined Radio technology in reconfigurable mobile radio systems is discussed. Reconfigurable network management system architecture is presented. Radio software update algorithms of the handheld in such network are suggested for two cases: when the process is initiated by the network or by the user/application. Software download process is modeled and analyzed using GPSS World system.

Key words: mobile network, SDR, reconfigurable radio systems, mobile network upgrading, software update.

1. Вступ

Розвиток телекомунікацій характеризується конвергенцією на основі IP-базованої опорної мережі і неперервного доступу (2G, 3G, ширококомовного, і т.д.) в обстановці ієрархічних і гібридних самоорганізованих мереж [1-2]. Таким чином, мережним операторам доведеться вирішувати питання підвищення складності. Складність виникає з двох основних джерел. З одного боку, існує невідворотна неоднорідність інфраструктури мереж та терміналів, а з іншого боку, вимоги користувачів, які пов'язують майбутні системи з ускладненими послугами/прикладними програмами, що надаються неперервно і повсюдно. Для досягнення цих цілей, оператори мають розгорнути складні мережні топології гетерогенної природи. Різним технологіям доступу (Radio Access Technology - RAT) доведеться співіснувати та ефективно використовуватися і взаємодоповнюватися в рамках єдиної композитної мережі з поділюваними

ресурсами. Кожна RAT має різні властивості з точки зору ємності, охоплення, підтримки мобільності, вартості і т. д. Таким чином, кожна RAT найкраще підходить для певних ситуацій. У зв'язку з цим, оператору мережі доведеться покладатися на різні RAT для підвищення задоволеності клієнтів, відводячи придатну RAT для виконання відповідних завдань, щоб досягти необхідної якості обслуговування з мінімальними витратами. У такій складній ситуації варіантом є створення безпроводової інфраструктури з використанням можливостей «когнітивних мереж» [3]. Крім того, в якості користувацьких терміналів бажано використовувати пристрої зі здатністю реконфігуруватися, тобто переналаштовуватися, в залежності від телекомунікаційного середовища. Технологія Software Defined Radio (SDR) визначається як ключовий інструмент реалізації таких пристроїв та мереж.

Хоча розробка функціональної архітектури таких пристроїв та відповідної елементної бази вже почалась, тим не менш, для повного використання можливих переваг концепції SDR потрібно набагато більше, ніж обчислювальна потужність терміналів [4] - необхідно забезпечити ще й ефективний механізм взаємодії таких пристроїв у мережі. Більшість науково-дослідних груп SDR (European IST Reconfigurability Cluster Projects [5], Wireless Innovation Forum [6], Wireless World Initiative [7], Wireless World Research Forum, ETSI ...) пропонують свої рішення для побудови вузлів таких мереж та способів їх взаємодії, проте не обов'язково беруть до уваги ефективні методи завантаження програмного забезпечення, а саме завантаження нових програмних модулів і дозволить забезпечити максимальну гнучкість системи в цілому. Реконфігурація шляхом завантаження «по-повітрю» (Over The Air - OTA) визначається [6-8] як основний механізм забезпечення інформацією для оновлення терміналу необхідною функціональністю.

Метою роботи є підвищення ефективності роботи мобільної стільникової мережі з реконфігураційними властивостями шляхом розробки рекомендацій щодо побудови такої мережі та алгоритму оновлення програмного забезпечення її терміналів, а також визначення раціональних розмірів програмних модулів, які будуть завантажуватися на термінал у випадку оновлення.

2. Архітектура мережі з підтримкою реконфігурації

SDR пристрої - такі елементи безпроводової мережі, режими роботи і параметри яких можуть бути зміненими чи розширеними після виготовлення за допомогою програмного забезпечення. В SDR пристроях використовується програмне забезпечення зі здатністю до адаптації та гнучкі апаратні платформи для вирішення проблем, пов'язаних з постійним розвитком та технічними інноваціями у галузі безпроводового зв'язку, зокрема зміною форми сигналів, методів модуляції, протоколів, служб і стандартів. Такий підхід також використовується для реалізації радіостанцій, щоб задовольнити зростаючі потреби користувачів у спілкуванні у той час, коли вони переміщуються між різними безпроводовими мережами.

Wireless Innovation Forum [9] дає наступне визначення: завантаження програмного забезпечення радіо - процес доставки реконфігураційних даних і/або нового виконуваного коду до SDR пристрою для зміни його

функціональності чи режиму роботи. До виконуваного коду, наприклад, відносять програмні блоки, що забезпечують нові алгоритми цифрової обробки сигналів, виправлення помилок та оновлення функціональності чи нового радіо інтерфейсу. Реконфігураційні дані - нові параметри методів модуляції, що вже наявні на пристрої, нові рівні потужності, нові робочі частоти або інші робочі параметри, які використовуються програмним кодом, що вже встановлений на SDR пристрої.

У [6] визначається, що необхідно виділити модуль управління, який контролював би процес завантаження програмного забезпечення. Мережна архітектура, що підтримує процес завантаження програмних модулів зображена на рис. 1, де припускається, що в якості мобільних терміналів виступають SDR пристрої. Архітектура, синтезована в результаті проведених досліджень, враховує результати роботи провідних дослідницьких груп (IST, Motorola, WWRF, Wireless Innovation Forum та ін.) та узагальнює досвід цих організацій у даній області.

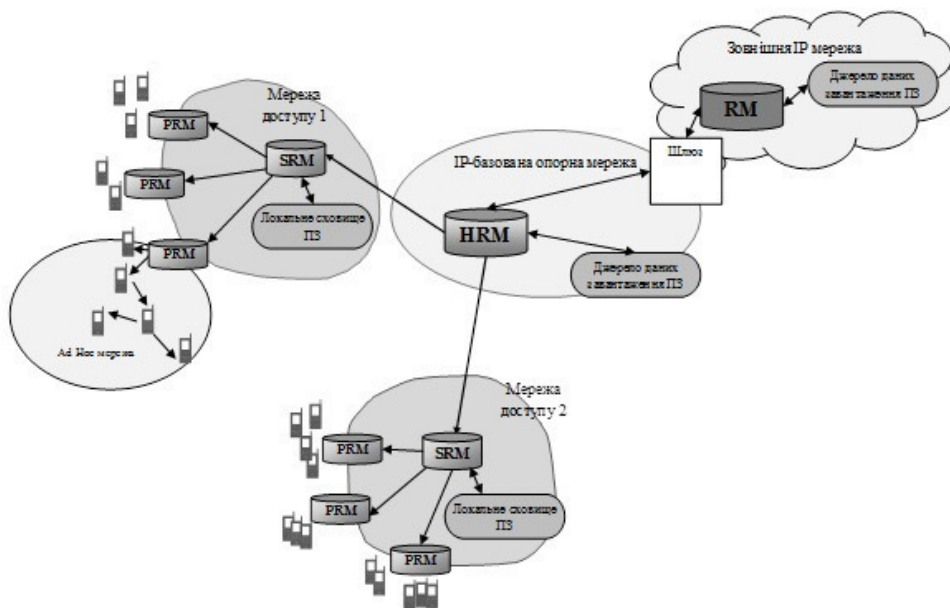


Рис. 1. Архітектура мережі з системою управління реконфігурацією

Основна ідея полягає в ієрархічно розподіленій архітектурі [2,5,6,8]. Для цього вводиться проксі менеджер реконфігурації (Proxy Reconfiguration Manager - PRM). PRM виступає в якості проксі для переговорів з іншими об'єктами мережі, зокрема, обслуговуючим менеджером реконфігурації (Serving Reconfiguration Manager - SRM) в мережі доступу і домашнім менеджером реконфігурації (Home Reconfiguration Manager - HRM) в домашній мережі. SRM використовується в кожній мережі доступу і масштабується відповідно до кількості користувачів, які мережа доступу може підтримувати, і очікуваних сервісів мережі доступу. SRM передає інформацію управління до PRM. HRM є відповідальним за білінг, аутентифікацію і безпеку стосовно завантаження

програмного забезпечення. HRM і SRM мають доступ до сховища програмного забезпечення, в якому зберігається колекція програмних модулів, які можуть бути завантажені на термінали. HRM і SRM є ключовими елементами для модернізації великої кількості терміналів і вони звільняють інші модулі мережі від деяких аспектів управління та безпеки, які мають вирішальний вплив на продуктивність мережі.

По відношенню до безпроводової системи джерело даних для завантаження програмного забезпечення може бути внутрішнім або зовнішнім. Крім того, можливий варіант, коли програмне забезпечення спочатку завантажується з сервера на мобільний термінал, який в свою чергу завантажує його в інші термінали з використанням ad hoc з'єднання. Вся архітектура розроблена таким чином, щоб вона була здатна здійснювати оновлення навіть великої кількості терміналів в системі.

3. Процедура оновлення радіопристрою

Для забезпечення швидкої та ефективної модернізації терміналу може використовуватись розроблений в проведеному дослідженні алгоритм, який розглядається далі та ґрунтується на кроках процесу завантаження, визначених Wireless Innovation Forum [6], та мережній архітектурі, зображеній на рис. 1. Розглянуто два випадки завантаження: процес може бути ініційовано мережею або користувачем/прикладною програмою.

3.1. Оновлення ініційоване терміналом користувача

На рис. 2 деталізуються переговори між мережею і SDR терміналом користувача з припущенням, що операція здійснюється з ініціативи користувача:

1. Терміналу необхідно оновити прикладну програму або новий модуль і він відправляє запит на сервер, що забезпечує бажаний програмний модуль. До запиту входить індикатор пріоритету для опису терміновості оновлення.

2. Всі запити від терміналу проходять через місцевий PRM, який перевіряє, чи потрібний файл уже зберігається в локальному кеші. Якщо він наявний, запит більше не перенаправляється і потрібне оновлення передається з кешу на термінал. В іншому випадку PRM направляє запит до відповідного SRM через інтерфейс PRM-SRM.

PRM надсилає розширену відповідь терміналу: пакет одразу містить і відповідь на запит, і дані аутентифікації мережного оператора. Таким чином, використовуючи розширені повідомлення, загальна кількість службової інформації, яка буде додана, зменшиться завдяки тому, що необхідно формувати тільки один пакет, а не два. З іншого боку, у системах з динамічним розподілом каналів (наприклад, CSMA), такий підхід забезпечить необхідність лише одного циклу доступу до каналу щоб передати вищезазначені повідомлення.

3. Якщо запит досягає SRM, SRM перевіряє свою базу даних чи зберігається там відповідний модуль. Якщо це так, то SRM посилає модуль PRM і звідси модуль направляється на термінал. Якщо модуль не зберігається в базі даних SRM, то запит направляється в HRM.

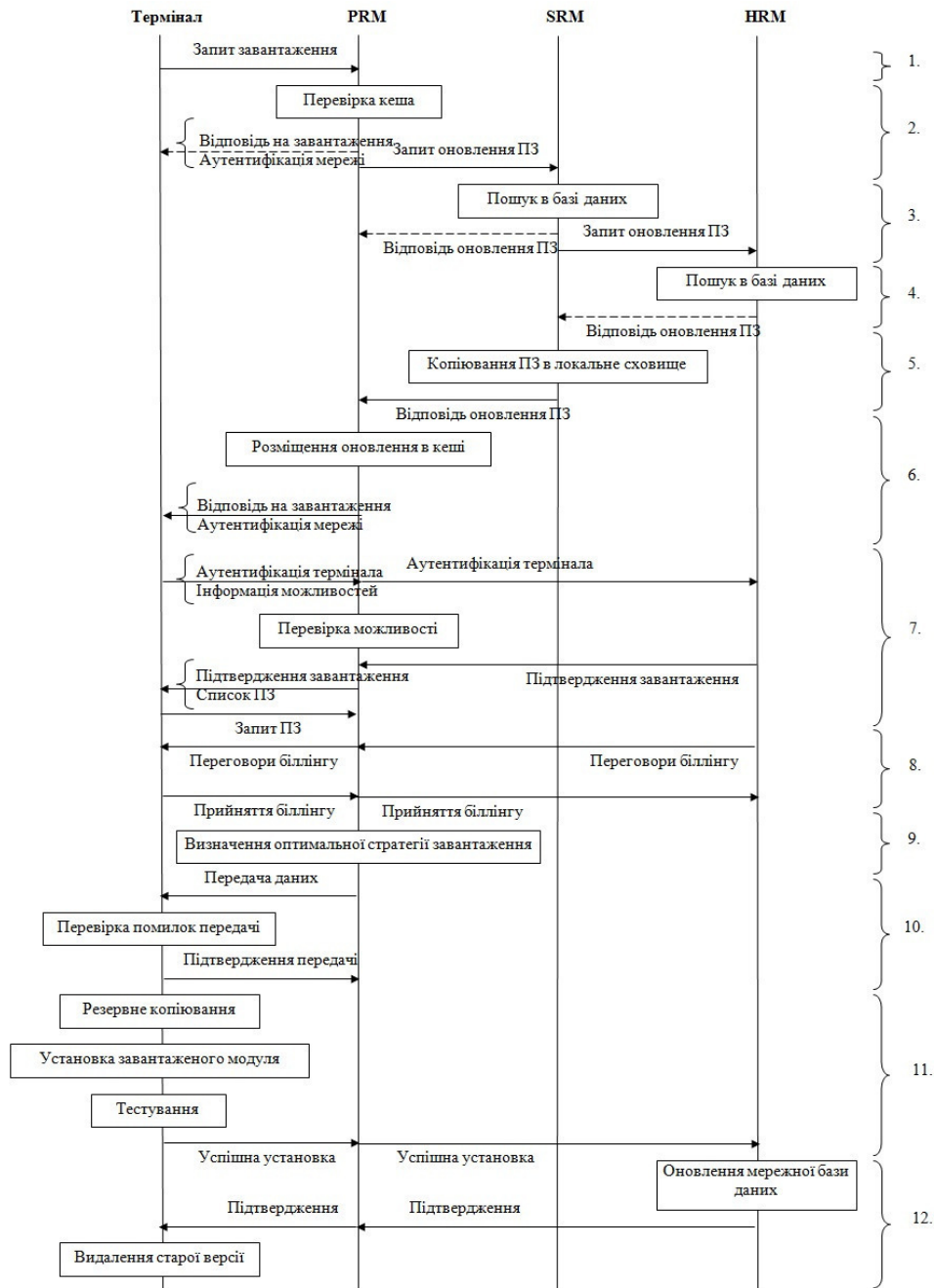


Рис.2. Процедура завантаження програмного модуля ініційована терміналом користувача

4. HRM отримує запит на оновлення програмного забезпечення, вилучає модуль зі своєї бази даних і передає його в напрямку терміналу.

5. Тепер пакети оновлення потрапляють в SRM. Оскільки файли ще не розміщені в локальній базі даних SRM, то він зберігає їх і надсилає PRM.

6. PRM розміщує модуль оновлення в локальному кеші і надсилає розширену відповідь терміналу.

7. Справжність сервіс провайдера або оператора мережі має перевірятися SDR пристроєм для запобігання проведення операцій із завантаження несанкціонованими мережними операторами. Ці типи операцій аутентифікації можуть проводитися за допомогою методів шифрування відкритим ключем, цифрових підписів, або інших придатних для цього методів. Після цього виконується аутентифікація терміналу для перевірки справжності пристрою SDR і користувача та запобігання несанкціонованому доступу користувачів. Термінал надсилає розширену відповідь, яка одразу містить і інформацію аутентифікації, і інформацію характеристик (щоб переконатися, що термінал здатний підтримувати завантажений об'єкт, а базова станція може підтримувати зв'язок з «новим переналаштованим терміналом»). Поки PRM очікує підтвердження, він виконує перевірку характеристик, що дозволяє прискорити процес. Після перевірки можливостей і отримання підтвердження від HRM, PRM надсилає розширене підтвердження терміналу. Таким чином, скорочується кількість надісланих підтверджень, а отже заощаджується час та мережні і обчислювальні ресурси.

Разом із підтвердженням розширене повідомлення містить перелік підходящих програмних модулів, який створює сервер, спираючись на інформацію про термінал. Користувач вибирає потрібний модуль і запитує його у сервера завантаження.

8. Відбуваються переговори щодо білінгу.

9. На цьому кроці приймається до уваги зазначений пріоритет початкового запиту. Якщо пріоритет високий і/або навантаження на мережу невелике, пакети негайно надсилаються на термінал. Якщо, з іншого боку, пріоритет низький, а навантаження на мережу високе, поставка на термінал повинна відбутися згідно з розкладом. На підставі інформації про можливості мережі та терміналу, мережа обирає відповідні об'єкти програмного забезпечення і набори параметрів. Вибрані об'єкти програмного забезпечення і набори параметрів завантажуватимуться на SDR пристрій.

10. Передача даних і перевірка на помилки.

11. Резервне копіювання попередньої версії модуля може виявитися необхідним у разі неуспіху передачі. Перетворення даних до їх виконуваної форми, зв'язування з рештою системи і тестування для перевірки правильності функціонування.

12. Далі виконується оновлення мережної бази даних для відображення нової конфігурації і надсилання підтвердження. Після цього потрібно видалити старі версії програмного забезпечення для звільнення пам'яті.

3.2. Оновлення ініційоване мережею

На рис. 3 подано процедуру переговорів між мережею і SDR терміналом користувача з припущенням, що операція ініціюється мережею:

1. Провайдер програмного забезпечення повідомляє HRM про оновлення програмного забезпечення для терміналів і поставляє його до HRM, HRM

розміщує програмне забезпечення для оновлення у базі даних і пропонує SRM завантажити новий модуль через радіоінтерфейс.

2. HRM отримує запит на оновлення програмного забезпечення, вилучає модуль зі своєї бази даних і надсилає його в напрямку SRM.

3. SRM копіює оновлення в свою базу даних і відправляє його в PRM.

4. PRM заносить оновлення в локальний кеш та надсилає розширене повідомлення терміналу, яке разом з інформацією аутентифікації мережного оператора містить також інформацію про наявність модуля оновлення.

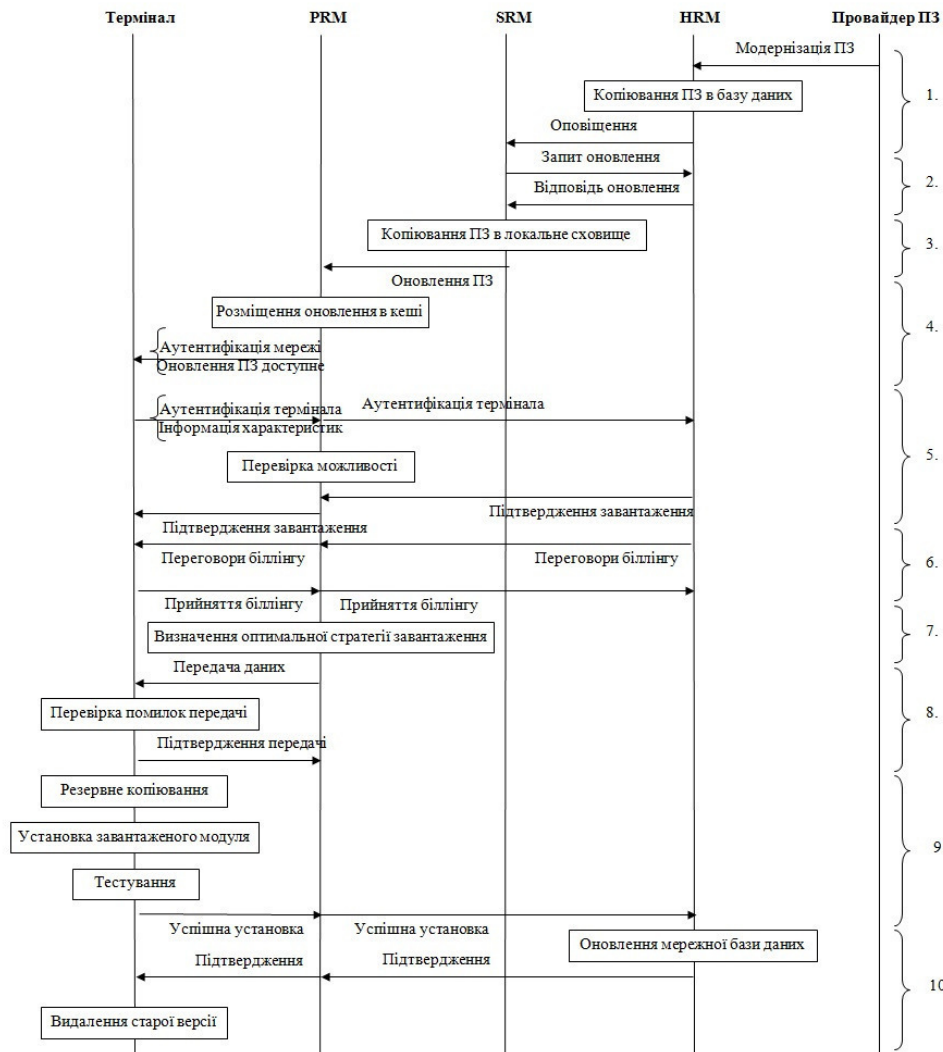


Рис.3. Процедура завантаження програмного модуля ініційована мережею

5. Для підтвердження можна не створювати окреме повідомлення, а в якості підтвердження виступатиме наявність розширеного повідомлення, що містить інформацію аутентифікації терміналу та інформацію про можливості терміналу.

В той час, коли HRM аутентифікує термінал, PRM паралельно перевіряє сумісність характеристик мобільного терміналу з вимогами нового модуля і характеристиками базової станції поточного стільника. Після перевірки можливостей терміналу і отримання підтвердження від HRM, PRM надсилає підтвердження терміналу.

6. Відбуваються переговори щодо білінгу.

7. На наступному етапі PRM порівнює наявні ресурси радіоінтерфейсу і параметр пріоритету повідомлення оновлення. В залежності від результату, PRM планує завантаження. На підставі інформації щодо можливостей обладнання, мережа обирає відповідні об'єкти програмного забезпечення і набір параметрів відповідно до можливостей SDR пристрою. Вибрані об'єкти програмного забезпечення і набори параметрів завантажуватимуться на SDR пристрій.

8. Передача даних і перевірка на помилки.

9. Резервне копіювання попередньої версії модуля може виявитися необхідним у разі неуспіху передачі. Перетворення даних в їхню виконувану форму, зв'язування з рештою системи і тестування для перевірки правильності функціонування.

10. Далі оновлюється мережна база даних для відображення нової конфігурації і надсилається підтвердження. Видалення старих версій програмного забезпечення для звільнення пам'яті.

4. Переваги запропонованого рішення

Розглянута в даному дослідженні ієрархічна розподілена архітектура мережі з реконфігураційними властивостями має наступні переваги над застосуванням суто централізованої або децентралізованої концепції:

1. Зменшення навантаження на мережу:

Використання ієрархічної розподіленої архітектури дозволяє економити ресурси мережі під час її експлуатації, оскільки радіоканал використовується для передачі лише безпосередньо необхідних даних, а на серверах зберігаються лише ті дані, які необхідні, та лише в тому обсязі, який необхідний, враховуючи конкретне телекомунікаційне середовище (число користувачів, яке підтримує мережа доступу, сервіси, які надає мережа, і т.п.). Крім того, виділення в архітектурі спеціалізованих модулів дозволяє перекласти на них завдання керування реконфігурацією, а отже звільнити інші мережні модулі від деяких аспектів керування та безпеки; таким чином, кожен модуль в функціональній архітектурі системи виконуватиме свою спеціалізовану задачу, а отже розроблятиметься і використовуватиметься для найефективнішого виконання саме своєї задачі.

2. Більш швидке завантаження програмного забезпечення:

Це забезпечується у зв'язку з тим, що з великою ймовірністю необхідний програмний модуль можна завантажити за допомогою локального менеджера реконфігурації, який розташовано поблизу.

3. Зниження навантаження на термінал (процесор, пам'ять, джерело живлення):

Термінал звільняється від частоті взаємодії з мережею, оскільки за нього це робить PRM, крім того, у зв'язку з цим можна спростити будову самого мобільного пристрою.

Використання представленого підходу до завантаження програмного забезпечення зменшує кількість необхідних циклів доступу до каналу (в CSMA системах), що зумовлює підвищення продуктивності. Крім того, поліпшується використання радіоресурсів та ресурсів терміналу, а також зменшується затримка, що покращує якість обслуговування.

5. Моделювання процесу завантаження програмних модулів

Важливим питанням є визначення розміру програмних модулів, які будуть завантажуватися на термінал у випадку реконфігурації, з урахуванням необхідності задоволення вимог до якості обслуговування та наявних мережних ресурсів.

Далі розглядається моделювання процесу завантаження програмних модулів у середовищі GPSS World, в якому аналізується тривалість цього процесу за припущення використання систем GSM/GPRS, UMTS та Wi-Fi як радіоканалів за різної інтенсивності надходження запитів, різної їх складності та різного розміру завантажуваного програмного забезпечення. Сервер обробляє запити на завантаження програмного забезпечення, що надходять з терміналів користувачів з інтервалами, розподіленими за показниковим законом. Обчислювальна складність запитів має нормальний закон розподілу. Продуктивність сервера 1000000 операцій в секунду. Межу допустимої тривалості процесу завантаження встановлено у дві хвилини. Розглядаються наступні значення змінюваних параметрів:

- середня обчислювальна складність запитів на завантаження: 15000000 операцій (коефіцієнт складності 1), 30000000 (коефіцієнт складності 2), 45000000 (коефіцієнт складності 3);

- середній інтервал між надходженням запитів: 60 с, 120 с, 240 с;

- розмір завантажуваного модулю: 25 Кбайт, 250 Кбайт, 1000 Кбайт.

Аналіз результатів представлених на рис. 4 показує:

- розмір завантажуваного модулю є суттєвим для технологій з невисокою швидкістю передачі;

- складність запитів до серверу значно впливає на час обслуговування;

- при високій частоті звернень до серверу великі розміри завантаження спричиняють перевищення встановленої межі.

Таким чином, для забезпечення вимог до обслуговування у будь-якій ситуації єдиним варіантом є наступний: середня складність запитів - 15000000 операцій, розмір модулю - 25 Кбайт. Для того, щоб зробити можливим завантаження більших модулів необхідно уникати ситуацій частого звернення до сервера: наприклад, ініціювати завантаження лише коли параметри поточного функціонування досягли критичних значень і вигода від переключення на новий режим є більшою ніж затрати, або необхідно збільшити обчислювальну здатність сервера. У випадку систем з невисокою швидкістю (GSM/GPRS) величина завантажуваного програмного модулю має не перевищувати 25 Кбайт,

що є досить низьким значенням, що робить їх непридатними для потреб завантаження.

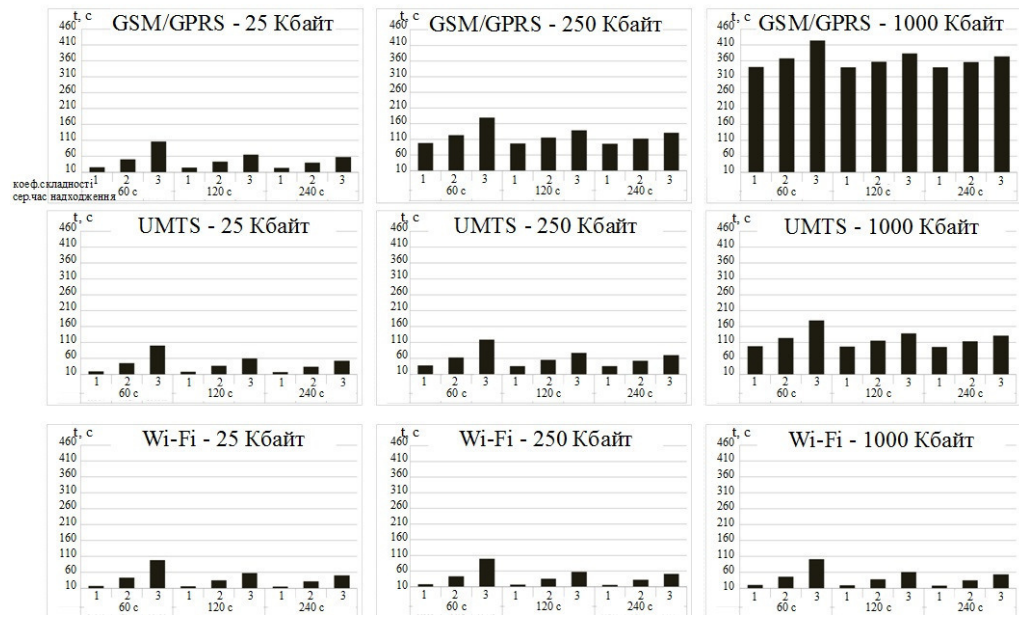


Рис. 4. Графіки залежностей часу завантаження для різних розмірів програмних модулів

7. Висновки

В результаті проведеного дослідження було синтезовано архітектуру, застосування якої дозволяє забезпечити можливість завантаження оновлень для великої кількості терміналів з одночасним підвищенням продуктивності мережі. Описана мережна архітектура узагальнює досвід роботи над мережами з можливістю реконфігуруватися і може використовуватись для стандартизації підходу до побудови таких систем.

Для розглянутої архітектури було розроблено процедуру завантаження програмного забезпечення, яка дозволяє швидко та ефективно забезпечувати мобільні пристрої новими програмними модулями. Розглянуто два випадки завантаження: процес може бути ініційовано мережею або користувачем/прикладною програмою.

Результати проведеного моделювання показали, що розміри програмних модулів, які будуть завантажуватися на термінал у випадку реконфігурації, а також складність запитів до серверу значно впливають на час обслуговування, а тому їх слід ретельно планувати, крім того, слід уникати ситуацій частого звернення до серверу. Приведений приклад моделювання засобами програмного продукту GPSS World може бути використаний при складанні вимог до розміру завантажуваних програмних модулів в залежності від швидкості передачі інформації, інтенсивності надходження звернень до сервера та обчислювальної складності запитів.

В подальших дослідженнях, розглянуті процедури завантаження більш деталізуватимуться та відобразатимуться на конкретні алгоритми функціонування мереж та обладнання з можливістю реконфігурації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Prasad R. *New Horizons in Mobile and Wireless Communications: Reconfigurability* / R. Prasad, A. Mihovska. — Boston : Artech House, 2009. — 354 p.
2. Bourse D. *Reconfigurable SDR Equipment and Supporting Networks Reference Models and Architectures* / N. Alonistioti, D. Bourse, S. Buljore, et al. // WWRF WG 3 white paper [Електронний ресурс]. — Режим доступу : http://wg6.wwrfr.org/images/pdfs/WWRF_WG3_SDR_WhitePaper1_v2.0.pdf. — Дата доступу : 26.08.13. — Назва з екрана.
3. Demestichas P. *Policy-Based Management of Radio Resources and Autonomic Computing in Cognitive/Reconfigurable Networks and Systems* / G. Dimitrakopoulos, Y. Kritikou // WWRF WG 6 white paper [Електронний ресурс]. — Режим доступу : http://www.wireless-world-research.org/fileadmin/sites/default/files/about_the_forum/WG/WG6/White%20Paper/WhPaper_WG6_PolBasedMngmtRRandAutonCompCognReconfNetsSys.pdf. — Дата доступу : 26.08.13. — Назва з екрана.
4. Dillinger M. *Network Architecture and Support Services for Reconfigurability* / M. Dillinger, P. Demestichas, N. Olaziregi, et al. // WWRF WG 6 white paper [Електронний ресурс]. — Режим доступу : http://www.wireless-world-research.org/fileadmin/sites/default/files/about_the_forum/WG/WG6/White%20Paper/WG6_WP3.pdf. — Дата доступу : 26.08.13. — Назва з екрана.
5. Dillinger M. *Software Defined Radio: Architectures, Systems and Functions* / M. Dillinger, K. Madani, N. Alonistioti. — Chichester : John Wiley & Sons Ltd, 2003. — 456 p.
6. SDRF-02-S-007-V1.0.0 : *Requirements for Radio Software Download for RF Reconfiguration* // SDR Technical Specification [Електронний ресурс]. — Режим доступу : <http://groups.winnforum.org/d/do/2741>. — Дата доступу : 27.08.13. — Назва з екрана.
7. Buracchini E. *Over-The-Air software Download for Cognitive Networks* / E. Buracchini, M. Colonna, P. Goria, et al. // E2R II White Paper [Електронний ресурс]. — Режим доступу : https://ict-e3.eu/project/white_papers/e2r/8.E2RII_SWDL_White_Paper.pdf. — Дата доступу : 27.08.13. — Назва з екрана.
8. Jeyalakshmi V. *Secured Reconfigurable Software Defined Radio using OTA software download* / V. Jeyalakshmi, G. Vijayakumari // *Int. J. Advanced Networking and Applications*. — 2012, January. — Vol. 03, No. 4. — P. 1276–1280.
9. *Overview and Definition of Software Download for RF Reconfiguration* // SDR Forum document [Електронний ресурс]. — Режим доступу : http://www.sdrforum.org/pages/documentLibrary/documents/SDRF-02-P-0002-V1_0_0_DL-DFN.pdf. — Дата доступу : 27.08.13. — Назва з екрана.

УДК 539.3

Формы собственных колебаний жидкости в жестких цилиндрических резервуарах в условиях низкой гравитации

П. А. Глушич, О.В. Науменко, Е.А. Стрельникова

Институт проблем машиностроения имени А.Н.Подгорного, Украина

В статье получено аналитическое решение задачи об определении форм собственных колебаний жидкости в жестких цилиндрических резервуарах в условиях низкой гравитации. Построены первые формы собственных колебаний в рамках допущения о значительно большей величине радиуса кривизны поверхности жидкости, смачивающей боковую поверхность, по сравнению с радиусом резервуара.

Ключевые слова: *низкая гравитация, колебания жидкости, собственные колебания жидкости.*

В статі отримано аналітичний розв'язок задачі визначення форм власних коливань рідини у жорстких циліндричних резервуарах за умови низької гравітації. Побудовано перші форми власних коливань у межах зробленого припущення щодо значної переваги радіуса кривизни поверхні рідини, що змочує бокову поверхню, у порівнянні з радіусом резервуара

Ключові слова: *низька гравітація, коливання рідини, власні коливання рідини.*

The main purpose of the paper is to find an analytical solution to determine modes of liquid natural oscillations in rigid cylindrical tank at low gravity. The first forms of oscillations were obtained. The assumption was made that the tank radius is larger than the radius of liquid surface curvature near the wetting side of tank surface.

Keywords: *low gravity, liquid sloshing, natural frequencies of liquid.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В связи с наличием проблемы, связанной с недопустимыми колебаниями при запуске ракет-носителей, ведущих к авариям, решение задачи о колебаниях топливных баков ракет в условиях низкой гравитации является очень актуальным.

Современный этап исследований колебаний жидкости в условиях низкой гравитации находится в том состоянии, когда для проверки и подтверждения приближенных методов расчета колебаний и собственных форм необходимы дорогостоящие установки, такие как башни с падающими резервуарами, оснащенными регистрирующей фото и видео аппаратурой. Поэтому имеется основание для развития аналитических методов решения данной задачи. Аналитическое решение этой задачи сопряжено с рядом проблем, таких как учет формы мениска жидкости в резервуарах сложной геометрии, сложность проведения эксперимента для проверки теоретических расчетов и др. В целях упрощения расчетов делаются некоторые допущения, упрощающие решение поставленной задачи.

В работе построено точное решение краевой задачи о собственных колебаниях жидкости в условиях низкой гравитации при наличии сил поверхностного натяжения. С целью упрощения расчетов сделаны несколько

допущений, и в рамках принятых допущений решена задача о собственных колебаниях жидкости; представлены полученные результаты.

Решение данной задачи является одной из составных частей сложной и актуальной задачи, связанной с расчетом колебаний топливных баков ракет-носителей, предназначенных для вывода на орбиту различных спутников. Исследуемую краевую задачу можно рассматривать как предварительный этап решения модельной задачи для анализа динамики разгонного блока ракеты носителя.

Рассматривается цилиндрический сосуд радиуса r_0 , показанный на рис. 1.

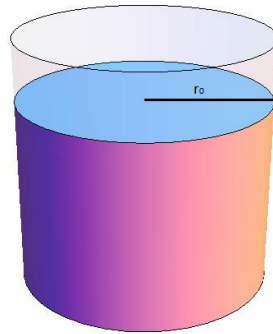
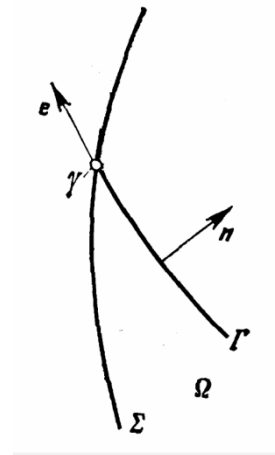


Рис. 1. Схема топливного бака.

Уравнения и граничные условия, описывающие данную краевую задачу могут быть записаны в виде следующей системы уравнений [1]:

$$\begin{cases} \Delta \Phi = 0 \text{ (в } \Omega) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ (на } \Sigma) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} - aN + \Delta N = F + \psi(t) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\partial N}{\partial t} \text{ (на } \Gamma) \\ \int_{\Gamma} N d\Gamma = 0 \text{ (на } \Gamma) \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \chi N = 0 \text{ (на } \gamma) \end{cases}$$



где n – единичный вектор нормали к свободной поверхности Γ в направлении из Ω , e – единичный вектор нормали к γ , Φ - потенциал скорости жидкости, N - форма свободной поверхности

2. Построение аналитического решения

Для построения аналитического выражения решения краевой задачи об определении собственных колебаний жидкости сделаем следующие допущения:

- 1) Жидкость идеальная, несжимаемая, и ее движение потенциальное;
- 2) Резервуар выполнен в виде жесткого цилиндра с непроницаемыми для жидкости стенками, его размеры позволяют пренебречь эффектом смачивания стенок.

Для решения системы уравнений представим функции $\Phi(x, t)$, $N(\xi_1, \xi_2, t)$, $F(\xi_1, \xi_2, t)$, $\psi(t)$ в виде разложения в ряд Фурье по частотам ω :

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \Phi(x) e^{i\omega t} \\ N(\xi_1, \xi_2, t) &= N(\xi_1, \xi_2) e^{i\omega t} \\ F(\xi_1, \xi_2, t) &= \frac{1}{i\omega} F(\xi_1, \xi_2) e^{i\omega t} \\ \psi(t) &= \frac{c}{i\omega} e^{i\omega t}.\end{aligned}$$

Используя представления функций $\Phi(x, t)$, $N(\xi_1, \xi_2, t)$, $F(\xi_1, \xi_2, t)$, $\psi(t)$ в системе (1) и исключая N , переходим к системе уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \Phi &= 0 \text{ (в } \Omega) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= 0 \text{ (на } \Sigma) \\ a \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial n} - c &= \lambda \Phi + F \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Gamma &= 0 \text{ (на } \Gamma) \\ \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) + \chi \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= 0 \text{ (на } \gamma) \end{aligned} \right.$$

Вводим

$$\lambda = \omega^2 = w_{\text{разм}}^2 t_*^2 = \rho l^3 \sigma^{-1} w_{\text{разм}}^2.$$

При этом постоянная c заранее не задается, она разыскивается вместе с решением.

Для отыскания формы свободной поверхности жидкости воспользуемся граничным условием

$$N = \frac{i}{w} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma}.$$

Пусть сосуд ограничен цилиндрической поверхностью с вертикальными образующими, а снизу – плоским горизонтальным дном; на жидкость действует поле тяжести с потенциалом $\Pi_0 = Bo z$, где Bo – число Бонда. Тогда равновесной поверхностью будет служить горизонтальная плоскость; примем ее за плоскость $z = 0$, поэтому дно будет иметь уравнение $z = -h$ ($h > 0$).

Учитывая выше перечисленные допущения, рассматриваемую краевую задачу можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad ((x, y) \in \Gamma, -z \leq h \leq 0) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial e} \Big|_{((x, y) \text{ на } \gamma, -z \leq h \leq 0)} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(Bo \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \lambda \Phi \right) \Big|_{z=0} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

Пользуясь методом разделения переменных, найдем зависимость от z функции $\Phi(x, y, z)$, а именно $\Phi(x, y, z) = W(x, y)ch(k(z+h))$. где $W(x, y)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + k^2 W(x, y) = 0 \quad (\text{в } \Gamma) \\ \frac{\partial W(x, y)}{\partial e} = 0 \quad (\text{на } \gamma) \\ \int_{\Gamma} W(x, y) d\Gamma = 0 \end{array} \right. .$$

Выражение для квадрата частоты λ получаем из граничного условия

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \left(Bo \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \lambda \Phi \right) \Big|_{z=0} = 0,$$

где

$$\Phi(x, y, z) = W(x, y) \operatorname{ch}(k(z+h))$$

$$\lambda = k(Bo + k^2) \operatorname{th}(kh).$$

Так как функция $W(x, y)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} + k^2 \Phi(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial e} = 0 \quad (\text{на } \gamma) \end{cases}, \quad (3)$$

то решение системы (3) имеет следующий вид:

$$\Phi(r, \varphi) = J_n \left(k \frac{r}{r_0} \right) \cos(n\varphi),$$

где $J_n \left(k \frac{r}{r_0} \right)$ - модифицированные функции Бесселя.

3. Полученные результаты

Будем считать, что емкость, в которой находится рассматриваемая жидкость, имеет значительно большие размеры по сравнению с характерными размерами смачивания стенок резервуара жидкостью. Поэтому свободную поверхность будем считать плоской. В этом случае граничное условие

$$\left. \frac{\partial W(x, y)}{\partial e} \right|_r = 0$$

можно переписать в следующем виде:

$$\left. \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial e} \right|_r = 0.$$

Откуда следует что

$$J_1(kr) = 0. \quad (4)$$

Полученное уравнение (4) решено численно. В таблице 1 приведены первые 5 значений k для $n=1, 2, 3, \dots$

Таблиця 1 Значения для $n=0$

$n \setminus i$	0	1	2	3	4
0	3.83171	7.01559	10.1735	13.3237	16.4706
1	1.84118	5.33144	8.5363	11.706	14.863
2	3.05424	6.70613	9.96947	13.1704	16.3475

Окончательный аналитический вид потенциала скорости жидкости имеет вид:

$$\Phi(r, \varphi, z) = J_n \left(k \frac{r}{r_0} \right) \cos(n\varphi) \operatorname{ch}(k(z+h)).$$

Для нахождения формы собственных колебаний поверхности жидкости имеем:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial N}{\partial t} \right|_{z=0}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = k J_n \left(k \frac{r}{r_0} \right) \cos(n\varphi) \operatorname{sh}(k(z+h))$$

$$\left. \frac{\partial N}{\partial t} \right|_{z=0} = k J_n \left(k \frac{r}{r_0} \right) \cos(n\varphi) \operatorname{sh}(kh)$$

С учетом начального и дополнительного условий

$$N(r, \varphi, z, 0) = 0$$

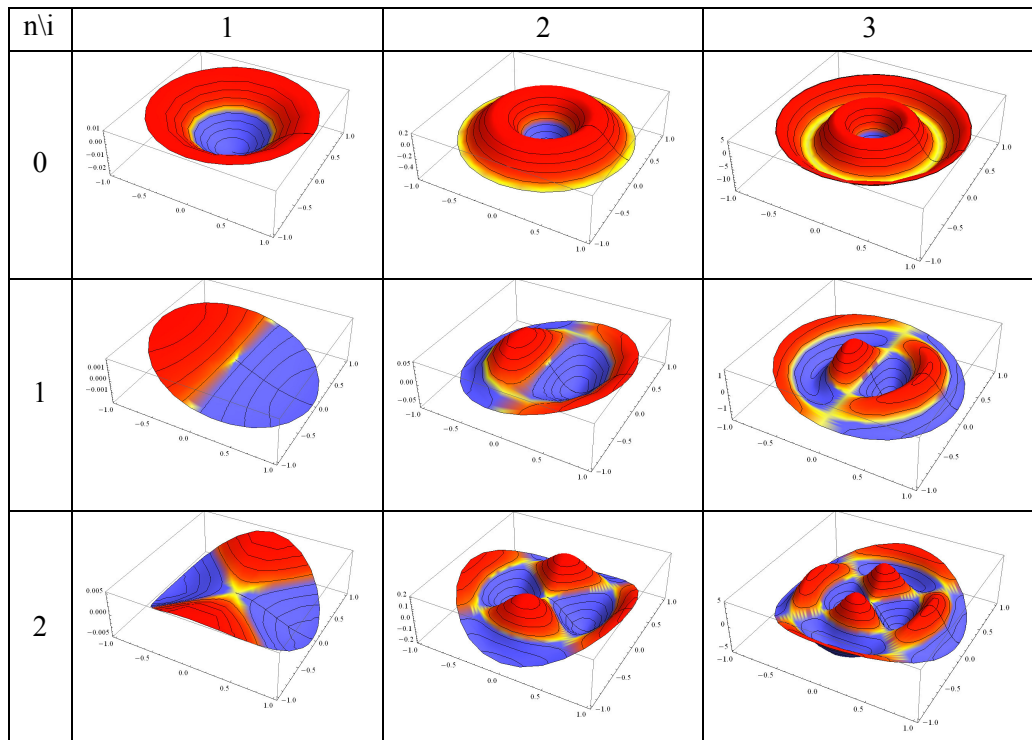
$$\int_0^t \frac{\partial N}{\partial t} dt = N(t) - N(0) = N(t)$$

□□□□□□□□□□ □□□□□□□□

$$N = k J_n \left(k \frac{r}{r_0} \right) \cos(n\varphi) \operatorname{sh}(kh)$$

В таблице 2 приведены формы колебаний жидкости при $Bo=136250$.

Таблиця 2. Форми собствених колебаний жидкости



4. Выводы и перспективы дальнейших исследований.

Решена задача определения собственных форм колебаний жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре под действием низкой гравитации. Посчитанные собственные формы можно использовать в качестве базисной системы для расчета колебаний жидкости в условиях низкой гравитации. Так же данные полученные в работе, могут быть использованы при расчете резервуаров с мембранными демпферами в условиях низкой гравитации, а также проектировании топливных баков ракет, использующих жидкое топливо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мышкис А.Д. Гидромеханика невесомости – М.: Наука, 1976. – 504 с.
2. Градштейн И. С. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений - М.: Наука, 1963. – 1100 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики – М.: Наука, 1977– 736 с.

УДК 539.3

Компьютерное моделирование разрушающей нагрузки на топливный бак

В. И. Гнитько, К. Г. Дегтярев, А. М. Тонконоженко

Национальный технический университет «ХПИ», Украина

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Украина

Государственное конструкторское бюро «Южное», Украина

Рассмотрена упруго-пластическая задача поиска разрушающего внутреннего давления в цилиндрическом топливном баке с торосферическими днищами. Решение выполнено с использованием метода конечных элементов.

Ключевые слова: метод конечных элементов, разрушающая нагрузка, оболочка вращения, математическая модель, пластическая деформация

Розглянуто пружно-пластичну задачу пошуку руйнівного внутрішнього тиску в циліндричному паливному баці з торосферичними днищами. Розв'язок знайдено з використанням методу скінченних елементів.

Ключові слова: метод скінченних елементів, руйнівне навантаження, оболонка оберту, математична модель, пластична деформація

The elasto-plastic problem of destructive internal pressure evaluation is considered for cylindrical tank with a torispherical ends. The solution was received by finite element method.

Key words: finite element method, breaking load, shell of revolution, mathematical model, plastic deformation

1. Истоки исследования и его актуальность

В различных областях инженерной практики, таких как авиастроение, транспорт, энергетическое машиностроение широко применяются элементы ответственных тонкостенных конструкций, которые функционируют в условиях повышенных технологических нагрузок. К числу таких объектов относятся топливные баки, цистерны, резервуары, корпуса энергетических установок, насосов, компенсаторы сдвиговых и осевых перемещений, колонны выпарных аппаратов, нефтехранилища и т.п. Элементами этих конструкций являются оболочки вращения с различными формами меридиана.

Использование компьютерных средств для проведения виртуального эксперимента позволяет не только получить необходимые результаты без испытания реальной конструкции, но и сделать это значительно быстрее, что несет несомненную выгоду как во временном, так и в денежном эквиваленте.

Анализ работ [1-4], посвященных расчету оболочек, в том числе моделирующих сосуды и резервуары с опасными заполнителями, позволяет выделить в настоящее время в качестве основных и наиболее эффективных методов расчета на прочность методы численного интегрирования, метод конечных разностей и метод конечных элементов (МКЭ).

В первых работах [1, 2] по расчету оболочек вращения МКЭ поверхность оболочки описывали ансамблем простейших плоских треугольных и четырехугольных конечных элементов с линейной аппроксимацией поля перемещений. Применение этих элементов обеспечивало приемлемую точность

расчета только при исследовании узкого класса оболочек с небольшими градиентами напряжений.

Со временем эффективность конечных элементов для расчета оболочек на основе теории Кирхгофа-Лява повышалась как за счет увеличения порядка аппроксимирующих искомым функций, так и благодаря более точной аппроксимации геометрии оболочки, в связи с чем стали применяться сначала плоские, а затем и неплоские криволинейные элементы с достаточно большим числом степеней свободы [6-8].

Одновременно с усложнением геометрии конечных элементов происходило и повышение порядка аппроксимирующих полиномов как за счет увеличения числа степеней свободы в узлах, так и путем введения дополнительных узловых точек [1, 2], что позволяло обеспечить лучшую сходимость и точность метода.

За сравнительно короткий период существования, использования и постоянного усовершенствования МКЭ были решены многие теоретические вопросы, предложено большое количество различных типов конечных элементов, разработаны программные пакеты, обеспечивающие проектирование сложных современных конструкций. Опубликовано большое количество монографий, обзоров и статей, среди которых известные монографии О. Зенкевича, Дж. Одена, В.А. Постнова и И.Я. Харахурима, Г. Стренга и Дж. Фикса, К. Бате и Е. Вилсона, А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. Многие теоретические разработки стали основой для создания мощных программных комплексов решающих самые сложные задачи.

Полученные в последнее десятилетие теоретические результаты и построенные на основе метода конечных элементов программные комплексы позволили ставить и решать задачи о предельном равновесии, определять разрушающие нагрузки на элементы конструкций. Среди таких работ отметим [9, 10]. Но до сих пор не нашли должного отражения вопросы прочности и определения критических нагрузок на оболочечные конструкции с учетом влияния пластических деформаций, остаточных напряжений, наличия дефектов, особенно важные для тех элементов конструкций, которые работают в условиях повышенных технологических нагрузок.

2. Общая постановка задачи

Необходимо определить разрушающее внутреннее давление в сосуде, наполненном жидкостью. Первоначально этот сосуд представляет собой оболочечную конструкцию длиной $L = 0,524$ м, диаметром $D = 0,134$ м. Крышка и днище имеют торосферический профиль, созданный путем совмещения двух дуг радиуса 0,085 м и 0,025 м. Первый патрубок впаян в крышку посередине, параллельно к оси X , а второй в днище под углом 15° к оси X . Сосуд заполнен жидкостью и имеет еще один патрубок, а также кронштейн крепления на крышке.

Для упрощения расчета пренебрегали влиянием гидростатического давления жидкости, как несоизмеримо малым по сравнению с искомым разрушающим давлением: 0,005 МПа против 27 МПа, а также не рассматривался патрубок на теле конструкции, находящийся в слабо нагруженном месте. В последствии также не учитывались кронштейн и патрубок, вызывающие

неосесимметричность, которая практически не сказывается на результате расчета.

Материал сосуда – сталь 25ХГСА.

Приведем характеристики этого материала: модуль упругости $E = 209$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, предел текучести $\sigma_{\tau} = 834$ МПа, предел прочности $\sigma_{ep} = 1080$ МПа.

Диаграмма деформирования была построена в Институте механики им. С.П. Тимошенко по данным испытаний КБ "Южное, а также по известным литературным данным [5]. Значения напряжений одноосного растяжения и соответствующих деформаций представлены на рис.1.

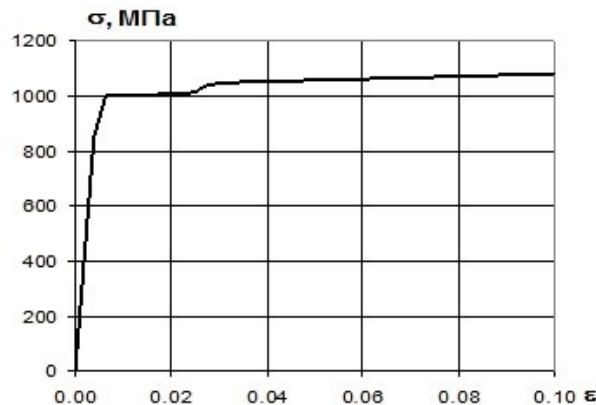


Рис.1. Диаграмма деформирования стали 25ХГСА

Задача рассматривалась в упругопластической постановке.

Поскольку реальная конструкция представляет собой тонкую оболочку ($h/R=4/67.1=0.05$ для участка с наибольшей толщиной), для расчета с использованием ANSYS Multiphysics была выбрана оболочечная модель. При этом учитывалось реальное неосесимметричное закрепление.

Задача решалась при помощи программного комплекса, основанного на методе конечных элементов, с проведением двух независимых расчетов. В первом используется плоский конечный элемент Shell281, который является наиболее подходящим как для анализа тонких оболочек, так и оболочечных конструкций. Элемент имеет восемь узлов с шестью степенями свободы в каждом: перемещения по осям X, Y, Z и повороты вокруг них.

Shell281 позволяет также учитывать изменения толщины оболочки в нелинейном анализе.

На рис. 2 показаны конфигурация, местонахождение узлов, и система координат элемента. Элемент определяется толщиной и восемью узлами (I, J, K, L, M, N, O и P). Он может принимать треугольную форму.

Эквивалентное напряжение σ_e определяется в зависимости от используемого критерия длительной прочности:

- критерий максимального главного нормального напряжения

$$\sigma_e = \sigma_{\max}; \quad (1)$$

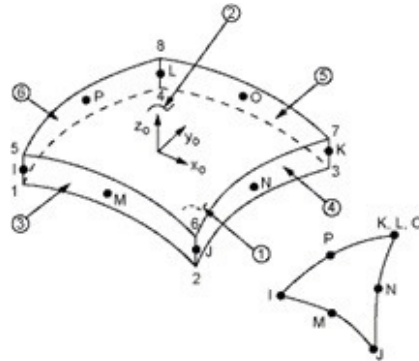


Рис.2. Конечный элемент SHELL281

- критерий интенсивности нормальных напряжений (критерий Мизеса)

$$\sigma_e = \sigma_i = S\sqrt{3}; \quad (2)$$

- критерий Сдобырева

$$\sigma_e = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_{\max}). \quad (3)$$

Могут быть использованы и другие критерии прочности (Треска, максимальных деформаций и др.).

3. Построение конечно-элементной модели

Были проведены расчеты для 3-х разных моделей (рис. 3. а, б, в):

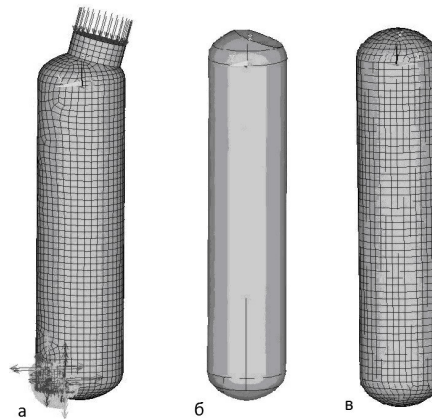


Рис.3. Модели конструкций

а) С горловиной и крышкой. Нагрузка: усилие, действующее на бак, моделируется распределенной нагрузкой по горловине бака;

б) С крышкой без горловины. Нагрузка: усилие, действующее на бак (моделируется распределенной нагрузкой по крышке бака) и внутреннее давление;

в) упрощенная модель конструкции без горловины и крышки. Нагрузка: внутреннее избыточное давление.

При этом геометрические характеристики оболочечной конструкции и параметры материала (сталь 25ХГСА) приведены выше. Крепление бака для всех 3-х случаев одинаковое – жесткая заделка в месте приложения кронштейна.

Следует отметить, что расчет проводился для разных сеток, из которых была выбрана оптимальная с размером элемента 0.01 м.

Для решения данной задачи был выбран оболочечный восьми узловой конечный элемент Shell281. Толщины задавались функцией BOT, т.е. откладывались от внутренней поверхности.

4. Описание процесса нагружения

Нагружение для всех трех моделей, описанных выше, определялось согласно данным, предоставленным КБ "Южное":

- а) действие сжимающей силы R согласно табл. 1.;
- б) одновременное действие сжимающей силы R и внутреннего избыточного давления P согласно табл. 1.;
- в) внутреннее избыточное давление вплоть до разрушения.

Нагружение во всех случаях происходило пошагово: шаг соответствовал 0.01 МПа, при необходимости шаг измельчался автоматически

Давление P, МПа	Сжимающая сила R, Н
0	0
2.5	6250
5.0	12500
7.5	18750
10.0	25000
17.0	42500
0	0

Из данных эксперимента и проведенных расчетов было установлено, что после разгрузки в оболочке не осталось остаточных пластических деформаций. Поэтому, на третьем этапе нагружения (от 17 МПа), мы можем упростить расчетную схему до рассмотрения осесимметричной конструкции (оболочечной конструкции, состоящей из цилиндрической, тороидальной и сферической частей), при осесимметричном нагружении и закреплении.

5. Анализ численных результатов

Далее приведем результаты расчетов для 3-х разных моделей, описанных в разд. 3:

- а) в результате расчетов конструкции с горловиной, на которую действует только сжимающая сила, стало очевидным, что вклад усилий, переданных через горловину, ничтожно мал. На рис. 4 видно, что данное усилие не вызывает пластических деформаций, т.к. $\sigma_{\max} = 371$ МПа, что значительно меньше предела текучести;



Рис.4. Эквивалентные напряжения по Мизесу

б) из предыдущего расчета следует, что влиянием горловины можно пренебречь. Поэтому был проведен расчет конструкции без горловины, нагруженной усилием на крышку и внутренним избыточным давлением. Из полученных результатов видно, что основной вклад в нагружение идет от внутреннего давления. Незначительные пластические деформации возникают только вблизи кронштейна (рис. 5), поэтому целесообразно проводить расчет без учета сжимающей силы. Это позволяет рассчитывать конструкцию как оболочку вращения, нагруженную внутренним давлением.

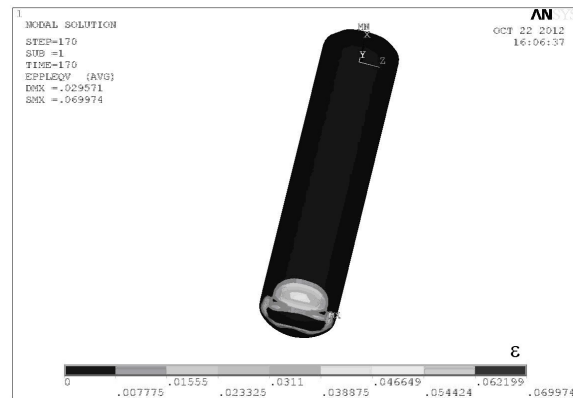


Рис.5. Эквивалентные пластические деформации по Мизесу.

в) Ввиду вышесказанного, далее будем рассматривать упрощенную конструкцию.

Разрушающая нагрузка по критерию Мизеса достигнута на 280-ом шаге, при этом $P_{\max} = 27,342$ МПа.

Это последний шаг по нагрузке перед разрушением. На рис. 6,7 показаны напряжения и деформации вдоль меридиана оболочки соответствующие этому моменту нагружения. Результаты приведены для точек наружной - TOP и внутренней - BOT поверхности.

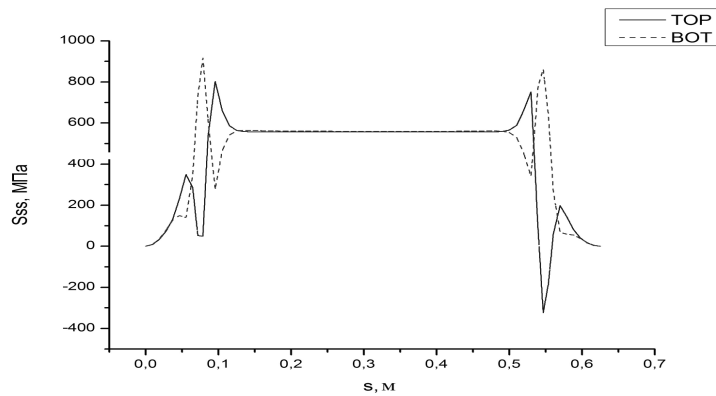


Рис.6. Меридиональные напряжения

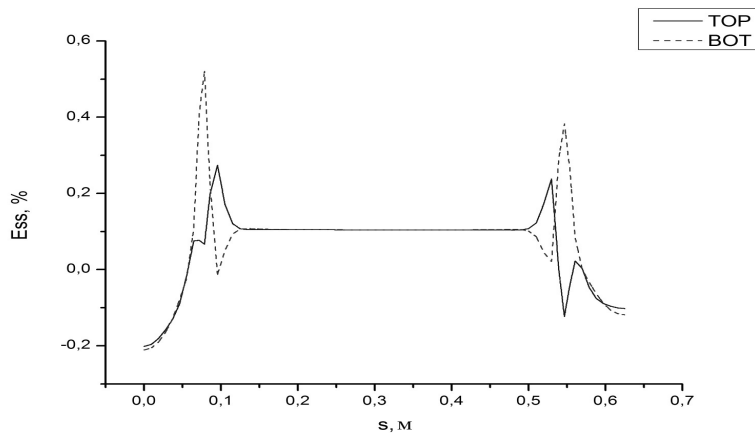


Рис.7. Меридиональные деформации

Для сравнения расчетных и экспериментальных данных выбраны показания двух датчиков E35, E36 установленных в наиболее опасных местах по величине деформации в меридиональном и окружном направлении для разных уровней давления.

Табл. 2. Сравнение результатов					
Результаты эксперимента			Результаты в ANSYS		
P, МПа	E35, %	E36, %	P, МПа	E35, %	E36, %
16.98	0.09	0.315	17.10	0.0658169	0.277345
17.27	0.091	0.32	17.60	0.0677266	0.285488
17.39	0.095	0.335	20.10	0.0773571	0.326223
18.13	0.1	0.357	20.60	0.0792843	0.334377
19.18	0.103	0.37	21.10	0.0812112	0.342533
19.73	0.113	0.414	21.60	0.0831388	0.350692
22.67	0.127	0.484	24.10	0.0928259	0.405258
24.24	0.135	0.585	24.60	0.0947605	0.430416

На рис. 8 приведені графіки, побудовані по табл. 2., характеризуючі розрахункові та експериментальні дані для окружних та меридіональних деформацій. Сплошні лінії відповідають результатам розрахунків, точки – експериментальним даним.

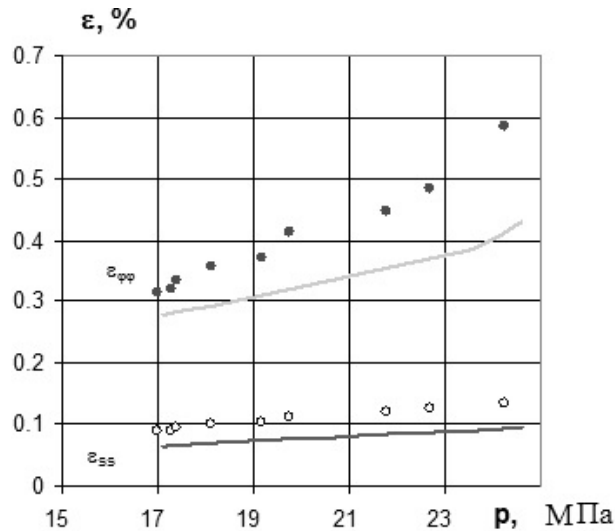


Рис.8. Сравнение расчетных и экспериментальных данных

Таким образом, по данным эксперимента разрушающая нагрузка составляет около 25 МПа, а по результатам расчета выходит 27,34 МПа. Различие результатов составило примерно 10 %.

6. Выводы и направления дальнейших исследований

1. Разработана методика расчета разрушающей нагрузки на оболочечную конструкцию на основе конечно-элементного ПК, соответствующая этапам проведения эксперимента КБ «Южное».

2. Данные расчетов показали, что при определении разрушающего давления задачу определения разрушающей нагрузки можно рассматривать в осесимметричной постановке.

3. Установлено, что использование трехмерных элементов нецелесообразно, так как различие данных расчетов по определению разрушающей нагрузки с использованием оболочечных и пространственных элементов составляет не более 1 %.

4. По данным расчетов разрушение начинается на внутренней поверхности сосуда, однако интенсивности напряжений по Мизесу на внутренней и внешней поверхностях отличаются в четвертом знаке.

5. Результаты расчетов согласуются с экспериментальными данными КБ «Южное» (различие составляет 10 %).

В дальнейшем методика может быть доработана и расширена на более широкий спектр задач, как например нестандартные тела вращения с разветвленным меридианом или толстостенные оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред / О. Зенкевич, И. Чанг. – М.: Недра, 1974. – 239 с.
3. Шимановский А. О., Путято А.В. Применение метода конечных элементов в решении задач прикладной механики / А.О. Шимановский, А.В. Путято. – Беларусь, БелГУТ, 2008. – 61 с.
4. Reddy J.N. Nonlinear finite element analysis. Oxford University press, 2004 – 221с.
5. Куркин С.А. Прочность сварных тонкостенных сосудов, работающих под давлением / С.А. Куркин. – М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.
6. Раджу И. Матрицы жесткости элементов в форме сектора / И. Раджу, А. Рао // Ракет. техника и космонавтика. – 1961. – Т. 7, № 1. – С.195–196.
7. Меламед Э.Ш. Расчет тонких оболочек с использованием конечного элемента естественной кривизны / Э.Ш. Меламед // Тр. МИИТ. –1969. –Вып.342. – С.64–80.
8. Городецкий А.С. К расчету пространственных тонкостенных конструкций методом конечных элементов / А.С. Городецкий // Тр. Киев. Ин-та электросварки им. Б.Е. Патона АН УССР. –1971. –Вып. 2. – С.37–45.
9. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения / Ю.Г. Матвиенко. – М.: Физматлит, 2006. – 320 с.
10. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность / Н.А. Махутов. – М.: Машиностроение, 1981. – 272 с.

УДК 004.55:378.14.004

Створення мультимедійних підручників з урахуванням міждисциплінарних зв'язків

Т. А. Григорова, Ю. Г. Зіненко

Кременчуцький національний університет імені М.Остроградського, Україна

В статті запропоновано методику створення мультимедійних підручників, яка дозволяє виявити міждисциплінарні зв'язки, наприклад: «Математичний аналіз» та «Комп'ютерна графіка» і реалізувати їх у вигляді зв'язків тем, які відображаються на одній сторінці підручника або у вигляді посилань на сторінку іншого підручника або глосарію з конкретизацією формул, виразів, аксіом, правил або теорем, які безпосередньо відносяться до теми, яка розглядається.

Ключові слова: мультимедійні підручники, міждисциплінарні зв'язки, психологія людського мислення.

Предложена методика создания мультимедийных учебников, которая позволяет выявить междисциплинарные связи, например: «Математический анализ» и «Компьютерная графика» и реализовать их в виде связей тем, которые отображаются на одной странице учебника или в виде ссылок на страницу другого учебника или глоссария с конкретизацией формул, выражений, аксиом, правил или теорем, которые непосредственно относятся к рассматриваемой теме.

Ключевые слова: мультимедийные учебники, междисциплинарные связи, психология человеческого мышления.

In the paper proposed the technique of creation of multimedia textbooks, which allows to identify interdisciplinary communication, for example: "Mathematical analysis" and "Computer graphics" and implement them in the form of links to those that appear on a single page of a textbook or as a reference to the page of another tutorial or Glossary with number of formulas, expressions, axioms, rules or theorems that relate directly to the subject under discussion

Key words: multimedia textbooks, interdisciplinary communication, psychology of human thought.

1. Вступ

На даний час в освіті все більше значущу роль грає використання інформаційних технологій. Це пов'язано з тим, що незалежно від курсу, який вивчає студент, окрім спілкування із викладачем на лекційних та практичних курсах, основним джерелом знань є глобальна мережа Інтернет. Це джерело надає знання за допомогою доступу до електронних міжнародних видавництв, вікіпедії, електронних книг та підручників. Звідси можна зробити висновок, що в найближчі часи основним видом підручників будуть мультимедійні підручники. Мультимедійні засоби мають широкий спектр можливості впливу на свідомість учня і дозволяють розв'язати деякі проблеми, які стосуються використання міждисциплінарного підходу, особливо в процесі навчання у ВНЗ. Міждисциплінарні підходи є актуальною проблемою освіти. Зміна суспільних відносин, багатофункціональність праці – все це пред'являє сучасному учневі

багатоаспектні вимоги, орієнтовані на поліфункціональність його знань, умінь, способів розумових дій, вміння застосовувати й удосконалювати їх у нових життєвих ситуаціях [1]. Практична спрямованість освіти, збалансованість фундаментальних і прикладних знань зумовлюють застосування міждисциплінарних підходів. В сучасній концепції освіти, одним з аспектів її цілісності, тобто сприйняття студентом отриманих знань, як єдиного цілого з точки зору обраної спеціальності, є використання міждисциплінарних зв'язків. Ідея міждисциплінарного підходу широко задіяна у дослідженнях з психофізіології людини, що відобразили взаємозалежність психічної і практичної діяльності людини, феномен асоціативності людського мислення [3].

2. Аналіз проблеми та шляхи її розв'язку

Проблема міждисциплінарних зв'язків має досить тривалу історію розвитку від концепцій Я. А. Коменського, К.Д. Ушинського, Н.К. Крупської до ідей В.Н. Федорової, А.В. Усовой, В.Н. Максимової, які отримали втілення в теоретичних засадах їх організації та реалізації. В даний час велика частина наукових досліджень присвячена середній школі. При цьому всі автори відзначають, що стосовно до вищої школи проблема міждисциплінарних зв'язків потребує додаткового дослідження, тому що процес навчання студентів у ВНЗ має свої особливості і специфіку [2].

Аналіз робіт дозволив виділити найважливіші питання теорії і практики міждисциплінарних зв'язків, що вимагають дослідження, а завдання – вирішення. Недостатньо розроблені в даний час рівні та форми реалізації міждисциплінарних зв'язків для навчання студентів ВНЗ. Програми з дисциплін не націлюють викладачів і студентів на здійснення міждисциплінарних зв'язків, тому на практиці навчально-пізнавальна діяльність щодо здійснення носить поверхневий, випадковий, декларативний характер, при цьому відомості про провідні дисципліни розкриваються не в повній мірі [4].

Виділені недоліки мають характер протиріч між тим, що повинно бути і тим, що є насправді:

- міжпредметним навчанням і необхідністю формування цілісного уявлення про майбутню спеціальність;

- необхідністю розробки міжпредметних зв'язків у системі навчання у вузі і недостатня розробленість методики та технології реалізації цих зв'язків;

- між усвідомленням необхідності реалізації міжпредметних зв'язків і слабкою методичною підготовкою студентів до їх здійснення на практиці [3].

Дані протиріччя дозволяють сформулювати проблему дослідження: недостатня розробленість методики реалізації міжпредметних зв'язків призводить до того, що учні самостійно не можуть використовувати і переносити знання з однієї дисципліни в іншу на основі принципу міжпредметних зв'язків.

Мета дослідження обумовлена необхідністю створення методики, яка дозволить реалізувати на практиці міждисциплінарні зв'язки, використовуючи мультимедійні технології. Основні можливості для цього відкриваються при створенні мультимедійних підручників в рамках однієї спеціальності, які дозволять забезпечити цілісність отриманих знань.

При розробці мультимедійного підручника в умовах модернізації освіти необхідно вирішити такі задачі:

- 1) усвідомлення сутності міждисциплінарного зв'язку, розуміння необхідності застосування знань з інших предметів;
- 2) відбір та актуалізація потрібних знань з інших предметів;
- 3) їх перенесення в нову ситуацію, зіставлення знань з суміжних предметів;
- 4) синтез знань, встановлення сумісності понять, розрахункових дій та їх реалізації.

3. Розробка методики на основі міждисциплінарних зв'язків

У ході дослідження для вирішення поставлених задач було виявлено, що створювати мультимедійні підручники, які реалізують міждисциплінарні підходи, краще за все у рамках одного напрямку підготовки та однієї спеціальності. Освітньо-професійна програма підготовки дозволяє встановити часову залежність між курсами, що викладаються рисунок 1. З одного боку це свідчить про те що вже отриманні знання будуть основою для нових, а з іншого – що з часом залишається дуже маленький відсоток залишкових знань щоб усвідомлено студент зміг встановити міждисциплінарний зв'язок і в повному обсязі використати ці знання. Наповненість курсів дозволяє забезпечити зв'язок між ними і таким чином забезпечити цілісність отриманих знань.

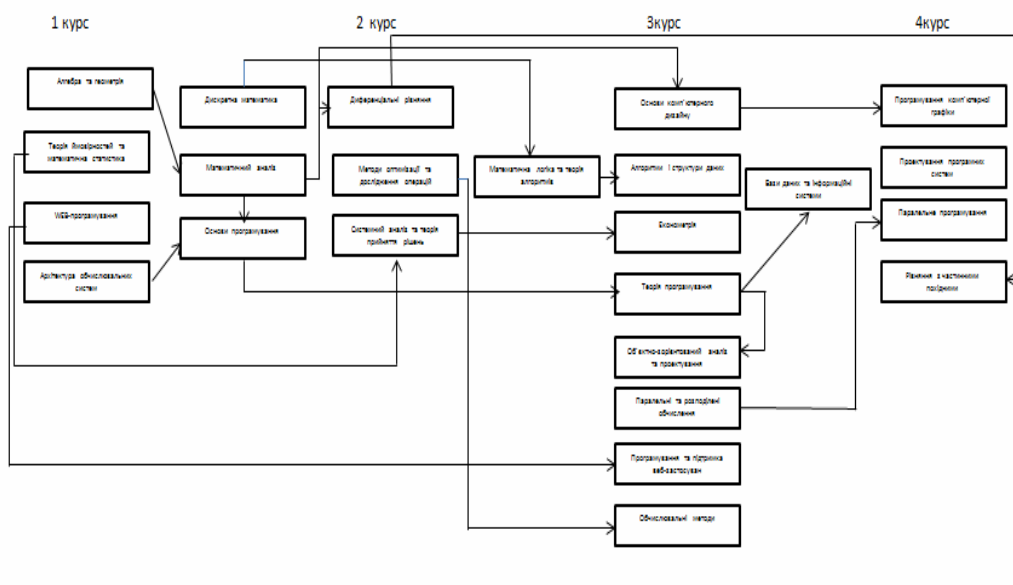


Рис. 1 Зв'язок між дисциплінами спеціальності "Інформатика" Кременчуцький національний університет імені Остроградського

Курси поділяються на базові, професійно спрямовані і за вибором, тобто базові курси формують фундамент професійної підготовки студента. При створенні мультимедійних підручників для забезпечення міждисциплінарного зв'язку використовуються досить прості механізми такі як відображення на

одній сторінці підручника інформації, що стосується пов'язаної теми з іншої дисципліни або посилання на сторінку іншого підручника або глосарію з конкретизацією формул, виразів, аксіом, правил або теорем. Це дозволить відновити отримані раніше знання, встановити зв'язок між дисциплінами для кращого засвоєння нової теми, спираючись на операційне та асоціативне мислення. Наприклад в дисциплінах «Математичний аналіз», що вивчається на першому курсі спеціальності інформатика, та «Комп'ютерна графіка», що вивчається на третьому курсі, рух об'єктів графічних систем здійснюються за криволінійними траєкторіями. Математичний опис таких траєкторій здійснюється засобами математичного аналізу: в ньому беруть участь параметрично задані функції, їх дотичні вектори і їх похідні [5]. Або наприклад, якщо об'єкт має складну криволінійну форму, то його точний опис, тобто, що виключає апроксимацію у вигляді багатоланкової ламаної виходить шляхом інтерполяції його межі в тій чи іншій формі. Так, наприклад, описуються криві, що формують символи будь-якого шрифту.

искривление текста

Рис. 2 початковий текст

*искривление
текста*

Рис.3 текст, направлений уздовж кривої

Щоб студенти пригадали, що вивчали це на першому курсі з дисципліни «Математичний аналіз» потрібно використати один з перерахованих механізмів. При розробці таких підручників необхідно враховувати психологічні аспекти, а також наглядність, структурованість, системність та ін.

Мультимедійний підручник повинен викликати інтерес. Інтерес до знань у широкому сенсі цього слова - це спрямованість особистості на вивчення всього величезного кола знань, умінь, навичок. Адже чим глибше і багатостороннє з професійної точки зору учень підходить до вирішення цього складного завдання, тим успішніше він вирішує іншу, не менш важливу проблему - пробудження і розвиток в учнів на основі спеціального інтересу прагнення до вивчення суміжних предметів, оволодіння всієї сукупності знань [6].

Психологічні аспекти враховують сприйняття учнем матеріалу. Зображення інформації в мультимедійних засобах навчання має відповідати вимогам до кольорової гами, розбірливості, чіткості і контрастності зображення, ефективності зчитування, зображенню знакової інформації (розмір і яскравість світіння), до просторового розміщення інформації на екрані відповідно до гігієнічними вимогами і санітарними нормами роботи з обчислювальною технікою. Зайва строкатість відволікає і може погіршити сприйняття, тому необхідно вибирати оптимальне поєднання колірної оформлення та виділених елементів.

Структурованість, тобто використання кількох прийомів викладу матеріалу, дозволить учню швидко відокремлювати головне від другорядного, критично оцінювати достовірність отриманої інформації, виявляти приховані питання за змістом тексту, обмірковувати, як відповісти на виниклі питання, або шукати в

тексті відповіді на них; виділяти головне. Самостійно і мотивовано організувати свою пізнавальну та інформаційно-комунікативну діяльність, в основі якої найчастіше лежить робота з навчально-науковим текстом.

Наглядність відповідає за те, щоб запам'ятовування прочитаного було осмисленим, а не механічним. Для цього матеріал повинен бути закріплений мультимедійними об'єктами [6]. Мультимедійні об'єкти доповнюють текст. Емоційний фон, що виникає при передачі мультимедійної інформації, надає їй додаткову цінність, тому що одночасно задіюються всі канали сприйняття інформації і це призводить до значного підвищення ефективності навчання.

Все вище сказане можна об'єднати і представити у вигляді методики створення мультимедійних підручників з підтримкою міждисциплінарних зв'язків – рисунок 4.

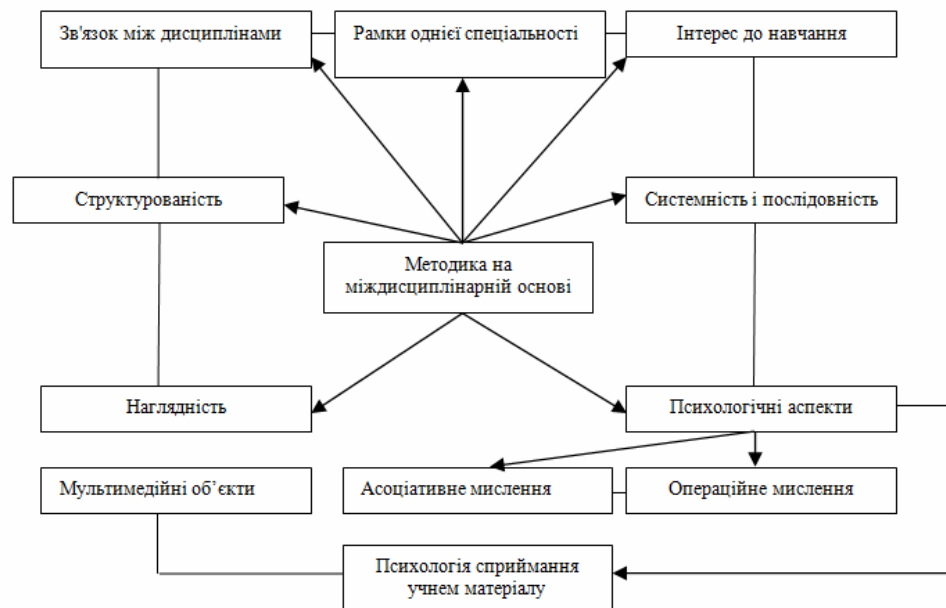


Рис. 4 Складові методики створення мультимедійних підручників на основі міждисциплінарних зв'язків

Необхідно враховувати, що підручники не повинні рясніти викладом невирішених проблем, так само як і суперечливих один одному точок зору, бо в цьому випадку передбачається, що читач, ознайомившись з першоджерелом, зробить вибір самостійно. Хоча теоретично такий спосіб виховання незалежності та оригінальності мислення студентів не можна не вітати, однак практично у них немає часу на те, щоб ознайомитися із згаданими в підручнику джерелами, і не вистачає досвіду, щоб критично оцінити прочитане.

Мультимедійні підручники призначені для студентів, тому їх використання повинно зберігати час на вивчення. Інформація, що представлена з урахуванням міждисциплінарного зв'язку, значно збереже час на вивчення, адже сприймання нового буде набагато швидше, коли використовується вже вивчений матеріал і

його потрібно тільки пригадати. При розробці мультимедійного підручника слід мати на увазі приблизну ступінь підготовленості його читачів і ту кількість часу, який вони зможуть приділити вивченню даного конкретного предмета. Навчальний матеріал повинен допомагати кожному учню працювати в такому темпі, щоб він відчував себе комфортно.

4. Висновок

У ході дослідження було проведено аналіз психолого-педагогічної та науково-методичної літератури з проблеми розробки методик мультимедійних підручників на основі міждисциплінарних зв'язків. Було запропоновано методику створення мультимедійних підручників на основі міждисциплінарних зв'язків. Міждисциплінарні зв'язки дозволяють виділити головні елементи змісту освіти, передбачити розвиток системо утворюючих ідей, понять, загальнонаукових прийомів навчальної діяльності та можливості комплексного застосування знань з різних предметів в професійній діяльності учнів.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондаревский, В.Б. Воспитание интереса к знаниям / В.Б. Бондаревский. – М.: Просвещение, 1985. – 144 с.
2. Валович Е.С. Задачи межпредметного содержания как средство развития диалектического мышления //Наука и образование. — Горно-Алтайск: Мин-во образования и науки Респ. Алтай; ГАГУ, 1998. №1. - С.64.
3. Верченко, С. Б. Реализация межпредметных связей при формировании пространственных представлений учащихся / С. Б. Верченко // Математика в школе. – 1985. – №5. – С. 31.
4. Максимова В. Н. Межпредметные связи в процессе обучения. — М.: Просвещение, 1988. 192 с.
5. Пиаже Ж. Психология интеллекта. – М.: Директмедиа Пабблишинг, 2008. – 351 с.
6. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии: В 2т. М.: Педагогика, 1989. - Т. 1 - 489 с. - Т.2. - 328

УДК 378.14.004

Особенности автоматизации подготовки лекций и презентаций для систем дистанционного обучения

Т. А. Григорова, А. И. Мандрыка

Кременчугский национальный университет имени М.В. Остроградского, Украина

В работе предложен подход по формированию учебного материала для систем дистанционного обучения и его программная реализация. Электронная лекция формируется на основе конспекта лекции для аудиторных занятий с учетом психологического аспекта восприятия, согласно требований к структуре представления материала. В результате работы программа создает информационный пакет в соответствии с международным стандартом организации учебных материалов в который входит электронная лекция и презентация.

Ключевые слова: электронная лекция, информационный пакет, дистанционное обучение.

У роботі запропоновано підхід щодо формування навчального матеріалу для систем дистанційного навчання та його програмна реалізація. Електронна лекція формується на основі конспекту лекції для аудиторних занять з урахуванням психологічного аспекту сприйняття, згідно вимог до структури представлення матеріалу. В результаті роботи програма створює інформаційний пакет у відповідності з міжнародним стандартом організації навчальних матеріалів в який входить електронна лекція та презентація.

Ключові слова: електронна лекція, інформаційний пакет, дистанційне навчання.

An approach of creating teaching material for distance learning systems and its software implementation is proposed. E-lecture is based on the lecture notes for classroom training, taking into account the psychological aspect of perception, according to design requirements of the presentation of the material. As a result of the program creates an information package in accordance with the international standard organization of teaching materials which includes electronic lecture and presentation.

Key words: e-lecture, information package, distance learning.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Использование дистанционных технологий обучения является необходимым требованием нашего времени. Эти технологии достаточно широко используются во всем мире, а последние указы министерства образования и науки Украины свидетельствуют о том, что вопрос внедрения дистанционного обучения в высшие учебные заведения Украины является актуальным. На сегодняшний день имеется большое разнообразие различных систем управления электронным обучением для организации онлайн-обучения. Одной из самых распространенных систем является Moodle. Тем не менее, дистанционное обучение до сих пор недостаточно распространено в учебных заведениях Украины. Причиной этому является ряд проблем. Одной из основных является сложности с подготовкой учебного материала. Большинство преподавателей не готовы профессионально, технически и психологически использовать дистанционные технологии в учебном процессе [1,2]. Преподаватели, привыкшие к традиционным формам обучения, часто не имеют четкого представления о том, как разрабатывать дистанционные курсы чтобы материал лучше усваивался студентами [3], не имеют опыта работы и

заинтересованности для работы с системами управления электронным обучением.

Для решения этих проблем разрабатываются специальные педагогические технологии для подготовки преподавателей ВУЗов, однако их применение повышает готовность преподавателей несущественно [4].

2. Истоки исследования авторов

Основным стандартом для подготовки дистанционных курсов является стандарт SCORM. Он поддерживается всеми распространенными системами дистанционного обучения благодаря тщательно разработанным подходам формирования учебного материала. Учебный материал в пакете SCORM имеет четкую организацию [5]. Существует возможность добавления интерактивных элементов, информация в пакетах защищена за счет хранения материала в виде архива и в защищенной базе данных. Поэтому является целесообразным использование SCORM стандарта.

Для формирования курсов на основе стандартов SCORM существуют специальные программы, такие как Advanced SCORM Editor, eXeLearning и т.п., а также программные надстройки для офисных приложений (MSWord, MSPowerPoint), позволяющие создавать SCORM лекции – основу любого курса [6-8]. В имеющихся программах лекции можно создать на основе заложенного в них алгоритма, и они не имеют возможности формировать лекционный материал для курсов на основе готового текстового документа (конспекта лекции). Это усложняет процесс создания и увеличивает время, затраченное на формирование материала. Надстройки для офисных приложений позволяют конвертировать готовый материал, созданный в соответствующих приложениях в SCORM пакет, но не поддерживаются всеми операционными системами, а также не имеют рекомендаций по построению дистанционных курсов и не позволяют формировать презентации на основе имеющегося текстового документа с лекционным материалом.

Согласно стандарту SCORM лекция является достаточно сложным структурированным элементом, который отличается от той формы, которую использует преподаватель на аудиторных занятиях. Требования, согласно которым лекции готовятся по стандарту, существенно отличаются от требований к структуре аудиторной лекции.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Решению существующих проблем, препятствующих внедрению дистанционной формы обучения в ВНЗ Украины, поможет разработка подходов подготовки учебного материала для систем дистанционного обучения и их программная реализация. Это позволит сократить время, затраченное на подготовку лекционного наполнения курса и на освоение преподавателями новых технологий, а за счет этого повысить заинтересованность в использовании систем управления электронным обучением для повышения качества обучения студентов разных форм обучения.

При формировании лекций для системы дистанционного обучения следует учитывать следующие аспекты:

- Особенности формирования лекций для систем дистанционного обучения. Неопытному пользователю системы дистанционного обучения (преподавателю) достаточно сложно правильно организовывать и оформлять учебный материал [4]. Обычно, преподаватели полагаются на свою интуицию или обращаются за помощью к специалистам, которые уже имеют опыт работы с формированием материала для курсов дистанционного обучения.
- Особенности восприятия электронной информации. Для лучшего восприятия, информация должна быть представлена более наглядно, то есть сопровождаться схемами, диаграммами, изображениями, мультимедийными элементами [9]. Текст лекции должен быть структурированным с обязательным выделением важных аспектов темы.

Цель работы заключается в анализе процесса подготовки лекций для аудиторных занятий и разработки подхода, который позволит учесть основные аспекты аудиторных занятий при подготовке лекционного курса для системы дистанционного обучения. Этот подход должен учитывать педагогическую и психологическую составляющую процесса обучения. Используя его, необходимо разработать программный продукт, который позволит автоматически генерировать пакет лекционного материала, учитывая рекомендации по подготовке учебного материала, на основе подготовленного преподавателем документа с текстовым вариантом лекций. Это поможет преподавателю, не имеющему специальной подготовки для работы с системой дистанционного обучения, создавать курсы лекций для дистанционного обучения.

4. Подход к формированию лекционного материала и презентаций

Был проведен сравнительный анализ формирования лекций для традиционной и дистанционной формы обучения. Подготовка преподавателя к аудиторным лекциям довольно сложный и длительный процесс, который состоит из нескольких этапов: подбор учебников и пособий, систематизация информации, подготовка конспекта, оформление тезисов и т.п.

Учебная лекция имеет следующую структуру: вступление (тема занятия, цель, актуальность, план), основная часть с изложением материала, выводы (итоги занятия, рекомендации, перечень литературных источников) [10]. Во время проведения лекций преподаватели учитывают определенные психолого-дидактические аспекты, которые влияют на сосредоточенность студентов, уровень восприятия и усвоения нового материала. К ним можно отнести поведение преподавателя, уровень подготовки студентов к восприятию новой информации, умение сконцентрировать внимание студентов на актуальности и цели освещаемой темы, последовательность и логичность изложения материала, использование примеров, изображений, схем, таблиц и т.д., эмоциональная составляющая и умение взаимодействовать с аудиторией.

При формировании лекционного материала для дистанционного обучения должны быть учтены все особенности подачи материала [11]. Основное значение имеет структура конспекта лекции. Сформированный преподавателем

файл с текстовым вариантом лекции должен соответствовать требованиям к структуре аудиторной лекции и отражать следующие аспекты: определение темы, цель, актуальность, план, перечень введенных определений, изложение материала, выводы, список рекомендуемой литературы и список вопросов по теме. Каждый структурный элемент позволяет дать студентам необходимые знания по теме. Однако, не смотря на то, что структура электронной и аудиторной лекции идентичны необходимо учитывать те аспекты, которые влияют на восприятие студентом информации непосредственно во время аудиторных занятий, где важную роль играет фактор общения студента и преподавателя, умение ориентироваться на уровень подготовки аудитории и соответственно корректировать форму и объем излагаемого материала. Для этого лекцию желательно представлять в двух вариантах - расширенном в виде текстового файла и сокращенном в виде презентации. Это позволит сконцентрировать внимание студента к актуальности темы, основным понятиям и концептуальным положениям, рассмотренным в лекции. Полный текст лекции для лучшего восприятия должен быть поделен на разделы с выделением в этих разделах определений и ключевых понятий. Текст нужно сопровождать наглядными примерами с применением визуализированных элементов, таких как формулы, графики, диаграммы, таблицы, схемы, рисунки, элементы видео. Представление каждого раздела может иметь свои особенности. Для этого можно использовать все возможности средств оформления текста, такие как начертание, регистр, цвет выделения текста, цвет шрифта и т.д. В тексте лекции могут встречаться понятия, которые были рассмотрены ранее в лекциях курса, чтобы просматривать толкование этих понятий необходимо наличие глоссария – базы данных основных понятий.

Как известно новая информация запоминается лучше, если задействовано несколько видов памяти. В случае с дистанционными лекциями это может быть зрительная, слуховая, а также эмоциональная память.

Различное оформление контента может вызвать различные эмоции. Основную роль в этом играет цвет, наука колористика описывает, насколько сильно он воздействует на психоинтеллектуальное состояние человека. Поэтому цвет можно использовать для того, чтобы акцентировать внимание студента на концептуальных моментах лекции и способствовать улучшению восприятия и запоминанию материала. Дизайн контента является важным фактором потому, что от него зависит отношение студента к качеству информационного наполнения курса. В дистанционном обучении дизайн играет роль эмоциональной составляющей, которая во время аудиторных занятий зависит от умения преподавателя концентрировать внимание студентов на излагаемом материале.

Стиль оформления и наполнения контента зависит от специфики курса лекций. Для некоторых курсов целесообразно использовать графический материал - фотографии, таблицы и т.д., для других - формулы, блок-схемы и другие.

Формирование электронных презентаций происходит с учетом аспектов создания лекций, описанных выше. Кроме того, учитываются следующие правила:

- небольшой объем информации на слайде;
- предпочтительное горизонтальное размещение информации;
- размещение информации чуть выше центра слайда;
- если текст представлен в виде перечня, то пункты должны быть разграничены (за счет применения различных цветов, отступов, рамок, представления пунктов в виде блоков);
- строки (или столбцы) таблицы закрашиваются разными цветами (избирается два цвета соответственно, гармонирующие со стилем оформления всей презентации);
- слайды презентации должны быть оформлены в одном стиле (одинаковый цвет фона, стиль шрифта);
- название слайда пишется шрифтом, больше размера шрифта основного текста [12];
- текст не должен сливаться с фоном.

Перечисленные выше требования по подготовке учебного материала для дистанционного обучения необходимо распределить между преподавателем, который формирует лекцию, и программой.

Преподаватель должен сформировать лекцию в соответствии со структурой, то есть выделить название темы, план лекции, цель, актуальность, новые понятия, выводы, вопросы к теме, список литературы; подобрать графический материал, который будет использоваться в тексте лекции. Сложившуюся таким образом лекцию в любом формате, который поддерживает программа, преподаватель может загрузить в приложение или готовить лекцию непосредственно в редакторе программы.

Программа анализирует загруженный или отредактированный в редакторе текст и выдает рекомендации по оформлению или содержанию лекции, автоматически готовит на основании текста лекции презентацию и готовит веб-документ лекции и презентации. Презентация формируется на основании ключевых моментов занятия, графического материала, таблиц, графиков, основных формул и выводов. Преподаватель может редактировать созданную презентацию.

5. Разработка программы

Для того, чтобы из текстового документа получить опубликованную SCORM лекцию нужно выполнить загрузку файла, парсинг файла, выбор шаблона оформления лекции, редактирования лекции, формирование файлов для SCORM-пакета, создания архива с файлами, передача архива в модуль системы, запись новых понятий в глоссарий системы.

Диаграмма классов (Рис.1) отражает процесс создания SCORM лекций и презентаций.

Документ, загруженный преподавателем, разбивается на составные части за счет парсинга. В зависимости от типа загруженного файла (*.html, *.doc, *.docx) методом `select_parser()` будет выбираться соответствующий метод класса `Parser` (`parse_html()`, `parse_doc()`, `parse_docx()`). Результатом работы этих методов является текст, который не содержит лишних тегов.

Класс Theme зависит от класса Parser. Класс Theme имеет метод select_theme(), который на основе результатов работы класса Parser выполняет анализ текста лекции и создает шаблон оформления электронной лекции или презентации на основе списка правил, которые описаны во внешнем xml-файле. Шаблон создается в зависимости от ключевых слов в тексте, с учетом специфики предмета, от объема информации и от количества сопроводительной информации (графики, таблицы, рисунки, видео и др.). Шаблон представляет собой файл стилей *.css. Он содержит информацию о сочетании цветов, размере, стиле шрифта и правилах расположения элементов на страницах. Для лекции и презентации создаются отдельные шаблоны, которые учитывают особенности каждого из видов представления информации.

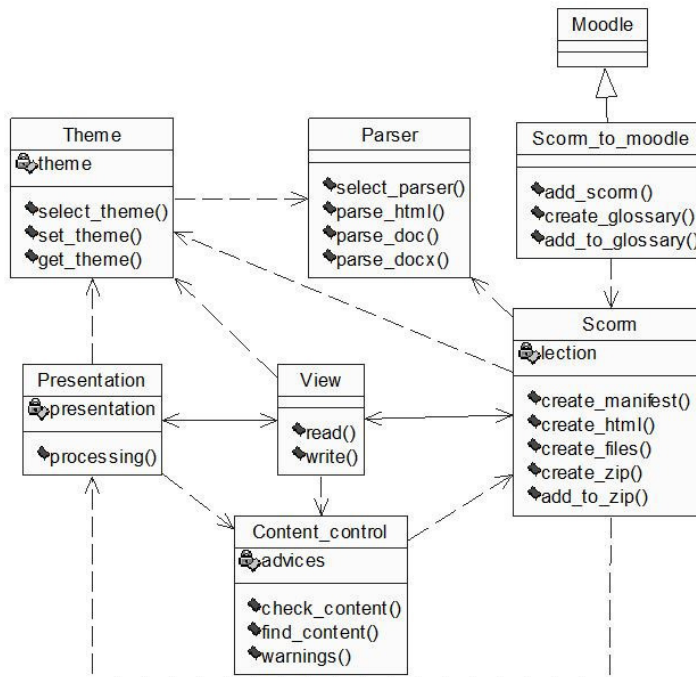


Рис.1. Модель программы.

Класс Scorm содержит методы, создающие файлы для SCORM-пакета (файлы с расширением *.xml, *.html, *.css, *.js т.д., файлы с ресурсами курса), и методы для занесения этих файлов в zip-архив. Метод create_html() этого класса создает html страницу на основе текста, полученного из класса Parser, и на основе выбранного шаблона оформления страниц. Если в лекции содержатся контрольные вопросы с возможными вариантами выбора, то вопрос добавляется к странице с возможностью выбора варианта ответа. Результат будет сразу выводиться на экран. Если в вопросах не указаны варианты ответов, то они изображаются на странице в виде статического текста.

Класс View содержит методы для работы с интерфейсом программного продукта. Методы read() и write() предназначены для считывания и вывода информации.

Подготовленная в классе Scormhtml страница с лекцией анализируется в классе Content_control. Метод check_content() проверяет контент файла на наличие нужного количества информации различного вида (текст, изображения, видео и т.д.). Анализ проводится с учетом аспектов восприятия электронного учебного материала.

В методе warnings() проверяется наличие структурных элементов лекции (тема, план, основная часть, выводы, список литературы, ссылок и др.). Если в конспекте лекции хватает определенных структурных элементов, то программа выдает преподавателю предупреждение о том, что нужно добавить недостающий элемент.

Метод find_content() класса Content_control служит для поиска контента, которого не хватает в лекции (изображение, видео, литература и т.д.). Поиск происходит в базе данных учебных материалов системы дистанционного обучения по смысловому контексту. При условии, если в базе данных был найден необходимый материал, формируются рекомендации по добавлению найденного материала в лекцию. Если материал не найден, поиск выполняется в сети Интернет и рекомендации формируются в виде списка ссылок на ресурсы, удовлетворяющие смысловому контексту.

Созданная html страница лекции оформляется и открывается в режиме редактора. Советы отображаются в дополнительном окне редактора. Преподаватель может вносить изменения в лекции согласно советам системы или в соответствии со своими соображениями. Наполнение отредактированной страницы снова анализируется и формируются советы, пока преподаватель не будет удовлетворен результатом и не выполнит сохранение лекции, во время которого создается манифестный файл лекции и другие файлы для SCORM-пакету. Если при редактировании было изменено оформление каких-то элементов страницы, то изменения вносятся в файл стилей *.css. Изменения в наполнении страницы (изменение текста, изображений и т.д.) отображаются в html-файле. При сохранении происходит занесение всех файлов в zip - архив.

На основе отредактированной лекции выполняется формирование презентации. Класс Presentation содержит метод processing(), в котором на основе сложившейся html страницы с лекционным материалом отбирается материал для презентации согласно списку правил. Слайды (страницы) презентации оформляются таким образом, чтобы на каждом слайде не было много (мало) информации, чтобы учитывались правила оформления презентаций и особенности восприятия информации.

Выбор шаблона оформления презентации выполняется классом Theme.

В классе Content_control презентация анализируется и формируются рекомендации таким же образом, как при формировании электронных лекций.

В редакторе преподаватель может редактировать слайды презентации. Измененная презентация в классе Scorm сохраняется в виде zip-архива в соответствии со стандартом SCORM.

Созданные пакеты передаются методами класса Scorm_to_moodle к модулю системы Moodle – scorm, который публикует лекцию и презентацию к курсу.

В классе Scorm_to_moodle для внесения новых терминов лекции в глоссарий системы Moodle из текста лекции выделяются новые понятия. Данные передаются в стандартный модуль Moodle, который выполняет запись данных в глоссарий. При отсутствии глоссария происходит его создание.

каждого из видов представления информации.

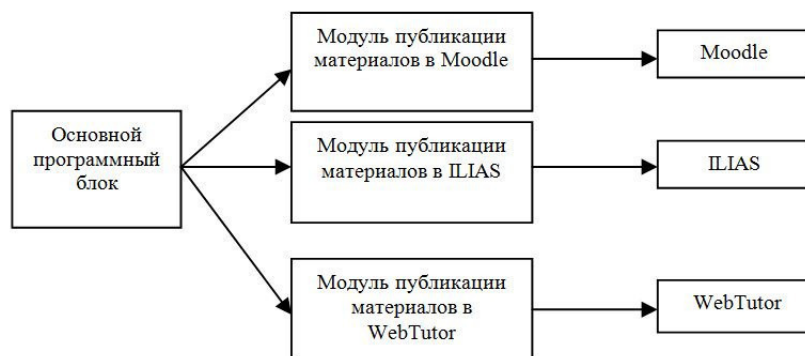


Рис.2. Схема взаимодействия программы с различными СДО.

С помощью класса scorm_to_moodle реализуется передача созданных пакетов в систему Moodle. Если рассматривать другие системы управления дистанционным обучением (например, ILIAS, iSpring Online, WebTutor и др.), созданные SCORM материалы можно импортировать в них за счет создания дополнительного модуля. В таком случае схема взаимодействия приложения с системой управления электронным обучением показана на рисунке 2.

6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Разработанный программный продукт дает возможность автоматически генерировать пакет лекционного материала на основе подготовленного преподавателем документа с текстовым вариантом лекции, используя рекомендации по подготовке учебного материала. Рекомендации формируются на основании предложенного подхода, который позволяет учитывать педагогическую и психологическую составляющую процесса обучения. Все в комплексе поможет преподавателю, не имеющему специальной подготовки для работы с системой дистанционного обучения, создавать лекции и презентации к ним для дистанционного курса. Программа может быть использована любой системой, которая поддерживает стандарт SCORM. Дальнейшее внедрение дистанционных технологий и исследование процесса обучения студентов, а именно влияния разработанного на основании предложенного подхода лекционного материала на его усваивание, позволит расширить базу рекомендаций и таким образом сократить время и упростить процесс подготовки учебного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцева С.П. Міжнародна інформація [Текст] : навч. посіб. / С.П. Кудрявцева, В.В. Колос. – К.: Видавничий дім «Слово», 2005. – 400 с.
2. Ткаченко Т. В., Шевченко Л. С. Технологія мультимедіа для дистанційного навчання. // Педагогічний дискурс : зб. наук. пр. / Ін-т педагогіки АПН України, Хмельниц. гуманіт.-пед. акад. - Хмельницький : ХГПА, 2007. - Вип. 2. - С. 171-174. - Бібліогр.: с. 174 (12 назв).
3. Скворцова Л.Л. Психологические аспекты мультимедийного сопровождения лекции. // Инновационные технологии обучения при подготовке экономистов и менеджеров: сб. науч. тр.н / Гродненский гос. ун-т им. Я.Купалы; редкол.: О.Н. Будько, О.Б. Цехан. – Гродно : ГрГУ, 2012. – С.42-51.
4. Громова Т.В. Теория и технология подготовки преподавателей вуза к деятельности в системе дистанционного обучения [Текст] : автореф. дис. д-ра. пед. наук. – Тольятти, 2011
5. Advanced Distributed Learning [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.adlnet.org/scorm/>
6. eXe eXeLearning [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://exelearning.org>
7. iSpring Presenter 7 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.ispring.ru/ispring-presenter>
8. Create Course Content [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.wimba.com/products/coursegenie>
9. Стародубцев В.А. Создание и применение электронного конспекта лекции [Текст] : учебное пособие / В.А. Стародубцев. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 88с.
10. Ортинський В.Л. Педагогіка вищої школи: навч. посіб. [Текст] / В. Л. Ортинський – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 472 с.
11. Кузьмінський А.І. Педагогіка вищої школи: навч. посіб. [Текст] / А.І. Кузьмінський – К.: Знання, 2005. – 486 с
12. Беляков Е. В. Подготовка и использование презентаций в учебном процессе [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://belyk5.narod.ru/Present.htm>.

УДК 004.652

Математические основания реляционных баз данных. Часть 1: представления основных табличных операций

Н. Д. Кахута

Университет экономики и права «КРОК», Украина

Статья посвящена созданию фрагмента теории табличных алгебр, являющихся обобщением классических реляционных алгебр Кодда. Отличительной особенностью применяемой техники является использование свойств теоретико-множественных конструкций (полный образ множества относительно функции, ограничение функции по множеству, обобщенное прямое (декартово) произведение, бинарное отношение совместности функций) и их перенесение на табличный случай. Такое перенесение свойств возможно ввиду наличия простых представлений сигнатурных операций в терминах указанных теоретико-множественных конструкций.

Ключевые слова: реляционные алгебры Кодда, табличные алгебры, полный образ, ограничение, обобщенное прямое произведение, отношение совместности.

Стаття присвячена створенню фрагмента теорії табличних алгебр, які є узагальненням класичних реляційних алгебр Кодда. Особливістю застосовуваної техніки є використання властивостей теоретико-множинних конструкцій (повний образ множини відносно функції, обмеження функції за множиною, узагальнений прямий (декартів) добуток, бінарне відношення сумісності функцій) і їх перенесення на табличний випадок. Таке перенесення властивостей можливо через наявність простих зображень сигнатурних операцій в термінах зазначених теоретико-множинних конструкцій.

Ключові слова: реляційні алгебри Кодда, табличні алгебри, повний образ, обмеження, узагальнений прямий добуток, відношення сумісності.

Article is devoted to the creation of a fragment of the theory of table algebras, which are a generalization of the classical Codd's relational algebras. A distinctive feature of the technique is the use of set-theoretic properties of the some constructions (whole image of the set with respect to the function, restriction the function over the set, the generalized Cartesian product, a binary relation of functions consistency) and their transfer to the table case. The transfer is possible because simple representations of signature operations in terms of these set-theoretic constructions are hold.

Key words: Codd's relational algebras, table algebras, whole image, restriction, the generalized Cartesian product, consistency relation.

1. Введение

Статья посвящена созданию фрагмента теории табличных алгебр, построенных на основе классических реляционных алгебр Кодда. Отличительной особенностью применяемой техники является использование свойств теоретико-множественных конструкций и их перенесение на табличный случай.

2. Табличные алгебры: основные определения

Теория табличных алгебр формирует теоретический фундамент языков запросов современных табличных баз данных. Исследованию табличных алгебр посвящены работы [1-13]. Элементы носителя этих алгебр уточняют табличные (реляционные) структуры данных, а сигнатурные операции построены на базе

основных табличных манипуляций в реляционных алгебрах Кодда [14-20] и в SQL-подобных языках: сигнатурными операциями являются объединение, пересечение, разность, селекция, проекция, соединение (эквисоединение), активное дополнение, переименование и деление.

Сделаем несколько замечаний по форме изложения материала. Леммы, предложения, следствия, теоремы, формулы имеют сквозную нумерацию. Символ \square означает конец формулировки утверждения и конец доказательства, символ \square – конец логической части доказательства.

При рассмотрении структур данных абстрагируемся от различных доменов атрибутов (т.е. рассматриваем один универсальный домен), от специального значения NULL в доменах, а также от дубликатов строк таблиц, не имеющих первичного ключа (PRIMARY KEY) (по поводу этих аспектов см. [13, раздел 3, с. 125-183]). Для замкнутости текста приведем основные определения.

Уточим таблицы (реляции) в терминах именных множеств [21-24]. Для этого зафиксируем два множества: A , элементы которого назовем *атрибутами*, и D – *универсальный домен*. Далее эти множества будут выступать в роли множеств имен и денотатов соответственно.

Произвольное (конечное) множество атрибутов $R \subseteq A$ назовем *схемой*. Схемы будем обозначать как R, R_1, R_2, \dots

Строкой схемы R называется именованное множество на паре R, D , проекция которого по первой компоненте равна R . Таким образом, строка схемы R – это функция вида $s: R \rightarrow D$. Строки будем обозначать как s, s_1, s_2, \dots .

Таблицей схемы R называется (конечное) множество строк той же схемы R . Таблицы будем обозначать как t, t_1, t_2, \dots . Множество всех строк (таблиц) схемы R обозначим через $S(R)$ (соответственно $T(R)$), а множество всех строк (таблиц) –

S (соответственно T). Таким образом, имеем $S \stackrel{def}{=} \bigcup_{R \subseteq A} S(R)$, $T(R) \stackrel{def}{=} 2^{S(R)}$,

$T \stackrel{def}{=} \bigcup_{R \subseteq A} T(R)$.

Здесь и всюду далее 2^X обозначает множество всех (конечных) подмножеств множества X .

Схема может быть пустой; при этом существует единственная строка пустой схемы, которая обозначается как ε . Отметим, что с семантической точки зрения пустая строка – всюду неопределенная функция (график такой функции пуст).

Носителем табличной алгебры является множество всех таблиц T . Зададим операции. Начнем с теоретико-множественных операций, которые используют только множественную структуру таблиц, отвлекаясь от функциональной структуры строк – элементов таблиц.

Определение 1. Под *объединением* \cup_R (*пересечением* \cap_R , *разностью* \setminus_R) *таблиц* схемы R понимается бинарная параметрическая частичная операция, получаемая ограничением теоретико-множественного объединения (соответственно пересечения и разности) на множество всех таблиц схемы R .

Таким образом, $\cup_R : T \times T \xrightarrow{\sim} T$, $dom \cup_R = T(R) \times T(R)$, $t_1 \cup_R t_2 \stackrel{def}{=} t_1 \cup t_2$, где $t_1, t_2 \in T(R)$; для пересечения и разности полностью аналогично. \square

Тут и далее стрелка вида $\xrightarrow{\sim}$ используется для записи частичных операций. Переходим к операции селекции.

Пусть $p : S \xrightarrow{\sim} \{true, false\}$ – вообще говоря, частичный предикат на множестве всех строк, где $true, false$ – логические значения истины и лжи соответственно.

Определение 2. Под *селекцией по предикату p* понимается унарная параметрическая операция σ_p , которая таблице сопоставляет ее подтаблицу, содержащую только те строки, на которых предикат p истинный.

Таким образом, $\sigma_p : T \rightarrow T$, $\sigma_p(t) \stackrel{def}{=} t \cap p^{-1}true$, где $p^{-1}true$ – соответствующий полный прообраз – множество всех строк, на которых предикат истинный (точнее надо было бы писать $p^{-1}(\{true\})$). \square

Отметим, что на рассматриваемом уровне абстракции структура предикатов-параметров селекции не конкретизируется.

Теперь переходим к специальным операциям, которые используют (функциональную) структуру элементов таблиц – структуру именных множеств.

Пусть $X \subseteq A$ – (конечное) множество атрибутов.

Определение 3. Под *проекцией по множеству атрибутов X* понимается унарная параметрическая операция π_X , значениями которой выступают таблицы, состоящие из ограничений по множеству атрибутов X всех строк исходных таблиц.

Таким образом, $\pi_X : T \rightarrow T$, $\pi_X(t) \stackrel{def}{=} \{s | X | s \in t\}$. \square

Здесь и далее $s | X$ – ограничение строки s по множеству X , которое понимается стандартно: $s | X \stackrel{def}{=} s \cap X \times \mathbf{D}$. Полностью аналогично вводится ограничение бинарного отношения по множеству: $U | X \stackrel{def}{=} U \cap X \times \pi_2^2 U$.

Определение 4. Под *соединением* понимается бинарная операция \otimes , значениями которой являются таблицы, состоящие из всевозможных объединений совместных строк таблиц-аргументов.

Таким образом, $\otimes : T \times T \rightarrow T$, $t_1 \otimes t_2 \stackrel{def}{=} \{s_1 \cup s_2 | s_1 \in t_1 \ \& \ s_2 \in t_2 \ \& \ s_1 \approx s_2\}$. \square

Здесь и всюду далее \approx – бинарное отношение совместности бинарных отношений (в частности, функций и строк):

$$U_1 \approx U_2 \stackrel{def}{\Leftrightarrow} U_1 | X = U_2 | X,$$

где $X = \pi_1^2 U_1 \cap \pi_1^2 U_2$ – пересечение проекций по первой компоненте исходных бинарных отношений.

Рассматривая определение соединения, следует учитывать, что в общем случае при объединении функций свойство функциональности нарушается (это показывается на простых примерах). Поэтому для обоснования корректности определения операции соединения надо учесть функциональность объединения совместных функций ([13, подраздел 2.7, лемма 2.7.1]).

В этой операции атрибуты несут семантическую нагрузку: из равенства атрибутов должно вытекать равенство значений этих атрибутов в строках, которые формируют результат соединения.

Непосредственно из определения вытекает, что $t_1 \otimes t_2 = \{s \in S(R_1 \cup R_2) \mid s \upharpoonright_{R_1} \in t_1 \ \& \ s \upharpoonright_{R_2} \in t_2\}$, где $t_1 \in T(R_1)$, $t_2 \in T(R_2)$. Именно так вводится соединение под названием *естественного соединения* либо *эквисоединения* в [25, подраздел 2.4].

Пусть R_1, R_2 – схемы, причем $R_2 \subseteq R_1$.

Определение 5. Под *делением таблиц* схемы R_1 на таблицы схемы R_2 понимается бинарная параметрическая частичная операция $\div_{R_2}^{R_1}$ с областью определенности $T(R_1) \times T(R_2)$, значения которой задаются выражением:

$$t_1 \div_{R_2}^{R_1} t_2 \stackrel{def}{=} \{s \in \pi_{R_1 \setminus R_2}(t_1) \mid \{s\} \otimes t_2 \subseteq t_1\}, \text{ где } t_1 \in T(R_1), t_2 \in T(R_2). \square$$

Операция активного дополнения вводится, следуя [25]. Активное дополнение аппроксимирует в некотором смысле теоретико-множественное дополнение (подробности см. в [13, подраздел 2.2]). Для введения активного дополнения понадобится несколько вспомогательных понятий.

Определение 6. Пусть A – атрибут, t – таблица схемы R , тогда $D_{A,t} \stackrel{def}{=} \{d \mid \exists s(s \in t \ \& \ \langle A, d \rangle \in s)\}$ – *активный домен атрибута* A относительно таблицы t (по терминологии [25, подраздел 2.1, с. 20]). \square

Определение 7. Положим по определению $C(t) \stackrel{def}{=} \bigcup_{A \in R} D_{A,t}$, причем для пустой таблицы (пустого множества строк) надо выбрать непустую схему, где, как и ранее, R – схема таблицы t . \square

Здесь N – оператор построения семейства всех именных множеств, отвечающих индексированию; дадим общее определение.

Зафиксируем множества V и Σ , где множество V выступает в роли множества имен, а множество Σ – множества денотатов.

Пусть $\{\Sigma_v\}_{v \in U}$ (т.е. $v \mapsto \Sigma_v$) – некоторое индексирование подмножеств денотатов $\Sigma_v \subseteq \Sigma$ именами (конечного) множества имен $U \subseteq V$.

Определение 8. Под *именным множеством, отвечающим* данному индексированию, понимается именованное множество на паре $U, \bigcup_{v \in U} \Sigma_v$, проекция которого по первой компоненте совпадает с множеством U , а значение (денотат) любого имени $v \in U$ входит в множество Σ_v . \square

Семейство всех таких именных множеств обозначим как $N \Sigma_v$. Положим по определению, что существует единственное именное множество, которое отвечает всюду неопределенному индексированию, – пустое именное множество

ε . Таким образом, $N \Sigma_v \stackrel{def}{=} \{\varepsilon\}$.

Отметим, что так введенный оператор построения семейства всех именных множеств, отвечающих индексированию, по сути совпадает с теоретико-множественной конструкцией обобщенного прямого (декартова) произведения – $N \Sigma_v = \prod_{v \in U} \Sigma_v$ (см., например, [26]).

Следуя [27, 28] $C(t)$ – называется *насыщением таблицы t* . Нетрудно проверить, что $C(t)$ – таблица той же схемы, что и исходная таблица.

Отметим, что насыщение таблицы семантически близко прямоугольному замыканию бинарного отношения [29].

Определение 9. Под *активным дополнением* понимается унарная операция \sim , которая таблице сопоставляет дополнение до ее насыщения.

Таким образом, $\sim: T \rightarrow T$, $\tilde{t} \stackrel{def}{=} C(t) \setminus t$. \square

Под *переименованием* понимается унарная, вообще говоря, частичная параметрическая операция $Rt_\xi: T \xrightarrow{\sim} T$, где параметром выступает отображение $\xi: A \xrightarrow{\sim} A$ – инъективное отображение на множестве атрибутов, которая только переименовывает атрибуты таблиц-аргументов (согласно отображения-параметра ξ).

Формальное определение переименования требует дополнительных понятий. Начнем с содержательных соображений. Переименование таблицы – это переименование всех атрибутов ее схемы; поэтому переименование таблицы сводится к переименованию ее строк; причем два этих переименования связаны между собой конструкцией полного образа. В свою очередь переименование строки – это переименование только первых компонент пар – элементов строки. Перейдем к точным определениям.

Пусть $\eta: A \rightarrow A$ – некоторая тотальная функция переименования атрибутов, вообще говоря, неинъективная.

Семейство всех (конечных) бинарных отношений на паре множеств A, D обозначим через S' (отметим, что множество всех строк S совпадает с множеством всех (конечных) функциональных бинарных отношений на паре множеств A, D ; т.е. $S \subseteq S'$).

Определение 10. Под *переименованием строк*, отвечающим функции переименования атрибутов η , понимается отображение

$$Rs_\eta: S \rightarrow S', Rs_\eta(s) \stackrel{def}{=} \{ \langle \eta(A), s(A) \rangle \mid A \in \pi_1^2(s) \}, Rs_\eta(\varepsilon) = \varepsilon. \square$$

Очевидно, что при таком переименовании строк может нарушиться свойство функциональности строк.

Теперь потребуем, чтобы функция переименования атрибутов η имела следующую структуру: зафиксируем инъективную частичную функцию вида

$$\xi: A \xrightarrow{\sim} A \text{ и положим } \eta \stackrel{def}{=} \xi \cup \text{id}_{A \setminus \text{dom} \xi}.$$

Здесь и далее $\text{id}_X: X \rightarrow X$ – диагональ на множестве X (тождественная функция).

Содержательно говоря, атрибуты множества $\text{dom} \xi$ переименовываются, а разности $A \setminus \text{dom} \xi$ – остаются неизменными. Приведенное уточнение отвечает ситуации, когда глобально переименовывается только часть атрибутов таблиц базы данных, а остальные атрибуты остаются неизменными.

Отметим, что $\eta \neq \xi$ при условии тотальности функции ξ .

Определение 11. Схему R назовем ξ -допустимой, если $\xi[R] \cap (R \setminus \text{dom} \xi) = \emptyset$, где $\xi[R] \stackrel{def}{=} \{A \mid \exists B (B \in R \ \& \ \xi(B) \simeq A)\}$ – полный образ схемы R относительно отображения ξ . \square

Здесь и далее \simeq – обобщенное равенство (сильное равенство Клини) [30].

Множество всех таблиц ξ -допустимых схем обозначим через T_ξ . Нетрудно проверить, что при переименовании строк ξ -допустимых схем свойство функциональности не нарушается (см. [13, подраздел 2.14, леммы 2.14.1, 2.14.2]).

Определение 12. Под переименованием, отвечающим инъективной частичной функции переименования атрибутов $\xi: A \xrightarrow{\sim} A$, понимается унарная параметрическая операция Rt_ξ с областью определенности T_ξ , значения которой задаются равенством:

$$Rt_\xi(t) = Rs_\eta[t], \quad t \in T_\xi,$$

где, как и ранее, $\eta = \xi \cup \text{id}_{A \setminus \text{dom} \xi}$, в правой части последнего равенства записан полный образ таблицы-аргумента. \square

Положим по определению

$$\Omega_{P, \Xi} \stackrel{def}{=} \left\{ \cup_R, \cap_R, \setminus_R, \sigma_P, \pi_X, \otimes, \div_{R_2}^{R_1}, Rt_\xi, \sim \right\}_{X, R, R_1, R_2 \subseteq A}^{p \in P, \xi \in \Xi}$$

где P, Ξ – множества параметров (для операций селекции и переименования соответственно).

Определение 13. Частичную (параметрическую) алгебру $\langle T; \Omega_{P, \Xi} \rangle$ назовем табличной алгеброй. \square

Отметим, что деление и пересечение являются производными (по суперпозиции, без использования константных таблиц) относительно других сигнатурных операций (по поводу проблематики взаимной производности сигнатурных операций табличных алгебр см. [7, раздел 4; 13, подраздел 2.17, с. 97-124]).

При рассмотрении таблиц и их схем необходимо учитывать следующие особенности. Пустое множество строк, очевидно, является таблицей; назовем ее *пустой таблицей* и обозначим как t_{\emptyset} .

Поскольку существует единственное именованное множество на паре \emptyset, D – а именно пустое именованное множество ε , то существует и единственная строка схемы $\emptyset - \varepsilon$, т.е. $S(\emptyset) = \{\varepsilon\}$.

Что касается таблиц пустой схемы \emptyset , то их существует две – t_{\emptyset} и $t_{\varepsilon} \stackrel{def}{=} \{\varepsilon\}$. Действительно, $T(\emptyset) = 2^{S(\emptyset)} = \{\emptyset, \{\varepsilon\}\} = \{t_{\emptyset}, t_{\varepsilon}\}$.

Наконец, очевидно, что по непустой таблице ее схема восстанавливается однозначно, а пустой таблице t_{\emptyset} можно приписать любую схему в том смысле, что $t_{\emptyset} \in T(R)$ для любой схемы R (подчеркнем еще раз, что специальная таблица t_{ε} имеет единственную схему – \emptyset).

Последнее утверждение можно записать и в такой форме

$$\forall R_1 R_2 (R_1 \neq R_2 \Rightarrow T(R_1) \cap T(R_2) = \{t_{\emptyset}\}).$$

3. Представления сигнатурных операций табличной алгебры

Основные сигнатурные операции табличных алгебр имеют естественные простые представления в терминах теоретико-множественных конструкций; именно эти представления и позволяют относительно просто перенести свойства полного образа, ограничения, обобщенного прямого произведения и других конструкций на табличный случай.

В следующем утверждении все обозначения используются в смысле монографии [13].

Предложение 1 (о представлениях основных сигнатурных операций табличных алгебр). Операции табличных алгебр имеют следующие представления:

1) $\pi_X(t) = \uparrow X[t]$, где $\uparrow X : S \rightarrow S$, $\uparrow X(s) = s \mid X$ (представление проекции через полный образ таблицы-аргумента относительно ограничения);

2) $t_1 \otimes t_2 = \bar{\cup}[t_1 \times t_2]$, где $\bar{\cup} : S \times S \xrightarrow{\sim} S$, $dom \bar{\cup} = \{ \langle s_1, s_2 \rangle \mid s_1 \approx s_2 \}$, $s_1 \bar{\cup} s_2 = s_1 \cup s_2$ для всех $\langle s_1, s_2 \rangle \in dom \bar{\cup}$ (представление соединения через полный образ декартового произведения таблиц-аргументов относительно частичной операции объединения совместных строк);

3) $C(t) = \prod_{A \in R} D_{A,t}$, где $D_{A,t} \stackrel{def}{=} \{ d \mid \exists s (s \in t \wedge \langle A, d \rangle \in s) \}$ – активный домен атрибута A относительно таблицы t , как и ранее R – схема таблицы t (представление насыщения через обобщенное прямое произведение для индексирования, сопоставляющего атрибуту схемы таблицы-аргумента его активный домен относительно таблицы-аргумента);

4) $Rt_{\xi}(t) = Rs_{\eta}[t]$, где $z \stackrel{def}{=} \xi \cup id_{A \setminus dom \xi}$, $t \in T_{\xi}$ (представление переименования через полный образ таблицы-аргумента относительно переименования строк). \square

Доказательство. Эти представления и доказательства их корректности приведены в монографии [13, раздел 2]: для проекции это [13, подраздел 2.2], для соединения – [13, подраздел 2.7], для насыщения – [13, подраздел 2.1], для переименования – [13, подраздел 2.1]. \square

Итак, установлены представления основных операций табличных алгебр через теоретико-множественные конструкции полного образа, ограничения и (обобщенного) прямого произведения. Подчеркнем еще раз, что наличие этих представлений позволяет получать свойства табличных операций в качестве следствий свойств указанных теоретико-множественных конструкций. Это будет сделано в следующем разделе работы.

4. Основные результаты

Установлены представления сигнатурных операций табличных алгебр: проекции, соединения, насыщения, переименования в терминах полного образа множества относительно ограничения функции, ограничения и (обобщенного) прямого произведения (предложение 1).

5. Заключение

В работе построен содержательный фрагмент теории табличных алгебр. Основная особенность используемой техники заключается, во-первых, в установлении естественных представлений сигнатурных операций этих алгебр в терминах теоретико-множественных конструкций полного образа, ограничения, обобщенного прямого соединения, отношения совместности и, во-вторых, в переносе свойств указанных конструкций на табличный случай.

Такому переносу будет посвящена вторая часть работы.

Это демонстрирует мощь используемого аппарата и, по мнению автора, этот теоретико-множественный аппарат может успешно применяться и в других областях.

Отметим, что применение указанных представлений дало возможность не только исследовать операции табличных алгебр, но и построить так называемую обобщенную табличную алгебру снятием требований конечности схем таблиц, самих таблиц и ограничения односхемности строк одной таблицы.

Отметим также, что многие аспекты реальных табличных систем управления базами данных (например, наличие дубликатов строк в таблицах, агрегатные функции, внешние соединения) не нашли своего отражения в табличных алгебрах, поэтому сама модель требует расширения. Это будет предметом рассмотрения в следующих работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брона Ю.Й. Основні співвідношення в табличних алгебрах // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 1997. – Вип. 3. – С. 143-148.

2. Брона Ю.Й. Оптимізація обчислення запитів у реляційних базах даних // Питання оптимізації обчислень: міжнародна конференція, 6-8 жовтня 1997 р., Київ, ІК ім. В.М. Глушкова НАНУ: праці. – 1997. – С. 45-49.
3. Брона Ю.Й. Умови декомпозиції без втрат у реляційних базах даних // Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях: IV всеукраїнська наукова конференція, 23-25 вересня 1997 р., Львів, Львівський університет: тези. – 1997. – С. 15.
4. Буй Д.Б., Брона Ю.Й. Взаємна незалежність операцій реляційних алгебр // Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях: всеукраїнська наукова конференція, 19-21 вересня 1995 р., Львів, Львівський університет: тези. – 1995. – С. 18.
5. Буй Д.Б., Брона Ю.Й. Операторы замыкания в теории реляционных баз данных // Тезисы докладов XI Международной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Под ред. С.В. Яблонского. – Ульяновск: Изд-во СВНЦ, – 1996. – С. 29-30.
6. Буй Д.Б., Брона Ю.Й. Теоретико-множинні конструкції в теорії реляційних баз даних // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 1996. – Вип. 1. – С. 216-224.
7. Буй Д.Б. Теорія програмних алгебр композиційного типу та її застосування: дисертація доктора фізико-математичних наук: 01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем / Буй Дмитро Борисович. – Київ, 2002. – 365 с.
8. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б. Информационный аспект Case-технологий: основные соотношения в табличных алгебрах // Проблемы программирования. – 1997. – Вып. 1. – С. 5-11.
9. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б. К основаниям теории реляционных баз данных: табличные алгебры. – Киев: Київський університет, 1996. – 105 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ України 11.11.96, №3189УК-96.
10. Редько В.Н., Буй Д.Б. К основаниям теории реляционных моделей баз данных // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 4. – С. 3-12.
11. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б. Реляционные алгебры: операции проекции и соединения // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 89-100.
12. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б. Реляционные алгебры: операции деления и переименования // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 5. – С. 3-15.
13. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. – Київ: Видавничий дім „Академперіодика”, 2001. – 198 с.
14. Codd E.F. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks // Communications of the ACM. – 1970. – Vol. 13, № 6. – P. 377-387.
15. Codd E.F. A Data Base Sublanguage Founded on the Relational Calculus // ACM-SIGFIDET Workshop on Data Description, Access and Control: international

- conference, November 11-12, 1971, San Diego, California: proceedings. – 1971. – P. 35-68.
16. Codd E.F. Normalized Data Base Structure: A Brief Tutorial // ACM-SIGFIDET Workshop on Data Description, Access and Control: international conference, November 11-12, 1971, San Diego, California: proceedings. – 1971. – P. 1-17.
 17. Codd E.F. Further Normalization of Data Base Relational Model // Data Base Systems. – 1972. – P. 33-64.
 18. Codd E.F. Relational Completeness of Data Base Sublanguages // Data Base Systems. – 1972. – P. 65-93.
 19. Codd E.F. Relational Database: A Practical Foundation for Productivity // Communications of the ACM. – 1982. – Vol. 25, № 2. – P. 109-117.
 20. Codd E.F. The Relational Model for Database Management [2-nd edition] – Pearson:Addison-Wesley, 1990. – 538 p.
 21. Редько В.Н. Композиции программ и композиционное программирование // Программирование. – 1978. – №5. – С. 3-24.
 22. Редько В.Н. Основания композиционного программирования // Программирование. – 1979. – №3. – С. 3-13.
 23. Редько В.Н. Семантические структуры программ // Программирование. – 1981. – № 1. – С. 3-19.
 24. Редько В.Н. Основания программологии // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 1. – С. 33-57.
 25. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.
 26. Куратовский К. Топология: В 2 т. – Москва: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
 27. Цаленко М.Ш. Моделирование семантики в базах данных. – Москва: Наука, 1989. – 288 с.
 28. Цаленко М.Ш. Семантические и математические модели баз данных. – Москва: ВИНТИ, 1985. – 207 с.
 29. Риге Ж. Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа // Кибернетический сборник: сборник переводов. – Москва: ИЛ, 1963. – Вып. 7. – С. 129-185.
 30. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. – М.: Мир, 1983. – 256 с.

УДК 517.986.7

Полугруппа оператора интегрирования и его свойства

А. В. Коробская

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Украина

Работа посвящена изучению оператора, который является линейной комбинацией оператора интегрирования и его сопряженного. Для этого несамосопряженного оператора построен локальный узел и вычислена характеристическая функция этого узла. Кроме того, получена полугруппа, инфинитезимальным оператором которой является изучаемый оператор. Найдены собственные функции этого оператора, которые имеют нетривиальный вид.

Ключевые слова: оператор интегрирования, характеристическая функция, полугруппа оператора, собственные функции.

Роботу присвячено вивченню оператора, який є лінійною комбінацією оператора інтегрування та спряженого до нього. Для цього несамоспряженого оператора побудовано локальний вузол й обчислено характеристичну функцію цього вузла. Крім того, отримано півгрупу, інфінітезимальним оператором якої є оператор, що вивчається. Знайдено власні функції цього оператора, які мають нетривіальний вигляд.

Ключові слова: оператор інтегрування, характеристична функція, півгрупа оператора, власні функції.

The article is devoted to the study of the operator, which is a linear combination of integration operator and its conjugate. For this nonselfadjoint operator a local node is build and the characteristic function of this node are calculated. Moreover, the semigroup where the infinitesimal operator is the studied operator, are obtained. Eigenfunctions of this operator which have nontrivial form are found.

Key words: integration operator, characteristic function, semigroup of integration operator, eigenfunctions.

1. Введение

Теория модельных представлений несамосопряженных операторов играет важную роль при изложении новых аналитических подходов к решению задач теории спектральных представлений в области функционального анализа, а также для моделирования некоторых классов неоднородных случайных полей. Так, предпосылками к развитию современных направлений функционального анализа послужили работы по теории характеристических функций [1; 2], функциональных моделей [3], аналитических функций [4], спектральных представлений несамосопряженных операторов [5; 6]. В связи с этим возникает необходимость в изучении различных типов линейных операторов и изучении их характеристических функций.

2. Анализ исследования

В [1; 2] была введена характеристическая функция оператора изометрии, которая впоследствии стала основным элементом спектрального анализа несамосопряженных операторов. Для несамосопряженного оператора аналогом спектрального разложения принято считать треугольную или функциональную модели. Подход, предложенный в [1; 2], привлек внимание достаточно

широкого круга дослідників [6; 7; 8]. Слідуеть відзначити, що оператор, який представляє собою лінійну комбінацію оператора інтегрування і його сопряженого, в даному контексті не вивчається. При цьому, вивчається в роботі оператор, не завжди являється дисипативним і має нетривіальні власні функції, незважаючи на те, що оператор інтегрування власних функцій не має.

3. Постановка задачі

Розширити підхід, запропонований в [2; 6], на оператор інтегрування, обчислити відповідну попу групу оператора, знайти власні функції цього оператора.

4. Розв'язок

Розглянемо в $L^2_{[0;l]}$ оператор виду:

$$B(f) = \alpha \int_x^l f(t) dt + \beta \int_0^x f(t) dt, \quad (1)$$

де $\alpha \in R$, $\beta \in R$.

Оператор B обмежений. Дійсно,

$$\begin{aligned} \|Bf\|^2 &= \int_0^l \left| \alpha \int_x^l f(t) dt + \beta \int_0^x f(t) dt \right|^2 dx = \\ &= \int_0^l \left\langle \alpha \int_x^l f(t) dt + \beta \int_0^x f(t) dt, \overline{\alpha \int_x^l f(t) dt + \beta \int_0^x f(t) dt} \right\rangle dx \leq \\ &\leq \int_0^l \left[\alpha^2 \left| \int_x^l f(t) dt \int_x^l \overline{f(s)} ds \right| + \alpha \beta \left| \int_x^l f(t) dt \int_0^x \overline{f(s)} ds \right| + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \beta \left| \int_0^x f(t) dt \int_x^l \overline{f(s)} ds \right| + \beta^2 \left| \int_0^x f(t) dt \int_0^x \overline{f(s)} ds \right| \right] dx \end{aligned} \quad (2)$$

В силу нерівності $\left| \int_a^b f(t) dt \int_c^d \overline{f(s)} ds \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \int_c^d |f(s)| ds$ з (2) випливає:

$$\|Bf\|^2 \leq \int_0^l \left[\alpha^2 \left(\int_x^l |f(t)| dt \right)^2 + 2\alpha\beta \int_x^l |f(t)| dt \int_0^x |f(s)| ds + \beta^2 \left(\int_0^x |f(t)| dt \right)^2 \right] dx \quad (3)$$

В силу нерівності Коши-Буняковського $|\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \cdot \|g\|^2$, якщо взяти $f = |f(t)|$, $g = 1$, то

$$\left(\int_0^l |f(t)| dt \right)^2 \leq \|f\|^2 \cdot l. \quad (4)$$

В неравенстве (3) оценим каждое слагаемое отдельно с учетом неравенства (4):

$$\int_x^l |f(t)| dt \int_0^x |f(s)| ds \leq \int_0^l |f(t)| dt \int_0^l |f(s)| ds \leq \|f\| \cdot l,$$

$$\left(\int_0^x |f(t)| dt \right)^2 \leq \left(\int_0^l |f(t)| dt \right)^2 \leq \|f\|^2 \cdot l.$$

Объединив полученные результаты, получаем следующую оценку для неравенства (3):

$$\|Bf\|^2 \leq \int_0^l \left[\alpha^2 \|f\|^2 l + 2\alpha\beta \|f\|^2 l + \beta^2 \|f\|^2 l \right] dx = (\alpha + \beta)^2 \|f\|^2 l^2.$$

Т. е. доказано, что $\|Bf\|^2 \leq C^2 \|f\|^2$, где $C = (\alpha + \beta) \cdot l$.

Легко видеть, что сопряженный оператор B^* к B (1) имеет вид:

$$B^* f = -\alpha i \int_0^x f(t) dt - \beta i \int_x^l f(t) dt.$$

Включим оператор B (1) в узел:

$$\Delta = (A, H, \varphi, E, \sigma).$$

Чтобы найти φ , вычислим $\frac{B - B^*}{i}$:

$$\begin{aligned} \frac{B - B^*}{i} f &= \frac{1}{i} \left(\alpha i \int_x^l f(t) dt + \beta i \int_0^x f(t) dt + \alpha i \int_0^x f(t) dt + \beta i \int_x^l f(t) dt \right) = \\ &= (\alpha + \beta) \int_0^l f(t) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Т. е.

$$\frac{B - B^*}{i} f = \varphi^* \sigma \varphi f, \quad (6)$$

где

$$\varphi f = \int_0^l f(t) dt, \quad \varphi: L_{[0;l]}^2 \rightarrow C \text{ и } E = C, \quad (7)$$

а

$$\sigma = \alpha + \beta, \quad (8)$$

и $\varphi^* g = g_x$, где g_x – постоянная на $[0;l]$ функция равная g .

Итак, на основе (5), (6), (7), (8) установлено, что операторный узел для B имеет вид:

$$\Delta = (B, L_{[0;l]}^2, \varphi, C, \sigma = \alpha + \beta) \quad (9)$$

Найдем характеристическую функцию узла (9), которая определена как:

$$S_{\Delta}(\lambda) = I - i\varphi(B - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma.$$

Рассмотрим функцию $f(x)$:

$$f(x) = (B - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma g, \quad (10)$$

где $g \in C$. Тогда

$$\sigma g = (B - \lambda I) f(x) \quad (11)$$

Распишем левую и правую части равенства (11):

$$(\alpha + \beta)g = \alpha i \int_x^l f(t) dt + \beta i \int_0^x f(t) dt - \lambda f(x).$$

Выразим отсюда g :

$$g = \frac{\alpha i \int_x^l f(t) dt + \beta i \int_0^x f(t) dt - \lambda f(x)}{(\alpha + \beta)} \quad (12)$$

Подставим значения $x = l$ и $x = 0$ в (12), тогда получим:

$$\begin{cases} \beta i \int_0^l f(t) dt - \lambda f(l) = (\alpha + \beta)g \\ \alpha i \int_0^l f(t) dt - \lambda f(0) = (\alpha + \beta)g. \end{cases}$$

Отсюда

$$\alpha f_l - \beta f_0 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{-\lambda} g. \quad (13)$$

Продифференцируем уравнение (12) по x :

$$0 = -\lambda f'_x - \alpha i f(x) + \beta i f(x).$$

Выразим f'_x : $f'_x = -i \frac{(\alpha - \beta)}{\lambda} f(x).$

Сделаем замену: $k = -i \frac{(\alpha - \beta)}{\lambda}$, тогда

$$f'(x) = kf(x);$$

$$f(x) = Ce^{kx}. \quad (14)$$

Подставим полученное выражение (14) в (13) и получим:

$$-\lambda(\alpha C f^{kl} - \beta C) = (\alpha^2 - \beta^2)g;$$

$$C = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)g}{-\lambda(\alpha f^{kl} - \beta)}.$$

Тогда с учетом (7), (10), (14) получим:

$$\begin{aligned} S_{\Delta}(\lambda)g &= g - i\varphi f = g - i \int_0^l f(t)dt = g - i \int_0^l C e^{kx} dx = g - \frac{iC}{k}(e^{kl} - 1) = \\ &= g - \frac{(\alpha + \beta)g(e^{kl} - 1)}{\alpha e^{kl} - \beta}. \end{aligned}$$

Т. е. характеристическая функция узла (9) имеет вид:

$$S_{\Delta}(\lambda) = 1 - \frac{(\alpha + \beta)(e^{kl} - 1)}{\alpha e^{kl} - \beta} = \frac{\alpha - \beta e^{kl}}{\alpha e^{kl} - \beta}.$$

С учетом того, что $k = -i \frac{(\alpha - \beta)}{\lambda}$, окончательно получаем представление для $S_{\Delta}(\lambda)$:

$$S_{\Delta}(\lambda) = \frac{\alpha - \beta e^{-i \frac{\alpha - \beta}{\lambda} l}}{\alpha e^{-i \frac{\alpha - \beta}{\lambda} l} - \beta}.$$

Вычислим полугруппу Z_t , отвечающую оператору B .

Пусть задана полугруппа

$$Z_t f(x) = e^{iBt} f(x), \quad (15)$$

отвечающая оператору B (1) и пусть

$$f(x, t) = Z_t f(x) \quad (16)$$

Продифференцировав (16) по t получим

$$f'_t(x, t) = iB(f(x, t)). \quad (17)$$

Если в $f(x, t)$ подставить $t = 0$, то получим функцию, зависящую только от x :

$$f(x, 0) = f(x) \quad (18)$$

Равенство (17) означает, что

$$f'_t(x, t) = -\alpha \int_x^l f(x, \xi) d\xi - \beta \int_0^x f(x, \xi) d\xi \quad (19)$$

Продифференцируем (19) по x :

$$f''_{xt}(x, t) = \alpha f(x, t) - \beta f(x, t) \quad (20)$$

Заметим, что

$$\begin{cases} f'_t(l, t) = -\beta \int_0^l f(x, \xi) d\xi \\ f'_t(0, t) = -\alpha \int_0^l f(x, \xi) d\xi. \end{cases}$$

Умножив первое равенство на α , а второе на $-\beta$ и сложив, получим:

$$\alpha f'_t(l, t) - \beta f'_t(0, t) = 0. \quad (21)$$

Объединяя условия (18), (20) и (21), получаем задачу Коши с начальными краевыми условиями:

$$\begin{cases} f''_{xt}(x, t) = (\alpha - \beta)f(x, t), \\ \alpha f'_t(l, t) - \beta f'_t(0, t) = 0, \\ f(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Решим уравнение (20) методом разделения переменных. Представим $f(x, t)$ в виде:

$$f(x, t) = X(x)T(t). \quad (22)$$

Тогда уравнение (20) будет иметь вид:

$$T'(t)X'(x) = (\alpha - \beta)X(x)T(t). \quad (23)$$

Обозначим $\mu = \alpha - \beta$, тогда (23) примет вид:

$$T'(t)X'(x) = \mu X(x)T(t). \quad (24)$$

Сгруппируем (24) по переменным:

$$\frac{T'(t)}{\mu T(t)} = \frac{X(x)}{X'(x)} = \frac{1}{\lambda}$$

и получим уравнения для функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$T'(t) = \frac{\mu}{\lambda} T(t), \quad (25)$$

$$X'(x) = \lambda X(x). \quad (26)$$

Подставим в (21) представление функции (22), тогда из $\alpha X(l)T'(t) = \beta X(0)T'(t)$ следует, что

$$\alpha X(l) = \beta X(0). \quad (27)$$

Получаем следующую задачу Коши для $X(x)$:

$$\begin{cases} X'(x) = \lambda X(x) \\ \alpha X(l) = \beta X(0). \end{cases}$$

Из (26) следует, что

$$X(x) = Ce^{\lambda x} \quad (28)$$

Подставив (28) в (27) мы сможем найти $\lambda = a + ib$:

$$e^{\lambda l} = e^{la} e^{ilb} = \frac{\beta}{\alpha},$$

Так как $\frac{\beta}{\alpha} \in R$, то $e^{ilb} = 1$, $b = \frac{2\pi n}{l}$.

Найдем теперь вещественную часть a числа λ :

$$e^{la} = e^{\frac{\ln \frac{\beta}{\alpha}}{l}},$$

$$a = \frac{\ln \frac{\beta}{\alpha}}{l}.$$

Т. е.

$$\begin{cases} a = \frac{\ln \frac{\beta}{\alpha}}{l}; \\ b = \frac{2\pi n}{l}. \end{cases} \quad (29)$$

В результате с учетом (29) получаем, что последовательность λ_n равна:

$$\lambda_n = \frac{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ni}{l}. \quad (30)$$

Подставим найденное λ_n (30) в (28) и получим коэффициенты ряда:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n T_n, \quad (31)$$

где

$$X_n(x) = C_n e^{\frac{x}{l} \left(\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ni \right)}. \quad (32)$$

Найдем теперь $T_n(t)$ из условия (25):

$$T(t) = C e^{\frac{\mu}{\lambda} t},$$

$$T_n(t) = C_n e^{\frac{\mu l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ni} t}. \quad (33)$$

Из условия (18) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{x}{l} \left(\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ni \right)} T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{x}{l} \left(\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ni \right)} = f(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{x}{l}} e^{\frac{2\pi ni}{l} x} = f(x).$$

Умножим последнее равенство на $\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{x}{l}}$, получим:

$$f(x) \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{x}{l}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{2\pi ni}{l} x}. \quad (34)$$

Применим к (34) $e^{-\frac{2\pi ki}{l} x l} \int_0^l dx$. При этом, учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{при } k = n, \\ 0, & \text{при } k \neq n, \end{cases}$$

получим:

$$C_n = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{x}{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l}x} dx. \quad (35)$$

Теперь можем выписать разложение функции $f(x, t)$ с учетом равенств (31), (32), (33), (35):

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n T_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_0^l f(\xi) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l}\xi} d\xi \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{2\pi ki}{l}x} e^{\frac{\mu l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki}t} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki}t} e^{\frac{2\pi ki}{l}x} \right] \cdot \left[\int_0^l f(\xi) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l}\xi} d\xi \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Пусть

$$c_k = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki}t} e^{\frac{2\pi ki}{l}x}, \quad (37)$$

$$\tilde{\varphi}_k = \int_0^l f(\xi) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l}\xi} d\xi. \quad (38)$$

Докажем сходимость ряда (36) по норме в $L^2_{[0;l]}$.

Рассмотрим часть ряда (38) и применим теорему Риса-Фишера.

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система функций в $L^2_{[a;b]}$, а последовательность чисел $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, то $\exists f(t) \in L^2_{[a;b]}$ для которой $\int_a^b |f(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$, $c_n = \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt$, $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t)$.

В нашем случае: $c_n = \tilde{\varphi}_k$, $f(t) = \sqrt{l} f(\xi) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}}$, $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l}\xi}$.

Докажем сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^l f(\xi) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l}\xi} d\xi \right|^2 < \infty$.

Очевидно, что $\left\{ \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l} \xi} \right\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная система, т. к.

$$\text{при } n \neq k \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l} \xi}, \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{2\pi ni}{l} \xi} \right\rangle = \frac{1}{l} \int_0^l e^{\frac{2\pi(n-k)i}{l} \xi} d\xi = 0,$$

$$\text{при } n = k \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l} \xi}, \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{2\pi ni}{l} \xi} \right\rangle = \frac{1}{l} \int_0^l d\xi = 1.$$

Т. к. $f(\xi) \in L^2_{[0;l]}$, $\sqrt{l} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{\xi}{l}} \in L^2_{[0;l]}$, то $\exists \sqrt{l} f(\xi) \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{\xi}{l}} \in L^2_{[0;l]}$.

Следовательно, $\exists \sqrt{l} f(\xi) \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{\xi}{l}} \in L^2_{[0;l]}$, что

$$\int_0^l \left| f(\xi) \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{\xi}{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l} \xi} \right|^2 d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{\varphi}_k|^2 < \infty, \quad (39)$$

где $\tilde{\varphi}_k$ имеет вид (38).

Докажем теперь сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \cdot c_k \cdot \tilde{\varphi}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki} t} e^{\frac{2\pi ki}{l} x} \cdot \tilde{\varphi}_k$, где c_k и $\tilde{\varphi}_k$ имеют вид (37) и

(38) соответственно. Для этого покажем, что $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{l} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki} t} \cdot \tilde{\varphi}_k \right|^2 < \infty$.

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{l} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki} t} \cdot \tilde{\varphi}_k \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{l} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{2x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki} t} \right|^2 \cdot |\tilde{\varphi}_k|^2 <$$

$$< \frac{1}{l^2} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{2x}{l}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki} t} \right|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{\varphi}_k|^2 .$$

Очевидно, что $\left| e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki} t} \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$, тогда $\sum_{k=1}^{\infty} \left| e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki} t} \right|^2 \leq C < \infty$.

С учетом (39) следует:

$$\frac{1}{l^2} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{2x}{l}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki} t} \right|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{\varphi}_k|^2 < \infty . \tag{40}$$

Тогда из условия (40) $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{l} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki} t} \cdot \tilde{\varphi}_k \right|^2 < \infty$, а следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki} t} e^{\frac{2\pi ki}{l} x} \cdot \tilde{\varphi}_k \text{ сходитя.}$$

Теорема 1. Полугруппа $Z_t f(x) = e^{iBt} f(x)$ (15), где B имеет вид (1), задается выражением:

$$Z_t f(x) = \frac{1}{l} \int_0^l f(\xi) \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{x-\xi}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ki} t} e^{\frac{2\pi ki}{l} (x-\xi)} d\xi .$$

Найдем собственные функции f_λ (1):

$$Bf_\lambda = \lambda f_\lambda . \tag{41}$$

Распишем левую часть равенства (41) и продифференцируем его по x :

$$\begin{aligned} \alpha i \int_x^l f(t) dt + \beta i \int_0^x f(t) dt &= \lambda f , \\ -\alpha i f + \beta i f &= \lambda f'_x , \end{aligned}$$

$$f'_x = \frac{\beta i - \alpha i}{\lambda} f,$$

$$f = C e^{\frac{\beta i - \alpha i}{\lambda} x}. \quad (42)$$

Зададим краевые условия. Подставим в (41) $x = l$ и $x = 0$:

$$\beta i \int_0^l f(t) dt = \lambda f(l), \quad (43)$$

$$\alpha i \int_0^l f(t) dt = \lambda f(0). \quad (44)$$

Умножим (43) на α и прибавим (44) умноженное на $(-\beta)$, получим следующее краевое условие:

$$\alpha f(l) = \beta f(0). \quad (45)$$

Подставляя (42) в краевое условие (45), получим:

$$\alpha C e^{\frac{(\beta - \alpha)i}{\lambda} l} = \beta C,$$

$$e^{\frac{(\beta - \alpha)i}{\lambda} l} = \frac{\beta}{\alpha},$$

где λ – комплексное число. Представим его в виде $\lambda = a + ib$. Найдем a и b :

$$\frac{\beta}{\alpha} = e^{\frac{(\beta - \alpha)i}{a + ib} l} = e^{\frac{(\beta - \alpha)bl}{a^2 + b^2}} \cdot e^{\frac{(\beta - \alpha)al}{a^2 + b^2} i} = e^{\ln \frac{\beta}{\alpha}}.$$

Отсюда следует:

$$e^{\frac{(\beta - \alpha)bl}{a^2 + b^2}} = e^{\ln \frac{\beta}{\alpha}}, \quad (46)$$

$$e^{\frac{(\beta - \alpha)al}{a^2 + b^2} i} = 1. \quad (47)$$

С учетом равенства $1 = e^{2\pi ni}$ из (46) и (47) следует, что

$$\begin{cases} \frac{(\beta - \alpha)al}{a^2 + b^2} = 2\pi n, \\ \frac{(\beta - \alpha)bl}{a^2 + b^2} = \ln \frac{\beta}{\alpha}. \end{cases} \quad (48)$$

Умножая первое равенство на $\ln \frac{\beta}{\alpha}$, а второе на $(-2\pi n)$, получим:

$$\begin{cases} \ln \frac{\beta}{\alpha} (\beta - \alpha) al - 2\pi m \ln \frac{\beta}{\alpha} (a^2 + b^2) = 0, \\ -2\pi m (\beta - \alpha) bl + 2\pi m \ln \frac{\beta}{\alpha} (a^2 + b^2) = 0. \end{cases}$$

Сложив уравнения системы и преобразовав, получим:

$$\begin{aligned} \ln \frac{\beta}{\alpha} (\beta - \alpha) al - 2\pi m (\beta - \alpha) bl &= 0, \\ a &= \frac{2\pi m b}{\ln \frac{\beta}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (49)$$

Подставим (49) во второе равенство системы (48):

$$\begin{aligned} \frac{(\beta - \alpha) bl}{\left(\frac{2\pi m b}{\ln \frac{\beta}{\alpha}} \right)^2 + b^2} &= \ln \frac{\beta}{\alpha}, \\ b &= \frac{(\beta - \alpha) l \ln \frac{\beta}{\alpha}}{(2\pi m)^2 + \left(\ln \frac{\beta}{\alpha} \right)^2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Для нахождения a подставим (50) в (49):

$$a = \frac{2\pi m (\beta - \alpha) l}{(2\pi m)^2 + \left(\ln \frac{\beta}{\alpha} \right)^2}. \quad (51)$$

Таким образом, с учетом (50) и (51) λ_n имеет вид:

$$\lambda_n = a_n + ib_n = \frac{(\beta - \alpha) l \left(2\pi m + i \ln \frac{\beta}{\alpha} \right)}{(2\pi m)^2 + \left(\ln \frac{\beta}{\alpha} \right)^2}.$$

Тогда, с учетом (42), собственные функции оператора B (1) равны:

$$f_n = C_n e^{\frac{\beta i - \alpha i}{\lambda_n} x} = C_n e^{\frac{(2\pi m)^2 + \left(\ln \frac{\beta}{\alpha} \right)^2}{l \left(\ln \frac{\beta}{\alpha} - 2\pi m i \right)} x} = C_n e^{\frac{\left(\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi m i \right)}{l} x}.$$

Теорема 2. Собственные функции оператора $B(f) = \alpha i \int_x^l f(t) dt + \beta i \int_0^x f(t) dt$

имеют вид:

$$f_n(x) = C_n e^{\frac{\left(\ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\pi n i\right)}{l} x}.$$

5. Выводы

Предложенный в статье операторный подход реализован для получения полугруппы оператора $B(f) = \alpha i \int_x^l f(t) dt + \beta i \int_0^x f(t) dt$, который является линейной комбинацией оператора интегрирования и его сопряженного. Такой оператор включен в узел, вычислена его характеристическая функция, найдены собственные функции этого оператора, которые имеют нетривиальный вид. Результаты статьи могут служить основой для получения новых модельных представлений операторов, а также для построения спектральных разложений некоторых классов нестационарных случайных функций и получения модельных представлений для корреляционных функций нестационарных случайных процессов, которые можно использовать для обработки статистических данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М. С. Операторы колебания волны. Открытые системы / М. С. Лившиц. – М., 1966. – 298 с.
2. Лившиц М. С. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах / М. С. Лившиц, А. А. Янцевич. – Х. : Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 160 с.
3. Надь Б. С. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве / Б. С. Надь, Ч. Фояш. – М. : Мир, 1970. – 431 с.
4. Гарнет Дж. Ограниченные аналитические функции / Дж. Гарнет. – М. : Мир, 1984. – 496 с.
5. Бородский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов / М. С. Бородский. – М. : Наука, 1969. – 287 с.
6. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов / В. А. Золотарев. – Х. : [ХНУ], 2003. – 342 с.
7. Бородский М. С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы / М. С. Бородский, М. С. Лившиц // УМН, 1958. – XII, 1/79. – С. 3-86.
8. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига / Н. К. Никольский. – М. : Наука, 1980. – 383 с.

УДК 519.876.5

Математичне моделювання змочування ґрунту на схилі в умовах багатоконпонентного неізотермічного солеперенесення

Т. В. Кутя

*Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне, Україна*

У статті побудовано двовимірну математичну модель процесу насичення ґрунту вологою при врахуванні дії додаткових факторів: змінної температури, хімічного порового розчину, засоленості ґрунту та нелінійності коефіцієнта фільтрації. Відповідну крайову задачу розв'язано безсітковим методом радіальних базисних функцій з використанням методу колокації в точці. Проведено аналіз числових експериментів.

Ключові слова: насичення, метод радіальних базисних функцій, багатоконпонентний солевий розчин, тепломасоперенесення, загіпсовані ґрунти.

В статье построено двумерную математическую модель процесса насыщения грунта влагой при учете действия дополнительных факторов: сменной температуры, химического порового раствора, засоленности почвы и нелинейности коэффициента фильтрации. Соответствующую краевую задачу решено бессеточным методом радиальных базисных функций с применением метода коллокации в точке. Проведен анализ численных экспериментов.

Ключевые слова: насыщение, метод радиальных базисных функций, многокомпонентный солевой раствор, теплосолеперенос, загипсованные грунты.

The article deals with the construction of two-dimensional mathematical model of soil moisture saturation taking into account the additional factors, such as the existence of heat, chemical pore solution, soil salinity and nonlinearity of filtration coefficient. The corresponding boundary value problem was solved by meshfree radial basis function method using point collocation method. The analysis of numerical experiments was provided.

Key words: saturation, radial basis functions method, multicomponent salt solution, heat and salt transfer, gypseous soil.

1. Загальна постановка задачі та її актуальність

Серед екзогенних геологічних процесів, що спостерігаються в межах України, зсуви відносяться до найпоширеніших і найбільш небезпечних. Згідно з регіональним картуванням зсувів та створеним за цими роботами кадастром, в межах України виділено більше 20000 зсувних геосистем [1], а нещодавно через зсуви схили Дніпра оголошені надзвичайною зоною. Під впливом господарської діяльності активність зсувних процесів схилів за останні 20 – 25 років значно зросла. Згідно з міжнародною статистикою до 80% зсувів у наш час пов'язано з діяльністю людини [2].

Зсув – це зміщення гірських порід, земляних мас вниз по схилу під дією власної ваги, поверхневих та підземних вод, а також у зв'язку з атмосферним та сейсмічним впливом. Практичне значення прогнозу зсувних зміщень особливо важливе тому, що протизсувні заходи при сучасному стані техніки коштують дорого і їх застосування економічно виправдане не всюди. Міри ж по попередженню зсувів часто більш прості і рентабельні, ніж міри по закріпленню

зсувів, які вже виникли і систематично зміщуються. Вивченню зсувних процесів з точки зору фізики та механіки їх виникнення і протікання присвячено роботу [3]. Математичним моделюванням зсувів займалися В.В. Скопечкий, Ю.Г. Кривоніс, М.Е. Егліт, С.С. Григорян та інші [4-6].

Наявність витоків з водонесучих комунікацій є однією з причин значного поширення зсувів, що при взаємодії з іншими природними факторами може призвести до досягнення схилом граничного стану і подальшого його зміщення.

Завдання статті – дослідити процес промочування ґрунту з аварійної ділянки труби, що може бути частиною водопроводу, тепломагістралі або каналізаційної мережі та представляє собою ненапірне джерело вологи і може знаходитися у засоленому (як частковий випадок, у загіпсованому) ґрунті.

У зв'язку з невеликою глибиною закладання водонесучих комунікацій у разі аварії витік буде здійснюватись у поверхневий ґрунтовий шар, що разом з природними факторами може стати причиною поверхневих зсувів, які значною мірою залежать від ступеня вологонасичення ґрунту [7].

Такі аварії також небезпечні через їхню тривалість у часі. Це пов'язане з тим, що виток з комунікацій, що несуть воду під тиском (водопровід, тепломережі) швидко проявляються на поверхні ґрунту і перерви у водопостачанні вимагають швидкого ремонту. Виток з каналізаційних безнапірних, низьконапірних комунікацій (наприклад, через стики труб) не виявляються роками, бо не виходять на поверхню ґрунту.

Так, протік водопроводу став причиною масштабного зсуву у Дніпропетровську 2011р., який поховав під собою гаражний комплекс і тимчасово вивів з ладу систему водопостачання.

Закон Дарсі-Клюта швидкості фільтрації (вологоперенесення) є одним із найбільш відомих в теорії ненасичених пористих середовищ [8]. Однак у якості порової рідини там розглядається чиста вода. У природних умовах у поровій рідині присутні компоненти різних солей, які можуть вступати у взаємодію з хімічними речовинами, що містяться у ґрунті. Це призводить до необхідності розгляду багатокомпонентного хімічного розчину як порової рідини, що є однією із цілей статті.

2. Математична модель задачі

Розглянемо ґрунтовий схил – область Ω (рис. 1). У товщі ґрунту знаходиться трубопровід, на ділянці якого стався прорив. Довжина цієї ділянки вважається настільки великою, що поперечна фільтрація є досить несуттєвою. Отже, задачу можна розглядати як двовимірну. В результаті прориву відбувається змочування ґрунту схилу деяким хімічним розчином з температурою, відмінною від температури ґрунту. Завдання полягає у визначенні динаміки зміни області насичення з часом. Сам ґрунт є засоленим, тому є потреба розглядати процеси переносу багатокомпонентних хімічних розчинів [9, 10].

Математична модель двовимірної задачі вологоперенесення в ґрунтовому схилі з урахуванням переносу n -компонентного сольового розчину в неізотермічних умовах має вигляд:

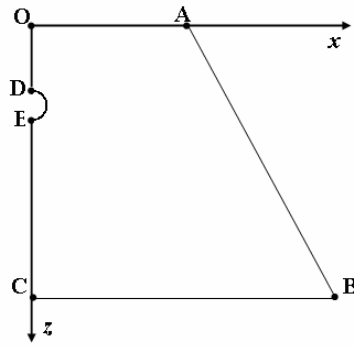


Рис. 1. Область розв'язання задачі

$$\frac{\partial s(x, z, t)}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\mathbf{D}(s, c, T) \nabla s - \frac{1}{\theta_{\max} - \theta_{\min}} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^{(c)} \nabla c_i + \mathbf{K}^{(T)} \nabla T + \mathbf{K}(s, c, T) \nabla z \right) \right] \quad (1)$$

$$\sigma s \frac{\partial c_i(x, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial t} = \operatorname{div}(\mathbf{D}_i^{(c)} \nabla c_i) + \operatorname{div}(\mathbf{D}_i^{(T)} \nabla T) - \bar{\mathbf{v}} \nabla c_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (2)$$

$$\frac{\partial N_i(x, z, t)}{\partial t} = \gamma_i (c_i - C_i^*) N^{\alpha_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

$$\left[\rho C_p s + \rho_{sk} C_{sk} (1 - \sigma) \right] \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\mathbf{K} \nabla T) - \rho C_p \bar{\mathbf{v}} \nabla T, \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = -\mathbf{D}(s, c, T) \nabla s (\theta_{\max} - \theta_{\min}) + \mathbf{K}(s, c, T) \nabla z + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^{(c)} \nabla c_i + \mathbf{K}^{(T)} \nabla T, \quad (5)$$

де $s = \frac{\theta - \theta_{\min}}{\theta_{\max} - \theta_{\min}}$, $0 \leq s \leq 1$ - функція насиченості, що виражена через об'ємну

вологість $\theta = \frac{V_g}{V}$, (V_g - об'єм рідини в елементі ґрунту загальним об'ємом V);

$\mathbf{D}(s, c, T)$ - проникність ґрунтової вологи (може розглядатися як нелінійний коефіцієнт дифузії); $\mathbf{K}(s, c, T)$ - коефіцієнт гідравлічної проникності ненасиченого середовища, що перетворюється у коефіцієнт фільтрації при повному насиченні; θ_{\max} - значення максимальної вологості; θ_{\min} - залишкова (мінімальна) вологість (або кількість рідини, яка залишається в ґрунті після повного осушення природним шляхом); $\mathbf{K}_i^{(c)}$, $\mathbf{K}^{(T)}$ - коефіцієнти хімічного та термічного осмосів, які мають тензорний характер; σ - пористість ґрунтового середовища; c_i - концентрація солі в рідкій фазі i -ої компоненти; $i = \overline{1, n}$, n - кількість компонентів сольового розчину; $\mathbf{D}_i^{(c)}$ - коефіцієнти (тензори) конвективної дифузії; $\mathbf{D}_i^{(T)}$ - коефіцієнти (тензори) термічної дифузії; $\bar{\mathbf{v}}$ -

вектор швидкості фільтрації; $N_i(x, z, t)$ - концентрація солей у твердій фазі для i -ої компоненти; γ_i - коефіцієнти швидкості масообміну для кожного компонента; C_i^* - концентрація граничного насичення в рідкій фазі; α_i - параметр, що визначається експериментальним шляхом; T - температура; ρ - густина порового розчину; C_p - питома теплоємність порового розчину; ρ_{sk} - густина скелету ґрунту; C_{sk} - питома теплоємність скелету; λ - коефіцієнт (тензор) теплопровідності вологого ґрунту.

Рівняння (1) описує зміну за часом насичення ґрунту деяким сольовим розчином з температурою, відмінною від температури ґрунту. Виведення рівняння (1) відрізняється від класичної теорії вологоперенесення [11-13] використанням закону (5). У свою чергу, в залежності (5), що є узагальненим законом Дарсі-Клюта на випадок руху сольових розчинів в неізотермічних умовах, враховано явища хімічного та термічного осмосу [14, 15], залежність $\mathbf{D}(s, c, T)$ та $\mathbf{K}(s, c, T)$ від насичення вологою, концентрації порового розчину хімічними речовинами та температури. Рівняння (2) описує зміну теплового режиму, а (3) та (4) – зміну сольового режиму у пористому середовищі у рідкій та твердій фазі відповідно.

На початок дослідження (в момент часу $t = 0$) вважаємо, що на всій досліджуваній області ґрунт сухий ($\theta_0 = \theta_{\min}$) і відома насиченість

$$s(x, z, 0) = s_0(x, z), (x, z) \in \bar{\Omega}. \quad (6)$$

Задано початкову концентрацію солей у твердій та рідкій фазі, а також температуру:

$$c_i(x, z, 0) = c_0^i(x, z), N_i(x, z, 0) = N_0^i(x, z), (x, z) \in \bar{\Omega}, \quad (7)$$

$$T(x, z, 0) = T_0(x, z), (x, z) \in \bar{\Omega}. \quad (8)$$

Також на ділянці контакту з атмосферою значення насиченості $s(x, z, t)$ вважаємо відомим.

$$s(x, z, t) \Big|_{OA \cup AB} = s_1(x, z, t), (x, z) \in OA \cup AB, t > 0. \quad (9)$$

На непроникній ділянці CB маємо граничну умову другого роду:

$$\left(-\mathbf{D}(s, c, T) \frac{\partial s(x, z, t)}{\partial z} \right) \Big|_{CB} = 0, (x, z) \in CB, t > 0. \quad (10)$$

Ділянка $OE \cup DC$ є віссю симетрії

$$\frac{\partial s(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{OE \cup DC} = 0, (x, z) \in OE \cup DC, t > 0. \quad (11)$$

На ділянці ED (що моделює ділянку прориву труби) маємо повну насиченість ґрунту вологою, тому

$$s(x, z, t) \Big|_{ED} = 1, (x, z) \in ED, t > 0. \quad (12)$$

Граничні умови для концентрацій солей наступні:

$$\begin{aligned}
c_i(x, z, t) \Big|_{OA \cup AB \cup CB} &= c_1^i(x, z, t), \quad (x, z) \in OA \cup AB \cup CB, t > 0, \\
\frac{\partial c_i(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{OE \cup DC} &= 0, \quad (x, z) \in OE \cup DC, t > 0, \\
c_i(x, z, t) \Big|_{ED} &= C_i^*, \quad (x, z) \in ED, t > 0;
\end{aligned} \tag{13}$$

а для температури:

$$\begin{aligned}
T(x, z, t) \Big|_{OA \cup AB \cup CB} &= T_1(x, z, t), \quad (x, z) \in OA \cup AB \cup CB, t > 0. \\
\frac{\partial T(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{OE \cup DC} &= 0, \quad (x, z) \in OE \cup DC, t > 0, \\
T(x, z, t) \Big|_{ED} &= T^*, \quad (x, z) \in ED, t > 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Тут $s_0(x, z), c_0^i(x, z), T_0(x, z), N_0^i(x, z), s_1(x, z, t), c_1^i(x, z, t), T_1(x, z, t)$ - задані функції; T^*, C_i^* - задані значення максимальної температури та концентрації відповідно.

Для обчислення нелінійних функцій $D(s, c, T)$ та $K(s, c, T)$ можна використовувемо такі емпіричні залежності, як модель Brooks-and-Correy, модель Mualem–Van Genuchten тощо [11, 12, 16]. Існують також інші залежності для коефіцієнтів дифузії та гідравлічної провідності, деякі з яких наведено в [12, 17, 18].

3. Числове розв'язання задачі

Для розв'язання крайової задачі (1)-(14) застосуємо метод колокації в точці [19] з використанням радіальних базисних функцій (РБФ) [20-22]. Цей метод не потребує покриття області геометричною сіткою, а лише множиною вузлів, де не потрібно встановлювати зв'язки між останніми. Покриємо замикання області $\bar{\Omega}$ колокаційними точками $(x_j, z_j), j = \overline{1, M}$, де точки з номерами з множини ω_γ лежать на межі, а з номерами з множини ω - в області Ω . Множина вузлових точок $(x_i, z_i), i = \overline{1, M}$ всередині області Ω та на межах, де задані граничні умови першого роду ($OA \cup AB$), співпадає з множиною колокаційних точок. На межах, де задаються граничні умови другого роду, виносимо вузлові точки за межі області для покращення точності методу. Вимагаємо, щоб в точках D та E були розміщені колокаційні точки.

Наближені значення невідомих функцій шукаємо у вигляді:

$$s(x, z, t) \approx \sum_{j=1}^M \alpha_{s_j}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_s), \tag{15}$$

$$c_i(x, z, t) \approx \sum_{j=1}^M \alpha_{c_j}^{(i)}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_{c_i}), \quad i = \overline{1, n}, \tag{16}$$

$$N_i(x, z, t) \approx \sum_{j=1}^M \alpha_{N_j}^{(i)}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_{N_i}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (17)$$

$$T(x, z, t) \approx \sum_{j=1}^M \alpha_{T_j}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_T) \quad (18)$$

де $\alpha_{s_j}(t), \alpha_{c_j}^{(i)}(t), \alpha_{N_j}^{(i)}(t), \alpha_{T_j}(t)$, ($j = \overline{1, M}$) – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу; $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$, $j = \overline{1, M}$ – відомі РБФ з центром в точці (x_j, z_j) ; $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (z - z_j)^2}$ – відстань до вузла j ; $\varepsilon_s > 0$, $\varepsilon_{c_i} > 0$, $\varepsilon_{N_i} > 0$, $\varepsilon_T > 0$ – параметри форми.

Підставляючи наближені розв'язки (15)-(18) в рівняння (1)-(4), початкові (6)-(8) та граничні умови (9)-(14), а точку (x, z) послідовно покладаючи рівною кожній колокаційній точці (x_i, z_i) , $i = \overline{1, M}$, отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих

$$\mathbf{b}_s(t) = \left\{ \alpha_{s_j}(t) \right\}_{j=1}^M, \quad \mathbf{b}_{c_i}(t) = \left\{ \alpha_{c_j}^{(i)}(t) \right\}_{j=1}^M, \quad \mathbf{b}_T(t) = \left\{ \alpha_{T_j}(t) \right\}_{j=1}^M, \\ \mathbf{b}_{N_i}(t) = \left\{ \alpha_{N_j}^{(i)}(t) \right\}_{j=1}^M :$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \frac{d\mathbf{b}_s(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(1)} \mathbf{b}_s(t) = \mathbf{F}^{(1)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{b}_{c_i}(t) + \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{b}_T(t), \quad (19)$$

$$\mathbf{M}_i^{(2)} \frac{d\mathbf{b}_{c_i}(t)}{dt} + \mathbf{L}_i^{(2)} \mathbf{b}_{c_i}(t) = \mathbf{F}_i^{(2)} + \mathbf{R}_i^{(2)} \mathbf{b}_T(t), \quad i = \overline{1, n} \quad (20)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \frac{d\mathbf{b}_T(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(3)} \mathbf{b}_T(t) = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (21)$$

$$\mathbf{M}_i^{(4)} \frac{d\mathbf{b}_{N_i}(t)}{dt} = \mathbf{F}_i^{(4)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \mathbf{b}_s^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}_i^{(2)} \mathbf{b}_{c_i}^{(0)}(t) = \tilde{\mathbf{F}}_i^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \mathbf{b}_T^{(0)}(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}_i^{(4)} \mathbf{b}_{N_i}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}_i^{(4)}, \quad (23)$$

$$\text{де} \quad \mathbf{b}_s^{(0)} = \left\{ a_{s_j}(0) \right\}_{j=1}^M, \quad \mathbf{b}_{c_i}^{(0)} = \left\{ a_{c_j}^{(i)}(0) \right\}_{j=1}^M, \quad \mathbf{b}_T^{(0)} = \left\{ a_{T_j}(0) \right\}_{j=1}^M,$$

$$\mathbf{b}_{N_i}^{(0)} = \left\{ a_{N_j}^{(i)}(0) \right\}_{j=1}^M, \quad \mathbf{M}^{(k)} = \left\{ m_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1}^M, \quad \mathbf{F}^{(k)} = \left\{ f_i^{(k)} \right\}_{i=1}^M, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \left\{ \tilde{f}_i^{(k)} \right\}_{i=1}^M,$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \left\{ \tilde{m}_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1}^M, \quad k = \overline{1, n+2}, \quad \mathbf{L}^{(k)} = \left\{ l_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1}^M, \quad k = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{R}^{(k)} = \left\{ r_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1}^M,$$

$$k = \overline{1, 2}, \quad \mathbf{P}^{(i)} = \left\{ p_j^{(i)} \right\}_{j=1}^M, \quad i = \overline{1, n}.$$

Визначення всіх елементів матриць та вектор-стовпців в (19)-(23) є однотипним і здійснюється за шаблоном методу колокації в точці. Тому для

зменшення громіздкості викладок наведемо такі формули лише для системи рівнянь (21). Маємо

$$m_{ij}^{(3)} = \begin{cases} [\rho C_{\rho s}(x_i, z_i) + \rho_{sk} C_{sk}(1 - \sigma)] \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i \in \omega; \\ 0, & i \in \gamma; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -\lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial z^2} \right) + \\ + \rho C_{\rho} \left(v_x \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x} + v_z \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial z} \right), & i \in \omega; \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i \in OA \cup AB \cup CB \cup ED; \\ \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x}, & i \in OE \cup DC; \end{cases}$$

$$f_i^{(3)} = \begin{cases} 0, & i \in \omega; \\ T_1(x_i, z_i), & i \in OA \cup AB \cup CB; \\ 0, & i \in OE \cup DC; \\ T_D(x_i, z_i), & i \in ED; \end{cases}$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(3)} = \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \quad i = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, M}; \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(x_j, z_j), \quad i = \overline{1, M}.$$

Для числового розв'язання задачі Коші (19)-(23) поділимо часовий проміжок $[0; t_0]$ на m однакових частин з кроком $\tau = \frac{t_0}{m}$. Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь можна знайти, наприклад, за допомогою лінеаризованої чисто неявної різницевої схеми [15]

$$\mathbf{M}^{(1)} \frac{\mathbf{\sigma}_s^{(k+1)} - \mathbf{\sigma}_s^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(1)} \mathbf{\sigma}_s^{(k+1)} = \mathbf{F}^{(1)}(t_{(k+1)}) + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{\sigma}_{c_i}^{(k)} + \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{\sigma}_T^{(k)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (24)$$

$$\mathbf{M}_i^{(2)} \frac{\mathbf{\sigma}_{c_i}^{(k+1)} - \mathbf{\sigma}_{c_i}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}_i^{(2)} \mathbf{\sigma}_{c_i}^{(k+1)} = \mathbf{F}_i^{(2)}(t_{(k+1)}) + \mathbf{R}_i^{(2)} \mathbf{\sigma}_T^{(k+1)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (25)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \frac{\mathbf{\sigma}_T^{(k+1)} - \mathbf{\sigma}_T^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(3)} \mathbf{\sigma}_T^{(k+1)} = \mathbf{F}^{(3)}(t_{(k+1)}), \quad (26)$$

$$\mathbf{M}_i^{(4)} \frac{\mathbf{N}_i^{(k+1)} - \mathbf{N}_i^{(k)}}{\tau} = \mathbf{F}_i^{(4)}(t_{(k+1)}), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m-1}. \quad (27)$$

Тут верхніми індексами позначені значення матриць та векторів на відповідному часовому шарі. Рівняння (27) є результатом лінеаризації за Ньютоном різницевої схеми для системи нелінійних рівнянь (22), що відповідає рівнянню кінетики масообміну (3), де

$$\mathbf{F}_i^{(4)}(t_{(k+1)}) = \frac{\partial L_i}{\partial N_i} (\mathbf{N}_i^{(k)}) (\mathbf{N}_i^{(k+1)} - \mathbf{N}_i^{(k)}) + \mathbf{L}(\mathbf{N}_i^{(k)}).$$

4. Результати числових експериментів та їх аналіз

Експеримент 1. Розглянемо задачу вологоперенесення в ґрунтовому схилі (див. рис.1), коли з труби діаметром 0,3 м в безнапірному режимі витікає чиста вода.

Вхідні дані:

$$OA = 6 \text{ м}; \quad OD = 2 \text{ м}; \quad EC = 8 \text{ м}; \quad CB = 10 \text{ м}.$$

$$\sigma = 0,4; \quad k_s = 1 \frac{\text{м}}{\text{доба}}; \quad s_0 = 0,1; \quad s_1 = 0,1.$$

$$\theta_{\min} = 0,153; \quad \theta_{\max} = 0,250; \quad \psi_b = -0,2; \quad \lambda_h = 1; \quad c = 1,7.$$

Тут k_s - сталий коефіцієнт фільтрації. Процес досліджувався протягом $t_0 = 30$ діб з кроком по часу $\tau = 1$ доба. РБФ – мультикватрична з параметром форми $\varepsilon = 5$. Область покриваємо 196 вузловими точками і такою ж кількістю колокаційних.

Як результат (рис. 2, а), область повного насичення ґрунту вологою невелика і знаходиться близько прориву, тоді як область часткового насичення, відмінного від природного стану ґрунту, значна і йде вглиб схилу, що говорить про вплив сили тяжіння на перенесення вологи. Відмітимо, що зміни, пов'язані з насиченням ґрунту вологою, на поверхні схилу не помітні.

Експеримент 2. Нехай прорив стався в каналізаційній трубі і в ґрунт надходять стічні води. Включаємо в розрахунок концентрацію кам'яної солі в рідкій фазі в розчині, що надходить з труби. Вважаємо, що на початок дослідження в поровій рідині є домішки NaCl, а тверда фаза відсутня. Значення коефіцієнта фільтрації беремо з експерименту 1 і вважаємо сталим. Вхідні дані для рівняння масопереносу солі:

$$\gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}; \quad K_1^{(c)} = 2,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{град} \cdot \text{доба}}; \quad D_1^{(c)} = 0,5 \frac{\text{м}^2}{\text{доба}};$$

$$C_i^* = 50 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad c_0^{(1)} = 5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

На рис. 2, б видно, що концентрація солі в рідині, що витікає, не має значного впливу на поширення вологи і діє лише за рахунок хімічного осмосу, а коефіцієнт фільтрації не залежить від концентрації солей.

Експеримент 3. Розглянемо випадок, коли в ґрунті знаходиться труба тепломагістралі і внаслідок аварії з неї витікає чиста тепла вода. Коефіцієнт фільтрації сталий. Вхідні дані:

$$\rho_{sk} = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad c_\rho = 4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{м} \cdot \text{град}}; \quad c_{sk} = 836 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{град}};$$

$$\lambda = 108 \frac{\text{кДж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}; \quad K^{(T)} = 2,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{град} \cdot \text{доба}}; \quad T^* = 70 \text{ }^\circ\text{C}; \quad T_0 = 4 \text{ }^\circ\text{C}.$$

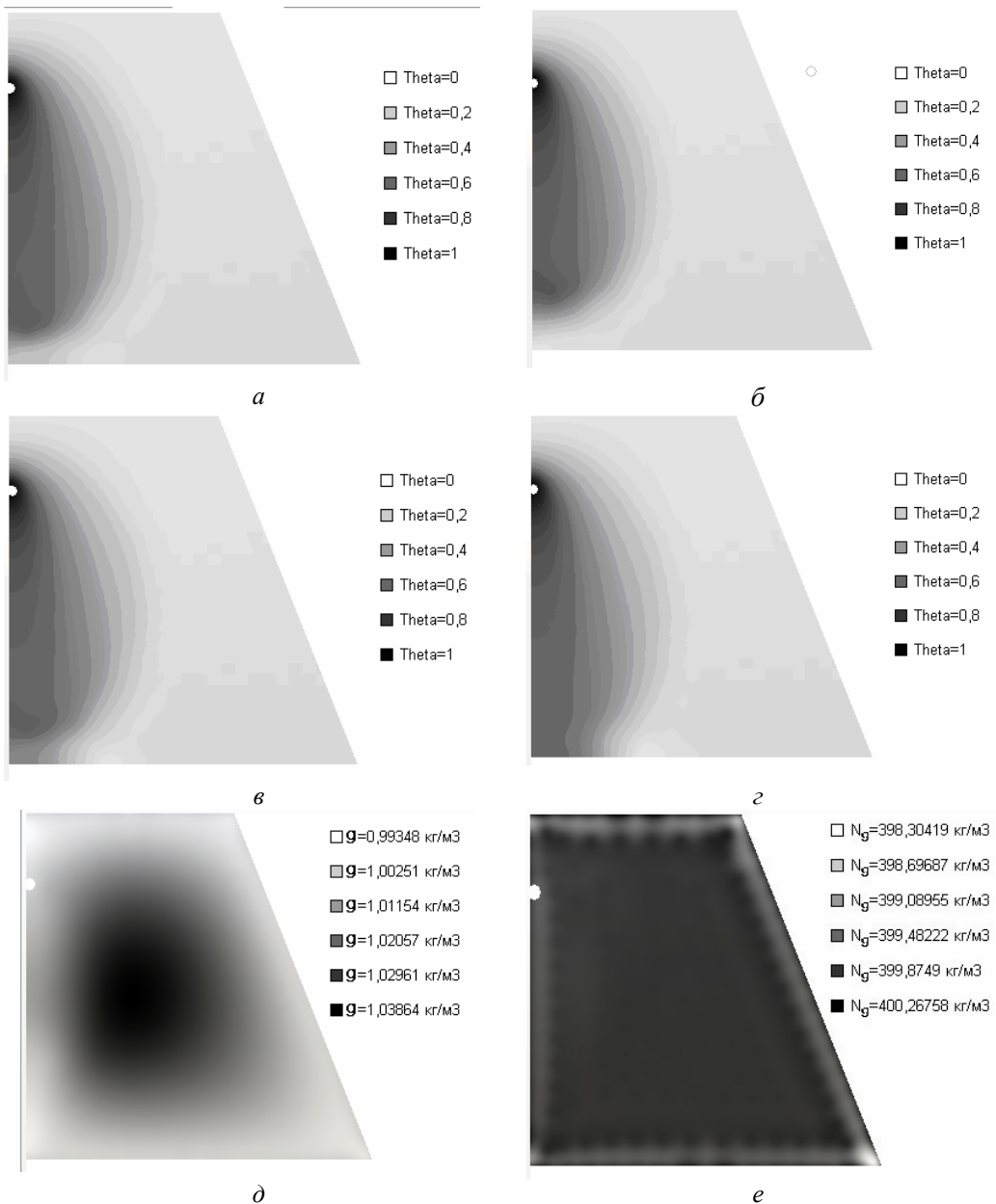


Рис. 2. Графічне представлення результатів експериментів

Як видно з рис. 2, в наявність поля температури зумовлює краще поширення вологи і збільшення площі зволоженого ґрунту.

Експеримент 4. Нехай внаслідок прориву з труби витікає тепла вода з розчином солі. Вхідні дані такі самі, як в експерименті 2 і 3. Залежність коефіцієнта фільтрації $K(c, T)$ від температури та концентрації солі апроксимуємо, використовуючи метод РБФ з експериментальними даними, взятими з монографії [15].

Сумісне врахування температури і концентрації рідини, що надходить з труби (рис. 2, *з*), помітно змінює картину зволоженості ґрунту, що важливо при моделюванні вологоперенесення, адже область часткового насичення ґрунту, відмінного від мінімального, значно ширша.

Експеримент 5. Нехай ґрунт досліджуваного схилу загіпсований на 20%, тобто $N_0^{(g)} = 400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ [23]. З труби витікає розчин кам'яної солі концентрацією

C_1^* з температурою T^* . Для апроксимації залежності $C_2^*(c, T)$ використаємо метод РБФ з експериментальними даними взятими з [24]. Решта вхідних даних наступна:

$$\gamma_2 = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ доба}^{-1}; \quad \alpha = 0,5; \quad K_2^{(c)} = 2,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{град} \cdot \text{доба}}.$$

Процес розчинення гіпсу дуже повільний (рис. 2, *д*, *е*), але за час експерименту вже помітний приріст насиченості і зменшення загіпсованості ґрунту в області з більшою насиченістю. Можна прогнозувати, що з часом за рахунок розчинення гіпсу область насиченого ґрунту буде розширюватися.

5. Висновки за результатами і напрямки подальших досліджень

Отже, у статті побудовано і досліджено математичну модель вологоперенесення у ненасиченому ґрунті в результаті пробою у водонесучій комунікації, враховуючи вплив багатоконпонентного хімічного розчину та температури. Розв'язана відповідна крайова задача безсітковим методом радіальних базисних функцій.

Аналіз чисельних експериментів показав значну тривалість процесу змочування ґрунту вологою з ненапірного джерела та непомітність протікання цього процесу на поверхні, що може спричинити значні труднощі у виявленні та запобіганні аварії. Ефект на поширення вологи від дії температури є найбільшим з усіх факторів. Розчинення деяких солей підвищує осмотичний потенціал порового розчину і, в такому випадку, волога поширюється нерівномірно. Також взаємодія декількох компонентів солей (хлоридів, сульфатів, гідрокарбонатів) може спричиняти покращення чи погіршення властивостей ґрунту та його структури, зокрема і зміну коефіцієнта вологоперенесення. Експерименти показують, що одночасний вплив тепло-солеперенесення не можна подати у вигляді суперпозиції окремо взятих процесів. Тому усі ці фактори необхідно враховувати при будівництві об'єктів чи розрахунку стійкості схилів.

У подальшому планується вирішення відповідної тривимірної крайової задачі та застосування до цієї моделі інших чисельних методів розв'язання рівнянь у частинних похідних.

ЛІТЕРАТУРА

1. Угненко Е.Б., Тимченко О.Н. Математическая модель прогнозирования возникновения ґрунтовых оползней // Вестник ХНАДУ. – 2010. – № 49. – С. 72-74.

2. Безпека життєдіяльності: Підручник / Под. ред. О.І. Запорожець. – К.: «Центр учбової літератури», 2013. – 448 с.
3. Емельянова Е.П. Основные закономерности оползневых процессов. – М.: Недра, 1972. – 308 с.
4. Кривонос Ю.Г., Скопецкий В.В. Математическое моделирование процессов формирования грунтовых и снеговых оползней // Прикладна гідромеханіка. – 2003. – Т. 5 (77). - № 1. – С. 36-41.
5. Эглит М.Э. Неустановившиеся движения в руслах и на склонах. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. - 96 с.
6. Математическое моделирование горных обвалов и оползней больших объемов / С.С. Григорян, Н.Н. Нилов, А.В. Остроумов, В.С. Федоренко // Инженерная геология. -1983. - №6. - С. 61-73.
7. Соколовська В.А. Фактори розвитку небезпечних інженерно-геологічних процесів в межах забудованих територій міст України // Містобудування та терит. планув. – 2004. – Вип. 19. – С. 226-231.
8. Шейдеггер А.Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. – М.: Гостоптехиздат, 1960. – 250 с.
9. Бомба А.Я., Сафоник А.П. Числово-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених задач процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень // Вісник ХНУ. Серія Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2012. - № 1037. – С. 18-27.
10. Мічута О.Р. Математичне моделювання впливу багатокомпонентних хімічних розчинів та неізотермічних умов на процеси консолідації ґрунтів в двовимірному випадку // Математичне та комп'ютерне моделювання. – 2012. – Вип. 6. – Сер. Технічні науки. – С. 143-153.
11. Caputo J.-G., Stepanyants Y. A. Front Solutions of Richards' Equation. // Transport in Porous Media. – 2007. – V. 74, Issue 1. – P. 1-20.
12. Feike J. Leij, Walter B. Russell, Scott M. Lesch Closed Form Expressions for Water Retention and Conductivity Data // Ground Water. – 1997. – Vol. 35, No 5. – P. 848 – 858.
13. Вабищевич П.Н. Математическое моделирование промачивания зоны аэрации в условиях близкого залегания грунтовых вод / П.Н. Вабищевич, А.О. Данияров // Математическое моделирование. – 1994. - Т. 6. - № 11. - С. 11-24.
14. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах. – Рівне: НУВГП, 2008. – 416с.
15. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіально-базисних функцій: Монографія. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с.
16. Громадченко Т.В., Мартинюк П.М., Пашенко А.В. Математичне моделювання промочування сухого ґрунту в результаті аварії безнапірного водопроводу // Вісник ОДАБА. – 2012. - № 48, Ч.1. – С. 103 – 111.

17. W. Scott Sillers, Delwyn G. Fredlund. Statistical assessment of soil-water characteristic curve models for geotechnical engineering. – Canadian Geotechnical Journal. – 2001. - Vol.38. - No.6. – P. 1297-1313.
18. Fredlund D.G., Xing A. Equations for the soil-water characteristic curve. – Canadian Geotechnical Journal – 1994. - Vol.31. - No.4. – P. 521-532.
19. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркін Г.Н. Приближенные методы математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 700 с.
20. Kansa E. J. Multiquadrics – a Scattered Data Approximation Scheme With Application to Computational Fluid-Dynamics. II. Solutions to Parabolic, Hyperbolic and Elliptic Partial Differential Equations // Comput. Math. Appl. — 1990. — Vol. 19. - No 8/9. — P. 147-161.
21. Колодяжний В.М., Рвачов В.О. Деякі властивості атомарних функцій багатьох змінних // Доповіді НАН України, № 1, 2005. – С. 12–20.
22. Колодяжний В.М., Лисина О.Ю. Численные схемы решения краевых задач на основе бессеточных методов с использованием РБФ и АРБФ // Проблемы машиностроения.– Т. 13, № 4.– 2010. – С. 49-56.
23. Fauziah Ahmad, MdAzlin MdSaid, Lamyaa Najah. Effect of Leaching and Gypsum Content on Properties of Gypseous Soil. – International Journal of Scientific and Research Publications, Vol. 2, Issue 9, September 2012. – p. 1-5.
24. Нгуен Фьонг Зунг. Исследование зависимости прочностных свойств грунта от его физического состояния // Инженерно-строительный журнал. – 2012. – № 9 (35).– С. 23-28.

УДК 519.63:517.958

Математическое моделирование задач обтекания в цилиндрической системе координат

С. Н. Ламтюгова, М. В. Сидоров

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина

В статье рассматривается стационарная задача обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью. Для линеаризованной (по Озеену) задачи обтекания предлагается численный метод решения, основанный на совместном использовании методов R-функций и Галеркина, для нелинейной – методов R-функций, последовательных приближений и Галеркина. Вычислительный эксперимент проведен для задачи обтекания кругового и эллиптического цилиндров для различных чисел Рейнольдса.

Ключевые слова: вязкая жидкость, задача обтекания, линеаризация Озеена, метод R-функций, метод последовательных приближений, метод Галеркина.

В статті розглядається стаціонарна задача обтікання циліндричного тіла в'язкою нестисливою рідиною. Для лінеаризованої (за Озееном) задачі обтікання пропонується чисельний метод розв'язання, заснований на сумісному використанні методів R-функцій і Гальоркіна, для нелінійної – методів R-функцій, послідовних наближень і Гальоркіна. Обчислювальний експеримент проведено для задачі обтікання кругового і еліптичного циліндрів для різних чисел Рейнольда.

Ключові слова: в'язка рідина, задача обтікання, лінеаризація Озеена, метод R-функцій, метод послідовних наближень, метод Гальоркіна.

In the paper we consider the stationary viscous incompressible fluid flow past the cylindrical body. We propose for the linearized (by Oseen) flow problem a numerical solution method, based on the joint use the R-functions method and the Galerkin method, and for the nonlinear flow problem – on the joint use the R-functions method, the successive approximations method and the Galerkin method. Computational experiment conducted for the task of flow past circular and elliptic cylinders for different Reynolds numbers.

Key words: viscous fluid, flow problem, the Oseen linearization, the R-functions method, the successive approximations method, the Galerkin method.

1. Введение

Математическое моделирование и численный анализ в последнее время все активнее используются при изучении динамики вязкой жидкости. Необходимость моделировать вязкие течения возникает, например, в гидроаэродинамике, теплоэнергетике, химической кинетике, биомедицине и т.д. Описывающие их уравнения Навье-Стокса [1-3] имеют существенные особенности – нелинейность и наличие малого параметра при старшей производной (величина обратная числу Рейнольдса). Кроме того, их часто приходится решать в областях сложной геометрии, которая к тому же может быть неограниченной. В большинстве случаев при численном решении задач обтекания условия на бесконечности сносятся на некоторый контур, расположенный достаточно далеко от обтекаемого тела, что приводит к дополнительным погрешностям в приближенном решении.

Существует обширный класс течений, в которых можно пренебречь нелинейными членами и получить линейную задачу. Полное пренебрежение инерционными членами приводит к так называемым уравнениям ползущего течения или уравнениям Стокса [4-6]. Однако для задачи обтекания цилиндрического тела безграничной вязкой несжимаемой жидкостью не существует решения уравнений Стокса (парадокс Стокса) [4, 5, 7]. В этом случае пользуются приближением Озеена [4, 7, 8].

Точно учесть геометрию области, а также краевые условия, можно, воспользовавшись конструктивным аппаратом теории R-функций акад. НАН Украины В. Л. Рвачева [9]. Метод R-функций в задачах гидродинамики использовался Колосовой С. В., Суворовой И. Г., Максименко-Шейко К. В., Сидоровым М. В., но рассматривались задачи расчета течений идеальной жидкости [10], вязкой в ограниченных областях [11-13] или вязкой при наличии винтовой симметрии [14]. Задачи внешнего обтекания тел вязкой жидкостью с использованием метода R-функций не рассматривались, хотя они составляют важный класс прикладных задач. Поэтому разработка новых, а также совершенствование существующих методов математического моделирования внешних стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости методом R-функций является актуальной научной проблемой.

В данной работе рассматривается применение методов R-функций, последовательных приближений и Галеркина для математического моделирования линейной (линеаризация Озеена) и нелинейной стационарных задач обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью.

Настоящая работа распространяет результаты, полученные в [15], на случай вязкой несжимаемой жидкости и опирается на конструктивный аппарат теории R-функций акад. НАН Украины В. Л. Рвачева [9].

2. Постановка задачи

Задача 1. Рассмотрим задачу медленного обтекания равномерным потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью U_∞ цилиндрического тела, сечением которого является конечная область Ω с кусочно-непрерывной границей $\partial\Omega$ [4, 8]:

$$\nu \Delta^2 \psi + A(\Delta\psi) = 0 \text{ вне } \bar{\Omega}, \quad (2.1)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.2)$$

$$\psi \sim U_\infty \rho \sin \varphi \text{ при } \rho \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, $\Delta^2\psi = \Delta(\Delta\psi)$, $A\zeta = -\cos\varphi \frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \frac{\sin\varphi}{\rho} \frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}$, $\nu = \text{Re}^{-1}$,

Re – число Рейнольдса, $\psi = \psi(\rho, \varphi)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями $v_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$, $v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial\rho}$, $v_z = 0$, \mathbf{n} – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Задача 2. Рассмотрим нелинейную стационарную задачу обтекания цилиндрического тела потоком вязкой несжимаемой жидкости [16]:

$$v\Delta^2\psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial\varphi} \text{ вне } \bar{\Omega}. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) дополняется краевыми условиями (2.2) и условием на бесконечности (2.3).

3. Метод решения задач 1 и 2

Для решения задач 1 и 2 предлагается использовать метод R-функций акад. НАН Украины В. Л. Рвачева [9].

Пусть вне $\bar{\Omega}$ известна достаточно гладкая функция $\omega(\rho, \varphi)$, обладающая следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 1) \omega(\rho, \varphi) > 0 \text{ вне } \bar{\Omega}; \\ 2) \omega(\rho, \varphi)|_{\partial\Omega} = 0; \\ 3) \left. \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Введем в рассмотрение достаточно гладкую функцию $y = f_M(x)$ из [15], которая удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \text{а) } f_M(0) = 0; \quad \text{б) } f'_M(0) = 1; \\ \text{в) } f'_M(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0; \\ \text{г) } f_M(x) \equiv 1 \quad \forall x \geq M \quad (M = \text{const} > 0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Условиям (3.2) удовлетворяет, например, функция [15]:

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{Mx}{x-M}\right), & 0 \leq x < M; \\ 1, & x \geq M. \end{cases} \quad (3.3)$$

Очевидно, $f_M(x) \in C^\infty[0, \infty)$. Обозначим $\omega_M(\rho, \varphi) = f_M[\omega(\rho, \varphi)]$.

Легко проверить, что функция $\omega_M(\rho, \varphi)$ удовлетворяет условиям 1) – 3) из (3.1). Кроме того, $\omega_M(\rho, \varphi) \equiv 1$, если $\omega(\rho, \varphi) \geq M$.

Заметим, что это условие означает, что если функция $\omega(\rho, \varphi)$ монотонно возрастает при удалении от $\partial\Omega$, то функция $\omega_M(\rho, \varphi)$ отлична от единицы лишь в некоторой кольцеобразной области $\{0 \leq \omega(\rho, \varphi) < M\}$, которая содержится во внешности $\bar{\Omega}$ и прилегает к $\partial\Omega$.

Нами доказана следующая теорема [6].

Теорема. При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1 \cdot \rho^{-1} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow +\infty$) краевым условиям (2.2) и условию на бесконечности (2.3) точно удовлетворяет функция вида

$$\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1 - \omega_M)\Phi_2, \quad (3.4)$$

где $\psi_0 = U_\infty (\rho - R^2 \cdot \rho^{-1}) \sin \varphi$ – решение задачи об обтекании идеальной жидкостью кругового цилиндра радиуса R (считаем, что цилиндр радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела), $\omega_M = f_M(\omega)$, $f_M(\omega)$ имеет вид (3.3), а ω – функция, обладающая свойствами (3.1).

Задача 1. Для аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 воспользуемся проекционным методом Галеркина [17]. Функции Φ_1 и Φ_2 представим в виде

$$\Phi_1 \approx \Phi_1^{m_1} = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k, \quad \Phi_2 \approx \Phi_2^{m_2} = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j, \quad (3.5)$$

где $\{\varphi_k(\rho, \varphi)\} = \left\{ \rho^{2-k} \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, k=3, 4, \dots; \rho^{-k} \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, k=1, 2, \dots \right\}$ – полная система частных решений уравнения $\Delta^2 \psi = 0$ относительно внешности цилиндра конечного радиуса; $\{\tau_j(\rho, \varphi)\} = \left\{ \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \rho^{j+2} \frac{\cos j\varphi}{\sin j\varphi}, \rho^j \frac{\cos j\varphi}{\sin j\varphi}, j=1, 2, \dots \right\}$ – полная система частных решений уравнения $\Delta^2 \psi = 0$ относительно области $\{\omega(\rho, \varphi) < M\}$.

Таким образом, приближенное решение нашей задачи ищем в виде

$$\psi \approx \psi_N = \omega_M^2 (\psi_0 + \Phi_1^{m_1}) + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2^{m_2}. \quad (3.6)$$

Зададимся полной относительно всей плоскости последовательностью функций

$$\{f_i(\rho, \varphi)\} = \left\{ \omega_M^2(\rho, \varphi) \rho^{2-k} \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, k=3, 4, \dots; \omega_M^2(\rho, \varphi) \rho^{-k} \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, k=1, 2, \dots; \right. \\ \left. \omega_M^2(\rho, \varphi) \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}, \omega_M^2(\rho, \varphi) \rho^{j+2} \frac{\cos j\varphi}{\sin j\varphi}, \omega_M^2(\rho, \varphi) \rho^j \frac{\cos j\varphi}{\sin j\varphi}, j=1, 2, \dots \right\}. \quad (3.7)$$

Значения коэффициентов α_k ($k=1, 2, \dots, m_1$) и β_j ($j=1, 2, \dots, m_2$) в соответствии с методом Галеркина найдем из условия ортогональности невязки $R_n = \nu \Delta^2 \psi_n + A(\Delta \psi_n)$ первым N ($N = m_1 + m_2$) элементам последовательности (3.7)

$$(R_N, f_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.8)$$

причем в силу свойств функции ω_M и координатных функций интегрирование в (3.8) при вычислении скалярных произведений можно производить только по конечной области $\{0 \leq \omega(\rho, \varphi) < M\}$.

Задача 2. Задача (2.4), (2.2), (2.3) была решена методом последовательных приближений. В качестве начального приближения $\psi^{(0)}$ было взято приближенное решение соответствующей линейной задачи Озеена. Если

приближение $\psi^{(p)}$ известно, то следующее приближение $\psi^{(p+1)}$ находим как решение линейной задачи

$$\nu \Delta^2 \psi^{(p+1)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \Delta \psi^{(p)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial \rho} \frac{\partial \Delta \psi^{(p)}}{\partial \varphi} \text{ вне } \bar{\Omega},$$

$$\psi^{(p+1)} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi^{(p+1)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \psi^{(p+1)} \sim U_\infty \rho \sin \varphi \text{ при } \rho \rightarrow \infty, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

На каждом шаге итерационного процесса приближенное решение ищем в виде функции $\psi^{(p+1)} = \omega_M^2 (\psi_0 + \Phi_1^{(p+1)}) + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2^{(p+1)}$, которая при любом выборе достаточно гладких функций $\Phi_1^{(p+1)}$ и $\Phi_2^{(p+1)}$ ($\Phi_1^{(p+1)} \cdot \rho^{-1} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow +\infty$) точно удовлетворяет краевым условиям (2.2) и условию на бесконечности (2.3). Для аппроксимации неопределенных компонент $\Phi_1^{(p+1)}$ и $\Phi_2^{(p+1)}$ используем проекционный метод Галеркина [17]. Функции $\Phi_1^{(p+1)}$ и $\Phi_2^{(p+1)}$ аппроксимируются выражениями вида (3.5). В результате решения полученной системы линейных уравнений получаем новое приближение. Итерации следует прекратить, когда $\|\psi^{(p+1)} - \psi^{(p)}\| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – малое число.

Можно доказать сходимость итерационного процесса при малых числах Рейнольдса. Вычислительный эксперимент показал, что итерационный процесс расходится при $Re > 10$.

При $Re > 10$ предлагается использовать нелинейный метод Галеркина. Приближенное решение задачи (2.4), (2.2), (2.3) ищем в виде (3.6), где Φ_1 и Φ_2 имеют вид (3.5). Коэффициенты α_k и β_j найдем из условия ортогональности невязки Q_N элементам f_1, \dots, f_N проекционной последовательности (3.7):

$$(Q_N, f_i) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad N = m_1 + m_2, \quad (3.9)$$

где $Q_N = \nu \Delta^2 \psi_N - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_N}{\partial \varphi} \frac{\partial (\Delta \psi_N)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_N}{\partial \rho} \frac{\partial (\Delta \psi_N)}{\partial \varphi}$, причем в силу свойств функции ω_M и координатных функций интегрирование в (3.9) при вычислении скалярных произведений можно производить только по конечной области $\{0 \leq \omega(\rho, \varphi) < M\}$.

В результате получим систему нелинейных уравнений, каждое из которых представляет собой квадратичную функцию относительно α_k и β_j . Полученная система решается методом Ньютона. В качестве начального приближения выбирается набор α_k и β_j , соответствующий решению задачи Озеена, или, при больших числах Рейнольдса, решению, полученному при меньших числах Рейнольдса.

4. Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ при $U_\infty = 1$, $R = 1$, $m_1 = 8$, $m_2 = 14$, $Re = 0,01; 5; 10; 15$ и эллиптического цилиндра $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ при $U_\infty = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $m_1 = 12$, $m_2 = 18$, $Re = 0,01; 10; 20; 30$.

На рис. 1 – 4 представлены линии уровня функции тока полученного приближенного решения для задачи обтекания кругового цилиндра.

Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей за круговым цилиндром представлены на рис. 5 – 8.

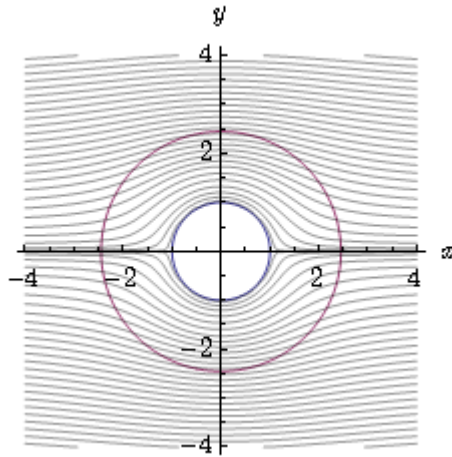


Рис. 1. Линии уровня функции тока при $Re = 0,01$

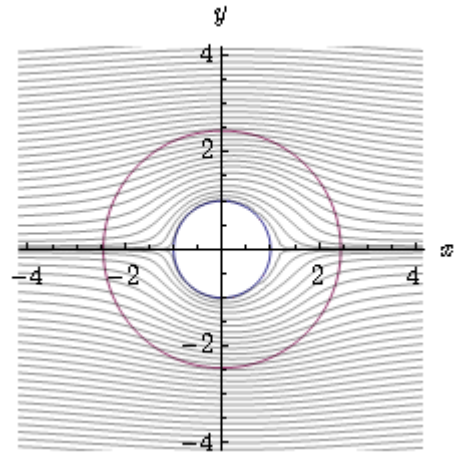


Рис. 2. Линии уровня функции тока при $Re = 5$

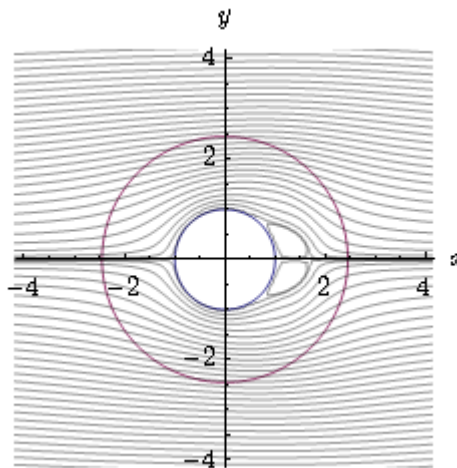


Рис. 3. Линии уровня функции тока при $Re = 10$

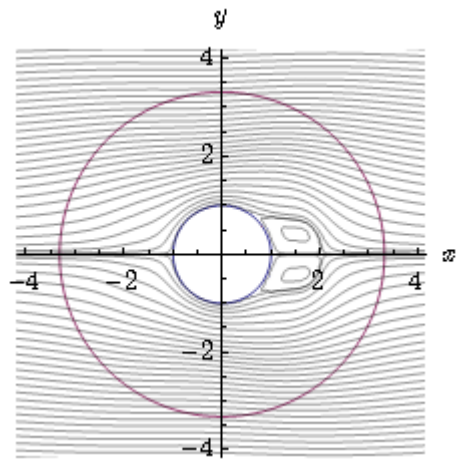


Рис. 4. Линии уровня функции тока при $Re = 15$

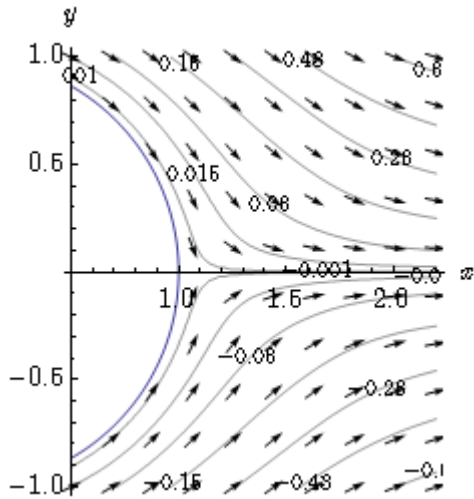


Рис. 5. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $Re = 0,01$

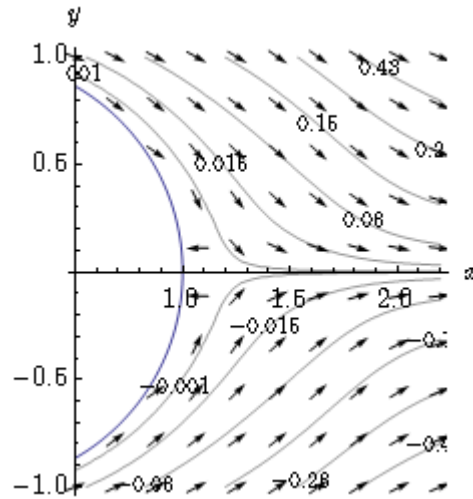


Рис. 6. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $Re = 5$

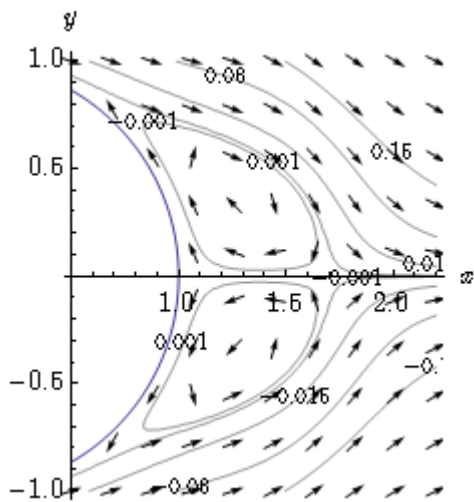


Рис. 7. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $Re = 10$

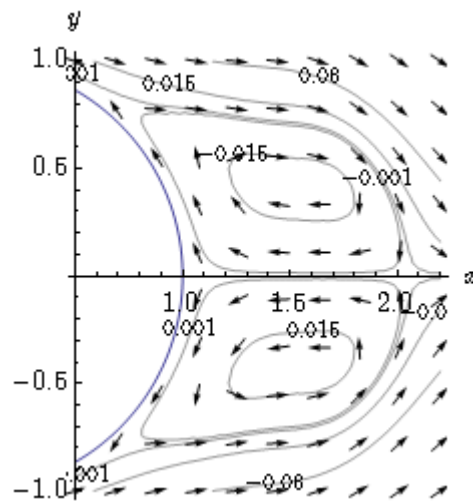


Рис. 8. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $Re = 15$

На рис. 9 – 12 представлены линии уровня функции тока полученного приближенного решения для задачи обтекания эллиптического цилиндра.

Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей за эллиптическим цилиндром представлены на рис. 13 – 16.

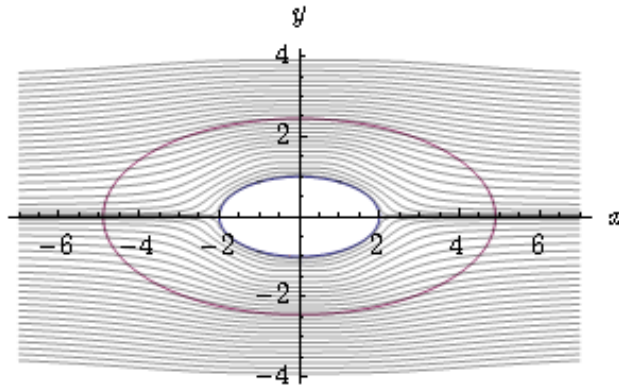


Рис. 9. Линии уровня функции тока при $Re = 0,01$

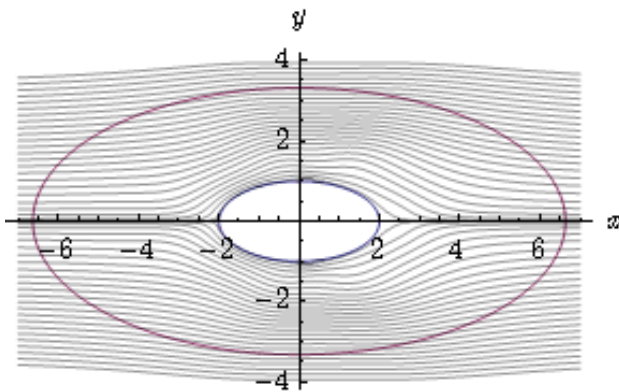


Рис. 10. Линии уровня функции тока при $Re = 10$

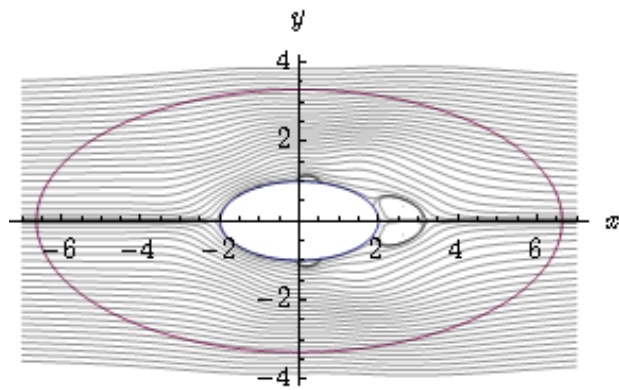


Рис. 11. Линии уровня функции тока при $Re = 20$

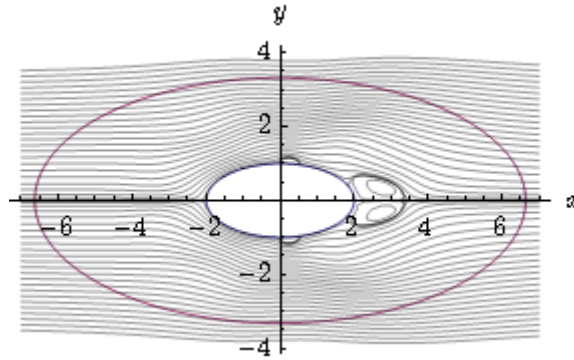


Рис. 12. Линии уровня функции тока при $Re = 30$

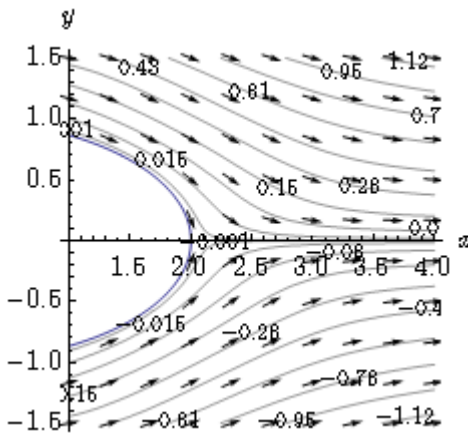


Рис. 13. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $Re = 0,01$

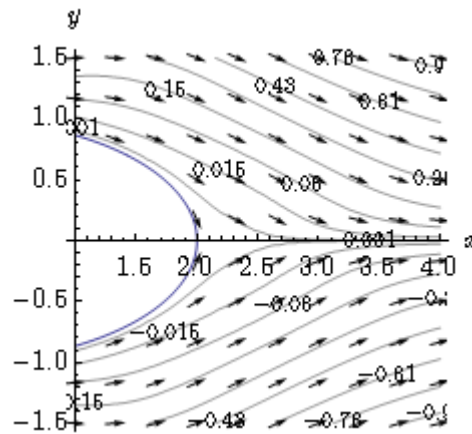


Рис. 14. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $Re = 10$

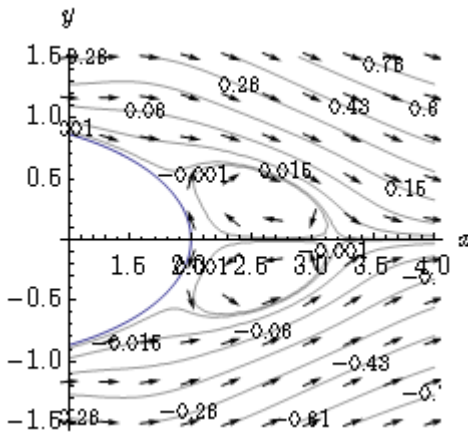


Рис. 15. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $Re = 20$

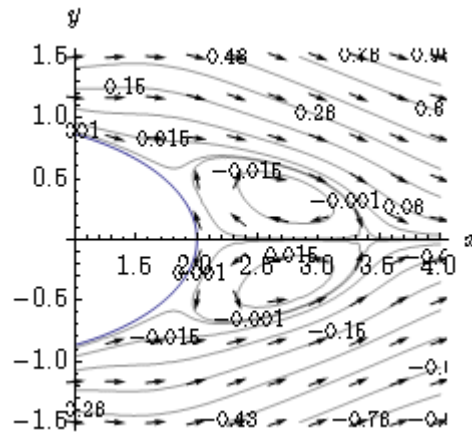


Рис. 16. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $Re = 30$

5. Выводы

В работе впервые разработан численный метод расчета внешних течений вязкой несжимаемой жидкости, основанный на совместном применении методов R-функций, последовательных приближений и Галеркина, который отличается от известных методов универсальностью (алгоритм не изменяется при изменении геометрии области) и тем, что структура решения точно учитывает как краевые условия на границе обтекаемого тела, так и условие на бесконечности. Для различных чисел Рейнольдса численно решена задача обтекания кругового и эллиптического цилиндров вязкой несжимаемой жидкостью. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами физических экспериментов [17, 18] и результатами, полученными другими авторами [3, 19-22]. Разработанный метод позволяет проводить математическое моделирование разных физико-механических и биологических внешних течений. Этим и определяется научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика: в 2 т. – Ижевск: РХД, 2003. – Т. 1. – 542 с. – Т.2. – 482 с.
2. Ландау Л. Ф., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10 т. – М.: Физматлит, 2001 – 2005. – Т. 6: Гидродинамика. – 736 с.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
4. Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запryanов З. Д. [и др.]. Химическая гидродинамика: справочное пособие. – М.: Квантум, 1996. – 336 с.
5. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
6. Ламтюгова С. Н. Математическое моделирование линеаризованных задач обтекания в сферической и цилиндрической системах координат // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – № 1. – С. 112 – 122.
7. Шкадов В. Я., Запryanов З. Д. Течения вязкой жидкости. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 200 с.
8. Бабенко К. И., Введенская Н. Д., Орлова М. Г. Расчет стационарного обтекания кругового цилиндра вязкой жидкостью // Журнал вычислит. математики и мат. физики. – 1975. – 15 (№ 1). – С. 183 – 196.
9. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
10. Колосова С. В. Применение проекционных методов и метода R-функций к решению краевых задач в бесконечных областях. Дисс. ... к. ф.-м. н.: 01.01.07 – Вычислительная математика. – Харьков: ХИРЭ, 1972. – 85 с.
11. Колосова С. В., Сидоров М. В. Применение метода R-функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. – 2003. – № 602. – С. 61 – 67.

12. Суворова И. Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестн. НТУ ХПИ. – Харьков, 2004. – № 31. – С. 141 – 148.
13. Тевяшев А. Д., Гибкина Н. В., Сидоров М. В. Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 2. – С. 50 – 57.
14. Максименко-Шейко К. В. Математическое моделирование теплообмена при движении жидкости по каналам с винтовым типом симметрии методом R-функций // Доп. НАН України. – 2005. – № 9. – С. 41 – 46.
15. Стрельченко А.Й., Колосова С.В., Рвачов В.Л. Про один метод розв'язування крайових задач // Доп. АН УРСР, сер. А. – № 9. – 1972. – С. 837 – 839.
16. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
17. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. [и др.]. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
18. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 660 с.
19. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986. – 184 с.
20. Приходько А. А., Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье-Стокса // Прикладна гідромеханіка. – 2005. – 7 (79), № 1. – С. 56–71.
21. Ермаков М. К. Исследование возможностей матричных методов для решения уравнений Навье-Стокса // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. – 2010. – Т. 9. – С. 1 – 8.
22. Dennis S. C. R., Chang Gau-Zu. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100 // J. Fluid Mech. – 1970. – V. 42. – P. 471 – 489.
23. D. Arumuga Perumal, Gundavarapu V. S. Kumar and Anoop K. Dass. Lattice Boltzmann simulation of viscous flow past elliptical cylinder // CFD Letters. – 2012. – V. 4(3). – P. 127 – 139.

УДК 517.95+518.517

R-функции в математическом моделировании 3D-дома для реализации технологий 3D-печати

Ю. С. Литвинова, К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье на основе конструктивных средств теории R-функций построены уравнения фасадной стены дома, проектируемого в Амстердаме. Возможность введения буквенных параметров в уравнениях позволяет оперативно изменять форму проектируемого объекта. Свойство положительности построенной функции во внутренних точках объекта весьма удобно для реализации 3D печати.

Ключевые слова: R-функции, трансляционная симметрия, визуализация 3D-объектов, строительные конструкции.

В статті на основі конструктивних засобів теорії R-функцій побудовано рівняння фасадної стіни будинку, який проектується у Амстердамі. Можливість введення буквенних параметрів у рівняннях дозволяє оперативно змінювати форму об'єкта, що проектується. Властивість додатності побудованої функції у внутрішніх точках об'єкту є дуже зручною для реалізації 3D-друку.

Ключові слова: R-функції, трансляційна симетрія, візуалізація 3D-об'єктів, будівельні конструкції.

In the paper we built the equations of the face wall of the home, which is projected in Amsterdam, Netherlands. The possibility of alphabetic parameters embedding permitted to change the form of projected object efficiently. The property of the built function positivity inside the object is convenient for the 3D-printing realization.

Key words: R-functions, translation symmetry, 3D-objects visualization, building units.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В Амстердаме команда архитекторов работает над проектом, призванным освоить одно из самых важных направлений развития 3D-печати – строительство зданий. В марте 2013 года сотрудники голландской фирмы DUS Architects разработали гигантский 3D-принтер под названием KamerMaker XL и напечатали с его помощью часть дома в уменьшенном масштабе 1:20 (рис.1) [1]. Для печати использован плавкий пластик на 80-процентной биологической основе, разработанный немецкой химической компанией Henkel. 3D-принтер будет печатать целиком модульные блоки, из которых потом будет собрано целое здание. Также при печати конструктивных элементов будут предусмотрены каналы для прокладки электрических и коммуникационных кабелей, водопроводных и канализационных труб.

Руководители фирмы намерены возвести здание в северной части Амстердама на канале Buiksloter, и оно будет функционировать в качестве образца и исследовательского центра для технологий 3D-печати. Но главной целью проекта является удовлетворение потребностей в жилье семи миллиардов человек на планете. И хотя на данный момент дом будет построен из пластика, в

будущем компания планирует использовать другие, более традиционные материалы для строительства.

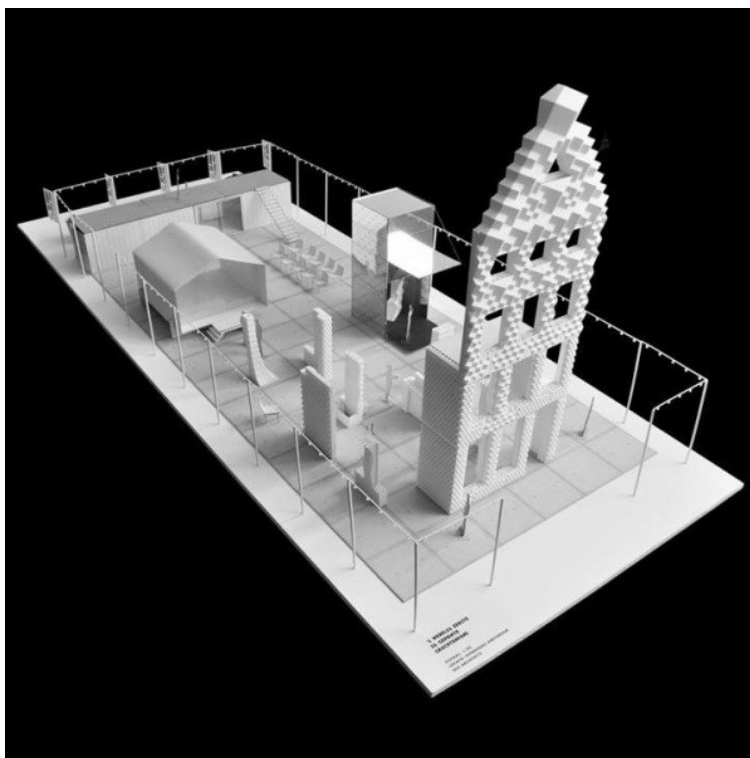


Рис.1. Проект дома в Амстердаме

Если проект будет иметь успех, то трёхмерная печать может стать основным методом производства строительных материалов любых размеров и состава. Это может не только перевернуть строительный бизнес, но и существенно улучшить экологию, уверены специалисты. Однако возникает проблема задания информации для печати, т.е. создания математической и компьютерной модели проектируемого объекта. Одним из методов решения этой проблемы является применение теории R-функций, которая позволяет описывать геометрические объекты сложной формы единым аналитическим выражением.

Целью данной работы является создание на основе теории R-функций математической и компьютерной модели фасадной стены дома по амстердамскому проекту.

2. Построение математической модели и визуализация объектов, описанных полученными уравнениями

Для построения искомым уравнений геометрических объектов используем следующие конструктивные средства теории R-функций: наиболее простую и поэтому наиболее часто используемую систему R_0 [2,3]:

$$\begin{cases} x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases},$$

где $\wedge_0, \vee_0, \bar{}$ — символы *R-конъюнкции*, *R-дизъюнкции* и *R-отрицания* соответственно. Кроме того, для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с симметрией трансляции вдоль прямой, воспользуемся следующей теоремой [4].

Теорема. Пусть трансляционная область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y, z) \geq 0]$ симметрична относительно оси *Oy* и может быть заключена в вертикальную полосу $-a < x < a$, а области $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi, y, z) \geq 0]$ получены в результате преобразования переноса области Σ_0 вдоль оси абсцисс на величины, кратные $h > 2a$. Тогда уравнение границы $\partial\Omega$ области $\Omega = \bigcup_{i \in Z} \Sigma_i$ имеет вид

$$\omega(x, y, z) \equiv \sigma_0(\mu(x, h), y, z) = 0, \text{ где } \mu(x, h) = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin \frac{(2i-1)x\pi}{h}.$$

Построим фасадную стену дома в Амстердаме. В плоскости $y = 0$ расположим орнамент в виде прямоугольных параллелепипедов w_1 и w_2 размером (1;1;2) при $z \leq hi$:

$$\begin{aligned} w_1 &= \left\{ \left((0.25 - mx^2) \wedge_0 (1 - mz^2) \right) \wedge_0 (0.25 - y^2) \right\} \wedge_0 (hi - z) \geq 0, \\ w_2 &= \left\{ \left((0.25 - mx_1^2) \wedge_0 (1 - mz_1^2) \right) \wedge_0 (0.25 - y^2) \right\} \wedge_0 (hi - z) \geq 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} mx &= \frac{4hx}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)xm, \quad mz = \frac{4hz}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)zm, \\ mx_1 &= \frac{4hx}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)xm_1, \quad mz_1 = \frac{4hz}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)zm_1, \\ xm &= \frac{\pi x}{hx}, \quad zm = \frac{\pi z}{hz}, \quad xm_1 = \frac{\pi \left(x - \frac{hx}{2} \right)}{hx}, \quad zm_1 = \frac{\pi \left(z - \frac{hz}{2} \right)}{hz}, \\ &hx = 2, \quad hz = 4, \quad hi = 43, \end{aligned}$$

hx — шаг трансляции вдоль оси *Ox*, hz — шаг трансляции вдоль оси *Oz*.

При $z > hi$ в плоскости $y = 0$ расположим орнамент в виде прямоугольных параллелепипедов w_3 и w_4 размером (4;4;2):

$$\begin{aligned} w_3 &= \left\{ \left(4 - (mu - y)^2 \right) \wedge_0 \left(4 - (mu + y)^2 \right) \wedge_0 (1 - muz^2) \right\} \wedge_0 (z - hi) \geq 0, \\ w_4 &= \left\{ \left(4 - (mrx - y)^2 \right) \wedge_0 \left(4 - (mrx + y)^2 \right) \wedge_0 (1 - mpzz^2) \right\} \wedge_0 (z - hi) \geq 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} mu &= \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)xp, \quad muz = \frac{4hz}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)zp, \\ mpxx &= \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)xp^3, \quad mpzz = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)zp^3, \\ xp &= \frac{\pi x}{h}, \quad zp = \frac{\pi z}{h}, \quad xp3 = \frac{\pi \left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}, \quad zp3 = \frac{\pi \left(zq - \frac{h}{2}\right)}{h}, \end{aligned}$$

$h = 4$ — шаг трансляции вдоль осей Ox и Oz .

Выполним сборку фоновых орнаментов: $wof = (w_1 \vee_0 w_2) \vee_0 (w_3 \vee_0 w_4) \geq 0$.

На высоте $z = 67, z = 58, z = 47$ построим три набора параллелепипедов размером $(6, 6, 4)$:

$$wv1 = \left((9 - (x - y)^2) \wedge_0 (9 - (x + y)^2) \right) \wedge_0 zq1(4 - zq1) \geq 0, \text{ где } zq1 = z - 67.$$

$$wv2 = \left((9 - (muv - y)^2) \wedge_0 (9 - (muv + y)^2) \right) \wedge_0 zq2(4 - zq2) \geq 0, \text{ где } zq2 = z - 58.$$

$$wv3 = \left((9 - (muv3 - y)^2) \wedge_0 (9 - (muv3 + y)^2) \right) \wedge_0 zq3(4 - zq3) \geq 0,$$

где $zq3 = z - 47$.

$$muv = \frac{4hv}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)xv, \quad xv = \frac{\pi x}{hv}, \quad hv = 5 \text{ — шаг трансляции}$$

вдоль оси Ox ,

$$muv3 = \frac{4hv3}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)xv3, \quad xv3 = \frac{\pi x}{hv3}, \quad hv3 = 10 \text{ — шаг трансляции}$$

вдоль оси Ox .

Выполним общую сборку орнаментов: $wof0 = (wv1 \vee_0 wv2 \vee_0 wv3) \vee_0 wof \geq 0$ и расположим их на стене толщиной L .
 $wo = wof0 \vee_0 y(L - y) \geq 0$.

Построим уравнения системы окон: одно — треугольное на высоте $z = 70$, три — малые размером $2c = 3, 2d = 4$ на высоте $z = 52$, и девять основных размером $2a = 6, 2b = 12$.

$$wtr = ((x - z + 75) \wedge_0 (-x - z + 75)) \wedge_0 (z - 70) \geq 0,$$

$$wmal = (c^2 - mx_o^2) \wedge_0 (d^2 - (z - 52)^2) \geq 0,$$

$$w9 = ((a^2 - mx_o^2) \wedge_0 (b^2 - mz_o^2)) \wedge_0 (45 - z) \geq 0,$$

$$\text{где } mx_o = \frac{4hx_o}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)x_o,$$

$$mz_o = \frac{4hz_o}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)z_o,$$

$$x_o = \frac{\pi}{hx_o} x, \quad z_o = \frac{\pi}{hz_o} z, \quad hx_o = 10, \quad hz_o = 18, \quad hx_o \text{ — шаг трансляции вдоль}$$

оси Ox , hz_o — шаг трансляции вдоль оси Oz .

Заметим, что во всех построениях начало координат находится в центре нижнего среднего окна.

Левое нижнее окно реорганизуем в дверной проем, уравнение которого будет иметь вид $wdv = (x+13)(-x-7) \wedge_0 (-z)(9+z) \geq 0$.

Соединим уравнения оконных и дверных проемов в одно:

$w0 = wtr \vee_0 wmal \vee_0 w9 \vee_0 wdv \geq 0$. На стене $w0$ вырежем окна и двери, получив уравнение $ww2 = w0 \wedge_0 \overline{w0} \geq 0$.

Построим уравнение ступенчатого ряда для оформления верхнего уровня фасадной стены.

$$wbok = (wp \vee_0 wl) \wedge_0 (83-z) \geq 0, \quad wp = wr \vee_0 wrr \geq 0,$$

$$wl(x, y, z) = wp(-x, y, z), \quad wr = wr3 \wedge_0 y(3-y) \geq 0,$$

$$wrr = w33 \wedge_0 (9-y^2) \geq 0, \quad wr3 = wr1 \wedge_0 wr2 \geq 0, \quad w33 = w11 \wedge_0 w22 \geq 0,$$

$$wr1 = (mx1 - z2 + 4) \wedge_0 (-mx1 + z2) \geq 0, \quad wr2 = (-mx1 - z2 + 4) \wedge_0 (mx1 + z2) \geq 0,$$

$$w11 = (mxx - z2 + 4) \wedge_0 (-mxx + z2) \geq 0, \quad w22 = (-mxx - z2 + 4) \wedge_0 (mxx + z2) \geq 0,$$

$$mx1 = \frac{4hx1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)x1, \quad mxx = \frac{4hx1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)x3,$$

$$x1 = \frac{\pi x2}{hx1}, \quad x3 = \frac{\pi \left(x2 - \frac{hx1}{2} \right)}{hx1}, \quad \begin{cases} x2 = x \cos \pi/4 - zq \sin \pi/4, \\ z2 = x \sin \pi/4 + zq \cos \pi/4, \end{cases} \quad zq = z - 83, \quad hx1 = 8.$$

Уравнение поверхностей, ограничивающих верх фасадной стены: $kr = (x-z+85) \wedge_0 (-x-z+85) \geq 0$. Ограничим стену с вырезанными оконными и дверными проемами построенными поверхностями и присоединим ступенчатое оформление, получив уравнение $ww3 = (ww2 \wedge_0 kr) \vee_0 wbok \geq 0$. Кроме того, верхнюю часть фасада венчает куб:

$$wsh = \left((16 - (x-y)^2) \wedge_0 (16 - (x+y)^2) \right) \wedge_0 zq(5-zq) \geq 0.$$

Это уравнение добавим к уравнению уже построенной стены, ограничив ее по бокам и снизу. Таким образом, окончательно получим общее уравнение фасадной стены $W = ((ww3 \vee_0 wsh) \wedge_0 (17^2 - x^2)) \wedge_0 (12 + z) \geq 0$, визуализированное с помощью разработанной в [5,6] программы на рис.2 для различных значений буквенных параметров.

Построенная с помощью R-операций функция $W(x, y, z)$ обладает свойствами: $W(x, y, z) > 0$ внутри области (тела), $W(x, y, z) = 0$ на границе и $W(x, y, z) < 0$ вне рассматриваемой области. Это свойство удобно при реализации 3D печати для заполнения рабочим веществом пространства, где $W(x, y, z) > 0$.

В заключение следует отметить, что введение буквенных параметров позволяет оперативно менять вид фасадной стены. Здесь для удобства чтения приведены лишь некоторые из них с соответствующей иллюстрацией. Меняя значения буквенных параметров $hi, L, a, b, c, d, h, hx, hz$ и др. (пользователь может ввести много дополнительных геометрических параметров), можно существенно, и главное — оперативно изменять форму или фрагменты строящегося объекта.

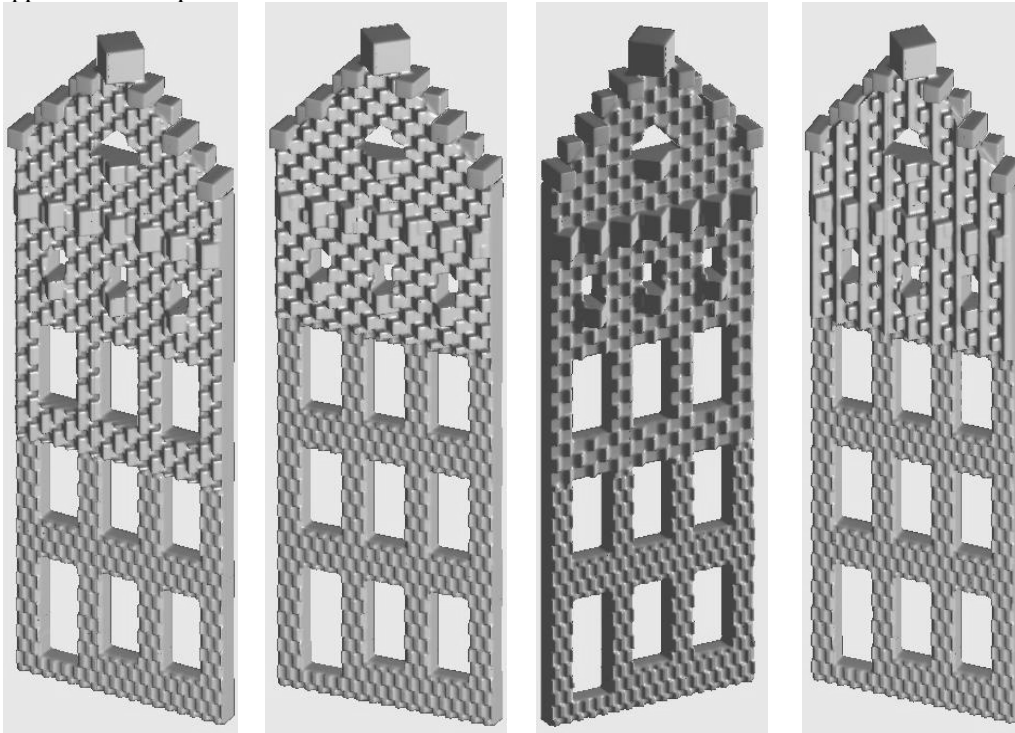


Рис.2. Визуализация уравнений фасадной стены для различных значений буквенных параметров

3. Выводы по результатам

Теория R-функций может оказаться незаменимой для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с симметрией трансляции вдоль прямой, вдоль отрезка прямой, с различными вариантами симметрии циклического типа и др. Аналитическая запись и, следовательно, возможность введения в логическую формулу буквенных параметров позволяют оперативно и порой существенно изменять форму проектируемого геометрического объекта. Свойство положительности построенной функции во внутренних точках объекта весьма удобно для реализации 3D печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. В Амстердаме построят дом, напечатанный на 3D-принтере – BBC Ukrainian [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.bbc.co.uk/ukrainian/ukraine_in_russian/2013/04/130416_ru_s_3d_building_amsterdam.shtml
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. — К.: Наук.думка, 1982.—552 с.
3. Rvachev V.L., Sheiko T.I. R-functions in boundary value problems in mechanics // Applied Mechanics Reviews.—48, n.4.—1995.—Pp.151-188.
4. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. — Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. — 306 с.
5. Лисин Д.А., Максименко-Шейко К.В., Толоч А.В., Шейко Т.И. R-функции в компьютерном моделировании дизайна автомобиля // Прикладная информатика. — 2011. — № 6 (36). — С. 78-85.
6. Лисин Д.О. Комп'ютерна програма «Система візуалізації та побудови сітки на поверхні геометричних об'єктів, які описані за допомогою математичних засобів теорії R-функцій «RFPreview» // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. — 2012. — № 45951.

УДК 539.3

Сингулярные интегральные уравнения в задаче о свободных колебаниях оболочки вращения с жидкостью

У. Е. Огородник, Е. А. Стрельникова, Ю. С. Шувалова

*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины
Украинская государственная академия железнодорожного транспорта*

Задача анализа динамического поведения оболочек вращения, частично заполненных идеальной несжимаемой жидкостью, сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Использована прямая формулировка метода граничных интегральных уравнений. Дан анализ особенностей ядер полученных интегральных операторов. Разработан метод численной реализации, проведено сравнение численных и аналитических результатов решения системы сингулярных интегральных уравнений. С использованием разработанного метода решена задача о свободных колебаниях упругой полусферы с жидкостью.

Ключевые слова: гидроупругое взаимодействие, методы конечных и граничных уравнений, системы сингулярных интегральных уравнений, логарифмическая особенность

Задачу аналізу динамічної поведінки оболонок обертання, частково заповнених ідеальною нестисливою рідиною, зведено до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь. Застосовано пряме формулювання методу граничних інтегральних рівнянь. Надано аналіз особливостей ядер отриманих інтегральних операторів. Розроблено метод чисельної реалізації, здійснено порівняння чисельних та аналітичних розв'язків системи сингулярних інтегральних рівнянь. З використанням розробленого методу розв'язано задачу вільних коливань пружної на півсфері з рідиною.

Ключові слова: гідропружна взаємодія, методи граничних та скінченних елементів, системи сингулярних інтегральних рівнянь, логарифмічна особливість.

The problem to analyze dynamics of shells of revolution partially filled with an ideal incompressible liquid was reduced to solving the system of singular integral equations. The direct formulation of boundary integral equation method was in use. The singularities in kernels of integral operators obtained were analyzed. The method of numerical simulation was proposed, the comparison of numerical and analytical solutions of singular integral equations was accomplished. The free vibration problem for hemisphere was solved with usage of proposed method.

Key words: fluid-structure interaction, finite and boundary element methods, systems of singular integral equations, the logarithmic singularity.

1. Введение.

В машиностроении широко используются конструкции, элементами которых являются оболочки вращения с разной формой меридиана. К ним относятся корпуса энергетических установок, насосов, компрессоров, ректификационные колонны, нефтехранилища и т.п.

В данной работе рассматривается задача о свободных и вынужденных колебаниях оболочек вращения при частичном заполнении жидкостью. Задача о свободных колебаниях оболочки, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, сведена к решению системы сингулярных

интегральных уравнений. Использована прямая формулировка метода граничных элементов.

Динамический анализ НДС оболочечных конструкций часто выполняется при помощи конечно-элементных программ [1-6]. Но трехмерный анализ с учетом взаимодействия жидкости и конструкции является сложной и чрезвычайно трудоёмкой задачей. Поэтому для проведения исследования прочности, устойчивости оболочек принимаются упрощенные гипотезы. Предполагается, например, что жидкость состоит из двух частей: движущейся вместе с емкостью как жесткое целое и части, движущейся со своей собственной частотой. Определение границ этих частей жидкости производится эмпирически. Не учитывается также упругость стенок резервуара

В данной работе предложен подход, основанный на использовании метода граничных элементов, для решения задачи о собственных колебаниях упругих оболочек вращения, заполненных жидкостью. Этот подход имеет определенные преимущества. В разрешающих уравнениях функции и их производные определяются только на границах области, что позволяет существенно уменьшать размерность систем уравнений. Этот метод дает также качественно новые возможности в моделировании связанной динамической задачи, именно он и будет применен в данном исследовании.

2. Постановка задачи.

Уравнения движения упругой оболочки, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, можно записать в форме

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}) = \mathbf{P}, \quad (1)$$

где \mathbf{L} , \mathbf{M} – операторы упругих и массовых сил;

\mathbf{P} – давление жидкости на смоченные поверхности конструкции;

$\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор - функция перемещений.

Для связанной задачи гидроупругости представим вектор \mathbf{U} в форме $\mathbf{U} = \mathbf{u}e^{\Omega t}$, где Ω – частота, а \mathbf{u} – собственная форма гидроупругих колебаний

Будем искать собственные формы оболочки, частично заполненной жидкостью, в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{u}_k, \quad (2)$$

где \mathbf{u}_k – собственные формы колебаний оболочки, незаполненной жидкостью; c_k – неизвестные коэффициенты.

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) = \Omega_k^2 \mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \quad (\mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \delta_{kj}. \quad (3)$$

Таким образом,

$$(\mathbf{L}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \Omega_k^2 \delta_{kj}. \quad (4)$$

где Ω_k – k -а частота собственных колебаний незаполненной конструкции.

Эти соотношения показывают, что собственные формы колебаний незаполненной конструкции ортонормированы по матрице масс.

Рассмотрим правую часть уравнения (1). Отметим, что вектор \mathbf{P} направлен по нормали к смоченным поверхностям, вследствие того, что идеальная жидкость создает только нормальную составляющую давления на смоченные поверхности. Считаем, что $|\mathbf{P}| = p$.

Предполагается, что движение жидкости является безвихревым, т.е. существует потенциал скоростей Φ [7]. Допустим также, что уровень заполнения может меняться.

В предположении, что скорость изменения уровня жидкости задана как функция только от времени $V_0(t)$ (т.е. является гармонической функцией), в соответствии с интегралом Коши-Лагранжа величина p имеет вид

$$p = -\rho_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V_0(t) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

где ρ_2 – плотность жидкости.

Для потенциала скоростей имеем следующую краевую задачу

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V_0(t) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{S_0} = 0.$$

Разыскиваем потенциал скоростей Φ в виде ряда

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k \varphi_k. \quad (5)$$

На свободной поверхности должно быть выполнено условие $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$, где ζ – функция, определяющая положение свободной поверхности.

Для функций φ_k имеем следующие краевые задачи

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = w_k, \quad \varphi_k \Big|_{S_0} = 0. \quad (6)$$

3. Сведение смешанной задачи для уравнения Лапласа к системе сингулярных интегральных уравнений

Опишем решение смешанной задачи для уравнения Лапласа (6). Опуская индекс k в (6), будем искать гармоническую функцию φ в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев [7], т.е. используем прямую формулировку метода граничных интегральных уравнений.

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS \quad (7)$$

Для смешанной задачи (6) представление (7) приводит к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$2\pi\varphi(P_0) + \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 = \iint_{S_1} w \frac{1}{|P-P_0|} dS_1; \quad P_0 \in S_1; \quad (8)$$

$$\iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 = \iint_{S_1} w \frac{1}{|P-P_0|} dS_1; \quad P_0 \in S_0$$

относительно неизвестных функций φ и q . При этом функция φ , определенная на поверхности S_1 , представляет собой давление на смоченную поверхность оболочки, а функция q , определенная на поверхности S_0 , представляет собой нормальную составляющую скорости жидкости на свободной поверхности.

Будем искать решения системы интегральных уравнений (8) в виде

$$\varphi = \varphi(r, z) \cos \alpha \theta; \quad q = q(r, z) \cos \alpha \theta. \quad (9)$$

В цилиндрических координатах имеем

$$2\pi\varphi(z_0) + \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; P_0 \in S_1, \quad (10)$$

$$\int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; P_0 \in S_0,$$

$$Q(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_{\alpha}(k) - F_{\alpha}(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_{\alpha}(k) n_z \right\};$$

$$\Psi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_{\alpha}(k); \quad a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z^* - z_0)^2; \quad b = 2\rho\rho_0.$$

Установим характер особенностей в ядрах системы (10).

Из представления функции $F_0(k)$ для k , близких к 1, согласно [8] имеем

$$F_0(k) = \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1.2}\right) k'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1.2} - \frac{2}{3.4}\right) k'^4 + \dots \quad k'^2 = 1 - k^2$$

Отсюда следует, что $F_0(k)$ имеет логарифмическую особенность при $z \rightarrow z_0$, что соответствует k , близким к 1.

Для произвольных целых α будем пользоваться такими формулами $F_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} F_0(k) + N_{\alpha}(k)$, где

$$N_{\alpha}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{f_{\alpha}(\theta) d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad f_{\alpha}(\theta) = \begin{cases} -2 \sin^2 \alpha \theta; & \alpha = 2m + 1; \\ 2 \cos^2 \alpha \theta; & \alpha = 2m. \end{cases}$$

Из приведенных соотношений видно, что функция $F_{\alpha}(k)$ также имеет логарифмическую особенность. Функция $E_{\alpha}(k)$ не имеет особенности при $z \rightarrow z_0$.

Рассмотрим функцию

$$Q(z, z_0) = \frac{n_r}{2r} \frac{r_0^2 - r^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} + \frac{z_0 - z}{a-b} n_z,$$

представляющую собой множитель при функции $E_{\alpha}(k)$ в ядре. Покажем, что она также не имеет особенности при $z \rightarrow z_0$.

Поскольку рассматривается малая особая область, то можно считать, что выполнены приближенные равенства, следующие из разложений в ряд Тейлора

$$r^2 - r_0^2 \approx 2r_0 r'_0 (z - z_0); \quad a - b = (r - r_0)^2 + (z - z_0)^2 \approx (1 + (r'_0)^2) (z - z_0)^2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Q(z, z_0) &\approx \frac{n_r}{2r_0} \frac{[-(z_0 - z) 2r_0 r'_0 + (z_0 - z)^2]}{(z_0 - z)^2 (1 + (r'_0)^2)} + \frac{z_0 - z}{(z_0 - z)^2 (1 + (r'_0)^2)} n_z = \\ &= \frac{1}{(z_0 - z) (1 + (r'_0)^2)} \left[\frac{n_r [-2r_0 r'_0 + (z_0 - z)]}{2r_0} + n_z \right] = \frac{n_r}{2r_0 (1 + (r'_0)^2)} - \frac{1}{(z_0 - z) (1 + (r'_0)^2)} (n_r r'_0 + n_z). \end{aligned}$$

Так как

$$|\mathbf{n}|^2 = r^2 + r^2 r'^2 = r^2 (1 + r'^2); \quad n_r = \frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}}; \quad n_z = \frac{-r'}{\sqrt{1 + r'^2}}.$$

Отсюда получаем, что $n_r r'_0 + n_z = 0$. А, следовательно, при $z \rightarrow z_0$ имеем

$$Q(z, z_0) \rightarrow \frac{n_r}{2r_0(1+(r'_0)^2)} = \frac{1}{2r_0(\sqrt{1+(r'_0)^2})^3},$$

т. е. функция $Q(z, z_0)$ является ограниченной величиной.

4. Тестирование метода граничных элементов

В [9] получен ряд аналитических решений для уравнения

$$\iint_S \frac{\gamma(x, y) dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = f(x_0, y_0) \quad (11)$$

с правыми частями специального типа. Для $f(x_0, y_0) = \pi^2$ аналитическое решение уравнения (11) имеет вид $\gamma(x, y) = 1$. Мы рассмотрели уравнение (11) с такой правой частью и свели его к решению одномерного уравнения

$$4 \int_0^R \frac{\gamma(\rho)}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \frac{\rho}{\rho + \rho_0} F_0(k) d\rho = \pi^2 \quad (12)$$

В уравнении (12) была сделана замена переменной $\rho = R \sin \vartheta$. Это позволило избавиться от корневой особенности при ρ , близких к R . При разбиении области интегрирования на M частей в точках $\rho_j = R \sin \vartheta_j$; $\vartheta_j = \pi \left(j - \frac{1}{2} \right) / 2M$, $j = 1, \dots, M$ при $M = 40$ были получены значения интеграла, приведенные в табл. 1 и демонстрирующие высокую точность вычислений.

Таблица 1. Точность вычисления интеграла в (11)

Номер элемента	(x, y)
1	1,000092
15	1,000155
25	1,000165
35	1,000168

5. Собственные частоты и формы полусферической оболочки, заполненной жидкостью.

Рассматривается полусферическая оболочка, наполненная жидкостью, со следующими параметрами: радиус $R = 5.08$ м, толщина $h = 0.0254$ м, модуль упругости $E = 70$ ГПа ($0.7 \cdot 10^{11}$ Па), коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность материала $\rho = 2770$ кг/м³. Жидкость считается несжимаемой, плотность 1000 кг/м³. Условия закрепления – шарнирное опирание по контуру оболочки ($u_z = u_r = u_\varphi = 0$). Уровень заполнения жидкостью обозначен H .

Проведены расчеты собственных колебаний сферы по предложенной методике. Ниже приведены собственные частоты колебаний полусферы с жидкостью для разного числа узловых диаметров α в сравнении с результатами, полученными по комплексу ANSYS с использованием оболочечного элемента Shell63, и данными работы [1].

В таблице 2 приведены собственные частоты гидроупругих колебаний оболочки для различного числа α . Полученные результаты сравниваются с данными В.В.Мокеева [1] (для сжимаемой жидкости) и с результатами расчетов по комплексу ANSYS (для несжимаемой жидкости). Здесь приведены результаты для следующей сетки: 200 элементов на поверхности оболочки; 30 элементов на свободной поверхности; число сухих частот в разложении – 30. Число α в таблице 2 представляет собой номер гармоники в уравнении (9).

Таблица 2. Частоты колебаний полусферической оболочки с жидкостью

α	n	Частоты (Гц)		
		МГЭ	[1]	ANSYS (Shell63)
0	1	22.17	22.00	22.07
	2	33.50	33.38	33.41
	3	41.38	42.02	41.30
1	1	22.23	22.44	22.18
	2	34.77	36.88	34.68
	3	43.03	48.92	42.98
2		31.48	31.57	31.50
		40.49	41.55	40.50
		47.38	50.29	
3		36.55	36.98	36.65
		44.44	46.27	
		50.78	54.86	

На рис.1 показана зависимость изменения низшей собственной частоты оболочки от уровня заполнения H/R .

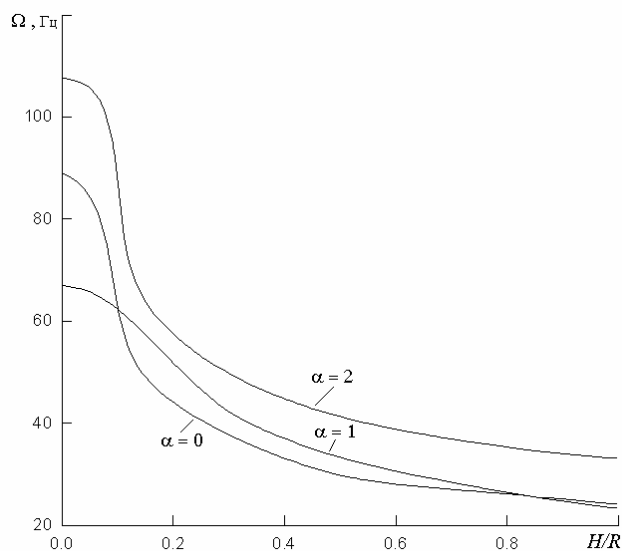


Рис. 1. Зависимость частот от уровня заполнения жидкостью.

Полученные результаты свидетельствуют о достоверности и эффективности предложенного подхода.

6. Выводы

Разработан эффективный численный метод определения частот и форм колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. Задача определения давления сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Интегрирование по объему жидкости осуществляется лишь вдоль меридиана оболочки и радиуса свободной поверхности жидкости, т.е. является одномерным. В этом заключается основное преимущество нашего метода, основанного на комбинации метода граничных интегральных уравнений, метода конечных элементов и разложения в ряды Фурье. Проведены численные исследования частот и форм полусферической оболочки, частично заполненной несжимаемой жидкостью.

7. Благодарности

Авторы выражают благодарность Юрию Владимировичу Ганделю за постоянную поддержку и интерес к нашей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов// Изв. РАН. Механика твердого тела.– 1998.–№ 6.–С.166-174.
2. S.M. Hasheminejad, M. Aghabeigi, Liquid sloshing in half-full horizontal elliptical tanks, *J. Sound Vib.* 324, pp. 332–349, 2009.
3. L. Xu, *Fluid Dynamics in Horizontal Cylindrical Containers and Liquid Cargo Vehicle Dynamics*, Ph.D. Thesis, University of Regina, Saskatchewan, 2005.
4. Celebi, M.S., Kim, M.H., Beck, R.F. Fully Non-linear 3-D Numerical Wave Tank Simulation. *J. of Ship Research*, Vol.42, No.1, pp 33-45. 1998
5. K. Modaressi-Tehrani, S. Rakheja, I. Stiharu, Three-dimensional analysis of transient slosh within a partly-filled tank equipped with baffles, *Veh. Syst.Dyn.* 45, pp. 525–548, 2007.
6. L. Xu, *Fluid Dynamics in Horizontal Cylindrical Containers and Liquid Cargo Vehicle Dynamics*, Ph.D. Thesis, University of Regina, Saskatchewan, 2005.
7. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. & Wrobel, L.C. *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
9. Вандышев К.В., Еселева Е.В., Стрельникова Е.А. Собственные формы сингулярных и гиперсингулярных операторов на круге/ Труды XIV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», Харьков-Херсон, 2009, ч.1, С.34-37.

УДК 532.5

Алгоритм численного решения системы уравнений Навье-Стокса методом конечных объемов

В. Б. Погрибный, Е. А. Стрельникова

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

Рассмотрен способ численного решения системы уравнений Навье-Стокса методом конечных объемов на структурированной сетке. Для каждой из проекций скорости и давления используется своя сетка. Уравнение Пуассона решается методом релаксации. Получены решения для задачи течения жидкости между двумя пластинами и в квадратной трубе.

Ключевые слова: метод конечных объемов, численное решение уравнений Навье-Стокса

Розглянуто спосіб чисельного рішення рівнянь Нав'є-Стокса методом скінчених об'ємів на структурованій сітці. Для кожної із проекцій швидкості і для тиску використовується окрема сітка. Рівняння Пуассона розв'язується методом релаксацій. Отримано рішення для задачі току рідини між двома пластинами і у прямокутній трубі.

Ключові слова: скінчених об'ємів, чисельне рішення рівнянь Нав'є-Стокса

A method of numerical solving Navier-Stokes system of equation is considered. Finite-volume method on structured uniform grid, and different grids for pressure and velocity are used. Poisson equation is solved with SOR method. There are obtained solutions for flows between two plates and in a square tube.

Key words: finite-volume method, numerical solution of Navier-Stokes equations.

1. Постановка задачи

Статья посвящена решению уравнений Навье-Стокса методом конечных объемов, потому что эти уравнения имеют одновременно две неизвестные переменные, и уравнение приходится разделять на части. Предложен новый метод разделения, в несколько этапов, где сначала находится распределение скорости без учета давления, потом находится давление и скорость корректируется. Идея взята у Gréтар Tryggvason, здесь же предложена ее реализация в двумерном и трехмерном пространстве.

2. Простой двумерный случай

Начнем с описания программы для расчета двумерных потоков жидкости.

Используемые уравнения движения

Уравнения движения жидкости, если на нее не действуют внешние силы, кроме гравитации, и вязкость одинакова, будут выглядеть так:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (\nabla u) u = -\nabla p + \rho g + \mu \Delta u \quad (2.1)$$

$$\nabla u = 0 \quad (2.2)$$

2.1. Интегрирование по времени

Для интегрирования уравнения Навье-Стокса разделим его на две части, рассчитаем сначала поток без учета давления

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -A^n + g + \frac{1}{\rho^n} D^n \quad (2.3)$$

А потом добавим давление

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -\frac{\nabla_h p}{\rho^n} \quad (2.4)$$

Здесь индекс n обозначает данный шаг по времени, $n+1$ – следующий шаг. A – дискретное приближение конвективного слагаемого, D – диффузионного, индекс h обозначает дискретное приближение градиента.

Давление должно быть выбрано таким образом, чтобы оно удовлетворяло уравнение неразрывности в дискретном виде.

$$\nabla_h u^{n+1} = 0 \quad (2.5)$$

Подставив сюда уравнение для давления, получим уравнение Пуассона.

$$\nabla_h \left(\frac{1}{\rho^n} \nabla_h p \right) = \frac{1}{\Delta t} \nabla_h u^* \quad (2.6)$$

Как только давление будет найдено, можно найти скорость на следующем шаге по времени, используя уравнение (2.4).

2.2. Пространственная дискретизация

Для дискретизации уравнений движения используем метод конечных объемов, то есть допускаем, что уравнение удовлетворяется в малом контрольном объеме. Определим среднюю скорость в объеме как

$$u = \frac{1}{V} \int_V u(x) dv. \quad (2.7)$$

После этого запишем средние величины конвективного и диффузионного слагаемых, и из интеграла по объему перейдем к интегралу по поверхности:

$$A = \frac{1}{V} \int_V (\nabla u) u dv = \frac{1}{V} \oint_S u(u \cdot n) ds, \quad (2.8)$$

$$D = \frac{\mu}{V} \int_V \Delta u dv = \frac{1}{V} \oint_S \nabla u \cdot n ds. \quad (2.9)$$

Давление аппроксимируется как интеграл градиента давления по контрольному объему.

$$\nabla_h p = \frac{1}{V} \int_V \nabla p dv = \frac{1}{V} \oint_S n ds \quad (2.10)$$

Таким образом, неопределенной остается только форма контрольного объема. Для простоты будем использовать равномерную сетку, образованную перпендикулярными прямыми. Для обозначения позиции на сетке будем использовать индексы – i для оси x и j для оси y .

Для несжимаемых жидкостей, как показал опыт, удобнее всего использовать одну сетку для скоростей и другую для давления.

Выберем направление прямых, образующих сетку, таким образом, чтоб горизонтальные прямые совпадали с осью абсцисс, а вертикальные – с осью

ординат. Тогда размеры нашего контрольного объема будут $\Delta x, \Delta y$, а его объем – $V = \Delta x \Delta y$.

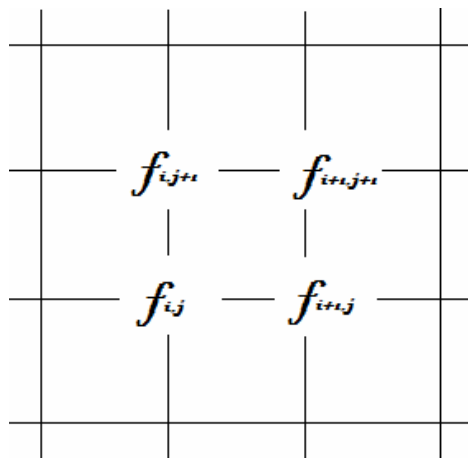


Рис.1. Распределение функции на сетке.

Аппроксимируем уравнение (2.5), интегрируя его по объему, обозначенному на рисунке ниже, с использованием дискретного выражения для дифференциала, и получаем

$$\Delta y \left(u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \right) + \Delta x \left(v_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - v_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Используя такую сетку напишем уравнение для скорости из (1.3)

$$u_{i+1/2,j}^* = u_{i+1/2,j}^n + \Delta t \left\{ (-A_x)_{i+\frac{1}{2},j}^n + (g_x)_{i+\frac{1}{2},j}^n + \frac{1}{1/2(\rho_{i+1,j}^n + \rho_{i,j}^n)} (D_x)_{i+1/2,j}^n \right\}, \quad (2.12)$$

и

$$v_{i,j+1/2}^* = v_{i,j+1/2}^n + \Delta t \left\{ (-A_y)_{i,j+1/2}^n + (g_y)_{i,j+1/2}^n + \frac{1}{1/2(\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j}^n)} (D_y)_{i,j+1/2}^n \right\}. \quad (2.13)$$

Уравнения для коррекции скоростей будут такими:

$$u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i+1/2,j}^* - \frac{\Delta t}{1/2(\rho_{i+1,j}^n + \rho_{i,j}^n)} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x}, \quad (2.14)$$

$$v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j+1/2}^* - \frac{\Delta t}{1/2(\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j}^n)} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y}. \quad (2.15)$$

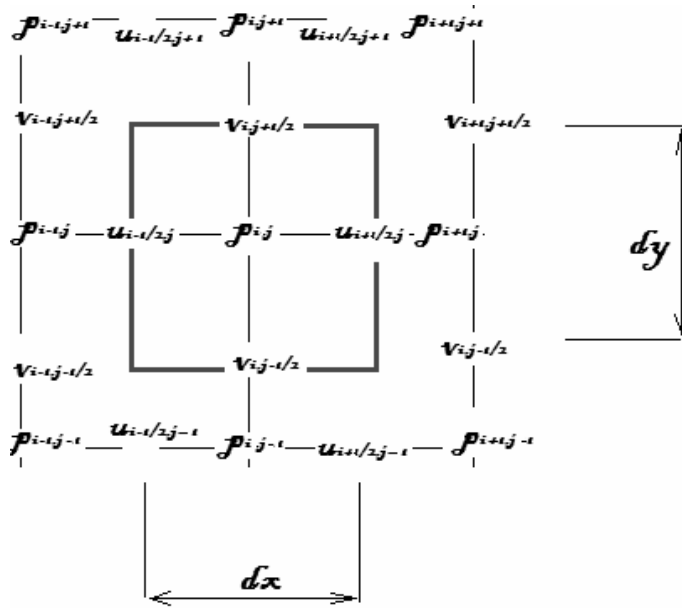


Рис.2. Расположение проекций скорости и давления.

2.3. Дискретизация конвекционного слагаемого

Аппроксимируем поток через границу контрольного объема значением в центре этой границы:

$$(A_x)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \{ [(uu)_{i+1,j} - (uu)_{i,j}] \Delta y + [(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}] \Delta x \}, \tag{2.16}$$

$$(A_y)_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \{ [(vv)_{i,j+1} - (vv)_{i,j}] \Delta x + [(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}] \Delta y \}. \tag{2.17}$$

Для нахождения скоростей в тех местах, где они не определены, используем линейную интерполяцию и получаем:

$$(A_x)_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{2} \right)^2 - \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n + u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{2} \right) - \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n + u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i+1,j-\frac{1}{2}}^n + v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{2} \right) \right] \tag{2.18}$$

$$(A_y)_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{v_{i,j+3/2}^n + v_{i,j+1/2}^n}{2} \right)^2 - \left(\frac{v_{i,j+1/2}^n + v_{i,j-1/2}^n}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{u_{i+1/2,j+1}^n + u_{i+1/2,j}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i+1,j+1/2}^n + v_{i,j+1/2}^n}{2} \right) - \left(\frac{u_{i-1/2,j+1}^n + u_{i-1/2,j}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i-1,j+1/2}^n + v_{i,j+1/2}^n}{2} \right) \right] \quad (2.19)$$

2.4. Дискретизация диффузионного слагаемого

Таким же образом находим выражение для диффузионного слагаемого.

$$(D_x)_{i+1/2,j}^n = \frac{\mu}{\Delta x \Delta y} \left\{ \left(\left(\frac{du}{dx} \right)_{i+1,j} - \left(\frac{du}{dx} \right)_{i,j} \right) \Delta y + \left(\left(\frac{du}{dy} \right)_{i+1/2,j+1/2} - \left(\frac{du}{dy} \right)_{i+1/2,j-1/2} \right) \Delta x \right\}, \quad (2.20)$$

$$(D_y)_{i,j+1/2}^n = \frac{\mu}{\Delta x \Delta y} \left\{ \left(\left(\frac{dv}{dy} \right)_{i,j+1} - \left(\frac{dv}{dy} \right)_{i,j} \right) \Delta x + \left(\left(\frac{dv}{dx} \right)_{i+1/2,j+1/2} - \left(\frac{dv}{dx} \right)_{i-1/2,j+1/2} \right) \Delta y \right\}, \quad (2.21)$$

Подставим выражение для производной

$$(D_x)_{i+1/2,j}^n = \mu \left\{ \left(\frac{u_{i+3/2,j}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i-1/2,j}^n}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{u_{i+1/2,j+1}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i+1/2,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right\}, \quad (2.22)$$

$$(D_y)_{i,j+1/2}^n = \mu \left\{ \left(\frac{v_{i+1,j+1/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + v_{i-1,j+1/2}^n}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{v_{i,j+3/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + v_{i,j-1/2}^n}{\Delta y^2} \right) \right\}. \quad (2.23)$$

Стоит упомянуть, что это простая модель, которая работает только для некоторых случаев, в которых участвуют две жидкости с одинаковой вязкостью. В общем случае, нужно использовать полный тензор деформации.

2.5. Уравнение для давления

Уравнение получаем подстановкой уравнений для коррекции (2.14) и (2.15) в уравнение неразрывности (2.11). Вот результат:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\rho_{i+1,j}^n + \rho_{i,j}^n} - \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\rho_{i,j}^n + \rho_{i-1,j}^n} \right) + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j}^n} - \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\rho_{i,j}^n + \rho_{i,j-1}^n} \right) =$$

$$\frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^* - u_{i-\frac{1}{2},j}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^* - v_{i,j-\frac{1}{2}}^*}{\Delta y} \right). \quad (2.24)$$

Решение уравнения для давления обычно самая сложная часть любой симуляции несжимаемых потоков, и обычно необходимо пользоваться более продвинутыми методами решения, однако здесь мы используем метод релаксаций.

$$p_{i,j}^{\alpha+1} = \beta \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\rho_{i+1,j}^n + \rho_{i,j}^n} + \frac{1}{\rho_{i,j}^n + \rho_{i-1,j}^n} \right) + \frac{1}{y^2} \left(\frac{1}{\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j}^n} + \frac{1}{\rho_{i,j}^n + \rho_{i,j-1}^n} \right) \right]^{-1} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{p_{i+1,j}^\alpha}{\rho_{i+1,j}^n + \rho_{i,j}^n} + \frac{p_{i+1,j}^{\alpha+1}}{\rho_{i,j}^n + \rho_{i-1,j}^n} \right) + \frac{1}{y^2} \left(\frac{p_{i,j+1}^\alpha}{\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j}^n} + \frac{p_{i,j-1}^{\alpha+1}}{\rho_{i,j}^n + \rho_{i,j-1}^n} \right) - \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^* - u_{i-\frac{1}{2},j}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^* - v_{i,j-\frac{1}{2}}^*}{\Delta y} \right) + (1-\beta) p_{i,j}^\alpha. \quad (2.25)$$

2.6. Граничные условия

Перед тем, как использовать выведенные ранее дискретные уравнения, необходимо установить подходящие граничные условия. Использование структурированной сетки делает это особенно простым. Сначала, определим мнимые объемы вне рассчитываемой области. Опираясь значениями в этих объемах будем добиваться выполнения тех или иных граничных условий. Для нормальной компоненты скорости все очень просто – так как центр контрольного объема совпадает с границей, мы можем просто установить нужное значение. Для неподвижной стенки это ноль. Для тангенциальной компоненты немного сложнее – граница находится между двумя точками, в которых задается скорость. Но мы можем такое уравнение, воспользовавшись линейной интерполяцией:

$$u_{\text{стенки}} = 1/2(u_{i,1} + u_{i,2}), \quad (2.26)$$

где $u_{\text{стенки}}$ обозначает тангенциальную скорость на границе, а $u_{i,1}$ и $u_{i,2}$ – скорости на сетке. Чтоб условие выполнялось, нужно задать $u_{i,1}$. Выразим ее из предыдущего уравнения:

$$u_{i,1} = 2u_{\text{стенки}} - u_{i,2}. \quad (2.27)$$

Уравнение для граничного условия на давление:

$$\frac{\delta U}{\delta t} = \frac{\delta p}{\delta x}, \quad (2.28)$$

где U – нормальная скорость на границе. Для неподвижной стенки давление в мнимой ячейке просто совпадает с давлением на границе.

Порядок расчета

1. Найти временные скорости по формулам (2.12) и (2.13)
2. Найти давление по формуле (2.24) и граничные условия (2.27) и (2.28)
3. Скорректировать скорости (2.14), (2.15)

2.7. Результаты

Рассчитаем поток между двумя пластинами, расстояние между которыми 5 м. и градиент давления 0,777 Па/м.

Точное значение, м/с	Приближенное значение, м/с	Погрешность, %
0,923	0,972	5,3
2,479	2,527	1,9
3,645	3,694	1,3
4,423	4,471	1
4,812	4,86	0,99
4,812	4,86	0,99
4,423	4,471	1

3. Трехмерный случай

Для рассмотрения нам нужно будет просто ввести еще одну пространственную координату, а соответственно, и индекс для нее, ввести скорость по этой координате и немного изменить наши уравнения. Так, введем координату z , назовем k - индекс для этой координаты, и l - скорость по z .

3.1. Новые уравнения для конвекции

Для начала возьмем уравнения для двумерного случая (2.16), (2.17), и добавим в них три новые буквы. При этом появится еще одно уравнение A_z :

$$(A_x)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ [(uu)_{i+1,j,k} - (uu)_{i,j,k}] \Delta y \Delta z + \right. \\ \left. [(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}] \Delta x \Delta z + [(ul)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - (ul)_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}] \Delta x \Delta y \right\}, \quad (3.1)$$

$$(A_y)_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ [(vv)_{i,j+1,k} - vv_{i,j,k}] \Delta x \Delta z + \right. \\ \left. [(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}] \Delta y \Delta z + [(vl)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (vl)_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}] \Delta y \Delta x \right\}, \quad (3.2)$$

$$(A_z)_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ [(ll)_{i,j,k+1} - ll_{i,j,k}] \Delta y \Delta x + \right. \\ \left. [(ul)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - (ul)_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}] \Delta y \Delta z + [(vl)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (vl)_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}] \Delta z \Delta x \right\}. \quad (3.3)$$

Здесь, мы видим, что безобидные Δx и Δy превращаются в страшные $\Delta x \Delta z$, $\Delta x \Delta y$ и т.д. Это происходит из-за того, что в уравнении (2.8) в конце

стоит dS , что в двумерном случае обозначает произведение двух граней. Все равно, потом они будут упрощены.

В двумерном случае мы, для того, чтоб найти скорости в тех местах, где они не определены, использовалась линейная интерполяция. А в трехмерном – используем ее еще раз:

$$\begin{aligned}
 (A_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n &= \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right)^2 - \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right)^2 \right] + \\
 &\frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n}{2} \right) - \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i+1,j-\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j-\frac{1}{2},k}^n}{2} \right) \right] + \\
 &\frac{1}{\Delta z} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k+1}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i+1,j,k+1/2}^n + l_{i,j,k+1/2}^n}{2} \right) - \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k-1}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i+1,j,k-1/2}^n + l_{i,j,k-1/2}^n}{2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 (A_y)_{i,j+1/2,k}^n &= \frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{v_{i,j+\frac{3}{2},k}^n + v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n}{2} \right)^2 - \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j-\frac{1}{2},k}^n}{2} \right)^2 \right] + \\
 &\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n}{2} \right) - \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j+1,k}^n + u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i-1,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n}{2} \right) \right] + \\
 &\frac{1}{\Delta z} \left[\left(\frac{v_{i,j+1/2,k+1}^n + v_{i,j+1/2,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i,j+1,k+1/2}^n + l_{i,j,k+1/2}^n}{2} \right) - \left(\frac{v_{i,j+1/2,k-1}^n + v_{i,j+1/2,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i,j+1,k-1/2}^n + l_{i,j,k-1/2}^n}{2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
 (A_z)_{i,j,k+1/2}^n &= \frac{1}{\Delta z} \left[\left(\frac{l_{i,j,k+\frac{3}{2}}^n + l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n}{2} \right)^2 - \left(\frac{l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + l_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n}{2} \right)^2 \right] + \\
 &\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k+1}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i+1,j,k+1/2}^n + l_{i,j,k+1/2}^n}{2} \right) - \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j,k+1}^n + u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i-1,j,k+1/2}^n + l_{i,j,k+1/2}^n}{2} \right) \right] +
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{v_{i,j+1/2,k+1}^n + v_{i,j+1/2,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i,j+1,k+1/2}^n + l_{i,j,k+1/2}^n}{2} \right) - \left(\frac{v_{i,j-1/2,k+1}^n + v_{i,j-1/2,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i,j-1,k+1/2}^n + l_{i,j,k+1/2}^n}{2} \right) \right] \quad (3.6)$$

3.2 Новые уравнения для диффузии

Продельваем аналогичные действия. Возьмем уравнение для двумерного случая (2.20). Сделаем его трехмерным:

$$(D_x)^n_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{\mu}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)_{i+1,j,k} - \left(\frac{du}{dx} \right)_{i,j,k} \right\} \Delta y \Delta z + \left(\frac{du}{dy} \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - \left(\frac{du}{dy} \right)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \Delta x \Delta z + \left(\frac{du}{dz} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \left(\frac{du}{dz} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \Delta x \Delta y \}. \quad (3.7)$$

И запишем еще два таких же уравнения:

$$(D_y)^n_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{\mu}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ \left(\frac{dv}{dy} \right)_{i,j+1,k} - \left(\frac{dv}{dy} \right)_{i,j,k} \right\} \Delta x \Delta z + \left(\frac{dv}{dx} \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - \left(\frac{dv}{dx} \right)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \Delta y \Delta z + \left(\frac{dv}{dz} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \left(\frac{dv}{dz} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \Delta x \Delta y \}. \quad (3.8)$$

$$(D_z)^n_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ \left(\frac{dl}{dz} \right)_{i,j,k+1} - \left(\frac{dl}{dz} \right)_{i,j,k} \right\} \Delta y \Delta z + \left(\frac{dl}{dy} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \left(\frac{dl}{dy} \right)_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \Delta x \Delta z + \left(\frac{dl}{dx} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \left(\frac{dl}{dx} \right)_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \Delta z \Delta y \}. \quad (3.9)$$

После использования выражения для производной получаем:

$$(D_x)^n_{i+\frac{1}{2},j,k} = \mu \left\{ \frac{u_{i+\frac{3}{2},j,k}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta x^2} + \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j-1,k}^n}{\Delta y^2} \right) + \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k+1}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \right\} \quad (3.10)$$

$$(D_y)^n_{i,j+\frac{1}{2},k} = \mu \left\{ \left(\frac{v^n_{i+1,j+\frac{1}{2},k} - 2v^n_{i,j+\frac{1}{2},k} + v^n_{i-1,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{v^n_{i,j+\frac{3}{2},k} - 2v^n_{i,j+\frac{1}{2},k} + v^n_{i,j-\frac{1}{2},k}}{\Delta y^2} \right) + \left(\frac{v^n_{i,j+\frac{1}{2},k+1} - 2v^n_{i,j+\frac{1}{2},k} + v^n_{i,j+\frac{1}{2},k-1}}{\Delta z^2} \right) \right\} \quad (3.11)$$

$$(D_z)^n_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \mu \left\{ \left(\frac{l^n_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - 2l^n_{i,j,k+\frac{1}{2}} + l^n_{i-1,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{l^n_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - 2l^n_{i,j,k+\frac{1}{2}} + l^n_{i,j-1,k+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right) + \left(\frac{l^n_{i,j,k+\frac{3}{2}} - 2l^n_{i,j,k+\frac{1}{2}} + l^n_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) \right\} \quad (3.12)$$

3.3 Поле давления

В трехмерном случае уравнение для давления будет иметь вид

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k}}{\rho_{i+1,j,k}^n + \rho_{i,j,k}^n} - \frac{p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k}}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i-1,j,k}^n} \right) + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\frac{p_{i,j+1,k} - p_{i,j,k}}{\rho_{i,j+1,k}^n + \rho_{i,j,k}^n} - \frac{p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k}}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j-1,k}^n} \right) + \frac{1}{\Delta z^2} \left(\frac{p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k}}{\rho_{i,j,k+1}^n + \rho_{i,j,k}^n} - \frac{p_{i,j,k} - p_{i,j,k-1}}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j,k-1}^n} \right) = \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{u^*_{i+\frac{1}{2},j,k} - u^*_{i-\frac{1}{2},j,k}}{\Delta x} + \frac{v^*_{i,j+\frac{1}{2},k} - v^*_{i,j-\frac{1}{2},k}}{\Delta y} + \frac{l^*_{i,j+\frac{1}{2},k} - l^*_{i,j-\frac{1}{2},k}}{\Delta z} \right). \quad (3.13)$$

И, соответственно, способ решения:

$$p_{i,j,k}^{\alpha+1} = \beta \left[\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{\rho_{i+1,j,k}^n + \rho_{i,j,k}^n} + \frac{1}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i-1,j,k}^n} \right) + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\frac{1}{\rho_{i,j+1,k}^n + \rho_{i,j,k}^n} + \frac{1}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j-1,k}^n} \right) + \frac{1}{\Delta z^2} \left(\frac{1}{\rho_{i,j,k+1}^n + \rho_{i,j,k}^n} + \frac{1}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j,k-1}^n} \right) \right]^{-1} + \left[\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{p_{i+1,j,k}^\alpha}{\rho_{i+1,j,k}^n + \rho_{i,j,k}^n} + \frac{p_{i-1,j,k}^\alpha}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i-1,j,k}^n} \right) + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\frac{p_{i,j+1,k}^\alpha}{\rho_{i,j+1,k}^n + \rho_{i,j,k}^n} + \frac{p_{i,j-1,k}^\alpha}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j-1,k}^n} \right) + \frac{1}{\Delta z^2} \left(\frac{p_{i,j,k+1}^\alpha}{\rho_{i,j,k+1}^n + \rho_{i,j,k}^n} + \frac{p_{i,j,k-1}^\alpha}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j,k-1}^n} \right) - \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{u^*_{i+\frac{1}{2},j,k} - u^*_{i-\frac{1}{2},j,k}}{\Delta x} + \frac{v^*_{i,j+\frac{1}{2},k} - v^*_{i,j-\frac{1}{2},k}}{\Delta y} + \frac{l^*_{i,j,k+\frac{1}{2}} - l^*_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right) \right] + (1-\beta) p_{i,j,k}^\alpha. \quad (3.14)$$

3.4 Уравнения для скорости

Вот что получается, если записать уравнения (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), (2.30) в трехмерном виде:

$$u_{i+\frac{1}{2},j,k}^* = u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + \Delta t \left\{ (-A_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + (g_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + \frac{1}{1/2(\rho_{i+1,j,k}^n + \rho_{i,j,k}^n)} (D_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n \right\}, \quad (3.15)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2},k}^* = v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + \Delta t \left\{ (-A_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + (g_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + \frac{1}{1/2(\rho_{i,j+1,k}^n + \rho_{i,j,k}^n)} (D_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^n \right\}, \quad (3.16)$$

$$l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^* = l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \Delta t \left\{ (-A_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + (g_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{1/2(\rho_{i,j,k+1}^n + \rho_{i,j,k}^n)} (D_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n \right\}. \quad (3.17)$$

Уравнения для коррекции скоростей будут такими:

$$u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j,k}^* - \frac{\Delta t}{1/2(\rho_{i+1,j,k}^n + \rho_{i,j,k}^n)} \frac{p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k}}{\Delta x}, \quad (3.18)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} = v_{i,j+\frac{1}{2},k}^* - \frac{\Delta t}{1/2(\rho_{i,j+1,k}^n + \rho_{i,j,k}^n)} \frac{p_{i,j+1,k} - p_{i,j,k}}{\Delta y}, \quad (3.19)$$

$$l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} = l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^* - \frac{\Delta t}{1/2(\rho_{i,j,k+1}^n + \rho_{i,j,k}^n)} \frac{p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k}}{\Delta z}. \quad (3.19)$$

Граничные условия остаются такие же, как и в двумерной задаче, только на разных стенках могут меняться используемые координаты.

3.5 Результаты

Аналогично предыдущей задаче, попробуем рассчитать поток жидкости в квадратной трубе. Труба в форме квадрата 5x5, разбиение по 0,125. На графиках показана зависимость скорости от координаты в трех сечениях – как показано на рисунке.

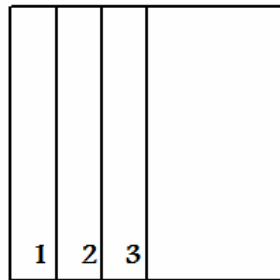


Рис.3. Сечения, в которых показаны графики

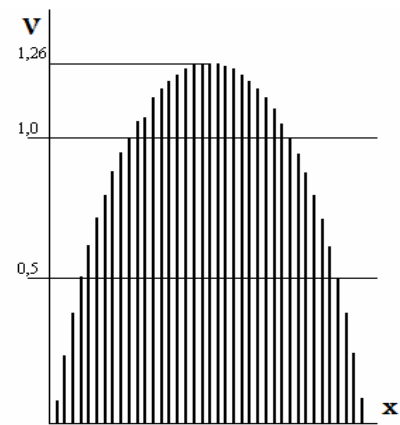
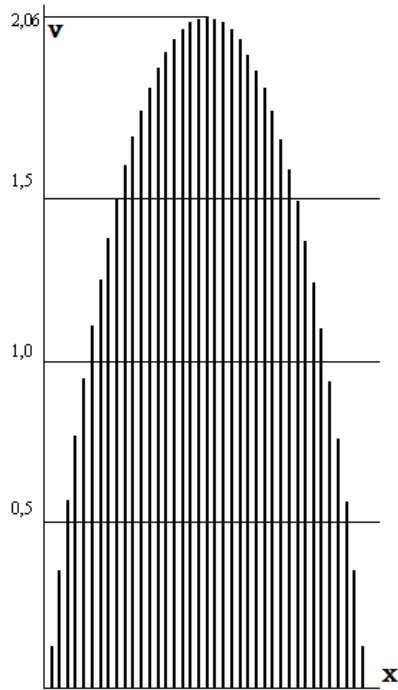
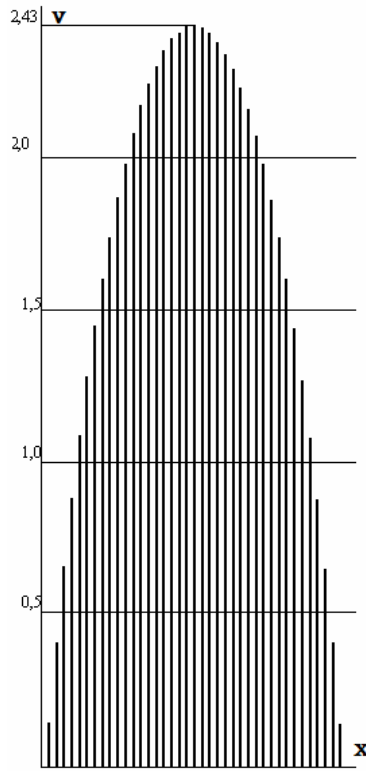


Рис.4 Скорости в сечении 1

*Рис.5 Скорости в сечении 2**Рис.6 Скорости в сечении 3*

На рисунках видно, что скорость максимальна в центре трубы, и уменьшается ближе к границам, таким образом, минимальна в углах трубы, что соответствует эксперименту.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grétar Tryggvason. A Front-tracking/Finite-Volume Navier-Stokes Solver for Direct Numerical Simulations of Multiphase Flows// October 19, 2012, P. 11-30p.

УДК 539.3:534.1

Моделювання коливань шаруватих оболонок зі складною формою плану при ударному навантаженні

Н. В. Сметанкіна

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, Україна

У статті запропоновано метод дослідження нестационарних коливань шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану при ударному навантаженні. Метод ґрунтується на розвиненні шуканих функцій у тригонометричні ряди. Динамічна поведінка оболонок досліджується в рамках теорії першого порядку, що враховує деформації поперечного зсуву, обтиснення по товщині й інерції обертання нормального елемента у кожному шарі. Модель ударної взаємодії базується на контактному законі Герца. Розглянуто коливання п'ятишарової оболонки. Теоретичні результати добре узгоджуються з експериментальними даними.

Ключові слова: шарувата оболонка, складна форма, ударне навантаження, нестационарні коливання.

В статье предложен метод исследования нестационарных колебаний слоистых незамкнутых цилиндрических оболочек со сложной формой плана при ударном нагружении. Метод основан на разложении искомых функций в тригонометрические ряды. Динамическое поведение оболочек исследуется в рамках теории первого порядка, учитывающей деформации поперечного сдвига, обжатие по толщине и инерции вращения нормального элемента в каждом слое. Модель ударного взаимодействия основана на контактном законе Герца. Рассмотрены колебания пятислойной оболочки. Теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: слоистая оболочка, сложная форма, ударное нагружение, нестационарные колебания.

The paper presents the method for analysis of non-stationary vibrations of laminated non-closed cylindrical shells with a complicated shape in plan view at impact loading. The method is based on expansion of the sought-for functions into trigonometrical series. Dynamical behavior of shells is investigated within the framework of the first order theory accounting to transverse shear strains, compression on width and normal element rotation inertia in each layer. Model of impact interaction is based on the Hertzian contact law. Vibrations of a five-layer shell are considered. The theoretical results are consistent with experimental data.

Key words: laminated shell, complicated shape, impact loading, non-stationary vibrations.

1. Вступ

Шаруваті конструкції мають ряд суттєвих переваг у порівнянні з однорідними й тому широко застосовуються в різних галузях техніки. Розрахунок параметрів динамічного відгуку при ударному навантаженні є важливим напрямком дослідження коливань шаруватих конструкцій.

У статтях [1, 2] за допомогою методу скінчених елементів розглянуті шаруваті кругові пластини при ударному впливі. Встановлено, що такі пластини мають більш високий опір удару, ніж монолітні пластини рівної маси. Результати скінченно-елементного моделювання добре погоджуються з експериментальними даними. У роботі [3] запропоновано аналітичну модель ударної взаємодії ударника й шаруватих шарнірно опертих прямокутних

панелей. Переміщення, напруження й деформації в шарах обчислювалися методом скінченних елементів. У статті [4] досліджено перехідні процеси у шарнірно опертих шаруватих композитних циліндричних та сферичних оболонкових панелях при низькошвидкісному ударі у гідротеплових середовищах. Скінченно-елементний аналіз проведено у рамках геометрично нелінійної теорії. Модель зіткнення заснована на модифікованому контактному законі Герца.

Аналіз наведених робіт дозволяє зробити висновок, що для дослідження нестационарних коливань шаруватих конструкцій при ударному навантаженні найчастіше використовуються чисельні методи, а саме, метод скінченних елементів. В аналітичному вигляді розв'язок таких задач одержано тільки для шаруватих пластин і оболонок канонічної форми в плані.

Таким чином, розробка методів розв'язання задач нестационарної динаміки шаруватих оболонок зі складною формою плану, що дозволяють подати розв'язок у аналітичній формі є актуальним питанням.

У роботі [5] на основі методу розширення заданої області розглянуто задачу про нестационарні коливання шаруватої пластини складної форми у плані при ударному навантаженні. У даній роботі запропоновано метод розв'язання задачі про нестационарні коливання шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану, який дає можливість одержати розв'язок задачі в аналітичному вигляді.

2. Постановка задачі

Розглядається незамкнена шарувата незамкнена циліндрична оболонка радіуса R . Оболонка складається з I ізотропних шарів постійної товщини h_i та займає на координатній поверхні (зовнішня поверхня першого шару) область Ω , що обмежена контуром $\Gamma: x_\Gamma = x(s), y_\Gamma = y(s)$ (s – поточна довжина дуги). Координата x змінюється вздовж твірної, координата y – вздовж дуги поперечного перерізу оболонки. Додатний напрям осі Oz збігається з напрямом зовнішньої нормалі до координатної поверхні.

Удар наноситься індентором масою M з напівсферичною кінцевою частиною радіуса r , який скидається з висоти H на зовнішню поверхню першого шару оболонки. Швидкість його зіткнення з оболонкою визначається за формулою

$$V_z = \sqrt{2gH},$$

де g – прискорення вільного падіння. Розглядається низькошвидкісний удар, коли деформації оболонки залишаються пружними.

Передбачається, що область взаємодії індентора й оболонки є круг радіуса $a(t)$ із центром у точці з координатами (x_0, y_0) [6]. Радіус області контакту обчислюється за формулою

$$a(t) = \left[\frac{3}{16} F(t)(\theta_1 + \theta) \right]^{1/3},$$

де

$$\theta_1 = \frac{4(1-v_1^2)}{E_1}, \quad \theta = \frac{4(1-v^2)}{E};$$

$F(t)$ – сила контактної взаємодії індентора й оболонки, t – час, E_1 та v_1 – модуль пружності й коефіцієнт Пуассона матеріалу першого шару оболонки, E та v – відповідні характеристики матеріалу індентора.

Рівняння руху індентора має вигляд

$$M z_{,tt} = M g - F(t), \quad z(0) = 0, \quad z_{,t}(0) = V_z, \quad (2)$$

де $z = z(t)$ – переміщення індентора.

Умова сумісності переміщення індентора й оболонки записується в такому вигляді [7]:

$$w_0 + \alpha_c - z \geq 0. \quad (3)$$

Тут α_c – контактне зближення індентора й оболонки в точці дотику (x_0, y_0) , $w(x_0, y_0, t)$ – прогин зовнішньої поверхні першого шару оболонки в точці (x_0, y_0) .

Контакт індентора й оболонки відбувається при перетворенні нерівності (3) на рівність

$$w_0 + \alpha_c - z = 0. \quad (4)$$

Контактне зближення α_c визначається з розв'язку задачі Герца [8] про вдавнення кулі в пружний півпростір

$$\alpha = \kappa_1 F^{2/3},$$

де

$$\kappa_1 = \left[\frac{9(\theta_1 + \theta)^2}{256r} \right]^{1/3}.$$

3. Метод розв'язання

Динамічна поведінка оболонки описується на основі кінематичних гіпотез, які враховують деформації поперечного зсуву, обтиснення по товщині й інерції обертання нормального елемента у межах кожного шару,

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I(k-1)+i}, \quad k=1,2,3, \quad i=\overline{1, I}, \quad (5)$$

де $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $\delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i$; $u_k = u_k(x, y, t)$ ($k=1,2,3$) – переміщення точки

координатної поверхні в напрямку координатних осей; $u_{3+I(k-1)+i} = u_{3+I(k-1)+i}(x, y, t)$ ($k=1,2$) – кути повороту нормального елемента в i -му шарі навколо координатних осей Ox і Oy ; $u_{3+2I+i} = u_{3+2I+i}(x, y, t)$ – обтиснення нормального елемента в i -му шарі.

З варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона [7] одержимо рівняння руху оболонки під впливом навантаження \mathbf{P}

$$\left[\mathbf{ШP} \right] \mathbf{U}_{,tt} - \left[\mathbf{Л} \right] \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{,t} = 0, \quad t = 0, \quad (6)$$

і систему граничних умов на контурі Γ

$$\left[\mathbf{B}^\Gamma \right] \mathbf{U} = \mathbf{P}^\Gamma, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (7)$$

де $\left[\mathbf{ШP} \right]$ та $\left[\mathbf{Л} \right]$ – симетричні матриці;

$$\mathbf{U} = \{u_j(x, y, t)\}, \quad \mathbf{P}^\Gamma = \{p_j^\Gamma(x, y, t)\}, \quad \mathbf{P} = \{p_j(x, y, t)\}, \quad p_j = 0, \quad j \neq 3, \quad p_3 = p_z(x, y, t);$$

p_z – контактний тиск, $B_{ij}^\Gamma = \chi_i^1 B_{ij}^u + \chi_i^2 B_{ij}^\sigma$, $i, j = \overline{1, 3I+3}$.

Вигляд елементів матриці $\left[\mathbf{B}^\Gamma \right]$ та вектора граничних навантажень \mathbf{P}^Γ залежить від граничних умов на контурі оболонки. Надаючи різних значень коефіцієнтам χ_i^1 та χ_i^2 (7), можна моделювати необхідні граничні умови на контурі оболонки.

Метод розв'язання задачі (6), (7) базується на прийомі розширення заданої області [5, 7]. Вихідна оболонка розширюється до допоміжної оболонки, форма і граничні умови якої обираються таким чином, щоб розв'язок задачі можна було одержати у аналітичній формі. Розв'язок має найбільш простий вигляд, якщо як допоміжну обрати прямокутну в плані шарнірно оперту оболонку. Тоді розв'язок вихідної задачі можна записати у вигляді розвинень у тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють граничні умови шарнірного опирання.

Щоб забезпечити виконання вихідних граничних умов (7), до допоміжної оболонки додаються додаткові компенсуючі навантаження $\mathbf{Q}^{\text{comp}} = \{q_j^{\text{comp}}(x, y, t)\}$, $j = \overline{1, 3I+3}$, які неперервно розподілені вздовж контуру Γ . Таким чином, задача про коливання оболонки складної форми з довільними граничними умовами зводиться до задачі про коливання прямокутної в плані шарнірно опертої оболонки. Компенсуючі навантаження входять у рівняння руху допоміжної оболонки у вигляді таких інтегральних співвідношень:

$$p_j^{\text{comp}}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{3I+3} \oint_{\Gamma} \zeta_{jk} q_k^{\text{comp}}(s, t) \delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma) ds, \quad j, k = \overline{1, 3I+3},$$

де $\delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma)$ – двовимірна δ -функція.

Елементи матриці ζ_{jk} , що не дорівнюють нулю, мають вигляд

$$\zeta_{11} = \zeta_{22} = \zeta_{3+i \ 3+i} = \zeta_{3+I+i \ 3+I+i} = y'_\Gamma, \quad \zeta_{33} = \zeta_{3+2I+i \ 3+2I+i} = 1,$$

$$\zeta_{12} = \zeta_{3+i \ 3+I+i} = x'_\Gamma, \quad \zeta_{21} = \zeta_{3+I+i \ 3+i} = -x'_\Gamma, \quad i = \overline{1, I},$$

$$\text{де } x'_\Gamma = \frac{dx_\Gamma}{ds}, \quad y'_\Gamma = \frac{dy_\Gamma}{ds}.$$

З умови задоволення вихідних граничних умов на контурі Γ (7) формується система інтегральних рівнянь, з якої визначаються невідомі компенсуючі навантаження,

$$\left[\mathbf{B}^\Gamma \right] \mathbf{U} \left[\mathbf{Q}^{\text{comp}}(x, y, t) \right] = \mathbf{P}^\Gamma, \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (8)$$

Метод розв'язання системи (8) полягає у тому, що функції переміщень (5), заданих і компенсуючих навантажень розвиваються в подвійні тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють граничні умови допоміжної оболонки,

$$u_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{jmn}(t) C_{jmn}(x, y), \quad p_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}(t) C_{jmn}(x, y),$$

$$p_j^{\text{comp}}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^{\text{comp}}(t) C_{jmn}(x, y), \quad j = \overline{1, 3I+3},$$

де

$$C_{1mn} = \cos \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B}, \quad C_{2mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \cos \frac{n\pi y}{B}, \quad C_{3mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B},$$

$$C_{3+i mn} = C_{1mn}, \quad C_{3+I+i mn} = C_{2mn}, \quad C_{3+2I+i mn} = C_{3mn},$$

$$p_{jmn}(t) = \frac{4}{AB} \int_0^A \int_0^B p_j(t) C_{jmn}(x, y) dx dy,$$

$$p_{jmn}^{\text{comp}}(t) = \frac{4}{AB} \sum_{k=1}^{3I+3} \oint_{\Gamma} \zeta_{jk} q_k^{\text{comp}}(s, t) C_{jmn}(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}) ds;$$

$$j = \overline{1, 3I+3}, \quad i = \overline{1, I}, \quad m = \overline{1, m^*}, \quad n = \overline{1, n^*};$$

A – довжина твірної допоміжної оболонки, B – довжина дуги цієї оболонки.

Розв'язок рівняння руху індентора (2) одержимо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа [7].

Далі функції компенсуючих навантажень розвиваються в ряд уздовж контуру Γ

$$q_j^{\text{comp}}(s, t) = \sum_{\alpha=1, 2}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} q_{j\alpha\mu}(t) b_{\alpha\mu}(s), \quad j = \overline{1, 3I+3},$$

де

$$b_{1\mu} = \sin [\mu\gamma(s)], \quad b_{2\mu} = \cos [\mu\gamma(s)], \quad \gamma(s) = 2\pi \int_0^s d\tilde{s} / \oint_{\Gamma} d\tilde{s}, \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi, \quad \mu = \overline{0, \mu^*}.$$

Граничні функції, що входять у вихідні граничні умови на контурі Γ (7), також розвиваються в ряд уздовж контуру Γ . У результаті система (8) на кожному кроці за часом перетворюється на систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів розвинення компенсуючих навантажень у ряд уздовж контуру Γ . Система рівнянь руху (6) перетворюється на систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка інтегрується методом розвинення розв'язку в ряд Тейлора [5, 7]. Таким чином, після обчислення компенсуючих навантажень розв'язок задачі набуває вигляду

$$u_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{AB} \sum_{k=1}^{3I+3} \pi_{jk}^{mn} \sum_{l=1}^{3I+3} \sum_{\alpha=1, 2}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \theta_{kl\alpha\mu}^{mn} q_{l\alpha\mu}(t) + \varepsilon_{jmn}(t) \right) C_{jmn}(x, y),$$

$$j = \overline{1, 3I+3},$$

де π_{jk}^{mn} , $\theta_{kl\alpha\mu}^{mn}$, ε_{jmn} – елементи матриць, отриманих у результаті чисельних перетворень.

Після обчислення компенсуючих навантажень, визначаються переміщення (1), деформації і напруження у шарах вихідної оболонки.

4. Чисельні результати

З метою підтвердження вірогідності чисельних результатів проведено порівняння розрахункових і експериментальних даних для п'ятишарової вільно опертої оболонки при ударі індентором з органічного скла. Контур оболонки описаний рівняннями кривих Ламе

$$\Gamma: \left(\frac{x}{\alpha}\right)^c + \left(\frac{y}{\beta}\right)^c = 1,$$

де $\alpha = 0,3$ м, $\beta = 0,14$ м, $c = 10$. Оболонка має такі геометричні параметри: $R = 5$ м, $h_1 = 5$ мм, $h_2 = 3$ мм, $h_3 = 15$ мм, $h_4 = 2$ мм, $h_5 = 20$ мм.

Шари мають такі механічні характеристики: $E_i = 6,12 \cdot 10^4$ МПа, $i = 1, 3, 5$, $E_i = 280$ МПа, $i = 2, 4$ (модулі пружності); $\nu_i = 0,22$, $i = 1, 3, 5$, $\nu_i = 0,39$, $i = 2, 4$ (коефіцієнти Пуассона); $\rho_i = 2500$ кг/м³, $i = 1, 3, 5$, $\rho_i = 1200$ кг/м³, $i = 2, 4$ (густина матеріалів шарів).

Індентор має наступні механічні й геометричні характеристики: $E = 5,7 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 0,38$, $\rho = 1200$ кг/м³ (густина матеріалу індентора), $M = 0,215$ кг, $r = 0,03$ м. Висота скидання індентора $H = 1$ м.

На рис. 1 показані теоретична (суцільна лінія) і експериментальна (штрихова лінія) залежності деформації ε_x^5 оболонки від часу. Також на рисунку наведено розрахункову схему оболонки.

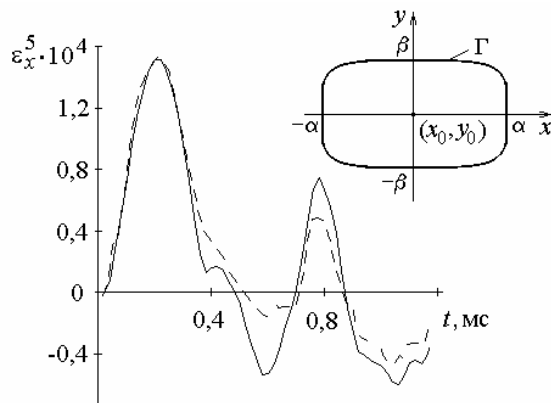


Рис. 1. Деформація ε_x^5 в п'ятишаровій оболонці при ударі

Удар завдається по зовнішній поверхні першого шару в точку з координатами (x_0, y_0) . Деформація обчислюється та вимірюється у точці з такими ж координатами на зовнішній поверхні п'ятого шару. Експериментальні дані одержані методом динамічної ширококугової тензометрії [5, 6]. Теоретична та експериментальна залежності добре узгоджуються між собою, що підтверджує вірогідність результатів розрахунку.

Як чисельний приклад, розглянуто коливання п'ятишарової вільно опертої оболонки. Форма плану оболонки наведена на рис. 2. Механічні характеристики шарів співпадають з характеристиками попередньо розглянутої оболонки. Оболонка має наступні геометричні параметри: $R = 2$ м, $l_1 = 0,62$ м, $l_2 = 0,68$ м, $l_3 = 0,64$ м, $l_4 = 0,75$ м, $R_1 = 0,05$ м, $R_2 = 0,03$ м, $R_3 = 0,04$ м, $R_4 = 0,045$ м, $h_1 = 5$ мм, $h_2 = h_4 = 4$ мм, $h_3 = 15$ мм, $h_5 = 6$ мм.

Удар завдається індентором з органічного скла масою $M = 0,123$ кг та радіусом головної частини $r = 0,03$ м по зовнішній поверхні першого шару, висота скидання індентору $H = 1$ м.

На рис. 3 наведені залежності напружень σ_x^5 (суцільна лінія) та σ_y^5 (штрихова лінія) від часу у точці C (рис. 2) на зовнішній поверхні п'ятого шару.

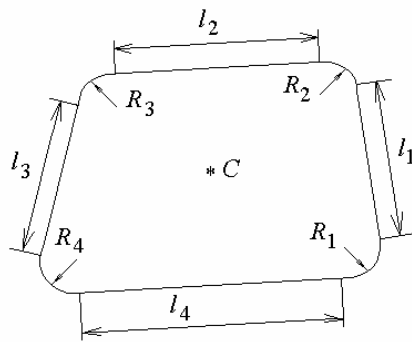


Рис. 2 Схема плану оболонки

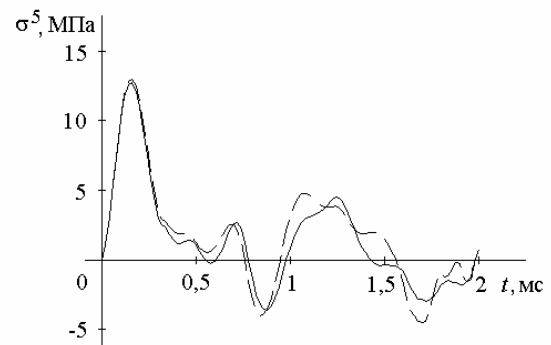


Рис. 3 Зміння у часі напруження в оболонці

5. Висновки за результатами й напрямки подальших досліджень

Розроблено метод дослідження нестационарних коливань шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану при ударному навантаженні, який дозволяє подати розв'язок задачі у вигляді тригонометричного ряду.

Можливості методу проілюстровані на прикладі розрахунку деформацій п'ятишарових вільно опертих оболонок при ударі індентором з напівсферичною кінцевою частиною. Добре узгодження теоретичних і експериментальних даних підтвердило вірогідність результатів, одержаних за допомогою запропонованого методу.

Надалі метод можна застосувати до розрахунку оболонок з різною формою плану та різними граничними умовами при дослідженні коливань оболонкових

елементів енергетичних, транспортних і будівельних конструкцій під дією інтенсивних швидкоплинних навантажень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Qiu X., Deshpande V.S., Fleck N.A. Dynamic response of a clamped circular sandwich plate subject to shock loading // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*– 2004.– v. 71, № 5.– P. 637 – 645.
2. McShane G.J., Radford D.D., Deshpande V.S., Fleck N.A. The response of clamped sandwich plates with lattice cores subjected to shock loading // *Europ. J. Mechanics – A/Solids.*– 2006.– v. 25, № 2.– P. 215 – 229.
3. Malekzadeh K., Khalili M.R., Mittal R.K. Analytical prediction of low-velocity impact response of composite sandwich panels using new TDOF spring–mass–damper model // *J. Composite Materials.* – 2006.– v. 40, № 18.– P. 1671–1689.
4. Naidu N.V.S., Sinha P.K. Nonlinear impact behaviour of laminated composite shells in hygrothermal environments // *Int. J. Crashworthiness.*– 2005.– v. 10, № 4.– P. 389 – 402.
5. Smetankina N.V., Shupikov A.N., Sotrikhin S.Yu., Yareschenko V.G. A noncanonically shape laminated plate subjected to impact loading: Theory and experiment // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*– 2008.– v. 75, № 5.– P. 051004-1 – 051004-9.
6. Smetankina N.V., Shupikov A.N., Sotrikhin S.Yu., Yareschenko V.G. Dynamic response of an elliptic plate to impact loading. Theory and experiment // *Int. J. Impact Eng.*– 2007.– v. 34, № 2.– P. 264 – 276.
7. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков: Изд-во «Міськдрук», 2011.– 376 с.
8. Динник А.Н. Избранные труды: в 2 т. Т. 1. – К.: Изд-во АН УССР, 1952. – 350 с.

УДК 004.82

Представлення баз нечітких знань за допомогою метаграфа та проведення нечіткого логічного виведення на його основі

М. Ю. Терновой, О. С. Штогріна

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,
Україна*

У роботі розширено підхід до представлення бази нечітких знань Мамдані у вигляді метаграфа та подальшого його використання. Даний підхід включає метод формування метаграфа, який однозначно відповідає базі нечітких знань. А також методи підготовки отриманого метаграфа для підвищення ефективності проведення нечіткого логічного виведення і знаходження деяких протиріч. Описано власне метод нечіткого логічного виведення на основі метаграфа, що представляє базу нечітких знань. Наведені приклади графічного представлення частин метаграфа, який представляє базу нечітких знань Мамдані.

Ключевые слова: база нечітких знань, лінгвістичні змінні, метаграф, протиріччя.

В работе расширен подход к представлению базы нечетких знаний Мамдани в виде метаграфа и дальнейшего его использования. Данный подход включает метод формирования метаграфа, который однозначно соответствует базе нечетких знаний. А также методы подготовки полученного метаграфа для повышения эффективности проведения нечеткого логического вывода и нахождения некоторых противоречий. Описан собственно метод нечеткого логического вывода на основе метаграфа, представляющего базу нечетких знаний. Приведены примеры графического представления частей метаграфа представляющего базу нечетких знаний Мамдани.

Ключові слова: база нечетких знаний, лингвистические переменные, метаграф, противоречия.

The paper describes an approach for Mamdani fuzzy knowledge base representation in the form of a metagraph and its further usage. This approach includes the method for construction of the metagraph, that biunique corresponds to the fuzzy knowledge base, methods for the metagraph preparation, that helps to increase the fuzzy inference efficiency and to determine some contradictions. The fuzzy inference based on the metagraph is proposed. The examples of the graphical representation of the fuzzy knowledge base in the form of the metagraph are given.

Key words: fuzzy knowledgebase, linguistic variables, metagraph, contradictions.

Вступ

Якість та ефективність роботи експертних систем, які базуються на базах нечітких знань (БНЗ) залежить від форм представлення БНЗ та методів проведення нечіткого логічного виведення. Більшість існуючих систем для роботи з експертними знаннями пропонують зберігати знання у вигляді невпорядкованого набору правил «Якщо - То», але це ускладнює процес виведення, оскільки вимагає повного перебору правил [1, 2]. У роботах [3, 4] пропонуються методи та способи, за рахунок яких можливо підвищити ефективність проведення нечіткого логічного виведення, а також описуються умови, при виконанні яких можливо прискорити виведення. Але запропоновані методи розраховані на роботу тільки з деревоподібними БНЗ. Як наслідок, підвищення ефективності роботи з БНЗ, що не обов'язково є деревоподібними, та виявлення їх особливостей є актуальною задачею.

У роботі [5] описується одна з різновидностей графа - метаграф та розглянуто застосування метаграфів для формалізації логічного виведення. В роботі [6] запропоновано використовувати нечіткі метаграфи для подання нечітких знань. В даній роботі пропонується розширення даного підходу для подання та обробки знань, що представлені в базах нечітких знань Мамдані.

Представлення бази нечітких знань у вигляді метаграфа

Розглянемо представлення БНЗ Мамдані у вигляді метаграфа, для цього спочатку наведемо їх визначення.

Визначення 1. База нечітких знань Мамдані - це модель представлення знань, яка включає наступні складові:

Множину лінгвістичних змінних $\{X_i | i = \overline{1, N_X}\}$, де X - ім'я ЛЗ, N_X - кількість ЛЗ, та кожна ЛЗ містить терм-множину $T_i = \{t_i^k | k = \overline{1, N_i}\}$, де t_i^k - терм, який має функцію належності (ФН) $\mu_{t_i^k}$, де k - номер терму, N_i - кількість термів ЛЗ X_i .

Множину правил «Якщо - То» $P = \{P_g | g = \overline{1, N_P}\}$, де N_P - кількість правил БНЗ. P_g це позначення для правил виду (1):

$$(P_l^z)_j = \text{ЯКЩО} (X_{j_1} = t_{j_1}^{k_1}) \text{ТА} (X_{j_2} = t_{j_2}^{k_2}) \text{ТА} \dots \text{ТА} (X_{j_{n_j}} = t_{j_{n_j}}^{k_{n_j}}) \text{ТО} (X_l = t_l^z), \quad (1)$$

де $(P_l^z)_j$ - j -е правило для визначення z -го терму ЛЗ з ідентифікатором l , в якому X_{j_s} - лінгвістична змінна, яка оцінюється якісним термом $t_{j_s}^{k_s}$; $s = \overline{1, n_j}$ - номер ЛЗ в лівій частині j -го правила, n_j - кількість ЛЗ, що знаходяться в лівій частині j -го правила.

Для скорочення запису введемо позначення для лівої та правої частини правила P_g :

$$P_g = (P_g^A, P_g^C), \text{ де}$$

$$P_g^A = \{t_{j_s}^{k_s} | s = \overline{1, n_j}\} - \text{множина термів, які входять до лівої частини правила;}$$

$$P_g^C = t_l^z - \text{терм, що є результатом правила.}$$

Зазначимо, що в подальшому викладенні в даній роботі під БНЗ маються на увазі саме бази нечітких знань Мамдані.

В роботі [5] пропонується визначення метаграфа, як двійки: породжуючої множини та множини ребер. У роботі [7] до цього визначення додаються ще дві складові: множина метавершин та множина метаребер. Однак для більшості задач та конкретно для задачі представлення БНЗ Мамдані у вигляді метаграфа розділення на ребра та метаребра не потребуються, що обумовлено особливостями задач. Тому в подальшому будемо розглядати метаграф, визначення якого приведено нижче.

Визначення 2. Метаграф $S = \langle V, M, E \rangle$ - це трійка множин, де $V = \{v_r \mid r = \overline{1, N_V}\}$ - породжуюча множина (множина вершин метаграфа),

N_V - кількість вершин метаграфа,

$M = \{m_q \mid q = \overline{1, N_M}\}$ - множина метавершин, N_M - кількість метавершин,

$E = \{e_h \mid h = \overline{1, N_E}\}$ - множина ребер, N_E - загальна кількість ребер у метаграфі.

Метавершина метаграфа - це вершина, яка включає множину вершин $m_q = \{v_r \mid v_r \in V, r = \overline{1, N_{m_q}}\}$, де N_{m_q} - кількість вершин, які входять до метавершини.

Для спрощення подальшого представлення матеріалу введемо поняття вузла метаграфа $mv \in (V \cup M)$. Таким чином вузол метаграфа - це або вершина, або метавершина.

Тоді ребро метаграфа визначається як $e_h = (mv_{out}, mv_{in})$, де mv_{out} - вузол, з якого виходить ребро, mv_{in} - вузол, до якого входить ребро відповідно.

Виходячи з вищенаведених визначень бази нечітких знань Мамдані та метаграфа нижче запропоновано підхід до представлення БНЗ у вигляді метаграфа, та його подальшого використання. Даний підхід включає метод формування метаграфа, метод нумерації вузлів метаграфа, метод виділення частини метаграфа, необхідної для визначення шуканої лінгвістичної змінної, та метод нечіткого логічного виведення на основі метаграфа, який представляє БНЗ.

Метод формування метаграфа, який представляє БНЗ, полягає у визначенні відображення F , яке дозволяє представити терми у вигляді вершин, а правила у вигляді метавершин та ребер метаграфа. В результаті такого представлення БНЗ всі правила, для визначення одного терму ЛЗ будуть згруповані та зв'язані з цим термом, це позбавить від повного перебору правил при проведенні нечіткого логічного виведення. Також з'явиться можливість виявлення ряду протиріч, що описані нижче, ще до початку проведення логічного виведення. Особливістю запропонованого методу є те, що отриманий в результаті такого відображення метаграф є ізоморфним до БНЗ, а отже є можливість однозначного відновлення БНЗ з метаграфа. Для надання такої можливості запропоновано пов'язати з вершиною додаткову інформацію про терм лінгвістичної змінної, якому дана вершина відповідає, та назву ЛЗ.

Визначення 3. Відображення $F: БНЗ \longrightarrow S'$, де $БНЗ$ - це база нечітких знань, S' - метаграф, який відповідає БНЗ, діє наступним чином:

1. Кожен терм кожної ЛЗ відображається у вершину метаграфа $F(t_i^k) = v(t_i^k)$. Зазначимо, що вершина створюється лише в тому

випадку, коли в метаграфі не існує вершини $v(t_i^k)$, яка відповідає терму t_i^k , в іншому випадку дублікат вершини не створюється.

2. Кожне правило відображається наступним чином:

$$F(P_g) = S'_g = \langle V_g, M_g, E_g \rangle, \text{ де}$$

S'_g - частина метаграфа, яка відповідає правилу P_g , що представляється формулою (1), де

$$V_g = \left\{ v(t_{j_1}^{k_1}), v(t_{j_2}^{k_2}), \dots, v(t_{j_{n_j}}^{k_{n_j}}), v(t_l^z) \right\}, \quad M_g = \{m_g\}, \quad E_g = \{e_g\}, \quad \text{де}$$

$$m_g = \left\{ v(t_{j_1}^{k_1}), v(t_{j_2}^{k_2}), \dots, v(t_{j_{n_j}}^{k_{n_j}}) \right\}, \quad e_g = (m_g, v(t_l^z)).$$

Метод формування метаграфа з неупорядкованої БНЗ буде полягати у застосуванні відображення F до кожного правила. При застосуванні відображення до S' додаються вершини, метавершини та ребра. Отже можемо сформулювати визначення метаграфа, який представляє БНЗ Мамдані.

Визначення 4. Будемо називати метаграфом, який представляє БНЗ Мамдані, такий метаграф $S' = \langle V, M, E \rangle$, який задовольняє наступним умовам:

1. Кожна вершина $v(t_i^k)$ метаграфа S' відповідає терму ЛЗ t_i^k .
2. Кожна метавершина $m_g = \{v_s \mid s = \overline{1, n_g}\}$ метаграфа S' відповідає P_g^A - лівій частині правила P_g . Метавершина m_g містить в собі вершини, які взаємооднозначно відповідають термам, що входять до P_g^A .
3. Кожне ребро e_g метаграфа S' , відповідає правилу P_g БНЗ. Ребро $e_g = (m_g, v(t_l^z))$ виходить з метавершини m_g , та входить до вершини $v(t_l^z)$, яка відповідає терму t_l^z в P_g^C .

Отже, виходячи з вищеведеного визначення можна зробити наступні висновки стосовно структури метаграфа S' , який представляє БНЗ. На відміну від звичайного метаграфа, структура метаграфа S' має особливості зазначені нижче. Якщо метаграф не відповідає хоча б одному із пунктів, то він або не відповідає БНЗ Мамдані, або БНЗ, яка представлена даним метаграфом має протиріччя.

Особливості структури метаграфа S' :

1. Метаграф S' не може містити циклів, бо це буде означати, що в БНЗ, яку представляє даний метаграф, є протиріччя виду: лінгвістичні змінні визначають лінгвістичні змінні, від яких вони залежать.
2. Метаграф S' не містить ребер, які виходять з вершини $\forall v(t_i^k) : \deg_{out}(v(t_i^k)) = 0$.
3. Метаграф S' обов'язково містить вершини, які не включені до жодної метавершини $\{v_r \mid \forall q : v_r \notin m_q\}$. Це вершини, які відповідають термам ЛЗ, для визначення котрої сформована БНЗ. Відсутність таких вершин свідчить про наявність циклів у метаграфі, що призводить до не виконання п.1, або про те, що метаграф не відповідає БНЗ Мамдані.
4. Метаграф S' не може містити ребер, які входять у метавершину $\forall m_g : \deg_{in}(m_g) = 0$. Наявність таких ребер означає, що консеквент правила містить декілька складових, що суперечить визначенню БНЗ Мамдані.
5. З метавершини може виходити тільки одне ребро $\forall m_g : \deg_{out}(m_g) = 1$. Наявність ребер в кількості більшій за одиницю означає, що в БНЗ існує два правила з однаковими умовами та різними результатами, тобто $\exists P_i, P_j : P_i^A = P_j^A \Rightarrow P_i^C \neq P_j^C$, що є протиріччям.
6. Метавершина не може містити двох та більше вершин, які відповідають термам однієї ЛЗ $\diamond m_g, v(t_i^k), v(t_h^s) : v(t_i^k) \diamond m_g, v(t_h^s) \diamond m_j \Rightarrow i \diamond h$. Невиконання даної умови буде означати, що в БНЗ існує правило, в якому лінгвістична змінна одночасно приймає два значення, що є протиріччям.

Для прикладу наведемо графічне зображення частини метаграфа, яка відповідає правилу визначеному формулою (1) (рис. 1) **Ошибка! Источник ссылки не найден.**

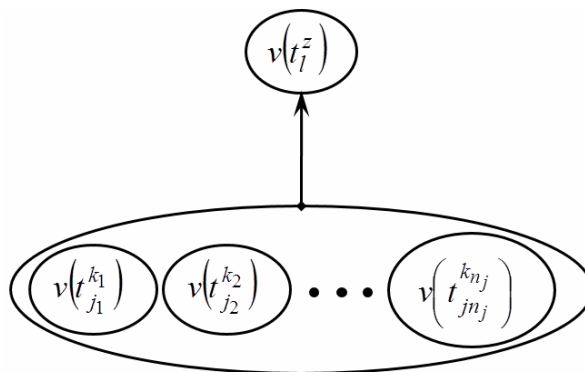


Рис.1 Частина метаграфа, яка відповідає правилу $(P_l^z)_j$

Для випадку коли терм є результатом в декількох правилах $(P_l^z)_j$, які визначаються формулою (1), та кількість правил дорівнює b , то об'єднане правило можна записати через частку «АБО». Таке правило буде мати наступний вигляд:

$$P_l^z = \text{ЯКЩО} \left(X_{j_{11}} = t_{j_{11}}^{k_{11}} \right) \text{ТА} \left(X_{j_{12}} = t_{j_{12}}^{k_{12}} \right) \text{ТА} \dots \text{ТА} \left(X_{j_{1n_1}} = t_{j_{1n_1}}^{k_{1n_1}} \right) \text{АБО} \\ \left(X_{j_{21}} = t_{j_{21}}^{k_{21}} \right) \text{ТА} \left(X_{j_{22}} = t_{j_{22}}^{k_{22}} \right) \text{ТА} \dots \text{ТА} \left(X_{j_{2n_2}} = t_{j_{2n_2}}^{k_{2n_2}} \right) \text{АБО} \dots \\ \text{АБО} \left(X_{j_{b1}} = t_{j_{b1}}^{k_{b1}} \right) \text{ТА} \left(X_{j_{b2}} = t_{j_{b2}}^{k_{b2}} \right) \text{ТА} \dots \text{ТА} \left(X_{j_{bn_b}} = t_{j_{bn_b}}^{k_{bn_b}} \right) \text{ТО} \left(X_l = t_l^z \right) \quad (2)$$

Для правила, визначеного формулою (2), результатом відображення $f(P_l^z) = S_z' = (V_z, M_z, E_z)$ буде частина метаграфа S_z' , де

$$V_z = \left\{ v \left(t_{j_{11}}^{k_{11}} \right), v \left(t_{j_{12}}^{k_{12}} \right), \dots, v \left(t_{j_{1n_1}}^{k_{1n_1}} \right), v \left(t_{j_{21}}^{k_{21}} \right), \dots, v \left(t_{j_{2n_2}}^{k_{2n_2}} \right), v \left(t_{j_{b1}}^{k_{b1}} \right), v \left(t_{j_{b2}}^{k_{b2}} \right), \dots, v \left(t_{j_{bn_b}}^{k_{bn_b}} \right), v \left(t_l^z \right) \right\}.$$

Причому (згідно п.1. визначення 4), не створюються дублікати вершин які відповідають однаковим термам,

$$M_z = \{ m_1, m_2, \dots, m_b \}, \text{ де } m_s = \left\{ v \left(t_{j_{s1}}^{k_{s1}} \right), v \left(t_{j_{s2}}^{k_{s2}} \right), \dots, v \left(t_{j_{sn_s}}^{k_{sn_s}} \right) \right\}, \text{ та}$$

$$E_z = \left\{ (m_1, v(t_l^z)), (m_2, v(t_l^z)), \dots, (m_s, v(t_l^z)), \dots, (m_b, v(t_l^z)) \right\}.$$

Припустимо, що $b = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 3$ та у правилі P_l^z терми співпадають наступним чином: $t_{j_{11}}^{k_{11}} = t_{j_{21}}^{k_{21}}$, $t_{j_{12}}^{k_{12}} = t_{j_{22}}^{k_{22}}$ та $t_{j_{13}}^{k_{13}} = t_{j_{33}}^{k_{33}}$, тоді графічне представлення частини метаграфа, яка відповідає частині БНЗ, що визначає терм ЛЗ t_l^z та визначається співвідношенням (2) показано на рис. 2.

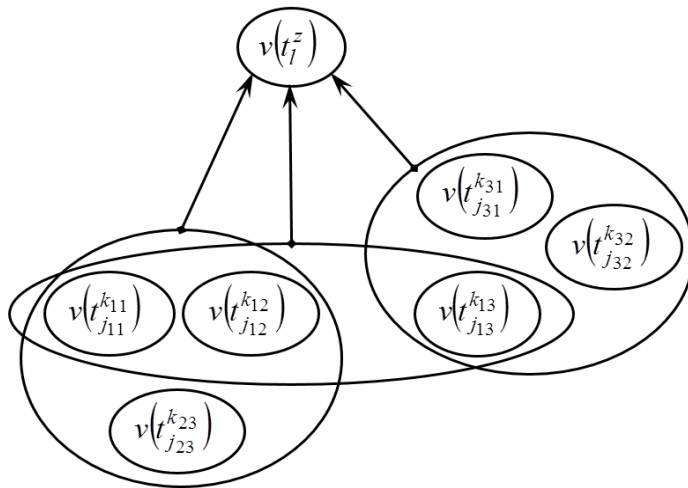


Рис.2 Частина метаграфа, яка відповідає правилу P_l^z **Нечітке логічне виведення на основі метаграфа, який представляє базу нечітких знань**

Для проведення нечіткого логічного виведення з використанням метаграфа, він повинен бути правильно сформованим, тобто відповідати БНЗ, яка не містить протиріч та на основі якої можливо отримати значення необхідної ЛЗ.

Сформулюємо задачу підготовки метаграфа для підвищення ефективності проведення нечіткого логічного виведення з використанням метаграфа. Підготовка буде полягати у нумерації вузлів метаграфа, яка буде задавати порядок обходу метаграфа, тобто порядок використання правил без повного їх перебору.

Дано:

Метаграф S' , який відповідає неупорядкованій БНЗ - $БНЗ = \bigcup_{z,l,j} (P_l^z)_j$.

Знайти:

Метаграф S'' , який відповідає БНЗ, з введеною на множині його вузлів нумерацією, яка відповідає порядку застосування правил при проведенні нечіткого логічного виведення.

Рішення даної задачі буде полягати у проведенні топологічного сортування метаграфа, в результаті якого буде введена нумерація вузлів. Це забезпечить виконання умови, що на момент використання правила всі його необхідні складові вже обчислені або відомі. Також перевагою попереднього введення такої нумерації буде запорука того, що в метаграфі відсутні цикли. Значимо, що при наявності циклів не можливо ввести правильну нумерацію.

Запропонований метод нумерації вузлів метаграфа, який представляє БНЗ Мамдані, базується на принципах обходу графа в глибину. Так, як і в методі обходу графу в глибину використовується поняття кольору вершини. В залежності від стану вузла метаграфа він може бути білим, сірим та чорним. Білий - початковий колір всіх вузлів, стан, коли вузол не розглядався. Сірий колір вузла означає, що вузол вже обробляється, але ще не отримав свого номеру. Чорним вузол стає коли його обробка закінчена та він отримав свій номер.

Запропонований метод складається з наступних кроків:

1. Знайти в метаграфі S' множину білих вершин, які не входять до жодної метавершини $V_0 = \{v_r \mid \forall q : v_r \notin m_q\}$.

2. Виконати процедуру $DFS(v_r)$ для кожної вершини з множини V_0 .

При запуску процедури $DFS(mv)$ вузол mv стає сірим, а по завершенню цієї процедури mv отримує номер та стає чорним.

Процедура $DFS(mv)$:

1. Якщо mv - вершина, то для кожної білої метавершини m , з якої виходить ребро, та входить до вершини mv виконати процедуру $DFS(m)$.

2. Якщо mv - метавершина, то для кожної білої вершини v , включеної до mv , виконати процедуру $DFS(v)$.
3. Зробити вузол mv чорним та пронумерувати його.

В результаті застосування даного методу отримуємо метаграф S'' , який відповідає БНЗ, з введеною на множині його вузлів нумерацією. Якщо в процесі застосування даного методу процедура $DFS(v)$ буде застосована до вершини, яка в даний час є сірою, то це буде означати наявність циклу в метаграфі.

Для визначення лінгвістичної змінної X_i , необхідно використовувати не всю БНЗ, а тільки частину, тобто тільки ті правила, які визначають задану ЛЗ. Використання лише необхідних правил дозволить суттєво скоротити час необхідний для виведення. Нижче сформульована постановка задачі виділення частини метаграфа, необхідної для визначення ЛЗ X_i .

Дано:

1. Метаграф S'' , який відповідає БНЗ, з введеною нумерацією вузлів.
2. ЛЗ X_i , яку слід знайти.

Знайти:

Метаграф S_i'' , який буде частиною метаграфа S'' та буде містити відображення тільки тих правил, які використовуються при проведенні нечіткого логічного виведення для знаходження значення ЛЗ X_i .

Рішення даної задачі містить наступні етапи:

1. Створити допоміжну структуру даних – чергу L .
2. Знайти у графі S_i'' всі вершини $V_0 = \{v(t_i^k) \mid k = \overline{1, N_i}\}$, які відповідають термам ЛЗ X_i .
3. Додати всі вершини з V_0 в кінець черги L .
4. Якщо черга L не пуста перехід на п.5, інакше перехід на п.9.
5. Взяти з початку черги L вершину $v(t_i^k)$.
6. Додати до метаграфа S_i'' наступні елементи, якщо вони там не присутні:
 - вершину $v(t_i^k)$,
 - всі ребра, що входять у вершину $v(t_i^k)$,
 - метавершини, з яких ці ребра виходять.
7. Вершини, які включені у метавершини, що додані на кроці 6 до метаграфа, додати в кінець черги L , якщо вони там не присутні.
8. Перехід на п.4.
9. Метаграф S_i'' сформовано.

Сформулюємо задачу проведення нечіткого логічного виведення використовуючи пронумерований метаграф, який представляє частину БНЗ, для визначення ЛЗ X_i .

Дано:

1. X_i - ЛЗ, яку необхідно визначити.
2. Метаграф $S_i^{//}$.
3. Вектор вхідних даних $x = (x_w | w = \overline{1, N_x})$.

Знайти:

Значення ЛЗ X_i .

Метод логічного виведення для визначення ЛЗ X_i при використанні метаграфа $S_i^{//}$ з введеною нумерацією вузлів буде складатись з наступних пунктів:

1. Визначити лінгвістичні змінні $\{X_w | w = \overline{1, N_{vx}}\}$, термам яких відповідають вершини $v(t_i^k)$, які не мають ребер, що входять $\deg_{in}(v(t_i^k)) = 0$.
2. Отримати з вектора x необхідні вхідні дані для проведення нечіткого логічного виведення $(x_w | w = \overline{1, N_{vx}})$.
3. Провести фазифікацію, та записати отримані значення, як значення вершин $v(t_i^k)$.
4. Обходити вершини та метавершини в порядку збільшення їх номерів.
 - 4.1. Для кожної метавершини обчислити її значення, яке буде дорівнювати мінімуму серед значень вершин, які входять до даної метавершини.
 - 4.2. Для кожної вершини обчислити її значення, що буде дорівнювати максимуму зі значень метавершин, ребра з яких входять в задану вершину.
5. Якщо значення всіх вершин обчислено, провести дефазифікацію на основі значень вершин, які відповідають термам ЛЗ X_i , інакше перехід на п.4

Висновки

В роботі запропоновано підхід до представлення БНЗ у вигляді метаграфа та його подальшого використання. Отриманий метаграф однозначно представляє БНЗ та дозволяє відновити її з метаграфа. Даний підхід дозволяє підвищити ефективність нечіткого логічного виведення та виявлення протиріч за рахунок використання лише необхідної частини правил та завданні порядку їх застосування.

Подальший розвиток роботи полягає в розробці методу інтеграції БНЗ за рахунок інтеграції метаграфів, та методів автоматичної візуалізації метаграфів, які представляють БНЗ, для надання можливостей графічного аналізу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Субботін С. О. Подання й обробка знань у системах штучного інтелекту та підтримки прийняття рішень. - Навчальний посібник. - Запоріжжя: ЗНТУ, 2008. - 341 с.
2. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 736 с.: ил.
3. Глоба Л. С., Терновой М. Ю., Штогріна О. С. Створення баз нечітких знань для інтелектуальних систем управління // Комп'ютинг - Міжнародний науково-технічний журнал – 2008. – т.7, № 1. – С.70-79.
4. Штовба С.Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику. - [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book1/1_7_5_6.php . – Электрон. текстовые данные.
5. Amit Basu, Robert W. Blanning Metagraphs and their applications. - Springer, 2010. - 160 p.
6. Zheng-Hua Tan. Fuzzy Metagraph and Its Combination with the Indexing Approach in Rule-Based Systems // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. - 2006. - Vol. 18, No. 6. - pp.829-841.
7. Астанин С.В., Драгныш Н.В., Жуковская Н.К. Вложенные метаграфы как модели сложных объектов. - Электронный научный журнал Инженерный вестник Дона. - номер 4 (часть2) – 2012. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1434> . – Электрон. текстовые данные.

CONTENTS

▪ E.V. Belkin, O. V. Kirichok, V. M. Kuklin, O. V. Pryimak.	5
About S-theory verification which is used to describe the wave field modulation instabilities	
▪ Y. Vasylenko, L. Dmytrotsa, M. Pryjmak.	21
Function class with a varying period	
▪ L. S. Globa, V. V. Kurdecha, S. V. Sulima.	33
Software update procedure in Software Defined Radio system	
▪ P. A. Glushich, O. V. Naumenko, E. A. Strelnikova.	44
Natural shapes of liquid sloshing in rigid cylindrical tank in low gravity condition	
▪ V. I. Gnitko, K. G. Degtyarev, A. M. Tonkonozenko.	51
Computer modeling of the destructive internal pressure on a cylindrical fuel tank	
▪ T. A. Grigорова, J. G. Zinenko.	60
Creating multimedia textbooks from interdisciplinary connections	
▪ T. A. Grigорова, A. I. Mandryka.	66
Special features of automation of preparing lectures and presentations for distance learning systems	
▪ N. D. Kahuta.	75
Mathematical foundations of relational databases. Part 1: presentation of the main table operation	
▪ G. V. Korobska	85
Semigroup of integration operator and its properties	
▪ T. V. Kutya.	99
Mathematical modeling of slope soil saturation taking into account the influence of heat transfer and multi-component chemical solution	
▪ S. N. Lamtyugova, M. V. Sidorov.	111
Mathematical modeling of the flow past ends problems in a cylindrical coordinate system	

▪ Yu. S. Litvinova, K. V. Maksymenko-Sheyko, T. I. Sheyko.	122
The R-functions for the Mathematical Modeling of 3D-house for the 3D-printing Technologies Realization	
▪ U. E. Ogorodnik, E. A. Strelnikova, Ju. S. Shuvalova.	129
Singular integral equations for free vibration problem of a fluid-filled shell of revolution	
▪ V. B. Pohribnyi, O. A. Strelnikova.	136
Algorithm for numerical solution of Navier-Stokes system of equations with a finite-volume method	
▪ N. V. Smetankina.	148
Modelling of vibrations of laminated shells with a complicated plan shape at impact loading	
▪ M. Y. Ternovoy, O. S. Shtogrina.	156
Fuzzy knowledge base representation in the form of metagraph and fuzzy inference based on it	
▪ CONTENTS	166

Наукове видання

**Вісник Харківського національного університету
№1105**

**Серія «Математичне моделювання. Інформаційні
технології. Автоматизовані системи управління»**

Випуск 24.

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О. О. Афанасьєва

Підписано до друку 28.04.2014 р.
Формат 70×108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. – 12,0
Обл.– вид. арк. – 13,9
Тираж 100 пр.
Ціна договірна

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна.
Видавництво

Надруковано ФОП «Петрова І.В.»
61144 Харків-144, вул. Гв.Широнінців, 79в, к.137, тел. 362-01-52
Свідоцтво про державну реєстрацію ВОО №948011 від 03.01.03