

ISSN 2304–6201

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

# ВІСНИК

Харківського національного  
університету імені В.Н. Каразіна



№ 1156

**Серія**

«Математичне моделювання.

Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління»

**Випуск 26**

Серія заснована 2003 р.

Харків  
2015

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 6 від 29.05.2015 р.)

**Редакційна колегія:**

**Азаренков М.О. (гол. редактор),**  
д.ф.-м.н., академік НАН України, проф.,  
ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Гандель Ю.В.,** д.ф.-м.н., проф., ММФ  
ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора),**  
д.т.н., проф. ММФ ХНУ імені  
В.Н. Каразіна

**Золотарьов В.О.,** д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ  
Б.І. Веркіна НАН України

**Куклін В.М.,** д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ  
ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Лазурик В.Т.,** д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ  
ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Мацевитий Ю.М.,** д.т.н., академік НАН  
України, проф., фізико-енергетичний ф-т  
ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Мищенко В.О. (заст. гол. редактора),**  
д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені  
В.Н. Каразіна

**Руткас А.Г.,** д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ  
імені В. Н. Каразіна

**Споров О.Є. (відповідальний секретар),**  
к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н.  
Каразіна

**Стервоєдов М.Г.,** к.т.н., доц., ФКН ІВТ  
ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Целуйко О.Ф.,** к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ  
імені В.Н. Каразіна

**Шейко Т.І.,** д.т.н., проф., фізико-  
енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

**С. І. Шматков –** д.т.н., проф., ФКН ІВТ  
ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Щербина В.А.,** д.ф.-м.н., проф., ММФ  
ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Раскін Л.Г.,** д.т.н., проф., Національний  
технічний університет "ХПІ"

**Стрельнікова О.О.,** д.т.н., проф. Ін-т  
проблем машинобудування НАН України

**Соколов О.Ю.,** д.т.н., проф., кафедра  
прикладної інформатики, університет імені  
Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat.  
habil. Professor of Technical Informatics and  
Computer Systems, Institute of Informatics,  
Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of  
computer science, Dep. of C. S., University of  
Nice-Sophia Antipolis, France

**Адреса редакційної колегії:** 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6,  
ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua .

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 11825-696 ПР від 04.10.2006.

© Харківський національний університет  
імені В.Н.Каразіна, оформлення, 2015

## ЗМІСТ

▪ <b>И. М. Антонян, В. А. Горячая, А. И. Зеленский, Е. М. Угрюмова. . . . .</b>	<b>5</b>
Метод оценивания информативности переменных нейросетевых моделей систем и процессов при неопределенности данных	
▪ <b>В. Е. Богачев, И. К. Кириченко, Н. Н. Чеканова, Н. А. Чеканов. . . . .</b>	<b>17</b>
Исследование нелинейной гамильтоновой системы методом нормальной формы Биркгофа-Густавсона	
▪ <b>И. П. Боков, Е. А. Стрельникова. . . . .</b>	<b>29</b>
Построение фундаментального решения уравнений статики изотропных пластин с использованием теории С. П. Тимошенко	
▪ <b>А. Я. Бомба, А. П. Сафоник. . . . .</b>	<b>36</b>
Задача ідентифікації масообмінного параметра сингулярно збуреного процесу очищення рідин від багатокomпонентного забруднення	
▪ <b>А. О. Борода, О. М. Назаренко. . . . .</b>	<b>46</b>
Ідентифікація лінійних систем макроекономічної динаміки з відомими входами	
▪ <b>Е. В. Величко. . . . .</b>	<b>57</b>
Идентификация параметров процесса, описываемого гиперболическим тангенсом	
▪ <b>К. G. Degtyarev, V. I. Gnitko, V. V. Naumenko, E. A. Strelnikova. . . . .</b>	<b>63</b>
Free vibrations of an elastic cylindrical shell coupled with liquid sloshing	
▪ <b>О. П. Демьянченко, А. П. Слесаренко, Н. А. Сафонов. . . . .</b>	<b>76</b>
Математическое моделирование тепловых процессов в теплоизлучающих цилиндрах на базе метода встречных функционалов	
▪ <b>I. Didenko, V. Lazurik, K. Samilyk. . . . .</b>	<b>86</b>
Modeling of the discrete flows interaction considering correlation between flow elements	
▪ <b>Е. Г. Жданова, А. А. Павлов, М. О. Сперкач. . . . .</b>	<b>92</b>
Составление расписания выполнения работ параллельными приборами с целью минимизации максимального отклонения от директивного срока	
▪ <b>А. И. Косолап, Ю. В. Черноусова. . . . .</b>	<b>107</b>
Верхня оцінка числа локальних максимумів в задаче максимізації норми вектора на випуклом множестве	

▪ <b>В. М. Куклин, А. В. Приймак</b> .....	<b>115</b>
Анализ модели системы «релятивистский электронный пучок–плазма»	
▪ <b>VO Mishchenko, BV Patochkin</b> .....	<b>129</b>
Accelerating the computation of the discrete currents method by modification takes into account the architectural features of a modern PCs	
▪ <b>О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов</b> .....	<b>140</b>
Использование кинетической теории для исследования колебаний потоковых параметров производственной линии	
▪ <b>М. С. Филипковская</b> .....	<b>152</b>
Устойчивость по Лагранжу и численный метод решения полулинейных дескрипторных уравнений	
▪ <b>Т. О. Штефан</b> .....	<b>168</b>
Аналіз способів закріплення стійок для перевезення важких вантажів	
▪ <b>CONTENTS</b> .....	<b>177</b>

УДК 681.518.2:519.816-616.65-006

## Метод оценивания информативности переменных нейросетевых моделей систем и процессов при неопределенности данных

И. М. Антонян<sup>1</sup>, В. А. Горячая<sup>2</sup>, А. И. Зеленский<sup>1</sup>, Е. М. Угрюмова<sup>2</sup><sup>1</sup>Харьковская медицинская академия последипломного образования, Украина<sup>2</sup>Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

Разработан метод оценивания информативности (значимости) переменных диагностических моделей систем, полученных на основе аппарата теории обучаемых искусственных нейронных сетей (ИНС). Проведено сравнение качества аппроксимации данных с помощью линейной (линейная множественная регрессия) и нелинейных (в форме однонаправленной и радиально-базисной обучаемых ИНС) моделей. Получены оценки информативности контролируемых переменных состояния элементов медико-биологической системы (МБС) с учетом точности их измерения с использованием линейных и нелинейных диагностических моделей.

**Ключевые слова:** обучаемые нейронные сети, оценивание информативности переменных математических моделей, редукция размерности, априорная неопределенность данных.

Розроблено метод оцінювання інформативності (значності) змінних діагностичних моделей систем, отриманих на основі апарату теорії штучних нейронних мереж (ШНМ), які навчають. Проведено порівняння якості апроксимації даних за допомогою лінійної (лінійна множинна регресія) і нелінійних (у формі односпрямованої і радіально-базисної ШНМ, яку навчають) моделей. Отримано оцінки інформативності контрольованих змінних стану елементів медико-біологічної системи (МБС) з урахуванням точності їх вимірювання з використанням лінійних і нелінійних діагностичних моделей.

**Ключові слова:** нейронні мережі, які навчають, оцінювання інформативності змінних математичних моделей, редукція розмірності, априорна невизначеність даних.

The method was developed to estimate informative capacity (significance) of variables of diagnostic system models based on artificial neural networks (ANN) theory. Comparison of data approximation quality was made using linear model (linear multiple regression) and nonlinear one (in the form of unidirectional and radial-basis trained ANN). Informative capacity of controlled state variables related to elements of biomedical system elements (MBS) was evaluated based on the accuracy of their measurements using linear and nonlinear diagnostic models.

**Key words:** artificial neural networks which are trained, estimation of informativeness variables of mathematical models, reduction of dimension, priori uncertainty of data.

### 1 Постановка проблемы и ее актуальность

Будем рассматривать в качестве объекта исследования основанный на данных мониторинга переменных состояния процесс диагностирования элементов динамических систем, к примеру, медико-биологических систем (МБС).

Одной из проблем объекта исследования является высокая вероятность ошибки (3-его рода) при распознавании состояния (принадлежности к одному из классов – возможных состояний) элементов МБС на основе данных мониторинга.

Повышение вероятности распознавания состояния элементов МБС возможно на основе внедрению в практику диагностирования математических моделей, методов и реализующей их информационной технологии анализа состояния и синтеза решений лицом принимающим решения (ЛПР).

Как известно, информационное обеспечение процесса диагностирования на основе данных мониторинга включает последовательное применение следующих основных методов обработки данных: формирования структуры множества переменных состояния; кластеризации данных; корреляционного, регрессионного (построения диагностических моделей, моделей контроля состояния) и дисперсионного анализа; классификации данных.

Диагностические модели элементов динамических систем разрабатываются и используются для решения задач анализа состояния элементов в определенный момент времени по значениям переменных состояния. В практических задачах анализа, основанного на мониторинге переменных состояния, к примеру элементов МБС, множество переменных состояния как правило содержит все доступные контролю переменные – несколько десятков (сотен) величин, что связано с проведением дорогостоящих и трудоемких работ. Поэтому важно с точки зрения практической деятельности ЛПР определить, какие из переменных в большей или меньшей степени влияют на критерии качества, характеризующие состояние элементов МБС.

При решении задач классификации (о выборе класса, которому принадлежит анализируемый элемент), возникают проблемы оценивания состояния элемента по нескольким контролируемым переменным и корректности этих оценок при их обобщении или совместном использовании на этапе принятия решения ЛПР [1, 2]. Задача классификации таким образом в результате ее декомпозиции должна быть представлена как последовательность решения взаимосвязанных задач: определения коэффициентов информативности (значимости) «частных» (характеристических) контролируемых переменных состояния, отражающих свойства элементов и формирования решающего правила (так называемого «обобщенного признака») [3].

Рассмотрению задач теории и практики диагностирования состояния динамических систем уделяется большое внимание как учеными на Украине, так и за её пределами. К настоящему времени опубликовано множество работ, посвященных описанию методов оценивания информативности (значимости) переменных состояния технических и МБС.

Классификация методов оценивания информативности контролируемых переменных состояния элементов систем и процессов представлена на рис. 1. На основе анализа литературных данных можно выделить два основных типа методов: оценивания дифференциальной информативности, структурно-параметрического анализа и синтеза регрессионных моделей.

К методам, основанным на оценивании дифференциальной информативности, относятся следующие классы методов: корреляционного анализа, дисперсионного анализа и методы распознавания образов. В свою очередь методы распознавания образов делятся на вероятностно-статистические [1, 3-5] и детерминистские [5, 6]. Вероятностно-статистические методы включают в себя методы Байеса, последовательного анализа и оценивания на

основе теории информации [1, 7]. Детерминистские включают в себя методы дискриминантного анализа, многомерного шкалирования [4, 6] и логические [7].

К методам, основанным на структурно-параметрическом анализе и синтезе регрессионных моделей, относятся следующие классы методов: факторного анализа и направленного перебора. Методы первого класса включают в себя методы: главных компонент (МГК) [4, 6, 8], нелинейные МГК [8], Грамма-Шмидта и анализа компонент на основе теории информации [1, 3, 8-10]. К методам второго класса относятся методы: итеративные (на основе различных типов аппроксиматоров, в том числе обучаемых ИНС) [1, 8, 11-13], последовательного анализа вариантов [11], весовые с адаптацией [2], локально-стохастические на основе самоорганизации [8].



Рис.1 Классификация методов оценивания информативности контролируемых переменных состояния элементов систем и процессов

Анализ существующих литературных источников показывает, при разработке математических моделей и методов решения задач диагностирования возникает ряд проблем:

1. неопределенность входных данных (ограниченный объем выборок, наличие ошибок в данных, коррелируемость переменных состояния);
2. большая размерность множества переменных состояния;
3. неопределенность в выборе структуры и параметров моделей;
4. неопределенность в выборе критериев качества моделей (обеспечение робастности, достоверности результатов моделирования: заданной точности и адекватности);
5. неопределенность при отборе единственного решения многокритериальной задачи оптимизации.
6. неопределенность в формировании и структурировании решающих правил классификации состояния элементов системы.

Следует отметить, в большинстве работ, посвященных решению задач оценивания информативности (значимости) переменных состояния динамических систем, отсутствует анализ значимости переменных нелинейных моделей с учетом их коррелируемости и точности измерения.

Разработанное на сегодняшний день информационное обеспечение не позволяют с достаточно высоким уровнем достоверности решать задачи классификации состояния элементов динамических систем.

Таким образом, возникает необходимость в совершенствовании существующих и разработке новых математических моделей, методов и реализующей их средств информационной технологии диагностирования элементов динамических систем, к примеру, МБС, на основе данных мониторинга.

Данная работа посвящена разработке метода оценивания информативности (значимости) в общем случае попарно коррелируемых переменных состояния МБС с учетом точности их измерения, с целью повышения качества процесса диагностирования.

## **2 Постановка задачи оценивания информативности (значимости) переменных состояния элементов динамических систем**

Информативность (значимость) переменных состояния – понятие относительное. Некоторое подмножество переменных может быть информативным (значимым) для решения одной задачи анализа состояний или классификации данных и не информативным для другой. Выбор критериев оценивания информативности (значимости) переменных состояния зависит от того, что от чего нужно отличать, т.е. от типа и размерности множества переменных состояния  $S$  рассматриваемых элемента системы или процесса, а также от типа решающих функций  $\Pi$ . Для каждой задачи следует находить свое информативное подмножество переменных состояния.

Первоначальное множество переменных состояния (множество  $S_0$ ) задается неформализованным путем, на основе опыта специалистов предметной области. Формальные методы применяются при анализе обучающей выборки  $A$  для проверки этого множества данных на необходимость и достаточность. Среди всех  $B$  возможных подмножеств переменных достаточным считаем подмножество, которое при  $S_0$  и  $\Pi$  обеспечивает затраты  $N$ , не превышающие определенного порога  $N_0$ . Под затратами  $N$  здесь понимается стоимость измерения контролируемых переменных состояния ( $N_x$ ) и стоимость потерь, вызываемых ошибками распознавания ( $N_r$ ):  $N = N_x + N_r$ .

Необходимым является достаточное подмножество минимальной размерности. Так что фактически на обучающей выборке  $A$  решается задача переборного типа:  $\beta = \arg \min_{\beta \in B} N(S_\beta) / S_0, \Pi, A, N_0$ .

Эта задача одновременной минимизации  $N_x$  и  $N_r$ . Затраты на измерения зависят от того, сколько и каких переменных состояния нужно регистрировать и какая требуется точность результатов измерений.



С точки зрения практики диагностирования логичным является утверждение о целесообразности затрат на измерение информативных переменных, для которых значимо отношение сигнал/шум. В то же время, согласно общим тенденциям развития научно-технического прогресса, такие измерения становятся все более дорогостоящими.

Таким образом, актуальной является задача уменьшения количества измеряемых переменных состояния, т. е. поиску информативного подмножества  $S_\beta$  минимальной размерности,  $S_\beta \subset S_0$  [1].

### 3 Обоснование выбранного метода оценивания информативности переменных математических моделей систем и процессов

Определим меру информативности системы как ее среднюю энтропию:

$$\Theta = \int \theta(M)F(dM), \quad (1)$$

где  $\theta(M) = -\rho(M)\log_2 \rho(M)$ ,  $F(dM)$  – априорная вероятностная мера параметров модели  $M$ .

Будем считать, что распределение плотности вероятностей безошибочного принятия гипотезы о достоверности найденных значений параметров математической модели  $M_{t+1}$  определяется законом  $\rho(M_{t+1}) \sim \exp[-\beta_{t+1}I(M_{t+1}, D_{int})]$ , где  $I(M_{t+1}, D_{int})$  – взаимная информация,  $D_{int}$  – вектор случайных чисел размерности  $H_0$  (входные данные,  $D_{int} \subset D$ ):

$$I(M_{t+1}, D_{int}) = \Theta(M_{t+1}) - \Theta(M_{t+1} | D_{int}). \quad (2)$$

В качестве критерия оценивания качества математических моделей систем и процессов в дальнейшем будем рассматривать изменение взаимной информации (2).

Представим  $Y_i(S)$ ,  $S = \{s_l\}$ ,  $l = 1 \dots L$  в виде ряда Тейлора, сохранив в разложении только слагаемые первого порядка малости. Полученная функция является линейной. Для дисперсии произвольной линейной функции нескольких случайных переменных имеет место оценка:

$$D_{Y_i} = (\text{grad} Y_i)^T \Sigma_S \text{grad} Y_i = \sum_{l=1}^L \left( \frac{\partial Y_i}{\partial s_l} \right)^2 y_{s_l}^2 + \sum_{l=1}^L \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq l}}^L r_{ln} \frac{\partial Y_i}{\partial s_l} \frac{\partial Y_i}{\partial s_n} y_{s_l} y_{s_n}, \quad (3)$$

где  $\Sigma_S$  – матрица ковариации переменных  $s_l$  и  $s_n$ ;

$y_{s_l}$  – среднее квадратическое отклонение;

$r_{ln}$  – коэффициенты корреляции  $s_l$  и  $s_n$  ( $R = [r_{ln}]$ ).

Обычно, если корреляционные связи есть, то принимают  $r_{ln} = 1$ , иначе  $r_{ln} = 0$ .

Определим энергию сигнала –

$$E_i = \sum_{l=1}^L |D_{Y_i|s_l}|, \quad (4)$$

где дисперсия сигнала при выбранной переменной вычисляется согласно приведенному ниже выражению:

$$D_{Y_i|s_l} = \left( \frac{\partial Y_i}{\partial s_l} \right)^2 y_{s_l}^2 + \left( \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq l}}^L r_{ln} \frac{\partial Y_i}{\partial s_n} y_{s_n} \right) \frac{\partial Y_i}{\partial s_l} y_{s_l}. \quad (5)$$

Определим коэффициент информативности (значимости вклада) переменной  $s_l$  в сигнале  $Y_i(S)$ :

$$e_{il} = \frac{|D_{Y_i|s_l}|}{E_i}, \quad \sum_{l=1}^L e_{il} = 1. \quad (6)$$

Определим коэффициент влияния переменной  $s_l$  на величину сигнала  $Y_i(S)$ :

$$u_{il} = \frac{D_{Y_i|s_l, r_{ln}=0}}{y_{s_l}^2} = \left( \frac{\partial Y_i}{\partial s_l} \right)^2. \quad (7)$$

Величина взаимной информации между гауссовыми случайными переменными определяется, согласно [8], следующим образом –

$$I(Y_p, S_p) \sim \ln \left[ \frac{\left| \det(Y_{Y_p}) \right|}{\left| \det(Y_{S_p}) \right|} \right], \quad (8)$$

где матрицы ковариаций:

$$Y_{Y_p} = \left[ r_{in} \sqrt{D_{Y_{pi}}} \sqrt{D_{Y_{pn}}} \right], \quad (9a)$$

$$Y_{S_p} = \left[ r_{ln} y_{s_{pl}} y_{s_{pn}} \right]. \quad (9b)$$

Рассмотрим в качестве первого примера формальную математическую модель (ФММ) в форме уравнения линейной множественной регрессии (ЛМР):

$$Y^n = \sum_{l=1}^L z_l x_l^n, \quad (10)$$

$$\text{где } Y^n = \frac{Y - \langle Y \rangle}{y_Y}, \quad x_l^n = \frac{x_l - \langle x_l \rangle}{y_{x_l}}.$$

Дисперсия сигнала в случае уравнения ЛМР определяется выражением:

$$D_{Y^n} = \sum_{l=1}^L z_l^2 y_{x_l}^2 + \sum_{l=1}^L \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq l}}^L r_{ln} z_l z_n y_{x_l}^n y_{x_n}^n. \quad (11)$$

Коэффициент информативности переменной  $x_l^\circ$  ЛМР вычисляется по формуле:

$$\epsilon_l = \frac{|D_{Y^n|x_l^n}|}{E}, \quad \sum_{l=1}^L \epsilon_l = 1. \quad (12)$$

где  $E = \sum_{l=1}^L |D_{Y^o|x_l^o}|$  – энергия сигнала, а  $D_{Y^o|x_l^o} = z_l^2 y^2 + \left( \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq l}}^L r_{ln} c_n y x_n^n \right) z_l y x_l^n$ .

Коэффициент влияния переменной  $x_l^o$  на величину сигнала  $Y^o$  –  $\epsilon_l = \frac{D_{Y^n|x_l^n, r_{ln}=0}}{y^2} = z_l^2$ .

Величина взаимной информации для ЛМР определяется по формуле:

$$I(Y_p^o, x_p^o) \sim \ln \left[ \frac{D_{Y_p^o}}{\det(Y_{X_p^o})} \right].$$

Структура однонаправленной многослойной сети (ОМС) имеет вид:

$$Y_i^{(2)} = f(s_i^{(2)}), \quad (13a)$$

$$s_i^{(2)} = w_{i0}^{(2)} + \sum_{j=1}^{H_1} w_{ij}^{(2)} Y_j^{(1)}, \quad i = 1 \dots H_2, \quad j = 1 \dots H_1; \quad (13б)$$

$$Y_j^{(1)} = f(s_j^{(1)}), \quad (13в)$$

$$s_j^{(1)} = w_{j0}^{(1)} + \sum_{h=1}^{H_0} w_{jh}^{(1)} Y_h^{(0)}, \quad h = 1 \dots H_0, \quad (13г)$$

где  $f(s) = th(\epsilon s) = \frac{e^{\epsilon s} - 1/e^{\epsilon s}}{e^{\epsilon s} + 1/e^{\epsilon s}}$  – выбранная передаточная функция,

$f'_s = \epsilon [1 - f^2(s)]$  – производная передаточной функции.

Предварительно при анализе информативности проводится обезразмеривание входных данных:  $f^o = \frac{2(f - \langle f \rangle)}{(f_{max} - f_{min})}$ , где  $\langle f \rangle = (f_{max} + f_{min}) / 2$ ,  $f^o \in [-1, 1]$ .

Дисперсии безразмерных переменных определяются по формулам:

$$\left( y_{f^o}^o \right)^2 = \left( \frac{2}{f_{max} - f_{min}} \right)^2 y_{f^o}^2, \quad \text{где } y_{f^o}^2 = 1.$$

В нашем случае использовалось прямое преобразование:

$$y_f^{\circ} = \left( \frac{2l_f}{f_{max} - f_{min}} \right) y_f, \quad \text{обратное} \quad - \quad y_f^2 = \left( \frac{f_{max} - f_{min}}{2l_f} \right)^2 (y_f^{\circ})^2, \quad \text{где}$$

$$l_f = th(\epsilon).$$

Оценим величину дисперсии сигналов ОМС. В соответствии с (7) получим:

$$D_{Y_i^{(2)}} = \sigma_{Y_i^{(2)}}^2 = \epsilon^2 \left[ 1 - f^2 \left( s_i^{(2)} \right) \right]^2 D_{s_i^{(2)}}, \quad (14a)$$

$$D_{s_i^{(2)}} = \sum_{j=1}^{H_1} \left[ w_{ij}^{(2)} \right]^2 y_{Y_j^{(1)}}^2 + \sum_{j=1}^{H_1} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^{H_1} r_{jn}^{(1)} w_{ij}^{(2)} w_{in}^{(2)} y_{Y_j^{(1)}} y_{Y_n^{(1)}}, \quad (14б)$$

$$\sigma_{Y_j^{(1)}}^2 = \epsilon^2 \left[ 1 - f^2 \left( s_j^{(1)} \right) \right]^2 D_{s_j^{(1)}}, \quad (14в)$$

$$D_{s_j^{(1)}} = \sum_{h=1}^{H_0} \left[ w_{jh}^{(1)} \right]^2 y_{Y_h^{(0)}}^2 + \sum_{h=1}^{H_0} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq h}}^{H_0} r_{hn}^{(0)} w_{jh}^{(1)} w_{jn}^{(1)} y_{Y_h^{(0)}} y_{Y_n^{(0)}}. \quad (14г)$$

В этом случае энергия сигнала будет определяться выражением:

$$E_i = \sum_{h=1}^{H_0} \left| D_{Y_i^{(2)}} \Big|_{Y_h^{(0)}} \right|, \quad (15)$$

где  $D_{Y_i^{(2)}} \Big|_{Y_h^{(0)}} = D_{Y_i^{(2)}} \Big|_{Y_h^{(0)}}; r_{in}^{(0)} = 0, l=1..H_0, n=1..H_0, l \neq h, n \neq l$ .

Коэффициент информативности переменных ОМС вычисляется по формуле:

$$\epsilon_{ih} = \frac{\left| D_{Y_i^{(2)}} \Big|_{Y_h^{(0)}} \right|}{E_i}, \quad (16)$$

Соответственно коэффициент влияния переменных и величина взаимной информации для ОМС вычисляются по формулам:

$$u_{ih} = \frac{D_{Y_i^{(2)}} \Big|_{Y_h^{(0)}}; r_{in}^{(0)} = 0, l=1..H_0, n=1..H_0, n \neq l}{y_{Y_h^{(0)}}^2}, \quad (17)$$

$$I\left(Y_p^{(2)}, Y_p^{(0)}\right) \sim \ln \left[ \frac{\det \left( Y_{Y_p}^{(2)} \right)}{\det \left( Y_{Y_p}^{(0)} \right)} \right], \quad (18)$$

где матрицы ковариаций:

$$Y_{Y_p}^{(2)} = \left[ r_{in}^{(2)} \sqrt{D_{Y_{pi}^{(2)}}} \sqrt{D_{Y_{pn}^{(2)}}} \right], \quad (19a)$$

$$Y_{Y_p}^{(0)} = \left[ r_{hn}^{(0)} y_{Y_{ph}^{(0)}} y_{Y_{pn}^{(0)}} \right]. \quad (19b)$$

Структура радиально-базисной сети (РБС) имеет вид:

$$Y_i^{(2)} = s_i^{(2)}, \quad s_i^{(2)} = w_{i0}^{(2)} + \sum_{j=1}^{H_1} w_{ij}^{(2)} u_j^{(1)} \left( Y^{(0)}, C_j^{(1)}, y_j^{(1)} \right), \quad i = 1 \dots H_2, \quad (20)$$

где  $u_j^{(1)} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{H_0} Z_{jh}^2 \right], \quad Z_{jh} = \frac{Y_h^{(0)} - C_{jh}^{(1)}}{y_{jh}^{(1)}}, \quad j = 1 \dots H_1,$

$$h = 1 \dots H_0; \quad Y^{(0)} = \left[ Y_1^{(0)}, \dots, Y_h^{(0)}, \dots, Y_{H_0}^{(0)} \right]^T;$$

$$C_j^{(1)} = \left[ C_{j1}^{(1)}, \dots, C_{jh}^{(1)}, \dots, C_{jH_0}^{(1)} \right]^T;$$

$$y_j^{(1)} = \left[ y_{j1}^{(1)}, \dots, y_{jh}^{(1)}, \dots, y_{jH_0}^{(1)} \right]^T.$$

Оценим величину дисперсии сигнала РБС. В соответствии с (3) получим:

$$D_{Y_i^{(2)}} = \sigma_{Y_i^{(2)}}^2 = D_{s_i^{(2)}}, \quad (21a)$$

$$D_{s_i^{(2)}} = \sum_{j=1}^{H_1} \left[ w_{ij}^{(2)} \right]^2 D_{u_j^{(1)}} + \sum_{j=1}^{H_1} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^{H_1} r_{jn}^{(1)} w_{ij}^{(2)} w_{in}^{(2)} \sqrt{D_{u_j^{(1)}}} \sqrt{D_{u_n^{(1)}}}, \quad (21b)$$

$$D_{u_j^{(1)}} = \sum_{h=1}^{H_0} \left[ \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{H_0} Z_{jh}^2 \right) \left( -\frac{Z_{jh}}{y_{jh}^{(1)}} \right) \right]^2 y_{Y_h^{(0)}}^2 +$$

$$+ \sum_{h=1}^{H_0} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq h}}^{H_0} r_{hn}^{(0)} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{H_0} Z_{jh}^2 \right) \left( -\frac{Z_{jh}}{y_{jh}^{(1)}} \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{H_0} Z_{jn}^2 \right) \left( -\frac{Z_{jn}}{y_{jn}^{(1)}} \right) y_{Y_h^{(0)}} y_{Y_n^{(0)}} \quad (21b)$$

Значения коэффициентов информативности, влияния переменных, а также величина взаимной информации для РБС определяется по формулам, аналогичным для ОМС.

При парном сравнении ФММ будем оценивать изменение дисперсии сигнала, характеризующее робастность той или иной модели:

$$D_{Y_i, dB} = 10 \lg_{10} \left( \frac{D_{Y_i}^{(\beta)}}{D_{Y_i}^{(0)}} \right), \text{ децибел; } \nu = 1, 2. \quad (22)$$

Здесь в качестве оценок дисперсий сигнала в дальнейшем использовались рассчитанные значения остаточных дисперсий для каждой из сравниваемых ФММ.

#### **4 Результаты оценивания информативности переменных состояния элементов МБС с использованием ФММ разного типа**

На основе системного анализа процесса диагностирования элементов МБС была выявлена иерархия этапов диагностирования: лабораторная диагностика (биохимические анализы крови и т.п.), визуальная диагностика (УЗИ, МРТ и т.п.) и соответствующие каждому этапу контролируемые переменные состояния пациентов [9]. Первоначальная размерность множества переменных состояния была равна 24.

Сформирована экспериментальная выборка контролируемых переменных, характеризующих состояния наблюдаемых пациентов. Выборка была разбита на 4 класса: 50, 45, 51 и 33 человека. В качестве классификационного признака при делении общей выборки на классы был выбран уровень прогрессирования заболевания.

На основе множества нормированных переменных, куда вошли все перечисленные данные, с использованием обобщенного метода наименьших квадратов (МНК) и методов обучения ИНС были получены диагностические модели в форме уравнения ЛМР, обучаемых ИНС (ОМС и РБС).

В таблице приведены для сравнения значения критериев качества аппроксимации для различных типов ФММ.

На рис. 2 приведены диаграммы оценок информативности переменных состояния, полученных на основе анализа ЛМР и РБС для элементов, соответствующих математическим ожиданиям значений контролируемых переменных состояния для разных классов. Вдоль оси абсцисс отложены номера наиболее информативных контролируемых переменных состояния, вдоль оси ординат – значения коэффициентов информативности, полученные на основе анализа ЛМР и РБС для элементов разных классов. Эти результаты были получены при заданной относительной точности измерения непрерывных переменных – 1%, булевых – 25%, перечислимого типа – 10% или 15%, соответственно. Корреляционная матрица определялась для выборки, содержащей данные по четырем классам.

Очевидно, что оценки информативности (значимости) переменных ЛМР не зависят от состояния (принадлежности к определенному классу) элемента МБС. Подмножества информативных (значимых) переменных, выявленных на основе

анализа РБС для элементов медико-биологической системы, принадлежащих различным классам, не равны.

Таблица. Результаты оценивания качества ФММ

Тип ФММ	Средняя относительная погрешность	Коэффициент множественной корреляции	Изменение дисперсии сигнала, децибел
ЛМР	0,498	0,819	0,000
ОМС [24-90-1]	0,156	0,979	-9,0132
РБС [24-171-1]	0,026	0,983	-9,9953

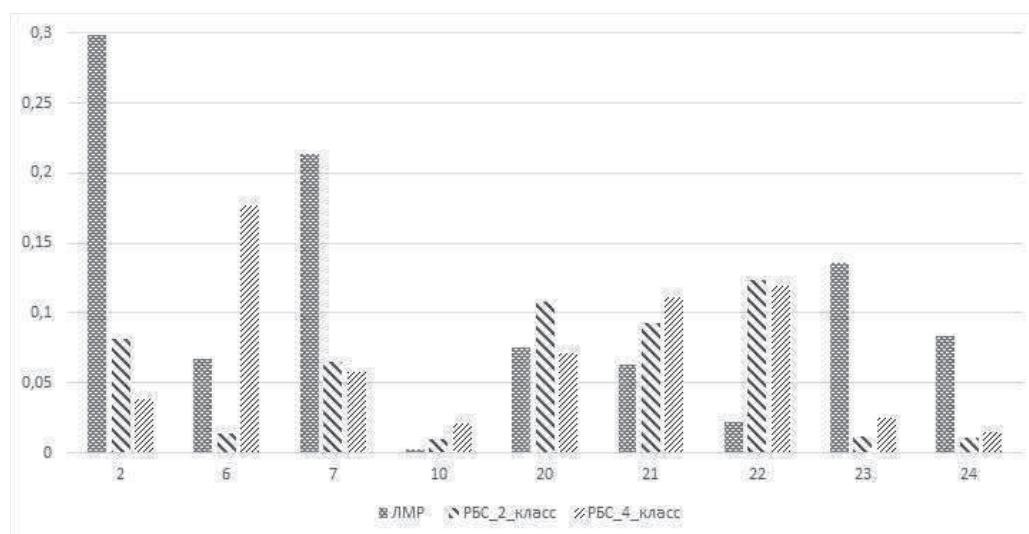


Рис.2 Результаты оценивания информативности переменных ЛМР и РБС для элементов разных классов

## 5 Результаты и выводы

Предложена классификация методов оценивания информативности контролируемых переменных состояния элементов систем и процессов. На основе анализа литературных данных выделено два основных типа методов: оценивания дифференциальной информативности, структурно-параметрического анализа и синтеза регрессионных моделей.

Представлен метод оценивания информативности (значимости) переменных диагностических моделей систем с учетом точности их измерения, полученных на основе аппарата теории обучаемых искусственных нейронных сетей. Данный метод относится к классу методов факторного анализа (анализ компонентов на основе теории информации).

Проведено сравнение качества аппроксимации данных с помощью линейной (линейная множественная регрессия) и нейросетевых моделей. Получены оценки информативности контролируемых переменных состояния элементов медико-биологической системы с учетом точности их измерения с

использованием линейных и нелинейных диагностических моделей. Показано, что подмножества информативных (значимых) переменных, выявленных на основе анализа нелинейных моделей, для различных состояний элементов медико-биологической системы могут быть не равны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Загоруйко Н. Г. Прикладные методы анализа данных и знаний / Н.Г. Загоруйко. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999. – 270 с.
2. Дюкова Е. В. Построение распознающих процедур на базе элементарных классификаторов / Е.В. Дюкова, Н.В. Песков. – Математические вопросы кибернетики. – 2005. – № 14. – С.57-92.
3. Колесникова С. И. Методы анализа информативности разнотипных признаков / С. И. Колесникова // Вестник Томского государственного университета. – 2009. – № 1 (6). – С.69-80
4. Айвазян С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики –Учебник для вузов / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022с.
5. Гублер Е. В., Генкин А. А. Применение непараметрических критериев статистики в медико-биологических исследованиях.– Ленинград: «Медицина» Ленинградское отделение, 1973. – 144 с.
6. Taguchi G. The Mahalanobis–Taguchi Strategy. A pattern technology system / Taguchi G., Jugulum R. – New York: John Wiley & Sons, 2002. – 235 p.
7. Биргер И. А. Техническая диагностика / И. А. Биргер. – М. : Машиностроение, 1978. – 240 с.
8. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс /С. Хайкин. – М: Издательский дом «Вильямс», 2006. –1104 с.
9. Усовершенствованный метод и информационная технология решения задачи классификации состояния элементов сложных систем / И. М. Антонян, В. А. Горячая, А. И. Зеленский, Е. М. Угрюмова // Вісник Харківського національного університету. Збірник наукових праць. – 2013, №1063 серія: «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – Випуск 22. – С. 5-16.
10. Гайдышев И. Анализ и обработка данных: специальный справочник / И. Гайдышев. – СПб. : Питер, 2001. – 752 с.
11. Стрижов В. В. Методы выбора регрессионных моделей / В. В. Стрижов, Е. А. Крымова. – М.: ВЦ РАН, 2010. – 60 с
12. Дубровин В. И. Оценка значимости признаков на основе нейронных сетей в задачах диагностики и распознавания / В. И. Дубровин, С. А. Субботин // Техническая диагностика. – 2002. – № 1 (3). – С.66-72.
13. Системное совершенствование элементов сложных технических систем на основе концепции обратных задач [Текст]: монография/ В. Е. Стрелец, А. А. Трончук, Е. М. Угрюмова и др.; под общ. ред. М. Л. Угрюмова. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2013. – 148 с.



УДК 519.711.3

## Исследование нелинейной гамильтоновой системы методом нормальной формы Биркгофа-Густавсона

В. Е. Богачев<sup>1)</sup>, И. К. Кириченко<sup>2)</sup>, Н. Н. Чеканова<sup>2)</sup>, Н. А. Чеканов<sup>3)</sup><sup>1)</sup> Белгородский университет кооперации, экономики и права, Россия<sup>2)</sup> Украинская инженерно-педагогическая академия, Украина<sup>3)</sup> Белгородский юридический институт МВД России, Россия

В статье приведены результаты исследования автономной двумерной гамильтоновой системы в классическом и квантовом подходах. Показано, что при классическом рассмотрении, в такой системе даже при наличии областей с отрицательной гауссовой кривизной отсутствует динамический хаос. При определенных значениях параметров в классической функции Гамильтона найден интеграл движения. Эти результаты подтверждаются проведенными численными расчетами сечений Пуанкаре. Получена классическая нормальная форма Биркгофа-Густавсона, а также ее квантовый аналог согласно правилу квантования Вейля. На основе этого квантового аналога получены приближенные формулы для вычисления энергетического спектра нижайших состояний для локального минимума, расположенного в начале координат.

**Ключевые слова:** гамильтонова система, нормализация Биркгофа-Густавсона, квантование, компьютерное моделирование.

У статті наведені результати дослідження автономної двовимірної гамильтонової системи в класичному і квантовому підходах. Показано що, в цій системі, навіть за наявності областей з негативною гауссовою кривизною, відсутній динамічний хаос при класичному розгляді. При певних значеннях параметрів в класичній функції Гамільтона знайдений інтеграл руху. Ці результати підтверджуються проведеними чисельними розрахунками перетинів Пуанкаре. Отримано класична нормальна форма Біркгофа-Густавсона, а також її квантовий аналог згідно з правилом квантування Вейля. На основі цього квантового аналога отримані наближені формули для обчислення енергетичного спектра найнижчих станів для локального мінімуму, розташованого на початку координат.

**Ключові слова:** гамильтонова система, нормалізація Біркгофа-Густавсона, квантування, комп'ютерне моделювання.

The paper presents the results obtained with both classical and quantum approaches to autonomic 2D Hamiltonian system. Even if such system has negative Gaussian domains, the classical approach shows no dynamical chaos. For certain values of classical Hamilton function parameters, the motion integral is found. Direct numerical calculations for Poincare sections confirm the results. The classical normal Birkhoff-Gustavson form and its quantum analogue according to Weyl rule are derived. On the base of this quantum analogue, the approximate formulas are obtained for evaluation of energy spectrum of the lowest states for the local minimum situated at the origin.

**Key words:** Hamilton's system, Birkhoff-Gustavson normalization, quantization, computer modeling.

### 1. Общая постановка задачи. Анализ публикаций по теме исследования

В настоящее время усилия ученых направлены на исследования различных явлений, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями или их системами. Это связано с тем, что их описание при помощи нелинейных дифференциальных уравнений является более адекватным по сравнению с их анализом в теории обыкновенных линейных дифференциальных

уравнений [1].

В настоящее время найти решение нелинейных дифференциальных уравнений и их систем в явном виде через известные элементарные или специальные функции есть задача нерешенная. Кроме того, подавляющее число нелинейных дифференциальных уравнений, несмотря на выполнение условий существования и единственности решений, допускают так называемый детерминированный или динамический хаос, открытый А. Пуанкаре еще в позапрошлом столетии [2].

Наиболее часто используемыми для описания реальных физических систем является гамильтонов формализм. Кстати говоря, что интересно, любую систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать в гамильтоновом виде [3]. Методов предсказания динамического хаоса по виду функции Гамильтона к настоящему времени не существует. Тем не менее, имеются различные критерии, которые позволяют предсказать существование динамического хаоса [4]. Одним из таких критериев является критерий отрицательной гауссовой кривизны [5, 6]. Следует отметить, что этот критерий не является ни необходимым, ни достаточным, но во многих случаях существование хаоса по виду функций Гамильтона он хорошо предсказывает [7].

Еще более интригующим вопросом является вопрос о квантовом проявлении динамического хаоса в системах, которые при классическом описании допускают хаотический режим движения [8].

## 2. Цель статьи

В настоящей работе сообщаются результаты, которые получены для одной, предложенной нами, консервативной двумерной гамильтоновой системы с тремя произвольными параметрами. Для этой системы при определенных условиях на параметры существует дополнительный интеграл движения, кроме полной энергии, то есть система является интегрируемой. Также получена нормальная форма Биркгофа-Густавсона, которая позволяет приближенно исследовать решения исходной неинтегрируемой системы. Как известно [9], в этих случаях использование нормальной формы Биркгофа-Густавсона позволяет достаточно удовлетворительно аналитически описывать сечения Пуанкаре.

На основе классической нормальной формы Биркгофа-Густавсона в соответствии с правилом Вейля получен ее квантовый аналог. Найдены приближенные формулы для нижайших уровней энергии в центральном минимуме.

## 3. Основная часть

### 3.1. Классическое рассмотрение.

В работе рассмотрена двумерная система с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2), \quad (1a)$$

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + b\left(q_1^2 q_2 + \frac{1}{3} q_2^3\right) + c q_1^2 q_2^2 + d(q_1^2 + q_2^2)^2, \quad (1b)$$

где  $b, c, \dots, d \dots$  – параметры.

Поверхность потенциальной энергии  $V(q_1, q_2)$  (ППЭ) имеет сложный рельеф, четыре минимума, четыре Седловых точки и один максимум при произвольных значениях параметров (см. Рис. 1). При произвольных значениях параметров реализуется хаотический режим движения.

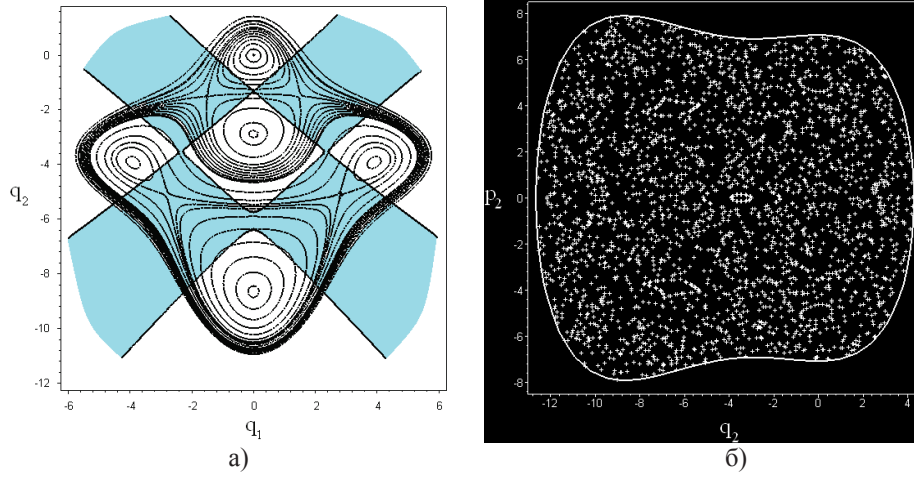


Рис. 1. а) Изолинии ППЭ и области с отрицательной ГК (затемненная область) при параметрах:  $d = 1/100$ ,  $b = 4\sqrt{3}/15$ ,  $c = 17/375$ ; б) сечения Пуанкаре

При условии  $c = 4d$  нами был найден второй, кроме полной энергии, интеграл движения

$$I = p_1 p_2 + q_1 q_2 + b \left( q_1 q_2^2 + \frac{1}{3} q_1^3 \right) + 4d q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2). \quad (2)$$

В случае интегрируемости ( $c = 4d$ ) ППЭ имеет, тем не менее, области с отрицательной гауссовой кривизной (см. Рис. 2).

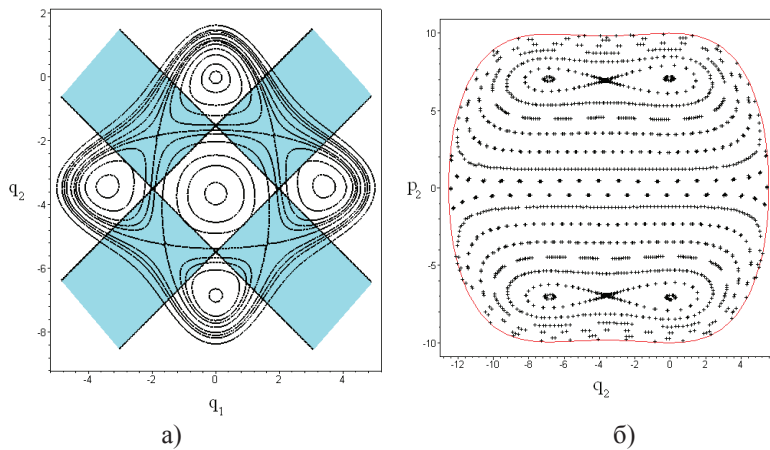


Рис. 2. а) Изолинии ППЭ и области с отрицательной ГК (затемненная область) при параметрах:  $b = 0.420$ ,  $d = 0.01$ ; б) сечения Пуанкаре

Проведенный анализ показывает, что исследуемая нами система отличается от изученных в литературе систем тем, что: 1) несмотря на наличие отрицательной гауссовой кривизны на ППЭ, она при условии  $c = 4d$  является интегрируемой, 2) в широком диапазоне параметров стационарные точки квадратичной части ППЭ являются вырожденными, то есть ее одно или оба собственные значения равны нулю (см. Рис. 3, точки  $A, C$  и  $B$ ).

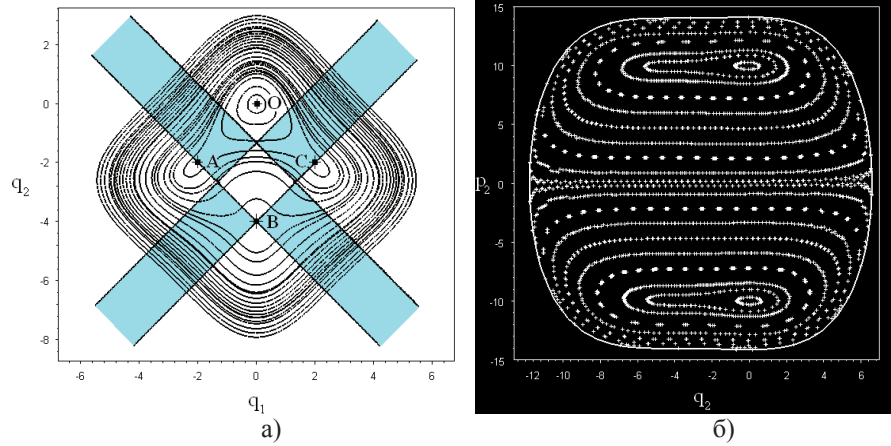


Рис. 3. а) Изолинии ППЭ и области с отрицательной ГК (затемненная область) при параметрах:  $b = 1/2$ ,  $d = 1/64$ ; ( $c = 4d$ ) б) сечения Пуанкаре

В работе получена нормальная форма Биркгофа-Густавсона для гамильтоновой функции (1) в результате канонических преобразований  $(p, q \rightarrow \xi, \eta)$ , а затем еще одних  $(\xi, \eta \rightarrow Q, P)$  с валентностью равной мнимой единице [10]:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1/2i(-Q_1 + Q_2 + P_1 - P_2), & \xi_2 &= 1/2(Q_1 + Q_2 + P_1 + P_2), \\ \eta_1 &= 1/2(Q_1 - Q_2 + P_1 - P_2), & \eta_2 &= 1/2i(Q_1 + Q_2 - P_1 - P_2). \end{aligned} \quad (3)$$

С помощью программы [11] получена нормальная форма Биркгофа-Густавсона, которую представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} -iG_6 &= \Psi_0 + C_{41}\Psi_0^2 + 4C_{42}\Psi_1^2 + 4C_{43}\Psi_2^2 + C_{61}\Psi_0^3 - 8C_{62}\Psi_3^3 - 2C_{63}\Psi_0^2\Psi_3 + \\ &+ 4C_{64}\Psi_1^2\Psi_0 - 8C_{65}\Psi_1^2\Psi_3 + 4C_{66}\Psi_2^2\Psi_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$C_{41} = 3/2d - \frac{5}{12}b^2, \quad C_{42} = -\frac{5}{12}b^2 + 3/8c, \quad C_{43} = -\frac{d}{2} + \frac{c}{8},$$

$$C_{61} = -\frac{235}{432}b^4 + \frac{173}{36}b^2d + \frac{13}{36}b^2c - \frac{17}{4}d^2, \quad C_{62} = -2/9b^2d + 1/18b^2c,$$

$$C_{63} = -\frac{11}{9}b^2d + \frac{11}{36}b^2c, \quad C_{64} = -\frac{17}{64}c^2 + \frac{277}{36}b^2d + \frac{199}{72}b^2c - \frac{235}{144}b^4 - \frac{17}{8}cd, \\ C_{65} = \frac{11}{9}b^2d - \frac{11}{36}b^2c, \quad C_{66} = 9/4d^2 - 1/2cd - \frac{1}{64}c^2 - 1/36b^2d + \frac{1}{144}b^2c. \quad (5)$$

В выражении (4) введены следующие функции:

$$\Psi_0 = Q_1P_1 + Q_2P_2, \quad \Psi_1 = \frac{i}{2}(Q_1P_2 - Q_2P_1), \\ \Psi_2 = \frac{1}{2}(Q_1P_1 - Q_2P_2), \quad \Psi_3 = \frac{1}{2}(Q_1P_2 + Q_2P_1),$$

для которых выражения для скобок Пуассона следующие

$$\{\Psi_0, \Psi_\lambda\} = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Из результатов для скобок Пуассона (6) непосредственно следует, что нормальная форма  $G_6$  описывает интегрируемую систему, то есть  $G_6$  является интегрируемым приближением для, в общем, неинтегрируемой исходной системы, причем выполняется тождество

$$\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2 = \frac{1}{4}\Psi_0^2 \quad (7)$$

Имеют место также соотношения

$$\{\Psi_1, \Psi_2\} = i\Psi_3, \quad \{\Psi_2, \Psi_3\} = i\Psi_1, \quad \{\Psi_3, \Psi_1\} = i\Psi_2, \quad (8)$$

которые коротко можно записать в виде

$$\{\Psi_\lambda, \Psi_\mu\} = i\varepsilon_{\lambda\mu\nu}, \quad \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, \quad (9)$$

где  $\varepsilon_{\lambda\mu\nu}$  – полностью антисимметричный тензор третьего ранга (символ Леви-Чивита).

### 3.2. Квантовое рассмотрение

Для получения квантового аналога нормальную форму (4) представим в виде

$$G_6 = G^{(2)} + G^{(4)} + G^{(6)}, \\ G^{(2)} = Q_1P_1 + Q_2P_2, \\ G^{(4)} = C_{41}(Q_1^2P_1^2 + Q_2^2P_2^2 + 2Q_1P_1Q_2P_2) + C_{42}(-Q_1^2P_2^2 - Q_2^2P_1^2 + 2Q_1P_2Q_2P_1) + \\ + C_{43}(Q_1^2P_1^2 + Q_2^2P_2^2 - 2Q_1P_1Q_2P_2), \\ G^{(6)} = C_{61}(Q_1^3P_1^3 + Q_2^3P_2^3 + 3Q_1^2P_1^2Q_2P_2 + 3Q_1P_1Q_2^2P_2^2) + \\ + C_{62}(-Q_2^3P_1^3 - Q_1^3P_2^3 - 3Q_1^2P_2^2P_1Q_2 - 3Q_1P_2Q_2^2P_1^2) +$$

$$\begin{aligned}
& +C_{63} \left( -Q_1^3 P_1^2 P_2 - Q_1^2 P_1^3 Q_2 - Q_2^2 P_2^3 Q_1 - Q_2^3 P_2^2 P_1 - 2Q_1^2 P_2^2 P_1 Q_2 - 2Q_1 P_2 Q_2^2 P_1^2 \right) + \\
& +C_{64} \left( -Q_1^3 P_1^2 P_2 - Q_1^2 P_2^3 Q_2 - Q_2^2 P_1^3 Q_1 - Q_2^3 P_1^2 P_2 + 2Q_1^2 P_2 Q_2 P_1^2 + 2Q_1 P_2^2 Q_2^2 P_1 \right) + \\
& +C_{65} \left( Q_1^3 P_2^3 + Q_2^3 P_1^3 - Q_1^2 P_2^2 Q_2 P_1 - Q_1 P_2 Q_2^2 P_1^2 \right) + \\
& +C_{66} \left( Q_1^3 P_1^3 + Q_2^3 P_2^3 - Q_1^2 P_1^2 Q_2 P_2 - Q_1 P_1 Q_2^2 P_2^2 \right). \quad (10)
\end{aligned}$$

Как известно, переход от классического описания к квантовому является неоднозначным. Имеются различные правила соответствия (см. например [12]). В настоящей работе получение квантового аналога классической функции Гамильтона (4) проводим в соответствии с правилом Вейля:

$$W \left\{ Q_\nu^m \cdot P_\nu^n = P_\nu^n \cdot Q_\nu^m \right\} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \hat{P}_\nu^k \cdot Q_\nu^m \cdot P_\nu^{n-k}, \quad \nu=1,2. \quad (11)$$

Далее, используя соответствие между классическими канонически сопряженными переменными и их квантовыми операторами

$$Q_\nu \rightarrow \hat{Q}_\nu^+, \quad P_\nu \rightarrow \hat{Q}_\nu \quad (12a)$$

и правилом коммутации

$$\hat{Q}_\mu \hat{Q}_\nu^+ - \hat{Q}_\nu^+ \hat{Q}_\mu = \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu=1,2, \quad (12b)$$

где  $\delta_{\mu\nu}$  – символ Кронекера, по правилу Вейля (11) находим квантовый аналог нормальной формы Биркгофа-Густавсона в степенном приближении  $S_{\max} = 6$  по произведению операторов  $Q_\nu^+$  и  $Q_\mu$  степени  $S_{\max} = 6$ , который представим в виде следующей суммы

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_6 &= \hat{\Gamma}_{diag} + \hat{\Gamma}_{nondiag}, \quad (13) \\
\hat{\Gamma}_{diag} &= \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1 + C_{41} \left[ \left( \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1 \right)^2 + 1/2 \right] + \\
& + C_{42} \left( \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 2\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 \cdot \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1/2 \right) + C_{43} \left[ \left( \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 - \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 \right)^2 + 1/2 \right] + \\
& + C_{61} \left[ \left( \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 \right)^3 + 3 \left( \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 \right)^2 + 5 \left( \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 \right) + 3 \right] - \\
& + C_{64} \left[ \left( \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1 \right) \left( \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 2\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 \cdot \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 \right) + \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1 \right] + \\
& + C_{66} \left[ \left( \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1 \right) \left( \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 - \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 \right)^2 + \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1 \right] \quad (14a) \\
\hat{\Gamma}_{nondiag} &= -C_{42} \left( \hat{Q}_1^{+2} \hat{Q}_2^2 + \hat{Q}_2^{+2} \hat{Q}_1^2 \right) - C_{62} \left[ 6\hat{Q}_1^+ \left( \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 \right) \cdot \hat{Q}_2^+ \left( \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3\hat{Q}_1^+ \cdot \hat{Q}_2^+ (\hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2) + 3\hat{Q}_2^+ \cdot \hat{Q}_1^+ (\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1) + \hat{Q}_1^{+3} \hat{Q}_2^3 + \hat{Q}_2^{+3} \hat{Q}_1^3 \Big] + \\
& -C_{63} \Big[ \hat{Q}_1^+ (\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + 1)^2 \cdot \hat{Q}_2 + \hat{Q}_2^+ (\hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1)^2 \cdot \hat{Q}_1 + 1/2 \cdot (\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_2 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_1) + \\
& + \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_2^+ (\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1)^2 + 2\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_2^+ (\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 \cdot \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2) \Big] - C_{64} \Big[ \hat{Q}_1^{+2} (\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + 3/2) \hat{Q}_2^2 + \\
& + \hat{Q}_2^{+2} (\hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 3/2) \hat{Q}_1^2 + \hat{Q}_1^{+2} (\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1) \hat{Q}_2^{+2} + \hat{Q}_2^{+2} (\hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2) \hat{Q}_1^{+2} + \hat{Q}_1^{+2} \hat{Q}_2^{+2} \Big] + \\
& + C_{65} \Big[ \hat{Q}_1^{+3} \hat{Q}_2^3 + \hat{Q}_2^{+3} \hat{Q}_1^3 - 2\hat{Q}_1^+ (\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1) \cdot \hat{Q}_2^+ (\hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2) - \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_2^+ (\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2) \Big]
\end{aligned} \tag{146}$$

В приближении  $S_{\max} = 4$  приближенный квантовый аналог исходной функции Гамильтона (1) принимает вид

$$\begin{aligned}
\hat{G}_4 = & \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1 + C_{41} \Big[ (\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1)^2 + 1/2 \Big] +, \\
& + C_{42} (\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 2\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 \cdot \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1/2) + C_{43} \Big[ (\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 - \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2)^2 + 1/2 \Big] - \\
& - C_{42} (\hat{Q}_1^{+2} \hat{Q}_2^2 + \hat{Q}_2^{+2} \hat{Q}_1^2),
\end{aligned} \tag{15}$$

который в интегрируемом случае ( $c = 4d$ ) классических уравнений движения также вследствие резонанса 1:1 содержит недиагональный член (последнее слагаемое в выражении (15)).

В результате проведенного выше квантования получаем уравнение Шредингера

$$\hat{G}_6 |E\rangle = E |E\rangle, \tag{16}$$

которое в нашем приближенном подходе соответствует исходной классической гамильтоновой системе (1). Здесь в обозначениях Дирака  $|E\rangle$  – вектор состояния квантовой системы с энергией равной  $E$ . Для его решения можно использовать собственные функции и значения изотропного двумерного осциллятора [10] с гамильтонианом равным

$$\hat{G}_2 = \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1. \tag{17}$$

Легко убедиться, что каждое собственное состояние изотропного двумерного осциллятора (17), кроме основного состояния,  $(N + 1)$ -кратно вырождено.

Введя основное (вакуумное) состояние

$$\hat{Q}_1 |0,0\rangle = \hat{Q}_2 |0,0\rangle = 0 \tag{18}$$

получим следующий ортонормированный базис

$$|N,L\rangle = \left[ \left( \frac{N+L}{2} \right)! \cdot \left( \frac{N-L}{2} \right)! \right]^{-\frac{1}{2}} \hat{Q}_2^{+\left(\frac{N-L}{2}\right)} \hat{Q}_1^{+\left(\frac{N+L}{2}\right)} |0,0\rangle \tag{19}$$

где  $N$  – главное квантовое число,  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ , а  $L$  – орбитальное квантовое число, которое при заданном значении  $N$  принимает следующие значения:  $L = \pm N, \pm(N-2), \pm(N-4), \dots, 1$  (или 0). Используя определение основного состояния (18) и правило коммутации (12) получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_1^+ |N, L\rangle &= \sqrt{\frac{N+L+2}{2}} |N+1, L+1\rangle, \quad \hat{Q}_2^+ |N, L\rangle = \sqrt{\frac{N-L+2}{2}} |N+1, L-1\rangle, \\ \hat{Q}_1 |N, L\rangle &= \sqrt{\frac{N+L}{2}} |N-1, L-1\rangle, \quad \hat{Q}_2 |N, L\rangle = \sqrt{\frac{N-L}{2}} |N-1, L+1\rangle.\end{aligned}\quad (20)$$

Из соотношений (20) непосредственно следуют выражения:

$$\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 |N, L\rangle = \left(\frac{N+L}{2}\right) |N, L\rangle, \quad \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 |N, L\rangle = \left(\frac{N-L}{2}\right) |N, L\rangle, \quad (21)$$

то есть векторы  $|N, L\rangle$  являются собственными для операторов  $(\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1)^k$  и  $(\hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2)^k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Абстрактный вектор состояния  $|N, L\rangle$  в представлении полярных координат  $u(r, \varphi) = \langle r, \varphi | N, L \rangle$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2^+ \hat{Q}_2 + 1)u(r, \varphi) = \lambda \cdot u(r, \varphi), \quad (22)$$

где

$$\hat{Q}_{1,2}^+ = \mp \frac{i}{2} \exp(\mp i\varphi) \left( \frac{\partial}{\partial r} \mp \frac{\partial}{\partial \varphi} - r \right), \quad \hat{Q}_{1,2} = \mp \frac{i}{2} \exp(\pm i\varphi) \left( \frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{\partial}{\partial \varphi} + r \right), \quad (23)$$

а  $\lambda$  – собственные значения.

В предположении, что собственная функция  $u(r, \varphi)$  представима в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-iL\varphi) \cdot R(r) \quad (24)$$

для радиальной функции  $R(r)$  получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( 2\lambda - r^2 - \frac{L^2}{r^2} \right) R = 0,$$

которое при замене  $R = r^{|L|} \exp(r^2/2) y(r)$  приводит к уравнению

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + \left( \frac{2|L|}{r} - 2r + \frac{1}{r} \right) \frac{dy}{dr} - (2|L| - 2\lambda + 2) y = 0,$$

а после замены  $x = r^2$  приходим к уравнению Куммера [13]



$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (|L|+1-x) \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}(|L|-\lambda+1)y = 0. \quad (25)$$

Решением уравнения Куммера является следующий гипергеометрический ряд

$$y(x) = M(a, b, x) = 1 + \frac{a}{b} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad (26)$$

где

$$2a = |L|+1-\lambda, \quad b = |L|+1.$$

Исходя из физических соображений, согласно которым функция  $y(x)$  должна быть конечной, полагаем, что  $a = -n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Тогда гипергеометрический ряд обрывается, превращаясь в полином, а числовая величина  $\lambda$  должна принимать только дискретный ряд значений  $\lambda = 2n + |L| + 1$  или  $\lambda = N + 1$ , где  $N = 2n + |L|$ ,  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$

После известных стандартных вычислений можно получить следующий ортонормированный базисный набор функций  $u(r, \varphi)$  для квантового изотропного двумерного осциллятора

$$u_{NL}(r, \varphi) = \frac{i^N \exp(-iL\varphi)}{L! \sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{[(N+L)/2]!}{[(N-L)/2]!}} r^L \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) M(a, b, r^2), \quad (27a)$$

$$a = -\left(\frac{N-L}{2}\right), \quad b = |L|+1, \quad (27б)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty u_{N'L'}(r, \varphi) r^2 dr d\varphi = \delta_{NN'} \delta_{LL'}. \quad (27в)$$

Вычислив матричные элементы квантового аналога  $\langle N', L' | N, L \rangle$  классической нормальной формы, в общем, в произвольном приближении по степеням переменных  $S_{\max}$ , можно, например, методом диагонализации найти решение уравнения Шредингера (16), то есть найти приближенные волновые функции и соответствующий приближенный энергетический спектр с определенным учетом нелинейных членов в исходной классической функции Гамильтона и для конкретной «потенциальной ямы» (локального минимума на ПШЭ).

Однако в предлагаемом подходе эти результаты приближенно равны только для энергий, не превышающих энергию потенциальной энергии в соседней к данному локальному минимуму, а также они никак не учитывают эффекты квантового туннелирования между многими локальными минимумами, которые имеются при произвольных значениях параметров в исследуемой классической системе, описываемой функцией Гамильтона (1). Найти явное аналитическое решение, как в классическом случае для системы с функцией Гамильтона (1), так и при ее точном представлении оператором Шредингера

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) + \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) + b \left( q_1^2 q_2 + \frac{1}{3} q_2^3 \right) + c q_1^2 q_2^2 + d (q_1^2 + q_2^2)^2 \quad (28)$$

не представляется возможным. Также прямые численные расчеты даже с применением современных достаточно мощных компьютеров сталкиваются с трудностью решения задач на собственные значения, например, тщательно разработанными программными пакетами на основе метода диагонализации, какой является и задача интегрирования уравнения Шредингера для двух и более переменных.

Одна из трудностей связана с тем, что волновая функция между двумя локальными минимумами принимает значения очень близкие к нулю, поэтому из-за ограниченных возможностей современных электронных вычислительных устройств неизбежно наступает потеря значащих цифр, а в итоге на не возможность решения задачи.

Как нам кажется, одним из перспективных направлений в решении уравнения Шредингера является метод самосогласованного базиса [14], который есть модификация известного метода Канторовича [15] на случай задачи на собственные значения на бесконечном интервале. Методом самосогласованного базиса достаточно успешно найдено решение уравнения Шредингера, ППЭ которого имеет много минимумов [16].

Тем не менее, метод нормальных форм Биркгофа-Густавсона дает удовлетворительное описание, как при классическом подходе, так и квантовом.

К примеру, квантовый спектр в  $S_{\max} = 4$  приближении и соответствующие собственные векторы  $|E\rangle$  находятся из следующего уравнения Шредингера

$$\hat{G}_4 |E\rangle = E |E\rangle, \quad (29)$$

которое можно, например, решить методом диагонализации, представляя вектор состояния  $|E\rangle$  в виде разложения по базисному набору:

$$|E\rangle = \sum_{N,L} C_{NL} |N,L\rangle. \quad (30)$$

Используя выражения (20), находим приближенную формулу (без учета недиагональных членов) для вычисления энергетического спектра при  $S_{MAX} = 4$  (общий случай)

$$E_{NL} = 1 + N + \left( \frac{3d}{2} - \frac{5b^2}{12} \right) \left( N^2 + 2N + \frac{3}{2} \right) + \left( \frac{3c}{8} - \frac{5b^2}{12} \right) \left( \frac{1}{2} N^2 - \frac{1}{2} L^2 + N + \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{c}{8} - \frac{d}{2} \right) \left( L^2 + \frac{1}{2} \right), \quad (31)$$

если  $c = 4d$  (интегрируемый случай)

$$E_{NL} = N + 1 + \left( \frac{3d}{2} - \frac{5b^2}{24} \right) \left( 3N^2 + 6N - L^2 + 4 \right). \quad (32)$$

Как видно из формул (31), (32) энергетический спектр вырожден по знаку орбитального квантового момента.

В общем, для получения формулы (32) следует учесть недиагональную часть, которая при  $S_{MAX} = 4$  определяется недиагональным выражением

$$\gamma(N, L) = 1/4 \cdot \sqrt{(N-L+2)(N-L+4)(N+L)(N+L-2)}, \quad (33)$$

которое присутствует как, в общем, так и в интегрируемом случае, однако, как видно энергетический спектр в обоих случаях вырожден по знаку орбитального квантового момента. Кроме того, учет вклада недиагонального элемента оказывает влияние (сдвиг) на уровни отличающиеся значением орбитального квантового числа на четыре единицы. Поэтому формулы (31), (32) с удовлетворительной точностью описывают энергетический спектр нижайших состояний в окрестности стационарной точки, расположенной в начале координат.

Аналогичным способом можно получить формулы для нижайших состояний в окрестностях других имеющихся стационарных точек, в которых потенциальная функция имеет локальный минимум.

#### 4. Выводы и перспективы дальнейших исследований

В настоящей работе изучен конкретный класс консервативных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Показано, что при произвольных значениях параметров функции Гамильтона в системе имеет место хаотический режим движения. Найдено, что при выполнении условия  $c = 4d$  система является интегрируемой, и это подтверждается вычисленными сечениями Пуанкаре. Методом Биркгофа-Густавсона получена функция Гамильтона, которая при малых энергиях адекватно описывает поведение фазовых траекторий исходной системы.

Исследуемая нами система отличается от изученных в литературе систем тем, что: 1) несмотря на наличие отрицательной гауссовой кривизны на ППЭ, она при условии  $c = 4d$  является интегрируемой, 2) в широком диапазоне параметров стационарные точки квадратичной части ППЭ являются вырожденными, то есть ее одно или оба собственные значения равны нулю.

На основе классической нормальной формы Биркгофа-Густавсона по правилу Вейля был получен ее квантовый аналог. Получены выражения для последующего, при надобности, вычисления энергетических спектров и соответствующих волновых функций. В частности, для нижайших уровней энергии получена формула в явном виде в потенциальной яме в начале координат. Подобные формулы аналогично могут быть получены для всех локальных минимумов, которые возможны при допустимых значениях параметров в исходной функции Гамильтона (1).

В дальнейшем планируется провести подобные исследования для других консервативных гамильтоновых систем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. – М.: УРСС, 2001. – 320 с.
2. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах / А. Пуанкаре, М.: Наука. Т. 2. 1972 г. – 358 с.

3. Dirac P A M. Generalized hamiltonian dynamics / P A M. Dirac // London, Proceed. Roy. Soc, 1958, vol. A 246, p. 326—332.
4. Лихтенберг А. Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман – М.:Мир, 1984. – 528с.
5. Toda M. Instability of trajectories of lattice with cubic nonlinearity / M. Toda // Phys. Lett. – 1974 – v.48 – p.335-336.
6. Кривошей И. В. Неустойчивость и стохастизация при перераспределении энергии в химической динамике / И. В. Кривошей, Г. Б. Литинский, А. В. Лузанов // Хим.физика. 1985. – Т. 4. №6. – С. 309-317.
7. Belajva I.N. Symbolic-numeric Solution of the the Two-dimensional Shroedinger Equation with Double-well Potential / Belajva I.N., Gusev A.A., Lukianenko A.N., Rostovtsev V.A., Vinitsky S.I. // Computer Algebra and Differential Equations Acta Academiae Aboensis. – 2007. – V. B67.– No. 2. – P. 78-86.
8. Штокман Х.-Ю. Квантовый хаос / Х.-Ю. Штокман – М.: Физматлит, 2004. – 376с.
9. Богачев В.Е. Символьно-численные расчеты нормальной формы, интеграла движения и сечений Пуанкаре для консервативных двумерных гамильтоновых систем / Богачев В.Е., Чеканов Н.А. // Вычислительные технологии, 2012 – т. 17. – № 4 – с. 3-13.
10. Чеканов Н. А. Квантование нормальной формы Биркгофа-Густавсона / Н. А. Чеканов // Ядерная физика. – 1989. – Т. 50. – Вып. 8. – С. 344-346.
11. Basios, V. GITA: a REDUCE program for the normalization of polynomial Hamiltonians. / V. Basios, N. A. Chekanov, B. L. Markovski, V. A. Rostovtsev, S.I. Vinitsky // Comp. Phys. Commun. – 1995. – v. 90. – p. 355 – 368.
12. Ezra G.S. Perturb: a program for calculating vibrational energies by generalized algebraic quantization / G.S. Ezra, L.E. Fried // Comp. Phys. Commun. – 1988. – v51. – p. 103-114.
13. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: «Наука», 1979. – 832с.
14. Веницкий, С.И. Решение двумерного уравнения Шредингера в самосогласованном базисе / Веницкий, С.И., Инопин Е.В., Чеканов Н.А. // Препринт ОИЯИ, Р4-93-150, Дубна, 1993. – 11с.
15. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – Л., Физматгиз, 1962 г. – 708 с.
16. Лукьяненко А.Н. Классическая и квантовая двумерные модельные системы с пятичленным полиномиальным потенциалом / А.Н. Лукьяненко, Н.А. Чеканов // Вопросы атомной науки и техники. Серия: теоретическая и прикладная физика (РФЯЦ–ВНИИЭФ, г. Саров). – 2009. – Вып. 2. – С. 14-20.

УДК 539.3

## Построение фундаментального решения уравнений статики изотропных пластин с использованием теории С. П. Тимошенко

И. П. Боков, Е. А. Стрельникова

*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ, Украина*

Для вывода двумерных уравнений теории упругости для изотропных пластин использован метод аппроксимации перемещений, напряжений и деформаций рядами Фурье по полиномам Лежандра от поперечной координаты. Этот подход позволяет учесть поперечные касательные и нормальные напряжения. На основе полученных с помощью этого подхода уравнений для изотропных пластин разработана методика их расчета при действии сосредоточенных силовых воздействий. Фундаментальное решение полученных уравнений найдено с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье и методики обращения, построенной с помощью специальной G-функции.

**Ключевые слова:** *изотропные пластины, теория Тимошенко, уравнения статики, н.д.с. изотропной пластины, фундаментальное решение.*

Для виведення двовимірних рівнянь теорії пружності для ізотропних пластин використаний метод апроксимації переміщень, напруг і деформацій рядами Фур'є за поліномами Лежандра від поперечної координати. Цей підхід дозволяє врахувати поперечні дотичні і нормальні напруги. На основі отриманих за допомогою цього підходу рівнянь для ізотропних пластин розроблена методика їх розрахунку при дії зосереджених силових впливів. Фундаментальне рішення отриманих рівнянь знайдено за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є і методики звернення, побудованої за допомогою спеціальної G-функції.

**Ключові слова:** *ізотропні пластины, теорія Тимошенко, рівняння статики, н.д.с. ізотропної пластины, фундаментальний розв'язок.*

The displacements, stresses and strains approximations via Fourier series in Legendre polynomials on the transverse coordinate method were used to derive the equations of two-dimensional theory of elasticity for isotropic plates. This allows us to take into account the transverse shear and normal stresses. Based on this approach, a calculation method was developed for isotropic plates under effects of concentrated forces. The fundamental solution of the equations is obtained using a two-dimensional Fourier integral and conversion techniques built using the special G-function.

**Key words:** *isotropic plate, theory of Timoshenko, the static equation, stress-strain state isotropic plate, fundamental solution.*

### Введение

Разработке методов построения фундаментальных решений (решений, соответствующих сосредоточенным воздействиям) уравнений теории упругих тонких пластин и оболочек посвящено большое количество отечественных и зарубежных работ. Постановки задач, методы их решения и ряд конкретных решений содержатся в монографиях и научных статьях С.А. Амбарцумяна [1], А.Л. Гольденвейзера [2], S. Lukasiwicz [3], а также в ряде обзоров В.М. Даревского [4], Ю.П. Жигалко [5] и других.

Классическая теория Кирхгофа-Лява удовлетворительно описывает напряженно-деформированное состояние (н.д.с.) сравнительно тонких

изотропных пластин, но не учитывает явления, обусловленные сдвигами и обжатием. С другой стороны, решение задач теории упругости в трехмерной постановке приводит к значительным математическим трудностям. Поэтому вопрос построения уточненных теорий тесно связан с проблемой приведения трехмерных задач к двумерным.

Таким образом, исследование на базе уточненных теорий напряженно-деформированного состояния изотропных пластин при сосредоточенных силовых воздействиях является актуальной и важной научно-технической задачей.

В работе для приведения трехмерной задачи для изотропных пластин к двумерной используется метод разложения искомых функций в ряды по полиномам Лежандра от нормальной координаты. Этот подход позволяет учесть поперечные касательные и нормальные напряжения. На основе полученных с помощью этого подхода уравнений для изотропных пластин разработана методика их расчета при действии сосредоточенных силовых воздействий.

Достоверность научных результатов обеспечивается корректностью постановки задачи и строгим математическим подходом к ее решению.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается изотропная пластина толщины  $2h$  в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ .

Пусть на пластину в начале координат (особой точке) действует сосредоточенная сила  $\vec{F}$ . В действительности так называемых сосредоточенных нагрузок не существует. Сосредоточенную силу можно представлять себе как некоторую абстракцию (конечную по величине силу, действующую на малый участок поверхности [6, с. 231]).

При решении задач о действии сосредоточенных сил искомое н.д.с. считаем локальным, т.е. не распространяющимся до линии внешнего контура пластины. Поэтому пластину считаем бесконечной и предполагаем, что искомые компоненты н.д.с. стремятся к нулю на бесконечности. Справедливость данного предположения проверяется после решения задачи.

Математическая постановка задачи содержит полную систему уравнений теории упругости без учёта граничных условий на краях реальной пластины. Искомые функции стремятся к нулю на бесконечности.

Система уравнений н.д.с. изотропных пластин на базе теории С.П. Тимошенко, описывающая н.д.с. при изгибе, состоит из [7, с. 35-37]:

- геометрических соотношений

$$e_{x1} = h \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}, \quad e_{xy1} = h \left( \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right), \quad e_{xz0} - \frac{e_{xz2}}{5} = \gamma_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (x \rightarrow y). \quad (1.1)$$

- соотношений упругости

$$M_x = D(e_{x1} + \nu e_{y1}), \quad M_y = D(e_{y1} + \nu e_{x1}), \quad H = \frac{1-\nu}{2} D e_{xy1}, \quad (1.2)$$

$$Q_x = \Lambda \left( e_{xz0} - \frac{e_{xz2}}{5} \right) (x \rightarrow y),$$

где  $D = \frac{2h^2}{3} \frac{E}{1-\nu^2}$ ,  $\Lambda = \frac{5hG}{3}$ .

▪ уравнений равновесия

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x + m_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_y + m_y = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0.$$

Чтобы найти фундаментальное решение системы (1.1)-(1.3), компоненты вектора объёмной силы в формулах (1.3) следует взять в виде

$$m_x(x, y) = h^2 m_x^* \delta(x, y), \quad m_y(x, y) = h^2 m_y^* \delta(x, y), \quad (1.4)$$

$$q_z(x, y) = h^2 q_z^* \delta(x, y) \quad (x \rightarrow y),$$

где  $m_x^*, m_y^*, q_z^* = const$ ,  $\delta(x, y)$  – двумерная дельта-функция Дирака [8].

## 2. Определение трансформант обобщенных перемещений

Подставив геометрические соотношения (1.1) в соотношения упругости (1.2) и перейдя в безразмерную систему координат  $x_1 = x/h$ ,  $x_2 = y/h$ ,  $x_3 = z/h$ , получим

$$M_1 = D_0 \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right), \quad M_2 = D_0 \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right),$$

$$H = \frac{1-\nu}{2} D_0 \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right), \quad (2.1)$$

$$Q_1 = \Lambda_0 \left( \gamma_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right), \quad Q_2 = \Lambda_0 \left( \gamma_2 + \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right),$$

где  $D_0 = \frac{D}{Eh^2} = \frac{2}{3} \frac{1}{1-\nu^2}$ ,  $\Lambda_0 = \frac{5G}{3E}$ .

Изгибающие и крутящий моменты определены в отношении к величине  $Eh^2$ , а перерезывающие силы – в отношении к величине  $Eh$ .

Переведа в безразмерную систему координат уравнения равновесия, получим

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_1 + m_1 = 0, \quad \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_1} - Q_2 + m_2 = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q_3 = 0,$$

где  $m_1 = m_1^* \delta(x_1, x_2)$ ,  $m_2 = m_2^* \delta(x_1, x_2)$ ,  $q_3 = q_3^* \delta(x_1, x_2)$ .

Решив систему, получаем трансформанты обобщенных перемещений:

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{m_1^* \xi_1^2}{D_0 p^4} + 3(1+\nu)m_1^* \frac{\xi_2^2}{p^2(p^2+2,5)} + \frac{q_3^* i \xi_1}{D_0 p^4} + \frac{m_2^* \xi_1 \xi_2}{D_0 p^4} - 3(1+\nu)m_2^* \frac{\xi_1 \xi_2}{p^2(p^2+2,5)} \right], \quad (2.3)$$

$$\tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{m_2^* \xi_2^2}{D_0 p^4} + 3(1+\nu)m_2^* \frac{\xi_1^2}{p^2(p^2+2,5)} + \frac{q_3^* i \xi_2}{D_0 p^4} + \frac{m_1^* \xi_1 \xi_2}{D_0 p^4} - 3(1+\nu)m_1^* \frac{\xi_1 \xi_2}{p^2(p^2+2,5)} \right],$$

$$\tilde{w}_0 = \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{m_1^* i \xi_1}{D_0 p^4} - \frac{m_2^* i \xi_2}{D_0 p^4} + \frac{q_3^*}{D_0 p^4} + \frac{q_3^*}{\Lambda_0 p^2} \right],$$

где  $p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ ;  $(\xi_1, \xi_2)$  – координаты точки в пространстве трансформант.

### 3. Определение перерезывающих сил в пространстве трансформант

Применим преобразование Фурье к уравнениям закона Гука (2.1):

$$\tilde{M}_1 = -D_0(i\xi_1\tilde{\gamma}_1 + i\nu\xi_2\tilde{\gamma}_2), \quad \tilde{M}_2 = -D_0(i\xi_2\tilde{\gamma}_2 + i\nu\xi_1\tilde{\gamma}_1),$$

$$\tilde{H} = \frac{1-\nu}{2} D_0(i\xi_2\tilde{\gamma}_1 + i\xi_1\tilde{\gamma}_2), \quad (3.1)$$

$$\tilde{Q}_1 = \Lambda_0(\tilde{\gamma}_1 - i\xi_1\tilde{w}_0), \quad \tilde{Q}_2 = \Lambda_0(\tilde{\gamma}_2 - i\xi_2\tilde{w}_0).$$

Подставим ранее полученные трансформанты обобщенных перемещений (2.3) в трансформанты перерезывающих сил (3.1):

$$\tilde{Q}_1 = \frac{2,5}{2\pi} \left[ m_1^* \frac{\xi_2^2}{p^2(p^2+2,5)} - m_2^* \frac{\xi_1 \xi_2}{p^2(p^2+2,5)} \right] - \frac{q_3^* i \xi_1}{2\pi p^2}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{Q}_2 = \frac{2,5}{2\pi} \left[ m_2^* \frac{\xi_1^2}{p^2(p^2+2,5)} - m_1^* \frac{\xi_1 \xi_2}{p^2(p^2+2,5)} \right] - \frac{q_3^* i \xi_2}{2\pi p^2}.$$



Обозначим

$$\tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{i\xi_1}{p^2}, \quad \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1^2}{p^2(p^2 + 2,5)}, \quad \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1\xi_2}{p^2(p^2 + 2,5)}. \quad (3.3)$$

Тогда перерезывающие силы в пространстве трансформант запишутся так

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 &= \frac{2,5}{2\pi} \left[ m_1^* \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1) - m_2^* \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) \right] - \frac{q_3^*}{2\pi} \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2), \\ \tilde{Q}_2 &= \frac{2,5}{2\pi} \left[ m_1^* \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) - m_2^* \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) \right] - \frac{q_3^*}{2\pi} \tilde{\Phi}_1(\xi_2, \xi_1). \end{aligned} \quad (3.4)$$

#### 4. Нахождение перерезывающих сил

Необходимо теперь обратить выражения (3.4). Сначала найдём оригиналы функций (3.3) с использованием интегрального преобразования Фурье [9, с. 58]

$$F^{-1}[\tilde{f}(\xi_1, \xi_2)] = f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} d\xi_1 d\xi_2. \quad (4.1)$$

Получим

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1, x_2) &= \frac{x_1(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \Phi_3(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\ \Phi_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \left[ G_{0,0}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $G_{n,\nu}(rz)$  – специальная G-функция [10].

Применяя формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье (4.1) к трансформантам внутренних силовых факторов (3.4) и учитывая выражения (4.2), запишем выражения для  $Q_1, Q_2$  в пространстве оригиналов

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{2,5}{2\pi} \left[ \frac{m_1^*}{2} \left\{ G_{0,0}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - m_2^* \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \right] - \frac{q_3^*}{2\pi} \frac{x_1(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ Q_2 &= \frac{2,5}{2\pi} \left[ \frac{m_2^*}{2} \left\{ G_{0,0}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - m_1^* \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \right] - \frac{q_3^*}{2\pi} \frac{x_2(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

### 5. Анализ результатов численных исследований

Численные исследования были проведены для следующих материалов пластин: золото и железо. Коэффициенты Пуассона ( $\nu$ ) для данных материалов равны: 0,42 и 0,28 соответственно [11, с. 200].

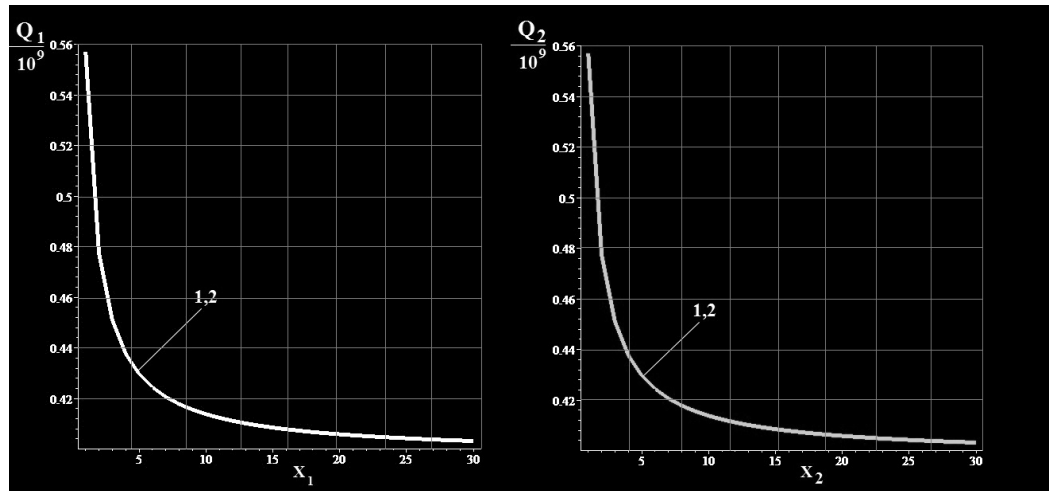


Рис.1. Перерезывающие силы  $Q_1, Q_2$

На рис. 1 представлены графики обобщенных перерезывающих сил  $Q_1, Q_2$  соответственно. Кривая 1 – материал золото, кривая 2 – железо. Для второго материала значение коэффициента Пуассона уменьшено. Видно, что обобщенные перерезывающие силы  $Q_1, Q_2$  от упругих констант не зависят.

### Заключение

Трехмерные уравнения теории упругости приведены к двумерным путем разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра относительно толщинной координаты. Построено фундаментальное решение полученных уравнений. Исследовано влияние упругих параметров на н.д.с. пластины.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян.– М.: Наука, 1974.– 446 с.
2. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки / А. Л. Гольденвейзер // Прикл. математика и механика. – 1944. – 8, вып. 6. – С. 441 – 467.
3. Lukasiewicz S. Introduction of concentrated loads in plate and shells / S. Lukasiewicz // Progress in Aerospace Sciences. – 1976. – 17, N 2. – P. 109 – 1046.

4. Даревский В. М. Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки) / В. М. Даревский // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С. 927 – 933.
5. Жигалко Ю. П. Расчет тонких упругих цилиндрических оболочек на локальные нагрузки (обзор литературы, метод и результате) / Ю. П. Жигалко // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. – Вып. 4. – С. 3 – 41.
6. Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения / Х. Хан.– М.: Мир, 1988.– 344 с.
7. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько.– К.: Наук. думка, 1982.– 296 с.
8. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров.– М.: Наука, 1976.– 280 с.
9. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон.– М.: Издательство иностранной литературы, 1955.– 668 с.
10. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко; ДонГУ.– Донецк: ДонГУ, 1980.– 128 с.
11. Дементьев А. Д. Прикладные задачи теории упругости / А. Д. Дементьев, Л. А. Назаров, Л. А. Назарова.– Новосибирск, 2002.– 224 с.

УДК 519.63:532.5

## Задача ідентифікації масообмінного параметра сингулярно збуреного процесу очищення рідин від багатокомпонентного забруднення

А. Я. Бомба, А. П. Сафоник

*Національний університет водного господарства та природокористування,  
м. Рівне, Україна*

Запропоновано просторове узагальнення математичної моделі процесу очищення рідини від багатокомпонентного забруднення, яка, в припущенні домінування конвективних складових цього процесу над дифузійними, враховує зворотний вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості, дифузії), і включає спеціальним чином задану додаткову умову (умову перевизначення) для знаходження невідомого малого масообмінного коефіцієнта. Побудовано алгоритм розв'язку відповідної нелінійної оберненої сингулярно збуреної задачі типу «конвекція-дифузія-масообмін». На цій основі проведено комп'ютерний експеримент.

**Ключевые слова:** фільтрування, багатокомпонентна концентрація, конвекція, дифузія, масообмін, асимптотика, просторова нелінійна сингулярно збурена задача.

Предложено пространственное обобщение математической модели процесса очистки жидкости от многокомпонентного загрязнения, которая, в предположении доминирования конвективных составных этого процесса над диффузными, учитывает обратное влияние определяющих факторов (концентрации загрязнения жидкости и осадка) на характеристики среды (коэффициент пористости, диффузии), и включает специальным образом заданное дополнительное условие (условие переопределения) для нахождения неизвестного малого массообменного коэффициента. Построен алгоритм решения соответствующей нелинейной обратной сингулярно возмущенной задачи типа « конвекция-диффузия-массообмен». На этой основе проведен компьютерный эксперимент.

**Ключові слова:** фільтрування, багатокомпонентна концентрація, конвекція, дифузія, масообмін, асимптотика, просторова нелінійна сингулярно збурена задача.

The proposed spatial generalization of the mathematical model for the process of cleaning liquid from multicomponent pollution assumes the dominance of convective composite process over diffusion ones. It takes into account the influence of the determining factors (the concentration of fluid contamination and sediment) on the characteristics of the medium (porosity, diffusion) and includes specified in a special manner additional condition (condition overrides) to find unknown small mass-transfer coefficient. The algorithm for solving the corresponding nonlinear inverse singularly perturbed problem type "convection-diffusion-mass transfer" is constructed. On this basis the computer experiment have been carried out.

**Key words:** filtering, multicomponent concentration, convection, diffusion, mass exchange, asymptotic, spatial nonlinear singular the indignant tasks.

### 1. Загальна постановка задачі та її актуальність

Аналіз результатів досліджень [1, 13] свідчить про наявність складної структури взаємозалежності різних факторів, які визначають процеси фільтрації й фільтрування через пористі середовища й не враховувалися в традиційних

(класичних, феноменологічних) моделях таких систем. У роботі [8] показано, що задання форми фільтра відіграє суттєву роль у процесі фільтрування позаяк це може призвести як до збільшення (зменшення) параметрів фільтрування, так і до збільшення продуктивності його роботи загалом. В свою чергу для побудови математичних моделей процесів очищення рідин від багатокомпонентного забруднення просторовим фільтром на даний час практично відсутні “модельні механізми”, що враховують зворотній вплив різного роду характеристик процесу на характеристики середовища та ідентифікації невідомих параметрів, що входять до відповідних моделей. У роботі [9] розроблено математичну модель процесу очищення рідини у пористій фільтруючій насадці, що враховує зворотній вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри, при цьому деякі коефіцієнти розглянутого процесу, визначалися експериментальним шляхом.

Метою даної роботи є просторове узагальнення математичної моделі процесу очищення рідини від багатокомпонентного забруднення [10], яка, в припущенні домінування конвективних складових цього процесу над іншими, враховує зворотній вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості, дифузії), і включає спеціальним чином задану додаткову умову (умову перевизначення) для знаходження невідомого малого масообмінного коефіцієнта, та побудова асимптотичного розв’язку відповідної нелінійної оберненої сингулярно збуреної задачі.

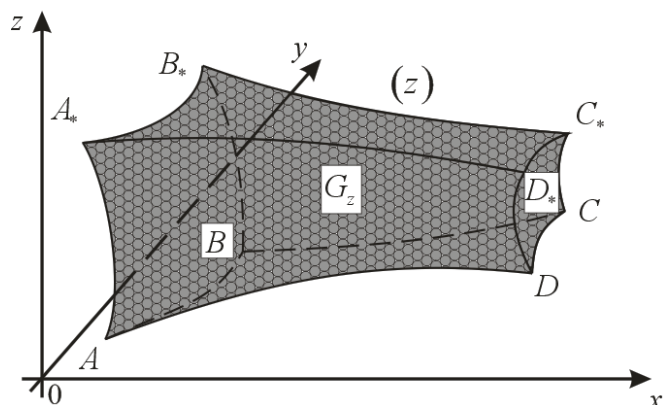


Рис. 1. Просторова фізична область  $G_z$  (пористий фільтр)

**Постановка задачі.** Розглянемо зернистий (пористий) фільтр, що має форму криволінійного паралелепіпеда  $G_z = ABCDA^*B^*C^*D^*$ , обмежений гладкими ортогональними між собою в кутових точках і ребрах еквіпотенціальними поверхнями  $ABB^*A^* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$ ,  $CDD^*C^* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$  та поверхнями течії  $ADD^*A^* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$ ,  $BCC^*B^* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$ ,  $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$ ,  $A^*B^*C^*D^* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$  (див. рис. 1). Припускаємо [9], що частинки забруднення домішок речовини можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відриву, сорбції-десорбції тощо) і при цьому концентрації

забруднення «впливають» на характеристики відповідного середовища (пористість, коефіцієнт фільтрації, тощо). Концентрація забруднення є багатокомпонентною ( $C = C(x, y, z, t) = (C_1, \dots, C_m) = (C_1(x, y, z, t), \dots, C_m(x, y, z, t))$ ), де  $C_i$  концентрація  $i$ -ої компоненти домішки ( $i = \overline{1, m}$ ) у рідкому фільтруючому середовищі. Відповідний процес фільтрування для області  $G = G_Z \times (0, \infty)$  опишемо наступною модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(P)C_i)}{\partial t} = \varepsilon\alpha_i(t)\rho_i - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_i - \beta_i \left( \sum_{p=1}^m q_p C_p \right) - \\ - \varepsilon f_{m-1} \left( \sum_{p_1, \dots, p_m=1}^m h_{i, p_1, \dots, p_m} C_i^{\gamma_{p_1}} C_{p_1}^{\gamma_{p_2}} \dots C_{p_m}^{\gamma_{p_m}} \right) + D_i \Delta C_i, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \left( \sum_{i=1}^m \beta_i C_i \right) - \varepsilon\alpha(t)P, i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (1)$$

$$C_i \Big|_{ABB, A_s} = C_{i, *}(M, t), \frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}} \Big|_{CDD, C_s} = 0, \frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD, A_s \cup BCC, B_s \cup ABCD \cup A, B, C, D_s} = 0, \\ C_i(x, y, z, 0) = C_{i, 0}^0(x, y, z), P(x, y, z, 0) = P_0^0(x, y, z), \quad (2)$$

$$\vec{v} = \kappa \nabla \varphi, \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (3)$$

$$\varphi \Big|_{ABB, A_s} = \varphi_*, \varphi \Big|_{CDD, C_s} = \varphi^*, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD, A_s \cup BCC, B_s \cup ABCD \cup A, B, C, D_s} = 0; \quad (4)$$

$$\alpha(t) \iiint_G P(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, t) d\vec{x} d\vec{y} d\vec{z} = \mu(t), \quad (5)$$

де  $P(x, y, z, t)$  – концентрація осаду у внутрішній точці  $(x, y, z)$  області  $G$  (завантаження фільтра) в момент часу  $t$ ;  $\beta_i$  – коефіцієнти, що характеризують масові об'єми осадження домішок за одиницю часу,  $\alpha(t)$  – шуканий коефіцієнт, що характеризує масові об'єми відірваних від гранул завантаження частинок,  $\mu(t)$  – функція, що характеризує масові розподілу осаду з часом (знаходиться експериментальним способом [13]), (4) – умова пере визначення [11];  $\sigma(P)$  – пористість середовища ( $\sigma(P) = \sigma_0 - \varepsilon\sigma_* P(x, y, z, t)$ );  $\vec{\nabla}$  – оператор Гамільтона;  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  – оператор Лапласа;  $D_i = d_{0i}\varepsilon$  – коефіцієнт дифузії домішки у рідині;  $\sigma_*$ ,  $d_{0i}$ ,  $\varepsilon$  – тверді параметри (характеризують відповідний м'який параметр  $\sigma(P)$ ), що знаходяться експериментальним способом,  $\varepsilon$  – малий параметр (він характеризує переваги одних складників процесу над іншими, а саме, десорбційні складники та явища міжкомпонентної взаємодії цього процесу є малими порівняно з іншими його складниками);  $C_i^*(M, t)$ ,  $C_{i, 0}^0(x, y, z)$  – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області  $G$ ;  $M$  – довільна точка відповідної поверхні;  $\varphi$  – фільтраційний потенціал ( $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$ );  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  – вектор швидкості фільтрації ( $|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon$ ),  $\kappa$  - коефіцієнт фільтрації.

Шляхом введення пари функцій  $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\eta = \eta(x, y, z)$  (просторово квазікомплексно спряжених із функцією  $\varphi(x, y, z)$ ) таких, що

$\kappa \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \eta$  [9] і заміною граничних умов на умови:  $\psi|_{ADD,A} = 0$ ,  $\psi|_{BCC,B_s} = Q^*$ ,  $\eta|_{ABCD} = 0$ ,  $\eta|_{A,D,C,B_s} = Q^*$ , задача замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу квазіконформного відображення області  $G_Z$  на відповідну область комплексного квазіпотенціалу  $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 < \psi < Q^*, 0 < \eta < Q^*\}$ , де  $Q_*$ ,  $Q^*$  – невідомі параметри,  $Q_* \cdot Q^* = Q = \int_{EFF_*E_*} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds$  – кількість рідини, що проходить через деяку квазіеквіпотенціальну поверхню  $EFF_*E_*$  області  $G_Z$  (повна фільтраційна витрата). Прийmemo, що дана задача на просторове конформне відображення  $G_w \mapsto G_Z$  ( $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \bar{\varphi}_* < \varphi < \bar{\varphi}^*, 0 < \psi < Q^*, 0 < \eta < Q^*\}$  – відповідна  $G_Z$  область комплексного квазіпотенціалу) при деякому усередненому значенні  $\kappa \in$  розв’язана [9], зокрема, побудовано динамічну сітку та поле швидкості  $\vec{v}$ , обчислено фільтраційну витрату  $Q = Q_* Q^*$ . Тоді, здійснивши заміну змінних  $x = x(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $y = y(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $z = z(\varphi, \psi, \eta)$  у системі (1) та умовах (2), приходимо до відповідної задачі для області  $G_w \times (0, \infty)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} = \varepsilon\alpha(t)\rho - v^2 \frac{\partial c_i}{\partial \varphi} - \beta_i \sum_{p=1}^m q_p C_p - \varepsilon \sum_{p=1, i \neq p}^m h_{i,p} c_{i,j-1} c_{p,j-1} + \\ + \varepsilon d_{0i} \left( v^2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_i}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \beta_i c_i - \varepsilon\alpha(t)\rho, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} c_i(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) &= c_i^*(\psi, \eta, t), c_{i,\varphi}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = 0, \\ c_{i,\psi}(\varphi, 0, \eta, t) &= c_{i,\psi}(\varphi, Q^*, \eta, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, 0, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \\ c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) &= c_{i,0}^0(\varphi, \psi, \eta), \rho(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\alpha(t) \iiint_{G_w} \rho(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} = \mu(t), \quad (8)$$

$$\text{де } c_i = c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = C_i(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$\rho = \rho(\varphi, \psi, \eta, t) = P(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$b_1 = b_1(\varphi, \psi, \eta) = (\bar{\nabla}\psi)^2, b_2 = b_2(\varphi, \psi, \eta) = (\bar{\nabla}\eta)^2, d_1 = d_1(\varphi, \psi, \eta) = \Delta\psi,$$

$$d_2 = d_2(\varphi, \psi, \eta) = \Delta\eta,$$

$$v^2(\varphi, \psi, \eta) = v_x^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) + v_y^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) + v_z^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \quad (\text{див., напр., [9]}).$$

**Асимптотика розв’язку.** Розв’язок задачі (6), (8) з точністю  $O(\varepsilon^n)$  шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [8, 9, 10]:

$$c_i = c_{i,0} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j c_{i,j} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \Pi_{i,j} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{\Pi}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_{i,j} + R_{c,i}, \quad (9)$$

$$\rho = \rho_0 + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \rho_j + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \bar{P}_j + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{P}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{P}}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_j + R_\rho, \quad (10)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j \alpha_j + R_\alpha, \quad (11)$$

де  $R_{c,i}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ,  $R_\rho(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ,  $R_\alpha(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$  — залишкові члени,  $c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\alpha_j(t)$  — члени регулярної частини асимптотики ( $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{0, n}$ );  $\Pi_{i,j}(\xi, \psi, \eta, t)$ ,  $\bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$  — функції типу примежового шару в околі  $\varphi = \bar{\varphi}^*$  (поправки на виході з фільтра) ( $j = \overline{0, 2}$ ),  $\tilde{\Pi}_{i,j}(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{P}_j(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$  — в околі  $\varphi = \bar{\varphi}^*$  (поправки на вході у фільтр) ( $j = \overline{0, 2}$ ), а функції  $\tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_{i,j}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$  та  $\tilde{P}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{\tilde{\tilde{P}}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$  ( $j = \overline{0, 3}$ ) — в околах  $\psi = 0$ ,  $\psi = Q^*$ ,  $\eta = 0$ ,  $\eta = Q^*$  (поправки в околі бічних «стінок» фільтра), відповідно;  $\xi = (\varphi^* - \varphi)/\varepsilon$ ,  $\tilde{\xi} = (\varphi - \varphi_*)/\varepsilon$ ,  $\tilde{\psi} = \psi/\sqrt{\varepsilon}$ ,  $\tilde{\tilde{\psi}} = (Q_* - \psi)/\sqrt{\varepsilon}$ ,  $\tilde{\eta} = \eta/\sqrt{\varepsilon}$ ,  $\tilde{\tilde{\eta}} = (Q^* - \eta)/\sqrt{\varepsilon}$  — «розтяги» відповідних змінних.

Шляхом підстановки співвідношень (9)-(11) у (6)-(8) і виконання стандартної процедури «прирівнювання» коефіцієнтів при однакових степенях  $\varepsilon$ , одержимо такі задачі для знаходження  $c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$  ( $j = \overline{0, n}$ ).

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial \varphi} + \beta_i c_{i,0} = 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \beta_i c_{i,0}, \\ c_{i,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0, & c_{i,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{i,*}(\psi, \eta, t), \\ \rho_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0; \\ \alpha_0(t) \iiint_{G_w} \rho_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} = \mu(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sigma_* \rho_{j-1} \frac{\partial c_{i,j}}{\partial t} = U_{i,j} - v^2 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \varphi} - \beta_i \left( \sum_{j=1}^m q_j c_j \right), \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \beta_i c_{i,j} - \sum_{k=1}^j \alpha_{j-k} \rho_{k-1}, \\ c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, & c_{i,j}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0, \\ \rho_j(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0; \end{cases}$$



$$\alpha_0 \iiint_{G_w} \rho_j(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} + \alpha_1 \iiint_{G_w} \rho_{j-1}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} + \dots + \alpha_j \iiint_{G_w} \rho_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} = 0.$$

В результаті їх розв'язання отримаємо:

$$c_{i,0} = \begin{cases} c_{i,*}(\psi, \eta, t - f) \exp\left[-\beta_i \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)}\right], & t \geq f, \\ c_{i,0}^0(f^{-1}(f - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp\left[-\frac{\beta_i t}{\sigma_0}\right], & t < f, \end{cases}$$

$$\rho_0 = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \beta_i c_{i,0}\right) d\tilde{t} + \rho_0^0, \quad \alpha_0 = \frac{\mu}{\iiint_{G_w} \rho_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta}},$$

$$c_{i,j} = \begin{cases} e^{-\lambda_i} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{U_{i,j}(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} e^{\lambda_2(s, \psi, \eta, t)} ds, & t \geq f, \\ -\frac{e^{-\lambda_i}}{\sigma_*} \int_0^t \frac{U_{i,j}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\rho_{j-1}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} e^{\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, s)} ds, & t < f, \end{cases}$$

$$\rho_j = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \beta_i c_{i,j} - \sum_{k=1}^j \alpha_{j-k} \rho_{k-1}\right) d\tilde{t}, \quad \alpha_j = \frac{\sum_{k=1}^j \alpha_{j-k} \iiint_{G_w} \rho_j(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta}}{\iiint_{G_w} \rho_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta}},$$

$$\text{де } U_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t) = d_{0i} \left( v^2 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \eta} \right) + \alpha_{j-1} \rho_{j-1} - \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} c_{l,j-1} c_{g,j-1}, \quad (j = \overline{2, n}),$$

$$\lambda_1(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta_i \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\rho_{j-1}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f) c_{i,j}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta_j \int_0^t \frac{\rho_{j-1}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) c_{i,j}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s})}{\sigma(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{s},$$

$$f(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})} \text{ — час проходження відповідною частинкою шляху}$$

від точки  $(x(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in ABB_*A_*$  до точки  $(x(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in G_z$  уздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь  $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}$ ,  $0 \leq \bar{\psi} \leq Q_*$ ,  $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}$ ,  $0 \leq \bar{\eta} \leq Q^*$ ),  $f^{-1}$  — функція, обернена до  $f$  відносно змінної  $\varphi$  (відзначимо, що така функція існує, оскільки  $v^2(\varphi, \psi, \eta)$  — неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена функція).

Функції  $\Pi_{i,j}(\xi, \psi, \eta, t), \bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t) \quad (i = 0, 1), \quad \bar{\Pi}_{i,j}(\xi, \psi, \eta, t), \bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t),$   
 $\tilde{\Pi}_{i,j}(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t), \tilde{P}_{i,j}(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t), \quad \tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \tilde{\tilde{P}}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \hat{\Pi}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$  та  
 $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \hat{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \hat{\tilde{P}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$  знаходяться аналогічно [9]. Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [10]. Обґрунтування збіжності розв'язку проводиться аналогічно до [9].

### 3. Результати числових розрахунків

Наведемо результати числового експерименту для фільтра, обмеженого поверхнями:  $f_1(x, y, z) = z - 1,25; f_2(x, y, z) = (z - 2,5466434)^2 + y^2 + x^2 - 0,1187841,$   
 $f_3(x, y, z) = (z - 1,25)^2 + (y - 3,8471044)^2 + x^2 - 16,3627124; f_4(x, y, z) = (z - 1,25)^2 + x^2 +$   
 $+(y + 3,8471044)^2 + x^2 - 16,3627124; f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = [z(z - 2,5) + y^2 + x^2]^2 +$   
 $+ 6,25y^2 - 36,4276695x^2.$  Для такого фільтра характерна значна просторовість засипки, «монотонність звуження» в напрямку від входу до виходу фільтра (вибір саме такої форми «підказує» практика), та взаємна ортогональність граней уздовж ребер і в кутових точках (це суттєве для спрощення процедури побудови просторового конформного відображення). На основі [9] побудовано розрахункову динамічну сітку в  $G_z$ :  $\varphi(x, y, z) = \bar{\varphi}_i \stackrel{\text{df}}{=} \varphi_* + [(\varphi^* - \varphi_*)i]/n, i = \overline{0, n},$   
 $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}_j \stackrel{\text{df}}{=} (Q_* j)/m, \quad j = \overline{0, m}, \eta(x, y, z) = \bar{\eta}_k \stackrel{\text{df}}{=} (Q^* k)/l, \quad k = \overline{0, l}$  для  $\varphi_* = 0, \varphi^* = 8000,$   
 $\kappa = 1, n = 30, m = 16, l = 16$  (параметри  $n, m$  і  $l$  вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної), знайдено фільтраційну витрату  $Q = 0,651,$  обчислено величини швидкості фільтрації  $|v|$  та функцій  $b_i(\varphi, \psi, \eta),$   
 $d_i(\varphi, \psi, \eta) \quad (i = 1, 2).$  При цьому нев'язки розрахованих конструкцій не перевищують 0,001. На рис. 2 проілюстровано розподіл концентрації  $c_1, c_2$  і  $\rho$  з часом вздовж ліній течії для  $L = 1\text{м}, \beta_i = 0,3\text{м}^2/\text{с}, \alpha_0 = 0,0056\text{м}^2/\text{с}, \sigma_0 = 0,5,$   
 $\varepsilon = 0,001; \quad k = 1; \quad c_{1,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 0,017 \exp(-\varphi^2), \quad c_{2,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 0,021 \exp(-\varphi^2),$   
 $c_1^*(\psi, \eta, t) = 0,017, \quad c_2^*(\psi, \eta, t) = 0,021, \quad \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0.$

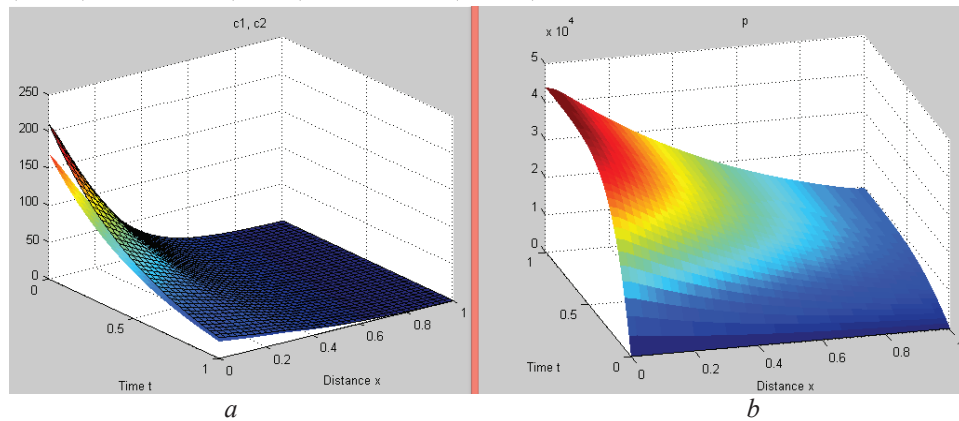


Рис. 2. Просторовий розподіл концентрації  $c_1, c_2$  - (a) і  $\rho$  - (b)

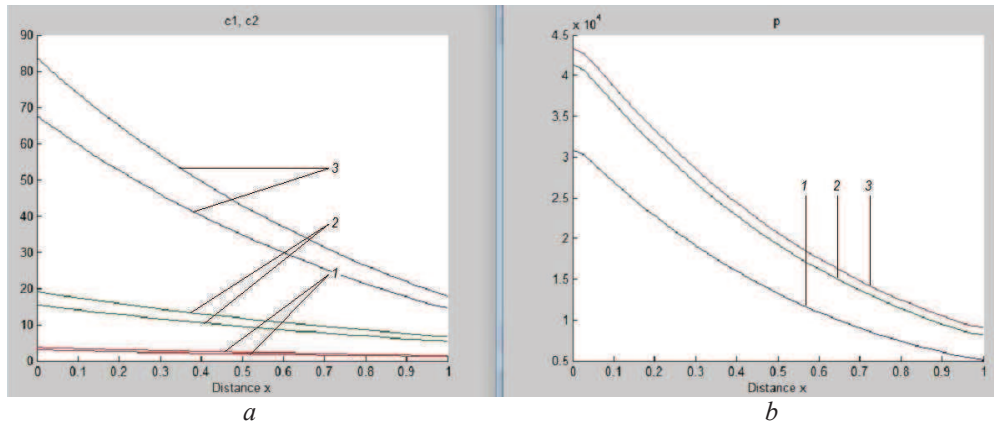


Рис. 3. Розподіл концентрації  $c_1, c_2$  - (a) і  $\rho$  - (b) вздовж фільтра в різні моменти часу (для  $t_1 = 10$  год,  $t_2 = 20$  год,  $t_3 = 30$  год)

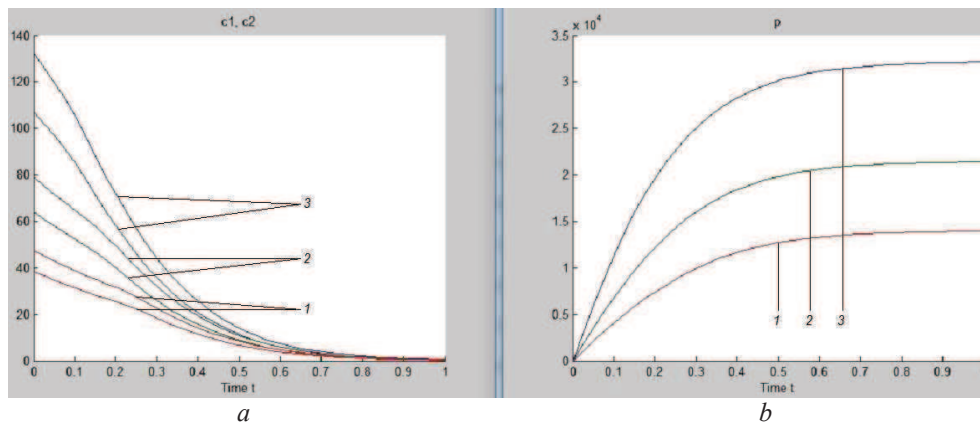


Рис. 4. Розподіл концентрації  $c_1, c_2$  - (a) і  $\rho$  - (b) з часом в різних поперечних перерізах фільтра (для  $x_1 = 25$  см,  $x_2 = 50$  см,  $x_3 = 75$  см)

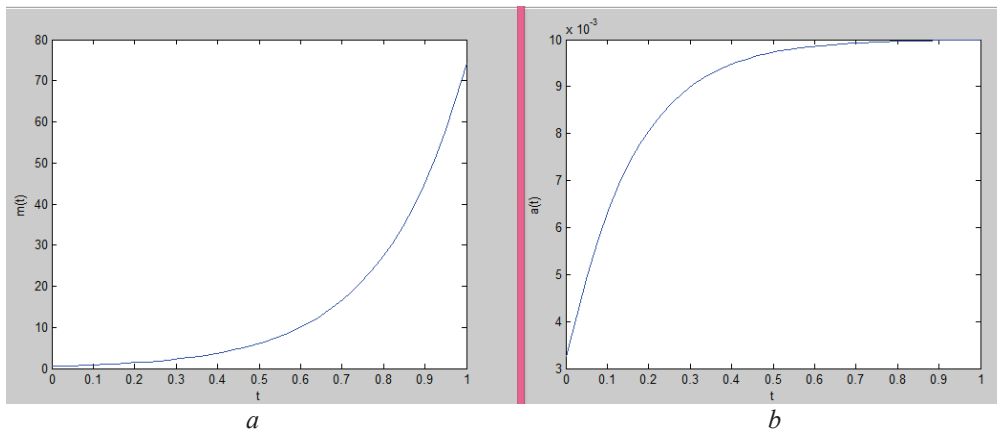


Рис. 5. Масовий розподіл осаду  $\mu(t)$  - (a) і відповідного масо обмінного коефіцієнта  $\alpha(t)$  - (b) з часом

На рисунках 3, 4 проілюстровано розподіл концентрації  $c_1, c_2$  і  $\rho$  з часом та в різних поперечних перерізах фільтра відповідно вздовж ліній течії.

В результаті інтерполяції експериментальних даних [13] нами отримане масовий розподіл  $\mu(t)$  осаду з часом (див. рис. 5a). Залежність відповідного масообмінного коефіцієнта  $\alpha(t)$  від часу зображено на рисунку 5b. Зростання масообмінного коефіцієнта з часом пояснюється тим, що (для даного випадку при отриманому експериментально значенні  $\mu(t)$ ) у процесі осадження часток гранули пористої засипки максимально насичуються домішковими частинками й під дією гідравлічного напору ймовірність відриву частинок від гранул зростає до часу  $\tau_3$  ефективної роботи фільтра.

Провівши аналіз із розрахунковими даними, отриманими в [10], бачимо, що розрахунки на основі просторово узагальненої математичної моделі процесу очищення рідини можуть характеризувати протікання процесу фільтрування як з кращої так і гіршої сторони, в залежності від форми задання просторового фільтра.

#### **4. Висновки за результатами і напрямком подальших досліджень**

Запропоновано просторове узагальнення математичної моделі процесу очищення рідини від багатокомпонентного забруднення, яка, в припущенні домінування конвективних складових цього процесу над іншими, враховує зворотний вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості, дифузії), і включає спеціальним чином задану додаткову умову (умову перевизначення) для знаходження невідомого малого масообмінного коефіцієнта. Побудований розв'язок відповідної оберненої задачі дає можливість істотно наблизити числові розрахунки до реальних експериментальних даних (у порівнянні з класичними, феноменологічними моделями [13]), більш точно прогнозувати й розраховувати ефективність процесу осадження домішок різних технологічних водно-дисперсних систем. Аналіз результатів дослідження показав, що задання форми фільтра відіграє суттєву роль у процесі фільтрування позаяк це може призвести як до збільшення (зменшення) параметрів фільтрування, так і до збільшення продуктивності його роботи загалом У перспективі – моделювання процесів фільтрування в умовах неповних даних та автоматизація відповідних процесів (див., напр., [10, 14, 15]).

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Elimelech M. Predicting collision efficiencies of colloidal particles in porous media, *Water Research.*, 26(1), 1-8, 1992.
2. Elimelech M. Particle deposition on ideal collectors from dilute flowing suspensions: Mathematical formulation, numerical solution and simulations. *Separations Technology*, 4, 186-212, 1994.
3. Jegatheesan V. Effect of surface chemistry in the transient stages of deep bed filtration, Ph Dissertation, University of Technology Sydney, pp. 300, 1999.

4. Johnson P.R. and Elimelech, M., Dynamics of colloid deposition in porous media: Blocking based on random sequential adsorption, *Langmuir*, 11(3), 801-812, 1995.
5. Ison C.R. and Ives, K.J., Removal mechanisms in deep bed filtration, *Che. Engng. Sci.*, 24, 717-729, 1969.
6. Ives K.J. Rapid filtration, *Water Research*, 4(3), 201-223, 1970.
7. Petosa A.R., Jaisi, D.P., Quevedo, I.R., Elimelech, M., and Tufenkji, N. "Aggregation and Deposition of Engineered Nanomaterials in Aquatic Environments: Role of Physicochemical Interactions", *Environmental Science & Technology*, Volume 44, September 2010, pages 6532-6549.
8. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу фільтрування / Андрій Бомба, Юрій Климюк, Андрій Сафоник, Віктор Сівак. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 11. – С. 29-38.
9. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних / Бомба А. Я., Гаврилюк В.І., Сафоник А.П., Фурсачик О.А. // Монографія. – Рівне : НУВГП, 2011. – 276 с.
10. Бомба А.Я. Математическое моделирование процесса фильтрования жидкости от многокомпонентного загрязнения с учетом обратного влияния характеристик процесса на характеристики среды / Бомба А.Я., Сафоник А.П. // Проблемы управления и информатики. 2013. – № 2. – С. 49-54.
11. Иванчов Н. И. Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении / И.Н. Иванчов // Сиб. мат. журнал. - 1998.—Т. 39, N 3.—С. 539-550.
12. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи / С. И. Кабанихин . – Новосибирск : Сибирское научное издательство, 2009. – 458 с.
13. Орлов В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою / В. О. Орлов. – Рівне : НУВГП, 2005. – 163с.
14. Сергиенко И. В. Решения комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №5. – С. 48-71.
15. Сергиенко И. В. Идентификация градиентными методами параметров задач диффузии вещества в нанопористой среде / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека // Проблемы управления и информатики. – 2010. – №6. С. – 5-18.

УДК 519.71

## Ідентифікація лінійних систем макроекономічної динаміки з відомими входами

А. О. Борода, О. М. Назаренко

*Сумський державний університет, Україна*

Розглядається проблема специфікації та ідентифікації динамічної моделі міжгалузевого балансу макроекономічної системи. Моделювання фазових траєкторій і керувань проводиться з урахуванням циклічності, притаманній макроекономічним процесам, і відбувається шляхом виділення гармонічних хвиль, що розповсюджуються в даній системі.

**Ключові слова:** модель Леонтьєва, фазові координати, керування, циклічні процеси, специфікація, ідентифікація, прогнозування.

Рассматривается проблема спецификации и идентификации динамической модели межотраслевого баланса макроэкономической системы. Моделирование фазовых траекторий и управлений проводится с учетом цикличности, присущей макроэкономическим процессам, и происходит путем выделения гармонических волн, распространяющихся в данной системе.

**Ключевые слова:** модель Леонтьева, фазовые координаты, управления, циклические процессы, спецификация, идентификация, прогнозирование.

The problem of identification and specification of dynamic input-output model of macroeconomic system is considered. Modeling of phase trajectories and their control takes into account the cyclicity inherent in macroeconomic processes and is performed via the allocation of harmonious waves propagating in the system.

**Key words:** Leontief model, the phase coordinates, controls, cyclic processes, specification, identification, prediction.

### 1. Вступ

Макроекономічними моделями прийнято називати моделі народно-господарчого рівня з крупноагрегованими показниками, в рамках яких досліджується функціональна структура економічних систем. Математичні моделі макроекономіки є ефективним інструментом теоретичних досліджень процесу вивчення динаміки на основі економічної теорії. Вони використовуються для розробки концепції економічного і соціального розвитку, при вивченні можливих альтернатив економічної політики та їх довгострокових наслідків, для прогнозування системи узагальнених показників національної економіки. Саме тому побудова моделей макроекономічних систем та розробка апарату їх ідентифікації є актуальною задачею.

Наразі розроблено багато модифікацій динамічних макромоделей, які з теоретичної точки зору дозволяють висвітлити відповідний ефект в економічній системі. Серед них можна виділити класичні моделі, що описують поведінку випуску з необмеженим зростанням, випуску в умовах конкуренції, економічного циклу Хікса [1,2]. Однак в цих моделях недоліком є вивчення поведінки лише одного показника – випуску, при цьому поведінка інших факторів, які впливають на нього, постулюється заздалегідь відомою і незмінною. Одною з перших робіт, присвячених аналізу економіки країни як

єдиної системи, є модель Леонтьєва [3], яка знайшла широке застосування в макроекономічних дослідженнях.

Загальним недоліком вказаних моделей є припущення про відомі значення їх параметрів функціонування. В реальних умовах виникають ситуації, в яких є лише набір статистичних даних відносно динаміки макроекономічних показників. При цьому необхідно на основі економічної теорії про зв'язок між задіяними факторами специфікувати структуру моделі (або скористатись відомою моделлю) та ідентифікувати невідомі параметри, що входять до неї [4].

У даній роботі пропонується методика специфікації та ідентифікації динамічної моделі Леонтьєва міжгалузевого балансу макроекономічної системи. Моделювання фазових траєкторій і керувань проводиться з урахуванням циклічності, притаманній макроекономічним процесам, і відбувається шляхом виділення гармонічних хвиль, що розповсюджуються в даній системі.

## 2. Постановка задачі

Запропонована В.Леонтьєвим динамічна міжгалузева модель є класичним прикладом використання систем диференціальних рівнянь у дослідженні проблем економічного зростання. Модель має вигляд [3]

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_*) = \mathbf{x}_*, \quad t \in [t_0, t_k], \quad (1)$$

де  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))'$  і  $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))'$  – вектор-стовпці валових випусків і невиробничого споживання  $n$  галузей;  $A$  – матриця прямих витрат,  $B$  – матриця коефіцієнтів капіталоємкості приростів виробництва,  $t_*$  – точка відрізка  $[t_0, t_k]$ , в якій задано граничний стан.

Як відомо, задача Коші (1) при заданих матрицях і граничних умовах має єдиний розв'язок. Проте у багатьох реальних задачах матриці системи (1) невідомі. Більше того, граничні умови також можуть бути не заданими, наприклад, у випадку, коли  $t_*$  – момент часу, що розділяє базовий період і період прогнозування.

Нехай  $\{\mathbf{x}_t\}$  і  $\{\mathbf{u}_t\}$  – статистична інформація про динаміку траєкторій  $\{\mathbf{x}(t)\}$  і  $\{\mathbf{u}(t)\}$  в  $N$  дискретних моментах часу проміжку  $[t_0, t_1]$ ,  $t_1 \leq t_*$ . Мета даної роботи полягає у знаходженні такого неперервного керування  $\mathbf{u}(t)$  і параметрів моделі (1), щоб при переведенні системи із деякого початкового стану в момент часу  $t_0$  в кінцеву бажану точку  $\mathbf{x}_*$  в момент часу  $t_*$  модельні траєкторії  $\{\mathbf{x}(t)\}$ ,  $\{\mathbf{u}(t)\}$  задовольняли ряд властивостей:

а) високу якість апроксимації, тобто співвідношення  $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_t$ ,  $\mathbf{u}(t) \approx \mathbf{u}_t$  виконуються з високою точністю у дискретному наборі точок проміжку  $[t_0, t_1]$ , наприклад, у сенсі евклідової  $L^2$ -норми [5];

б) високу якість прогнозу, тобто довірчі інтервали прогнозів фазового вектора  $\mathbf{x}(t)$  і керування  $\mathbf{u}(t)$  на проміжку  $[t_1, t_k]$  мають мінімальну довжину [6];

в) робастність, тобто оцінки невідомих параметрів якомога менш чутливі до незначних коливань вхідної інформації  $\{\mathbf{x}_t\}$ ,  $\{\mathbf{u}_t\}$  [7].

Деякі із цих властивостей на практиці є конкуруючими, тому виникає необхідність у побудові такого мультикритеріального регулятора, що діє за принципом оберненого зв'язку [8,9], який би дозволив налаштувати досліджувану модель на вказаний набір властивостей.

При чисельній реалізації моделей, метою яких є прогнозування, граничні умови диференціальних рівнянь (1) зручно задовольняти в момент часу, що слідує за періодом ідентифікації. Покладемо  $t_* = t_1 = N + 1$ , тоді відрізок  $[1, N]$  будемо називати періодом ідентифікації, а відрізок  $[t_*, t_k]$  – періодом прогнозування. При оцінених значеннях параметрів  $A, B, \mathbf{x}_*$  розв'язок задачі Коші (1) дозволяє перевіряти імітаційні властивості на проміжку  $[1, t_*)$  і встановлювати прогнозні властивості моделі (1) на відрізку  $[t_*, t_k]$ .

Зазначимо, що довжина  $N$  періоду ідентифікації повинна бути достатньо великою, щоб на ньому стабілізувались взаємозв'язки між елементами системи. У випадку нестационарних фінансових часових рядів прийнято вважати  $N \geq 100$  [10]. Для макроекономічної динаміки часові ряди часто є стаціонарними, статистична інформація подається по рокам і тому обмежена в часі. Для даного дослідження важливо, щоб довжина часових рядів  $l > 55$ . Стаціонарність моделі будемо характеризувати високою якістю апроксимації, прогнозування та робастністю [5, 11]. Якщо виконані умови стаціонарності, то оцінену на періоді ідентифікації  $[1, N]$  лінійну модель (1) можна переносити на період прогнозування  $[t_*, t_k]$  за умови  $t_k - t_* \ll N$  в силу інерційності динамічної системи [12].

Вектор  $\mathbf{x}(t)$  можна шукати за допомогою декомпозиції траєкторій руху фазових координат на складові [13]. Якщо ці траєкторії ідентифіковані за даними спостережень, то вектор керувань  $\mathbf{u}(t)$  може бути знайдений за допомогою оберненого зв'язку:

$$\mathbf{u}(t) = P \mathbf{x}(t) - B \mathbf{x}(t), \quad P = E - A, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (2)$$

Основна проблема, яка тут виникає, полягає у знаходженні оптимальних значень довжини  $N$  періоду ідентифікації, розмірності  $n$  фазового простору та специфікації компонент фазового вектора  $\mathbf{x}$  і вектора керувань  $\mathbf{u}$ . Велику роль при вирішенні цієї проблеми відіграє регулятор. У якості регулятора будемо використовувати допоміжну інформацію відносно величин, які не присутні в рівнянні руху, але є невід'ємною частиною даної динамічної системи [13]. Додатковими величинами системи повинні бути обрані такі її характеристики, що акумулюють якомога більше інформації про досліджувану систему в цілому і відносно яких є доступні статистичні дані. У цій роботі регулятор буде складатись з двох пристроїв, які у будь-який момент часу  $t$  формують сумарні значення фазових координат і керувань

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^n x_m(t), \quad \mathbf{u}(t) = \sum_{m=1}^n u_m(t). \quad (3)$$

Тоді, якщо модельні траєкторії  $\mathbf{x}(t)$  і  $\mathbf{u}(t)$  налаштовані на високі імітаційні та прогнозні властивості, то і сумарні траєкторії (3) повинні мати такі ж властивості.



### 3. Метод розв'язання задачі

Запропонований у даній роботі метод ідентифікації диференціальних рівнянь (1) відноситься до класу колокаційних методів, основна ідея яких полягає у розкладі фазових змінних по базисним функціям [8, 14]. Дотримуючись відомих методів виділення в рядах динаміки не випадкових складових [15], будемо припускати двокомпонентну адитивну схему розкладу фазових траєкторій (при додаванні шумів  $\mathbf{v}(t)$  одержуються реальні траєкторії). Тенденцію розвитку будемо характеризувати лінійним трендом, а коливальний процес описувати лінійною комбінацією гармонік з деякими частотами. Тоді регресійну модель для траєкторій фазових координат будемо подавати у вигляді:

$$\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbf{a}_k \cos \omega_k t + \mathbf{b}_k \sin \omega_k t) + \mathbf{v}_t, \quad t = \bar{1}, \bar{N}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad (4)$$

де  $\omega_k$  – частота  $k$ -ї гармоніки;  $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k$  – вектори невідомих коефіцієнтів розкладу в обрізаний ряд Фур'є;  $\mathbf{v}_t$  – вектор випадкових збурень. При вказаних значеннях частот вектор середніх значень залишків дорівнює нулю ( $\bar{\mathbf{v}} = 0$ ).

**Етап 1.** Визначення періоду  $T$  коливань даної системи і встановлення частот із спектра (4), на які налаштовані гармонічні хвилі, можна здійснювати за допомогою першого пристрою регулятора (3), що обчислює сумарне значення фазових координат  $x(t)$ . Для нього складається регресійна модель, аналогічна (4), і за допомогою критерію Ст'юдента [6] виділяються значущі гармоніки.

Аналіз циклічних процесів, які відбуваються в макроекономічних системах показує [16], що в них можуть розповсюджуватись хвилі Кондратьєва ( $k=1$ ), Кузнеця ( $k=3$ ), Жугляра ( $k=6$ ). Крім того, можуть бути присутніми й інші хвилі (довгі або короткі). Все це вказує на те, що кількість секторів  $n \geq 5$ , і до цього результату ми повинні прийти, оцінюючи відповідні регресійні моделі. Процес виділення значущих гармонік необхідно проводити сумісно з визначенням періоду коливань  $T$ . Якщо частоти належать спектру (4), то бажано покласти  $N = T$ . Оптимальне значення  $N$  підбираємо враховуючи поведінку досліджуваної системи поза періодом ідентифікації  $[1, M]$ . Для цього використаємо відому статистичну інформацію, що передує моменту  $t_0$ . Якщо модельна траєкторія коливань сумарного значення  $x(t)$  при  $t \leq 0$  змінюється в напрямку статистичних даних, то вважаємо, що гіпотеза  $N = T$  підтверджується.

**Етап 2.** Специфікація компонент вектора  $\mathbf{x}$  проводиться при встановленому значенні  $n$ . При поділі множини  $x$  на підмножини  $x_1, x_2, \dots, x_n$  необхідно враховувати фізичну сутність цих підмножин та їх значущість у загальній масі. Фазові координати повинні бути обраними такими, щоб властиві їм гармонічні хвилі налаштовувалися на частоти, ідентифіковані нами на етапі 1. Оскільки кожна підмножина множини  $x$  має свою специфіку функціонування, то кількості значущих гармонік у розкладі різних фазових координат можуть різнитись. Якщо фазова координата швидко реагує на якісні зміни у даній динамічній системі, то цій координаті відповідатиме максимальна кількість, тобто  $n - 1$  гармонік. Мінімальна кількість гармонік буде у розкладі тих фазових координат, які слабо реагують на зміни в інших підмножинах системи.

Для МНК-оцінок коефіцієнтів трендів одержані наступні формули:

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \left\{ \left( \mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}} \right) \left( t + \sum_k \left( \text{ctg} \frac{\omega_k}{2} \sin \omega_k t - \cos \omega_k t \right) \right) \right\} / \left( (N^2 - 1) / 6 - \sum_k 1 / \sin^2 \frac{\omega_k}{2} \right). \quad (5)$$

Перевірку значущості гармонік, що розповсюджуються у кожній підмножині даної системи, можна проводити в рамках регресійної моделі коливань

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \sum_k (\mathbf{a}_k \cos \omega_k t + \mathbf{b}_k \sin \omega_k t) + \mathbf{v}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{b}}(t - \bar{t}), \quad t = \overline{1, N}. \quad (6)$$

МНК-оцінки коефіцієнтів розкладу розраховуються за формулами:

$$\hat{\mathbf{a}}_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}_t \cos \omega_k t - \hat{\beta}, \quad \hat{\mathbf{b}}_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}_t \sin \omega_k t + \hat{\mathbf{b}} \text{ctg} \frac{\omega_k}{2}. \quad (7)$$

Рафіновану (відкинуті всі незначущі МНК-оцінки) модель коливань фазових координат навколо відповідних трендів

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \sum_k (\hat{\mathbf{a}}_k \cos \omega_k t + \hat{\mathbf{b}}_k \sin \omega_k t) \quad (8)$$

екстраполюємо назад на проміжок  $t \leq 0$  і перевіряємо відповідність статистичним значенням  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  ( $t = 0, -1, \dots$ ). Якщо перевірка нас задовольняє, то можуть бути прийнятними і модельні траєкторії руху фазових координат

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}}(t - \bar{t}) + \sum_k (\hat{\mathbf{a}}_k \cos \omega_k t + \hat{\mathbf{b}}_k \sin \omega_k t). \quad (9)$$

У випадку незадовільних імітаційних властивостей модельних кривих (8), (9) необхідно провести іншу специфікацію фазових координат і переоцінити відповідні регресійні моделі.

**Етап 3.** Специфікація вектора керувань  $\mathbf{u}$  здійснюється при заданому фазовому векторі  $\mathbf{x}(t)$  і його похідній  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ . Для ідентифікації вектора керувань  $\mathbf{u}(t)$  враховуючи (2), складаємо наступну регресійну модель ( $\mathbf{r}_t$  – вектор випадкових збурень):

$$\mathbf{u}_t - \mathbf{u} = P(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) - B(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{b}}) + \mathbf{r}_t. \quad (10)$$

Лінійна модель (10) оцінюється звичайним МНК, якщо на елементи матриць  $A$  і  $B$  не накладаються обмеження-нерівності. У випадку лінійних обмежень-нерівностей вигляду  $\alpha_1 < a_{ij} < \alpha_2$ ,  $\beta_1 < b_{ij} < \beta_2$  задача мінімізації суми квадратів відхилень регресійної моделі (10) за допомогою теореми Куна-Такера зводиться до задачі математичного програмування, яка розв'язується методом множників Лагранжа [17]. Якщо отримані МНК-оцінки  $\hat{P}$  і  $\hat{B}$ , то для модельних траєкторій керувань одержуємо

$$\mathbf{u}(t) = \hat{P}\mathbf{x}(t) - \hat{B}\dot{\mathbf{x}}(t). \quad (11)$$

Адекватність кривих (11) статистичним даним перевіряємо за допомогою коефіцієнтів детермінації, а також другого пристрою регулятора, який моделює траєкторію сумарного керування згідно другої балансової рівності (3). Якщо імітаційні та прогнозні властивості модельних кривих  $\mathbf{u}(t)$  з якихось причин нас не влаштовують, то виникає необхідність у корегуванні алгоритму – специфікацію компонент  $\mathbf{x}(t)$  (етап 2) треба розглянути заново, скорегувавши поділ заданої множини на підмножини.

#### 4. Практична реалізація алгоритму

Апробація побудованої динамічної моделі проводилася на базі статистичних даних макроекономічного розвитку Франції [18]. Розділимо економіку Франції на  $n$  секторів. Тоді координатами фазового вектора  $\mathbf{x}$  моделі є валові випуски продукції секторів, а координати вектора керувань  $\mathbf{u}$  – невиробниче споживання продукції секторів. Оптимальне значення об'єму вибірки  $N = 50$ , при цьому 1960-2009 рр. – період ідентифікації, 2010-2011 рр. – період прогнозування. Аналіз залежності розмірності  $n$  фазового простору від рівня значущості  $\alpha$  показує, що при  $\alpha = 0,005$  економіку Франції необхідно ділити на 5 секторів. У якості п'яти секторів можна вибрати наступні: промисловість та сільське господарство (Industry; Agriculture); будівництво та транспорт (Construction; Transport); фінансовий сектор і нерухомість (Finance; Real estate); комунікації та наука (Communication; Science); сфера послуг (service Industries).

Аналіз статистичної інформації для економіки Франції за 1957 – 2009 рр. показує, що дана макроекономічна система розвивається циклічно (для всіх вказаних секторів і економіки в цілому фази підйому змінюються фазами спаду). Довгострокова тенденція розвитку характеризується прямолінійним трендом з додатним нахилом і спостерігається коливання випусків та невиробничого споживання навколо відповідних трендів. Тому логічним є використання запропонованого у даній роботі підходу, що базується на розкладанні фазових координат (випусків секторів) на трендову та періодичну складові.

Визначення періоду  $T$  коливань даної системи і встановлення частот із спектра (4), на які налаштовані гармонічні хвилі, проводиться шляхом обробки статистичної інформації для ВВП (валового випуску продукції). Тоді випуски вибраних секторів повинні відтворювати основні властивості ВВП.

Розкладання часового ряду  $\{x_t\}$  на періоді ідентифікації на трендову і періодичну складові підтверджує у випадку  $\alpha = 0,005$  наявність у макроекономіці Франції чотирьох значущих гармонік ( $k=1, 2, 3, 6$ ). Це означає, що на ВВП Франції суттєво впливають чотири основні гармоніки: хвиля Кондратьєва ( $k=1$ ), хвиля Кузнеця ( $k=3$ ), хвиля Жугляра ( $k=6$ ) і проявляє себе також хвиля з періодом, що дорівнює половині періоду хвилі Кондратьєва ( $k=2$ ).

Оскільки розклад функцій випуску на складові містить один тренд і чотири гармоніки, то розмірність фазового простору  $n = 5$ . Наступним кроком є поділ макроекономіки Франції на п'ять секторів і розкладання часових рядів випусків на трендову і періодичну складові згідно (4). Основним критерієм вибору п'яти секторів є присутність у траєкторіях випусків цих секторів вказаних чотирьох гармонік, причому гармонічні хвилі з іншими частотами повинні бути незначущими, оскільки вони є нехарактерними для макроекономіки Франції.

Оцінювання регресійної моделі випусків секторів (4) дало наступні значення коефіцієнтів  $R^2$  трендів, навколо яких відбуваються коливання (табл.1).

Табл.1. Коефіцієнти детермінації трендів

№ сектора	1	2	3	4	5	$\Sigma$
$R^2$	0,5231	0,8548	0,8993	0,8220	0,8756	0,8021

Аналіз табл.1 показує, що для деяких секторів (особливо для сектору промисловості та сільського господарства) і для економіки в цілому коливання випусків навколо відповідного тренду є відчутними. Періодичні складові стають причиною підйому та спаду економіки, а їх взаємодія на певних проміжках часу приводить до кризових явищ в економіці. Тому є актуальним виділення характерних для даної макроекономічної системи гармонічних хвиль і дослідження їх впливу на економічний розвиток країни.

Згідно (5), (7) гармонічні хвилі взаємодіють з трендом, і це ускладнює аналіз. Але, якщо розглядати чистий коливальний процес (8), то гармоніки ряду Фур'є стають некорельованими, і це спрощує аналіз впливу окремих гармонік на загальний коливальний процес. Частки дисперсій гармонік у загальній дисперсії коливань кожного сектору ( $m = \overline{1, n}$ ) обчислюються за допомогою відповідних коефіцієнтів детермінації, значення яких наведені в табл. 2.

Табл.2. Коефіцієнти детермінації гармонік

№ сектора	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=6$	$\Sigma$
1	0,9523	0,0179	0,0205	0,0020	0,9926
2	0,6319	0,2883	0,0486	0,0072	0,9760
3	0,7604	0,1792	0,0385	0,0035	0,9815
4	0,8661	0,0911	0,0220	0,0045	0,9836
5	0,8174	0,1632	0,0061	0,0017	0,9882
$\Sigma$	0,8082	0,1596	0,0186	0,0046	0,9909

Як бачимо, хвиля Кондратьєва ( $k=1$ ) суттєво впливає на всі сектори економіки. Хвиля з періодом 25 років ( $k=2$ ) особливо впливає на другий (будівництво та транспорт), третій (фінанси та нерухомість) та п'ятий (сфера послуг) сектори. Хвиля Кузнеця більше проявляє себе в другому та третьому секторах. Вклад хвилі Жугляра є меншим у порівнянні з другими хвилями, але він є значущим у функціях випусків.

Сумарний вклад гармонік в дисперсію коливань випусків секторів становить від 97,60% (2-й сектор) до 99,26% (1-й сектор). Тому регресійні моделі коливань мають якісні апроксимаційні властивості і можна очікувати значущого вкладу в дисперсії випусків. Значення коефіцієнтів детермінації модельних траєкторій випусків приводяться в табл.3.

Табл.3. Якість модельних траєкторій випусків

№ сектора	1	2	3	4	5	$\Sigma$
$R^2$	0,9992	0,9991	0,9989	0,9989	0,9995	0,9992

На рис.1 приведені графіки модельних кривих ВВП і випусків п'яти секторів та траєкторій відповідних коливань. Тут точками зображені статистичні дані, а суцільною лінією – траєкторії руху (всі дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідне значення у початковому 1960 р.). Порівняння прогнозних значень з реальними даними (дві останні точки, що відповідають 2010 і 2011 рр.) свідчить про високоточні прогнозні властивості моделі (4).

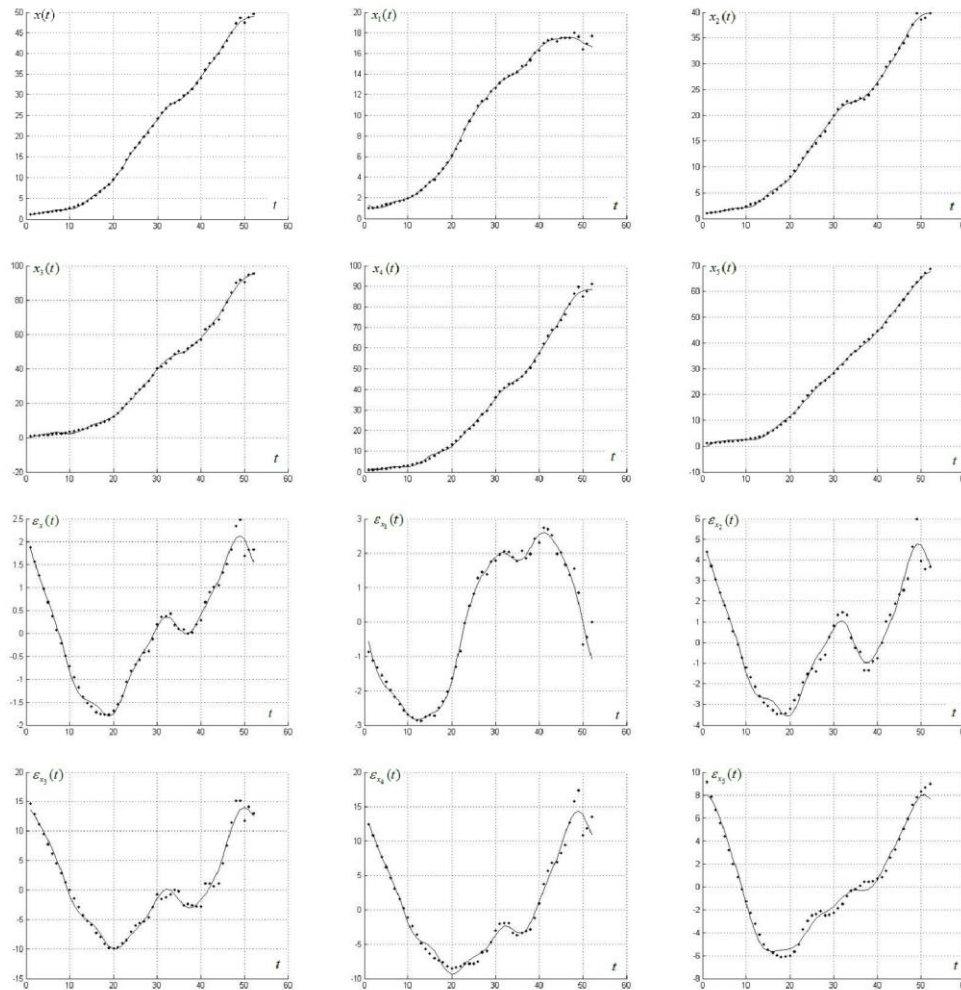


Рис. 1. Модельні криві ВВП і випусків секторів та відповідних коливань за 1960-2011 рр.

МНК-оцінки матриць  $A$  і  $B$ , подані у табл. 4 і 5, характеризують взаємозв'язок між різними секторами економіки і можуть бути використані для ефективного розподілу ресурсів при формуванні взаємовідносин між окремими галузями. Комплексна оцінка такого взаємозв'язку може суттєво впливати на динаміку і структуру виробництва, а створення раціональної та високоефективної міжгалузевої економіки дозволяє успішно управляти економікою країни в цілому.

Табл. 4. МНК-оцінки елементів матриці  $A$

0.3816	0.0753	0.0299	0.0455	0.0253
0.0659	0.5951	0.0226	0.0618	0.0228
0.0379	0.0403	0.2213	0.0855	0.0278
0.0422	0.0208	0.0432	0.5119	0.0316
0.0286	0.0406	0.0413	0.0929	0.2374

Табл.5. МНК-оцінки елементів матриці  $B$ 

0.0548	0.0146	0.0175	0.0113	0.0136
0.0114	0.0431	0.0174	0.0145	0.0196
0.0110	0.0129	0.0483	0.0136	0.0082
0.0140	0.0155	0.0117	0.0493	0.0101
0.0172	0.0145	0.0140	0.0096	0.0475

Рис.2 характеризує імітаційні та прогнозні властивості модельних траєкторій невиробничого споживання. Тут точками зображені статистичні дані, а суцільною лінією – модельні криві (всі дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідне значення у початковому 1960 р.). На періоді прогнозування порівняння з реальними даними (за 2010-2011 рр.) дає задовільні результати, як і у випадку модельних траєкторій випусків.

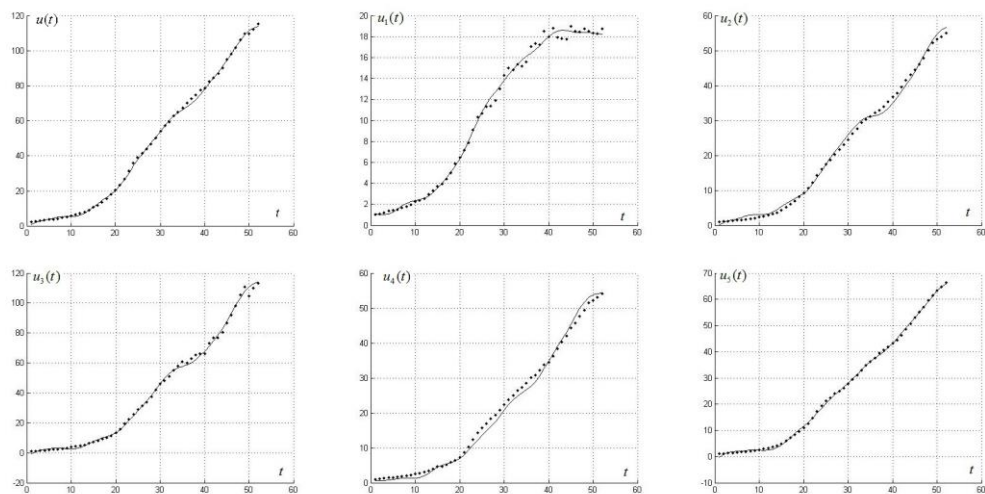


Рис.2. Модельні криві невиробничого споживання Франції на проміжку 1960-2011 рр.

### 5. Прогнозування макроекономічного розвитку

Спробуємо спрогнозувати економічний розвиток Франції. Будемо виходити з ВВП, для якого на етапі 2 отримана наступна модельна траєкторія:

$$x(t) = -4,4143 + 0,8570t + 2,9322\cos(\omega_1 t) - 2,0523\sin(\omega_1 t) + 1,4456\cos(\omega_2 t) + 0,6628\sin(\omega_2 t) + 0,3870\cos(\omega_3 t) - 0,3802\sin(\omega_3 t) + 0,1974\cos(\omega_6 t) - 0,1841\sin(\omega_6 t).$$

На рис. 3 зображені графіки першої, другої, третьої та шостої гармонік на проміжку  $t \in [40, 80]$ , тобто за 1999 – 2039 рр. Аналіз показує, що починаючи з 1999 р. (рік введення євро) перші три гармоніки знаходяться у фазі підйому, і тому цей період можна вважати «золотою епоєю» Франції (і Західної Європи в цілому, оскільки Франція – одна з основних країн Євросоюзу).

Однак у 2005 р. надійшов сигнал від першої гармоніки (її амплітуда найбільша, і вона вступає у фазу спаду). Аналогічний сигнал від третьої гармоніки був у 2007 р. Як наслідок, вкінці 2007 р. почалася економічна криза.

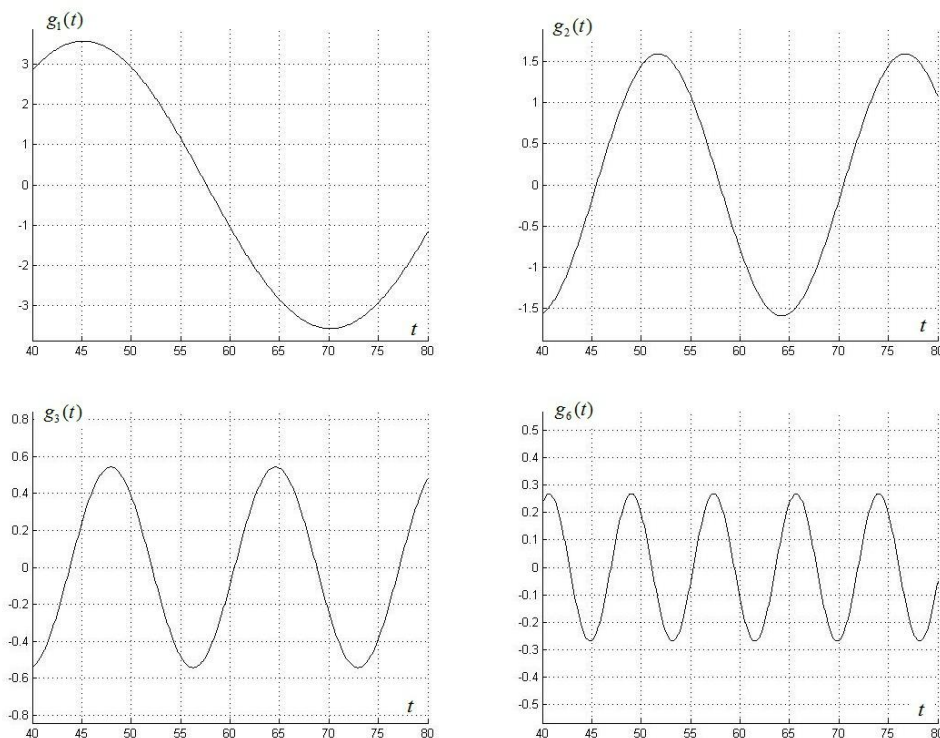


Рис.3. Модельні гармоніки, характерні для економіки Франції на проміжку 1999-2039 рр.

Обвалу економіки не відбувається, оскільки перші два роки система рухається за інерцією (за рахунок тренду), а починаючи з 2005 р. шоста хвиля вступає у фазу підйому (її амплітуда невелика, але вклад її в коливання макроекономічної системи є значущим). Подальший аналіз показує, що з другої половини 2016 р. починається фаза підйому хвилі Кузнеця, і тому з цього моменту слід очікувати поступового зростання економічного розвитку Франції, яке посилиться починаючи з 2023 р. – входження другої хвилі ( $k=2$ ) у фазу підйому (на початку 2017 р. шоста хвиля вступає у фазу спаду, але вклад її в коливання менший). Отже, 2008-2022 рр. – не найкращі часи для Євросоюзу. А суттєвих змін слід очікувати починаючи з 2030 р., коли хвиля Кондратьєва увійде у фазу підйому. У 2033 р. до неї доповниться хвиля Кузнеця і всі чотири хвилі будуть у фазах підйому.

## 7. Висновки

У даній роботі запропонований алгоритм параметричної ідентифікації лінійної стаціонарної моделі Леонтєва, який дозволяє отримати незатухаючі стійкі коливання у випадку макроекономічних систем. Отримані траєкторії випусків і невиробничого споживання мають високоякісні імітаційні та прогностичні властивості. Аналіз гармонічних хвиль, характерних для макроекономічної динаміки розвинутих країн, дозволяє виявляти підйоми і спади в економіці та прогнозувати перспективи економічного розвитку.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Tu P.N.V. Dynamical systems. An introduction with applications in economic and biology. – Berlin: Springer-Verlag, 1994. – 314 p.
2. Красс М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учеб. – 2-е изд., испр / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – М.: Дело, 2001. – 688 с.
3. Leontief W. Input-Output Economics. – Oxford University Press, New York, 1986. – 436 p.
4. Kujundzic S.M. Methods and Models for Stability, Controllability Analysis of Systems Motion. – М.: Fizmatlit, 2004. – 544 p.
5. Greene W. H. Econometric Analysis. – 5th ed. – N.Y.: Pearson Educ. Int., 2003. – 1056 p.
6. Назаренко О. М. Основы эконометрики: Вид. 2-ге, перероб.: Підручник / О. М. Назаренко. – Київ: Центр навчальної літератури, 2005. – 392 с.
7. Хьюбер Д. П. Робастность в статистике / Д. П. Хьюбер. – М.: Мир, 1984. – 304 с.
8. Ljung L. System Identification. Theory for the user. 2nd ed. – N.J.: PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999. – 432 p.
9. Бабаков И. М. Теория колебаний. Изд. 4-е, исправл / И. М. Бабаков. – М.: Наука, 2004. – 591с.
10. Назаренко А. М. Моделирование и идентификация в задачах многокритериальной оптимизации с линейным и квадратичным критериями качества в условиях статической неопределенности / А. М. Назаренко, М. В. Карпуша // Проблемы управления и информатики. – 2014. – № 2. – С. 28-40.
11. Назаренко А. М. Идентификация и оптимизация слабо формализованных процессов в классе стационарных LQ моделей / А. М. Назаренко, Фильченко Д. В. // Киберн. и вычисл. техника.– К., 2009. – Вып. 158. – С. 42–61.
12. Айвазян С. А.. Прикладная статистика и основы эконометрики / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1000 с.
13. Назаренко Побудова та ідентифікація лінійно-квадратичних моделей слабо формалізованих динамічних систем / О. М. Назаренко // Вісник ХНУ. Сер. «Матем. моделювання. Інформ. технології. Автом. системи управління». – 2008. Т. 10, № 833. – С. 185-192.
14. Ramsay J.O., et al. Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach. // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. – 2007. – Vol. 69, № 5. – P. 741-796.
15. Hamilton J.D. Time Series Analysis. – N. J.: Princeton University Press, 1994. – 800 p.
16. Коротаев А. В. Кондратьевские волны в мировой экономической динамике / А. В. Коротаев // Системный мониторинг. Глобальное и региональное развитие. – М.: Либроком / URSS, 2010. – С. 189-229.
17. Лоусон Ч. Л. Численное решение задач метода наименьших квадратов / Ч. Л. Лоусон, Р. Дж. Хенсон. – Пер. с англ. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
18. INSEE. – Режим доступа : <http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action>.



УДК 519.65

## Идентификация параметров процесса, описываемого гиперболическим тангенсом

Е. В. Величко

*Таврический государственный агротехнологический университет,  
г. Мелитополь, Украина*

Метод наименьших квадратов был адаптирован на класс функций, зависящих от трех параметров и содержащих гиперболический тангенс. Подобные задачи возникают при исследовании кривых буксования мобильных энергетических устройств. В случае, когда абсциссы точек образуют арифметическую прогрессию, удалось получить расчетные формулы в явном виде. Приведен пример реализации предложенного метода, результаты которого совпали с тестовой функцией.

**Ключевые слова:** метод наименьших квадратов, гиперболический тангенс, кривая буксования, аппроксимация, функция невязки.

Метод найменших квадратів був адаптований на клас функцій, що залежать від трьох параметрів і містять гіперболічний тангенс. Подібні задачі виникають при дослідженні кривих буксування мобільних енергетичних пристроїв. В випадку, коли абсциси точок утворюють арифметичну прогресію, вдалося отримати розрахункові формули в явному вигляді. Наведено приклад реалізації запропонованого методу, результати якого збіглися з тестовою функцією.

**Ключові слова:** метод найменших квадратів, гіперболічний тангенс, крива буксування, апроксимація, функція невязки.

Least squares method has been adapted to the class of functions, which depend on three parameters and contain the hyperbolic tangent. Similar problems arise in the study of curves of slipping for mobile power devices. In the case where the abscissae of points form an arithmetic progression, the authors were able to receive the explicit formulas. An example of the proposed methodis presented, whose results have coincided with the test function.

**Key words:** ordinary least squares, the hyperbolic tangent, the curve slipping, approximation, the function of the residual.

### 1. Введение

Метод наименьших квадратов – это эффективный способ выбирать из функций заданного вида ту, которая наилучшим образом приближает экспериментальные данные, заданные системой точек. Наиболее часто с помощью МНК получают линейную аппроксимацию, но находят свое применение и аппроксимации более высоких степеней: квадратичные, кубические и так далее [1-2].

Для классического метода наименьших квадратов требуется, чтобы искомая функция являлась линейной относительно определяемых параметров. Так, при аппроксимации многочленами  $n$ -й степени функция берется в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \text{ где параметры } a_k \text{ вычисляются из условия минимума}$$

квадратичной невязки. Для функций другого вида иногда удается провести преобразование, линеаризующее эти функции относительно параметров. Так,

например, если мы ищем функцию вида  $f(x) = ae^{bx}$ , то прологарифмировав это соотношение, мы получим равенство  $A + b \ln x = \ln f(x)$ , в которое искомые параметры  $A = \ln a$  и  $b$  входят линейно.

Однако на практике встречаются и случаи, когда осуществить такое преобразование не представляется возможным. Одним из таких случаев есть аппроксимация экспериментальных данных функцией  $f(x) = A(1 + th(a + bx))$ , которая используется для аппроксимации кривых буксования мобильных энергетических устройств [3].

## 2. Постановка задачи

В результате эксперимента был получен набор точек  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . С помощью метода наименьших квадратов требуется подобрать кривую вида  $f(x) = A(1 + th(a + bx))$ , наилучшим образом приближающая исходную функцию (для определения которой проводился эксперимент).

## 3. Основная часть

Сразу сделаем предварительные замечания. Поскольку область значения функции  $1 + th(a + bx)$  есть интервал  $(0, 2)$ , то, отсюда следует, что все  $y_i$  одного знака, и этот знак совпадает со знаком числа  $A$ , и кроме того, для всех  $i \leq n$  имеет место неравенство  $|y_i| < 2|A|$ .

Для начала преобразуем выражение

$$y = A(1 + th(a + bx)) \quad (1)$$

к следующему виду:  $th(a + bx) = \frac{y}{A} - 1$ .

Пользуясь тем, что обратной к функции  $th(x)$  есть функция  $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ , перепишем (1) в эквивалентном виде

$$a + bx = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{y}{A} - 1}{1 - \frac{y}{A} + 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{y}{2A - y}.$$

Умножим обе части на 2 и введем обозначения

$$\alpha = 2a, \quad \beta = 2b, \quad r = 2A. \quad (2)$$

Получим запись формулы (1) в виде

$$\alpha + \beta x = p(y, r), \quad (3)$$

где  $p(y, r) = \ln \frac{y}{r - y}$ .

Рассмотрим два случая.

### 1 случай. Величина $A$ известна.

В этом случае нам известна и величина  $r = 2A$ , и мы можем вычислить значение  $p_i = p(y_i, r)$ . Составляем, как принято в МНК, функцию невязки

$$F = \frac{1}{2} \sum (\alpha + \beta x_i - p_i)^2, \quad (4)$$

находим ее минимум, вычисляя частные производные по  $\alpha$  и  $\beta$ , и приравниваем их к нулю.

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \sum (\alpha + \beta x_i - p_i) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} = \sum (\alpha + \beta x_i - p_i) x_i = 0. \quad (5)$$

Введем обозначения

$$X = \sum x_i, X_2 = \sum x_i^2, P = \sum p_i, P_x = \sum p_i x_i. \quad (6)$$

Все величины в записи (6) могут быть вычислены по исходным данным. Тогда система (5) переписывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \alpha n + \beta X = P, \\ \alpha X + \beta X_2 = P_x. \end{cases} \quad (7)$$

Решение системы (7) имеет вид:

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta}, \quad \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta}, \quad (8)$$

где

$$\Delta = nX_2 - X^2, \quad \Delta_\alpha = PX_2 - P_x X, \quad \Delta_\beta = nP_x - PX. \quad (9)$$

Таким образом, в этом случае задача решена.

## 2 случай. Величина $A$ не известна.

Предлагается два способа определения величины  $r = 2A$ , после чего задача будет сведена к первому случаю.

*Способ 1.*

Предварительно вычислим производные:

$$\frac{\partial p_i}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \ln \frac{y_i}{r - y_i} \right) = -\frac{1}{r - y_i} = -q_i. \quad (10)$$

Здесь введено обозначение  $\frac{1}{r - y_i} = q_i$ .

Поскольку величина  $r$  не известна, то вычислим производную от функции невязки  $F$  по переменной  $r$ :

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \sum (\alpha + \beta x_i - p_i) q_i = 0. \quad (11)$$

Введем обозначения:

$$Q = \sum q_i, Q_x = \sum x_i q_i, Q_p = \sum p_i q_i. \quad (12)$$

Тогда уравнение (11) принимает вид:

$$\alpha Q + \beta Q_x - Q_p = 0. \quad (13)$$

Подставляя (8) в (13), и умножив на  $\Delta$ , получим окончательное уравнение для нахождения  $r$ :

$$(PX_2 - P_x X)Q + (nP_x - PX)Q_x - (nX_2 - X^2)Q_p = 0, \quad (14)$$

(слева в этом равенстве находится функция от  $r$ , поскольку величины  $P, Q, P_x, Q_x, Q_p$  зависят от  $r$ ).

Если все  $y_i$  положительны, то на интервале  $r \in \left( \max_i y_i, \infty \right)$  уравнение (14) имеет единственное решение, которое можно найти любым численным методом.

Аналогично, если все  $y_i$  отрицательны, то на интервале  $r \in \left( -\infty, \min_i y_i \right)$  уравнение (14) имеет единственное решение, которое также можно найти численно.

Видно, что предлагаемый способ нахождения величины  $r$  является достаточно громоздким. Если среди заданных точек есть три такие, абсциссы которых образуют арифметическую прогрессию, то можно получить явную формулу для вычисления  $r$ . Ниже это проделано.

### Способ 2.

Пусть  $x_1, x_2, x_3$  образуют арифметическую прогрессию. Тогда из системы:

$$\alpha + \beta x_1 = \ln \frac{y_1}{r - y_1}, \alpha + \beta x_2 = \ln \frac{y_2}{r - y_2}, \alpha + \beta x_3 = \ln \frac{y_3}{r - y_3}$$

найдем  $r$ . Для этого вычтем из 3-го уравнения 2-е, из 2-го уравнения 1-е:

$$\beta(x_3 - x_2) = \ln \frac{y_3(r - y_2)}{y_2(r - y_3)}, \beta(x_2 - x_1) = \ln \frac{y_2(r - y_1)}{y_1(r - y_2)}.$$

Левые части этих выражений равны, поскольку  $x_1, x_2, x_3$  образуют арифметическую прогрессию. Следовательно, равны и выражения под логарифмами. Получаем уравнение:

$$\frac{y_3(r - y_2)}{y_2(r - y_3)} = \frac{y_2(r - y_1)}{y_1(r - y_2)},$$

которое сводится к квадратному, один из корней равен нулю (и он нам не подходит), а второй корень дает искомое значение  $r$ :

$$r = \frac{y_2^2(y_1 + y_3) - 2y_1y_2y_3}{y_2^2 - y_1y_3}. \quad (15)$$

Для точек с номерами  $m, k, s$ , абсциссы которых образуют арифметическую прогрессию, аналогичные рассуждения приводят к общей формуле.

$$r = \frac{y_k^2(y_m + y_s) - 2y_my_ky_s}{y_k^2 - y_my_s}. \quad (16)$$

Можно использовать одну тройку точек. Но если все  $x_i$  образуют арифметическую прогрессию, то для повышения точности, можно вычислить коэффициенты  $r$  для точек с номерами 1,2,3, потом для точек с номерами 2,3,4 и так далее, и найти среднее арифметическое полученных значений. После определения  $r$  величины  $\alpha$  и  $\beta$  находятся по формулам (8), а искомые величины определяются по формулам (2).

#### 4. Пример расчета

В качестве тестовой возьмем функцию  $y = 0.2(1 + th(2 + 0.4x))$ , график которой изображен на рис 1.

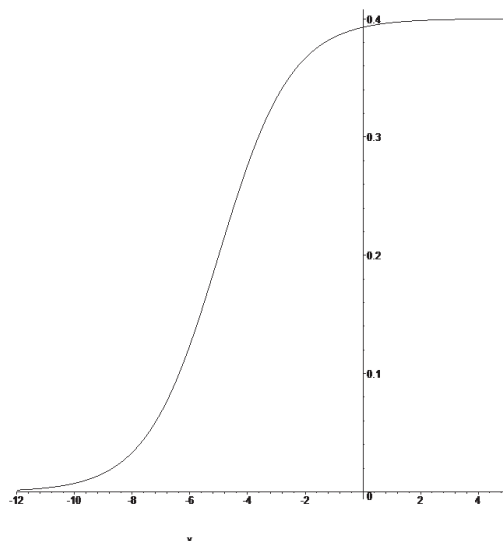


Рис.1. График функции  $y = 0.2(1 + th(2 + 0.4x))$

Выберем 6 точек с абсциссами  $x_i = -12 + 2i$ ,  $i = 1..6$ . В качестве ординат возьмем значения  $y_i = y(x_i) + 0.02 \sin i$ , где слагаемое  $0.02 \sin i$  вводится как случайная погрешность. В таблице приведены значения абсцисс и ординат выбранных точек, а так же, для сравнения, ординаты  $\bar{y}_i = y(x_i)$  соответствующих точек, лежащие на тестовой кривой.

Таблица 1. Значение абсцисс и ординат тестовой функции

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	-10	-8	-6	-4	-2	0
$y_i$	0.0073	0.0337	0.1242	0.2750	0.3663	0.3928
$\bar{y}_i$	0.0072	0.0333	0.1240	0.2760	0.3667	0.3928

Величина  $r$  считалась как среднее арифметическое значений  $r$ , полученное по четырем наборам точек с номерами 1,2,3, с номерами 2,3,4, с номерами 3,4,5 и с номерами 4,5,6:

$$r = 0.25(0.3823 + 0.3994 + 0.4007 + 0.4002) = 0.3956 .$$

В результате расчетов получены значения  $A = 0.1978, a = 2.2656, b = 0.4342$ .

На рис.2 изображены график тестовой и полученной в результате расчетов функции.

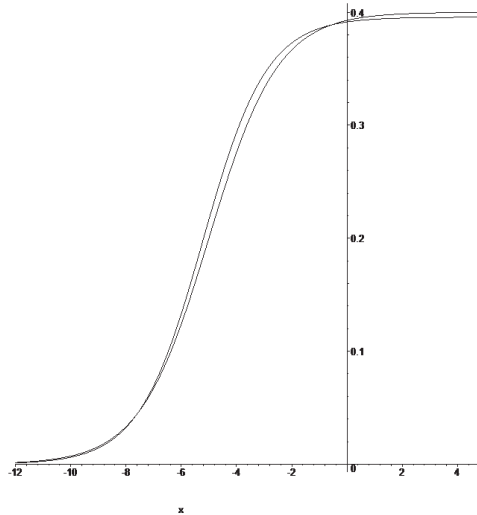


Рис.2. Графики тестовой функции и расчетной

Отметим, что при расчетах, в которых брались точки на самой тестовой кривой, получалась функция, совпадающая с тестовой в пределах точности вычислений.

### 5. Выводы

В статье показано, что метод наименьших квадратов может применяться в тех случаях, когда искомую функцию нельзя представить в виде линейной комбинации искомых параметров. Приведены результаты для функции, содержащей гиперболический тангенс, которая используется для описания кривых буксования мобильных энергетических устройств. Отмечено, что в случае, когда абсциссы точек образуют арифметическую прогрессию, удается получить расчетные формулы в явном виде. Полученные результаты могут быть использованы для определения точек оптимума, методами, предложенными в работе [4].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математической теории обработки наблюдений / Ю. В. Линник // Физматлит. – 1958. – 337с.
2. Лоусон Ч. Л., Хенсон Р. Д. Численное решение задач метода наименьших квадратов / Ч. Л. Лоусон, Р. Д. Хенсон. – Пер. с англ. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1986. – 232с.
3. Сураев Н. Г. Исследование тягового КПД и буксования тракторов / Н. Г. Сураев // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1991. – №4. – С. 16-20.
4. Величко Е. В. Определение точек оптимума двух классов двузонных функций / Е. В. Величко, В. Т. Надыкто // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2014. – вып. 5. — Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/math/1298.html>.

UDC 539.3

## Free vibrations of an elastic cylindrical shell coupled with liquid sloshing

K. G. Degtyarev, V. I. Gnitko, V. V. Naumenko, E. A. Strelnikova

*A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine*

*Ukrainian State Academy of Railway Transport, Ukraine*

*National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Ukraine*

Задача анализа динамического поведения оболочек вращения, частично заполненных идеальной несжимаемой жидкостью, сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Использована прямая формулировка метода граничных интегральных уравнений. Разработан метод численной реализации, проведено сравнение численных и аналитических результатов. Исследованы совместные колебания оболочки и жидкости с учетом силы тяжести. С использованием разработанного метода решена задача о свободных колебаниях упругой цилиндрической оболочки с жидкостью.

**Ключевые слова:** гидроупругое взаимодействие, методы конечных и граничных уравнений, системы сингулярных интегральных уравнений.

Задачу аналізу динамічної поведінки оболонок обертання, частково заповнених ідеальною нестисливою рідиною, зведено до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь. Застосовано пряме формулювання методу граничних інтегральних рівнянь. Розроблено метод чисельної реалізації, здійснено порівняння чисельних та аналітичних розв'язків. Досліджені сумісні коливання оболонки та плескань рідини з урахуванням сили тяжіння. З використанням розробленого методу розв'язано задачу вільних коливань пружної циліндричної оболонки з рідиною.

**Ключові слова:** гідропружня взаємодія, методи граничних та скінченних елементів, системи сингулярних інтегральних рівнянь.

The problem of dynamics analysis for shells of revolution partially filled with an ideal incompressible liquid was reduced to solving the system of singular integral equations. The direct formulation of boundary integral equation method was applied. The authors have elaborated the method of numerical simulation of the process and approved it by comparison of numerical and analytical solutions. They considered the shell vibrations coupled with liquid sloshing in presence of gravity forces. The free vibrations of elastic cylindrical shell were analyzed using the proposed technique.

**Key words:** fluid-structure interaction, finite and boundary element methods, systems of singular integral equations.

### 1. Introduction.

The term "sloshing" means here the low frequency oscillation of free surface of liquid in a partially filled container. These oscillations can significantly influence the dynamic response of structures containing liquid. This interaction with sloshing liquid may lead to instabilities in different engineering areas such as aerospace and chemical industry, power machine building, wind power engineering, transport, etc. Usually liquid storage tanks contain oil, flammable or toxic liquids. Destruction of these tanks by seismic action or shockwaves from a nearby explosion can lead to environmental catastrophe. So seismic design of liquid storage tanks requires knowledge of sloshing frequencies and hydrodynamic pressure on the walls [1]. Complex experimental

investigation of loading processes is difficult and sometimes impossible for various reasons. Hence, mathematical modeling of physical processes with the help of advanced computer techniques is a basic approach for these problems. Numerical methods are especially useful when the geometry of container is complicated and the sloshing in the container cannot be investigated analytically. Various approaches have been proposed to research fluid-structure interaction, including the finite difference methods [2], the finite element methods [3], the boundary element methods (BEM) [5-10]. The research findings are summarized in [11].

The dynamic analysis of shell structures is usually accomplished by usage of finite element programs. However, such 3D finite element analysis including the contained fluid is complex and extremely time consuming. In [7-9] authors offer the approach, based on the boundary element method, to the problem of free vibrations of fluid-filled shell of revolution as well as to the problem of liquid sloshing in rigid tank.

In this paper, analysis of elastic cylindrical shell vibration both free and coupled with liquid sloshing is carried out. For this, here we use combination of reduced finite and boundary element methods. The analysis consists of several stages, and each represents a separate task. The frequencies and modes of empty shell vibrations are defined in the first stage. Displacement vector that is the solution of the hydrodynamic problem is sought as a linear combination of natural modes of empty shell. First, we define the frequencies and free vibration modes of fluid-filled elastic shell neglecting the force of gravity. Then we obtain the same, this time involving gravity, but assuming the shell rigid. Two latter problems are solved using reduced BEM. Then we come to the problem of coupled analysis of liquid sloshing and structural vibrations.

## 2. Problem statement.

Let us consider the coupled problem for the shell of revolution interacting with a liquid (Figure 1). We denote the wetted part of the shell surface by  $S_1$  and the free surface of a liquid by  $S_0$ . Let us suppose that the shell geometry is defined in global Cartesian coordinate system  $x, y, z$  and free surface lies in  $xOy$  plane in the state of rest.

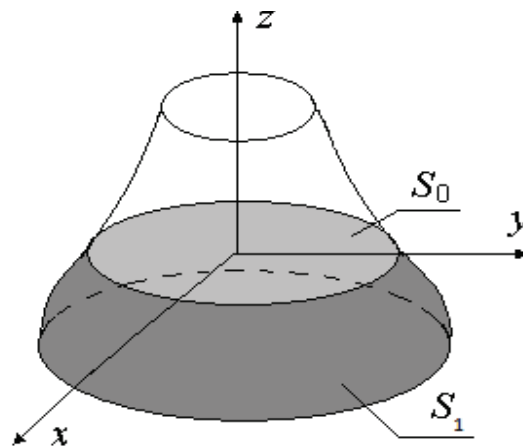


Fig.1. Shell of revolution partially filled with a liquid.



The main objective of this paper is to find out and evaluate modes and frequencies of elastic shell of revolution free vibrations coupled with liquid sloshing.

In this study, liquid contained in the shell is assumed inviscid and incompressible one and its flow induced by vibrations of the shell is assumed irrotational.

Under these suppositions, there exists a velocity potential  $\Phi$  defined as

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

This potential satisfies the Laplace equation.

The equations of motion of the two media (the shell,  $S_1$ , and the fluid with free surface,  $S_0$ , (see Fig. 1)) can be written in the following form

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}) = \mathbf{P}, \quad (1)$$

where  $\mathbf{U}$  is the vector-function of displacements,  $\mathbf{P}$  is the fluid pressure on a moistened surface of the shell, and  $\mathbf{L}$  and  $\mathbf{M}$  are the operators of elastic and mass forces.

Let us consider the right-hand side of Eqn. (1). It should be noted that the vector  $\mathbf{P}$  is normal to the considered shell, what is the feature of the ideal fluid. We will denote  $|\mathbf{P}| = p$ . Assuming that the natural velocity of the fluid is zero, the value  $p$ , according to the Cauchy-Lagrange integral, can be represented as follows

$$p = -\rho_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) + p_0$$

where  $\Phi$  is the velocity potential,  $g$  is the free fall gravity acceleration,  $z$  is the vertical coordinate of a point in liquid,  $p_0$  is the atmospheric pressure and  $\rho_l$  is the fluid density.

To obtain the boundary equations over the free surface we have formulated dynamic and kinematics boundary conditions. The dynamic boundary condition consists in equality of liquid pressure at its free surface to atmospheric one. The kinematics boundary condition requires that particles of liquid free surface remain there all the time of subsequent motion. So, we have

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{S_0} = 0$$

where an unknown function  $\zeta = \zeta(t, x, y, z)$  describes the form and location of free surface.

Thus, to find the velocity potential  $\Phi$ , we obtain the following boundary value problem:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{S_0} = 0$$

Here  $w$  is for normal component of shell deflection,  $\mathbf{n}$  is for external unit vector normal to the shell wetted surface.

So we reduce the problem under consideration to the following system of differential equations:

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}) = p\mathbf{n}, \quad p = -\rho_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) + p_0; \quad \Delta \Phi = 0$$

with the such set of boundary conditions relative to  $\Phi$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right|_{S_0} = 0$$

and shell fixation conditions relative to  $\mathbf{U}$ .

To define coupled modes of harmonic vibrations we represent the vector  $\mathbf{U}$  in the form  $\mathbf{U} = \mathbf{u} \exp(i\omega t)$ , where  $\omega$  is an own frequency and  $\mathbf{u}$  is a mode of vibration of the considered shell containing some fluid.

### 3. The mode superposition method for coupled dynamic problems

We will seek vibration modes for shell with liquid in the form

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{u}_k, \quad (2)$$

where  $c_k$  are unknown coefficients and  $\mathbf{u}_k$  are the normal modes of vibrations of the empty shell. In other words, a mode of vibration of the shell filled with fluid is determined as a linear combination of normal modes of its vibration without liquid.

Let us note that the following relations are valid

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) = \Omega_k^2 \mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \quad (\mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \delta_{kj}. \quad (3)$$

Hence

$$(\mathbf{L}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \Omega_k^2 \delta_{kj}, \quad (4)$$

where  $\Omega_k$  is the  $k$ -th frequency of empty shell vibrations. The above relations (3) and (4) show that the modes of shell vibrations  $\mathbf{u}_k$  are orthonormalized with respect to the mass matrix.

We will seek  $\Phi$  as a sum of two potentials  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$  as it was proposed in [9].

Let us represent the potential  $\Phi_1$  as the following series expansion

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k \varphi_{1k}. \quad (5)$$

Here time-dependant coefficients  $c_k$  are the same in Eqn. (2).

To determine  $\varphi_{1k}$  we have the following boundary value problems:

$$\Delta \varphi_{1k} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = w_k, \quad \varphi_{1k}|_{S_0} = 0. \quad (6)$$

It would be noted that the solution of boundary value problem (6) was done in [9].

To determine the potential  $\Phi_2$  we have to solve the problem of fluid vibrations in rigid vessel taking into account gravitational force. It leads to following representation of potential  $\Phi_2$ :

$$\Phi_2 = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k \varphi_{2k}, \quad (7)$$

where functions  $\varphi_{2k}$  are natural modes of liquid sloshing in the rigid tank. To obtain these modes we have solved the following sequence of boundary value problems:

$$\Delta\psi_{2k} = 0; \quad \frac{\partial\psi_{2k}}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial\psi_{2k}}{\partial n} \Big|_{s_0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial\psi_{2k}}{\partial t} + g\zeta = 0. \tag{9}$$

We have differentiated with respect to  $t$  the second of equations (9) and substituted there  $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$  by the left-hand side from the first one. Let us suppose hereinafter that  $\psi_{2k}(t, x, y, z) = e^{i\chi_k t} \varphi_{2k}(x, y, z)$ . Then we obtain for each  $\varphi_{2k}$  the sequence of eigenvalue problems with following conditions over the free surface:

$$\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial n} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_{2k}. \tag{10}$$

The effective numerical procedure for solution of these eigenvalue problems using boundary element method was introduced in [6].

Finally, we obtain the following expression for potential  $\Phi$ :

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^M \dot{d}_k \varphi_{2k} \tag{11}$$

It follows from Eqn. (11) that function  $\zeta$  can be written as

$$\zeta = \sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial n} + \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial n} \tag{12}$$

So, the total potential  $\Phi$  satisfies the Laplace equation and non penetration boundary condition

$$\Delta\Phi = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

due to validity of relations (6),(8). Noted that  $\Phi$  also satisfies the condition

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} \Big|_{s_0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

as a result of representation (12).

Satisfying the condition

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + gz \Big|_{s_0} = 0$$

over the free surface, one can obtain the next equality

$$\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k \varphi_{2k} + g \left( \sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial z} + \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial z} \right) = 0. \tag{13}$$

When functions  $\varphi_{1k}$  and  $\varphi_{2k}$  are found, we substitute them in Eqn (1) by corresponding expressions and obtain the following relations

$$L\left(\sum_{k=1}^N c_k(t)\mathbf{u}_k\right) + M\left(\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t)\mathbf{u}_k\right) = -\rho_l\left(\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t)\varphi_{1k} + \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k(t)\varphi_{2k}\right); \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^M \ddot{d}_k\varphi_{2k} + g\sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial n} + \sum_{k=1}^M d_k\chi_k^2\varphi_{2k} = 0.$$

Here we have simplified Eqn (13) taking into account Eqns (6),(10).

The first equation in (14) is valid over the wetted surface of the shell and the second one – over the free surface of liquid.

Considering the result of dot product of first equation in (14) by  $u_j$  and second one by  $\varphi_{2j}$ , and taking into account relations (3),(4) and orthogonality of natural modes of fluid vibrations in rigid vessel, we come to the following set of  $n+m$  second order differential equations, which determine unknown coefficients  $c_k(t), d_k(t)$ :

$$c_j(t)\Omega_j^2 + \ddot{c}_j(t) = -\rho_l\left(\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t)(\varphi_{1k}, w_j) + \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k(t)(\varphi_{2k}, w_j)\right) \quad (15)$$

$$\ddot{d}_j(t) + g\sum_{k=1}^N c_k(t)\left(\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial n}, \varphi_{2j}\right) + g\chi_j^2 d_j(t) = 0$$

So, to solve coupled problem of elastic shell of revolution free vibrations with liquid sloshing inside it is necessary to obtain three systems of basic functions: natural modes of empty shell; modes of fluid-filled elastic shell without force of gravity; and modes of liquid in rigid shell under force of gravity.

To find coupled modes of harmonic vibrations we represent the time-dependant unknown coefficients as

$$c_k(t) = C_k e^{i\omega t}; \quad d_k(t) = D_k e^{i\omega t}, \quad (16)$$

where  $\omega$  is the natural frequency, and  $C_k, D_k$  are unknown constants.

Taking into account Eqns (16), one can express the Eqns (15) as

$$C_j\Omega_j^2 - \omega^2 C_j + \rho_l\left(\omega^2 \sum_{k=1}^N C_k(\varphi_{1k}, w_j) + \omega^2 \sum_{k=1}^M D_k(\varphi_{2k}, w_j)\right) = 0, \quad j = \overline{1, N} \quad (17)$$

$$\chi_l^2 D_l - \omega^2 D_l + g\sum_{k=1}^m C_k\left(\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial n}, \varphi_{2l}\right) = 0, \quad l = \overline{1, M}.$$

Introducing the following matrixes and vectors

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_m \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_n \end{pmatrix}; \quad H_\chi = \begin{pmatrix} \chi_1^2 & .0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \chi_n^2 \end{pmatrix}; \quad H_\omega = \begin{pmatrix} \Omega_1^2 & .0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \Omega_m^2 \end{pmatrix};$$

$$P = \{p_{kj}\}, \quad p_{kj} = (\varphi_{1k}, w_j), \quad k, j = \overline{1, N};$$

$$B = \{b_{jk}\}, \quad b_{jk} = (\varphi_{2j}, w_k); \quad A = \{a_{jk}\}, \quad a_{jk} = \left(\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial n}, \varphi_{2j}\right); \quad k = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, M},$$

we come to the following problem:

$$\omega^2 EC + H_\omega C + \omega^2 \rho_l PC + \omega^2 \rho_l BD = 0;$$

$$\omega^2 ED + gAC + H_\chi D = 0.$$

Let also introduce for simplicity vectors and matrix of dimension  $N + M$

$$X = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} E + \rho_2 P & \rho_2 B \\ 0 & E \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} H_\omega & 0 \\ gA & H_\chi \end{pmatrix}.$$

It brings us to the following eigenvalue problem

$$(G - \omega^2 H)X = 0. \tag{18}$$

So, analysis of elastic shell free vibrations coupled with liquid sloshing is reduced to solution of eigenvalue problem (18). It should be emphasized that hereinbefore we did not assume that our shell must be a shell of revolution.

Hereinafter we will use finite element method to find basic functions  $w_j$ , and boundary element method to find basic functions  $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}$ .

The proposed technic allows us to carry out numerical simulation for different value of gravitational acceleration  $g$ .

#### 4. Systems of the boundary integral equations and some remarks about their numerical implementation

Now and hereinafter we consider the shells of revolution only.

The basic procedure is to start with the standard boundary integral equation for surface potential [5], replace the Cartesian co-ordinates  $(x, y, z)$  with cylindrical co-ordinates  $(r, \theta, z)$ , and integrate with respect to  $z$  and  $\theta$ .

We use furthermore the cylindrical coordinate system and represent unknown functions as Fourier series by circumferential coordinate

$$w_k(r, z, \theta) = w_k(r, z) \cos \alpha \theta; \quad \varphi_{ij}(r, z, \theta) = \varphi_{ij}(r, z) \cos \alpha \theta; \quad i = 1, 2, \tag{19}$$

where  $\alpha$  is a given integer (the number of nodal diameters).

We will seek both harmonic functions  $\varphi_{1k}$  and  $\varphi_{2k}$  as the sums of potentials of single and double layers [5], i.e., we will use the direct boundary element method formulation. Hereinafter we will drop indexes  $ij$  for simplicity. So we have

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S q \frac{1}{|P - P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS. \tag{20}$$

It is assumed here that  $S = S_1 \cup S_0$  and the points  $P$  and  $P_0$  belong to the surface  $S$ . The value  $|P - P_0|$  represents the Cartesian distance between the points  $P$  and  $P_0$ .

For the mixed boundary value problem defined by Eqs. (6), the representation (20) leads to the following system of the singular integral equations for unknown functions  $\varphi$  and  $q$ :

$$\begin{aligned} 2\pi\varphi(P_0) + \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P - P_0|} dS_0 &= \iint_{S_1} w \frac{1}{|P - P_0|} dS_1; \quad P_0 \in S_1; \\ \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P - P_0|} dS_0 &= \iint_{S_1} w \frac{1}{|P - P_0|} dS_1; \quad P_0 \in S_0 \end{aligned} \tag{21}$$

In this system, function  $\varphi$  defined over the surface  $S_1$  represents the pressure on the moistened shell surface, and the function  $q$  defined over the free surface of liquid  $S_0$  is the velocity normal component of this surface particles.

Let  $\Gamma$  be a generator of the surface  $S_1$ . It has been proved in [7,9] that system (21) can be written in the form

$$2\pi\varphi(z_0) + \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; P_0 \in S_1, \quad (22)$$

$$\int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; P_0 \in S_0.$$

Here

$$Q(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[ \frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_{\alpha}(k) - F_{\alpha}(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_{\alpha}(k) n_z \right\};$$

$$\Psi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_{\alpha}(k); E_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} (1 - 4\alpha^2)^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi;$$

$$F_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}; a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z^* - z_0)^2; b = 2\rho\rho_0; k^2 = \frac{2b}{a+b}.$$

To find potentials  $\varphi_2k$  we use representation (20) and introduce next integral operators:

$$A\psi_1 = 2\pi\psi_1 + \iint_{S_1} \psi_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(P, P_0)} dS_1; B\psi_0 = \iint_{S_0} \psi_0 \frac{1}{r} dS_0; C\psi_0 = \iint_{S_0} \psi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) dS_0;$$

$$D\psi_1 = -\iint_{S_1} \psi_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS_1; F\psi_0 = \iint_{S_0} \psi_0 \frac{1}{r} dS_0. \quad (23)$$

Then the boundary value problem (8),(10) takes the form

$$A\psi_1 = \frac{\kappa^2}{g} B\psi_0 - C\psi_0; P_0 \in S_1; D\psi_1 = 2\pi E\psi_0 - \frac{\kappa^2}{g} F\psi_0; P_0 \in S_0.$$

After excluding function  $\psi_1$  from these relations, we obtain the following eigenvalue problem, solution of which gives natural modes and their frequencies for liquid sloshing in rigid tank

$$(DA^{-1}C + E)\psi_0 - \lambda(DA^{-1}B + F)\psi_0 = 0; \lambda = \frac{\chi^2}{g}.$$

Numerical solution of integral equation system (22) and evaluation of integral operators (23) is obtained by BEM with constant approximation of unknown  $\varphi$  and  $q$  inside elements.

It would be noted that internal integrals in (22),(23) are complete elliptic integrals of first and second kinds. As the first-kind elliptic integrals are non-singular, one can successfully use standard Gaussian quadratures for their numerical evaluation. For second-kind elliptic integrals we have applied the approach based on characteristic property of the arithmetic geometric mean AGM( $a, b$ ) (see [12]). This property is the following:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2AGM(a,b)}.$$

To find AGM(a,b) there exist the simple Gaussian algorithm, described below

$$a_0 = a; \quad b_0 = b; \quad a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}; \quad b_1 = \sqrt{a_0 b_0}; \dots a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}; \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}; \dots$$

$$AGM(a,b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (24)$$

It is a very effective method to evaluate the elliptic integrals of the second kind.

Convergence  $\varepsilon = |a_n - b_n| < 10^{-8}$  is achieved after 6 iterations (namely,  $n = 6$  in (24)).

So we have the effective numerical procedures of inner integrals evaluation, but integral equations (22),(23) involve external integrals of logarithmic singularity and thus numerical treatment methods for these integrals must also take into account the presence of this integrable singularity. Here integrands have strongly nonuniform distribution over the element, and standard integration quadratures show low accuracy. So we treat these integrals numerically by special Gauss quadratures [5,13] and applying technique proposed in [14].

### 5. Some numerical results

The study of axisymmetric free vibration characteristics of elastic cylindrical shell interacting with a liquid is presented below. In this special case, parameter  $\alpha$  in Eqns (19),(22),(23) is supposed equal to zero.

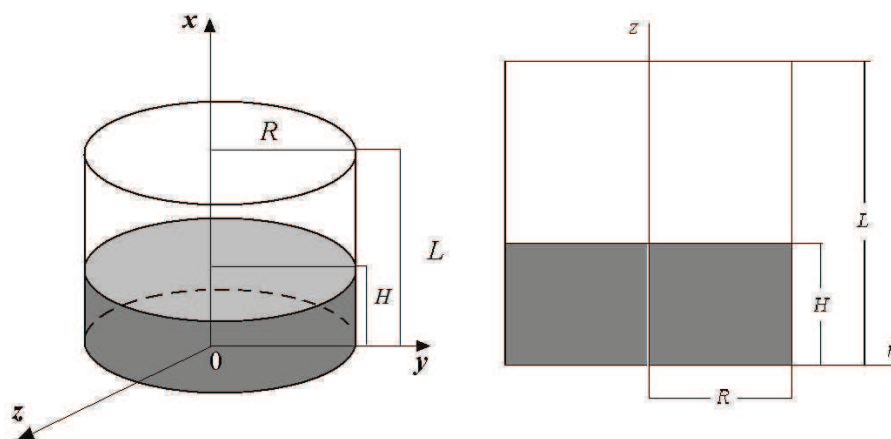


Fig.2. Cylindrical shell partially filled with a liquid.

Let our shell be the circular cylindrical tank with flat bottom. Its geometry is shown in Figure 2. The shell has the following characteristics: the radius  $R = 1$  m, thickness  $h = 0.01$  m, the length  $L = 2$  m, Young's modulus  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa, Poisson's ratio  $\nu = 0.3$ , density of material  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>, the fluid density  $\rho_1 = 1000$  kg/m<sup>3</sup>. The filling level of the fluid is denoted as  $H$ . The shell is assumed pin-connected over its contour and boundary conditions are following:  $u_r = u_z = u_\theta = 0$  to  $z = 0$  and  $r = R$ .

The three systems of basic functions mentioned in section 3 above have been built.

The first one - normal modes of the empty shell vibrations - was obtained using finite element method (FEM) as it was described in [8].

The second system represents normal modes of liquid sloshing in the rigid tank with taken into consideration gravity force. To verify the proposed numerical algorithm described further, we have used the analytical solution [11] that can be expressed in the form

$$\frac{\chi_k^2}{g} = \mu_k \tanh\left(\mu_k \frac{H}{R}\right), \quad k = 1, 2, \dots; \quad \varphi_{2k} = J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right) \cosh\left(\frac{\mu_k}{R} z\right) \cosh^{-1}\left(\frac{\mu_k}{R} H\right) \quad (25)$$

The values  $\mu_k$  in (25) are the roots of the equation

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = 0,$$

where  $J_0(x)$  is Bessel function of first kind,  $\chi_k, \varphi_{2k}$  are our sought-after frequencies and modes of liquid sloshing in the rigid cylindrical shell.

The numerical solution was obtained by using BEM as it was described beforehand. Some numerical results were also provided in [15]. In present numerical simulation we used 60 boundary elements along bottom, 60 elements along wetted cylindrical part and 100 elements along the radius of free surface. Figure 3 shows the first three modes of liquid sloshing on free surface in the rigid cylindrical shell.

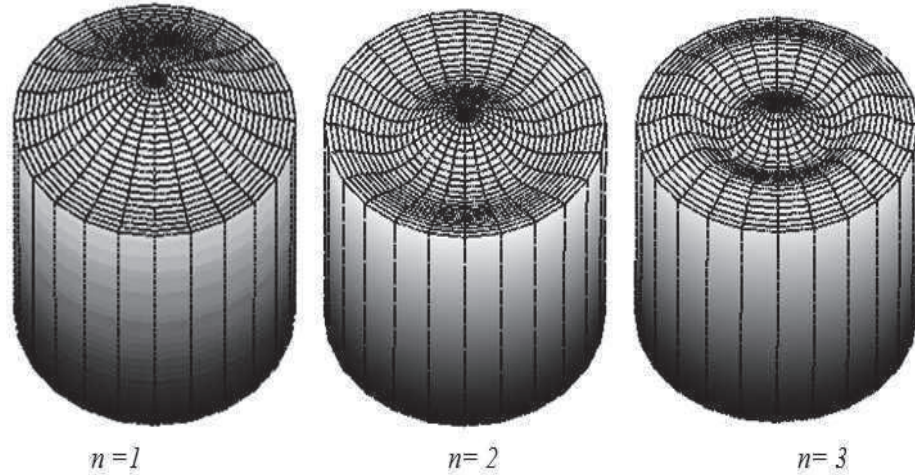


Fig.3. Axisymmetrical modes of liquid sloshing in cylindrical shell.

Table 1 below provides the numerical values of the natural frequencies of liquid sloshing for nodal diameter  $\alpha = 0$ . The obtained numerical results are compared with those received using formulae (25).

Table 1. Comparison of analytical and numerical results

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
BEM	3.815	7.019	10.180	13.333	16.480
(25)	3.815	7.016	10.173	13.324	16.470

Figures 4 and 5 also demonstrate good agreement between numerical and analytical data.



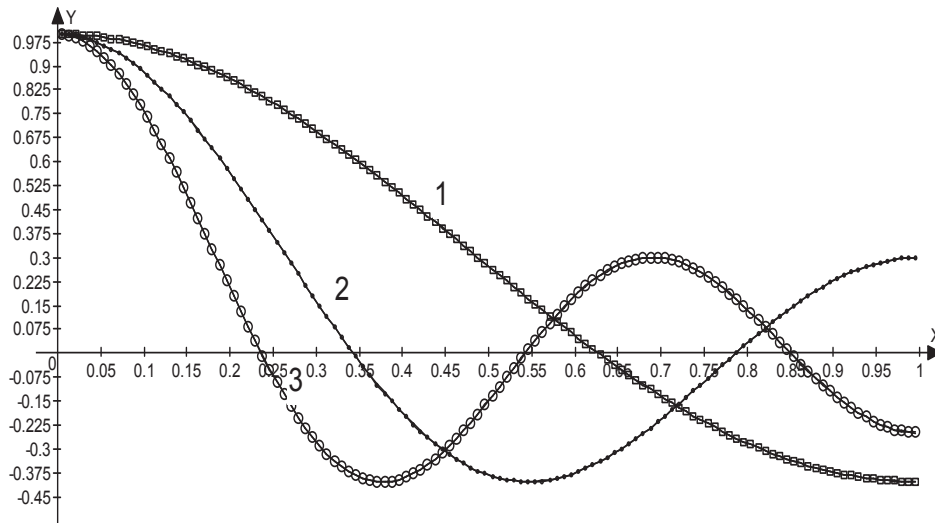


Fig. 4. Numerically and analytically obtained modes

In Figure 4 the distribution of first three sloshing modes over the free surface is shown. The solid lines correspond to modes obtained with the help of analytical expression (25) at  $z = H$ .

Figure 5 demonstrates the distribution of these modes over the rigid vertical wall of the shell.

The lines plotted with circles and squares correspond to numerical solutions. Numbers 1,2,3 mark the first, second and third mode of liquid sloshing, respectively. Accuracy  $\varepsilon$  of order  $10^{-4}$  have been achieved in numerical data calculation.

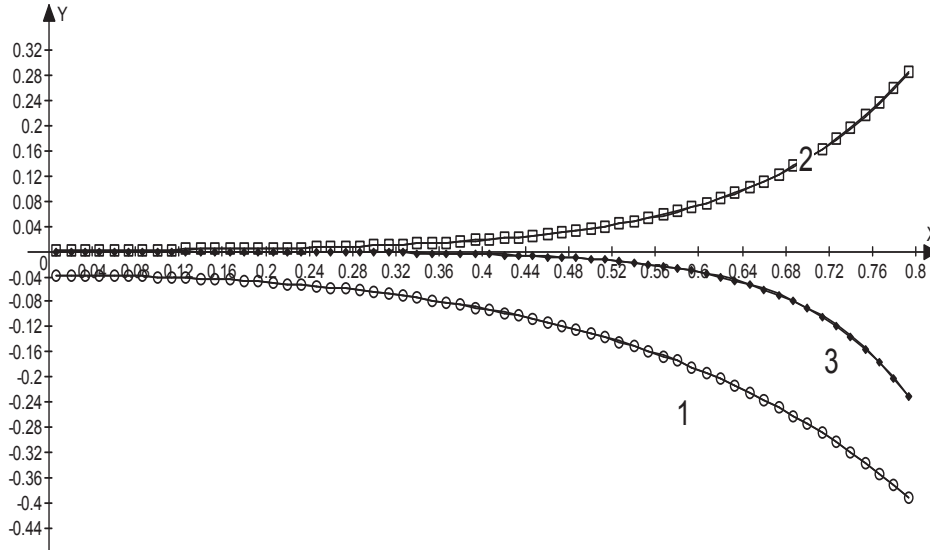


Fig. 5. Sloshing modes on the vertical wall

Functions  $\varphi_{1k}$  were calculated by BEM based method developed in [8].

Table 2 provides the numerical values of natural frequencies of vibration for empty and for fluid-filled cylindrical tanks. Here coefficients  $n_s$ ,  $n_L$  indicate number of shell modes and quantity of liquid involved in coupled vibrations,  $n$  is the number of coupled mode. For numerical simulation represented here, we have used 4 shell modes and 5 sloshing modes.

Table 2. Frequencies of empty and fluid-filled tanks

$n$	$n_s$	$n_L$	Empty elastic tank	Fluid-filled tank
1		1		6.11932
2	1	1,2	23.2338	7.94464
3		2		8.29916
4		3		9.99584
5		4		11.44149
6		5		12.72385
7	2,1		91.1011	43.86220
8	3,2		205.2520	119.6224
9	4,3,2		365.7950	238.6944

Numerical analysis demonstrates that the lowest frequency corresponds to liquid sloshing. The frequencies of the fluid-filled shell are essentially lower than are those of the empty shell. It also should be noted that there exist an interaction of both liquid and wall vibrations. It was especially clear for the first shell mode. This interaction does not allow us to separate frequencies spectrum of shell and one of liquid.

## 6. Conclusions

The shell vibrations coupled with liquid sloshing under force of gravity were considered. The free vibration analysis of the elastic cylindrical shell was carried out using proposed techniques. We introduce the representation of the velocity potential as the sum of two potential, one of them corresponds to problem of the fluid free vibrations in the rigid shell and another one corresponds to problem of fluid-filled elastic shell vibrations without including the gravitational component. The spectrum of frequencies for cylindrical tank was analysed.

The main conclusion is following. Vibrations consist of two components: one of which is produced by liquid sloshing, but another caused by elastic shell vibrations. Hence these components are both essential. It means that we do not have to consider these components separately. Thus instead two separate problems one general problem has to be considered.

## 7. Acknowledgments

The authors gratefully acknowledge Yuriy Gandel, V. N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine, and Carlos Brebbia, Wessex Institute of Technology, United Kingdom, for their constant support and interest to our research.

## References

1. G. Popov, S. Sankar, T.S. Sankar, G.H. Vatsin, Liquid Sloshing in Rectangular Road Container. *Computers & Fluids*. V.21, N 4, pp.551-569. 1999.
2. Dukowicz, J. K., Dvinsky, and A. S., Approximate Factorization as a High Order Splitting for the Implicit Incompressible Flow Equations, *J. Comput. Phys.*, 102, pp. 330-336, 1992.
3. Tezduyar T. E. Finite Element Methods for Fluid Dynamics with Moving Boundaries and Interfaces. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, (3): Fluids, pp.1-55, 2004.
4. Recent Advances in Boundary Element Methods A Volume to Honor Professor Dimitri Beskos Manolis, George; Polyzos, Demosthenes Eds., XXXVIII, 470 p., 2009.
5. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. & Wrobel, L.C. *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
6. J. Cappello, A. Sauret, F. Boulogne, E. Dressaire, H. Stone, Damping of liquid sloshing by foams: from everyday observations to liquid transport, *Journal of Visualization*, pp. 1-3, 2014.
7. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid Proc. of XXXII Conference "Boundary elements and other mesh reduction methods" WITPress, Transaction on Modeling and Simulation, pp. 203-211, 2010.
8. Ventsel E., Naumenko V, Strelnikova E., Yeseleva E. Free vibrations of shells of revolution filled with a fluid. *Engineering analysis with boundary elements*, 34, pp. 856-862, 2010.
9. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. Proc. of XXXIII Conference "Boundary elements and other mesh reduction methods" WITPress, Transaction on Modeling and Simulation, pp. 285-296, 2011.
10. Chen, Y.H., Hwang, W.S. & Ko, C.H., Numerical simulation of the three-dimensional sloshing problem by boundary element method. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 23(3), pp. 321-330, 2000.
11. Ibrahim R. A. *Liquid sloshing dynamics: theory and applications* Cambridge University Press, 957p., 2005.
12. David A. Cox. The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss. *L'Enseignement Mathématique*, t. 30, pp. 275-330, 1984.
13. Stroud A.H., Secrest D. *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice-Hall, Englewood, N.J., Cliffs, 206 p., 1966.
14. Naumenko V.V., Strelnikova H.A. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. *Engineering analysis with boundary elements*. №26, pp. 95-98, 2002.
15. Гнисько В. И. Численное моделирование плесканий жидкости в упругой цилиндрической оболочке / В. И. Гнисько, В. В. Науменко // Вісник Харківського національного університету. – 2012. – №1015. – С. 66-72.

УДК 536.24

## Математическое моделирование тепловых процессов в теплоизлучающих цилиндрах на базе метода встречных функционалов

О. П. Демьянченко, Н. А. Сафонов, А. П. Слесаренко

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,  
Азовский морской институт Одесской национальной морской академии*

Построена аналитическая структура решения нелинейной краевой задачи теплоизлучающего тела, точно удовлетворяющая граничным условиям Стефана-Больцмана. Построена последовательность математических моделей высокотемпературного теплового процесса, позволившая решение нелинейной краевой задачи теплоизлучающего тела свести к решению последовательности вариационных задач для встречных функционалов. Последовательность решений вариационных задач для встречных функционалов позволяет организовать итерационный процесс с двухсторонней сходимостью к точному решению задачи. Приводятся результаты решений конкретных задач с иллюстрацией двухсторонней сходимости к точному решению.

**Ключевые слова:** *встречные функционалы, численное решение, вычислительный эксперимент, теплоизлучающее тело, последовательность вариационных задач.*

Побудована аналітична структура розв'язку нелінійно крайової задачі тепловипромінюючого тіла, яка точно задовольняє граничним умовам Стефана-Больцмана. Побудована послідовність математичних моделей високотемпературного теплового процесу, що дозволила розв'язок нелінійної крайової задачі тепловипромінюючого тіла звести до вирішення послідовності варіаційних задач для зустрічних функціоналів. Послідовність розв'язків варіаційних задач для зустрічних функціоналів дозволяє організувати ітераційний процес з двосторонньою збіжністю до точного розв'язку задачі. Наводяться результати розв'язків конкретних завдань з ілюстрацією двосторонньої збіжності до точного розв'язку.

**Ключові слова:** *зустрічні функціонали, чисельний розв'язок, обчислювальний експеримент, тепловипромінююче тіло, послідовність варіаційних задач.*

An analytical structure have been built for solving nonlinear boundary value problem of the heat radiating body, which exactly satisfies the Stefan-Boltzmann boundary conditions. A sequence of mathematical models of high-temperature thermal process have been developed, which allowed the authors to reduce the solution of nonlinear boundary value problem of the heat radiating body to solving a sequence of variational problems for colliding functional. This sequence allows organizing an iterative process with two-way convergence to the exact solution of the problem. The results of specific problem solving, which illustrate the two-way convergence to the exact solution are presented.

**Key words:** *counter functionals, numerical solution, a computational experiment, heat radiating body, the sequence of variational problems.*

### 1. Общая постановка задачи и её актуальность

Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела относятся к классу актуальных нелинейных задач математической физики. Они адекватно описывают высокотемпературные тепловые процессы при остывании нагретых до высокой температуры тел в вакууме, при отливке массивных тел и другие высокотемпературные процессы. Данные задачи относятся к классу краевых

задач математической физики с внешней нелинейностью. Замена в таких задачах условия Стефана-Больцмана, моделирующего процесс теплоизлучения с части поверхности тела на условие Ньютона с постоянным коэффициентом теплоотдачи может привести к большим погрешностям при моделировании высокотемпературных процессов и является во многих случаях недопустимой.

Задачи теплообмена с внешней нелинейностью решались в основном численными методами, и только для простых одномерных задач удавалось получить точное решение задачи.

Аналитическое решение любой интересной с научно-технической точки зрения краевой задачи математической физики всегда предпочтительней большому массиву дискретных данных, полученных при решении этой задачи численными методами.

Поэтому любые новые научные результаты на пути разработки приближенных аналитических методов решения краевых задач для не простых областей с нелинейными граничными условиями представляют несомненный научный интерес.

Обзор работ по разработке приближенных аналитических методов решения линейных и нелинейных задач теплообмена приведен в работе [1]. Однако оставался ещё ряд важных нерешённых научных вопросов, связанных с точным учётом нелинейного граничного условия Стефана-Больцмана и построением математических моделей нелинейных тепловых процессов, позволяющих получать встречные приближенные аналитические решения нелинейных краевых задач теплоизлучающих тел, обеспечивающие двухстороннюю сходимость к точному решению задачи.

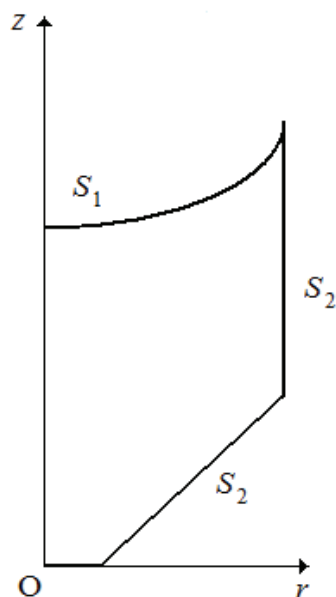


Рис.1. Область.

В данной статье на примере нелинейной краевой задачи для теплоизлучающего тела вращения (рис. 1.) неканонической формы рассмотрим вопросы построения приближённой аналитической структуры решения задачи [1]

$$\Delta T = 0, \quad T = T(r, z), \quad (1)$$

$$T|_{S_1} = T^* \quad (2)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \nu} + \text{Bi}_p T^4 \right) \Big|_{S_2} = \text{Bi}_p T_{\text{ср}}^4, \quad (3)$$

точно удовлетворяющей граничным условиям (2) и (3) при точном учёте геометрической информации о поверхностях  $S_1$  и  $S_2$  с помощью S-функций [2]. С учётом результатов работы [3] структуру решения задачи (1)-(3) построим в виде

$$T = \left[ A_1(\Phi) \omega_2^{-2} + T^* \omega_1^{-1} \left[ \omega_2^{-2} + \omega_1^{-1} \right]^{-1} \right], \quad (4)$$

$$\text{где } A_1(\Phi) = \Phi - \omega_2 \left[ D_1^{(2)} \Phi \right]_{S_2} + \omega_2 \left[ \text{Bi}_p \Phi^4 - \text{Bi}_p T_{\text{ср}}^4 \right]; \quad D_1^{(2)} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial z}$$

$$\omega_1|_{S_1} = 0, \quad \omega_1 > 0, \quad (r, z) \in \Omega; \quad \omega_2|_{S_2} = 0, \quad \omega_2 > 0, \quad (r, z) \in \Omega, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \nu_2} \Big|_{S_2} = 1, \quad \nu_2 -$$

направление внутренней нормали к поверхности  $S_2$ ,  $\Phi = \sum_{k,m} C_{km} P_k(x) P_m(y)$ ,

$P_k(x) P_m(y)$  – полиномы Чебышева,  $C_{km}$  – неопределённые коэффициенты. Функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$  могут быть построены по рекомендациям работы [2] с помощью S-функций.

Легко проверить, что структура решения (4) задачи (1)-(3) точно удовлетворяет условиям (2) и (3) так как  $T|_{S_1} = T^*$ ,  $T|_{S_2} = \Phi$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \nu} \Big|_{S_2} = -\text{Bi}_p \Phi^4 + \text{Bi}_p T_{\text{ср}}^4$ , тогда

$$\left( -\text{Bi}_p \Phi^4 + \text{Bi}_p T_{\text{ср}}^4 + \text{Bi}_p \Phi^4 \right) \Big|_{S_2} = \text{Bi}_p T_{\text{ср}}^4 \Big|_{S_2}.$$

Функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , построенные с помощью S-функций, являются непрерывно дифференцируемыми функциями, значит структура решения (4) задачи (1), (3) является консервативной, так как в этом случае соответствующий функционал для вариационной задачи является непрерывной и ограниченной функцией.

Подставляя структуру решения (4) в уравнение (1), получим

$$\Delta T = F(r, z), \quad (5)$$

где

$$F(r, z) = \Delta \left\{ \left[ A_1(\Phi) \omega_2^{-2} + T^* \omega_1^{-1} \left[ \omega_2^{-2} + \omega_1^{-1} \right]^{-1} \right] \right\}. \quad (6)$$

Так как функция  $F(r, z)$  является непрерывно дифференцируемой и ограниченной функцией, то задача (2), (3), (5) может выполнять роль модельной задачи для задачи (1)-(3), а структура решения (4) будет точным решением модельной задачи (2), (3), (5).

Таким образом, структура решения (4) задачи (1)-(3), в которой коэффициенты  $C_{km}$  определяются из условия наилучшего удовлетворения уравнению (1), может выполнять и вторую важную роль как точное решение модельной задачи (2), (3), (5).

Достоверность результатов решения задачи (1)-(3) может быть проверена на решении задачи (2), (3), (5) при задании функции  $\Phi(r, z)$  в виде замкнутого аналитического выражения или в виде произведения элементарных функций.

## 2. Структурная линеаризация граничных условий Стефана-Больцмана в краевой задаче теплоизлучающего полого бесконечного цилиндра

Рассмотрим распределение температуры в бесконечном полом цилиндре, внутренняя поверхность которого поддерживается при постоянной температуре  $T^* = 2000$ , а внешняя – излучает тепло по закону Стефана-Больцмана в окружающую среду нулевой температуры. Математическая постановка этой задачи выглядит в виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0, \quad r \in (a, b), \quad (7)$$

$$T = T^*, \quad r = a, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \text{Bi}_p T^4 = 0, \quad r = b, \quad (9)$$

где  $r = r_1 l^{-1}$ ,  $T = T_1 T_0^{-1}$ ,  $a = a_1 l^{-1}$ ,  $b = b_1 l^{-1}$ ,  $\text{Bi}_p = \chi T_0^3 l$ ,  $T^* = T_1^* T_0^{-1}$ .

Нелинейную краевую задачу (7)-(9) сведём к последовательности линейных задач с зависящими от координат коэффициентами теплоотдачи в условиях Ньютона. Коэффициенты теплоотдачи в условиях Ньютона определяются из решений линеаризованных задач на предыдущих итерациях таким образом, что математические модели в построенной последовательности попеременно моделируют процесс нелинейного радиационного теплообмена с более или менее высокой интенсивностью по отношению к исходной нелинейной модели теплообмена. Указанная последовательность линеаризованных задач имеет вид

$$T_{11} = T^*, \quad r = a, \quad (10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_{21}}{\partial r} \right) = 0, \quad a < r < b, \quad (11)$$

$$T_{21} = T^*, \quad r = a, \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial v} + \text{Bi}_p T_{11}^3 T_{21} = 0, \quad r = b, \quad (13)$$

$$T_{31} = 0,5(T_{11} + T_{21}), \quad a < r < b \quad (14)$$

для  $\gamma = 2,3,4,\dots$  в общем виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_{1j}}{\partial r} \right) = 0, \quad a < r < b, \quad (15)$$

$$T_{1j} = T^*, \quad r = a, \quad (16)$$

$$\frac{\partial T_{1j}}{\partial v} + \text{Bi}_p T_{3,j-1}^3 T_{1j} = 0, \quad r = b, \quad (17)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_{2j}}{\partial r} \right) = 0, \quad a < r < b, \quad (18)$$

$$T_{2j} = T^*, \quad r = a, \quad (19)$$

$$\frac{\partial T_{2j}}{\partial v} + \text{Bi}_p T_{1,j}^3 T_{2j} = 0, \quad r = b, \quad (20)$$

$$T_{3j} = 0,5(T_{1j} + T_{2j}), \quad a < r < b, \quad (21)$$

где  $j$  – номер итерации.

### 3. Структурный метод в построении встречных функционалов

Структуры решения краевых задач (11)-(13), (15)-(17) и (18)-(20) представим в виде

$$T_{ij} = \frac{T^* r^2}{a^2} + \sum_{m=0}^n C_m^{(ij)} (r^2 - a^2) r^{2m} = \Phi_0 + u_{ij}. \quad (22)$$

Последовательность линейных краевых задач для функций  $T_{21}$ ,  $T_{1j}$  и  $T_{2j}$  можно привести к последовательности задач о минимуме функционалов:

$$I_{21} = \int_a^b \left( \frac{\partial T_{21}}{\partial r} \right)^2 r dr + \text{Bi}_p T_{11}^3(b) T_{21}^2(b) b, \quad (23)$$

для  $j = 2,3,4,\dots$



$$I_{1j} = \int_a^b \left( \frac{\partial T_{1j}}{\partial r} \right)^2 r dr + \text{Bi}_p T_{3,j-1}^3(b) T_{1j}^2(b) b, \quad (24)$$

$$I_{2j} = \int_a^b \left( \frac{\partial T_{2j}}{\partial r} \right)^2 r dr + \text{Bi}_p T_{1,j}^3(b) T_{2j}^2(b) b. \quad (25)$$

#### 4. Вычислительный эксперимент

Начальное приближение описанных итераций определяется формулой (10). Коэффициенты  $C_m^{(ij)}$  для последовательности вариационных задач (23)-(25) определялись из соответствующих систем линейных алгебраических уравнений на каждом шаге. В табл. 1 представлены значения коэффициентов  $C_m^{(ij)}$  ( $i=1,2,3; j=1,2,3,\dots; m=0,1,2$ ) при  $a_1 = 0,1875$  м;  $b_1 = 0,25$  м;  $l = 1$  м  $\text{Bi}_p = 0,5896 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{м} \cdot \text{К}^3}$ ;  $T_1^* = 2000$ ;  $T_0 = 1$  К. В табл. 2 приведены значения температуры по формуле точного решения  $T_T = 2000 \left( 1 - 0,5734044 \ln \frac{r}{a} \right)$  и значения  $T_{3j}(r)$  для  $j = 1,2,3,\dots$  в отдельных точках.

Из табл. 1 и 2 видно, что предложенный процесс сходится и полученное решение задачи (7)-(9) хорошо согласуется с точным решением, о чём свидетельствует представленная погрешность в последней строке табл. 2.

Табл. 1. Значения коэффициентов  $C_m^{(ij)}$  для задачи теплоизлучения в полном цилиндре

$i \setminus j$	1	2	3	4
1	-56888,8	-85059,855	-81725,639	-82145,524
	0,0	355342,89	313285,74	31852,08
	0,0	-1925244,3	-1697378,9	1726074,5
2	93603,281	-80651,133	-82283,918	-82075,861
	488335,48	229732,18	320327,78	317703,39
	-2645796,6	-1623946,1	-1735532,8	-1721313,8
3	-76246,085	-82855,494	-82004,779	-82110,693
	244167,74	327537,53	316806,76	318142,73
	-1322898,3	-1774595	-1716455,8	-1723694,1

Табл. 1. (Продолжение) Значения коэффициентов  $C_m^{(ij)}$  для задачи теплоизлучения в полом цилиндре

$i \setminus j$	5	6	7	8
1	-82093,094	-82099,648	-82098,829	-82098,931
	317920,75	318003,42	317993,11	317994,37
	-1722491,5	-1722939,3	-1722883,5	-1722890,3
2	-82101,803	-82098,560	-82098,965	-82098,914
	318030,60	317989,70	317994,80	317994,14
	-1723086,6	-1722865,1	-1722892,6	-1722889,0
3	-82097,448	-82099,104	-82098,897	-82098,922
	317975,68	317996,56	317993,95	317994,26
	-1722789,0	-1722902,2	-1722902,2	-1722889,7

Табл. 2. Значения температуры в теплоизлучающем полом цилиндре

$T_{3j} \setminus r$	0,2000	0,2125	0,2250	0,2375	0,2500
T31	1943,2936	1889,7099	1839,3315	1791,8853	1746,6797
T32	1923,9315	1852,0520	1784,4721	1720,8258	1660,1849
T33	1926,4236	1856,8901	1791,5332	1729,9720	1671,3179
T34	1925,1134	1856,2956	1790,6541	1728,8333	1669,9318
T35	1926,1522	1856,3711	1790,7641	1728,9757	1670,1051
T36	1926,1473	1856,3616	1790,7503	1728,9579	1670,0830
T37	1926,1479	1856,3628	1790,7520	1728,9601	1670,0862
T38	1926,1478	1856,3627	1790,7518	1728,9599	1670,0858
T39	1926,1479	1856,3627	1790,7518	1728,9599	1670,0858
T3,10	1926,1479	1856,3627	1790,7518	1728,9599	1670,0858
TT	1925,9868	1856,4618	1790,9120	1728,9074	1670,0838
$\ T_T - T_n\ _{2,d}$	0,1611	0,0991	0,1602	0,05250	0,002

Результаты, представленные в табл. 2 иллюстрируют эффективность предложенного подхода и достоверность данных вычислительного эксперимента.

### 5. Вариационно-структурный метод в построении встречных приближённых аналитических решений краевой задачи теплоизлучающего полого конечного цилиндра

Определение поля температур конечного полого цилиндра, температура внутренней поверхности которого поддерживается при постоянном значении  $T^*$ , нижнее основание ( $z = 0$ ) – теплоизолировано, а остальная поверхность S

цилиндра излучает тепло по закону Стефана-Больцмана, сводится к решению нелинейной краевой задачи

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad a < r < b, \quad 0 < z < 1, \quad (26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (27)$$

$$T = T^*, \quad r = b, \quad (28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} + \text{Bi}_p T^4 = 0 \quad \text{на } S, \quad (29)$$

где  $\nu$  – направление внешней нормали к поверхности  $S$ ,  $z = z_1 l^{-1}$ .

Решение этой задачи сведём к решению последовательности линейных задач теплопроводности, в которых нелинейное краевое условие (29) заменяются линейными краевыми условиями. Относительные коэффициенты теплоотдачи на каждом шаге итерационного процесса получаются как функции координат на основе определения температурного поля на предыдущей итерации. В этом формально состоит метод линейных итераций решения нелинейных краевых задач теплоизлучающего тела. Последовательность линейных краевых задач для задачи (26)-(29) имеет вид

$$\Delta T_{ij} = 0, \quad a < r < b, \quad 0 < z < 1, \quad (30)$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (31)$$

$$T = T^*, \quad r = a, \quad (32)$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial \nu} + \text{Bi}_p T_{P_{ij}}^3 T_{ij} = 0 \quad \text{на } S, \quad (33)$$

$T_{3_j} = 0, 5(T_{1_j} + T_{2_j}), \quad a < r < b, \quad 0 < z < 1, \quad P_{1_j} \rightarrow 3, j-1, \quad P_{2_j} \rightarrow 1, j$ , где  $j$  – номер итерации.

Структуры решения краевых задач (30)-(33) представим в виде:

$$T_{ij} = \frac{T^* r^2}{b^2} + \sum_{k,m} C_{km}^{(ij)} \Phi_{km}(r, z) = f + \Psi_{ij}. \quad (34)$$

Последовательность краевых задач для  $\Psi_{ij}$  представим так

$$\Delta \Psi_{ij} = -\frac{4T^*}{b^2}, \quad a < r < b, \quad 0 < z < 1, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (36)$$

$$\Psi_{ij} = 0, \quad \text{на } S_1 (r = a) \quad (37)$$

$$\frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial \nu} + \text{Bi}_p T_{P_{ij}}^3 \Psi_{ij} = -\left( \frac{\partial f}{\partial \nu} + \text{Bi}_p T_{P_{ij}}^3 f \right) = f_{ij} \quad \text{на } S_2. \quad (38)$$

Краевые задачи (35)-(38) можно свести к задачам о минимуме встречных функционалов:

$$I[\Psi_{ij}] = \int_b^a \int_0^1 \left\{ [\text{grad} \Psi_{ij}]^2 - \frac{8T^*}{b^2} \Psi_{ij} \right\} r dr dz + \int_S (Bi_p T_{p_{ij}}^3 \Psi_{ij}^2 - 2f_{ij} \Psi_{ij}) dS. \quad (39)$$

### 6. Анализ сходимости вычислительного процесса при структурной линеаризации нелинейного граничного условия Стефана-Больцмана

Нахождение неопределённых коэффициентов  $C_{km}^{(ij)}$  для последовательности вариационных задач (39) сводится к решению соответствующих систем Ритца [4], представлены значения коэффициентов  $C_{ks}^{(ij)}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5; k + s = 0, 2$ ). Табл. 3 при  $a_1 = 0,1875$  м;  $b_1 = 0,25$  м;  $Bi_p = 0,5896 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{м} \cdot \text{К}^3}$ ;  $T_1^* = 2000$  К. содержит значения температуры  $T_j$  в отдельных точках цилиндра приближённого решения и значения для  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ , полученных с использованием аппроксимации полиномами чётной степени. Для сравнения температур в плоскости  $z = 0$  приведём значения точного решения для соответствующего бесконечного цилиндра:  $T(0,2) = 1926$ ;  $T(0,225) = 1791$ ;  $T(0,25) = 1670$ .

Табл. 3. Значения температуры в теплоизлучающем полом цилиндра

$r$	$T_j$	$z$					
		0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,200	$T_1$	1944,7	1944,4	1943,6	1942,1	1940,2	1937,6
	$T_2$	1925,3	1925,0	1924,0	1922,5	1920,9	1917,4
	$T_3$	1927,0	1927,0	1926,7	1924,1	1922,9	1919,9
	$T_4$	1927,4	1927,1	1926,2	1924,6	1922,4	1919,6
	$T_5$	1927,5	1927,2	1926,2	1924,7	1922,5	1919,7
0,225	$T_1$	1841,1	1840,2	1837,5	1833,0	1826,7	1818,5
	$T_2$	1785,6	1784,6	1781,5	1776,5	1769,4	1760,3
	$T_3$	1792,3	1791,3	1788,3	1783,3	1776,2	1767,7
	$T_4$	1791,7	1790,7	1787,7	1782,7	1775,8	1766,8
	$T_5$	1791,9	1790,9	1787,9	1782,9	1775,9	1766,9
0,250	$T_1$	1754,0	1752,4	1747,6	1739,6	1728,5	1714,1
	$T_2$	1668,4	1666,6	1661,2	1652,3	1639,7	1623,6
	$T_3$	1675,8	1677,0	1672,7	1663,8	1651,2	1635,3
	$T_4$	1678,0	1676,2	1670,9	1662,1	1649,7	1633,8
	$T_5$	1678,2	1676,4	1671,1	1662,3	1649,9	1634,0

### 7. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Предложенная в статье приближённая аналитическая структура решения (4) нелинейной краевой задачи теплоизлучающего тела (1)-(3) универсальна относительно изменения геометрии частей поверхности тела. Она может быть использована как для получения приближённого аналитического решения нелинейной краевой задачи теплоизлучающего тела, так и для выполнения роли точного решения модельной задачи. В этом случае отличие модельной нелинейной задачи от научно-практической состоит только в том, что в модельной задаче будет уравнение Пуассона, а в исходной задаче – уравнение Лапласа. Геометрия исследуемой области и граничные условия остаются неизменяющимися. Неопределённые коэффициенты  $C_{ks}$  структуры решения могут быть определены из условия наилучшего удовлетворения уравнения (1) различными способами, включая определение коэффициентов  $C_{ks}$  из соответствующих систем нелинейных алгебраических уравнений. Вариант линеаризации условий Стефана-Больцмана рассмотренный в статье позволил свести решение исходной задачи для теплоизлучающего тела к решению последовательности вариационных задач для встречных функционалов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Мацевитый Ю. М. Некорректные многопараметрические задачи теплопроводности и регионально-структурная регуляризация их решений / Ю. М. Мацевитый, А. П. Слесаренко. – Киев : Наукова думка, 2014. – 293 с.
2. Слесаренко А. П. S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм / А. П. Слесаренко // Вост.-Европ. журнал передовых технологий. – 2012. – № 1/4 (55). – С. 4-10.
3. Слесаренко А. П. Математическое моделирование тепловых процессов в телах сложной формы при нестационарных граничных условиях / А. П. Слесаренко // Пробл. машиностроения. – 2002. – Т. 5, № 4. – С. 72-80.
4. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М : Наука, – 1977. – 456 с.

UDC 004.67:656.11

## Modeling of the discrete flows interaction considering correlation between flow elements

Ievgen Didenko, Valentin Lazurik, Katerina Samilyk

*V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine*

In the paper, the authors consider the simulation of flows interaction in the frame of extended model of discrete stochastic flows with correlation between elements. In the random arrival problem, the average delay time for a single element, which depends on differing clustered structures of major flow, is obtained using computer simulation system for crossing process modeling developed by the authors. The difference between models with and without correlation between elements as well as their application scopes are considered. The applicability of presented in this paper results to creation of intelligent transportation system is.

**Key words:** *stochastic discrete flow, cluster flow structure, average delay time*

У статті розглядається комп'ютерне моделювання взаємодії потоків в рамках розширеної моделі дискретних стохастичних потоків з урахуванням кореляції між елементами. Середній час очікування для одного елемента в задачі випадкового прибуття на перетин залежно від різної кластерної структури головного потоку знаходиться за допомогою розробленої авторами системи комп'ютерного моделювання процесу перетину. Обговорюється відмінність між моделями з урахуванням і без урахування кореляції між елементами в потоці і область застосування цих моделей. Розглядається можливість застосування результатів, наведених у статті, в інтелектуальних транспортних системах.

**Ключові слова:** *стохастичний дискретний потік, кластерна структура, розподіл часових інтервалів, пропускна здатність.*

В статье рассматривается компьютерное моделирование взаимодействия потоков в рамках расширенной модели дискретных стохастических потоков с учетом корреляции между элементами. Среднее время ожидания для одного элемента в задаче случайного прибытия на пересечение в зависимости от различной кластерной структуры главного потока находится с помощью разработанной авторами системы компьютерного моделирования процесса пересечения. Обсуждается различие между моделями с учетом и без учета корреляции между элементами в потоке и область применения этих моделей. Рассматривается возможность применения результатов, приведенных в статье, в интеллектуальных транспортных системах.

**Ключевые слова:** *стохастический дискретный поток, кластерная структура, распределение временных интервалов, пропускная способность.*

### 1. Introduction

With the help of computer simulation one can predict such negative phenomena as queuing and capacity reduction in complex transportation systems. Considering possibility of queues formation, intersections are the most critical components of the network.

Priority-controlled intersection is the mostly used type of intersections in road transportation systems [1-4]. Let us suppose that in the intersection (Fig.1) the possibility of crossing (merging) for element of minor flow is restricted if the time gap between major flow elements is less than some value  $\alpha$ , and element of minor flow has to stop and give way. Intervals less than  $\alpha$  will be called critical. The elements of

major flow have the priority and can pass through without stopping at the intersections.

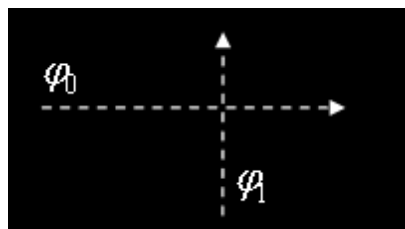


Fig.1 Model of crossing flows with different priorities  $\varphi_0$  and  $\varphi_1$

The classic problem is capacity determination of that kind of intersection. Capacity describes the maximum possible throughput of an intersection under predefined conditions. In [1-4] the authors show that capacity of the priority-controlled intersection in a transportation system is determined by the traffic flow rate and time headway distribution of the flow. It is often assumed that time gaps between elements are distributed independently, i.e. there is no correlation between them.

But there are some problems, in which existence of such flow element groups where all time gaps are less than critical value becomes important. Distribution of these groups in the flow must be included into consideration as well. According to Kerner [5], these groups or "moving jams" in discrete flows can be formed due to stochastic nature of a flow in the long roads or at the intersections of different kind.

Let us define as "clusters" [1] the groups of flow elements having only critical time gaps between them, and the "clustered structure" of a flow as a combination of two characteristics: the intercluster intervals distribution and the cluster size distribution.

On assumption that there is no correlation between cluster elements, the cluster size distribution in the flow can be found as:

$$p_{cl}(n) = (1 - \omega)\omega^{n-1} \quad (1),$$

where  $\omega$  – the probability of critical time gap appearance,  $n$  – the group size.

However, it will be shown below that  $p_{cl}(n)$  can significantly vary depending on the right side of equation (1) while time headway distribution remains fixed.

Time headway distribution does not allow us to find out what is the clustered structure of the traffic flow without taking into consideration additional parameters that should describe the correlation between elements.

This paper is devoted to priority-controlled intersection modeling in the bounds of clustered flow model. The average delay time for element of minor flow before merging (crossing) in random arrival problem was calculated using for traffic flow description both clustered and non-clustered model. The authors measure the influence of the flow clustered structure on their interaction characteristics in two ways: with the help of analytical calculations and using computer system for crossing process simulation.

## 2. The average delay time in the random arrival problem

Let us consider the model of priority-controlled intersection with two crossing flows depicted in Figure 1:  $\varphi_0$  - the major flow with time headway distribution  $\rho_0$  and  $\varphi_1$  - the minor flow; size of elements in the flows is equal to zero, critical interval for crossing -  $\alpha$ . It is supposed that the minor flow level is so low that the probability of queuing (more than one element in the intersection simultaneously) tends to zero.

At first, let us obtain the average delay time in the non-clustered flow model using time headway distribution.

The element of minor flow randomly arriving to the intersection finds the time gap  $x$  between major flow elements. Let us define the distribution of  $x$  as modified time headway distribution -  $\rho_0^*(x)$ . According to Ventcel  $\rho_0^*(x)$  can be obtained from  $\rho_0$  as shown in [7]:

$$\rho_0^*(x) = (1/\bar{x}) \int_x^{\infty} \rho_0(x) dx \quad (2),$$

where  $\bar{x}$  - the mean of  $\rho_0$ .

Then the average delay time can be calculated using the formula (3):

$$\bar{\tau}_w = \bar{\tau}_\alpha^* + \omega_\alpha^* \frac{\bar{\tau}_\alpha}{1 - \omega_\alpha} \quad (3),$$

Where:

$$\bar{\tau}_\alpha^* = \int_0^\alpha x \rho_0^*(x) dx \quad (4)$$

$$\bar{\tau}_\alpha = \int_0^\alpha x \rho_0(x) dx \quad (5)$$

$$\omega_\alpha = \int_0^\alpha \rho_0(x) dx \quad (6)$$

$$\omega_\alpha^* = \int_0^\alpha \rho_0^*(x) dx = (\alpha/\bar{x})(1 - \omega_\alpha) + 1/\bar{x} \int_0^\alpha x \rho_0(x) dx \quad (7)$$

As we can see from (3), the average delay time depends only on time headway distribution of the major flow.

Now let us consider again the problem of element random arrival to the intersection, this time describing the major flow in terms of the flow model, which takes into account its clustered structure.

For clustered structure description the authors have used the composite model presented by May [6]. Intercluster intervals are distributed exponentially and intracluster intervals have the normal distribution (the intercluster intervals are larger



than the critical interval size).  $p_1$  - is the ratio of summarized intracluster intervals to total time of intervals in the major flow.

The probability for element of minor flow to fall within the cluster of size  $n$  is determined by time the cluster of that size occupies the intersection and is proportional to the cluster length in terms of time –  $n\overline{\tau_\alpha}$ . The delay time such element needs to wait until cluster of size  $n$  passes the intersection is proportional to  $n\overline{\tau_\alpha}/2$ .

So, theoretical evaluation of the average delay time before the element of the minor flow crosses (merges) the intersection with the major flow yields a value proportional to cluster size squared (8):

$$\overline{\tau_{wcl}} \sim p_1 \sum_n (n\overline{\tau_\alpha})^2 / 2 \quad (8),$$

It is possible to change cluster size distribution and consequently  $\sum_n (n\overline{\tau_\alpha})^2 / 2$  keeping  $p_1$  untouched. The time, during which the cluster of size  $n$  occupies the intersection, can greatly vary depending on cluster size distribution in the flow. Therefore, based on the formula (8), one can conclude that in the case of fixed  $p_1$  the average delay time depends on cluster size distribution as well.

### 3. The simulation of the discrete flows' intersection.

Since it is hard to calculate the average delay time in clustered flow model, the authors have extended previously developed computer modeling system adding there the generator of flows with different clustered structure [8]. In this simulation system, the algorithm for calculation of average delay in random arrival problem is implemented. The algorithm is based on the Monte Carlo method.

In the simulation experiment, the time delay for element of minor flow randomly arriving to intersection was obtained according to both clustered flow model (Monte Carlo simulation) and non-clustered one (formula 3 – calculated numerically). Time headway distribution of the major flow was a constant and consequently  $p_1$  was always the same as well. Nothing was changing but the cluster size (the authors were considering the case of same size for all clusters). Figure 2 shows the generated time headway distribution according to clustered flow model with parameters  $p_1 = 0.3$ , mean of intercluster interval  $\overline{t_\alpha} = 0.75$ , exponent shift = 0.75.

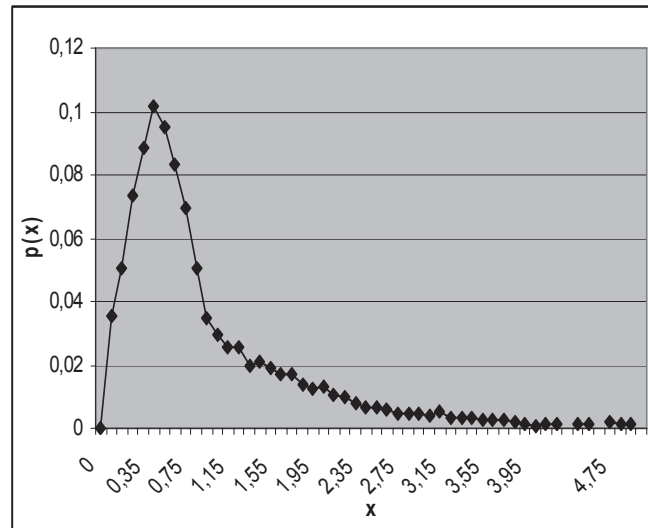


Fig.2 Time headway distribution generated according to the clustered flow model

Time headway distribution of that shape (exponential tail and great part of small intervals) frequently occurs in real traffic flows in the city road network [6].

The series of experiments were carried. The number of series performed for each cluster size  $n$  from 2 to 10 was  $N=10^6$ . The shape of distribution and value of  $p_1$  did not vary when  $n$  was changing. Evaluation results for average delay time in dependence of different sizes of clusters in the major flow, with fixed distribution in both models, is shown on Figure 3.

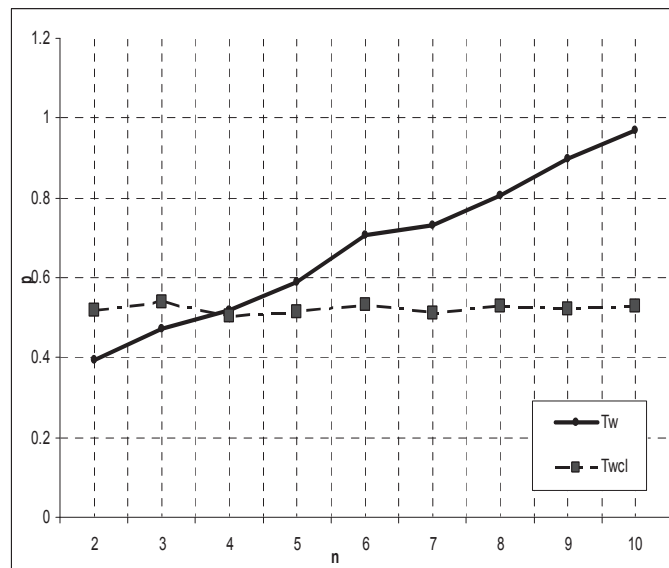


Fig.3 Average delay time for different cluster size ( $n$ ) in major flow calculated by computer simulation - solid curve for clustered model and for non-clustered model - dotted

Average delay time for different cluster size ( $n$ ) in major flow calculated by computer simulation: solid curve – for clustered model and dash-dotted one – for non-clustered.

#### 4. Conclusions

In this paper, simulation of flows interaction is considered using the extended model of discrete stochastic flows. In the model, besides the time headway distribution and intensity of a flow, two characteristics of its clustered structure were taken into account: the distribution of a gap between the elements of the cluster and the cluster size distribution in the flow. It is shown that, in the random arrival problem, the difference in clustered structure can significantly influence the delay time for flow element. The authors have developed a computer modeling system, which allows obtaining the value of the average delay time for a single element, depending on the major flow clustered structure. The results presented in this paper can be used when creating an intelligent transportation system [9].

#### REFERENCES

1. Ning Wu A universal procedure for capacity determination at unsignalized (priority-controlled) intersections / Wu Ning. – Transportation Research part B 35. – Issue 3, 2001. – 33 p.
2. Denos C. Gazis. Traffic theory. – Kluwer academic publishers, Dodrecht, 2002. – P. 259.
3. C. Daganzo. Fundamentals of transportation and traffic operations. Elsevier science ltd, Oxford, UK, 2003, 339 p.
4. Highway Capacity Manual 2010. Transportation Research Board, Washington, D.C.. 2010.
5. B.S. Kerner, Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control: The Long Road to Three-Phase Traffic Theory, Springer, New York, 2009, 265 p
6. May, Adolf. Traffic Flow Fundamentals. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990. – P. 464.
7. Ventcel, E.S. & Ovcharov, L.A. 1988. Probability theory and its engineering applications. Moscow: Nauka
8. Didenko I. Simulation of the discrete traffic flow movement through network node / Didenko I., Baiev O., Lazurik V. // Bulletin Kherson National Technical University. – 2013. – vol. 2(47). – P. 125-128.
9. Tarnoff, Philip John, Bullock, Darcy M, Young, Stanley E, et al. "Continuing Evolution of Travel Time Data Information Collection and Processing", Transportation Research Board Annual Meeting 2009 Paper #09-2030. TRB 88th Annual Meeting Compendium of Papers DVD

УДК 519.854.2

## Составление расписания выполнения работ параллельными приборами с целью минимизации максимального отклонения от директивного срока

Е.Г. Жданова, А.А. Павлов, М.О. Сперкач

*Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина*

В статье рассмотрены свойства задачи составления допустимого расписания выполнения работ параллельными приборами с целью минимизации максимального отклонения от директивного срока моментов завершения приборами всех их работ. Согласно методологии построения ПДС-алгоритмов, разработаны достаточные признаки оптимальности расписаний; определено множество перестановок, позволяющих последовательно улучшать значение критерия. Разработана полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма решения задачи. Дана оценка отклонения от оптимума. Рассмотрено практическое применение разработанного алгоритма.

**Ключевые слова:** календарное планирование, расписание, параллельные приборы, директивный срок, ПДС-алгоритм, минимизации максимального отклонения от директивного срока.

У статті розглянуто дослідження властивостей задачі складання допустимого розкладу виконання завдань паралельними пристроями з метою мінімізації максимального відхилення від директивного терміну моментів завершення приладами усіх завдань. Згідно методології побудови ПДС-алгоритмів, розроблені достатні ознаки оптимальності розкладів; визначено множину перестановок, що дозволяють послідовно покращувати значення критерію. Розроблено поліноміальна складова ПДС-алгоритму розв'язання задачі. Наведена оцінка відхилення від оптимуму. Розглянуто практичне застосування розробленого алгоритму.

**Ключові слова:** календарне планування, розклад, паралельні пристрої, директивний термін, ПДС-алгоритм, мінімізація максимального відхилення від директивного терміну.

The article describes the properties of the problem of creating a feasible schedule of jobs execution by parallel devices aimed at minimizing the completion time maximum deviation from the due date. Applying the methodology of PDC-algorithms, the sufficient criteria of optimal schedule are developed; the permutations set is detected that allow this criterion consecutive improvement. The polynomial component of the PDC-algorithm for the problem solution is developed. The deviation from the optimum is evaluated. The practical applications of the developed algorithms are considered.

**Keywords:** scheduling, schedule, parallel devices, due date, PDC-algorithm, minimizing the maximum deviation from the due date.

### 1. Общая постановка задачи и её актуальность

Задано множество работ  $J$  ( $|J|=n$ ), количество приборов  $m$ , для работы  $j \in J$  известна продолжительность выполнения  $p_j$ . Предполагается, что все работы поступают одновременно и имеют общий директивный срок  $d$  ( $d \in N$ ,  $p_j \in N$ ,  $j = \overline{1, n}$  - директивный срок и продолжительность выполнения работ являются натуральными числами). Процесс выполнения работ каждым из приборов

является непрерывным: после выполнения первой по порядку сразу же начинает выполняться вторая и т.д. Работы выполняются без прерываний.

Необходимо найти расписание, в котором минимизируется максимальное отклонение от директивного срока момента завершения приборами всех своих работ.

В работерассматривается задача, для которой выполняется:

1) наибольший общий делитель значений продолжительностей выполнения всех работ ( $p_j, j = \overline{1, n}$ ) и директивного срока ( $d$ ) равен единице (этого всегда можно достичь, разделив эти величины на их наибольший общий делитель);

2) суммарное время, выделенное приборам на выполнение всех работ, примерно равно общему объему работы, которую должны выполнить эти

приборы:  $\sum_{j=1}^n p_j \approx dm$  и при этом  $\left| \sum_{j=1}^n p_j - dm \right| < m$ .

Второе условие можно интерпретировать так: суммарный объем работ соизмерим с выделенным фондом рабочего времени приборов.

## 2. Истоки исследования авторов

В работе [1, 2] рассмотрены близкие к исследуемой задаче, для решения которых используются метаэвристические алгоритмы (улучшенный муравьиный алгоритм, генетический алгоритм с перестановками). В работе [3] была рассмотрена задача, близкая к исследуемой: задача календарного планирования выполнения работ общим директивным сроком идентичными параллельными приборами по критерию максимизации момента запуска приборов при условии, что все работы не запаздывают. Для решения этой задачи была применена методология построения ПДС-алгоритмов, которая позволила получить достаточно высокие результаты. Рассматриваемая работа является продолжением работ [3,4], в которой также применяется методология построения ПДС-алгоритмов.

## 3. Цели работы

Цель настоящей работы – исследовать свойства задачи, разработать эффективный приближенный алгоритм ее решения.

## 4. Исследование свойств задачи

Рассмотрим некоторое расписание  $\sigma$ . Введем для него обозначения:

$C_i(\sigma)$  – момент завершения выполнения всех работ прибором  $i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;

$\Delta_i(\sigma) = \max\{0; C_i(\sigma) - d\}$ ,  $i = \overline{1, m}$  (выступ прибора  $i$ );

$R_i(\sigma) = \max\{0; d - C_i(\sigma)\}$ ,  $i = \overline{1, m}$  (резерв прибора  $i$ );

$I_\Delta(\sigma)$  – множество приборов, у которых  $\Delta_i(\sigma) > 0$ ;

$I_R(\sigma)$  – множество приборов, у которых  $R_i(\sigma) > 0$ ;

$I_0(\sigma)$  – множество приборов, у которых  $\Delta_i(\sigma) = R_i(\sigma) = 0$ ;

$J_i(\sigma)$  – множество работ, которые в расписании  $\sigma$  выполняются прибором  $i$ .

С учетом выбранных обозначений критерий задачи имеет вид:

$$\max_i \{C_i(\sigma) - d\} \rightarrow \min$$

или

$$\max_i \{R_i(\sigma); \Delta_i(\sigma)\} \rightarrow \min.$$

Критерий оценки расписания можно интерпретировать так: необходимо найти такое расписание, в котором приборы нагружены максимально равномерно.

Обозначим через  $\Psi$  класс расписаний, для которых выполняется:

$$\neg \exists h, j, s \mid h \in I_{\Delta}(\sigma), j \in J_h(\sigma), s \in I_R(\sigma), p_j \leq R_s(\sigma) \quad (1)$$

и

$$\neg \exists h, j, s \mid h \in I_{\Delta}(\sigma), j \in J_h(\sigma), s \in I_R(\sigma), p_j \leq \Delta_h(\sigma), R_s(\sigma) > 0 \quad (2)$$

**Утверждение 1.** Существует оптимальное расписание, которое удовлетворяет условиям (1) и (2).

**Доказательство**

Если для расписания  $\sigma$  выполняется:

$$\exists h, j, s \mid h \in I_{\Delta}(\sigma), j \in J_h(\sigma), s \in I_R(\sigma), p_j \leq R_s(\sigma)$$

и/или

$$\exists h, j, s \mid h \in I_{\Delta}(\sigma), j \in J_h(\sigma), s \in I_R(\sigma), p_j \leq \Delta_h(\sigma), R_s(\sigma) > 0,$$

то перемещение работы  $j$  с прибора  $h$  на прибор  $s$  сохраняет значение критерия или приводит к его улучшению. Покажем это.

Предположим, что  $\sigma$  – расписание, которое не удовлетворяет условию (1). Это означает, что на некотором приборе  $h \in I_{\Delta}(\sigma)$  выполняется работа  $j$ , длительность которой не превышает резерв некоторого другого прибора  $s \in I_R(\sigma)$ :  $p_j \leq R_s(\sigma)$ . Перемещение работы  $j$  с прибора  $h$  на прибор  $s$  приведет к таким последствиям:

$$\Delta_h(\sigma^1) = \begin{cases} \Delta_h(\sigma) - p_j, & \text{если } p_j < \Delta_h(\sigma), \\ 0, & \text{если } p_j \geq \Delta_h(\sigma); \end{cases}$$

$$\Delta_s(\sigma^1) = \Delta_s(\sigma) = 0;$$

$$R_s(\sigma^1) = R_s(\sigma) - p_j;$$

$$R_h(\sigma^1) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_j \leq \Delta_h(\sigma), \\ p_j - \Delta_h(\sigma), & \text{если } p_j > \Delta_h(\sigma); \end{cases}$$

где  $\sigma^1$  – расписание, полученное в результате перестановки.

В результате перестановки по сравнению с расписанием  $\sigma$  мог увеличиться только резерв прибора  $h$  (если только  $p_j > \Delta_h(\sigma)$ ), но этот вновь образовавшийся резерв  $R_h(\sigma^1)$  будет меньше резерва  $R_s(\sigma)$ . Покажем это:

$$R_s(\sigma) - R_h(\sigma^1) = R_s(\sigma) - (p_j - \Delta_h(\sigma)) = R_s(\sigma) - p_j + \Delta_h(\sigma) > 0,$$

поскольку в этом случае,  $R_s(\sigma) - p_j \geq 0$ ,  $\Delta_h(\sigma) > 0$ .

Итак, в результате перестановки получим:

$$\max_{h,s} \{\Delta(\sigma^1)\} < \max_{h,s} \{\Delta_i(\sigma)\},$$

$$\max_{h,s} \{R(\sigma^1)\} < \max_{h,s} \{R_i(\sigma)\},$$

а значит, значение критерия в полученном расписании  $\sigma^1$  не ухудшится:

$$\max_i \{R_i(\sigma^1), \Delta_i(\sigma^1)\} \leq \max_i \{R_i(\sigma), \Delta_i(\sigma)\}.$$

Если прибор  $h$  или прибор  $s$  имели в расписании максимальное из отклонений от директивного срока, то значение критерия после перестановки улучшится.

Предположим теперь, что  $\sigma$  – расписание, которое не удовлетворяет условию (2). Это означает, что на некотором приборе  $h \in I_\Delta(\sigma)$  есть работа, длительность которой не превышает величину выступления этого прибора  $p_j \leq \Delta_h(\sigma)$ , в то время как некоторый другой прибор  $s \in I_R(\sigma)$  имеет резерв  $R_s(\sigma) > 0$ . Перемещение работы  $j$  с прибора  $h$  на прибор  $s$  приведет к таким последствиям (таблица 1).

Табл.1. Сопоставление значений выступов и резервов в расписаниях  $\sigma$  и  $\sigma^1$

		Прибор $h$	Прибор $s$
Расписание $\sigma$	Выступ	$\Delta_h(\sigma)$	0
	Резерв	0	$R_s(\sigma)$
Расписание $\sigma^1$	Выступ	$\Delta_h(\sigma) - p_j$	0, если $p_j \leq R_s(\sigma)$ $p_j - R_s(\sigma)$ , если $p_j > R_s(\sigma)$
	Резерв	0	$R_s(\sigma) - p_j$ , если $p_j \leq R_s(\sigma)$ 0, если $p_j > R_s(\sigma)$

При этом:

$$\max_{h,s} \{\Delta(\sigma^1)\} < \max_{h,s} \{\Delta_i(\sigma)\},$$

$$\max_{h,s} \{R(\sigma^1)\} < \max_{h,s} \{R_i(\sigma)\},$$

а значит

$$\max_i \{R_i(\sigma^1), \Delta_i(\sigma^1)\} \leq \max_i \{R_i(\sigma), \Delta_i(\sigma)\}.$$

Если прибор  $h$  или прибор  $s$  имели в расписании максимальное из отклонений от директивного срока по всем приборам, то значение критерия после перестановки улучшится.

Таким образом, существует оптимальное расписание, которое удовлетворяет условиям (1) и (2). Что и требовалось доказать.

### 5. Признаки оптимальности расписаний

Введем величину  $\delta = \sum_{j=1}^n p_j - dm$ . Для расписания  $\sigma \in \Psi$  возможны такие взаимоисключающие случаи.

**Случай I.**  $\delta = 0$ ,  $C_i(\sigma) = d$ ,  $i = \overline{1, m}$ . В этом случае имеем расписание с равномерной загрузкой приборов. Очевидно, что это расписание является оптимальным.

**Случай II.**  $\delta \neq 0$  (в этом случае невозможно построить расписание с равномерной загрузкой приборов).

Часть приборов завершают свою работу до директивного срока, часть – после. В этом случае расписание, у которого:

$$\Delta_i(\sigma) \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m};$$

$$R_i(\sigma) \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m};$$

является оптимальным.

**Случай III.**  $\delta > 0$ .

**III.1.** Все приборы завершают работу не раньше директивного срока:

$$C_i(\sigma) \geq d, \quad i = \overline{1, m},$$

или

$$R_i(\sigma) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3)$$

В этом случае расписание, в котором:

$$\Delta_i(\sigma) \in \{0, 1\} \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

является оптимальным.



**ПА.2.** В оптимальном расписании могут иметь место приборы с ненулевым (единичным) резервом. Для сохранения оптимальности расписания, каждый дополнительный ненулевой (единичный) резерв должен быть компенсирован ненулевым (единичным) выступом. При выполнении условий (3)-(4) количество приборов, в которых  $R_i(\sigma) = \Delta_i(\sigma) = 0$ , составляет  $m - \delta$ . Итак, максимально возможное количество приборов с  $R_i(\sigma) = 1$  составляет  $\frac{m - \delta}{2}$ , если разность  $m - \delta$  четная, и  $\left\lfloor \frac{m - \delta}{2} \right\rfloor$ , если эта разность нечетная (здесь:  $\lfloor a \rfloor$  - наибольшее целое, для которого выполняется:  $\lfloor a \rfloor \leq a$ ). При этом максимально возможное количество приборов с  $\Delta_i(\sigma) = 1$  составляет  $\delta + \left\lfloor \frac{m - \delta}{2} \right\rfloor$ .

**Случай ПБ:**  $\delta < 0$ .

**ПБ.1.** Момент завершения всех работ каждым прибором не превышает директивного срока:

$$C_i(\sigma) \leq d, \quad i = \overline{1, m}$$

или

$$\Delta_i(\sigma) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

В этом случае расписание, в котором:

$$R_i(\sigma) \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}$$

является оптимальным (при этом количество приборов с ненулевым резервом составляет  $|\delta|$ ).

**ПБ.2.** В оптимальном расписании могут иметь место приборы с ненулевым (единичным) выступом. Для сохранения оптимальности расписания, каждый дополнительный ненулевой (единичный) выступ должен быть компенсирован ненулевым (единичным) резервом.

**Утверждение 2.** Для произвольного расписания  $\sigma$  выполняется:

$$\sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma) = \sum_{i=1}^m R_i(\sigma) + \delta.$$

**Доказательство.**

Время занятости прибора  $i$ :

$$C_i(\sigma) = d - R_i(\sigma) + \Delta_i(\sigma), \quad i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

С другой стороны, имеем:

$$C_i(\sigma) = \sum_{j \in J_i(\sigma)} p_j. \quad (6)$$

С учетом (6) перепишем (5)

$$\sum_{j \in J_i(\sigma)} p_j = d - R_i(\sigma) + \Delta_i(\sigma). \quad (7)$$

Просуммируем (7) по  $i$ :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j \in J_i(\sigma)} p_j = \sum_{i=1}^m (d - R_i(\sigma) + \Delta_i(\sigma)),$$

$$\sum_{i=1}^n p_j = \sum_{i=1}^m d - \sum_{i=1}^m R_i(\sigma) + \sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma),$$

$$\sum_{i=1}^n p_j = md - \sum_{i=1}^m R_i(\sigma) + \sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma),$$

$$\sum_{i=1}^n p_j - md = \sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma) - \sum_{i=1}^m R_i(\sigma),$$

$$\delta = \sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma) - \sum_{i=1}^m R_i(\sigma),$$

$$\sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma) = \sum_{i=1}^m R_i(\sigma) + \delta.$$

Что и требовалось доказать.

## 6. Перестановки, улучшающие расписания

Оптимизация расписания заключается в последовательном уменьшении величины  $\max_i \{R_i(\sigma), \Delta_i(\sigma)\}$ , этого можно достичь посредством обмена работами между приборами: когда некоторое подмножество работ с прибора  $h$  (обозначим его  $K_h(\sigma)$ ,  $K_h(\sigma) \subseteq J_h(\sigma)$ ) меняется местами с некоторым подмножеством работ с прибора  $s$  (обозначим это подмножество как  $L_s(\sigma)$ ,  $L_s(\sigma) \subseteq J_s(\sigma)$ ). Обозначим через  $\theta$  разность между суммами длительностей работ, которые принимают участие в перестановке:

$$\theta = \sum_{j \in K_h(\sigma)} p_j - \sum_{j \in L_s(\sigma)} p_j.$$

При этом в результате таких перестановок, примененных к расписанию  $\sigma$ , в новом расписании  $\sigma^1$  для величин  $\sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma^1)$  и  $\sum_{i=1}^m R_i(\sigma^1)$  выполняется:

$$\sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma) - \sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma^1) = \sum_{i=1}^m R_i(\sigma) - \sum_{i=1}^m R_i(\sigma^1).$$

Множество перестановок, в зависимости от их последствий, можно разделить на типы:

- уменьшение резерва (выступа) одного прибора за счет уменьшения выступа (резерва) другого (тип  $A$ );
- уменьшение выступа с появлением выступа на другом приборе (тип  $B\Delta$ );
- уменьшение резерва с появлением резерва на другом приборе (тип  $BR$ );
- исключение выступа (резерва) прибора с появлением резерва (выступа) (тип  $B$ );
- перераспределение выступов (тип  $\Gamma\Delta$ );
- перераспределение резервов (тип  $\Gamma R$ ).

В работе [4] были разработаны такие типы перестановок:  $A, B\Delta, B, \Gamma\Delta$ . В процессе работы были определены еще новые типы перестановок, которые детально рассмотрим.

Рассмотрим перестановки типа  $BR$  и  $\Gamma R$ , которые направлены на уменьшение максимального из резервов.

Цель перестановок типа  $BR$ : уменьшение максимального из резервов за счет выступа прибора из множества  $I_\Delta$  (с появлением резерва на этом приборе). В результате перестановок этого типа может увеличиться множество  $I_R$ . Условия выполнения перестановки типа  $BR$ :

$$\theta > 0,$$

$$\theta > \Delta_h(\sigma), \quad (8)$$

$$\theta \leq R_s(\sigma). \quad (9)$$

В результате перестановки получаем расписание  $\sigma^1$ , в котором:

$$R_h(\sigma^1) = \theta - \Delta_h(\sigma),$$

$$R_s(\sigma^1) = R_s(\sigma) - \theta,$$

$$h \in I_R(\sigma^1).$$

Резерв, который был максимальным в  $\sigma$ , уменьшился на  $\theta$ :

$$R_s(\sigma^1) = \max_{i \in I_R(\sigma)} R_i(\sigma) - \theta,$$

но при этом для вновь образованного резерва выполняется:  $R_h(\sigma^1) < R_s(\sigma)$ .

Покажем это:  $R_s(\sigma) - R_h(\sigma^1) = R_s(\sigma) - (\theta - \Delta_h(\sigma)) = R_s(\sigma) + \Delta_h(\sigma) - \theta > 0$ , так как,  $R_s(\sigma) - \theta \geq 0$ ,  $\Delta_h(\sigma) > 0$ . Таким образом, расписание  $\sigma^1$  не хуже, чем расписание  $\sigma$ , а при отсутствии альтернатив при выборе прибора  $s$  – лучше чем  $\sigma$ .

Перестановки типа  $BR$  также разделяются на подтипы в зависимости от количества работ, принимающих участие в перестановке. В таблице 2 приведены характеристики перестановок типа  $BR$ .

Табл.2. Характеристики перестановок типа  $\mathbf{BR}$ 

Тип перестановки	Приборы и работы, которые принимают участие в перестановке		$\theta$ ( $\theta > 0$ )	Условие, при котором выполняется перестановка	Характеристики результирующего расписания $\sigma^1$
	$h$	$s$			
1-1 $\mathbf{BR}$	$h \in I_{\Delta}(\sigma),$ $j_1 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_2 \in J_s(\sigma)$	$p_{j_1} - p_{j_2}$	$\theta > \Delta_h(\sigma),$ $\theta \leq R_s(\sigma)$	$R_h(\sigma^1) = \theta - \Delta_h(\sigma),$ $R_s(\sigma^1) = R_s(\sigma) - \theta$
1-2 $\mathbf{BR}$	$h \in I_{\Delta}(\sigma),$ $j_1 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_2, j_3 \in J_s(\sigma)$	$p_{j_1} - (p_{j_2} + p_{j_3})$		
2-1 $\mathbf{BR}$	$h \in I_{\Delta}(\sigma),$ $j_1, j_2 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_3 \in J_s(\sigma)$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - p_{j_3}$		
2-2 $\mathbf{BR}$	$h \in I_{\Delta}(\sigma),$ $j_1, j_2 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_3, j_4 \in J_s(\sigma)$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - (p_{j_3} + p_{j_4})$		

Множество перестановок типа  $\mathbf{BR}$  приводит к тому, что текущая мощность множества  $I_R$  увеличивается, но при этом величина максимального из резервов уменьшается.

Цель перестановок типа  $\mathbf{GR}$ : уменьшение максимального значения резерва за счет перераспределения резервов между приборами.

Условия выполнения перестановки типа  $\mathbf{GR}$ :

$$\theta > 0,$$

$$\theta \leq R_s(\sigma), \quad (10)$$

$$\theta < R_s(\sigma) - R_h(\sigma). \quad (11)$$

В результате перестановки получаем расписание  $\sigma^1$ , в котором:

$$R_s(\sigma^1) = R_s(\sigma) - \theta,$$

$$R_h(\sigma^1) = R_h(\sigma) + \theta.$$

и при этом для расписания  $\sigma^1$  выполняется:

$$\sum_{i=1}^m R_i(\sigma^1) = \sum_{i=1}^m R_i(\sigma),$$

но

$$\max \{R_h(\sigma^1), R_s(\sigma^1)\} < \max \{R_h(\sigma), R_s(\sigma)\},$$

то есть, расписание  $\sigma^1$  не хуже чем  $\sigma$ .

Перестановки типа  $\Gamma R$  также разделяются на подтипы в зависимости от количества работ, принимающих участие в перестановке. В таблице 3 приведены характеристики перестановок типа  $\Gamma R$ .

Для выбранной пары приборов  $s - h$  в результате перестановок типа  $\Gamma R$  получаем такое уменьшение значения максимального из резервов этих приборов в двух расписаниях:  $R_s(\sigma) - \max \{R_s(\sigma) - \theta, R_h(\sigma) + \theta\}$ .

Табл.3. Характеристики перестановок типа  $\Gamma R$

Тип перестановки	Приборы и работы, которые принимают участие в перестановке		$\theta$ ( $\theta > 0$ )	Условие, при котором выполняется перестановка	Характеристики результирующего расписания $\sigma^1$
	$h$	$s$			
1-1 $\Gamma R$	$h \in I_R(\sigma) \cup I_0(\sigma),$ $j_2 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_1 \in J_s(\sigma)$	$p_{j_1} - p_{j_2}$	$\theta \leq R_s(\sigma),$ $\theta < R_s(\sigma) - R_h(\sigma)$	$R_s(\sigma^1) = R_s(\sigma) - \theta,$ $R_h(\sigma^1) = R_h(\sigma) + \theta$
1-2 $\Gamma R$	$h \in I_R(\sigma) \cup I_0(\sigma),$ $j_2, j_3 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_1 \in J_s(\sigma)$	$p_{j_1} - (p_{j_2} + p_{j_3})$		
2-1 $\Gamma R$	$h \in I_R(\sigma) \cup I_0(\sigma),$ $j_3 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_1, j_2 \in J_s(\sigma)$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - p_{j_3}$		
2-2 $\Gamma R$	$h \in I_R(\sigma) \cup I_0(\sigma),$ $j_1, j_2 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_3, j_4 \in J_s(\sigma)$	$(p_{j_3} + p_{j_4}) - (p_{j_1} + p_{j_2})$		

Разработанное множество перестановок положено в основу ПДС-алгоритма решения задачи, который имеет следующие свойства: полиномиальная составляющая алгоритма (признаки оптимальности и полиномиальный алгоритм, который их проверяет) одновременно является полиномиальной аппроксимацией экспоненциальной составляющей ПДС-алгоритма.

В таблице 4 рассмотрены все возможные соотношения между величинами  $\theta$ ,  $\Delta_h$  и  $R_s$ , а также указаны соответствующие им значения изменения частичной целевой функции (максимального из выступов или резервов приборов  $h$  и  $s$ ).

Табл.4. Сравнение влияния перестановок на значение целевой функции

Условия	Уменьшение значения $\max_{i \in \{h,s\}} \Delta_i$	Уменьшение значения $\max_{i \in \{h,s\}} R_i$	Уменьшение значения $\max_{i \in \{h,s\}} \max \{\Delta_i, R_i\}$
$\theta \leq \Delta_h, \theta \leq R_s$	$\theta$		
$\Delta_h \leq \theta \leq R_s,$ $\theta \leq \left\lfloor \frac{\Delta_h + R_s}{2} \right\rfloor$	$\Delta_h$	$\theta$	$\theta$
$\Delta_h \leq \theta \leq R_s,$ $\theta \geq \left\lfloor \frac{\Delta_h + R_s}{2} \right\rfloor + 1$		$\Delta_h + R_s - \theta$	$\Delta_h + R_s - \theta$
$R_s \leq \theta \leq \Delta_h,$ $\theta \leq \left\lfloor \frac{\Delta_h + R_s}{2} \right\rfloor$	$\theta$	$R_s$	$\theta$
$R_s \leq \theta \leq \Delta_h,$ $\theta \geq \left\lfloor \frac{\Delta_h + R_s}{2} \right\rfloor + 1$	$\Delta_h + R_s - \theta$		$\Delta_h + R_s - \theta$
$\theta \geq \Delta_h, \theta \geq R_s$	$\Delta_h + R_s - \theta$		

### 7. ПДС-алгоритм решения задачи

На основании признаков оптимальности и разработанного множества перестановок построен алгоритм решения задачи.

#### Схема алгоритма

**ШАГ 1** Построить начальное расписание  $\sigma^0, \sigma = \sigma^0$ .

**ШАГ 2** Определить множества  $I_\Delta(\sigma), I_R(\sigma)$  и  $I_0(\sigma)$ .

**ШАГ 3** Проверка выполнения признаков оптимальности

**ЕСЛИ** выполняется один из признаков оптимальности

**ТО** конец,  $\sigma$  – оптимальное расписание.

**ШАГ 4** Определить прибор  $q$ , которому соответствует максимум

$\max_i \{R_i(\sigma), \Delta_i(\sigma)\}$ .

**ШАГ 5** **ЕСЛИ**  $q \in I_\Delta(\sigma)$ , **ТО** перейти на **ШАГ 6**

**ИНАЧЕ** ( $q \in I_R(\sigma)$ ) перейти на **ШАГ 7**.

**ШАГ 6** Для прибора  $h = q$  перебирая все приборы  $s \in I_R(\sigma)$  выполнить перестановку типа **A**, **B** $\Delta$  или **B**.

**ЕСЛИ** таких перестановок не нашлось,

**ТО**

**6.1** Для прибора  $h = q$  перебирая все приборы  $s \in I_0(\sigma) \cup I_\Delta(\sigma)$  выполнить перестановку типа **Г** $\Delta$ .

**6.2** **ЕСЛИ** таких перестановок не нашлось,

**ТО** конец алгоритма,  
**ИНАЧЕ** перейти на **ШАГ 2**.

**ИНАЧЕ** перейти на **ШАГ 2**.

**ШАГ 7** Для прибора  $s=q$  перебирая все приборы  $h \in I_{\Delta}(\sigma)$  выполнить перестановку типа **A**, **BR** или **B**.

**ЕСЛИ** таких перестановок не нашлось,

**ТО**

**7.1** Для прибора  $s=q$  перебирая все приборы  $s \in I_0(\sigma) \cup I_R(\sigma)$  выполнить перестановку типа **GR**.

**7.2 ЕСЛИ** таких перестановок не нашлось,

**ТО** конец алгоритма,

**ИНАЧЕ** перейти на **ШАГ 2**.

**ИНАЧЕ** перейти на **ШАГ 2**.

**КОНЕЦ АЛГОРИТМА**

Возможные варианты реализации **ШАГОВ 6 и 7**:

1) находим первую перестановку, которая улучшает расписание, и выполняем ее;

2) перебираем все допустимые перестановки, находим среди них самую эффективную и выполняем ее.

В работе [3] приведен жадный алгоритм построения расписания  $\sigma^0$ , которое принадлежит классу расписаний  $\Psi$ . Это расписание может быть взято в качестве начального.

Сложность алгоритма составляет  $O(n^4W)$ , где  $W = \sum_{i=1}^n p_i$ . Это объясняется

следующим. На каждом шаге значение целевой функции уменьшается, по меньшей мере на 1. Значит, в худшем случае, алгоритм сделает количество шагов, равное значению суммы выступов и резервов в начальном расписании  $\sigma^0$ . Величина  $W$  является очень грубой верхней оценкой значения

$\sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma^0) + \sum_{i=1}^m R_i(\sigma^0)$ . На каждом шаге самой трудоемкой операцией является

операция поиска допустимых перестановок подтипов 2-2, которая сводится к анализу длительностей всех пар работ двух выбранных приборов (верхняя граница количества пар работ на одном приборе равна  $n(n-1)/2$ , отсюда и  $n^4$ ).

Если же используются только перестановки подтипов 1-1, то сложность алгоритма составляет  $O(n^2W)$ . Отметим также тот факт, что для результирующего расписания  $\sigma$  (для которого не выполняются условия оптимальности) величина

$$\rho = \begin{cases} \max_i \{R_i(\sigma); \Delta_i(\sigma)\}, e. \delta = 0 \\ \max_i \{R_i(\sigma); \Delta_i(\sigma)\} - 1, e. \delta \neq 0 \end{cases}$$

дает величину максимально отклонения от оптимума.

### 8. Пример применения алгоритма

Возьмем для примера задачу, в которой количество приборов  $m = 6$ , количество работ  $n = 14$ , директивный срок  $d = 17$ .

Определим основные расчетные величины алгоритма:  $C^* = 17$ ,  $\delta = 4$ . Так как  $\delta < 0$ , то в процессе применения алгоритма нашим ориентиром является признак оптимальности 2.

Начальное расписание  $\sigma^0$ , построенное по алгоритму A0[1], представлено на рисунке 1.

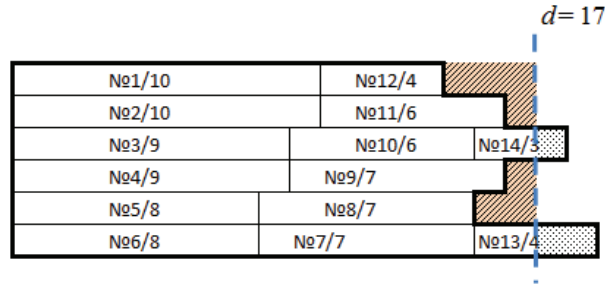


Рис.1 Начальное расписание  $\sigma^0$

*Примечание:* Запись №1/10 означает: №1 – номер работы, /10 – длительность выполнения этой работы.

Для уменьшения количества возможных вариантов перестановок при решении данной задачи будем применять только перестановки подтипа 1-1.

#### Итерация №1

Для начального расписания  $\sigma^0$  имеем:  $C_1 = 14$ ,  $C_2 = 16$ ,  $C_3 = 18$ ,  $C_4 = 16$ ,  $C_5 = 15$ ,  $C_6 = 19$ . Определим множества  $I_0(\sigma)$ ,  $I_\Delta(\sigma)$  и  $I_R(\sigma)$ :

$$I_0(\sigma) = \{0\};$$

$$I_\Delta(\sigma) = \{3; 6\}; \Delta_3(\sigma^0) = 1, \Delta_6(\sigma^0) = 2;$$

$$I_R(\sigma) = \{1; 2; 4; 5\}; R_1(\sigma^0) = 3, R_2(\sigma^0) = 1, R_4(\sigma^0) = 1, R_5(\sigma^0) = 2.$$

Прибор с максимальным отклонением от директивного срока:  $s = 1$  ( $s \in I_R(\sigma)$ ) – прибор с максимальным значением резерва.

Определим прибор  $h \in I_\Delta(\sigma)$  из «противоположного» множества, который имеет максимальное значение выступа:  $h = 6$ .

Определим, каким парам работ приборов 6 и 1 соответствуют допустимые перестановки (перестановки, которые приводят к улучшению расписания). Для этого сначала выделим те пары работ, для которых  $\theta = p_{j_1} - p_{j_2} > 0$  (к ним относятся пары работ 6-12, 7-12). А потом проанализируем, как соотносятся величины  $\theta$ ,  $\Delta_6$  и  $R_1$ , то есть, к какому из типов **A**, **BR**, **BΔ** или **B** относится потенциальная перестановка. В таблице 5 приведены перестановки, которые являются допустимыми для пары приборов 6-1.



Табл.5.Параметры допустимых перестановок для пары приборов 6-1

Пара работ	$\Delta_6$	$R_1$	$\theta$	$\Delta_6 + R_1 - \theta$	Величина улучшения	Тип перестановки
6-12	2	3	4	1	1	<b>B</b>
7-12	2	3	3	2	2	<b>BR</b>

Последствия перестановки пары работ 7-12 лучше, чем пары работ 6-12, поэтому выберем эту перестановку и выполним ее. На рисунке 2 изображено расписание  $\sigma^1$ , полученное в результате этой перестановки.

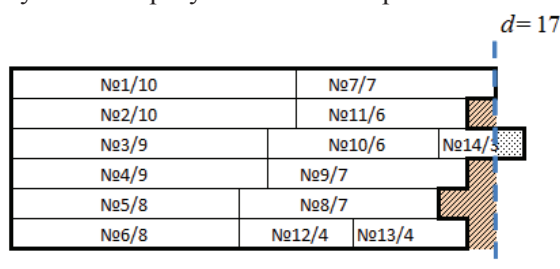


Рис.2 Расписание  $\sigma^1$

Для расписания  $\sigma^1$  не выполняется признак оптимальности 2, продолжаем работу алгоритма.

**Итерация №2**

Для расписания  $\sigma^1$  имеем:  $C_1 = 17, C_2 = 16, C_3 = 18, C_4 = 16, C_5 = 15, C_6 = 16$ . Определим множества  $I_0(\sigma), I_\Delta(\sigma)$  и  $I_R(\sigma)$ :

$I_0(\sigma) = \{1\};$

$I_\Delta(\sigma) = \{3\}; \Delta_3(\sigma^1) = 1;$

$I_R(\sigma) = \{2; 4; 5; 6\}; R_2(\sigma^1) = 1, R_4(\sigma^1) = 1, R_5(\sigma^1) = 2, R_6(\sigma^1) = 1.$

Прибор с максимальным отклонением от директивного срока:  $s = 5$  ( $s \in I_R(\sigma)$ ) – прибор с максимальным значением резерва.

Определим прибор  $h \in I_\Delta(\sigma)$  из «противоположного» множества, который имеет максимальное значение выступа:  $h = 3$ .

В таблице 6 приведены перестановки, которые являются допустимыми для пары приборов 3-5.

Табл.6.Параметры допустимых перестановок для пары приборов 3-5

Пара работ	$\Delta_3$	$R_5$	$\theta$	$\Delta_3 + R_5 - \theta$	Величина улучшения	Тип перестановки
3-5	1	2	1	2	1	<b>A</b>
3-8	1	2	2	1	1	<b>BR</b>

Последствия этих двух перестановок одинаковы, выберем первую из них и выполним ее. На рисунке 3 изображено расписание  $\sigma^2$ , полученное в результате этой перестановки.

№1/10	№7/7	
№2/10	№11/6	
№5/8	№10/6	№14/3
№4/9	№9/7	
№3/9	№8/7	
№6/8	№12/4	№13/4

Рис.3 Расписание  $\sigma^2$ 

Полученное расписание является оптимальным. Конец алгоритма.

### 9. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Исследованы свойства задачи составления допустимого расписания выполнения работ параллельными приборами с целью минимизации максимального отклонения от директивного срока моментов завершения приборами всех работ. Применяя методологию построения ПДС-алгоритмов, разработаны достаточные признаки оптимальности расписаний. На основе этих признаков определено множество перестановок, которые позволяют последовательно улучшать значение критерия. Разработана полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма решения задачи. Приведен пример применения алгоритма.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Senthil Kumar, Selladarui V., Raja K., Eleganova K. Ant Colony Approach for Makespan Minimization on Unrelated Parallel Machines: International Journal of Engineering Science & Technology, 2012, Volume 3, Issue 6.
2. Vairam S., Selladurai V. Permutation genetic algorithm based encoding method for parallel machine scheduling and balancing. AppliedMechanics&Materials, 2014, Issue 573, p. 368.
3. Поліноміальна складова ПДС-алгоритму розв'язання однієї задачі теорії розкладів / О. А. Павлов, О. Г. Жданова, О. Б. Місюра, М. О. Сперкач // Технологический аудит и резервы производства, 2013. — № 6/3 (14). — С.47—52.
4. Павлов О. А. Задача складання розкладу виконання завдань паралельними приладами з метою мінімізації максимуму відхилення від директивного терміну моментів завершення приладами усіх завдань / О. А. Павлов, М. О. Сперкач, О. Г. Жданова // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія «Технічні науки». — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — 2014. — Вип. 10. — с. 148–158.

УДК 519.85

## Верхняя оценка числа локальных максимумов в задаче максимизации нормы вектора на выпуклом множестве

А. И. Косолап, Ю.В. Черноусова

*Украинский государственный химико-технологический университет, Украина*

В работе рассмотрены многоэкстремальные задачи нелинейной оптимизации. Эти задачи преобразуются методом точной квадратичной регуляризации к одноэкстремальным либо к максимуму нормы вектора на выпуклом множестве. При таком преобразовании число локальных экстремумов значительно сокращается, что упрощает решение исходной задачи. Найдена оценка сверху числа различных локальных экстремумов преобразованной многоэкстремальной задачи.

*Ключевые слова:* многоэкстремальные задачи, точная квадратичная регуляризация.

В роботі розглянуті багатоекстремальні задачі нелінійної оптимізації. Ці задачі перетворюються методом точної квадратичної регуляризації до одноекстремальних або до максимуму норми вектора на опуклій множині. При такому перетворенні число локальних екстремумів значно скорочується, що спрощує розв'язок початкової задачі. Знайдена оцінка зверху числа різних локальних екстремумів перетвореної багатоекстремальної задачі.

*Ключові слова:* багатоекстремальні задачі, точна квадратична регуляризація

In this paper we consider the multi-extremal problems of nonlinear optimization. By the exact quadratic regularization, these problems are converted to those that are one-extremal or the problem of vector norm maximum on a convex set. Under this transformation, the number of local extrema is greatly reduced that simplifies the original problem solution. We have found an upper bound for the number of different local extrema in the transformed multi-extremal problem.

*Key words:* multi-extremal problems, the exact quadratic regularization

### 1. Введение

Моделирование сложных систем приводит к большому количеству многоэкстремальных задач, которые относятся к классу NP-полных. Число локальных экстремумов в таких задачах часто равно  $2^n$ ,  $n!$  и более [1]. В настоящее время разработаны детерминированные и стохастические методы для решения многоэкстремальных задач [2–4]. Детерминированные методы позволяют находить решения только для задач малой размерности. С увеличением размерности время решения задачи растет экспоненциально. Стохастические методы позволяют находить решение многоэкстремальной задачи только с некоторой вероятностью. Как показывают многочисленные эксперименты на тестовых задачах, стохастические методы иногда позволяют находить решения близкие к оптимальным, однако в большинстве случаев эти решения далеки от оптимальных [5].

Для решения многоэкстремальных задач эффективным является поиск преобразований, при которых преобразованная задача будет иметь только один или небольшое число локальных экстремумов. С помощью полуопределенной релаксации общие квадратичные и полиномиальные задачи преобразуются к одноэкстремальным. Однако, в общем случае, полуопределенная релаксация позволяет находить только оценки оптимальных решений [1].

В работе используется точная квадратичная регуляризация, которая позволяет преобразовывать многоэкстремальные задачи к одноэкстремальным либо к задаче максимизации нормы вектора на выпуклом множестве [3].

## 2. Метод точной квадратичной регуляризации

Рассмотрим задачу глобальной оптимизации

$$\min \left\{ f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, x \in E^n \right\} \quad (1)$$

где все  $f_i(x)$  – дважды дифференцируемые функции,  $E^n$  – евклидово пространство. Допустим, что решение задачи (1) существует. Для этого достаточно чтобы функция  $f_0(x)$  была непрерывна, а допустимое множество задачи (1) было компактно. Введем новую переменную  $x_{n+1}$  и сведем задачу (1) к виду

$$\min \left\{ x_{n+1} \mid f_0(x) + s \leq x_{n+1}, f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, x \in E^n \right\}, \quad (2)$$

где значение параметра  $s$  выбираем таким, чтобы

$$f_0(x^*) + s \geq \|x^*\|^2 \quad (3)$$

$x^*$  – решение задачи (1).

Если глобальный минимум задачи (1) достигается на множестве точек, то достаточно найти только одну точку глобального минимума. Поэтому для определения параметра  $s$  можно выбрать минимальное значение  $\|x^*\|^2$ . Например, в задаче  $\{-x_1 \mid 2 \leq x_1 \leq 6\}$  имеем  $s \geq 42$ .

Далее, используем преобразование пространства  $x = Az$ , где матрица  $A$  порядка  $(n+1) \times (n+1)$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n+1} \end{pmatrix},$$

что сводит задачу (2) к следующей:

$$\min \left\{ \|z\|^2 \mid f_0(\bar{z}) + s \leq \|z\|^2, f_i(\bar{z}) \leq 0, i = 1, \dots, m, z \in E^n \right\}, \quad (4)$$

где  $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $z = (\bar{z}, z_{n+1})$ .

Существует такое значение  $r > 0$ , что все функции

$$g_0(z) = f_0(\bar{z}) + s + (r-1)\|z\|^2, g_i(z) = f_i(\bar{z}) + r\|z\|^2, i = 1, \dots, m$$

будут выпуклыми для допустимых значений  $z$ . Действительно, при соответствующем выборе параметра  $r > 0$ , гессианы функций  $g_0(z)$  и  $g_i(z)$ ,  $i=1, \dots, m$  будут положительно определенными матрицами (матрицы с преобладающей главной диагональю). Если среди  $f_i(\bar{z})$ ,  $i=1, \dots, m$  есть выпуклые функции, то эти ограничения остаются неизменными.

Таким образом, задача (4) сведена к следующей:

$$\min \left\{ \|z\|^2 \mid g_i(z) \leq d, i = 0, \dots, m, r\|z\|^2 = d \right\} \quad (5)$$

где все  $g_i(z)$  выпуклые функции.

Следовательно, задача (1) преобразована к минимизации квадрата нормы вектора  $z$ , где переменными задачи (5) есть  $(z, d) - (n+2)$ -мерный вектор. Докажем следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $(z^0, d_0)$  – решение задачи (5) и для параметра  $s$  выполняется условие (3), тогда  $x^* = \bar{z}^0$  – решение задачи (1).

*Доказательство.* Имеем

$$f_0(\bar{z}^0) + s + (r-1)\|z^0\|^2 \leq d_0,$$

$$f_i(\bar{z}^0) + r\|z^0\|^2 \leq d_0, i = 1, \dots, m$$

с учетом  $r\|z^0\|^2 = d_0$ , получим

$$f_0(\bar{z}^0) + s \leq \|z^0\|^2, f_i(\bar{z}^0) \leq 0, i = 1, \dots, m$$

Первое ограничение равносильно  $f_0(\bar{z}^0) + s \leq \|z^0\|^2$  ( $z_{n+1}^0 = 0$ ) или

$f_0(\bar{z}^0) + s = \|z^0\|^2$ . Пусть  $z^*$  – решение задачи (1) и  $z_{n+1}^* = f_0(\bar{z}^*) + s$ ,  $d^* = r\|z^*\|^2$

( $f_0(\bar{z}^*) + s = \|z^*\|^2$ ). Тогда из условий

$$f_0(\bar{z}^0) + s \leq \|z^0\|^2,$$

$$f_0(\bar{z}^*) + s \leq \|z^*\|^2$$

и  $\|z^0\|^2 \leq \|z^*\|^2$  следует  $f_0(\bar{z}^*) \geq f_0(\bar{z}^0)$ , откуда  $f_0(\bar{z}^*) = f_0(\bar{z}^0)$ .

Аналогично, из условий

$$f_0(\bar{z}^0) + s = \|z^0\|^2,$$

$$f_0(\bar{z}^*) + s = \|z^*\|^2$$

и  $\|z^0\|^2 \leq \|z^*\|^2$  будет  $f_0(\bar{z}^*) \geq f_0(\bar{z}^0)$ , откуда снова  $f_0(\bar{z}^*) = f_0(\bar{z}^0)$ .

Теорема доказана.

**Следствие.** Первое ограничение задачи (4) активно в точке глобального минимума.

Из  $f_0(\bar{z}^*) + s = \|z^*\|^2$  и (3) имеем  $f_0(\bar{z}^*) + s = \|z^*\|^2$ .

Введем обозначения

$$S_1(d) = \{z | g_i(z) \leq d, i = 0, \dots, m\} \text{ и } S_2(d) = \{z | r\|z\|^2 \leq d\}.$$

Множества  $S_1(d)$  и  $S_2(d)$  будут выпуклыми и определяют допустимое множество задачи (5). Справедливо следующее включение  $S_1(d) \subset S_1(d + \Delta)$ ,  $S_1(d) \subset S_2(d + \Delta)$  для любого  $\Delta > 0$ , что следует из выпуклости множеств  $S_1(d)$  и  $S_2(d)$ . Анализ расположения этих множеств в пространстве позволяет разбить исходную задачу (1) на два класса сложности. Задачи первого класса будут одноэкстремальными, а второго, в общем случае, многоэкстремальными.

Пусть  $d_0$  – минимальное значение  $d$ , для которого множество  $S_1(d_0) \neq \emptyset$ . Нахождение  $d_0$  равнозначно решению выпуклой задачи

$$\min \{d | g_i(z) \leq d, i = 1, \dots, m\}.$$

Найдем  $d_m = \max\{0, d_0\}$ .

Покажем, что сложность решения задачи (5) зависит от взаимного расположения множеств  $S_1(d_m)$  и  $S_2(d_m)$  в пространстве.

1. Если  $S_1(d_m) \cap \text{int } S_2(d_m) = \emptyset$  или  $S_1(0) \neq \emptyset$ , то задача (5) эквивалентна выпуклой задаче

$$\min \left\{ d \mid g_i(z) \leq d, i = 0, \dots, m, r\|z\|^2 \leq d \right\}, \quad (6)$$

которая эффективно решается методом локальной оптимизации (прямо-двойственным методом внутренней точки PDIPM) [6]. Если  $(z^*, d^*)$  – решение задачи (6), то  $x^* = \bar{z}^*$  – точка глобального минимума задачи (1) (при выполнении условия  $S_1(0) \neq \emptyset$  решение задачи (1) – тривиально  $x^* = 0$ ). Решение задачи (6) эквивалентно нахождению точки соприкосновения двух выпуклых множеств при минимальном значении  $d$ . Очевидно, что точка соприкосновения будет

допустимой для задачи (5) и в этой точке достигается минимальное значение  $\|z\|^2$ .

2. Если  $S_1(d_m) \cap \text{int } S_2(d_m) \neq \emptyset$  то задача (5) эквивалентна задаче максимизации квадрата нормы вектора

$$\max \left\{ \|z\|^2 \mid g_i(z) \leq d, i = 0, \dots, m, r\|z\|^2 \leq d \right\}. \quad (7)$$

В задаче (7) необходимо найти минимальное значение  $d$ , при котором множество  $S_1(d)$  касается границы множеств  $S_2(d)$  изнутри. При меньших значениях  $d$  допустимое множество задачи (5) будет пустым.

Таким образом, если в точке локального минимума  $(z^*, d^*)$  задачи (6)  $r\|z^*\|^2 = d^*$ , то соответствующая задача (1) относится к первому классу сложности, иначе – ко второму.

**Теорема 2.** Пусть  $(z^*, d^*)$  – решение задачи (6) и  $r\|z^*\|^2 = d^*$  тогда  $x^* = \bar{z}^*$

– точка глобального минимума задачи (1).

*Доказательство.* Задача (1) эквивалентна задаче (5). Покажем, что  $(z^*, d^*)$  – решение задачи (5). Допустим противное, что существует  $(z^0, d_0)$  с меньшим значением  $\|z^0\|^2 < \|z^*\|^2$ . Если  $r\|z^0\|^2 = d_0$ , то  $d_0 < d^*$ , но это невозможно, так как задача (6) выпуклая. Тогда  $r\|z^0\|^2 < d_0$ , но это противоречит условию теоремы.

Теорема показывает, что задачи второго класса сложности также могут быть решением выпуклой задачи (6), если выполняются условия теоремы 9.

Преобразуем задачу глобальной оптимизации (1) так, чтобы ее переменные принимали значения  $x \geq 0$ . Если ограничения на переменные задачи (1) заданы двухсторонними ограничениями  $a_i \leq x_i \leq b_i$ , то замена  $x_i = x_i - a_i$  переводит поиск глобального минимума в положительный ортант. Можно также представить переменные в виде разности двух положительных переменных  $x_i = x_i^+ - x_i^-$ , где  $x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$ . После выполнения вышеуказанных преобразований, задача (7) будет иметь вид

$$\max \left\{ \|x\|^2 \mid g_i(x) \leq d, i = 0, \dots, m, x \geq 0, r\|x\|^2 = d \right\} \quad (8)$$

Задачу (8) будем решать следующим образом. Фиксируем значение переменной  $d$  и находим решение  $x^*$  задачи

$$\max \left\{ \|x\|^2 \mid g_i(x) \leq d, i = 0, \dots, m, x \geq 0 \right\} \quad (9)$$

Если  $r\|x^*\|^2 = d$ , то задача (8) решена, и  $x^*$  – ее решение, иначе найдем отрезок  $[d_{\min}, d_{\max}]$  для переменной  $d$ . Достаточно взять  $d_{\min} = d_m$ , а  $d_{\max}$  определить, решая последовательность задач (9) методом локальной максимизации PDIPM [6] для  $d = d_m + kh$ , где  $h$  – величина шага,  $k=1, \dots$ . Тогда  $d_{\max}$  находим на интервале  $[d_m + (k_0 - 1)h, d_m + k_0h]$  методом дихотомии, решая задачу (9) до достижения равенства  $r\|x\|^2 = d_{\max}$ . Заметим, что при увеличении  $d$  значение  $\|x\|^2$  монотонно возрастает, что упрощает поиск  $d_{\max}$ .

### 3. Верхняя оценка числа локальных максимумов

Задача (9) многоэкстремальна, но в некоторых частных случаях ее решение сводится к одноэкстремальной. Это будет тогда, когда допустимое выпуклое множество является вписанным в шар (с центром в точке  $c$ ) выпуклым многогранником. Многогранник вписан в шар, если все его вершины принадлежат шару. В таком случае, замена целевой функции в задаче (5) на линейную  $c^T x$  преобразует ее к одноэкстремальной задаче линейного программирования. Если решение соответствующей задачи линейного программирования достигается на границе шара, то это решение совпадает с решением задачи (5). Это утверждение справедливо и для произвольного выпуклого множества.

В общем случае, найдем верхнюю оценку числа локальных максимумов преобразованной задачи (5). Будем различать два локальных максимума  $x^1$  и  $x^2$  задачи (5), если

$$\left| \|x^1\|^2 - \|x^2\|^2 \right| \geq \mu. \quad (10)$$

Таким образом, нас интересуют локальные максимумы с различными значениями целевой функции. Справедливо следующее утверждение.

**Лемма.** Пусть  $x^1$  и  $x^2$  – два соседних локальных максимума задачи (5), для которых условие (10) выполняется, тогда треугольник  $Ox^1x^2$  не содержит точек локального максимума задачи (5).

*Доказательство.* Точки  $x^1$  и  $x^2$  принадлежат поверхностям шаров с радиусами  $d/r$  и  $d/r - \mu$  соответственно (см. рис. 1). Допустим противное, что треугольник  $Ox^1x^2$  содержит точку максимума  $x^0$ . Тогда прямая, проходящая через точки  $x^1$  и  $x^0$  будет секущей шара радиуса  $d/r - \mu$ . Так как точки  $x^1$  и  $x^0$  допустимы для задачи (5), то допустимым будут и точки отрезка  $[x^1, x^2]$  (допустимое множество задачи (5) выпуклое). Но тогда вдоль этого отрезка значение целевой функции задачи (5) возрастает и точка  $x^0$  не может быть точкой локального максимума задачи (5). Лемма доказана.

**Теорема 3.** Количество локальных максимумов в задаче максимизации нормы на выпуклом множестве (5) не превосходит числа  $k$ , которое удовлетворяет следующему неравенству



$$\sum_{i=1}^k \arccos\left(\frac{d/r - i\mu}{d/r}\right) \leq \frac{\pi}{2}. \quad (11)$$

*Доказательство.* Сначала проведем доказательство для двумерного случая (рис. 1).

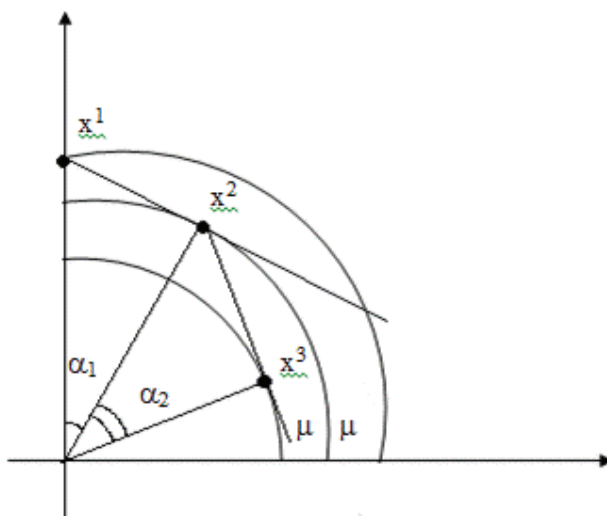


Рис. 1. Точки локальных максимумов

На окружности радиуса  $d/r$  берем точку локального максимума  $x^1$  и через нее проведем касательную к окружности радиуса  $d/r - \mu$ . Касание будет в точке  $x^2$ . Два соседних локальных максимума  $x^1$  и  $x^2$  образуют угол  $\alpha_1$ , равный

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{d/r - \mu}{d/r}\right).$$

Следующие два локальных максимума  $x^2$  и  $x^3$  образуют угол  $\alpha_2$

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{d/r - 2\mu}{d/r}\right).$$

Тогда сумма всех углов, которые образуют все соседние локальные максимумы задачи (5) удовлетворяет неравенству (11).

Рассмотрим теперь  $n$ -мерный случай. Допустим противное, что углы образованные соседними локальными максимумами  $x^1, z^2$  и  $z^2, z^3$  меньше, чем угол, образованный  $x^1, x^3$ . Тогда точка  $z^3$  попадает в один из треугольников  $Ox^1x^2$  или  $Ox^2x^3$  (точки  $x^2, x^3$  всегда можно выбрать таким образом, чтобы точки  $x^1, x^2, x^3, z^3$  лежали в одной плоскости). Но, в соответствии с леммой, точка  $z^3$  не может быть локальным максимумом. Полученное противоречие доказывает теорему.

Значение  $k$  из неравенства (11) можно определить только численно. Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Табл. 1. Количество локальных максимумов задачи (9)

$d/r$	$\Delta$	$k$
5	0,2	3
10	0,1	6
10	0,001	48
25	0,005	23
100	0,1	13
100	0,5	7
500	0,2	18
1000	0,1	29
10000	0,1	105

Эти результаты показывают, что число локальных максимумов в задаче (5) является небольшим.

#### 4. Выводы и направления дальнейших исследований

Рассмотрена общая задача нелинейной оптимизации. С помощью метода точной квадратичной регуляризации она преобразована к максимизации нормы вектора на выпуклом множестве. Показано, что такое преобразование позволяет существенно сократить число локальных экстремумов исходной задачи, что упрощает решение преобразованной задачи локальными методами. В работе получена верхняя оценка числа максимумов. При определенных условиях число максимумов будет равно единице. Это предмет для дальнейших исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Косолап А. И. Методы глобальной оптимизации / А. И. Косолап. – Днепропетровск: Наука и образование, 2013. – 316 с.
2. Horst R., Tuy H. Global Optimization: Deterministic Approaches, 3rd ed. – Springer-Verlag, Berlin, 1996. – 726 p.
3. Floudas C. A., Gounaris C. E. A review of recent advances in global optimization // J. Glob. Optim. – 2009. – v. 45, no. 1. – P. 3–38.
4. Kenneth V.P., Storn R.M., Lampinen J.A. Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 542 p.
5. Cagnina L. C. Solving constrained optimization problems with a hybrid particle swarm optimization algorithm / L. C. Cagnina, S. C. Esquivel, C. A Coello // Engineering Optimization, v. 43, No. 8, 2011. – P. 843–866.
6. Nocedal, J., Wright S.J. Numerical optimization. – Springer, 2006. – 685 p.

УДК 519.6, 537.5

## Анализ модели системы «релятивистский электронный пучок–плазма»

В. М. Куклин, А. В. Приймак

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

Рассмотрен многомодовый режим взаимодействия релятивистского и нерелятивистского пучков электронов с плазмой. Обсуждается влияние поглощения энергии колебаний в системе на характеристики интегрального поля. Основное внимание уделено спектральным и амплитудным характеристикам поля ленгмюровских колебаний в плазме, для чего разработана традиционная математическая модель и разработаны методы диагностики протекающих процессов. Найдены оптимальные условия отбора энергии электронного пучка, определены спектральные характеристики возбуждаемых в плазме ленгмюровских колебаний. Найдены захваченные полем частицы пучка.

**Ключевые слова:** модель пучка электронов в плазме, анализ спектра, спектральные характеристики колебаний, диссипативные режимы процесса.

Розглянуто багатомодовий режим взаємодії релятивістського і нерелятивістського пучків електронів з плазмою. Обговорюється вплив поглинання енергії коливань в системі на характеристики інтегрального поля. Основну увагу приділено спектральним і амплітудним характеристикам поля ленгмюровських коливань в плазмі, для чого розвинена традиційна математична модель та розроблено методи діагностики процесів. Знайдено оптимальні умови відбору енергії електронного пучка, визначені спектральні характеристики ленгмюровських коливань в плазмі. Знайдені захоплені полем частинки пучка.

**Ключові слова:** модель пучка електронів в плазмі, аналіз спектру, спектральні характеристики коливань, дисипативні режими процесу.

The paper considers the multimode regime of interaction between relativistic and nonrelativistic electron beam with plasma. We discuss the effect of oscillations energy absorbed by the system on integral field characteristics. We have focused on the spectral and amplitude characteristics of field of Langmuir oscillations in plasma. We have improved the mathematical model and developed the diagnostic methods of the processes. We have evaluated the optimal withdrawal of electron beam energy and obtained the spectral characteristics of Langmuir oscillations in plasma. Also we can detect the beam particles trapped by field.

**Keywords:** the model of electron beam in plasma, the analysis of spectrum, the spectral characteristics of oscillations, the dissipative regimes of process.

### 1 Введение

Возбуждаемые пучком в плазме интенсивные колебания могут достигать значительных амплитуд. Использование таких колебаний представляет интерес для целей генерации и усиления [1–5], а также для нагрева плазменных электронов и ионов в условиях развития модуляционных неустойчивостей [6–14]. Для генерации полезен именно одномодовый режим возбуждения, когда пространственный спектр возбуждаемых колебаний достаточно узкий, поэтому основные усилия по изучению пучково–плазменных взаимодействий были ориентированы на исследования именно таких режимов. В одномодовом режиме генерации имеет место значительная амплитудная и фазовая модуляция

возбуждаемых длинноволновых ленгмюровских колебаний [3]. Эта модуляция способна привести к подавлению множества вторичных неустойчивостей [4].

Но в реальности развивается многомодовый режим генерации, возбуждаемые волновые пакеты имеют определенную спектральную ширину. Наблюдается также сдвиг частоты ленгмюровских колебаний, возбуждаемых в плазме. Характеристики таких режимов неустойчивости, в особенности в условиях конечного поглощения энергии, важны для выяснения возможностей использовать их для нагрева плазмы и для выбора рациональных рабочих точек генераторов и усилителей.

Целью работы является развитие традиционной модели описания и диагностики многомодовых диссипативных режимов взаимодействия пучков электронов с плазмой. Кроме последствий развития неустойчивости нерелятивистского пучка электронов [15], будут рассмотрены характеристики возбуждаемых полей и состояние релятивистского пучка электронов. Основное внимание будет уделено процессам модуляции пучка, выяснению характера ленгмюровского поля в плазме, определению его спектральных характеристик, сравнению поведения релятивистского и нерелятивистского пучков. Представляют интерес диагностические методы представления ленгмюровских колебаний, спектральных характеристик и вида пространственно-временной модуляции поля.

## 2 Модель системы «релятивистский электронный пучок–плазма»

Математическая одномерная модель системы «релятивистский электронный пучок–плазма» изложена далее (физическая модель обсуждается в работе [15]).

Уравнения для амплитуды  $A_{0p}$  и фазы  $\varphi_{0p}$  мод спектра:

$$\frac{1}{p} \frac{\partial A_{0p}}{\partial \tau} + \Theta \frac{A_{0p}}{p} = -R_{0p} \int_{-1/2}^{1/2} (1 + V_b / V_{0b}) \sin(2\pi p \zeta_b - \varphi_{0p}) d\zeta_0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi_{0p}}{\partial \tau} + \Delta_p = R_{0p} \frac{p}{A_{0p}} \int_{-1/2}^{1/2} (1 + V_b / V_{0b}) \cos(2\pi p \zeta_b - \varphi_{0p}) d\zeta_0, \quad (2)$$

где  $R_{0p} = \frac{2\gamma_{b0}^3}{p_0} \frac{p^2}{p^2 + p_0^2} G$ ,  $G = 1$ ,  $V_{0b} = \frac{\omega_{pe}}{\delta} \frac{1}{2\pi p_0}$ ,  $\Delta_p = \frac{\omega_{pe}}{\delta} \frac{p}{p_0} \frac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2}$ . Выбор

отношения  $\omega_{pe} / \delta = 29.4$  определяется характерным временем развития модуляционной неустойчивости в холодной плазме, рассмотренной в работе [14], с перспективой дальнейшего использования данной модели описания для режимов не только в условиях линейной диссипации, но и в режимах нелинейного поглощения.

Амплитуда  $a_0$  и фаза  $\phi_0$  возбуждаемых пучком электронов длинноволновых ленгмюровских колебаний в фиксированной точке в лабораторной системе отсчета:

$$a_0 = p_0 \left( \frac{\delta}{\omega_{pe}} \right)^2 \sqrt{ \left[ \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \cos(\varphi'_{0p}) \right]^2 + \left[ \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \sin(\varphi'_{0p}) \right]^2 }, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial \tau} = & \{ \cos(\phi_0) \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \left[ \frac{\partial A_{0p}}{\partial \tau} \frac{1}{p} \sin(\varphi'_{0p}) + \frac{A_{0p}}{p} \cos(\varphi'_{0p}) \frac{\partial \varphi'_{0p}}{\partial \tau} \right] - \\ & - \sin(\phi_0) \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \left[ \frac{\partial A_{0p}}{\partial \tau} \frac{1}{p} \cos(\varphi'_{0p}) - \frac{A_{0p}}{p} \sin(\varphi'_{0p}) \frac{\partial \varphi'_{0p}}{\partial \tau} \right] \} / \\ & / \sqrt{ \left[ \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \cos(\varphi'_{0p}) \right]^2 + \left[ \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \sin(\varphi'_{0p}) \right]^2 }, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varphi'_{0p} = \varphi_{0p} + \frac{\omega_{pe}}{\delta} \frac{(p - p_0)\tau}{p_0}$ .

Уравнения движения частиц, моделирующих пучок:

$$\frac{d\zeta_b}{d\tau} = V_b, \quad (5)$$

$$\frac{dV_b}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\gamma_b^3} \sum_{p=1}^P \frac{A_{0p}}{p} \sin(2\pi p \zeta_b - \varphi_{0p}), \quad (6)$$

причем  $\gamma_b = \gamma_b(\tau) = [1 - V_b^2(1 + \frac{V_b}{V_{0b}})^2 / C^2]^{-1/2}$ ,  $C = \frac{1}{2\pi p_0} \frac{\omega_{pe}}{\delta} \frac{1}{\beta_0}$ ,  $\beta_0 = (1 - \gamma_{b0}^{-2})^{1/2}$ .

Поле в системе покоя пучка имеет вид

$$\begin{aligned} E(\zeta_{0b}) = & \{ \left[ \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \cos(2\pi p \zeta_{0b} + \varphi_{0p}) \right]^2 + \\ & + \left[ \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \sin(2\pi p \zeta_{0b} + \varphi_{0p}) \right]^2 \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений (1)–(7) описывает возбуждение пучком электронов длинноволновых колебаний, и в этих условиях выполняется соотношение, представляющее собой интеграл системы уравнений (1)–(7)

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^P \frac{p^2 + p_0^2}{8\pi p^2} \left( \frac{A_{0p}^2}{p^2} + 2\Theta \sum_0^\tau \frac{A_{0p}^2}{p^2} \partial \tau \right) + \\ + 2\pi C^2 \gamma_{b0}^3 \frac{\delta}{\omega_{pe}} G \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N (\gamma_b - \gamma_{b0}) = const. \end{aligned} \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что интеграл (8) – это закон сохранения энергии в системе «релятивистский электронный пучок – линейная по возмущениям плазма». Первое слагаемое в (8) отвечает за плотность энергии поля продольных колебаний в текущий момент, второе – за энергию, потерянную за счет диссипативных механизмов поглощения энергии колебаний в плазме (столкновительная диссипация) в единице объема, третье – определяет энергию, потерянную частицами пучка в единице объема.

Для определения степени синхронности изменения средней скорости пучка и фазовой скорости резонансной моды с номером  $P = P_0$  можно ввести критерий синхронизации

$$CIN = \frac{2\pi p_0}{\partial \phi_0 / \partial \tau} \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N V_b, \quad (9)$$

а также среднюю скорость, среднеквадратичное отклонение скорости от ее среднего значения и среднее значение релятивистского фактора, то есть

$$\bar{V} = \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N V_b, \quad V_\sigma = \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N \sqrt{(V_b - \bar{V})^2}, \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N \gamma_b. \quad (10)$$

### 3 Постановка задачи и начальные условия

Для выполнения цели работы проводится численный эксперимент на графическом процессоре с использованием технологии compute unified device architecture (CUDA). Численный эксперимент представляет собой решение задачи Коши методом Эйлера.

Вначале выполняется расчет средних значений полуширины спектра  $\frac{A_{0p}}{P}$  для нерелятивистского и релятивистского пучков при различных значениях поглощения  $\Theta$  в системе. Из средних значений полуширины спектра будут определены значения  $p_{\min}, p_{\max}$  (как показано далее) и численный эксперимент будет повторен.

Далее будут определены амплитуда и фаза ленгмюровских колебаний, характеристики интегрального поля для нерелятивистского и релятивистского пучков. На распределении частиц по скоростям необходимо найти горб захваченных частиц и показать его эволюцию во времени.

В настоящей работе для нерелятивистского пучка значение  $\gamma_{b0} = 1.6$  взято из [15], а для релятивистского пучка выбрано значение  $\gamma_{b0} = 10$ . При  $\gamma_{b0} > 10$  интеграл системы уравнений (8) начинает нарушаться, что требует, видимо, другой формы представления данных в уравнениях для крупных частиц (масштаб изменений скорости с ростом  $\gamma_{b0}$  быстро уменьшается).

Поглощение в системе для нерелятивистского пучка изменяется в диапазоне  $\Theta = [0; 7]$ , а для релятивистского пучка – в диапазоне  $\Theta = [0; 1]$ . При поглощении  $\Theta > 1$  для релятивистского пучка результаты начинают нарушаться также из-за указанного выше возрастающего несогласования масштабов изменения переменных на одном шаге расчета.

Число мод спектра увеличено до  $P = 150$ , в отличие от  $P = 35$  в работе [15]. Значение  $p_0 = 100$ . Число частиц пучка  $N = 50 \cdot P = 7500$ . Частицы равномерно распределены в начальный момент времени на интервале  $-0.5 < \zeta_b < 0.5$ , скорости частиц  $V_b|_{\tau=0} = 0$ .

Начальные значения  $\frac{A_{0p}}{p}|_{\tau=0} = 10^{-5}$ ,  $\varphi_{0p}|_{\tau=0} \in [0; 2\pi]$  – случайное число,

$$a_0|_{\tau=0} = p_0 \left(\frac{\delta}{\omega_{pe}}\right)^2 \sqrt{\left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \cos(\varphi_{0p}')\right]^2 + \left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \sin(\varphi_{0p}')\right]^2}, \quad \phi_0|_{\tau=0} = 0.$$

Точность вычислений контролируется сохранением значения интеграла системы уравнений (8).

#### 4 Результаты численного эксперимента

При решении системы уравнений (1)–(7) определим характер изменения плотности энергии колебаний, возбуждаемых пучком, то есть первое слагаемое интеграла системы (8)

$$\sum_{p=1}^P \left( \frac{p^2 + p_0^2}{8\pi p^2} \frac{A_{0p}^2}{p^2} \right) \tag{11}$$

для разных значений уровня поглощения, а также динамику потерь энергии нерелятивистского  $\gamma_{b0} = 1.6$  пучка (третье слагаемое интеграла (8))

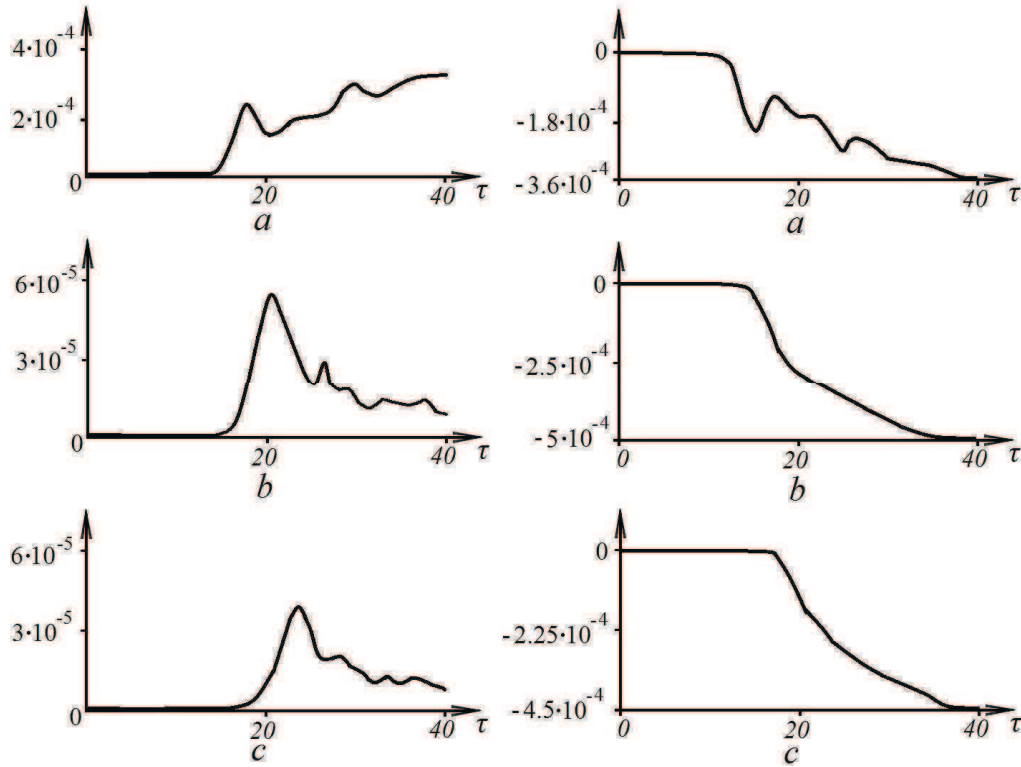


Рис.1. Поведение энергии поля (слева) и потерь энергии пучка (справа) соответствующих слагаемых (8) от времени для нерелятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 1.6$  ( $a - \Theta = 0$ ,  $b - \Theta = 0.5$ ,  $c - \Theta = 1$ )

Аналогічно можна привести динаміку пучкової неустойчивості релятивістського пучка ( $\gamma_{b0} = 10$ ):

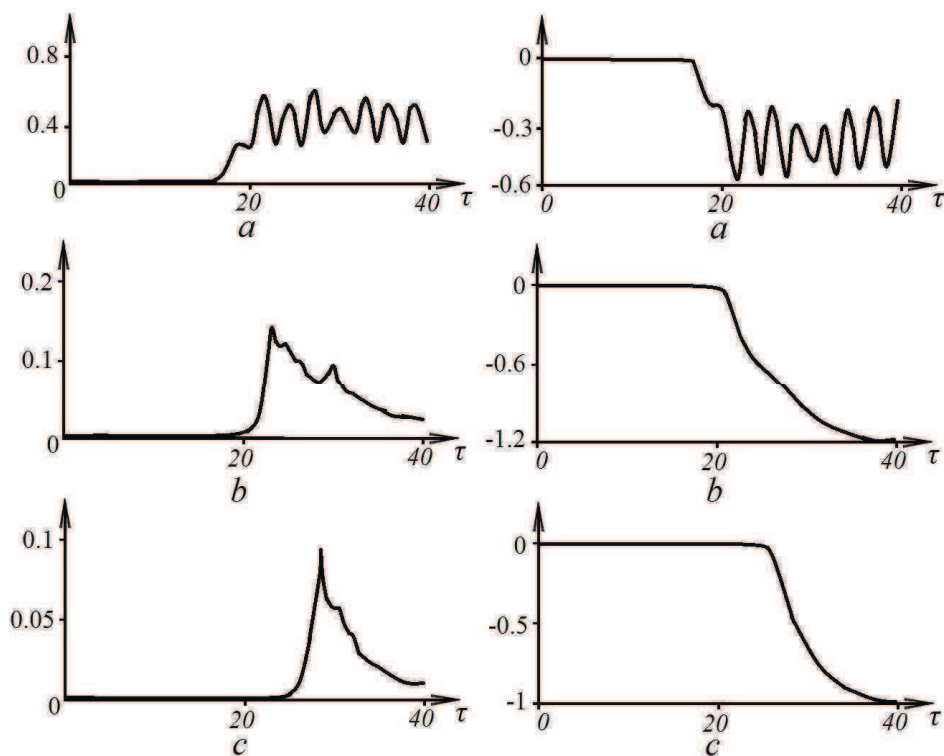


Рис.2. Поведення енергії поля (слева) и потерь энергии пучка (справа) соответствующих слагаемых (8) от времени для релятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 10$  ( $a - \Theta = 0$ ,  $b - \Theta = 0.5$ ,  $c - \Theta = 1$ )

Начиная с достижения первого максимума плотности энергии колебаний  $\tau_{MIN}(\Theta)$ , развивается нелинейный режим неустойчивости. С этого момента можно найти среднюю по времени полуширину (full width at half maximum – FWHM) спектра возбуждаемых колебаний.



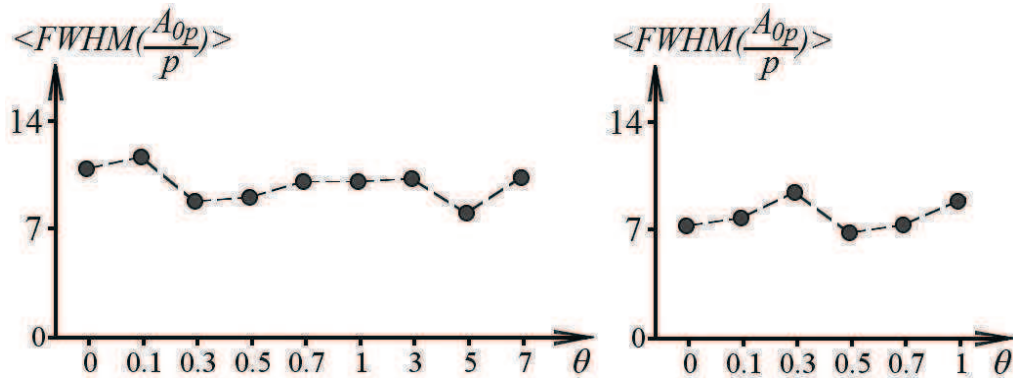


Рис.3. Средняя полуширина ( $\langle FWHM \rangle$ ) спектра как функция поглощения  $\Theta$  для нерелятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 1.6$  (слева) и релятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 10$  (справа)

Ограничимся для определения поля ленгмюровских колебаний в плазме только модами спектра пучка, которые находятся в пределах его полуширины. Перед определением полуширины спектр сглаживается методом простой скользящей средней. Выяснение величины полуширины спектра позволяет найти значения  $p_{\min}, p_{\max}$ . Так, например, среднее значение полуширины спектра  $\frac{A_{0p}}{p}$  на выбранном промежутке для  $\gamma_{b0} = 1.6$  и  $\Theta = 0$  составляет 10.4.

Исходя из этого, интервал  $[p_{\min}; p_{\max}]$  выбран равным 11 мод, но не 10 мод для сохранения симметрии  $[p_{\min}; p_{\max}]$  относительно  $p_0$ . При размере интервала  $[p_{\min}; p_{\max}]$  11 мод и  $p_0 = 100$  для случая  $\gamma_{b0} = 1.6$  и  $\Theta = 0$  получается  $p_{\min} = 95, p_{\max} = 105$ . Аналогично выбран интервал  $[p_{\min}; p_{\max}]$  для других случаев, исходя из найденных средних значений полуширины спектра.

Зависимость амплитуды поля ленгмюровских колебаний в плазме представлена на рис. 4. Пунктиром представлено сглаженное значение амплитуды поля.

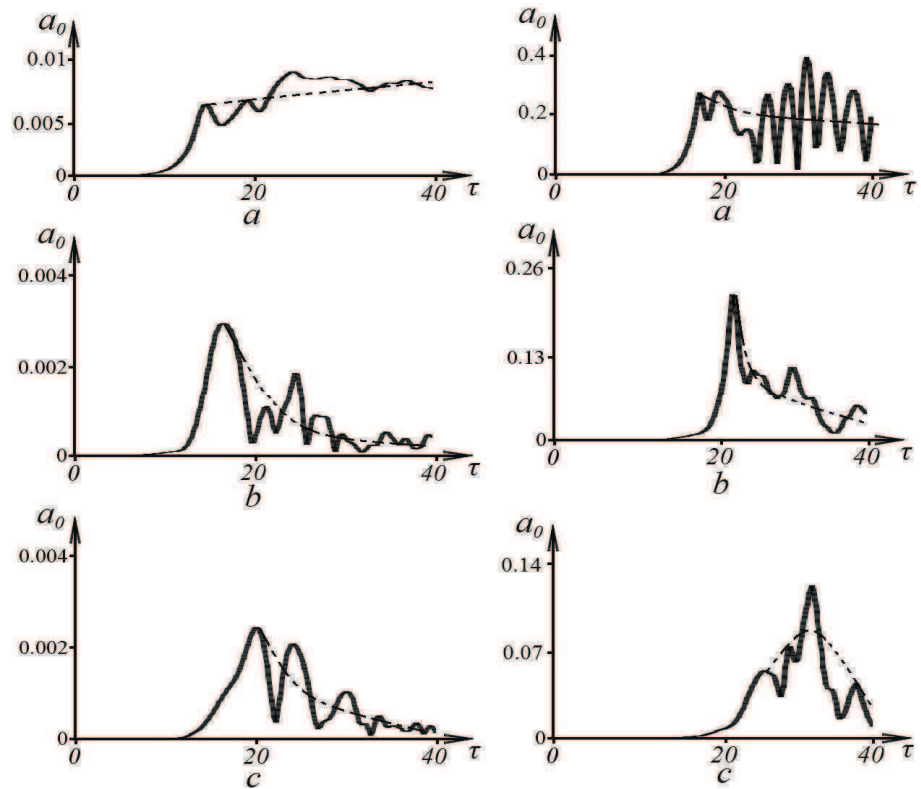


Рис.4. Поведение нормированной амплитуды среднего поля  $a_0$  от времени для нерелятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 1.6$  (слева) и релятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 10$  (справа) ( $a - \Theta = 0$ ,  $b - \Theta = 0.5$ ,  $c - \Theta = 1$ )

Изменение фазы ленгмюровских колебаний от времени  $d\phi_0 / d\tau$  изображено на рис.5.

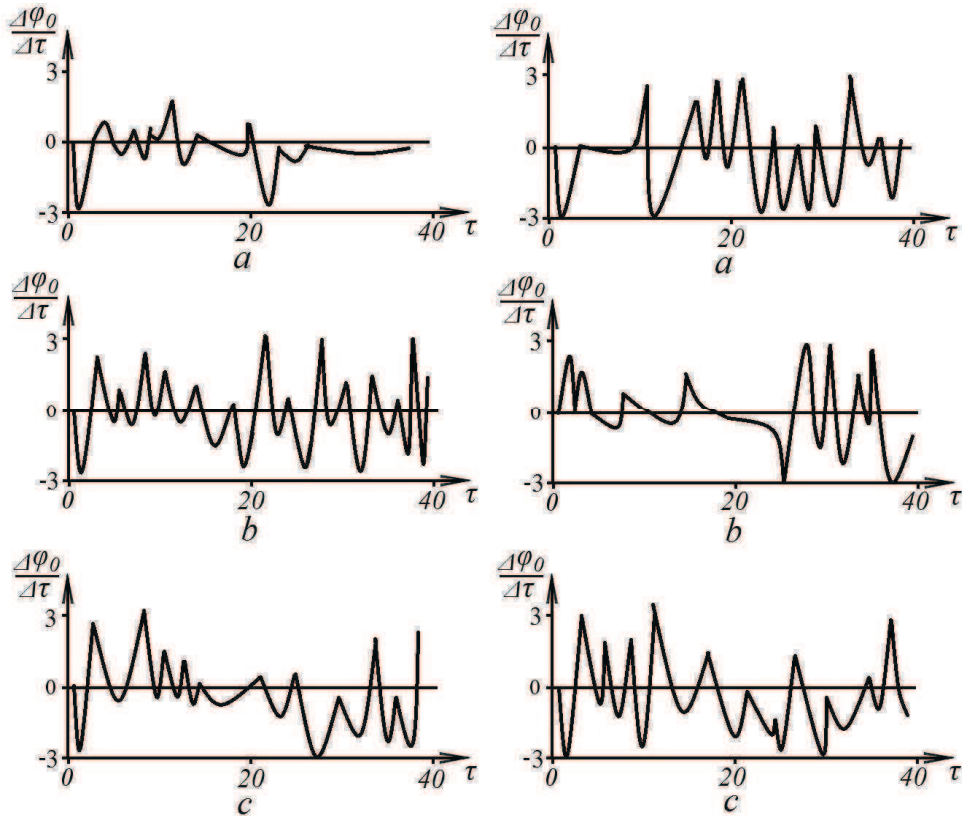


Рис.5. Поведение изменения фазы среднего поля  $\Delta\varphi_0 / \Delta\tau$  от времени для нерелятивистского пучка  $\gamma_{b_0} = 1.6$  (слева) и релятивистского пучка  $\gamma_{b_0} = 10$  (справа) ( $a - \Theta = 0, b - \Theta = 0.5, c - \Theta = 1$ )

Можно определить характеристики спектра на интервале от  $\tau_{MIN}$  (когда достигнут первый максимум плотности энергии колебаний спектра пучка) до  $\tau_{MAX} = 50$ . На рис.6 и рис.7 представлены среднее изменение частоты

$$\langle \Delta\omega_{pe} \rangle = \left\langle \frac{\delta}{\omega_{pe}} \frac{d\varphi_0}{d\tau} \right\rangle = \frac{1}{\tau_{MAX} - \tau_{MIN}} \int_{\tau_{MIN}}^{\tau_{MAX}} d\tau \left\{ \frac{\delta}{\omega_{pe}} \frac{d\varphi_0}{d\tau} \right\} \quad (12)$$

и среднеквадратичное отклонение значения частоты от среднего ее значения (ширина спектра)

$$[\langle (\Delta\omega_{pe} - \langle \Delta\omega_{pe} \rangle)^2 \rangle]^{1/2} = \left[ \frac{1}{\tau_{MAX} - \tau_{MIN}} \int_{\tau_{MIN}}^{\tau_{MAX}} d\tau \left\{ \left( \frac{\delta}{\omega_{pe}} \frac{d\varphi_0}{d\tau} \right) - \left\langle \frac{\delta}{\omega_{pe}} \frac{d\varphi_0}{d\tau} \right\rangle \right\}^2 \right]^{1/2} \quad (13)$$

для разных значений уровня поглощения в случаях нерелятивистского и релятивистского пучка электронов

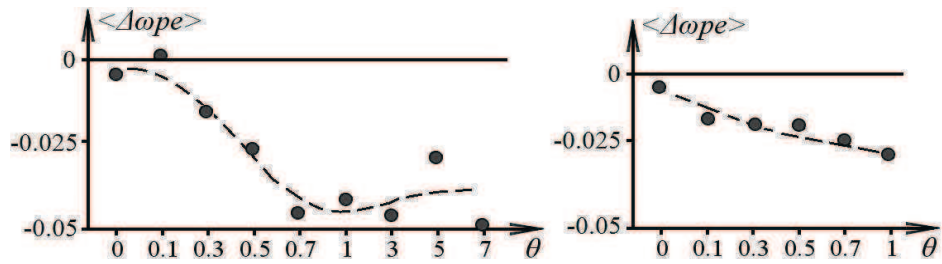


Рис.6. Среднее значение  $\langle \Delta \omega_{pe} \rangle$  как функция поглощения  $\Theta$  для нерелятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 1.6$  (слева) и релятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 10$  (справа). Пунктиром представлено сглаженное значение  $\langle \Delta \omega_{pe} \rangle$

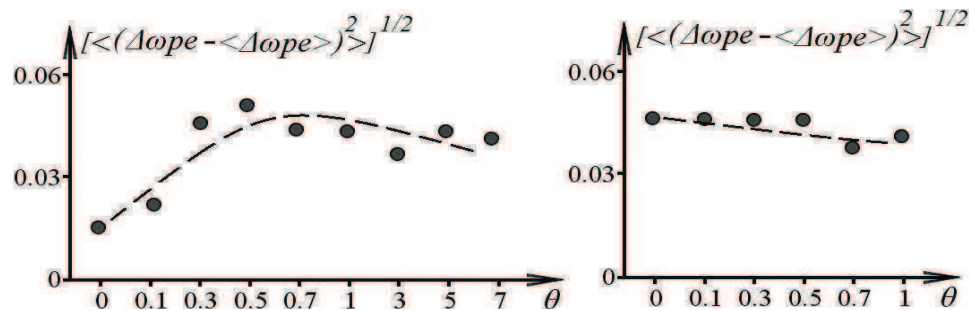


Рис.7. Среднеквадратичное отклонение  $[\langle (\Delta \omega_{pe} - \langle \Delta \omega_{pe} \rangle)^2 \rangle]^{1/2}$  как функция поглощения  $\Theta$  для нерелятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 1.6$  (слева) и релятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 10$  (справа). Пунктиром представлено сглаженное  $[\langle (\Delta \omega_{pe} - \langle \Delta \omega_{pe} \rangle)^2 \rangle]^{1/2}$

Полуширина импульса поля возбуждаемых пучком колебаний во времени представлена на рис.8.

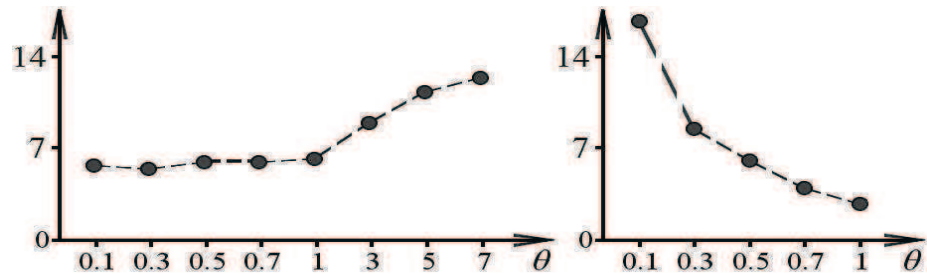


Рис.8. Размер полуширины первого локального максимума для плотности энергии поля (11) как функция поглощения  $\Theta$  для нерелятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 1.6$  (слева) и релятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 10$  (справа)

На длине импульса поля можно определить среднее значение плотности энергии (рис.9) и среднее значение потерь энергии пучка на единице длины (рис.10) как функции уровня поглощения.

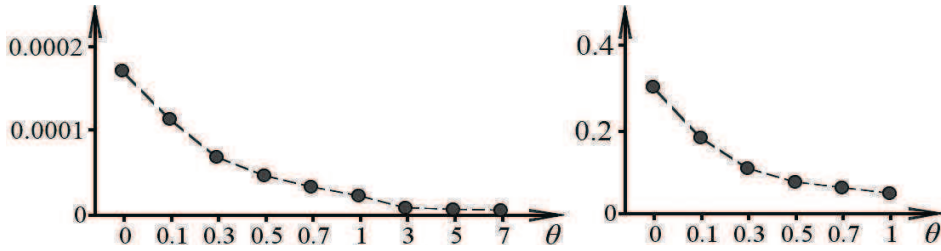


Рис.9. Среднее значение плотности энергии поля (11) на полуширине импульса поля как функция поглощения  $\Theta$  для нерелятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 1.6$  (слева) и релятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 10$  (справа)

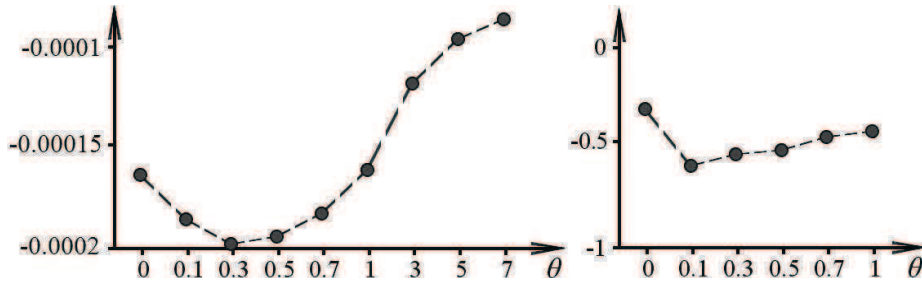


Рис.10. Среднее значение 3-го слагаемого интеграла (8) на полуширине импульса поля как функция поглощения  $\Theta$  для нерелятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 1.6$  (слева) и релятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 10$  (справа)

Можно показать (рис.11), что при  $\Theta \approx 0.6$  скорость отбора энергии у пучка наибольшая, хотя это не так явно выражено, как в одномодовом режиме [16].

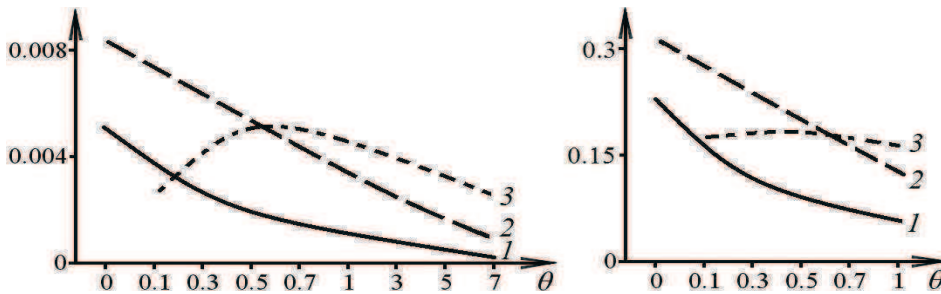


Рис.11. Значения как функция поглощения  $\Theta$  для нерелятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 1.6$  (слева) и релятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 10$  (справа) (1 –  $a_{0max}$ , 2 – величина

$$\delta(\Theta) / \omega_{pe} \approx \frac{\delta}{\omega_{pe}} \left\{ 1 + \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} \Theta \right\}^{-1}$$

деленная на 4 для  $\gamma_{b0} = 1.6$  и умноженная на 10 для  $\gamma_{b0} = 10$ , 3 – величина  $\sum_{p=1}^P \left( \frac{p^2 + p_0^2}{8\pi p^2} \cdot 2\Theta \sum_0^\tau \frac{A_{0p}^2}{p^2} \partial\tau \right)$  умноженная на 30 для  $\gamma_{b0} = 1.6$  и деленная на 3 для  $\gamma_{b0} = 10$ )

На функции распределения частиц по скоростям формируется возмущение (рис.12), которое в случае нерелятивистского пучка однозначно соответствует частицам, захваченным пакетом волн. По времени горб существует примерно на полуширине импульса поля (11). В релятивистском случае  $\gamma_{b0} = 10$  частицы захватываются полем спорадически, и не существует длительной динамики синхронного взаимодействия пучка и волнового пакета.

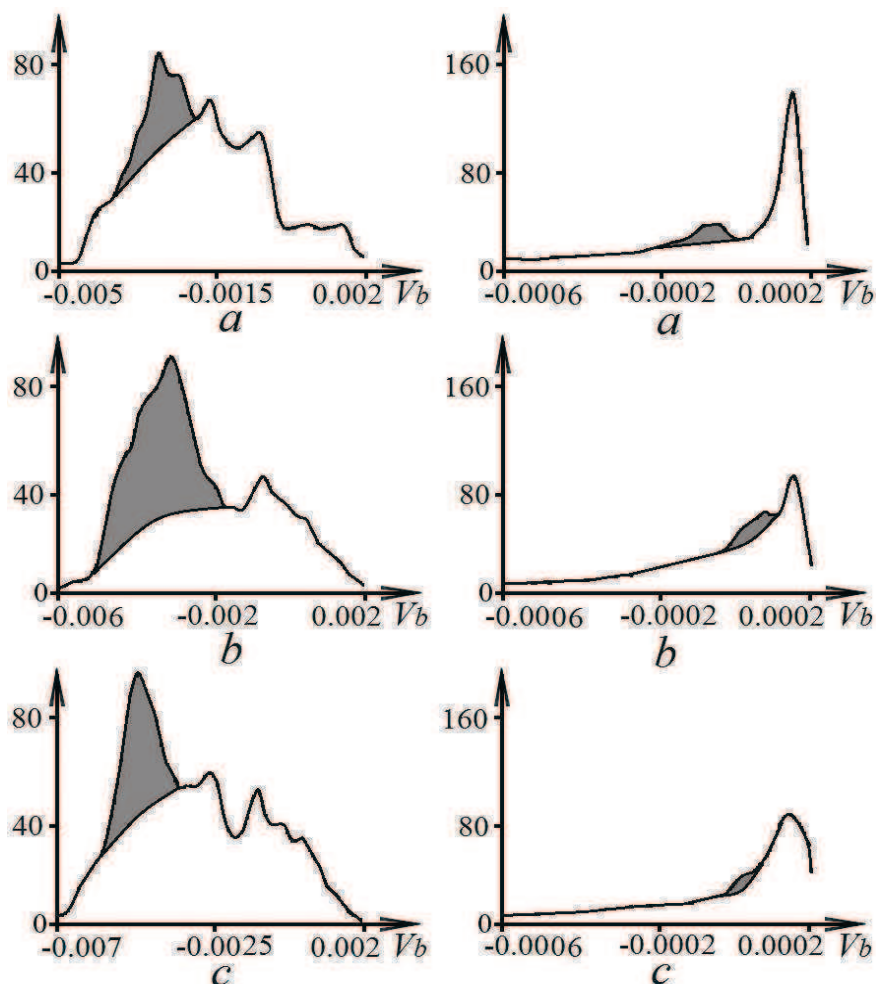


Рис.12. Локальные максимумы функции распределения (выделены серым цветом) при поглощении  $\Theta = 0.5$  для нерелятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 1.6$  (слева) и релятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 10$  (справа)

На рис.13 представлена модуляция интегрального поля в системе покоя пучка в моменты, когда  $a_0$  достигает максимального значения. Модуляция в нерелятивистском пучке, как было показано ранее [15], достаточно сильная и с ростом поглощения усиливается. В релятивистском пучке наблюдается обратная тенденция.

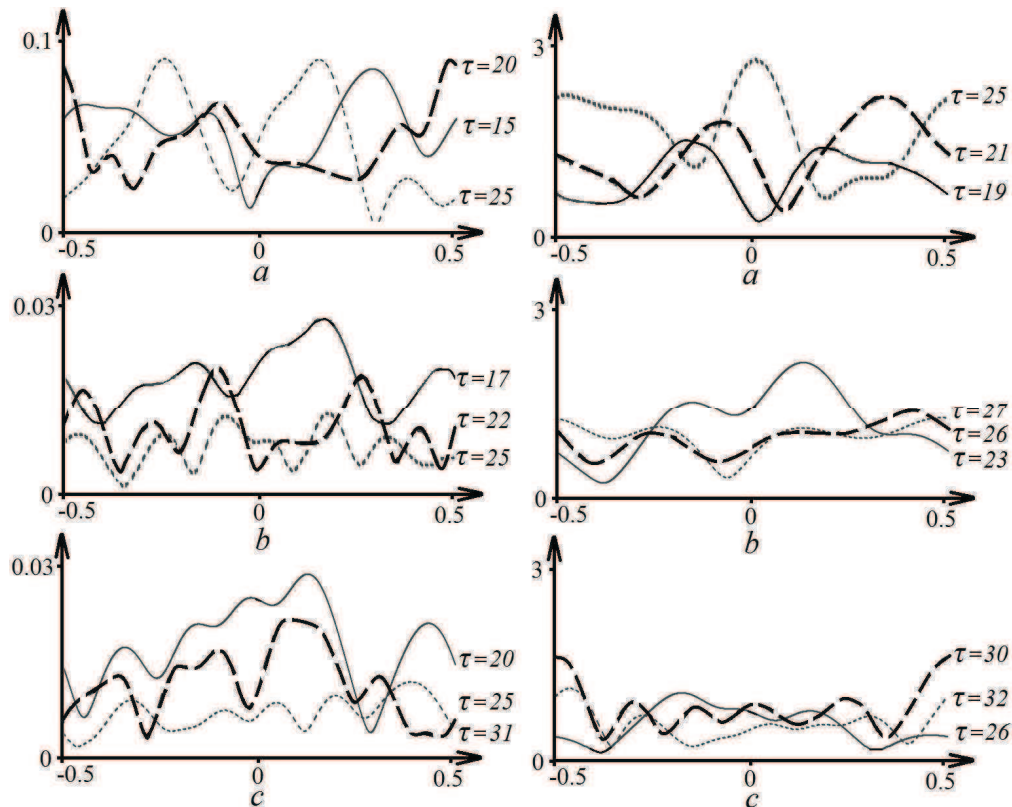


Рис.13. Модуляция интегрального поля в системе покоя пучка при максимумах  $a_0$  для нерелятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 1.6$  (слева) и релятивистского пучка  $\gamma_{b0} = 10$  (справа) ( $a - \Theta = 0$ ,  $b - \Theta = 0.5$ ,  $c - \Theta = 1$ )

## 5 Выводы

Развита 1D математическая модель описания взаимодействия релятивистского пучка электронов с плазмой в условиях линейного по амплитудам возмущений поглощения в плазме. Применена диагностика спектральных и амплитудных характеристик излучения в системе покоя пучка и в лабораторной системе отсчета, где плазма покоится.

Развитие пучковой неустойчивости в многомодовом режиме сопровождается уширением спектра, существенно более сильным воздействием поглощения энергии колебаний на процесс, чем в одномодовых случаях. В нерелятивистском пучке при поглощении  $\Theta \approx 0.6$  отбор энергии наибольший, в одномодовом режиме [16] эти условия выполнены при  $\Theta \approx 3$ . То есть черты процесса, характерные для одномодовых диссипативных неустойчивостей (при которых  $\Theta > 1$ ), в многомодовом случае проявляются уже при значениях  $\Theta > 0.1 \div 0.3$ . Такие уровни поглощения формально относятся к реактивным режимам процесса. Природа такого отбора состоит в создании условий синхронизации захваченной полем части частиц пучка и волнового пакета. В релятивистском случае такой выраженной синхронизации не наблюдается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Файнберг Я. Б. Некоторые вопросы плазменной электроники / Я. Б. Файнберг // Физика плазмы. – 1985, Т.11, № 11, С. 1398–1410.
2. Кузелев М. В. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме / М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе. – М. : Наука. Гл. ред. физ.–мат. лит., 1990. – 336 с.
3. Шапиро В. Д. Взаимодействие волна–частица в неравновесных средах / В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко // Радиофизика, 1976, Т.19, №5–6, С. 787–791.
4. Кондратенко А.Н. Основы плазменной электроники / А. Н. Кондратенко, В. М. Куклин. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.
5. Буц В.А. Когерентное излучение интенсивных электронных пучков / В. А. Буц, А. Н. Лебедев. – М. Изд. ФИАН РАН. 2006. – 333 с.
6. Силин В.П. Параметрический резонанс в плазме / В. П. Силин // ЖЭТФ, 1965. – т. 48, в.6. – С. 1679–1691.
7. Захаров В.Е. О спектре слабой турбулентности в плазме без магнитного поля. ЖЭТФ. – 1966. – том 51, вып.6. – С. 688–696.
8. Krueger, W. L., P. K. Kaw, J. M. Dawson, C. Oberman, Anomalous high–frequency resistivity and heating of a plasma. – 1970. – Phys. Rev. Lett., 24. – P. 987.
9. Силин В.П. Аномальная нелинейная диссипация высокочастотных радиоволн в плазме / В. П. Силин // УФН 1972. – том 108. – вып. 4. – С. 625–654.
10. Krueger W. L. Heating of underdense plasma by intense lasers. Phys. Fluids. 1973, V.16, N.9, P. 1548–1550.
11. Иванов А.А. Никулин М.Г. Нелинейное взаимодействие ленгмюровских волн большой амплитуды в бесстолкновительной плазме. – ЖЭТФ. – 1973. – Т. 65, № 1. – С. 168–174.
12. Андреев Н. Е. О насыщении параметрической неустойчивости плазмы в сильном электрическом поле / Н. Е. Андреев, В. П. Силин, Г. Л. Стенчиков // Физика плазмы. – 1977. – Т.3, №5. – С. 1088–1096.
13. Коврижных Л. М. Модуляционная неустойчивость и нелинейные волны в холодной плазме. Физика плазмы. – 1977. – Т.3, В.5. – С. 1097–1105.
14. Belkin E.V.. Dynamics of ions during development of parametric instability of langmuir waves / E.V. Belkin, A.V. Kirichok, V.M. Kuklin, A.V. Pryjmak,. A.G. Zagorodny // VANT, 2013, N. 4 (86) series “Plasma Electronics and New Methods of Acceleration” issue 8. P. 260–266.
15. Модуляция интегрального поля многомодовых пучковых неустойчивостей в плазме / А. Г. Загородний, А. В. Киричок, В. М. Куклин, А. В. Приймак // East Eur. J. Phys. 2014. V.1 No 2. – С. 53–66.
16. Кондратенко А. Н. Нелинейная теория пучковой неустойчивости в столкновительной плазме / А. Н. Кондратенко, В. М. Куклин, В. И. Ткаченко // Изв. вузов. Радиофизика. – 1978. – т.21, No 10. – С.1535–1537; Об аномальном уровне потерь энергии пучка при развитии диссипативной пучковой неустойчивости.// Украинский физический журнал 1979, Т. 24, №4, С. 559–561.



UDC 519.64:004.032.24

## Acceleration of computation of the discrete currents method by modification, which takes into account the architectural features of a modern PCs

VO Mishchenko, BV Patochkin

*V. Karazin Kharkiv National University, Ukraine*

The authors have modified the popular techniques of modeling the diffraction phenomena in the resonance wavelength range in order to accelerate calculations using the possibilities hidden in the architecture of modern PCs. This modification takes advantage of the CPU vector registers. In particular, the authors have employed the said vector registers in combination with cache memory performance optimization for modification of the discrete currents method (DCM). Their results are clearly illustrated by the following example: solving the diffraction problem (for the wavenumber of  $14\pi$ ) on 80 screens using 4-core CPU was 30 to 40 times as fast as with the single-core processor without vector registers involvement and processor cache optimization.

**Key words:** *diffraction, discrete currents method, vector registers, concurrency, Discrete Singularities Methods, system of linear algebraic equations, computing experiment.*

Здійснено модифікацію популярного методу моделювання дифракційних явищ у резонансному діапазоні хвиль з метою прискорення обчислень за рахунок використання можливостей, прихованих в архітектурі сучасних ПК. Ця модифікація використовує векторні регістри процесора. В результаті модифікації методу дискретних струмів (МДТ), спрямованої на використання векторних регістрів в поєднанні з оптимізацією роботи з кеш пам'яттю, вдалося отримати результат, який добре ілюструється таким прикладом. При розв'язку за МДТ дифракційної задачі на 80 екранах (хвильове число  $14\pi$ ), на 4-ядерному процесорі спостерігалось прискорення розрахунку в 30-40 разів порівняно з виконанням на одному ядрі без використання векторних регістрів і оптимізації роботи з кешем процесора.

**Ключові слова:** *дифракція, провідний екран, метод дискретних струмів, векторні регістри, тайлінг, паралелізм, МДО, СЛАР, експеримент, швидкість обчислень.*

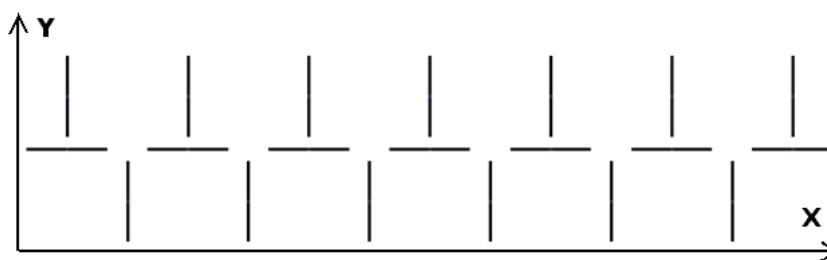
We develop a modification of the popular modeling techniques diffraction phenomena in the resonance wavelength range in order to accelerate the calculations at the expense of the opportunities hidden in the architecture of modern PCs. This modification uses the vector registers of the processor. As a result of the modification of the method of discrete currents (DCM), which aims to use the vector registers, combined with the optimization of the work with the cache memory, we got the result, which is well illustrated by the following example. In case of deciding the diffraction problem on 80 screens (wave number  $14\pi$ ) on a 4-core CPU, following the DCM, we got acceleration 30-40 times in comparison with the performance on a single processor core without the use of vector registers and cache processor optimization.

**Ключевые слова:** *дифракция, проводящий экран, метод дискретных токов, векторные регистры, тайлинг, параллелизм, МДО, СЛАУ, эксперимент, скорость вычислений.*

### 1 Introduction

There are various methods for solving the problems of the mathematical theory of diffraction. Those of them, which use the boundary integral equations, are the most effective. In the case when one can assume that the scatter (e.g., an antenna) is a set of perfectly conductive and infinitely long cylindrical screens (whose generatrices are

parallel), he obtains the equations over the contours of cross-sections of these screens. The method of discrete currents (DCM) (whose several variations are available depending on the field polarization and selected fundamental solution of the Helmholtz equation) is based on a particular system of equations of the first kind (for the current density functions over the contours) with kernels having singularities such as the Cauchy kernels, the logarithmic type kernels, or hypersingular kernels [1, 2]. A discrete model of such system depends on the corresponding quadrature formulas for integrals (which are treated, if necessary, as generalized functions) [3], and their approximate solution can be reduced to solving a system of linear algebraic equations (further – "linear system"). On this way, the computational difficulties occur in the case of resonant wavelengths, especially if there is a large number of scattering contours. As an example, see the configuration (cross section) shown in Fig. 1.



*Fig.1 Example of a grid consisting of 20 metal strips*

If an electrodynamic system includes dozens of elements (for example strips) and the wavenumbers are chosen in the range from 10 to 20, then, to achieve the needed accuracy, the discretization parameter value should be very large, as well as the dimension of linear system (for problems of such kind, up to several thousands). The memory of modern PCs usually has enough room to accommodate matrices of such systems, but the solution process can last for hours.

For a period of time, parallel computing in approximate numerical methods (discrete current methods among them), had been available only by using improvised clusters made of several PCs (e.g. [4-6]); this could give acceleration somewhat smaller than the number of machines or processor cores involved. Another way, based on sophisticated operating with the cache and luckily used granularity of calculations [7-9], could result in acceleration equal or even somewhat larger than the number of processor cores.

This work is aimed at such further acceleration of computations implementing DCM, which will significantly exceed the number of processor cores due to the fact that the PC architecture provides the possibility to use vector operations.

This approach presumes the maximum possible for this application type parallelization of calculations with the help of some additional specialized device with a large number of processor cores, whose the most common example is the CUDA-card [10]. However, putting aside the economic aspect, one has to keep in mind that "In course of optimization or modification of a program fragment, aimed at taking advantage of specific hardware architecture, one faces a problem of the algorithm performance limitation due to specific architectural features of an open heterogeneous system. This issue is particularly relevant in the case of specific computing devices used, such as graphics processors, signal processors, programmable logic integrated

circuits, application-oriented processors" [11, P.2] (quotation translated into English by Yu. Kolomiets).

Some issues closely related to said above and appearing in practical implementation of CUDA technology in complicated algorithms are the following:

- this requires additional equipment;
- more knowledge is needed:
  - understanding of the CUDA device principles;
  - familiarity with the special programming language for the CUDA device;
- for practically useful classes, the parallel calculation algorithm complexity often exceeds their own one.

Specifically, the following features are known [11] to complicate the block algorithms implementation in an open heterogeneous computing system based on the GPU architecture (cited by [11 P.4]).

1. The high data-level concurrency, not the code-level.
2. Structured GPU memory, whose different types have specific operation features.
3. Small volume of "fast" memory available to one computing thread at a time.
4. The specificity of logic expression processing.
5. The specificity of conditional branching and loops processing.

In this connection, it becomes relevant to check whether some possibilities for the MDO algorithms acceleration can be found directly in the architecture of modern PC main processors. Our attention was drawn to the vector registers [12]. The first vector registers appeared in the early 90s, but at that time their size was only 64 bits and they could process nothing but integers. Later, with the introduction of SSE instructions and register expansion to 128 bits, they became capable of operating with a float-point double-precision numbers. Next after SSE instructions, the so-called AVX ones appeared, and the size of vector registers had raised up to 256 bits. The latest set of instructions version for vector registers is AVX512; its name implies that their size is 512 bits. The future expansion is planned up to 1024 bits, which indicates that the technology is relevant and developing.

The real objective of integration of vector registers in the PC processor (same as in the case of CUDA) was to accelerate graphic information processing. However (again as in the case of CUDA), the programmers, upon necessity, began to use the vector registers to accelerate computation, including operating with complex numbers, which is the feature required in the DCM. The examples of complex multiplication implemented with the help of 128-bit SSE instructions and resulting gain in calculation speed were published in the WEB in 2010-11 mailing [13]. Employment of the vector registers to speed up the inversion of sparse matrices built of "small" blocks have been implemented and studied in [14]. At this point, it is necessary to note that the DCM matrices are entirely filled, and their division into blocks makes sense only in connection with development of parallel processing algorithms [5].

## 2 Formulation of the problem

Let, in the problem of E-polarized electromagnetic waves diffraction against a perfectly conductive contours, the time dependence is given by the amplitude factor  $e^{iot}$ . Let the total field amplitudes are represented in this way:

$$\vec{E}^{tot} = \vec{E} + \vec{E}_0, \quad \vec{H}^{tot} = \vec{H} + \vec{H}_0, \quad (1)$$

where  $(\vec{E}_0, \vec{H}_0)$  - is an incident field,  $(E, H)$  – is a scattered field, and where

$$E_0 = (0, 0, U_0), \quad H_0 = \left( \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial U_0}{\partial y}, \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial U_0}{\partial x}, 0 \right) \quad (2)$$

Then both the scattered and the total fields will be also E-polarized [e.g. 1],

$$E^{tot} = (0, 0, U^{tot}), \quad U^{tot}(X) = U(X) + U_0(X), \quad X \in R^2. \quad (3)$$

Under the above assumptions, the scattered field  $U$  satisfies the Helmholtz equation everywhere outside the set  $C = \bigcup_{n=0}^{N-1} C_n$ , where  $C_n$  –  $n^{\text{th}}$  contour, and  $N$  is the total contours number:

$$\begin{aligned} \Delta U(X) + k^2 U(X) &= 0, \\ x \in R^2 / \bar{C}, X &= (x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

For any contour  $C_n$  the Dirichlet condition is valid

$$U(X)|_c = -U_0(X)|_c \quad (5)$$

The condition at infinity is the Sommerfeld radiation condition

$$U(X)|_{|x| \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), r = |X|, \quad \frac{\partial U(X)}{\partial r} - ikU(X) \underset{x \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right), \quad (6)$$

and for all contour ends the so-called "on the edge" condition is fulfilled

$$\int_{\Omega} \left( |U(X)|^2 + |\nabla U(X)|^2 \right) d\Omega < \infty \quad (7)$$

where  $\Omega$  – is any bounded neighborhood of a contour end.

Let a computer solution of this problem uses the method of discrete singularities (DSM). In this paper, the version of DSM is applied, which uses the boundary integral equations with the logarithmic type kernels [1,2]. The advantages of DSM in numerical modeling of physical processes are well known [15]:

- The matrix of the process discrete model is very easy to form;
- It is possible to solve a linear system using the Gauss scheme without permutations.

However, the data exchange between running in parallel processes, needed in the course of solving the linear system obtained by problem (1)-(6) discretization (with the help of DCM or other method that uses the boundary equations), requires their systematic interaction via shared memory. This explains the non-triviality of parallel algorithms of the Gauss method. For example, the classical approach to parallelization in linear algebra problems, such as solving the linear system with an entirely filled matrix, is to divide the matrix into blocks with concurrent processing these blocks. As

it was explained above, in this case, the potential benefits of the large number of processor cores used in CUDA device cannot be implemented to the full extent.

We had in mind the task to accelerate the DCM-calculations by employment of the vector registers. For result comparability, calculations were carried out until the minimal standard numerical solution (MSNS) of diffraction problem was obtained. It means that "discrete currents" (that approximates the current density functions) were evaluated based on the discrete model of the system of boundary equations and mapping of the field was built for the far-field region (field strength directivity diagram with the pitch of 1° in accordance with given polarization).

### The research methods and materials

The todays compilers, it seems, "know" to use the vector registers. But adequacy of their results is clearly seen comparing the source code in C++ with the corresponding code in assembler created by the compiler GCC-4.9.

Table 1 A C++ function translated into assembler code

<i>C++ code</i>	<i>The code generated by the compiler</i>
<pre>double VecMul(double* a, double* b, int size) { double sum = 0; for (int i=0; i &lt; size ; i++) { sum += a[i] * b[i]; } return sum; }</pre>	<pre>VecMul(double*, double*, int): v xorpd %xmm0, %xmm0, %xmm0 testl %edx, %edx jle .L4 xorl %eax, %eax .L3: Vmovsd (%rdi,%rax,8), %xmm1 vfmadd231sd (%rsi,%rax,8), %xmm1, %xmm0 addq \$1, %rax cmpl %eax, %edx jg .L3 ret .L4: ret</pre>

An attentive study of the text representing multiplying of two vectors reveals (see Table 1) that only one value was sent to a vector register. As it was a double float number, only 64 bits of 256 available were used.

Note that the function `vfmadd231sd()` in the right column of the table is the special assembler instruction, which corresponds to the expression "sum += a[i] \* b[i];".

As one can see from this example, today the compiler uses the vector registers just to increase the number of available registers, which yields only a few percent acceleration of an algorithm execution. To achieve more significant acceleration using such instructions, one can include in his code patches written manually in assembler. However, preferred are the so-called intrinsic-functions (i.e. the special system-dependent functions that implement some commonly used operations), which are much more efficient than the standard ones because they use known features of computer architecture at the level of assembler code [16].

In problems being solved by DCM, the most time-consuming steps on the way to MSNS are filling the linear system matrix and solving the linear system itself. Since calculation of various matrix elements follows some common algorithm, the vector registers being employed allow substituting the arithmetic operations by the vector ones. However, there are certain difficulties with the use of vector registers, if for some reasons we chose Gaussian compact scheme, as in [5-9]. This has sense, for example, when we want to use some other reserves to accelerate solution of linear system having a complex matrix. The difficulties mentioned above are the following:

- buckets allocated for triangular matrix strings are not consistent with the natural requirement of their length being proportional to the size of vector registers;
- there are no ready-made built-in operations whose operands are complex numbers stored in the vector registers, so, if necessary, they are to be coded by a developer himself.

Representation of a matrix as a set of square blocks, whose size (optimal in the sense of [2]) is a multiple of vector register size, helps to cope with the first of these complications, except the case of diagonal blocks.

Calculations implementing the compact scheme of Gauss method require operations of multiplication and subtraction of numbers (in our case, of complex numbers). Let's start with the first of them, which is more time-consuming. It consists of known steps involving the pairs of real numbers. One of these steps is swapping the numbers contained in a register. This is the known problem among software developers [13,14], however, we could not find any published results of its constructive solution for AVX registers. Here we offer our own solution.

The standard for C++ compiler representation of a complex number in the memory of PC is consecutive allocation of two double precision numbers (which takes 16 bytes). The same 16 bytes representing our complex number we write into a vector register. Calling to mind multiplication and subtraction operations, it is appropriate to define uniting them operation `mulAndSub()`, which will process three given complex numbers in the same sequence as in the expression  $A = A - B * C$ .

The requirement to optimize execution time of this operation makes its implementation nontrivial. We have taken into account times of each assembler instruction of those described in [16], which potentially could be involved, understanding that the instruction sequence is not unique.

To make the right decision, we needed to pick them in such a way that the total execution time (which can be estimated with the help of the table [16]) was the shortest. Eventually, the following code, which uses the vector registers, was developed:

```
void mulAndSub(cmpx* to, cmpx* from1, cmpx* from2)
void mulAndSub(cmpx* to, cmpx* from1, cmpx* from2)
{
    __m128d* v1 = (__m128d*)from1;
    double* v2 = (double*)from2;
    double* v3 = (double*)to;
    __m256d ymm0_v1;
    __m256d ymm1_v2;
```

```

__m256d ymm2_axa;
__m256d ymm3_perm_v2;
__m256d ymm4_axb;
__m256d ymm5_bb_xch_ab;
__m256d ymm6_aa_xch_ab;
__m256d ymm7_res;
ymm0_v1 = _mm256_broadcast_pd(v1);
ymm1_v2 = _mm256_loadu_pd(v2);
//mul
ymm2_axa = _mm256_mul_pd(ymm0_v1, ymm1_v2);
ymm3_perm_v2 = _mm256_permute_pd(ymm1_v2, 0b0101);
ymm4_axb = _mm256_mul_pd(ymm0_v1, ymm3_perm_v2);
ymm5_bb_xch_ab = _mm256_unpackhi_pd(ymm2_axa, ymm4_axb);
ymm6_aa_xch_ab = _mm256_unpacklo_pd(ymm2_axa, ymm4_axb);
ymm7_res = _mm256_addsub_pd(ymm6_aa_xch_ab, ymm5_bb_xch_ab);
//sub
__m256d ymm9_v3 = _mm256_loadu_pd(v3);
ymm9_v3 = _mm256_sub_pd(ymm9_v3, ymm7_res);
__mm256_storeu_pd((double*)to, ymm9_v3);
}

```

#### 4 Computational experiments

In numerical experiments conducted to estimate the count rate, the processor Intel core i5-4430 was used. The size of its vector registers is 256-bit that allows fitting in two complex numbers of the type double. Three C++ implementations of obtaining MSNS using DCM with the core of the logarithm type were compared: serial processing (basic), optimized relatively grain size [17, 18] and other parameters in accordance with [7-9], and its modification intended to use vector registers.

Consider the case of the E-polarized wave falling against the electrodynamic structure shown in Fig. 1 in direction of the axis Y at the angle of  $\pi$  to it with the wave number  $\kappa = 4\pi, 14\pi$ . To obtain MSNS, we calculated (see example in fig. 2-3) the

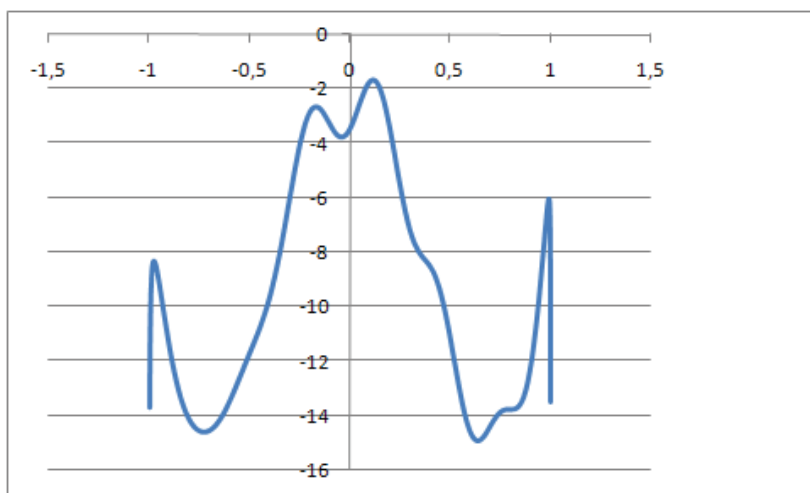


Fig. 2 The real part of the current density function of the first horizontal contour, the wavelength is 1/7 of strip width, totally 20 contours (fig. 1)

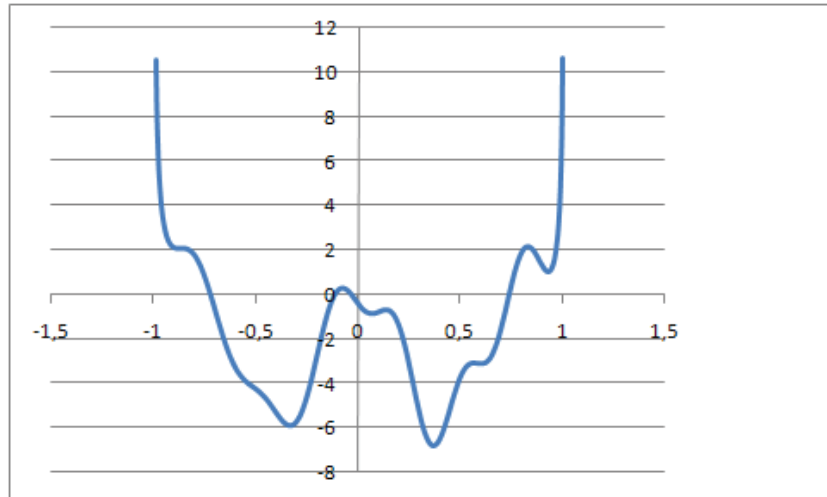


Fig. 3 Imaginary part of the current density function of the first horizontal contour, the wavelength is  $1/7$  of strip width, totally 20 contours (fig. 1)

DCM-approximation of current density for all strips and built the radiation pattern. The example in Fig. 4 illustrates a diagram of the amplitude absolute value of current obtained for the same electrodynamic structure (fig. 1), but for the shorter wavelength ( $1/2$  the width of the strip) to provide smaller overlapping of minor lobes in a small figure.

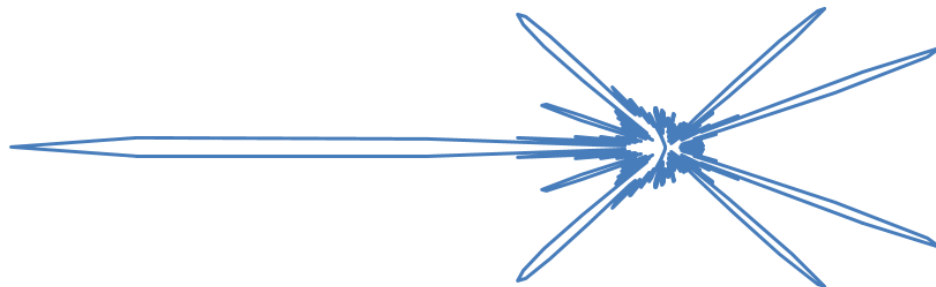


Fig. 4 Field strength directivity diagram (is rotated by  $\pi/2$ ), the wavelength of  $1/2$ , 20 contours

At  $\kappa = 14\pi$ , the dimension of the discrete model was  $10^3$  (there were about seven discrete singularities for the wavelength); to verify achieved accuracy, the discretization parameter each time was multiplied approximately by  $\sqrt{3}$ . Table 1 contains timing of DCM calculations. Similar calculations, at  $\kappa = 4\pi, 14\pi$ , were performed also for 80 contours, which in addition were arcuate. Note that in numerical experiments with electrodynamic structures, whose screen cross section contours had different forms, but matrices were equidimensional, duration of MSNS computing by DCM varied not more than for 1%. Therefore, two first digits in the index of achieved acceleration, by Table 1, may, in any case, serve as a guide.



Table 1 Three implementations of MSNS calculation compared by their execution time

N: the problem dimension	t <sub>1</sub> : the base implementation	t <sub>2</sub> : tiling and multithreading	t <sub>3</sub> : + vector registers	t <sub>1</sub> /t <sub>3</sub> : index of total acceleration
1000	5.17	0.88	0.33	15.7
1731	28.7	3.97	1.25	23.0
2996	182	20.1	5.70	32.0
5186	1180	101	28.3	41.5
8978	6500	526	143	45.3

## 5 Conclusions

We have created a modifications of DCM, which uses the vector registers of modern PC processors in combination with tiling effect. It is experimentally proved that this modification accelerates in dozens of times computing MSNS for problems of electromagnetic waves diffraction against a perfectly conducting screen (for 2D case). Note that an important role in this result plays more fast execution of the algorithm for solving the linear algebraic system (using the Gaussian compact scheme). Our subroutine can be used in other application areas apart from computational problems of electrodynamics, particularly, when linear system having a complex matrix is the most time-consuming part of computational work and it is necessary to accelerate by an order the solution process, but all obvious reserves, such as algorithm improvement or simple parallelization of the processes, have been exhausted.

## REFERENCES

1. Гандель Ю. В. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн. Учебное пособие. Ч. 2 / Ю. В. Гандель, С. В. Еременко, Т. С. Полянская. – Харьков : ХГУ, 1992. – 145 с. – *Gandel' Yu. V. Mathematical issues of the method of discrete currents. Justification of the numerical method of discrete singularities for solving two-dimensional problems of electromagnetic waves diffraction. – 1992. – in Russian.*
2. Дмитриев В. И. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике / Дмитриев В. И., Захаров Е. В. - М.: МАКС Пресс, 2008. - 316 с. – *Dmitriev V. I. The method of integral equations in computational electrodynamics. – 2008. – in Russian.*
3. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов [учебное пособие] / Ю. В. Гандель. – Х.: ХНУ, 2001. – 92 с. – *Yu. V. Gandel, Introduction to methods of evaluation of singular and hypersingular integrals. – 2001. – in Russian.*
4. Мищенко В.О. К моделированию электромагнитных явлений на базе использования методов дискретных особенностей для решения гиперсингулярных интегральных уравнений / В. О. Мищенко // Труды

- международной конференции по вычислительной математике МКВМ–2004. Ч. II., Новосибирск: ИВМиМГ РАН, 2004. – С. 555–560. – *Mishchenko V. O.* To the modeling of electromagnetic phenomena based on application of discrete singularities methods for solving hypersingular integral equations. – in Proceedings of ICCM-2004. – 2001. – in Russian.
5. *Mishchenko V. O.* Ada programming language and specifying, modeling and distributed computing for the implementation of the discrete singularities methods / V. O. Mishchenko // Proceedings of SCALNET–2004. – Kremenchug, 2004. – P. 110-112. – у збірнику праць конференції. – Кременчук, 2004. – in English.
  6. *Gahov A. V.* Parallelism for diffraction processes modeling on the base of discrete singularities methods / A. V. Gahov, V. O. Mishchenko // Труды Научно–технической конф. с международным участием «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях» (КМНТ–2010). Ч. 2. – Х.: ХНУ, 2010. – С. 50–53. – in Proceedings of СМНТ. – Kharkiv, 2010. – in English.
  7. *Мищенко В. О.* Оптимизация компактной схемы Гаусса для многоядерных процессоров / В. О Мищенко, Б. В Паточкин. // Вестник ХНУ. – 2001. – № 981. – сер. МІА, вып. 18. –С. 70–81. – *Mishchenko V. O.* Gaussian compact scheme optimization for multicore processors. – Bulletin of KNU. — 2001. – in Russian.
  8. Parallel Gaussian compact scheme [Электронный ресурс] / V. O. Mishchenko, B. V. Patochkin. – Режим доступа : [http://www.mediascan.by/index.files/parallel\\_gaussian\\_compscheme\\_win32.zip](http://www.mediascan.by/index.files/parallel_gaussian_compscheme_win32.zip). – Дата доступа : 18.03.2015. – Назва з екрану.
  9. *Б. В. Паточкин* Минимизация времени компьютерного моделирования задачи дифракции на экранах методом оптимизации локальности памяти / Б. В. Паточкин // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2014. – Випуск 6 (89). – 2014. – С. 58-64. – *B. V. Patochkin* Minimization of computer modeling time by local memory optimization for a problem of diffraction against the screens. – Bulletin of Kremenchuk National University. – 2014. – Vol. 6 (89). – in Russian.
  10. *Боресков А. В.* Основы работы с технологией CUDA / А. В. Боресков, А. А. Харламов. – М. : ДМК Пресс, 2010. – 232 с. – *Boreskov A. V.* Basics of using the CUDA technology. – 2010. – in Russian.
  11. *Андрианова Е. Г.* Метод оценки эффективности реализации блочного алгоритма на основе графического процессора в открытой гетерогенной системе / Е. Г. Андрианова, Д. И. Мирзоян, А. Б. Петров // Журнал радиоэлектроники. – 2014. – N3. – С. 1-15. – *Andrianova E. G.* The method of efficiency assessment of block algorithm implementation based on GPU in an open heterogeneous system. – Radio Electronics Magazine, N3. — 2014. – in Russian.
  12. *Паточкин Б. В.* Модифікація методу дискретних токів для використання векторних регістрів процесору ПК при числовому моделюванні дифракції на екранах / Б.В. Паточкин, В.О. Міщенко // Матеріали конференції «Сучасні проблеми моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2015. С. 130. – *Patochkin B. V.* Modification of discrete currents method aimed at vector registers of processor PC employment in numerical simulation of diffraction against the

- screens. – in Proceedings of "Modern Problems of the conference 'Mathematical Modeling and Computational Methods'. – Rivne, 2015. – in Russian.
13. Complex Mul and Div using sse Instructions [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://stackoverflow.com/questions/3211346/complex-mul-and-div-using-sse-instructions>. – Дата останнього оновлення 2015.6.19.
  14. Применение векторных инструкций в алгоритмах блочных операций линейной алгебры / А. Е. Андреев, В. А. Егунов, А. А. Насонов, А. А. Новокщёнов // ИЗВЕСТИЯ ВолгГТУ сер. Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах. – 2014. – Выпуск 21, № 12 (139). – С. 5-11. – Application of vector instructions in the block operation algorithms of linear algebra / A. E. Andreev and others. — News of VSTU, Volgograd, Russia. – 2014. – in Russian.
  15. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. – М.: Наука, 1985. – 256 с. – *Belotserkovsky S. M. Numerical methods in singular integral equations.* – 1985. – in Russian.
  16. Intel Intrinsic Guide <https://software.intel.com/sites/landingpage/IntrinsicsGuide/> [Электронный ресурс]. – Режим доступа : [//software.intel.com/sites/landingpage/IntrinsicsGuide/](https://software.intel.com/sites/landingpage/IntrinsicsGuide/). – Назва з екрану.
  17. Лиходед Н. А. О выборе зерна вычислений при реализации алгоритмов на параллельных компьютерах с распределенной памятью / Н. А. Лиходед, А. К. Пашкович // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 121—123. – *Likhoded N. A.. On the choice of the grain in computing algorithms implementation on parallel computers with distributed memory.* – Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Physical-Mathematical Sciences. — 2008. – in Russian.
  18. Киркорова Л. С. Параллельные алгоритмы математических моделей: исследование локальности и применение языка Ада / Л. С. Киркорова, С.И. Киркоров // Вестник Харк. нац. ун-та. – № 863. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2009. – вып. 12. – С. 129-142. – *Kirkorova L. S. Concurrent algorithms in mathematics models: Ada locality study and application.* – Bulletin of KNU. — 2009. – in Russian.

УДК 658.51.012

## Использование кинетической теории для исследования колебаний потоковых параметров производственной линии

О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

Рассмотрена общая задача о развитии начального возмущения потоковых параметров синхронизированной производственной линии. Записано кинетическое уравнение технологического процесса. Получено дисперсионное уравнение и исследованы собственные колебания потоковых параметров производственной линии. Определены условия, выполнение которых обеспечивает затухание колебаний потоковых параметров.

**Ключевые слова:** *Кинетическое уравнение, поточная линия, PDE -модель, дисперсионное уравнение, предмет труда, система управления, технологический процесс, колебание потоковых параметров, устойчивость, затухание колебаний.*

Розглянуто загальну задачу про розвиток початкового збурення потокових параметрів синхронізованої виробничої лінії. Записано кінетичне рівняння технологічного процесу. Отримано дисперсійне рівняння і досліджені власні коливання потокових параметрів виробничої лінії. Визначено умови, виконання яких забезпечує згасання коливань потокових параметрів.

**Ключові слова:** *Кінетичне рівняння, потокова лінія, ПДЕ-модель, дисперсійне рівняння, предмет праці, система управління, технологічний процес, коливання потокових параметрів, стійкість, загасання коливань.*

The general problem about development of initial stream parameters perturbation in the synchronized production line is considered. The kinetic equation of technological process is created. The dispersive equation is obtained and own fluctuations of production line stream parameters have been investigated. Conditions are found providing the fluctuation of stream parameters attenuation.

**Key words:** *Kinetic equation, production line, PDE -model, the dispersion equation, the object of labor, management system, process, oscillation flow parameters, stability, damping.*

### 1. Введение

Состояние равновесных производственных процессов может быть описано моделями теории очередей (TQ-model) [1], моделями жидкости (Fluid-model) [2] и дискретно-событийными моделями (DES-model) [3]. Известные модели массового обслуживания использованы для описания производственных линий, функционирующих в установившемся, квазистатическом режиме. Применение их для моделирования переходных неустановившихся производственных процессов приводит к чрезмерному усложнению и большим затратам вычислительных ресурсов. Используются для одномоментного квазистатического описания производственных линий с небольшим количеством единиц оборудования (1-3 единицы). Дискретно-событийные модели хорошо себя зарекомендовали и удачно применены для описания работы производственных линий в переходном и установившемся режиме, но требуют больших затрат вычислительных ресурсов в связи с многократной имитацией процесса производства, состоящего из значительного количества технологических операций по обработки партий предметов труда внушительных размеров. Не пригодны для построения аналитических зависимостей между

потоковими параметрами, необходимых для качественной оценки проектируемых систем. Требуют использования устойчивых вычислительных алгоритмов. Fluid-модели ориентированы на малое количество интервалов разбиения технологического маршрута и линейные стационарные решения. Широкое распространение получило направление системной динамики. Основная трудность, не позволяющая эффективно использовать модели являются высокая размерность нелинейной системы уравнений и сложность вопрос построения замкнутой системы уравнений.

Каждый тип моделей имеет широкое применение, но ни один из них в полной мере не позволяет провести исследование характерных для современного поточного производства неравновесных переходных режимов функционирования производственной линии [9]. Использование TQ-моделей для описания переходных процессов приводит к чрезмерному усложнению задачи [1], DES-модели требуют больших затрат машинного времени, Fluid-модели ориентированы на малое количество интервалов обобщения технологического маршрута и линейные стационарные решения [2]. Наличие однообразных задач планирования и управления производством привело к попытке создания единой оптимизационной теории производственных систем с поточным способом организации производства.

Вначале S.C.Graves (1986) [13], а позднее U. S. Karmarkar (1989) предложили использовать в качестве основных параметров состояния пропускную способность производственной системы, объем незавершенного производства  $W$  и длительность производственного цикла. Для описания поведения параметров производственной системы U. S. Karmarkar ввел уравнение состояния, задающее связь между пропускной способностью производственной системы и объемом незавершенного производства  $W$ , получившее название clearing-функции. Этот подход значительно упорядочил описание производственных линий, но не устранил указанных выше недостатков, т.к. для построения уравнения состояния использованы существующие дискретно-событийные модели (DES), модели массового обслуживания (TQ) и жидкости (Fluid). Развитие производства требовало новые методы решения задач. Концентрация усилий исследователей над решением поставленных задач привела к тому, что в последнее десятилетие для проектирования поточных линий разработаны модели, содержащие уравнения в частных производных (PDE-модели). Введенный класс моделей объединил преимущества TQ-моделей, DES-моделей и Fluid-моделей, открыл новые возможности для проектирования систем управления производственными линиями. PDE-модели позволили учесть влияние внутренних факторов производства и имеющиеся технологические ограничения. Существенным преимуществом PDE-моделей является то, что они подробно позволили описать движение предметов труда от операции к операции, допускают решение в аналитическом виде и не нуждаются в значительных вычислительных ресурсах.

В последнее десятилетие для проектирования поточных линий используются модели, содержащие уравнения в частных производных (PDE-model) [6-9]. Введенный класс моделей расширил возможности проектирования систем управления поточными линиями, позволил перейти к детальному исследованию колебаний ее параметров.

## 2. Постановка проблемы и формулировка цели статьи

Известно, что поточная линия в неравновесном состоянии характеризуется тем, что в ней из-за наличия пространственной неоднородности плотности распределения предметов труда по состояниям и асинхронной работы технологического оборудования, размещенного вдоль технологического маршрута, постоянно существуют колебания параметров [8]. Амплитуда колебаний определяет размер емкости межоперационных накопителей, необходимых для обеспечения бесперебойной работы поточной линии. Колебания параметров тесно связаны со стохастическим характером взаимодействия предметов труда и производственного оборудования. Если величина межоперационных заделов становится равной нулю или превышает размер емкости межоперационных накопителей, то производственная линия останавливается, что является недопустимым для современного поточного производства. В связи с этим представляет практический интерес задача определения периода возникающих колебаний потоковых параметров и условия, при которых указанные колебания являются затухающими. Экспериментальная оценка периода колебаний потоковых параметров производственной линии дана в [8]. Однако, аналитические исследования зависимости периода колебаний от характерных параметров производственных линий в зарубежной и отечественной литературе отсутствуют. Это определило цель настоящей работы:

- а) разработать аналитический метод определения собственных частот колебаний потоковых параметров синхронизированных поточных линий;
- б) теоретически обосновать механизм возникновения колебаний потоковых параметров;
- в) найти условия, при которых колебания потоковых параметров синхронизированных производственных линий являются затухающими.

## 3. Теоретическое обоснование механизма возникновения колебаний потоковых параметров

Статистическое описание состояния предметов труда, находящихся в процессе технологической обработки, осуществляется функцией распределения  $\chi(t, S, \mu)$  в фазовом технологическом пространстве  $(S, \mu)$  [9,10]. Обобщенная координата  $S \in [0, S_d]$  (грн.) определяет степень готовности изделия [9,10], соответствует стоимости технологических ресурсов, перенесенных на предмет труда с себестоимостью  $S_d$ . Обобщенная координата  $\mu$  (грн./час) характеризует интенсивность переноса технологических ресурсов на предмет труда. Кинетическое уравнение [9,10] для функции распределения  $\chi = \chi(t, S, \mu)$  описывает движение предметов труда плотностью  $[\chi]_0(t, S)$  по технологическому маршруту с темпом их обработки  $[\chi]_{1\psi}(t, S)$  на оборудовании, расположенном с плотностью  $l_P = l_P(t, S)$  по технологическому маршруту

$$\frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial S} \mu + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial \mu} f(t, S) = l_P(t, S) \left\{ \int_0^{\infty} [\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) \tilde{\mu} \chi(t, S, \tilde{\mu}) d\tilde{\mu} - \mu \chi(t, S, \mu) \right\};$$

$$f(t, S) = \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right); \quad \int_0^{\infty} \varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) d\mu = 1; \quad \int_0^{\infty} \psi(t, S, m) dm = [\psi]_0(t, S). \quad (1)$$

Функции  $\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu)$  определяет вероятность перехода предмета труда из состояния  $(S, \tilde{\mu})$  в состояние  $(S, \mu)$  в результате воздействия оборудования.

Кинетическое уравнение (1) является нелинейным. Если допускается колебание потоковых параметров технологической линии с малой амплитудой, то  $\chi(t, S, \mu)$  можно линеаризовать

$$\chi(t, S, \mu) = \chi_0(t, S, \mu) + \chi_1(t, S, \mu), \quad \chi_0(t, S, \mu) \gg \chi_1(t, S, \mu) \quad (2)$$

где  $\chi_1 = \chi_1(t, S, \mu)$  - малое отклонение функции от установившегося равновесного невозмущенного состояния  $\chi_0 = \chi_0(t, S, \mu)$ . Будем полагать, что состояние предмета труда после воздействия оборудования не зависит от его состояния  $\tilde{\mu}$  до воздействия оборудования (1), т.е.  $\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) = \varphi_0(t, S, \mu)$ .

Для работающих в равновесном состоянии поточных линий с высокой концентрацией оборудования по технологическому маршруту  $l_P(t, S) \cdot S_d \gg 1$  кинетическое уравнений (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_0(t, S, \mu) \cdot [\chi]_{1\psi} - \mu \cdot \chi_0(t, S, \mu) &= 0; \quad f_0(t, S) = \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \cdot \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right); \\ \frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial S} m + \frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial m} f_0(t, S) &= 0; \quad \int_0^{\infty} \chi_0(t, S, m) dm = [\chi]_0(t, S), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varphi_0(t, S, \mu)$  представлена функцией вида [11, с.16]:

$$\varphi_0(t, S, \mu) = \frac{\beta^\nu \cdot \mu^{\nu-1} \cdot e^{-\beta\mu}}{\Gamma(\nu)}, \quad \Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\nu-1} dt, \quad \nu > 2, \quad \beta > 0. \quad (4)$$

С учетом (4) для установившегося равновесного режима

$$\chi_0 = [\chi]_{1\psi} \frac{\beta^\nu \mu^{\nu-2} e^{-\beta\mu}}{\Gamma(\nu)}, \quad B = \frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} = \frac{\nu}{\beta}, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \chi_0(\mu) = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \chi_0(\mu) = 0. \quad (5)$$

В ходе технологической обработки перед  $m$ -ым оборудованием образуется межоперационный технологический задел в виде очереди  $N_m = \int_{S_{m-1}}^{S_m} [\psi]_0(t, S) dS$

предметов труда [12, с.909-911]. Изменение плотности  $[\psi]_0(t, S)$  в кинетическом уравнении (1) приводит к изменению функции распределения предметов труда по состояниям  $\chi(t, S, \mu)$ , что вызывает изменение плотности предметов труда  $[\psi]_0(t, S)$  и, следовательно, изменение длины очереди  $N_m$ . Колебания длины очереди  $\nu = 3$  приводит к колебаниям функции распределения  $\chi(t, S, \mu)$ , и наоборот.

Рассмотрим колебания потоковых параметров производственной линии для распространенного случая синхронизации технологического оборудования [7-9].

При синхронизованном режиме работы поточной линии среднее время обработки предмета труда на каждой технологической операции одинаково, откуда следует

$$\frac{\partial[\chi]_{1\psi}(t,S)}{\partial S} = 0. \quad (6)$$

Для одномоментного описания [9,10]

$$\frac{\partial[\chi]_0(t,S)}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_{1\psi}(t,S)}{\partial S} = 0 \quad (7)$$

из условия синхронизации оборудования (6) следует  $\frac{\partial[\chi]_0(t,S)}{\partial t} = 0$ . Так как

плотность межоперационных заделов для синхронизованной линии не меняется со временем, то поместив часть предметов труда в межоперационные страховые накопители, можно начальное распределение предметов труда вдоль технологического маршрута представить в виде равномерного распределения плотности  $\frac{\partial[\chi]_0(0,S)}{\partial S} = 0$ . С учетом (4)-(7) кинетическое уравнение (1)

линеаризуем в окрестности установившегося равновесного невозмущенного состояния  $\chi_0 = \chi_0(t,S,\mu)$  (2)

$$\frac{\partial\chi_1}{\partial t} + \frac{\partial\chi_1}{\partial S} \cdot M - \frac{\partial\chi_0}{\partial m} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} \frac{\partial[y]_0}{\partial S} = -\lambda_P \mu \chi_1, \quad \int_0^{\infty} \chi_1 dm = [y]_0. \quad (8)$$

Поскольку (8) линейно и не содержит координат в явном виде, то искомые функции  $\chi_1 = \chi_1(t,S,\mu)$  и  $[y]_0 = [y]_0(t,S)$  разложим на интервале  $[0, S_d]$  в ряд Фурье по координате S. Решения уравнения (8) будем искать в виде  $\chi_{1j}(t,m)e^{ik_j S}$ ,  $[y_j]_0(t)e^{ik_j S}$ ,  $k_j = (2\pi j)/S_d$ . Тогда из (8) следует

$$\frac{\partial\chi_{1j}}{\partial t} + (ik_j + \lambda_P)\chi_{1j} \cdot M - \frac{\partial\chi_0}{\partial m} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_j]_0(t) = 0, \quad \int_0^{\infty} \chi_{1j}(t,m) dm = [y_j]_0(t). \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) воспользуемся Фурье преобразованием

$$\begin{aligned} \chi_{1j}(t,m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+\sigma}^{\infty+\sigma} e^{-i\omega t} \cdot \chi_{1j\omega}(m) d\omega, & \chi_{1j\omega}(m) &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \cdot \chi_{1j}(t,m) dt, \\ [y_j]_0(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+\sigma}^{\infty+\sigma} e^{-i\omega t} \cdot [y_j\omega]_0 d\omega, & [y_j\omega]_0 &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \cdot [y_j]_0(t) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Умножим слагаемые кинетического уравнения (9) на  $e^{i\omega t}$  и проинтегрируем по времени t. Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\partial\chi_{1j}(t,m)}{\partial t} e^{i\omega t} dt &= -\chi_{1j}(0,m) - i\omega \chi_{1j\omega}(m); \\ \int_0^{\infty} \frac{\partial\chi_0}{\partial m} \frac{B^3}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_j]_0(t) e^{i\omega t} dt &= \frac{\partial\chi_0}{\partial m} \frac{B^3}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_j\omega]_0; \end{aligned}$$



$$\int_0^{\infty} (ik_j + l_P) \chi_{1j}(t, m) m e^{i\omega t} dt = (ik_j + l_P) m \chi_{1\omega}(m), \quad (11)$$

получим

$$\chi_{1j\omega}(m) = \frac{\chi_{1j}(0, m) + \frac{\partial \chi_0}{\partial m} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_{j\omega}]_0}{i(k_j m - \omega) + l_P m}. \quad (12)$$

Выражение (9) позволяет записать соотношение

$$\int_0^{\infty} \chi_{1j\omega}(m) dm = [y_{j\omega}]_0. \quad (13)$$

Подставив (12) в (13), находим

$$[y_{k\omega}]_0 = \frac{1}{(ik_j + l_P) - B^3 \frac{ik_j}{[\chi]_{1\psi}} \int_0^{\infty} \frac{\partial \chi_0}{\partial m} \frac{dm}{(m - p/\beta)}} \int_0^{\infty} \frac{\chi_{1j}(0, m)}{(m - p/\beta)} dm, \quad p = \beta \frac{\omega(k_j + il_P)}{k_j^2 + l_P^2} \quad (14)$$

Используя (5), получим:

$$\frac{\partial \chi_0(\mu)}{\partial m} = \left( \frac{(\nu - 2)}{m} - \beta \right) \chi_0(\mu). \quad (15)$$

Принимая во внимание, что [13, с.252]

$$\frac{1}{[\chi]_{1\psi}} \int_0^{\infty} \frac{\partial \chi_0(\mu)}{\partial m} \frac{dm}{(m - p/\beta)} = -\beta^3 ((\nu - 2) - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p, \quad (16)$$

равенство (14) запишем в виде

$$[y_{k\omega}]_0 = \frac{1}{(ik_j + l_P) + \nu^3 ik_j ((\nu - 2) - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p} \int_0^{\infty} \frac{\chi_{1j}(0, m)}{(m - p/\beta)} dm \quad (17)$$

Применим к (12), (17) обратное преобразование Фурье, найдем искомые функции  $\chi_1(t, S, \mu)$ ,  $[y]_0(t, S)$ . Однако, уже общие формулы (12), (17) позволяют исследовать поведение  $\chi_{1j}(t, m)$  и  $[y_j]_0(t)$  с ростом  $t$ . Асимптотическое поведение функций при больших  $t$  определяется характером особенностей преобразования Лапласа. Функция  $\chi_{1j\omega}(m)$  имеет такие же особенности, что и  $[y_{k\omega}]_0$ , и добавочный полюс  $m\beta = p$ . Рассмотрим вопрос об особенностях функции  $[y_{k\omega}]_0$ . Будем полагать, что функция  $\chi_{1j}(0, m)$ , задающая начальное возмущение, не имеет особенностей при конечных значениях  $m$ . Тогда асимптотика интеграла (17) при больших  $t$  задается нулями уравнения

$$(ik_j + l_P) + \nu^3 ik_j ((\nu - 2) - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p = 0. \quad (18)$$

Для синхронизированной поточной линии  $\tau_1 \approx \tau_2 \approx \dots \approx \tau_m \approx \dots \approx \tau_M \approx \tau_0$  ( $N \gg M$ ), что позволяет длительность производственного цикла для обработки партии  $N$ -деталей на  $M$ -операциях представить выражением

$$T_d \approx \sum_{m=1}^M \tau_m + \tau_M \cdot (N-1) \approx \tau_0 \cdot N. \quad (19)$$

Введем  $\omega_d = 2\pi/T_d$  и  $\omega_0 = 2\pi/\tau_0 = 2\pi \cdot [\chi]_{1\psi}$ , ограничивающие интересный для теоретических и практических исследований диапазон частот колебаний  $\omega$  потоковых параметров, ( $\omega_d \leq \omega \leq \omega_0$ ). При изучении поточной линии рассмотрим колебания, период которых больше времени выполнения технологической операции  $\tau_0$  и не превышает длительность производственного цикла  $1 \leq \left| \omega/\omega_d \right| \ll T_d/\tau_0$ . При этом предполагаем, что длина волны колебаний потоковых параметров  $\gamma_j = 2\pi/k_j$  исследуемой линии превышает усредненную протяженность участка технологического маршрута, ограниченного одной технологической операцией и меньше протяженности всего технологического маршрута  $S_d$ :  $S_d/M = 1/l_p \ll \gamma_j \leq S_d$ .

Уравнение (18), определяющее зависимость между  $\omega$  и  $k_j$ , является дисперсионным уравнением поточной линии. Используя обозначение

$$\varepsilon = k_j/l_p = \frac{2\pi j}{S_d l_p} = \frac{2\pi j}{M} \ll 2\pi, \quad [\chi_0]_0 S_d = N, \quad l_p S_d = M. \quad (20)$$

дисперсионное уравнение поточной линии (18) представим в виде соотношения безразмерных параметров  $\varepsilon = k_j/l_p$  и  $\omega/\omega_d$

$$D\left(\varepsilon, \omega/\omega_d\right) = 1 + i\varepsilon \left( 1 + v^3(v-2-p) \frac{p^{v-3} e^{-p}}{\Gamma(v)} \ln p \right) = 0, \quad p = \frac{2\pi \cdot v}{M} \frac{\omega}{\omega_d} \frac{(\varepsilon + i)}{(\varepsilon^2 + 1)}. \quad (21)$$

Дисперсионное уравнение (21) позволяет определить частоты колебаний величины межоперационных заделов вдоль производственной линии.

### 3. Анализ результатов

При решении практических задач управления параметрами поточной линии интересуют производственные явления длительностью, не превышающей протяженность производственного цикла, когда партия деталей еще изготавливается на поточной линии. Время обработки предмета труда является минимальной обобщенной единицей, характеризующей временную структуру производственного процесса. На рис.1 и рис.2 представлено поведение действительной  $\text{Re}\left(D\left(\varepsilon, \omega/\omega_d\right)\right)$  и мнимой  $\text{Im}\left(D\left(\varepsilon, \omega/\omega_d\right)\right)$  составляющих функции

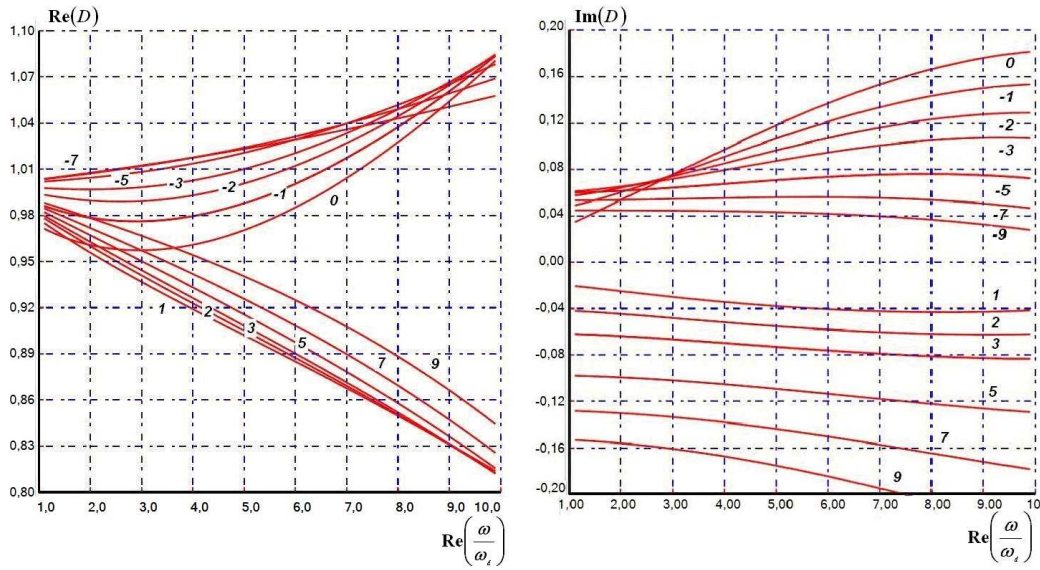


Рис.1.График функции  $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$  для производственной линии ( $M=400, \nu=3, j=1$ )

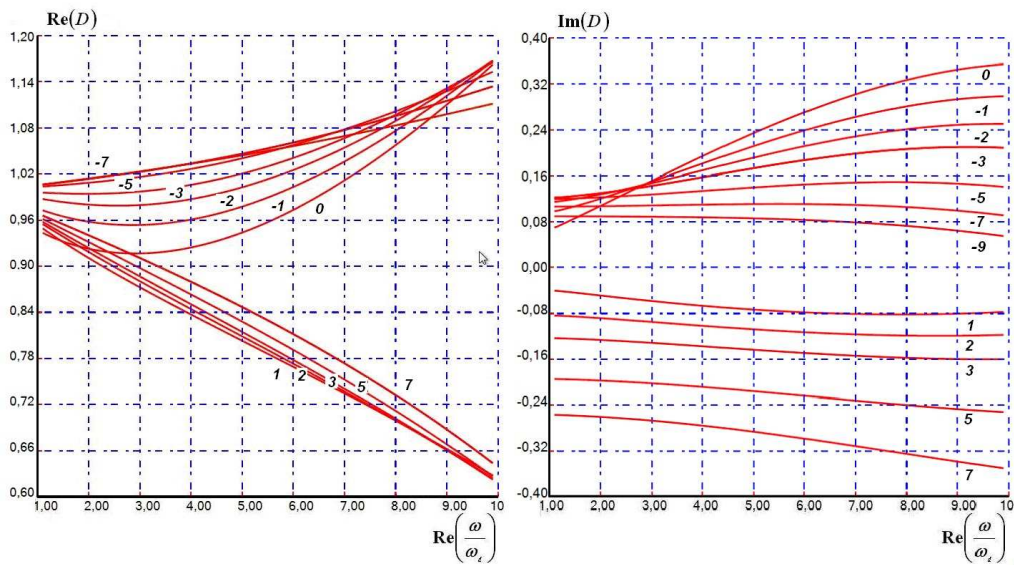


Рис.2.График функции  $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$  для производственной линии ( $M=400, \nu=3, j=2$ )

$D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$  для производственной линии ( $M=400, \nu=3$ ) в диапазоне изменения параметров  $1.0 \leq \text{Re}\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right) \leq 10.0$ ,  $(-10.0) \leq \text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right) \leq 10.0$  при  $j=1$

( $\varepsilon=0.015$ ) и  $j=2$  ( $\varepsilon=0.031$ ) соответственно. Представленные кривые соответствует разным значениям  $\text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right)$ . Качественное различие между множеством кривых для  $k_1 = \frac{2\pi}{S_d}$  ( $\varepsilon=0.015$ ) и  $k_2 = \frac{4\pi}{S_d}$  ( $\varepsilon=0.031$ ) несущественное, что обусловлено видом асимптотического представления  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p$ . Заметно изменился график функции  $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$  при уменьшении количества технологических операций от  $M=400$  к  $M=200$  ( $M=200, \nu=3, j=1, \varepsilon=0.031$ ) (рис.3). Численный анализ функции  $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$  показывает, что при  $M \gg 1$  ( $\nu=3, \varepsilon \rightarrow 0$ ) дисперсионное уравнение не имеет корней. Это означает, что возмущения  $[y]_0 = [y]_0(t, S)$  являются затухающими.

Решение дисперсионного уравнения для диапазона значений  $\varepsilon \in [0.01..3.0]$  ( $M=400, \nu=3, j=1..200$ ) представлено на рис.4. Пусть  $\frac{\omega_k}{\omega_d}$  тот из корней дисперсионного уравнения  $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$ , который обладает меньшей по величине мнимой частью  $\text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right) > 0$  (ближайший к вещественной оси). Тогда в интеграле выражения (17) будет существен (при больших  $t$ ) только вычит относительно полюса  $\omega_k$ . Остальные части интеграла будут экспоненциально малы по сравнению с указанным вариантом из-за наличия в подынтегральном выражении множителя  $e^{-i\omega t}$ , быстро убывающего с увеличением  $\text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right) > 0$ . Асимптотический закон убывания возмущения плотности межоперационных заделов дается выражением

$$[y_j]_0(t) \approx \exp(-i \text{Re } \omega_k t) \cdot \exp(-\text{Im } \omega_k t). \quad (22)$$

Таким образом, с течением времени возмущения плотности  $[y]_0(t, S)$  затухают экспоненциально с декрементом  $\text{Im } \omega_k$ . На рис.1 представлено численное решение дисперсионного уравнения (21) для диапазона значений  $\varepsilon \in [0.01..3.0]$  ( $\nu=3$ ). С увеличением количества  $M$  технологического оборудования (операций) параметр  $\varepsilon$  уменьшается, что влечет за собой уменьшение характерного времени затухания возмущений  $\tau \approx T_d \text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right)^{-1}$ .

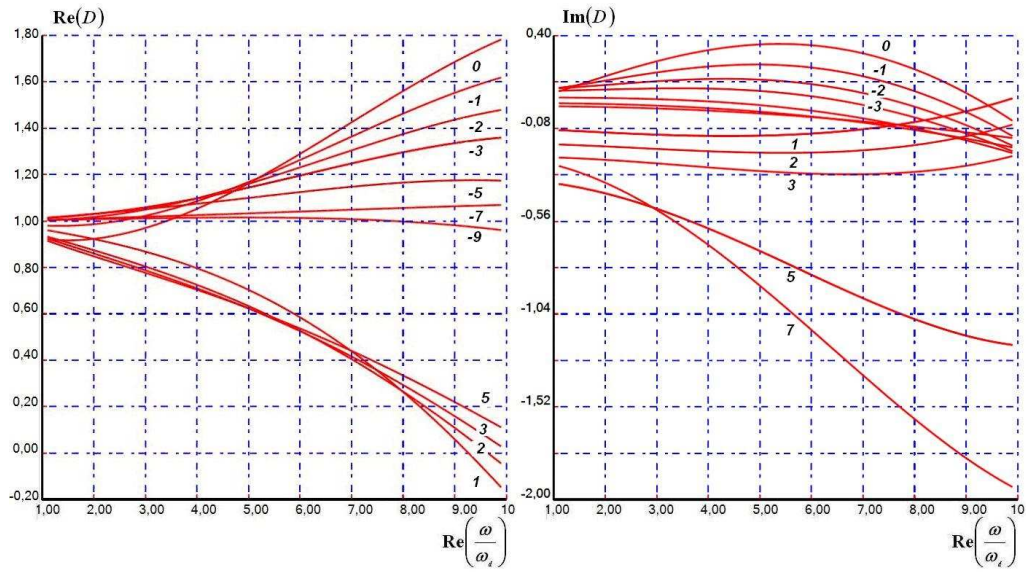


Рис.3.График функции  $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$  для производственной линии ( $M=200, \nu=3, j=1$ )

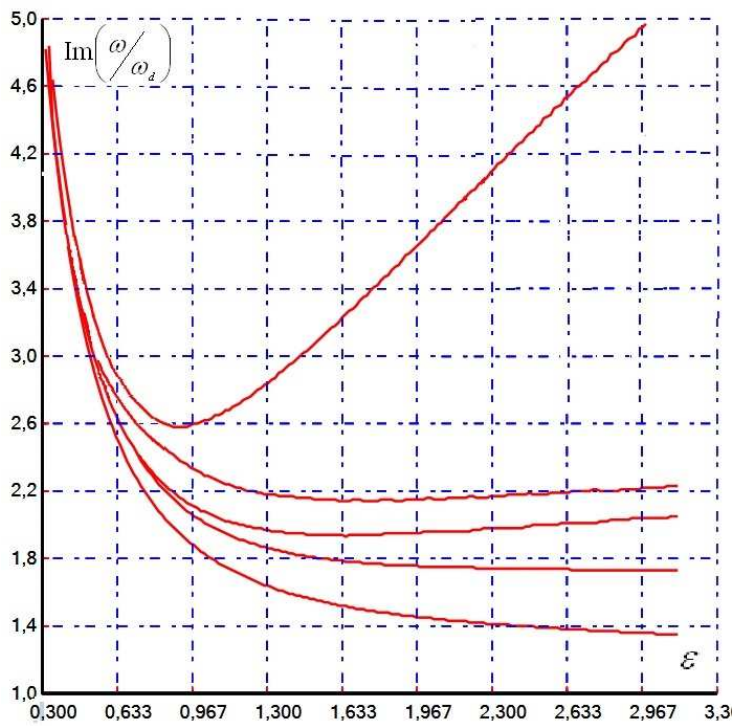


Рис.4.  $\text{Im}(\omega/\omega_d)=f(\varepsilon)$  для производственной линии,  $\nu=3$

Оценим характерное время затухания возмущения плотности  $[c]_0(t, S)$  для поточной линии Intel, содержащей  $M=200$  технологических операций при длительности производственного цикла  $T_d=8..12$  недель [8]. Для  $\varepsilon = \left(\frac{2\pi}{200}\right) = 0,0314$  ( $\nu=3$ ) с использованием результатов численных расчетов (рис.4) определяем теоретическое характерное время затухания  $\tau \approx 1..2$  недели. Наблюдения, полученные с производственных линий ( $M=200..400$ ,  $\nu=3$ ,  $\varepsilon=0.02..0.04$ ) по изготовлению полупроводниковой продукции Intel подтверждают численные расчеты для времени затухания колебаний плотности  $[c]_0(t, S)$  [14]. Экспериментальные данные [14, с.445] свидетельствуют о том, что на производственной линии периодически возникают возмущения потоковых параметров продолжительностью до  $\tau \approx 1..2$  недели при производственном цикле  $T_d=8..12$  недель,

В заключении остановимся на свойствах функции распределения  $\chi(t, S, \mu)$ . Искомая функция получается подстановкой (12) в (10). Помимо полюсов, происходящих от  $[y_{k\omega}]_0$ , подынтегральное выражение имеет полюс в точке  $i(k_j m - \omega) + \lambda_{P.M} = 0$ . По вычету в нем находим

$$\chi_{1j}(t, m) \approx \exp(-\lambda_{P.M} t). \quad (23)$$

Возмущение функции распределения затухает со временем.

Функция  $\chi_1(t, S, m) \approx \exp(ik_j S - ik_j m t - \lambda_{P.M} t)$  является решением кинетического уравнения

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial t} + \frac{\partial \chi_1}{\partial S} m = -\lambda_{P.M} \chi_1, \quad (24)$$

при начальном распределении  $\chi_{1j}(0, m) \exp(ik_j S)$  с характерным временем затухания возмущений  $\langle \tau \rangle \approx (\lambda_{P.M})^{-1} \approx \frac{T_d}{M}$  функции распределения  $\chi(t, S, \mu)$ . Для производственного цикла  $T_d=8..12$  недель [14, с.445] период затухания составляет  $\langle \tau \rangle \approx 0.1$  недели.

### Выводы

Для синхронизированной производственной линии теоретически обосновано затухание возмущений потоковых параметров. Получено и численно решено дисперсионное уравнение для потоковых параметров производственной линии. Показано, что для синхронизированных производственных линий ( $\nu=3$ ,  $\varepsilon=0.2..0.4$ ) при большом количестве технологических операций ( $M=40..400$ ) и предметов труда ( $N \approx 10^4$  шт., [8]), распределенных вдоль технологического маршрута, характерное время существования малых возмущений плотности  $[c]_0(t, S)$  и функции распределения  $\chi(t, S, \mu)$  составляет соответственно  $\tau \approx 1..2$  недели и  $\langle \tau \rangle \approx 0.1$  недели для производственного цикла

$T_d = 8..12$  недель [14,с.445]. Колебания возникают неизбежно и являются затухающими

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gross D. Fundamentals of Queueing Theory. / D. Gross, C. M. Harris.–New York, 1974.– 490 p.
2. Harrison J. Brownian Motion and Stochastic Flow Systems. / J. Harrison. – New York, 1995. – 142 p.
3. Ramadge P. The control of discrete event systems “IEEE Proc.”. / P. Ramadge, W. Wonham. – New York, 1989. – vol. 77, №1. – P. 81 – 98.
4. Berg R. Partial differential equations in modelling and control of manufacturing systems,”M.S. thesis”. / R. Berg. – Netherlands, Eindhoven Univ. Technol., 2004. – 157 p.
5. Armbruster D. The production planning problem: Clearing functions, variable leads times, delay equations and partial differential equations: Decision Policies for Production Networks. / D. Armbruster, K. G. Kempf – Springer Verlag, 2012. – P. 289 – 303.
6. Lefebvre E. Modeling, Validation and Control of Manufacturing Systems. / E. Lefebvre, R. Berg, J. Rooda – Boston, Massachusetts, 2004. – P. 4583 – 4588.
7. Berg R. Modelling and Control of a Manufacturing Flow Line using Partial Differential Equations. IEEE Transactions on Control Systems Technology. / R.Berg, E.Lefebvre, J.Rooda– Boston, 2008. – P. 130 – 136
8. Ambruster D. Continuous models for production flows. In Proceedings of the 2004 American Control Conference. / D. Armbruster, C. Ringhofer, T- J. Jo – Boston, MA, USA, 2004. – P. 4589 – 4594.
9. Пигнастый О. М. Статистическая теория производственных систем. / О. М. Пигнастый. – Х.: Изд. ХНУ им. Каразина, 2007. – С. 388.
10. Armbruster D. Kinetic and fluid model hierarchies for supply chains supporting policy attributes. Bulletin of the Institute of Mathematics. / D. Armbruster, D. Marthaler, C. Ringhofer – Academica Sinica 66, 2006. – P. 896 – 920.
11. Zhang L. System-theoretic properties of Production Lines. A dissertation submitted the degree of Doctor of Philosophy (Electrical Engineering: Systems). / L.Zhang– Michigan, 2009. – P. 289
12. Armbruster D. A model for the dynamics of large queuing networks and supply chains. / D. Armbruster, P. Degond, C. Ringhofer – SIAM Journal on Applied Mathematics 83, 2006. – P. 896–920.
13. Сборник задач по теории аналитических функций. / [Евграфов М. А., Бежанов К. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В, Шабунин М. И.]. – М.: Наука, 1972. – С. 416.
14. Tian F. An iterative approach to item-level tactical production and inventory planning. / F. Tian, S. Willems, K. Kempf –International Journal of Production Economics, 2011. – vol. 133. – P. 439 – 450.

УДК 517.922:537.8

## Устойчивость по Лагранжу и численный метод решения полулинейных дескрипторных уравнений

М. С. Филипковская

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

Найдены достаточные условия глобальной разрешимости и устойчивости по Лагранжу полулинейных дескрипторных уравнений с регулярным характеристическим пучком индекса 1. Устойчивость по Лагранжу означает, что все решения уравнения ограничены на всей области определения. Для нелинейной правой части уравнения не требуется выполнения ограничения типа глобального условия Липшица. Предложен численный метод решения дескрипторного уравнения. В качестве приложения рассмотрена математическая модель нелинейного радиотехнического фильтра. Полученные численные решения подтверждают результаты теоретических исследований.

**Ключевые слова:** дескрипторное уравнение, существование, устойчивость, ограниченность глобальных решений, численный метод.

Знайдено достатні умови глобальної розв'язності та стійкості за Лагранжем напівлінійних дескрипторних рівнянь з регулярним характеристичним жмутком індексу 1. Стійкість за Лагранжем означає, що всі розв'язки рівняння обмежені на всій області визначення. Для нелінійної правої частини рівняння не вимагається виконання обмеження типу глобальної умови Липшица. Запропоновано чисельний метод розв'язання дескрипторного рівняння. В якості застосування розглянуто математичну модель нелінійного радіотехнічного фільтра. Отримані чисельні розв'язки підтверджують результати теоретичних досліджень.

**Ключові слова:** дескрипторне рівняння, існування, стійкість, обмеженість глобальних розв'язків, чисельний метод.

The sufficient conditions of the global solvability and the Lagrange stability of semilinear descriptive equations with regular characteristic beam of index 1 are found. The Lagrange stability means that all solutions of an equation are bounded over the entire domain. The nonlinear right side of the equation is not required to satisfy the constraints of the global condition of Lipschitz type. The numerical method for solving the descriptive equations is proposed. The mathematical model of nonlinear radio engineering filter is considered as application. The obtained numerical solutions prove the results of theoretical investigations.

**Key words:** descriptor, descriptive equation, existence, stability, limitation of global solutions, numerical method.

### 1. Введение

Дифференциально-алгебраические (дескрипторные, вырожденные) уравнения имеют большой спектр практического применения. Полулинейные дескрипторные уравнения возникают в математических моделях экономики, теории управления, гидродинамики [1, 2], при моделировании переходных процессов в электрических цепях [3-5]. Подавляющее число известных в настоящее время работ посвящено исследованию локальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений (см. монографии [1, 5, 6] и библиографии в них). Данная работа посвящена глобальным решениям, поскольку наличие глобального по времени решения гарантирует достаточно



долгий срок действия соответствующей реальной системы, что представляет интерес для теории динамических систем и приложений.

Основную проблему для исследования глобальной разрешимости и устойчивости порождает нелинейная функция  $f(t, x)$  в правой части уравнения. Решение данной проблемы основано на результатах из [7,8]. Важно отметить, что в доказанных теоремах нелинейная функция может не удовлетворять ограничению типа глобального условия Липшица. Это позволяет применять теоремы к более широкому классу прикладных задач. Другая проблема – наличие необратимой матрицы при производной и, соответственно, присутствие алгебраических связей в рассматриваемой системе.

Для нахождения приближенных решений дескрипторных уравнений используют методы Рунге-Кутты, Розенброка,  $\varepsilon$ -вложений [1, 5, 6]. При этом вместо исходного уравнения рассматривают жесткую систему  $\dot{y} = f(y, z)$ ,  $\varepsilon \dot{z} = g(z, y)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , которой соответствует приведенная система  $\dot{y} = f(y, z)$ ,  $0 = g(z, y)$  индекса 1 (выполнено ограничение  $\| [g_z(y, z)]^{-1} \| \leq M$  в окрестности точного решения [6]), либо систему  $\dot{x} = f(t, x, y)$ ,  $\varepsilon \dot{y} = g(t, x, y)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  [1, 5]. Также применяются различные комбинированные методы, требования которых не выполнены для уравнения (3.1) электрической цепи (см. рис.6.1) на любом заданном отрезке  $[t_0, T]$ . В работе предложен численный метод решения задачи Коши (3.1), (3.2) (см. ниже) на заданном отрезке  $[t_0, T]$  с использованием явной схемы Эйлера и формулы Тейлора.

## 2. Цель работы

Цель работы – получить достаточные условия существования ограниченных глобальных решений и решений с конечным временем определения для полулинейных дескрипторных уравнений, провести численный анализ теоретических результатов исследования. Ограниченность всех решений уравнения представляет собой вид устойчивости, который в [7] назван устойчивостью по Лагранжу.

Рассматриваются следующие задачи. Первая – сформулировать и доказать теоремы о существовании глобального решения полулинейного дескрипторного уравнения, ограниченного на всей области определения, и решения, имеющего конечное время определения. Вторая – разработать численный метод нахождения решений. Третья – применить полученные результаты к исследованию моделей нелинейных электрических цепей.

## 3. Постановка задачи и вспомогательные сведения

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения:

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t, x), \quad (3.1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (t_0 \geq 0), \quad (3.2)$$

где  $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(t, x): [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – непрерывная функция,  $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – линейные операторы, вообще говоря, необратимые.

Функция  $x(t)$  называется *решением задачи* (3.1), (3.2) на некотором интервале  $[t_0, t_1)$ ,  $t_1 \leq \infty$ , если  $x(t) \in C([t_0, t_1), \mathbb{R}^n)$ ,  $Ax(t) \in C^1([t_0, t_1), \mathbb{R}^n)$ ,  $x(t)$  удовлетворяет (3.1) на  $[t_0, t_1)$  и (3.2).

Решение  $x(t)$  задачи (3.1), (3.2) называется *неограниченно продолжаемым*, если оно может быть продолжено для всех  $t \geq t_0$ . Если решение  $x(t)$  имеет *конечное время определения*, то есть не продолжаемо на весь луч  $[t_0, +\infty)$ , то существует такое  $T > t_0$ , что  $\lim_{t \rightarrow T-0} \|x(t)\| = \infty$  [7].

Предполагается, что  $\lambda A + B$  – *регулярный пучок индекса 1*, то есть существует резольвента  $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$  и выполнено ограничение  $\exists C_1, C_2 > 0: \|R(\lambda)\| \leq C_1, |\lambda| \geq C_2$ , где  $R(\lambda)$  – комплексная матрица порядка  $n$  и ее норма рассматривается в комплексном пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Существуют вещественные спектральные проекторы  $P_i: \mathbb{R}^n \rightarrow X_i$ ,  $Q_i: \mathbb{R}^n \rightarrow Y_i$  [9], которые могут быть вычислены контурным интегрированием и расщепляют пространство  $\mathbb{R}^n$  в прямые суммы подпространств:

$$\mathbb{R}^n = X_1 \dot{+} X_2, X_i = P_i \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n = Y_1 \dot{+} Y_2, Y_i = Q_i \mathbb{R}^n, i = 1, 2. \quad (3.3)$$

Индукцированные операторы  $A_i, B_i: X_i \rightarrow Y_i$ ,  $i = 1, 2$  таковы, что  $A_2 = 0$ , существуют линейные ограниченные операторы  $A_1^{-1}, B_2^{-1}$  и выполнены равенства:  $AP_j = Q_j A$ ,  $BP_j = Q_j B$ ,  $j = 1, 2$  [9]. Оператор  $G = Q_1 A + Q_2 B$ ,  $GX_j = Y_j$ ,  $j = 1, 2$ , имеет обратный [10]. Относительно разложения (3.3) любой вектор  $x \in \mathbb{R}^n$  единственным образом представим в виде суммы  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1 = P_1 x \in X_1$ ,  $x_2 = P_2 x \in X_2$ .

*Аддитивным разложением единицы*  $E_Z$  в  $s$ -мерном линейном нормированном пространстве  $Z$  называется система проекторов  $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ ,  $\Theta_k: Z \rightarrow Z$  таких, что  $\Theta_i \Theta_j = \Theta_j \Theta_i = \delta_{ij} \Theta_i$  ( $\delta_{ij}$  – символ Кронекера) и  $E_Z = \sum_{k=1}^s \Theta_k$ . Рассмотрим оператор-функцию  $\Phi(x)$ , отображающую  $D \subset X$  в  $L(X, Z)$ , где  $X$  –  $s$ -мерное линейное нормированное пространство,  $L(X, Z)$  – пространство линейных ограниченных операторов из  $X$  в  $Z$ . Оператор-функция  $\Phi(x): D \rightarrow L(X, Z)$  называется *базисно обратимой* на выпуклой оболочке  $\text{conv}\{u, v\}$  векторов  $u, v \in D$ , если для любого набора векторов  $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^s \subset \text{conv}\{u, v\}$  и некоторого аддитивного разложения единицы  $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$  в

$s$ -мерном пространстве  $Z$  оператор  $\Lambda = \sum_{k=1}^s \Theta_k \Phi(\tilde{x}_k) \in L(X, Z)$  обратим,

$\Lambda^{-1} \in L(Z, X)$  [8]. Из базисной обратимости оператор-функции  $\Phi(x)$  на выпуклой оболочке  $\text{conv}\{u, v\}$  следует обратимость в любой точке  $x \in \text{conv}\{u, v\}$  ( $x = \lambda v + (1-\lambda)u, \lambda \in [0, 1]$ ). Обратное утверждение не верно, кроме случая, когда пространства  $X, Y$  одномерны.

Уравнение устойчиво по Лагранжу или устойчиво в смысле Лагранжа, если все его решения ограничены на всей области определения [7].

#### 4. Ограниченность глобальных решений полулинейных дескрипторных уравнений

Запись  $\int_c^{+\infty} f(t) dt = \infty$  означает, что несобственный интеграл от некоторой

константы  $c$  до бесконечности расходится,  $\int_c^{+\infty} f(t) dt < \infty$  – что интеграл сходится.

**Теорема 4.11.** Пусть функция  $f(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  имеет непрерывную частную производную  $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$  всюду на  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda A + B$  – регулярный пучок индекса 1. Пусть

$$\forall t \geq 0 \exists x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in L_0 = \{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid Q_2[Bx - f(t, x)] = 0\} \quad (4.1)$$

и для любых  $u_i \in X_2$  таких, что  $(t, P_1 x + u_i) \in L_0, i = 1, 2$ , оператор-функция

$$\Phi(u) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, P_1 x + u)) - B \right] P_2 \quad (4.2)$$

( $\Phi(u) \in C(X_2, L(X_2, Y_2))$ ) является базисно обратимой на выпуклой оболочке  $\text{conv}\{u_1, u_2\}$ . Пусть для некоторого самосопряженного положительного оператора  $H = H^* > 0 \in L(X_1)$  и числа  $R > 0$  существуют функции  $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$  и  $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ , где  $v = 1/2(H P_1 x, P_1 x)$ ,  $U(v) > 0$  при  $v > 0$ ,  $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = +\infty$ , такие, что для любых  $t \in [0, \infty)$ ,  $\|P_1 x\| \geq R$  выполнено

$$(H P_1 x, G^{-1}[-B P_1 x + Q_1 f(t, x)]) \leq k(t) U(v). \quad (4.3)$$

Тогда для любой начальной точки  $(t_0, x_0) \in L_0$  существует единственное решение  $x(t)$  задачи Коши (3.1), (3.2) на  $[t_0, \infty)$ .

Если  $\int_{t_0}^{+\infty} k(t)dt < +\infty$  и существуют положительные числа  $C, M < \infty$  такие, что для любых  $t \in [0, \infty)$ ,  $\|P_1 x\| \leq M$  выполнена оценка

$$\|G^{-1}Q_2 f(t, P_1 x)\| \leq C, \tag{4.4}$$

то уравнение (3.1) устойчиво по Лагранжу.

**Доказательство.** Применяя к уравнению (3.1) проекторы  $Q_1, Q_2$  и оператор  $G^{-1}$  получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(P_1 x) + G^{-1}BP_1 x = G^{-1}Q_1 f(t, x), \\ G^{-1}Q_2 f(t, x) - P_2 x = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Обозначим  $\dim X_1 = m, \dim X_2 = d, d = n - m$ . Введем операторы  $P_m : \mathbb{R}^m \rightarrow X_1, P_d : \mathbb{R}^d \rightarrow X_2$ , для которых, очевидно, существуют обратные операторы  $P_m^{-1} : X_1 \rightarrow \mathbb{R}^m, P_d^{-1} : X_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Обозначим  $z = P_m^{-1}P_1 x, v = P_d^{-1}P_2 x, x = P_m z + P_d v$ . Уравнения системы (4.5) умножим на  $P_m^{-1}, P_d^{-1}$  соответственно и получим эквивалентную (4.5) систему

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z + P_m^{-1}G^{-1}BP_m z = P_m^{-1}G^{-1}Q_1 \tilde{f}(t, z, v), \\ P_d^{-1}G^{-1}Q_2 \tilde{f}(t, z, v) - v = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\tag{4.7}$$

где  $\tilde{f}(t, z, v) = f(t, P_m z + P_d v)$ .

Рассмотрим отображение  $F(t, z, v) = P_d^{-1}G^{-1}Q_2 \tilde{f}(t, z, v) - v$ . Оно непрерывно на  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  и имеет непрерывные частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} F(t, z, v) &= P_d^{-1}G^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x)) P_m, \\ \frac{\partial}{\partial v} F(t, z, v) &= P_d^{-1} \left[ G^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x)) - P_2 \right] P_d = P_d^{-1}G^{-1} \Phi(P_d v) P_d, \end{aligned}$$

где последнее равенство эквивалентно (4.2) при  $u = P_d v$ , а  $P_d^{-1}P_2 P_d = E_{\mathbb{R}^d}$ .

Выберем любые  $v_i \in \mathbb{R}^d$  такие, что  $(t, z, v_i) \in \tilde{L}_0 = \{(t, z, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d : P_d^{-1}G^{-1}Q_2 \tilde{f}(t, z, v) - v = 0\}, i = 1, 2,$  и любые  $\tilde{v}_k \in \text{conv}\{v_1, v_2\}, k = \overline{1, d}$ . Из условия базисной обратимости функции  $\Phi(u)$  (4.2) следует обратимость действующего в  $\mathbb{R}^d$  оператора  $\Lambda = \sum_{k=1}^d \hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} F(t, z, \tilde{v}_k) = \sum_{k=1}^d \hat{\Theta}_k P_d^{-1}G^{-1} \Phi(P_d \tilde{v}_k) P_d$ , где  $\{\hat{\Theta}_k\}_{k=1}^d$  – аддитивное разложение единицы в  $\mathbb{R}^d$ . Таким образом, для любых  $(t, z, v_i) \in \tilde{L}_0, i = 1, 2,$

функція  $\Psi(v) = \frac{\partial}{\partial v} F(t, z, v)$  является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке  $\text{conv}\{v_1, v_2\}$ . Следовательно, для любой точки  $(t, z, v) \in \tilde{L}_0$  существует обратный оператор  $\left[ \frac{\partial}{\partial v} F(t, z, v) \right]^{-1}$ .

Пусть  $t_*$  – произвольная точка из  $[0, \infty)$ . Выберем  $z_* \in \mathbb{R}^m$ ,  $v_* \in \mathbb{R}^d$  так, чтобы  $(t_*, z_*, v_*) \in \tilde{L}_0$ , это возможно в силу условия (4.1). По теоремам о неявной функции [11, с. 294, 298] существуют окрестности  $U_\delta = U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(z_*)$ ,  $U_\varepsilon(v_*)$  и единственная функция  $v = v(t, z) \in C(U_\delta, U_\varepsilon(v_*))$ , непрерывно дифференцируемая по  $z$ , такая, что  $F(t, z, v(t, z)) = 0$ ,  $(t, z) \in U_\delta$ , и  $v(t_*, z_*) = v_*$ . Данное утверждение выполнено для всех точек  $t \in [0, \infty)$ ,  $z \in D_z$ ,  $v \in D_v$ ,  $[0, \infty) \times D_z \times D_v \subset \tilde{L}_0$ , где области  $D_z \subset \mathbb{R}^m$ ,  $D_v \subset \mathbb{R}^d$  такие, что  $P_m^{-1} P_1 x_0 \in D_z$ ,  $P_d^{-1} P_2 x_0 \in D_v$ . Определим глобальную функцию  $v = \eta(t, z) : [0, \infty) \times D_z \rightarrow D_v$  в точке  $(t_*, z_*)$  как  $\eta(t_*, z_*) = v(t_*, z_*)$ . Так как  $v(t_*, z_*) = v_*$  и  $(t_*, z_*, v_*) \in \tilde{L}_0$ , то  $(t_*, z_*, \eta(t_*, z_*)) \in \tilde{L}_0$ .

Рассмотрим точки  $(t, z, v_i) \in \tilde{L}_0$ ,  $i = 1, 2$ , очевидно,  $F(t, z, v_i) = 0$ . Проекция  $F_k(t, z, v) = \hat{\Theta}_k F(t, z, v)$ ,  $k = \overline{1, d}$ , являются функциями со значениями в одномерных пространствах  $R_k = \hat{\Theta}_k \mathbb{R}^d$ , изоморфных  $\mathbb{R}$ . Согласно формуле конечных приращений:  $F_k(t, z, v_2) - F_k(t, z, v_1) = \frac{\partial}{\partial v} F_k(t, z, \tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0$ ,  $\tilde{v}_k \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$ ,  $k = \overline{1, d}$ . Следовательно,  $\hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} F_k(t, z, \tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0$ ,  $k = \overline{1, d}$ , откуда получаем:  $\Lambda(v_2 - v_1) = 0$ , значит,  $v_2 = v_1$ .

Доказано, что

$$\forall (t, z) \in [0, \infty) \times D_z \exists! v \in D_v : (t, z, v) \in \tilde{L}_0, \quad (4.8)$$

и в некоторой окрестности каждой точки  $(t_*, z_*) \in [0, \infty) \times D_z$  существует единственное решение  $v = v(t, z)$  уравнения (4.7), непрерывное по совокупности переменных  $t, z$  и непрерывно дифференцируемое по  $z$ . Значит функция  $v = \eta(t, z)$  в этой окрестности совпадает с  $v(t, z)$  и является решением уравнения (4.7) с соответствующими свойствами гладкости. Покажем, что функция  $v = \eta(t, z)$  единственная на всей области определения. Действительно, если бы существовала функция  $v = \mu(t, z)$ , обладающая в некоторой точке  $(t_*, z_*) \in [0, \infty) \times D_z$  теми же свойствами, что и  $v = \eta(t, z)$ , то, в силу (4.8),  $\eta(t_*, z_*) = \mu(t_*, z_*) = v_*$ . Следовательно,  $\eta(t, z) = \mu(t, z)$  на  $[0, \infty) \times D_z$ .

Подставим  $v = \eta(t, z)$  в (4.6):

$$\frac{d}{dt}z = P_m^{-1}G^{-1}[-BP_m z + g(t, z)], \quad g(t, z) = Q_1 \tilde{f}(t, z, \eta(t, z)). \quad (4.9)$$

В силу свойств функций  $\eta(t, z)$  и  $Q_1 f(t, x)$ , функция  $g(t, z) = Q_1 f(t, P_m z + P_d \eta(t, z))$  непрерывна по совокупности переменных  $t, z$  и непрерывно дифференцируема по  $z$  на  $[0, \infty) \times D_z$ . Следовательно, для любой начальной точки  $(t_0, z_0)$  такой, что  $(t_0, z_0, \eta(t_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$ , существует единственное решение  $z(t)$  задачи Коши для уравнения (4.9) на некотором интервале  $[t_0, \varepsilon)$  с начальным условием  $z(t_0) = z_0$ . Заметим, что если начальная точка  $(t_0, x_0) \in L_0$  и  $x_0 = P_m z_0 + P_d \eta(t_0, z_0)$ , то начальная точка  $(t_0, z_0, \eta(t_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$ .

Введем функцию  $V(P_1 x) = \frac{1}{2}(HP_1 x, P_1 x) = \frac{1}{2}(HP_m z, P_m z) = \frac{1}{2}(P_m^* HP_m z, z) = \frac{1}{2}(\hat{H}z, z) = \hat{V}(z)$ , где  $\hat{H} = P_m^* HP_m$  и  $H$  – оператор из (4.3). Градиент функции  $\hat{V}$  равен  $grad \hat{V}(z) = \hat{H}z$ .

Поскольку  $(HP_m z, G^{-1}[-BP_m z + g(t, z)]) = (\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[-BP_m z + g(t, z)])$ , то согласно (4.3) существует  $\hat{R} > 0$  такое, что

$$(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[-BP_m z + g(t, z)]) \leq k(t)U(\hat{V}), \quad t \geq 0, \quad \|z\| \geq \hat{R}, \quad (4.10)$$

где  $k(t) \in C([0, \infty), \mathbf{R})$ ,  $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ ,  $U(v) > 0$  при  $v > 0$ ,

$$\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = +\infty.$$

С учетом (4.10), производная функции  $\hat{V}(z) = \frac{1}{2}(\hat{H}z, z)$  в силу системы (4.9) удовлетворяет при всех  $t \geq 0$  и  $z$  таких, что  $\|z\| \geq \hat{R}$ , оценке:

$$\dot{\hat{V}} \Big|_{(4.9)} = (\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[-BP_m z + g(t, z)]) \leq k(t)U(\hat{V}).$$

Из свойств функций  $k(t)$ ,  $U(v)$  следует, что неравенство  $\dot{v} \leq k(t)U(v)$ ,  $t \geq 0$  не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения. Тогда по теореме [7, Гл. IV, Теорем XIII] каждое решение уравнения (4.9) неограниченно продолжаемо. Найденное глобальное решение  $z(t)$  уравнения (4.9) определено на всем  $t_0 \leq t < \infty$ . Следовательно, функция  $x(t) = P_m z(t) + P_d \eta(t, z(t))$  будет решением задачи Коши (3.1), (3.2) на  $[t_0, \infty)$ .

Проверим, что каждое локальное решение  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, \varepsilon)$  уравнения (3.1) допускает единственное продолжение на  $[t_0, \infty)$ . Из доказанного выше следует, что неограниченно продолжаемое решение  $x(t)$  задачи Коши (3.1), (3.2) единственно на некотором интервале  $[t_0, \varepsilon)$ . Предположим, что решение не единственно на  $[t_0, \infty)$ . Тогда существует  $t_* \geq \varepsilon$  и два различных неограниченно

продолжаемых решения  $x(t)$ ,  $\tilde{x}(t)$  с общим значением  $x_* = x(t_*) = \tilde{x}(t_*)$ . Возьмем точку  $(t_*, x_*)$  в качестве начальной, тогда на некотором интервале  $[t_*, \varepsilon_1)$  должно существовать единственное решение уравнения (3.1) с начальным значением  $x(t_*) = x_*$ , что противоречит предположению.

Если  $\int_{t_0}^{+\infty} k(t)dt < +\infty$ , то неравенство  $\dot{v} \leq k(t)U(v)$ ,  $t \geq 0$  не имеет ни одного

положительного неограниченного решения. Тогда по теореме [7, Гл. IV, Теорем XV] уравнение (4.9) устойчиво по Лагранжу. Следовательно,

$$\exists M < \infty \forall t \in [0, \infty) : \|P_m z(t)\| \leq M. \quad (4.11)$$

Рассмотрим отображение  $F(t, z, v) = P_d^{-1}G^{-1}Q_2\tilde{f}(t, z, v) - v$ , введенное выше.

По формуле конечных приращений:  $F_k(t, z, v) - F_k(t, z, 0) = \frac{\partial}{\partial v} F_k(t, z, \tilde{v}_k)v$ ,

$\tilde{v}_k = \theta v \in \text{conv}\{0, v\}$ ,  $\theta \in (0, 1)$ ,  $F_k(t, z, v) = \hat{\Theta}_k F(t, z, v)$ ,  $k = \overline{1, d}$ ,  $\{\hat{\Theta}_k\}_{k=1}^d$  – аддитивное разложение единицы в  $\mathbb{R}^d$ . Суммируя полученные равенства по  $k$

получаем:  $F(t, z, v) - F(t, z, 0) = \Lambda v$ ,  $\Lambda = \sum_{k=1}^d \hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} F(t, z, \tilde{v}_k)$ . Для любых  $v$  таких,

что  $(t, z, v) \in \tilde{L}_0$ , оператор  $\Lambda \in L(\mathbb{R}^d)$  обратим на  $\text{conv}\{0, v\}$  и  $\Lambda^{-1} \in L(\mathbb{R}^d)$ .

Поскольку для функций  $v = \eta(t, z(t))$ ,  $z = z(t)$  отображение

$F(t, z(t), \eta(t, z(t))) = 0$  и  $F(t, z(t), 0) = P_d^{-1}G^{-1}Q_2\tilde{f}(t, z(t), 0)$ , то

$\eta(t, z(t)) = -\Lambda^{-1}P_d^{-1}G^{-1}Q_2\tilde{f}(t, z(t), 0)$ . Учитывая, что  $\Lambda^{-1}$  – ограниченный оператор, существует положительное число  $N < \infty$  такое, что

$\|\eta(t, z(t))\| \leq N \|P_d^{-1}\| \|G^{-1}Q_2\tilde{f}(t, z(t), 0)\|$  для любых  $t \in [t_0, \infty)$ . Тогда из (4.11), (4.4)

следует, что  $\forall t \in [t_0, \infty) : \|\eta(t, z(t))\| \leq NC \|P_d^{-1}\|$ .

Так как для всех  $t \in [t_0, \infty)$  выполнена оценка  $\|x(t)\| = \|P_m z(t) + P_d \eta(t, z(t))\| \leq M + NC$ , решение уравнения (3.1) глобально ограничено. Это выполнено для любой начальной точки  $(t_0, x_0) \in L_0$ . Значит, уравнение (3.1) устойчиво по Лагранжу. Теорема доказана.

**Теорема 4.2.2** Пусть функция  $f(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  имеет непрерывную частную производную  $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$  всюду на  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda A + B$  – регулярный пучок индекса 1. Пусть выполнено (4.1) и для любых  $u_i \in X_2$  таких, что  $(t, P_1 x + u_i) \in L_0$ ,  $i = 1, 2$ , оператор-функция (4.2) является базисно обратимой на выпуклой оболочке  $\text{conv}\{u_1, u_2\}$ . Пусть некоторое множество  $\Omega \subset X_1$  обладает тем свойством, что каждая компонента  $P_1 x(t)$  решения  $x(t)$ , начинающаяся в этом множестве, все время остается в нем. Пусть для

некоторого самосопряженого положительного оператора  $H = H^* > 0 \in L(X_1)$  и числа  $R > 0$  существуют функции  $k(t) \in C([0, \infty), \mathbf{R})$ ,  $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ , где  $v = 1/2(HP_1x, P_1x)$ ,  $U(v) > 0$  при  $v > 0$ , такие, что

$$\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} < +\infty, \quad \int_{t_0}^{+\infty} k(t)dt = +\infty \text{ и}$$

$$(HP_1x, G^{-1}[-BP_1x + Q_1f(t, x)]) \geq k(t)U(v) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall P_1x \in \Omega. \quad (4.12)$$

Тогда для любой начальной точки  $(t_0, x_0) \in L_0 \cap \Omega$  существует единственное решение  $x(t)$  задачи Коши (3.1), (3.2) на некотором конечном интервале  $[t_0, T)$  и это решение имеет конечное время определения.

**Доказательство.** Начало доказательства аналогично доказательству теоремы 4.1. Далее внесены следующие изменения.

Выпишем полученное выше дифференциальное уравнение (4.9):

$$\frac{d}{dt}z = P_m^{-1}G^{-1}[-BP_mz + g(t, z)], \quad g(t, z) = Q_1\tilde{f}(t, z, \eta(t, z)).$$

Как и ранее, для любой начальной точки  $(t_0, z_0)$  такой, что  $(t_0, z_0, \eta(t_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$ , существует единственное решение  $z(t)$  задачи Коши для уравнения (4.9) на некотором интервале  $[t_0, \varepsilon)$  с начальным условием  $z(t_0) = z_0$ .

Учитывая связь  $P_1x = P_mz$ , по условию теоремы каждое решение  $z(t)$  уравнения (4.9), начинающееся в множестве  $\hat{\Omega} = \{z \in \mathbf{R}^m \mid P_mz \in \Omega\} = P_m^{-1}\Omega$ , все время остается в нем. Очевидно, функция  $\hat{V}(z) = \frac{1}{2}(\hat{H}z, z)$  ( $\hat{H} = P_m^*HP_m$ ,  $H$  – оператор из (4.12)) положительна при всех  $z \in \hat{\Omega}$  и  $t \geq 0$ .

Поскольку  $(HP_mz, G^{-1}[-BP_mz + g(t, z)]) = (\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[-BP_mz + g(t, z)])$ , то согласно (4.12) получаем:

$$(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[-BP_mz + g(t, z)]) \geq k(t)U(\hat{V}), \quad \forall t \geq 0 \quad \forall z \in \hat{\Omega}, \quad (4.13)$$

где  $k(t) \in C([0, \infty), \mathbf{R})$ ,  $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ ,  $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} < +\infty$ ,  $\int_{t_0}^{+\infty} k(t)dt = +\infty$ ,

$U(v) > 0$  при  $v > 0$ . С учетом (4.13), производная функции  $\hat{V}(z)$  в силу системы (4.9) удовлетворяет для всех  $t \geq 0$  и  $z \in \hat{\Omega}$  следующей оценке:

$$\dot{\hat{V}} \Big|_{(4.9)} = (\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[-BP_mz + g(t, z)]) \geq k(t)U(\hat{V}).$$

Из свойств функций  $k(t)$ ,  $U(v)$  следует, что неравенство  $\dot{v} \geq k(t)U(v)$ ,  $t \geq 0$  не имеет ни одного неограниченно продолжаемого решения. Тогда по теореме [7, Гл. IV, Теорем XIV] каждое решение  $z(t)$  уравнения (4.9), удовлетворяющее условию  $z(t_0) = z_0$ ,  $z_0 \in \hat{\Omega}$ ,  $(t_0, z_0, \eta(t_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$ , имеет конечное время определения. То есть, по определению, существует  $T > 0$  такое, что



$\lim_{t \rightarrow T-0} \|z\| = \infty$ . Найденное решение  $z(t)$  уравнения (4.9) определено на некотором конечном интервале  $[t_0, T)$ . Напомним, что функция  $\eta(t, z)$  определена на  $[0, \infty) \times D_z$ , непрерывна по  $(t, z)$  и непрерывно дифференцируема по  $z$ . Следовательно, функция  $x(t) = P_m z(t) + P_d \eta(t, z(t))$  будет решением задачи Коши (3.1), (3.2) на  $[t_0, T)$ .

Проверим, что каждое решение  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, T)$  уравнения (3.1) единственно. Из доказанного выше следует, что решение  $x(t)$  задачи Коши (3.1), (3.2) единственно на некотором интервале  $[t_0, \varepsilon)$ . Предположим, что решение не единственно на  $[t_0, T)$ . Тогда существует точка  $\varepsilon \leq t_* < T$  и два различных решения  $x(t)$ ,  $\tilde{x}(t)$  с общим значением  $x_* = x(t_*) = \tilde{x}(t_*)$ . Возьмем точку  $(t_*, x_*)$  в качестве начальной, тогда на некотором интервале  $[t_*, \varepsilon_1)$  должно существовать единственное решение уравнения (3.1) с начальным значением  $x(t_*) = x_*$ , что противоречит предположению. Теорема доказана.

### 5. Построение численного метода

Пусть выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши (3.1), (3.2) на  $[t_0, \infty)$  из теоремы 4.1. Будем искать решение задачи Коши на отрезке  $[t_0, T]$ . Введем равномерную сетку  $\{t_i = t_0 + ih, i = 0, \dots, N, t_N = T\}$  с шагом  $h = \frac{T - t_0}{N}$ . Уравнение (3.1) эквивалентно системе (4.5). Обозначим  $z = P_1 x$ ,  $y = P_2 x$ , тогда система (4.5) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} + G^{-1} B z = G^{-1} Q_1 f(t, z + y), & (5.1) \\ y = G^{-1} Q_2 f(t, z + y). & (5.2) \end{cases}$$

Заменив в уравнении (5.1) производную в точке  $t_i$  конечной разностью  $\frac{d}{dt} z(t_i) \approx \frac{z(t_{i+1}) - z(t_i)}{h}$ , получим разностное уравнение, соответствующее явной схеме Эйлера [12]. Нелинейную функцию в правой части уравнения (5.2) аппроксимируем по формуле Тейлора:  $G^{-1} Q_2 f(t_{i+1}, z_{i+1} + y_{i+1}) \approx G^{-1} Q_2 f(t_{i+1}, z_{i+1} + y_i) + G^{-1} Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + y_i) (y_{i+1} - y_i)$ . Значения приближенного решения задачи (3.1), (3.2) в узлах  $t_i$  обозначим через  $x_i = z_i + y_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , где  $z_i = P_1 x_i$ ,  $y_i = P_2 x_i$ . Отметим, что из условия базисной обратимости оператор-функции (4.2) в теореме 4.1 следует существование обратного оператора  $\left[ E - G^{-1} Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + y_i) \right]^{-1}$ , где  $E$  – единичная матрица порядка  $n$ . Выбирая начальные значения  $z_0, y_0$  так, чтобы

выполнялось условие согласования  $y_0 = G^{-1}Q_2 f(t_0, z_0 + y_0)$ , получаем разностную схему для определения численного решения:

$$x_0 = z_0 + y_0,$$

$$z_{i+1} = (E - hG^{-1}B)z_i + hG^{-1}Q_1 f(t_0 + ih, z_i + y_i),$$

$$y_{i+1} = \left[ E - G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_0 + (i+1)h, z_{i+1} + y_i) \right]^{-1} G^{-1}Q_2 \times$$

$$\times \left[ f(t_0 + (i+1)h, z_{i+1} + y_i) - \frac{\partial}{\partial x} f(t_0 + (i+1)h, z_{i+1} + y_i) y_i \right],$$

$$x_{i+1} = z_{i+1} + y_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Предложенный численный метод аппроксимирует задачу Коши (3.1), (3.2) с первым порядком относительно  $h$ .

### 6. Признаки устойчивости по Лагранжу одной модели нелинейного четырехполюсного фильтра

На рис.6.1 изображен четырехполюсный радиотехнический фильтр с нелинейными сопротивлениями  $\varphi_1, \varphi_2$  и проводимостями  $h_1, h_2$ , линейными сопротивлениями  $r_1, r_2$ , проводимостью  $g$ , индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$ .

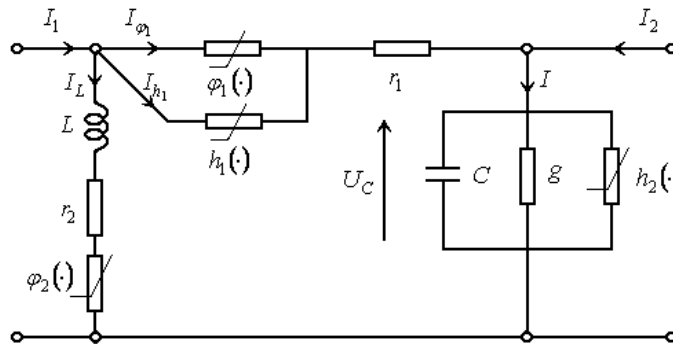


Рис.6.1. Схема электрической цепи четырехполюсника

Предполагается, что внешние токи  $I_1(t), I_2(t) \in C([0, \infty), \mathbf{R})$  заданы, параметры  $L, C, r_1, r_2, g$  являются положительными и вещественными,  $\varphi_1(y), \varphi_2(y), h_1(y), h_2(y) \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .

Уравнения Кирхгофа для данной цепи имеют вид:  $I_1 = I_{\varphi_1} + I_{h_1} + I_L$ ,  $I_L = I_{r_2} = I_{\varphi_2}$ ,  $I_{r_1} = I_{\varphi_1} + I_{h_1}$ ,  $I = I_2 + I_{r_1}$ ,  $I = I_C + I_g + I_{h_2}$ ,  $U_{\varphi_1} = U_{h_1}$ ,  $U_C = U_g = U_{h_2}$ ,  $U_{\varphi_2} + U_{r_2} + U_L - U_{\varphi_1} - U_{r_1} = U_C$ . Ток и напряжение на каждом элементе связаны следующим образом:  $U_{r_k} = r_k I_{r_k}$ ,  $U_{\varphi_k} = \varphi_k(I_{\varphi_k})$ ,  $I_{h_k} = h_k(U_{h_k})$ ,  $k = 1, 2$ ,  $I_g = g U_g$ ,  $U_L = L \frac{dI_L}{dt}$ ,  $I_C = C \frac{dU_C}{dt}$ .

Из приведенных уравнений исключаются все переменные, кроме  $x_1 = I_{\varphi_1}$ ,  $x_2 = I_L$ ,  $x_3 = U_C$ . Обозначим  $\gamma(x_1) = h_1(\varphi_1(x_1))$  и получим систему:

$$L \frac{d}{dt} x_2 - r_1 x_1 + r_2 x_2 - x_3 = \varphi_1(x_1) + r_1 \gamma(x_1) - \varphi_2(x_2), \quad (6.1)$$

$$C \frac{d}{dt} x_3 - x_1 + g x_3 = I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3), \quad (6.2)$$

$$x_1 + x_2 = I_1(t) - \gamma(x_1), \quad (6.3)$$

Векторная форма системы имеет вид (3.1), где  $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 & -1 \\ -1 & 0 & g \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) + r_1 \gamma(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3) \\ I_1(t) - \gamma(x_1) \end{pmatrix},$$

$\lambda A + B$  – регулярный пучок индекса 1. Вид матриц  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $G^{-1}$  показан в [3]. Обозначим  $z = P_1 x = (-x_2, x_2, x_3)^T = (z_1, z_2, z_3)^T$ ,

$u = P_2 x = (x_1 + x_2, 0, 0)^T = (u_1, u_2, u_3)^T$  и выпишем подпространства  $X_1 = \text{Lin}\{p_1, p_2\}$ ,  $X_2 = \text{Lin}\{p_3\}$ ,  $p_1 = (-1, 1, 0)^T$ ,  $p_2 = (0, 0, 1)^T$ ,  $p_3 = (1, 0, 0)^T$ .

Уравнение  $Q_2[Bx - f(t, x)] = 0$  эквивалентно (6.3). С учетом новых обозначений, условие (4.2) выполнено, если  $\forall t \geq 0 \exists z_1, u_1 \in \mathbb{R}$  такие, что

$$u_1 = I_1(t) - \gamma(z_1 + u_1). \quad (6.4)$$

В координатном базисе пространства  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим функцию

$$\hat{\Phi}(u) = \left[ \frac{\partial Q_2 f(t, z + u)}{\partial x} - B \right] P_2 = (\gamma'(z_1 + u_1) + 1) \begin{pmatrix} r_1 & r_1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma'(x_1) = \frac{d\gamma(x_1)}{dx_1}. \quad (6.5)$$

Найдем ограничения, при которых для любых  $v, w \in X_2$ , удовлетворяющих (6.4), сужение функции (6.5) на  $X_2$  является базисно обратимым оператором на  $\text{conv}\{v, w\}$ . Поскольку пространства  $X_2$ ,  $Y_2$  одномерны, базисная обратимость эквивалентна обратимости, которая имеет место, если  $\gamma'(z_1 + \tilde{u}_1) \neq -1$ , где  $z_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{u} \in \text{conv}\{v, w\}$ .

$$\text{Выберем } H = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 2C \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда } (HP_1 x, G^{-1}[-BP_1 x + Q_1 f(t, x)]) =$$

$$= 2[-(r_1 + r_2)x_2^2 - gx_3^2 - x_2\varphi_2(x_2) - x_3h_2(x_3) + x_2\varphi_1(x_1) + r_1x_2I_1(t) + x_3I_2(t)].$$

Для любых  $t \in [0, \infty)$ ,  $|z_1| \leq M_1$  выполнена оценка

$$\left\| G^{-1} Q_2 f(t, P_1 x) \right\| \leq \sup_{t \in [0, \infty)} \max_{|z_1| \leq M_1} |I_1(t) - \gamma(z_1)|.$$

Итак, пусть для любого  $t \geq 0$  существуют  $z_1, u_1 \in \mathbf{R}$  такие, что выполнено (6.4); для любых  $v, w \in X_2$ , удовлетворяющих (6.4),  $\gamma'(z_1 + \tilde{u}_1) \neq -1$  при любом  $\tilde{u} \in \text{conv}\{v, w\}$ ,  $z_1 \in \mathbf{R}$ ; для некоторого  $R > 0$  существуют функции  $k(t) \in C([0, \infty), \mathbf{R})$ ,  $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ , где  $v = Lx_2^2 + Cx_3^2$ ,  $U(v) > 0$  при  $v > 0$  и  $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = +\infty$ , такие, что для любых  $t \in [0, \infty)$ ,  $\sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \geq R$

выполнено

$-(r_1 + r_2)x_2^2 - gx_3^2 - x_2\varphi_2(x_2) - x_3h_2(x_3) + x_2\varphi_1(x_1) + r_1x_2I_1(t) + x_3I_2(t) \leq k(t)U(v)$  тогда по теореме 4.1 для всякой начальной точки  $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}^3$ , удовлетворяющей (6.3), существует единственное решение  $x(t)$  задачи Коши

(3.1), (3.2) на полуоси  $[t_0, \infty)$ . Если  $\int_{t_0}^{+\infty} k(t)dt < +\infty$  и существуют

положительные числа  $C, M < \infty$  такие, что  $\sup_{t \in [0, \infty)} \max_{|z_1| \leq M_1} |I_1(t) - \gamma(z_1)| \leq C$ , то

уравнение (3.1) устойчиво по Лагранжу. Напомним, что устойчивость по Лагранжу уравнения означает глобальную ограниченность всех его решений.

Рассмотрим несколько частных случаев, которые встречаются в реальных радиотехнических системах:

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 y^3, \varphi_2(y) = \alpha_2 y^3, h_2(y) = \alpha_3 y^3, \gamma(y) = h_1(\varphi_1(y)) = \alpha_4 y^9, \alpha_k > 0; \quad (6.6)$$

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 \sin(y), \varphi_2(y) = \alpha_2 \sin(y), h_2(y) = \alpha_3 \cos(y), \quad (6.7)$$

$$\gamma(y) = 0.5 \cos(\cos(y)), \alpha_k > 0, y \in \mathbf{R}$$

Для любой начальной точки  $(t_0, x_0)$ , удовлетворяющей (6.4), существует единственное решение задачи Коши (3.1), (3.2) с нелинейными функциями вида (6.6) или (6.7) на полуоси  $[t_0, \infty)$ . Решение будет ограниченным, если существует  $M_1 = \sup_{t \in [0, \infty)} |I_1(t)| < \infty$  и существует  $M_2 = \sup_{t \in [0, \infty)} |I_2(t)| < \infty$  или

$\int_{t_0}^{+\infty} |I_2(t)| dt < +\infty$ . В частности, эти требования выполнены для входных токов

вида  $I_k(t) = b_k t^{-n_k}$ ,  $n_k \in \mathbf{N}$ , экспоненциальных и синусоидальных токов

$$I_k(t) = b_k e^{-a_k t}, I_k(t) = b_k e^{-(t-a_k)^2 / \sigma_k^2}, I_k(t) = b_k \sin(a_k t + \theta_k), \quad (6.8)$$

$a_k, b_k, \sigma_k \in \mathbf{R}$ ,  $\theta_k \in [0, 2\pi]$ ,  $k = 1, 2$ . Для токов  $I_k(t) = b_k t$ ,  $I_k(t) = b_k t^2$ ,  $k = 1, 2$ , глобальные решения существуют, но не являются ограниченными. Графики численных решений для рассмотренных частных случаев представлены ниже.

### 7. Нахождение численных решений для модели нелинейного четырехполюсного фильтра

Рассмотрим электрическую цепь четырехполюсника (рис.6.1) с параметрами  $L=0.5$  нГн,  $C=0.4$  пФ,  $r_1=0.02$  Ом,  $r_2=0.01$  Ом,  $g=0.2$  Ом<sup>-1</sup>, использованными в [4]. Будем искать численные решения с помощью предложенного метода на интервале времени от 0 до 500 пс. Реализация численного метода производится в системе MATLAB.

Для нелинейных сопротивлений и проводимостей (6.6) с  $\alpha_k=1$  и внешних токов  $I_1(t)=3e^{-(t-22)^2/9}$ ,  $I_2(t)=2e^{-(t-22)^2/10}$  найдено численное решение с начальными значениями  $t_0=0$ ,  $x_0=(0,1.323510^{-23},0)^T$ . Полученные графики представлены на рис.7.1-7.3.

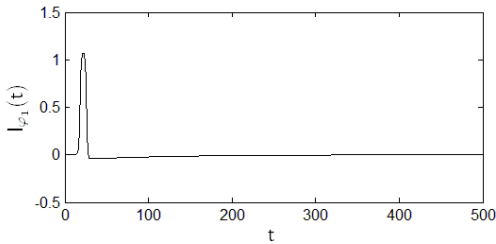


Рис.7.1. График тока  $I_{\phi_1}(t)$

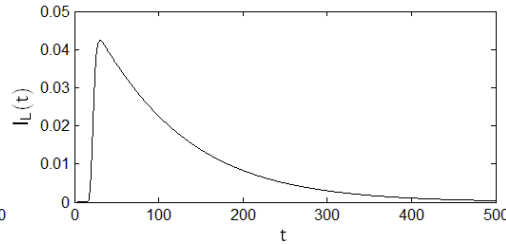


Рис.7.2. График тока  $I_L(t)$

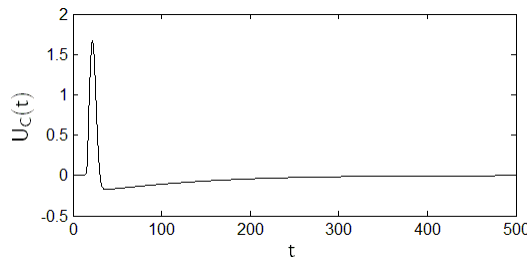


Рис.7.3. График напряжения  $U_C(t)$

Графики решения для электрической цепи с нелинейностями вида (6.7),  $\alpha_k=1$ , внешними токами  $I_1(t)=50\sin(0.5t-1.6)$ ,  $I_2(t)=50\sin(t)$  и начальными значениями  $t_0=0$ ,  $x_0=(0,-50.2488,0)^T$  представлены на рис.7.4-7.6.

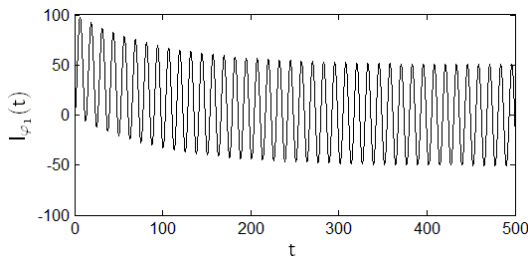


Рис.7.4. График тока  $I_{\phi_1}(t)$

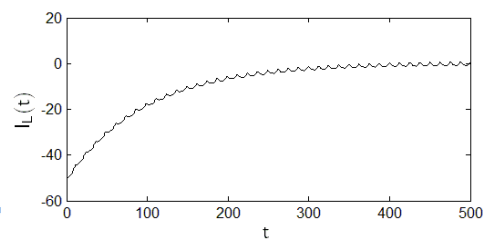
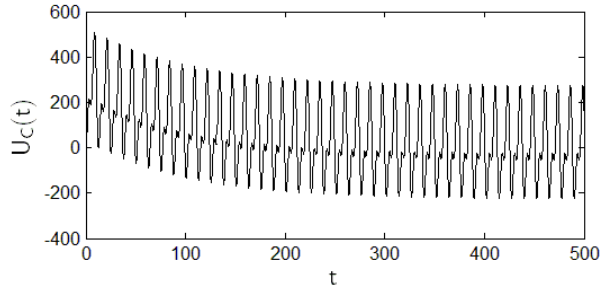
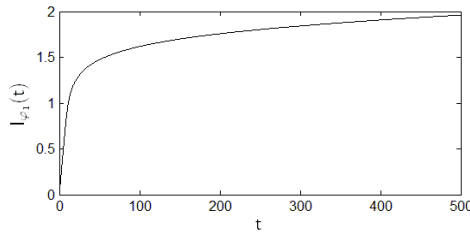
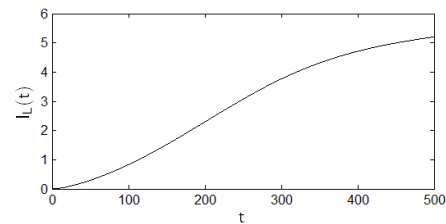
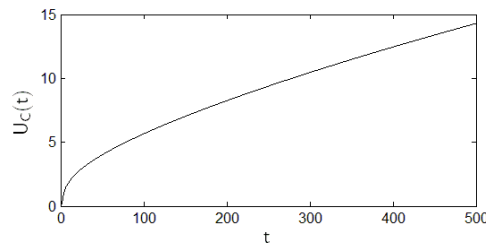


Рис.7.5. График тока  $I_L(t)$

Рис.7.6. График напряжения  $U_C(t)$ 

Анализ графиков, представленных на рис.7.1-7.6, показывает, что для системы (6.1)-(6.3) с экспоненциальными или синусоидальными токами вида (6.8), а также сопротивлениями и проводимостями вида (6.6), (6.7), существуют глобальные решения, ограниченные на всей области определения. Следовательно, вывод об устойчивости по Лагранжу, полученный с помощью применения теоремы 4.1, подтвержден численным экспериментом.

Графики решения для электрической цепи с нелинейными сопротивлениями и проводимостями (6.6),  $\alpha_k = 0.1$ , внешними токами  $I_1(t) = 0.1t$ ,  $I_2(t) = 0.001t^2$  и начальными значениями  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = (0,0,0)^T$  представлены на рис. 7.7-7.9.

Рис.7.7. График тока  $I_{\varphi_1}(t)$ Рис.7.8. График тока  $I_L(t)$ Рис.7.9. График напряжения  $U_C(t)$ 

Анализ графиков на рис.7.7-7.9 показывает, что для системы (6.1)-(6.3) с данными токами, сопротивлениями и проводимостями существует глобальное решение, возрастающее с ростом времени и, следовательно, неограниченное. Применение теоремы 4.1 дает аналогичный результат.

## 8. Выводы

Для полулинейного дескрипторного уравнения (3.1) получены теоремы, позволяющие доказать существование и ограниченность глобальных решений либо их отсутствие (решения имеют конечное время определения). С помощью разработанного метода получены численные решения для моделей электрических цепей. Анализ решений подтверждает результаты теоретических исследований. Строгое доказательство сходимости численного метода не представлено в связи с ограничением объема статьи и требует отдельного изложения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kunkel P., Mehrmann V. *Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution*. – Zurich: European Mathematical Society, 2006. – 256 p.
2. Bender D. J., Laub A. J. The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1987. – Vol. AC-32, № 6. – P. 672-688.
3. Руткас А. Г. Глобальная разрешимость дифференциально-алгебраических уравнений нелинейных электрических цепей / А. Г. Руткас, М. С. Филипковская // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. – 2013. – № 4 (114). – С. 131-142.
4. Rutkas A. G. Time-domain descriptor models for circuits with multiconductor transmission lines and lumped elements / A. G. Rutkas, L. A. Vlasenko // *Proceedings of IEEE 5-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals*. – Sevastopol, Ukraine, 2010. – P. 102-104.
5. Brenan K. E., Campbell S. L., Petzold L. R. *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*. – USA: SIAM, 1996. – 314 p.
6. Hairer E., Lubich C. Roche M. *The numerical solution of differential-algebraic systems by Runge-Kutta methods*. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 140 p.
7. Ла-Салль Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец. – М.: Мир, 1964. – 168 с.
8. Руткас А. Г. Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений / А. Г. Руткас, М. С. Филипковская // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. – 2013. – № 1 (111). – С. 135-145.
9. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения  $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$  / А. Г. Руткас // *Дифференциальные уравнения*. – 1975. – Т. 11, № 11. – С. 1996-2010.
10. Vlasenko L. *Implicit Linear Time-dependent Differential-difference Equations and Applications*. / L. Vlasenko // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2000. – 23. – P. 937-948.
11. Шварц Л. *Анализ*. Т. 1 / Л. Шварц. – М.: Мир, 1972. – 822 с.
12. Годунов С. К. *Разностные схемы (введение в теорию)* / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

УДК 539.3

## Аналіз способів закріплення стійок для перевезення важких вантажів

Т. О. Штефан

*Запорізький національний технічний університет*

Досліджено деформацію стійки, на яку тисне важкий вантаж, у випадку пружної плоскої деформації. Задача розв'язується в статичній постановці методом тригонометричних рядів. Розглянуто два типи умов на нижній межі, вздовж якої стійка спряжена з абсолютно жорстким півпростором. Проведено чисельне дослідження функції потенційної енергії формозміни, яка застосовується у енергетичній гіпотезі міцності, та розроблено практичні рекомендації відносно способів закріплення стійки на платформі.

**Ключові слова:** стійка, умови закріплення, плоска деформація, четверта гіпотеза міцності, зона пластичності.

Исследовано деформацію стойки, на которую давит тяжелый груз, в случае упругой плоской деформации. Задача решается в статической постановке методом тригонометрических рядов. Рассмотрены два типа условий на нижней границе, вдоль которой стойка сопряжена с абсолютно жестким полупространством. Проведено численное исследование функции потенциальной энергии формоизменения, которая применяется в энергетической гипотезе прочности, и разработаны практические рекомендации относительно закрепления стойки на платформе.

**Keywords:** стойка, условия закрепления, плоская деформация, четвертая гипотеза прочности, зона пластичности.

A flat elastic deformation of a rack caused by a heavy load is studied. The problem is solved in a static formulation with the help of trigonometric series. Two types of conditions at the lower boundary along which the racks coupled with an absolutely rigid half-space have been considered. A numerical study of function of distortion potential energy, which is used in the energy hypothesis of strength, have been performed, and practical recommendations for fixing the rack on the platform have been developed.

**Ключевые слова:** front, fixing condition, elastic deformation, fourth hypothesis strength, plastic zone.

### Вступ

Теорія пружності лежить в основі розрахунків на міцність всіх реальних інженерних об'єктів. Задача визначення напружень, які виникають в твердому тілі, на яке тисне інше тверде тіло, відноситься до класу контактних задач [1], при цьому міцність тіла залежить від умов його закріплення.

При перевезенні важких вантажів на відкритих площадках (вагонах, залізничних платформах та кузовах вантажних машин) їх потрібно закріплювати. Існує багато способів закріплення, описаних, наприклад, в [2]. Досвід роботи експертів при розслідуванні причин ДТП підтверджує той факт, що безпека транспортування вантажів та їх схоронність суттєво залежать від правильності розміщення та закріплення вантажу. Причиною неохоронного



перевезення вантажів за даними страхових компаній у 70% випадках є недостатнє закріплення їх на транспортному засобі [3]. Також причиною 60% ДТП, що відбувається за участі одного транспортного засобу, є втрата ним керованості у зв'язку із зміщенням погано закріпленого вантажу [3]. Таким чином, транспортування ненадійно закріпленого вантажу дорогами загального користування представляє значну небезпеку для інших учасників дорожнього руху. У зв'язку з чим представлено дослідження є актуальним.

Ми розглядаємо випадок, коли вантаж розміщується на спеціальних стійках і фіксується. Під дією цього вантажу стійка деформується і в ній виникають внутрішні напруження, які можуть призвести до її поломки, або навіть руйнування, що, в свою чергу, може викликати пошкодження вантажу та привести до аварійної ситуації [4]. В будь-якому разі, стійки фіксуються таким чином, щоб виключити їх рух як абсолютно твердого тіла. Але ж основа стійки може бути або механічно зчеплена з платформою, або довільно стояти на платформі таким чином, щоб виключити горизонтальні рухи. З точки зору механіки мова йде про повний (зчеплення) або ідеальний (проковзування) контакти.

Метою цієї роботи є розробка математичної моделі процесу деформування стійки в найпростішому випадку статичної пружної плоскої деформації, проведення чисельних досліджень та розробка практичних рекомендацій відносно способів закріплення стійки на платформі. Досліджено поведінку функції потенційної енергії формозміни, яка застосовується в четвертій (енергетичній) гіпотезі міцності [5].

Отримано точний розв'язок задачі у вигляді рядів Фур'є, коефіцієнти яких є функціями від вертикальної координати. Приведені чисельні приклади, які ілюструють вплив межових умов на розподіл напружень в смугі. Подібні задачі для випадку параболічного штампу докладно розв'язані в [6], [7].

### Постановка задачі

Розглянемо прямокутний паралелепіпед нескінченної довжини, вісь якого паралельна осі  $Oz$  і який знаходиться в умовах плоскої деформації. Якщо візьмемо один з перетинів  $z = const$ , то матимемо задачу про вигін смуги. Нехай смуга займає область  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq y \leq h$  (рис.1).

Опишемо межові умови, при яких ми будемо розв'язувати задачу. Гладкість штампу означає, що на верхній межі смуги дотичні напруження нульові:

$$v(x, h) = f(x) - h, \quad \tau_{xy}(x, h) = 0. \quad (1)$$

По аналогії з [8] будемо вважати, що бокові сторони смуги зчеплені з тонкими листами – діафрагмами. Ці листи дозволяють точкам смуги, які з ними зчеплені, вільно переміщуватися в горизонтальному напрямку і не дозволяють переміщуватися в вертикальному напрямку. Математичний запис цих межових умов має вигляд

$$v(0, y) = 0, \quad v(l, y) = 0. \quad (2)$$

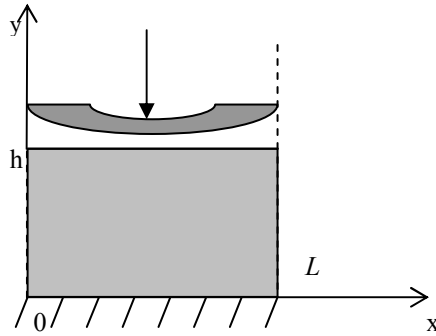


Рис.1. Смуга, на яку тисне штамп.

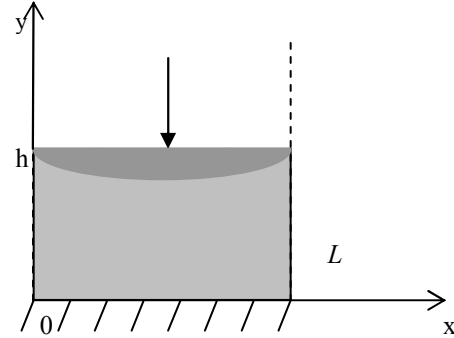


Рис.2. Штамп в кінцевому положенні.

Ми будемо порівнювати надійність при двох видах закріплення: випадок зчеплення та випадок ідеального контакту. У випадку зчеплення будемо вважати, що на нижній межі смуги (при  $y=0$ ) вона спаяна з абсолютно жорсткою основою. Це означає, що вертикальні та горизонтальні переміщення точок смуги, які лежать на цій межі, дорівнюють нулю, тобто

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = 0. \quad (3)$$

Для випадку ідеального контакту вертикальні переміщення та дотичні напруження точок смуги, що лежать на нижній межі, дорівнюють нулю, а саме:

$$v(x,0) = 0, \quad \tau_{xy}(x,0) = 0. \quad (4)$$

На верхню межу смуги тисне гладкий абсолютно жорсткий штамп, який переміщується вертикально. Ми розглядаємо статичну задачу і будемо вважати, що в кінцевому положенні рівняння лінії, яку описує нижня межа штампів, відомо і має вигляд  $y = f(x)$ ,  $x \in [0, l]$  (Рис.2).

Таким чином нам потрібно знайти функції, які задовольняють системі рівнянь Ламе і межовим умовам (1)-(3) для випадку зчеплення та межовим умовам (1), (2), (4) у випадку ідеального контакту.

### Метод розв'язання

Оскільки функція  $v(x,y)$  задовольняє однорідним межовим умовам (1), то будемо її шукати у вигляді тригонометричного ряду за синусами:

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \sin(\alpha k x). \quad (5)$$

Тут  $\alpha = \pi/l$ .

В цьому випадку розклади функції  $u(x,y)$ ,  $\sigma_x(x,y)$ ,  $\sigma_y(x,y)$ ,  $\tau_{xy}(x,y)$  в тригонометричні ряди матимуть вигляд:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(y) \cos(\alpha k x), \quad \sigma_x = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(y) \sin(\alpha k x), \quad \sigma_y = \sum_{k=1}^{\infty} M_k(y) \sin(\alpha k x),$$

$$\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(y) \cos(\alpha k x), \quad (6)$$

Зауважимо, що оскільки  $\sigma_x(0, y) = 0$ , то при такій деформації нормальні напруження на бокових діафрагмах будуть дорівнювати нулю.

Встановимо зв'язок між функціями  $V_k, U_k, S_k, M_k$  та  $T_k$ . Для цього підставимо розвинення (5) та (6) в кожне з рівнянь системи Ламе. Отримаємо наступні розклади:

$$\begin{aligned} V_k &= (A_k + yB_k)ch(\alpha ky) + (C_k + yD_k)sh(\alpha ky), \\ U_k &= 2\left(\frac{(1-\nu)}{\alpha k}B_k + \nu C_k + \nu yD_k\right)ch(\alpha ky) + 2\left(\frac{(1-\nu)}{\alpha k}D_k + \nu A_k + \nu yB_k\right)sh(\alpha ky), \\ S_k &= -2\mu((3-2\nu)B_k + \alpha k C_k + \alpha ky D_k)ch(\alpha ky) + \\ &\quad + ((3-2\nu)D_k + \alpha k A_k + \alpha ky B_k)sh(\alpha ky), \\ M_k &= 2(\alpha k A_k + \alpha ky B_k + (1-2\nu)D_k)sh(\alpha ky) + \\ &\quad + (\alpha k C_k + \alpha ky D_k + (1-2\nu)B_k)ch(\alpha ky), \\ T_k &= \mu\left\{A_k(1+2\nu)\alpha k + 2D_k\right\}ch(\alpha ky) + B_k\alpha k(1+2\nu)y \cdot ch(\alpha ky) + \\ &\quad + \left\{C_k(1+2\nu)\alpha k + 2B_k\right\}sh(\alpha ky) + D_k\alpha k(1+2\nu)y \cdot sh(\alpha ky) \end{aligned} \quad (7)$$

Тут  $A_k, B_k, C_k, D_k$  – довільні константи.

Із межових умов (1), (2), (3) або (1), (2), (4) із врахуванням розкладів (5), (6) та виразів (7) матимемо системи лінійних рівнянь відносно невідомих  $A_k, B_k, C_k, D_k$ . Розв'язок відповідної системи для випадку зчеплення має вигляд:

$$\begin{cases} A_k = 0, \\ B_k = \nu \alpha k \Omega (2ch(\alpha kh) + \alpha kh(1+2\nu)sh(\alpha kh)), \\ C_k = -\Omega (2(1-\nu)ch(\alpha kh) + \alpha kh(1+\nu-2\nu^2)sh(\alpha kh)), \\ D_k = \Omega (\alpha kh \nu(1+2\nu)ch(\alpha kh) - (1-\nu-2\nu^2)sh(\alpha kh)), \end{cases} \quad (8)$$

де позначено  $\Omega = \delta_k / [2\nu \alpha kh - (1-\nu)sh(2\alpha kh)]$ .

Аналогічно знайдено розв'язок системи у випадку ідеального контакту:

$$\begin{cases} A_k = 0, \\ B_k = -\alpha k \Psi (1+2\nu), \\ C_k = \Psi (2 + \alpha kh(1+2\nu)cth(\alpha kh)), \\ D_k = 0, \end{cases} \quad (9)$$

тут позначено  $\Psi = \delta_k / 2sh(\alpha kh)$ .

Підставивши знайдені коефіцієнти (8) або (9) в ряди (5), (6) для нормальних напружень  $\sigma_x, \sigma_y$  та дотичних напружень  $\tau_{xy}$  матимемо шуканні розвинення вказаних функцій в тригонометричні ряди. Отриманні результати застосуємо для знаходження критичних (в сенсі міцності) ділянок розглянутої конструкції.

### Результати чисельного моделювання

Наведемо результати чисельного моделювання деформації смуги штампом у випадках, коли на нижній межі виконуються умови зчеплення та ідеального контакту. Візьмемо  $l = \pi$ ,  $h = 1$ ,  $\nu = 0.25$ . Напруження будемо відносити до модулю зсуву  $\mu$ .

Будемо вважати, що поверхня штампів представляють собою одну хвилю синусоїди, тобто рівняння верхньої межі смуги після деформації буде мати вигляд

$$f(x) = h - p \sin x, \quad (10)$$

де  $p$  - достатньо мале додатне число, яке має розмірність довжини і характеризує вигін поверхні штампів.

В цьому випадку вертикальні переміщення точок смуги описуються формулою:

$$v(x, h) = f(x) - h = -p \sin x. \quad (11)$$

Розкладемо функцію (11) в ряд Фур'є і отримаємо рівність:

$$-p \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sin kx.$$

В силу однозначності розвинення функції в ряд Фур'є матимемо, що  $\delta_1 = -p$ ,  $\delta_2 = \delta_3 = \dots = 0$ . Таким чином у нас лише один із коефіцієнтів  $\delta_k$  відмінний від нуля, а це означає, що для отримання точного розв'язку нам достатньо в рядах (5), (6) утримати лише перші доданки.

Далі наведемо результати чисельних розрахунків для двох видів межових умов: випадку зчеплення та випадку ідеального контакту.

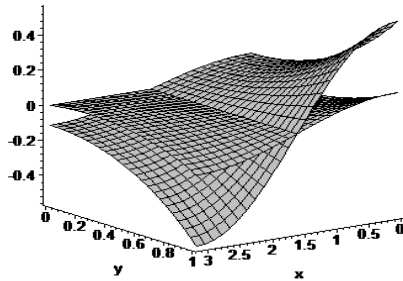


Рис.3. Переміщення  $u(x, y)/p$ .

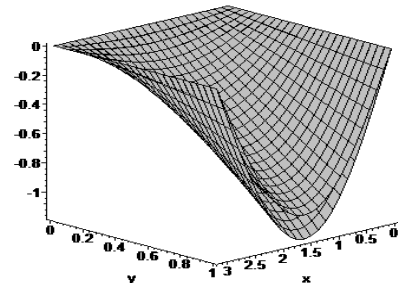


Рис.4. Переміщення  $v(x, y)/p$ .

На рисунках 3-4 зображено типові графіки функцій горизонтальних та вертикальних переміщень точок смуги для двох типів межових умов при значенні товщини  $h = 1$ .

### Дослідження функції потенційної енергії формозміни

Сутністю енергетичної теорії міцності є припущення, що кількість потенційної енергії формозміни, яка накопичена до моменту настання небезпечного стану, однакова як при складному напруженні, так і при простому розтягуванні. Умова міцності згідно четвертій гіпотезі міцності записується наступним чином [5]:

$$\sigma^{\text{II}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}.$$

Якщо перейти від головних напружень до тензору деформації в довільній прямокутній системі координат, матимемо наступний вираз:

$$\sigma^{\text{II}} = \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 3(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)}.$$

Оскільки у випадку плоскої деформації  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ,  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ , то отримаємо відповідну функцію потенційної енергії формозміни у вигляді:

$$F(x, y) = \sigma^{\text{II}} = \sqrt{[(1 + \nu)(\sigma_x + \sigma_y)]^2 - 3(\sigma_x \sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y)^2 - \tau_{xy}^2)}. \quad (12)$$

На рисунках 5 - 8 зображено графіки функції потенційної енергії формозміни в смузі під дією навантаження у випадку зчеплення та при ідеальному контакті при  $\nu = 0,25$  та різних значеннях товщини плити. На рисунках 8 - 10 зображено графіки функції потенційної енергії формозміни в смузі під дією навантаження у випадку зчеплення та при ідеальному контакті при  $h = 1$  та різних значеннях коефіцієнта Пуассона.

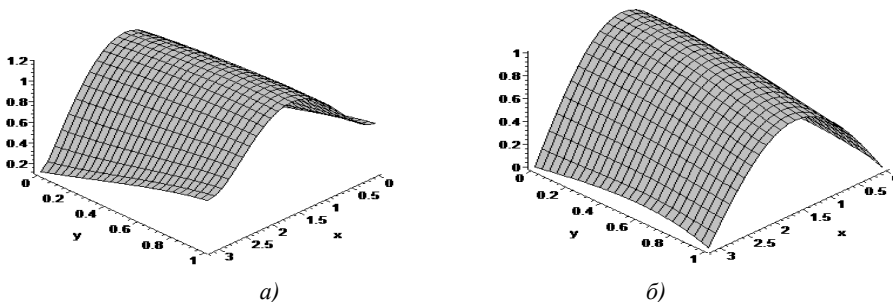


Рис. 5. Графіки функції  $F(x, y)$  при  $\nu = 0,25$  для а) випадку зчеплення, б) ідеального контакту для значення товщини  $h = 1$ .

Аналіз рисунків поведінки функції енергії формозміни у випадку повного контакту показав, що при  $\nu = 0,25$  та малих значеннях товщини  $h$  глобальний максимум знаходиться в середині нижньої межі. При збільшенні товщини (а саме при  $h > 2$ ) глобальний максимум переміщується в середину верхньої межі, при цьому значення глобального максимуму змінюється несуттєво (рисунки 5а – 7а). При  $h > 3$  напруження на нижній межі плити і, взагалі, при  $y \geq \pi/2$ , енергія формозміни практично дорівнює нулю. Якщо зафіксувати  $\nu = 0,25$ , то найбільш

стійкою серед розглянутих конструкцій, з точки зору четвертої гіпотези міцності, є плита товщиною  $h = 1,5$ . Значення глобального максимуму при подальшому збільшенні товщини зростає. Зміна  $\nu$  достатньо складно впливає на зміну форми графіка функції енергії формозміни (рисунки 5а, 9а, 10а).

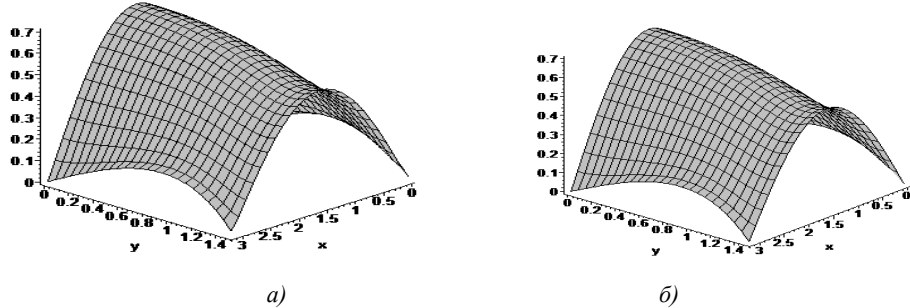


Рис. 6. Графіки функції  $F(x, y)$  при  $\nu = 0,25$  для а) випадку зчеплення, б) ідеального контакту для значення товщини  $h = 1,5$ .

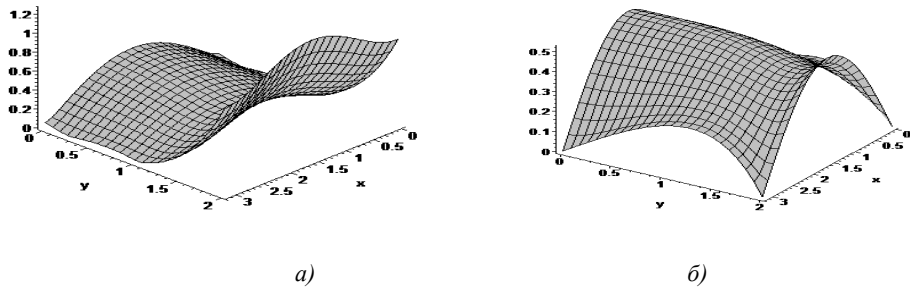


Рис. 7. Графіки функції  $F(x, y)$  при  $\nu = 0,25$  для а) випадку зчеплення, б) ідеального контакту для значення товщини  $h = 2$ .

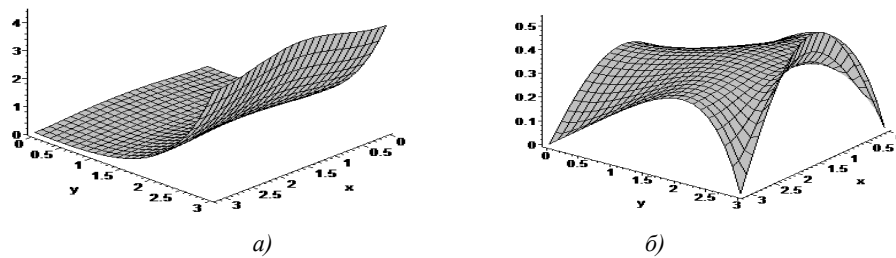


Рис. 8. Графіки функції  $F(x, y)$  при  $\nu = 0,25$  для а) випадку зчеплення, б) ідеального контакту для значення товщини  $h = 3$ .

У випадку ідеального контакту форма графіку функції  $F(x, y)$  змінюється не так суттєво, як при повному контакті, при цьому локальні максимуми на нижній та верхній межах близькі за значенням. При збільшенні товщини плити глобальний максимум функції  $F(x, y)$  переміщується з середини нижньої межі (якщо  $h < 2$ ) в середину верхньої межі (якщо  $h > 2$ ), при цьому значення максимуму зменшується. При збільшенні коефіцієнта Пуассона значення глобального максимуму строго зменшується.

В усіх розглянутих випадках при однакових значеннях параметрів (товщини плити та значенні коефіцієнта Пуассона) глобальний максимум функції  $F(x, y)$  для ідеального контакту менше відповідного значення цієї функції у випадку повного контакту, крім випадків  $\nu = 0,25$ ,  $h = 1,5$  та  $\nu = 0,3$ ,  $h = 1$ , коли вони практично співпадають. Таким чином, застосування ідеального контакту видається найбільш доцільним з точки зору четвертої гіпотези міцності. Найбільш явно це твердження ілюструється рисунком 8 при значеннях параметрів  $\nu = 0,25$  та  $h = 3$ , бо в цьому випадку відношення значень глобальних максимумів для двох типів межових умов близько до восьми.

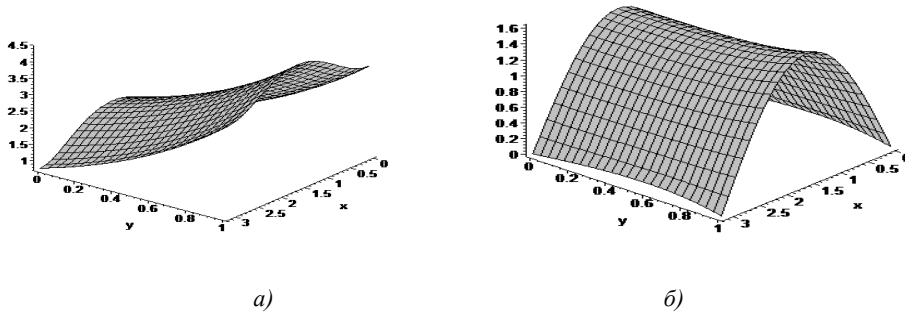


Рис. 9. Графіки функції  $F(x, y)$  при  $h = 1$  для а) випадку зчеплення, б) ідеального контакту для значення коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0,1$ .

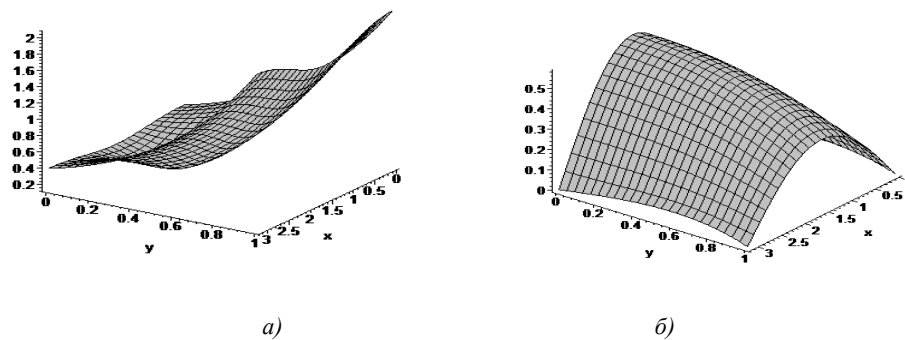


Рис. 10. Графіки функції  $F(x, y)$  при  $h = 1$  для а) випадку зчеплення, б) ідеального контакту для значення коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0,4$ .

### Висновки

В даній роботі наведена математична постановка задачі про плоску деформацію однорідної невагомої ізотропної пружної смуги, яка знаходиться під тиском зі сторони абсолютно жорсткого штампу. Розв'язано статичну задачу методом розкладу функцій переміщень та навантажень в тригонометричні ряди. Отримано точний розв'язок задачі у вигляді рядів Фур'є, коефіцієнти яких є функціями від вертикальної координати.

Розглянуто два типа межових умов на межах, які не контактують зі штампом, а саме умови зчеплення та умови ідеального контакту. Для обох задач отримані розрахункові формули та проведено детальний чисельний аналіз.

Для розглянутих значень параметру встановлено, що більш надійним з точки зору четвертої гіпотези міцності є випадок, коли стійка, на яку встановлюється вантаж, може проковзувати по підлозі, ніж випадок, коли стійка зчеплена з підлогою. В одному з розглянутих прикладах за рахунок зміни межових умов вдалося зменшити максимум енергії формозміни у вісім разів.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Ворович И. И. Механика контактных взаимодействий / И. И. Ворович, В. М. Александров. – М.: Физматлит, 2001. – 670 с.
2. Егоров С. А. Совершенствование методики расчета элементов крепления в статически неопределимых схемах закрепления единичного груза / С. А. Егоров, Л. А. Гребенюк, С. Ю. Хорунжин // Известия ТРАНССИБА. – Омский государственный университет путей сообщения (Омск): Вып. №4, 2011, – С. 87-94.
3. Калитвенцев А. Ю. Совершенствование методов размещения и крепления грузов на автомобильном транспорте / А. Ю. Калитвенцев // Актуальные проблемы эксплуатации АТС. – Материалы международной научно-практической конференции, – Владимир, 20-22 ноября 2007. – С. 64-67.
4. «Правила безопасного размещения и крепления грузов в кузове автомобильного транспортного средства», Республика Беларусь, утв. 10 октября 2005 г., Постановление № 58.
5. Александров А. В. Соппротивление материалов. 7-е изд / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высшая школа, 2009. – 560 с.
6. Штефан Т. О. Дослідження енергії формозміни в плиті, яка деформується штампом / Т. О. Штефан, О. В. Величко // Новітні матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – Запоріжжя. – 2013.- № 1. – С.97-100.
7. Величко О.В., Штефан Т.О. Вплив геометричних і пружних характеристик плити на положення зон можливої пластичної деформації /О.В. Величко, Т.О. Штефан // Вісник ХНУ. Секція МІА.- Харків. – 2013. – №1063. – С.51-56.
8. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – Москва : ГИФМЛ, 1960. – 490 с.



## CONTENTS

- **I. M. Antonyan, V. A. Goryachaya, A. I. Zelenskiy, E. M. Ugryumova. . . . .** 5  
The method to evaluate informativeness of variables in neural network models of systems and processes in case of data uncertainty
- **V. E. Bogachev, I. K. Kirichenko, N. N. Chekanova, N. A. Chekanov. . . . .** 17  
Investigation of nonlinear Hamiltonian systems by the method of normal form of the Birkhoff-Gustavson
- **I. P. Bokov, E. A. Strelnikova. . . . .** 29  
The fundamental solution of the statics equations for isotropic plates using the theory of S.P. Tymoshenko
- **A. Ya. Bomba, A. P. Safonyk. . . . .** 36  
The problem of mass exchange parameter identification for a singularly perturbed decontamination process in case of multicomponent pollution
- **A. O. Boroda, O. M. Nazarenko. . . . .** 46  
Identification of linear systems of the macroeconomic dynamics with known inputs
- **E. V. Velichko. . . . .** 57  
Parameters identification for process described by hyperbolic tangent
- **K. G. Degtyarev, V. I. Gnitko, V. V. Naumenko, E. A. Strelnikova. . . . .** 63  
Free vibrations of an elastic cylindrical shell coupled with liquid Sloshing
- **O. P. Demyanchenko, A. P. Slesarenko, N. A. Safonov. . . . .** 76  
Mathematical modeling of thermal processes in radiant cylinders on the basis of the method of colliding functionals
- **I. Didenko, V. Lazurik, K. Samilyk. . . . .** 86  
Modeling of the discrete flows interaction considering correlation between flow elements
- **O. G. Zhdanova, A. A. Pavlov, M. O. Sperkach. . . . .** 92  
Work scheduling for parallel devices aimed at minimizing the maximum deviation from a preassigned due date
- **A. I. Kosolap, Yu. V. Chernousova. . . . .** 107  
An upper bound of the number of local maxima in the problem of maximizing a vector norm over a convex set

▪ <b>V. M. Kuklin, O. V. Pryimak</b> .....	<b>115</b>
Analysis of model of the "relativistic electron beam-plasma" system	
▪ <b>V. O. Mishchenko, B. V. Patochkin</b> .....	<b>129</b>
Acceleration of computation of the discrete currents method by modification, which takes into account the architectural features of a modern PCs	
▪ <b>O. M. Pignasty, V. D. Khodusov</b> .....	<b>140</b>
Use of the kinetic theory for study of fluctuation of the production line streaming parameters	
▪ <b>M. S. Filipkovskaya</b> .....	<b>152</b>
Lagrange stability and numerical method for solving semilinear descriptive equations	
▪ <b>T. A. Shtefan</b> .....	<b>168</b>
Analysis of methods to fix racks carrying heavy loads	
<b>CONTENTS</b> .....	<b>177</b>