

Міністерство освіти і науки України

# ВІСНИК

Харківського національного  
університету імені В. Н. Каразіна



**Серія**

«Математичне моделювання.  
Інформаційні технології.  
Автоматизовані системи управління»

**Випуск 27**

Харків  
2015

ISSN 2304–6201

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

# ВІСНИК

Харківського національного  
університету імені В.Н. Каразіна



## Серія

«Математичне моделювання.

Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління»

Випуск 27

Серія заснована 2003 р.

Харків  
2015

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 10 від 26.10.2015 р.)

**Редакційна колегія:**

**Азаренков М.О. (гол. редактор),**  
д.ф.-м.н., академік НАН України, проф.,  
ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна  
**Гандель Ю.В.,** д.ф.-м.н., проф., ММФ  
ХНУ імені В.Н. Каразіна  
**Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора),**  
д.т.н., проф. ММФ ХНУ імені  
В.Н. Каразіна  
**Золотарьов В.О.,** д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ  
Б.І. Веркіна НАН України  
**Куклін В.М.,** д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ  
ХНУ імені В.Н. Каразіна  
**Лазурик В.Т.,** д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ  
ХНУ імені В.Н. Каразіна  
**Мацевитий Ю.М.,** д.т.н., академік НАН  
України, проф., фізико-енергетичний ф-т  
ХНУ імені В.Н. Каразіна  
**Мищенко В.О. (заст. гол. редактора),**  
д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені  
В.Н. Каразіна  
**Руткас А.Г.,** д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ  
імені В. Н. Каразіна  
**Споров О.Є. (відповідальний секретар),**  
к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н.  
Каразіна

**Стервоєдов М.Г.,** к.т.н., доц., ФКН ІВТ  
ХНУ імені В.Н. Каразіна  
**Целуйко О.Ф.,** к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ  
імені В.Н. Каразіна  
**Шейко Т.І.,** д.т.н., проф., фізико-  
енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна  
**Шматков С. І.,** д.т.н., проф., ФКН ІВТ  
ХНУ імені В.Н. Каразіна  
**Щербина В.А.,** д.ф.-м.н., проф., ММФ  
ХНУ імені В.Н. Каразіна  
**Раскін Л.Г.,** д.т.н., проф., Національний  
технічний університет "ХПІ"  
**Стрельнікова О.О.,** д.т.н., проф. Ін-т  
проблем машинобудування НАН України  
**Соколов О.Ю.,** д.т.н., проф., кафедра  
прикладної інформатики, університет імені  
Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)  
Prof. **Harald Richter,** Dr.-Ing., Dr. rer. nat.  
habil. Professor of Technical Informatics and  
Computer Systems, Institute of Informatics,  
Technical University of Clausthal, Germany  
Prof. **Philippe Lahire,** Dr. habil., Professor of  
computer science, Dep. of C. S., University of  
Nice-Sophia Antipolis, France

**Адреса редакційної колегії:** 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6,  
ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.  
Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua .

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

© Харківський національний університет  
імені В.Н.Каразіна, оформлення, 2015

## ЗМІСТ

▪ <b>А. В. Агулов, Р. Ю. Бондаренко, Л. В. Васильєва, А. А. Гончаров. . . . .</b>	<b>5</b>
Моделирование тепловых процессов в режущей пластине	
▪ <b>L. Angermann, V. V. Yatsyk, M. V. Yatsyk. . . . .</b>	<b>13</b>
The Type-Conversion of Oscillations at the Excitation of Nonlinear Layered Media	
▪ <b>К. А. Базилевич, М. С. Мазорчук . . . . .</b>	<b>22</b>
Математические модели и система поддержки принятия решений для оценки финансового состояния страхового фонда	
▪ <b>I. P. Bokov, N. S. Bondarenko, E. A. Strelnikova. . . . .</b>	<b>33</b>
Study of stress-strain state of the transversely isotropic plates using the refined theory	
▪ <b>В. А. Герус, П. М. Мартинюк. . . . .</b>	<b>41</b>
Узагальнення рівняння консолідації ґрунтів з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів	
▪ <b>М. Н. Демьяненко, А. А. Ляпощенко, И. В. Павленко, В. И. Склабинский. .</b>	<b>53</b>
Решение уравнений Навье-Стокса и задачи гидроаэроупругости для процессов сепарации в криволинейных каналах	
▪ <b>Н. Ю. Дихтяр, Я. С. Мовсесян, В. Е. Саваневич. . . . .</b>	<b>65</b>
Статистическая модель множества позиционных измерений на серии кадров участка небесной сферы	
▪ <b>В. В. Лаврик. . . . .</b>	<b>77</b>
Моделирование напряжённо- деформированного состояния конструкций механики эластомеров в САПР FORTU-FEM	
▪ <b>В. О. Мищенко. . . . .</b>	<b>91</b>
Термодинамический подход к моделированию процесса роста надёжности ПС с учётом «вторичных дефектов»	
▪ <b>А. М. Назаренко. . . . .</b>	<b>107</b>
Моделирование дифракции SH-волн на неоднородностях методами сингулярных интегральных уравнений	

▪ <b>О. М. Назаренко, О. М. Ніколаєнко.</b> . . . . .	<b>124</b>
Ідентифікація стаціонарних слабо формалізованих систем з невідомими входами у n-вимірному фазовому просторі	
▪ <b>В. В. Николенко, В. А. Ячменёв.</b> . . . . .	<b>131</b>
Точное решение начально-краевой задачи для уравнения аномальной диффузии	
▪ <b>А. В. Приймак.</b> . . . . .	<b>137</b>
Имитационное моделирование системы «электронный пучок – модуляционно неустойчивые плазменные колебания»	
▪ <b>Н. В. Сметанкіна, С. В. Угрімов, О. М. Шупіков.</b> . . . . .	<b>150</b>
Моделювання відгуку багатопарового оскління на статичне і динамічне навантаження	
▪ <b>М. Ю. Терновой, Е.С. Штогриня.</b> . . . . .	<b>157</b>
Формальная спецификация свойств баз нечетких знаний Мамдани на основе метаграфа	
▪ <b>S. V. Chernysh, Ie. S. Menailov, K. M. Ugryumova, M. L. Ugryumov.</b> . . . . .	<b>172</b>
A method of synthesis of selection function scalar convolutions for the multi-objective decision-making problems with the a priori uncertain data	
▪ <b>CONTENTS</b> . . . . .	<b>181</b>

УДК 621.9:658.5

## Моделирование тепловых процессов в режущей пластине

А. В. Агулов<sup>2</sup>, Р. Ю. Бондаренко<sup>1</sup>, Л. В. Васильева<sup>2</sup>,А. А. Гончаров<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Сумський державний університет, Україна<sup>2</sup>Донецька державна машинобудівна академія, Україна

Рассмотрен процесс тепловыделения в процессе обработки металлов резанием. Разработана математическая модель распределения температуры в режущей пластине. Проведена дискретизация математической модели на основе локально одномерной схемы А. А. Самарского. Реализован численный расчет температурного поля пластины. Благодаря введению вспомогательных дробных шагов получена устойчивая схема, что уменьшает объем вычислений. Данный метод позволяет частично снизить затраты на проведение экспериментальных исследований.

**Ключевые слова:** математическая модель, распределение температуры, режущая пластина.

Розглянуто процес виділення тепла в процесі обробки металів різанням. Розроблено математичну модель розподілу температури в ріжучій пластині. Проведена дискретизація математичної моделі на основі локально одновимірної схеми О. А. Самарського. Реалізовано чисельний розрахунок температурного поля пластины. Завдяки введенню допоміжних дрібних кроків отримана стійка схема, завдяки чому зменшується обсяг обчислень. Даний метод дозволяє частково знизити витрати на проведення експериментальних досліджень.

**Ключові слова:** математична модель, розподіл температури, ріжуча пластина.

The process of heat generation in course of metal cutting treatment was investigated. The mathematical model was developed, which describes the temperature distribution in the cutting plate. The model discretization was based on the locally one-dimensional scheme by A.A. Samarskiy. This allowed the authors to perform numerical calculation of the temperature field over the plate. Introduction of auxiliary fractional steps had provided a stable scheme, which reduced the amount of computations. Application of this method will partially scale down the cost of experimental research.

**Key words:** mathematical model, temperature distribution, cutting plate.

### 1. Введение

Машиностроительная промышленность уделяет большое внимание вопросам повышения надежности, экономичности и ресурса выпускаемых изделий. Решение их требует применения материалов, способных работать в агрессивных средах, в условиях высоких температур и давлений, повышенных вибраций при различных нагрузках [1].

Работоспособность режущего инструмента зависит от многих факторов, главную роль играет сопротивляемость контактных площадок изнашиванию и разрушению, которые происходят в результате трения [2].

Процесс резания металлов сопровождается значительным тепловыделением. Наиболее интенсивное выделение тепла происходит в области стружкообразования. Тепло распространяется от точек с более высокой температурой к точкам с низкой температурой [3].

В начале обработки температура в зоне резания растет до какого-то определенного значения и устанавливается постоянной, соответствующей стационарному тепловому режиму [4]. Для практических целей наибольший интерес представляет температура рабочей части инструмента и обрабатываемой заготовки.

## 2. Математическая модель

Смоделируем тепловой процесс, протекающий в режущей пластине и проиллюстрируем возможность применения метода сеток для расчета этого процесса. Рассмотрим следующую задачу теплопроводности (рис. 1). На участке  $S_c := [a, b]$  и  $S_g := [a, c]$  режущей пластины температуру [5] пластины можно считать заданной и равной (быть может, уменьшенной как некоторую константу) температуре стружки  $u_c$ . На участке  $S_p$  заданы условия теплообмена с окружающей средой, которые могут быть различны в зависимости от наличия или отсутствия и типа применяемой СОЖ, а также наличия или отсутствия прилегающих деталей, например, стружколома.

На участках передней и задней поверхности резца  $S_1$  и  $S_2$  задана экспоненциальная зависимость температуры. В простейшем случае можно считать, что «поток теплоты» определяется условиями теплообмена с воздушной средой  $C_e$  (обычно  $C_e \approx 0$ ):  $\left\langle \frac{du}{dx}(t, x), h_{S_i} \right\rangle + C_e(u(t, x) - u_e) = 0$ , при  $x \in S_i$ ,  $i = 1, 2$ , где  $h_{S_i}$  – нормаль к поверхности  $S_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $u(t, x)$  – температура пластины,  $t$  – время,  $x := (x^1, x^2)$ ,  $\frac{du}{dx} := \left( \frac{du}{dx^1}, \frac{du}{dx^2} \right)$ ,  $C_e > 0$  – постоянный коэффициент,  $U_e$  – температура воздуха.

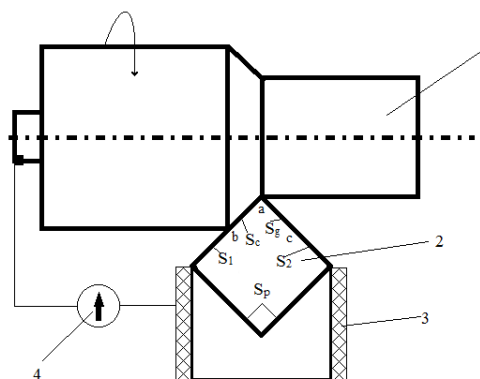


Рис. 1. Схема измерения температуры в зоне резания методом естественной термопары, где 1- обрабатываемая заготовка, 2- резец, 3-изоляция, 4-милливольтметр

В данных обозначениях задача примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - C_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}\right)u(t, x) = 0 \quad (\forall (t, x) \in R_+ \times D_n); \quad (1.1a)$$

$$u(0, x) = u_g \quad (\forall x \in D_n); \quad (1.1б)$$

$$u(t, x) = u_c \quad (\forall (t, x) \in R_+ \times S_c); \quad (1.1в)$$

$$u(t, x) = u_g \quad (\forall (t, x) \in R_+ \times S_g) \quad (1.1г)$$

$$\left\langle \frac{du}{dx}(t, x), h_{S_i} \right\rangle + C_g(u(t, x) - u_g) = 0 \quad (\forall (t, x) \in R_+ \times (S_1 \cup S_2)), \quad (1.1д)$$

где  $R_+ := \{t \in R: t \geq 0\}$ ;  $D_n$  – область пространства  $R^n$ , соответствующая режущей пластине (рис. 1),  $u_g, u_c, u_g, C_g, C_0$  – соответствующие положительные константы. Начальные условия в данной постановке задаются для двух задач Коши: на основании  $\{0\} \times D_n$  – (1.1б), и на боковой поверхности  $R_+ \times \partial D_n$  – условия (1.1в) – (1.1д), цилиндра  $R_+ \times D_n$  (через  $\partial D_n$  мы обозначим границу  $D_n$  в  $R^2$ ). В то же время, условия (1.1в) – (1.1д) на  $\partial D_n$  недостаточны, т.е. одна из величин  $u(t, x)$ , либо  $u_x(t, x)$  оказывается неопределенной. В классе аналитических функций условия (1.1б) достаточно, так как из него вытекает однозначная определенность  $u(0, x)$  при всех  $x \in R^2$ . Условия (1.1в) – (1.1д) в этом случае избыточны, и в общем случае несовместимы с (1.1б) (в частности, если  $u_c \neq u_g$ , что как раз естественно предполагать). Таким образом, даже в классе непрерывных всюду функций  $u(t, x)$  решения данной задачи, например, в случае  $u_c \neq u_g$  не существует.

Будем искать условия согласования на функции  $f(x) \in C_2(R^2, R)$  и  $g(t, x) \in C_2(R^3, R)$ , при которых существует решение задачи

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - C_0 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}\right)u(t, x) = 0 \quad (\forall (t, x) \in R_+ \times D_n); & (1.2a) \\ u(0, x) = f(x) \quad (\forall x \in D_n); & (1.2б) \\ C_1 u(t, x) + C_2 \langle b, u_x(t, x) \rangle = g(t, x) \quad (\forall (t, x) \in R_+ \times \partial D_n), & (1.2в) \end{cases}$$

где  $D_n$  – область гомоморфная шару,  $f$  и  $g$  – достаточно гладкие функции,  $b \in R^2$  – заданный вектор  $\|b\| = 1$ ,  $C_i, i = 1, 2$  – постоянные,  $C_0 > 0, C_1 \geq 0, C_2 \geq 0$ .

Задача (1.2a) - (1.2в) имеет единственное аналитическое решение  $u(t, x)$ , которое однозначно определяется первым условием (1.2б). Второе краевое условие (1.2в) однозначно определяется первым условием, если рассматривается класс аналитических решений  $u(t, x)$  при аналитических функциях  $f$  и  $g$  [6].

### 3. Численное решение

Математическая постановка задачи будет иметь вид:



$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad \begin{cases} 0 < x < Lx, \\ 0 < y < Ly. \end{cases} \quad (2)$$

Начальные и граничные условия:

$$t = 0 : T = T_0, 0 < x < Lx, 0 < y < Ly;$$

$$x = 0 : -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = S_p, t > 0;$$

$$x = Lx : \begin{cases} 0 < \frac{Ly}{2}, T = S_2, t > 0, \\ \frac{Ly}{2} < Ly, T = S_g, t > 0; \end{cases}$$

$$y = 0 : -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = S_p, t > 0;$$

$$y = Ly : \begin{cases} 0 < \frac{Lx}{2}, T = S_1, t > 0, \\ \frac{Lx}{2} < Lx, T = S_c, t > 0. \end{cases}$$

Дискретизацию уравнения (2) будем проводить на основе локально одномерной схемы А. А. Самарского [7], которая является абсолютно устойчивой и обладает свойством суммарной аппроксимации. Сущность этого подхода состоит в том, что шаг по времени реализуется в два этапа – на промежуточном временном шаге проводим дискретизацию двумерного уравнения (2) только в направлении оси  $x$  и получаем одномерное уравнение, после его решения проводим вновь дискретизацию уравнения (2), но уже в направлении оси  $y$  и, решая полученное одномерное уравнение, определяем поле температуры на целом шаге по времени (рис. 2).

Такая дискретизация позволила преобразовать дифференциальные уравнения в системы алгебраических уравнений [8]. Указанная область решения  $D$  покрывается координатной сеткой, а все переменные заменяются сеточными функциями, т.е. значения переменных исследовались не для всего бесконечного множества точек области, а лишь для некоторого конечного подмножества  $G$ , причем при решении помимо координатной сетки вводится сетка времени. Размерность дискретной задачи определяется произведением числа точек координатной сетки на количество независимых переменных в исходных дифференциальных уравнениях.

Множество точек  $G = \{x_i = ih \mid i = 0, 1, 2, \dots, n\}$  называется равномерной одномерной координатной сеткой, а число  $h$  – шагом сетки [9].

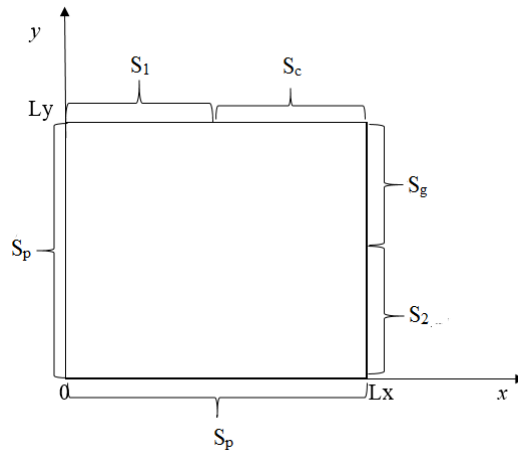


Рис. 2. Область решения

Координатная сетка  $G = \{x_i | i = 0, 1, 2, \dots, n, x_0 = 0, x_n = s\}$  будет иметь шаг  $h_i = x_i - x_{i-1}$ , который зависит от номера  $i$  узла  $x_i$ .

Вместо производных в уравнении теплопроводности используют разности по формулам:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h} \left[ \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} - \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} \right] =$$

$$= \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2},$$

подобным образом запишем

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau}, \quad h < l, \tau < T.$$

Здесь  $x = 0, x = l, t = 0, t = T$  – прямые, которые формируют треугольник (рис. 3).

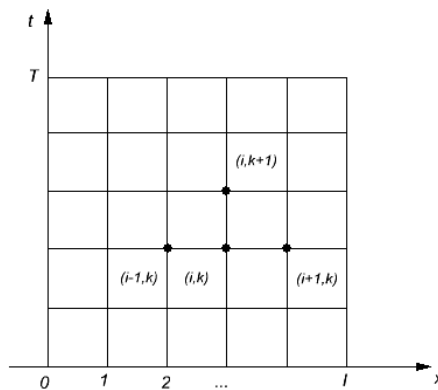


Рис. 3. Разностная сетка области решения

На его нижней и двух боковых сторонах определены значения начальной функции  $u(x, t)$ .

Далее для обозначения узлов сетки будем использовать  $(i, k)$ . Прямые  $x = ih, t = k\tau$  носят название сетчатых слоев.

Для нахождения приближенных значений решения в узлах сетки обозначим  $u(ih, k\tau) = u_{i,k}$  и заменим уравнение  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  на соответствующее ему уравнение в конечных разностях в точке  $(ih, k\tau)$ :

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2}.$$

На основе этого определим  $u_{i,k+1}$ :

$$u_{i,k+1} = \left(1 - \frac{2a^2\tau}{h^2}\right)u_{i,k} + a^2 \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1,k} - u_{i-1,k}).$$

Итак, при определенных трех значениях на  $k$ -м слое можно найти значение  $u_{i,k+1}$  на  $(k+1)$ -м слое.

С помощью метода интерполяции могут быть найдены приближенные значения  $u(x, t)$  между узлами сетки [10].

Функции  $f(x)$  и  $g(t, x)$ , определяющие начальные и граничные условия, могут быть получены в результате проведения эксперимента.

Программно реализован численный расчет температурного поля пластины. Организован вывод результатов в численном и графическом виде в заданные моменты времени (рис. 4, 5).

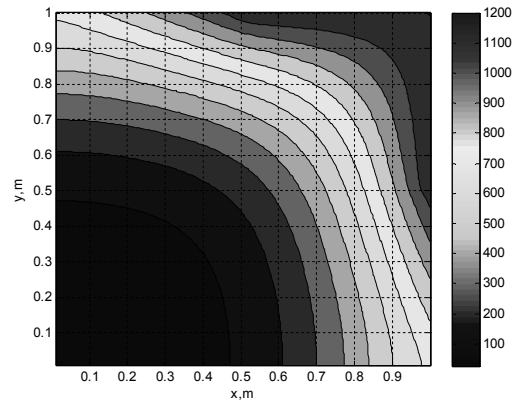
Для реализации программы была выбрана режущая пластина с сплава ВК-8. Определены начальные и граничные условия.

В начальный момент времени температура режущей пластины во всех ее точках равняется  $20^\circ\text{C}$  что соответствует начальным условиям.

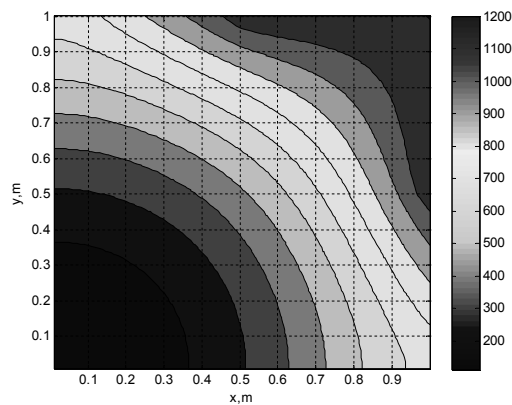
Граничные условия для данного случая будут такими. На границе  $S_c$  режущая пластины непосредственно соприкасается с обрабатываемой деталью, где температуру резания можно считать заданной  $1200^\circ\text{C}$ , на границе  $S_1$  температура распространяется по экспоненциальной зависимости  $700 * e^{\frac{1}{2}}$  это граничное условие первого рода (рис. 2).

Через границу  $S_g$  проходит срезанная стружка которая равняется температуре резания  $1200^\circ\text{C}$ . на участке  $S_2$  температура тоже распространяется по экспоненциальной зависимости  $700 * e^{\frac{1}{2}}$  от более горячих участков к менее горячим участкам. На этой границе граничное условие первого рода.

На участках левой и нижней границы  $S_p$  заданные граничное условие второго рода, означающее, что поток тепла изменяется по заданному закону. Условия теплообмена с окружающей средой могут быть различны в зависимости от наличия или отсутствия прилегающих деталей.



*Рис. 4. Распределение температуры в  $\frac{t}{2}$  момент времени при заглаблении резца на 50%*



*Рис. 5. Распределение температуры в конечный момент времени при заглаблении резца на 50%*

#### 4. Заключение

Рассмотрен процесс тепловыделения в процессе обработки металлов резанием. Разработана математическая модель распределения температуры в режущей пластине.

Проведена дискретизация математической модели на основе локально одномерной схемы А.А. Самарского, которая является абсолютно устойчивой и обладает свойством суммарной аппроксимации. Благодаря введению вспомогательных дробных шагов получена устойчивая схема, позволяющая вместо одной матричной прогонки применять две обычные, что значительно уменьшает объем вычислений.

Данная работа позволяет частично снизить затраты на проведение экспериментальных исследований при изучении вопроса влияния температуры в зоне резания на процесс износа режущего инструмента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Матушкина Е.И., Мохамед Моаз, Ивченко Т.Г. «Исследование тепловых явлений в детали при точении инструментами из сверхтвердых материалов». Студенческий научно-технический журнал "Инженер"/ Донецк: ДонНТУ, 2008, № 9. - С.35-38.
2. Мацевитый В.М., Казак И.Б., Романова Л.М. Влияние износостойкого покрытия на условия фрикционного контакта стружки с передней поверхностью инструмента//Трение и износ.-1985.-Т.6,№2.-С.333-338.
3. Лыков А.В. «Теория теплопроводности». М. Высшая школа. 1967. 600с.
4. Верещака А.С., Третьяков И.П. Режущие инструменты износостойкими покрытиями.-М: Машиностроение, 1986.-190 с.
5. Мацевитый В.М. Покрытия для режущего инструмента (Харьков: Вища школа: 1987).
6. Ивченко Т.Г., Смирнова М.А. Моделирование тепловых потоков в зоне резания в зависимости от износа режущего инструмента // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. – Донецк: ДонНТУ, 2008. Вып. 35. – с. 69-74.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. (М.: Наука: 1977) .
8. Гончаров А.А., Бондаренко Р.Ю., Василева Л.В., Агулов О.В. Моделирование тепловых процессов в режущей пластине//Труды XVII международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» - 2015. – С.75-78
9. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
10. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решение многомерных задач математической физики. 1967. 197с.

UDC 517.9:536.4

## The Type-Conversion of Oscillations at the Excitation of Nonlinear Layered Media

L. Angermann<sup>1</sup>, V. V. Yatsyk<sup>2</sup>, M. V. Yatsyk<sup>3</sup><sup>1</sup> *University of Technology at Clausthal, Department of Mathematics, Germany*<sup>2</sup> *O.Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics NASU, Ukraine*<sup>3</sup> *Kharkiv National University of Radio Electronics, Ukraine*

The present paper focuses on the development of a mathematical model, an effective algorithm and a self-consistent numerical analysis of the multifunctional properties of resonant scattering and generation of oscillations by nonlinear, cubically polarizable layered structures. It presents results of the numerical analysis characterizing the type-conversion of the generation/scattering oscillations of the nonlinear layered structures for one/two-sided acting fields at the generation/scattering frequency were taken into account and could be observed. These effects were observed at a symmetry violation of the nonlinear problem.

**Key words:** *cubically polarizable medium, resonance scattering, generation of oscillations, self-consistent analysis, a type-conversion of the oscillations.*

Ця праця зосереджена на розвитку математичної моделі, ефективного алгоритму та взаємоузгодженому чисельному аналізу багатофункціональних властивостей резонансного розсіяння та генерації коливань нелінійними, кубічно поляризуємими шарованими структурами. У праці наведені результати чисельного аналізу що характеризують перетворення типу коливань генерації/розсіяння для одно/двох сторонніх полів збудження нелінійних шарованих структур на частотах генерації/розсіяння. Ці ефекти спостерігаються при порушенні симетрії нелінійної задачі.

**Ключові слова:** *кубічно поляризуєма середа, резонансне розсіяння, генерація коливань, взаємоузгоджений аналіз, перетворення типу коливань.*

Данная работа сосредоточена на развитии математической модели, эффективного алгоритма и самосогласованного числового анализа мультифункциональных свойств резонансного рассеяния и генерации колебаний нелинейными, кубически поляризуемыми слоистыми структурами. В работе приведены результаты численного анализа, характеризующие преобразование типа генерируемых/рассеянных колебаний для одно/двух стороннего поля возбуждения нелинейных слоистых структур на частотах генерации/рассеяния. Эти эффекты наблюдались при нарушении симметрии нелинейной задачи.

**Ключевые слова:** *кубически поляризуемая среда, резонансное рассеяние, генерация колебаний, само согласованный анализ, преобразование типа колебаний.*

### 1. Introduction

Nonlinear dielectrics with controllable permittivity have a great application prospect in electronics and device technology [1-5]. The present paper focuses on the development of a mathematical model, an effective algorithm and a self-consistent numerical analysis of the multifunctional properties of resonant scattering and generation of oscillations by nonlinear, cubically polarizable layered structures [6-9]. The multifunctionality of the cubically polarizable layered media will be caused by the nonlinear mechanism between interacting oscillations - the incident oscillations exciting the nonlinear layer from the upper and lower half-spaces as well as the scattered and generated oscillations at the frequencies of excitation/scattering and

generation. The study of the resonance properties of scattering and generation of oscillations by a nonlinear layered structure with a controllable permittivity in dependence on the variation of the intensities of the components of the exciting wave package is of particular interest.

**2. Statement of the problem**

The problem of resonant scattering and generation of harmonic oscillations by a nonlinear, nonmagnetic, isotropic, linearly E-polarized  $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{H} = (0, H_y, H_z)^T$ , cubically polarizable  $\mathbf{P}^{(NL)} = (P_x^{(NL)}, 0, 0)^T$ , layered dielectric structure (see Fig. 1) is investigated in a self-consistent formulation [6-9]. The time dependency has the form  $\exp(-in\omega t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

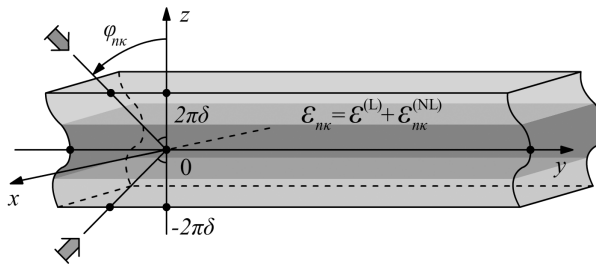


Fig. 1. The nonlinear layered dielectric structure.

The variables  $x, y, z, t$  denote dimensionless spatial-temporal coordinates such that the thickness of the layer is equal to  $4\pi\delta$ , with  $\delta > 0$ ;  $\omega = \kappa c$  is the dimensionless circular frequency;  $n\kappa = n\omega/c = 2\pi/\lambda_{n\kappa}$  are dimensionless frequencies. This parameter characterizes the ratio of the true thickness  $h$  of the layer to the lengths of the incident waves  $\lambda_{n\kappa}$ , i.e.  $h/\lambda_{n\kappa} = 2n\kappa\delta$ . Where  $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$  is a dimensionless parameter, the absolute value of which is equal to the velocity of light within the medium containing the layer,  $\text{Im} c = 0$ ,  $\epsilon_0$  and  $\mu_0$  are the material parameters of the medium. The absolute values of the true variables  $x', y', z', t', \omega'$  are given by the formulas

$$(x', y', z', t')^T = \frac{h}{4\pi\delta} (x, y, z, t)^T \text{ and } \omega' = \frac{4\pi\delta}{h} \omega.$$

The incidence of a packet of plane waves onto the layer at the angles  $\{\varphi_{n\kappa}, \pi - \varphi_{n\kappa} : |\varphi_{n\kappa}| < \pi/2\}_{n=1}^3$  and with respect to the amplitudes  $\{a_{n\kappa}^{\text{inc}}, b_{n\kappa}^{\text{inc}}\}_{n=1}^3$  at the frequencies  $\{n\kappa\}_{n=1}^3$  is considered, where the excitation field consists of a strong field at the frequency  $\kappa$  (generating a field at the triple frequency) and of weak fields at the frequencies  $2\kappa, 3\kappa$  (influencing on the process of generation of the third harmonic):

$$\left\{ \overline{E}_1^{\text{inc}}(n\kappa; y, z) \right\}_{n=1}^3 \cup \left\{ \underline{E}_1^{\text{inc}}(n\kappa; y, z) \right\}_{n=1}^3,$$

here

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{E}_1^{\text{inc}}(n\kappa; y, z) \\ \underline{E}_1^{\text{inc}}(n\kappa; y, z) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} a_{n\kappa}^{\text{inc}} \\ b_{n\kappa}^{\text{inc}} \end{array} \right\} \exp[i(\Phi_{n\kappa} y \mp \Gamma_{n\kappa} \cdot (z \mp 2\pi\delta))], \quad \begin{array}{l} z > \\ z < \end{array} \pm 2\pi\delta \quad \left. \right\}_{n=1}^3.$$

In such a situation, taking into account Kleinman's rule (i.e. the equality of all the susceptibility tensor components  $\chi_{xxxx}^{(3)}$  at the multiple frequencies [10]), the problem under consideration can be described by a system of nonlinear boundary value problems [6-9]

$$\begin{aligned} & \left[ \nabla^2 + (n\kappa)^2 \varepsilon_{n\kappa}(z, \alpha(z), \{E_x(m\kappa; y, z)\}_{m=1}^3) \right] E_x(n\kappa; y, z) \\ & = -(n\kappa)^2 \alpha(z) \left[ \delta_n^1 E_x^2(2\kappa; y, z) E_x^*(3\kappa; y, z) \right. \\ & \quad \left. + \delta_n^3 \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\kappa; y, z) + E_x^2(2\kappa; y, z) E_x^*(\kappa; y, z) \right\} \right], \quad n = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

together with the following generalized boundary conditions:

(C1)  $E_x(n\kappa; y, z) = U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y)$ , the quasi-homogeneity condition w.r.t.  $y$ ,

(C2)  $\Phi_{n\kappa} = n\Phi_\kappa$  or  $\varphi_{n\kappa} = \varphi_\kappa$ , the condition of phase synchronism of waves [6],

(C3)  $\mathbf{E}_{\text{tg}}(n\kappa; y, z)$  and  $\mathbf{H}_{\text{tg}}(n\kappa; y, z)$  are continuous at the boundaries of the layered structure,

$$(C4) \quad E_x^{\text{scat/gen}}(n\kappa; y, z) = \left\{ \begin{array}{l} a_{n\kappa}^{\text{scat/gen}} \\ b_{n\kappa}^{\text{scat/gen}} \end{array} \right\} \exp[i(\Phi_{n\kappa} y \pm \Gamma_{n\kappa} (z \mp 2\pi\delta))], \quad \begin{array}{l} z > \\ z < \end{array} \pm 2\pi\delta \quad \text{for}$$

$\text{Im}\Gamma_{n\kappa} \equiv 0$  and  $\text{Re}\Gamma_{n\kappa} > 0$ , the radiation condition w.r.t. the scattered/generated fields.

Here:  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ ,  $\delta_n^k$  – Kronecker's symbol,  $\mathbf{E}_{\text{tg}}(n\kappa; y, z)$  and  $\mathbf{H}_{\text{tg}}(n\kappa; y, z)$  – the tangential components of the vectors of the full electromagnetic fields  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{H}$ ,  $\Gamma_{n\kappa} = \sqrt{(n\kappa)^2 - \Phi_{n\kappa}^2}$  and  $\Phi_{n\kappa} = n\kappa \sin(\varphi_{n\kappa})$  – the transverse and longitudinal propagation constants of the nonlinear structure

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n\kappa} &= \left\{ 1, |z| > 2\pi\delta; \text{ and } \varepsilon^{(L)} + \varepsilon_{n\kappa}^{(NL)}, |z| \leq 2\pi\delta \right\}, \\ \varepsilon^{(L)} &= 1 + 4\pi\chi_1^{(1)}(z), \\ \varepsilon_{n\kappa}^{(NL)} &= \alpha(z) \left[ \sum_{m=1}^3 |E_1(m\kappa; y, z)|^2 \right. \\ & \quad \left. + \left\{ \delta_n^1 \frac{[E_1^*(\kappa; y, z)]^2}{E_1(\kappa; y, z)} + \delta_n^2 \frac{E_1^*(2\kappa; y, z)}{E_1(2\kappa; y, z)} E_1(\kappa; y, z) \right\} E_1(3\kappa; y, z) \right], \end{aligned} \quad (2)$$



$\alpha(z) = 6\pi\chi_{xxxx}^{(3)}(z)$  – the function of cubic susceptibility of the nonlinear medium,  $\chi_{xx}^{(1)}$  and  $\chi_{xxxx}^{(3)}$  – components of the susceptibility tensors of the nonlinear medium.

The sought complex Fourier amplitudes of the total scattered and generated fields in the problem (1), (C1)-(C4) at the multiple frequencies  $\{n\kappa\}_{n=1}^3$  can be represented in the form

$$E_x(n\kappa; y, z) = U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y) = \begin{cases} a_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp(i(\Phi_{n\kappa} y - \Gamma_{n\kappa}(z - 2\pi\delta))) \\ + a_{n\kappa}^{\text{scat/gen}} \exp(i(\Phi_{n\kappa} y + \Gamma_{n\kappa}(z - 2\pi\delta))), & z > 2\pi\delta, \\ U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y), & |z| \leq 2\pi\delta, \\ b_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp(i(\Phi_{n\kappa} y + \Gamma_{n\kappa}(z + 2\pi\delta))) \\ + b_{n\kappa}^{\text{scat/gen}} \exp(i(\Phi_{n\kappa} y - \Gamma_{n\kappa}(z + 2\pi\delta))), & z < -2\pi\delta. \end{cases} \quad (3)$$

Taking into consideration (3), the nonlinear system (1), (C1)-(C4) is equivalent to a system of nonlinear boundary-value problems of Sturm-Liouville type, see [6-9],

$$\left[ d^2/dz^2 + \Gamma_{n\kappa}^2 - (n\kappa)^2 \{1 - \varepsilon_{n\kappa}(z, \alpha(z), U(\kappa; z), U(2\kappa; z), U(3\kappa; z))\} \right] U(n\kappa; z) = -(n\kappa)^2 \alpha(z) \left\{ \delta_n^1 U^2(2\kappa; z) U^*(3\kappa; z) + \delta_n^3 \left[ \frac{1}{3} U^3(\kappa; z) + U^2(2\kappa; z) U^*(\kappa; z) \right] \right\}, \quad |z| \leq 2\pi\delta, \quad (4)$$

$$[i\Gamma_{n\kappa} - d/dz] U(n\kappa; 2\pi\delta) = 2i\Gamma_{n\kappa} \bar{U}^{\text{inc}}(n\kappa; 2\pi\delta),$$

$$[i\Gamma_{n\kappa} + d/dz] U(n\kappa; -2\pi\delta) = 2i\Gamma_{n\kappa} \underline{U}^{\text{inc}}(n\kappa; -2\pi\delta), \quad n = 1, 2, 3,$$

and also to a system of one-dimensional nonlinear integral equations w.r.t. the unknown functions  $U(n\kappa; \cdot) \in L_2(-2\pi\delta, 2\pi\delta)$ , see [6-9],

$$U(n\kappa; z) + \frac{i(n\kappa)^2}{2\Gamma_{n\kappa}} \int_{-2\pi\delta}^{2\pi\delta} \exp(i\Gamma_{n\kappa}|z - \xi|) \left[ 1 - \varepsilon_{n\kappa}(\xi, \alpha(\xi), \{U(m\kappa; \xi)\}_{m=1}^3) \right] U(n\kappa; \xi) d\xi = \frac{i(n\kappa)^2}{2\Gamma_{n\kappa}} \int_{-2\pi\delta}^{2\pi\delta} \exp(i\Gamma_{n\kappa}|z - \xi|) \alpha(\xi) \left[ \delta_n^1 U^2(2\kappa; \xi) U^*(3\kappa; \xi) + \delta_n^3 \left\{ \frac{1}{3} U^3(\kappa; \xi) + U^2(2\kappa; \xi) U^*(\kappa; \xi) \right\} \right] d\xi + \bar{U}^{\text{inc}}(n\kappa; z) + \underline{U}^{\text{inc}}(n\kappa; z), \quad n = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Here:  $\bar{U}^{\text{inc}}(n\kappa; z) = a_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp[-i\Gamma_{n\kappa}(z - 2\pi\delta)]$ ,  $\underline{U}^{\text{inc}}(n\kappa; z) = b_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp[i\Gamma_{n\kappa}(z + 2\pi\delta)]$ .

The solution of the problem (1), (C1)-(C4), represented in (3), can be obtained from (4) or (5) using the formulas

$$U(n\kappa; 2\pi\delta) = a_{n\kappa}^{\text{inc}} + a_{n\kappa}^{\text{scat/gen}}, \quad U(n\kappa; -2\pi\delta) = b_{n\kappa}^{\text{inc}} + b_{n\kappa}^{\text{scat/gen}}, \quad n = 1, 2, 3.$$

**3. Self-consistent analysis of the system of nonlinear integral equations**

According to [6-9], the application of suitable quadrature rules to the system nonlinear integral equations (5) leads to a system of complex-valued nonlinear algebraic equations of the second kind

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{n\kappa}(\mathbf{U}_{\kappa}, \mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa})] \mathbf{U}_{n\kappa} \\
 & = \delta_n^1 \mathbf{C}_{\kappa}(\mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa}) + \delta_n^3 \mathbf{C}_{3\kappa}(\mathbf{U}_{\kappa}, \mathbf{U}_{2\kappa}) + \overline{\mathbf{U}}_{n\kappa}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{U}}_{n\kappa}^{\text{inc}}, \quad n = 1, 2, 3
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

where  $\mathbf{U}_{n\kappa} = \{U_l(n\kappa)\}_{l=1}^N \approx \{U(n\kappa; z_l)\}_{l=1}^N$  – the vectors of the unknown approximate values of the solution,  $\{z_l\}_{l=1}^N : z_1 = -2\pi\delta < \dots < z_l < \dots < z_N = 2\pi\delta$  – a discrete set of interpolation nodes,  $\mathbf{I} = \{\delta_l^m\}_{l,m=1}^N$  – the identity matrix,  $\mathbf{B}_{n\kappa}(\mathbf{U}_{\kappa}, \mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa})$  – nonlinear matrices,  $\mathbf{C}_{\kappa}(\mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa})$ ,  $\mathbf{C}_{3\kappa}(\mathbf{U}_{\kappa}, \mathbf{U}_{2\kappa})$  – the vectors of the right-hand sides determined by the choice of the quadrature rule, and  $\overline{\mathbf{U}}_{n\kappa}^{\text{inc}} = \{a_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp[-i\Gamma_{n\kappa}(z_l - 2\pi\delta)]\}_{l=1}^N$ ,  $\underline{\mathbf{U}}_{n\kappa}^{\text{inc}} = \{b_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp[+i\Gamma_{n\kappa}(z_l + 2\pi\delta)]\}_{l=1}^N$  – the vectors induced by the incident wave packets at the multiple frequencies  $n\kappa$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

A solution of (6) can be found iteratively by the help of a block Jacobi method, where at each step a system of linearized algebraic equations is solved [6-9]:

$$\left\{ \left\{ \left\{ \begin{aligned} & [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\kappa}(\mathbf{U}_{\kappa}^{(s-1)}, \mathbf{U}_{2\kappa}^{(s_2(q))}, \mathbf{U}_{3\kappa}^{(s_3(q))})] \mathbf{U}_{\kappa}^{(s)} \\ & = \mathbf{C}_{\kappa}(\mathbf{U}_{2\kappa}^{(s_2(q))}, \mathbf{U}_{3\kappa}^{(s_3(q))}) + \overline{\mathbf{U}}_{\kappa}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{U}}_{\kappa}^{\text{inc}} \end{aligned} \right\}_{s=1} \right\}_{S_1(q): \eta_1(S_1(q)) < \xi} \right\}_{q=1}^Q$$

$$\left\{ \left\{ \left\{ \begin{aligned} & [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{2\kappa}(\mathbf{U}_{\kappa}^{(S_1(q))}, \mathbf{U}_{2\kappa}^{(s-1)}, \mathbf{U}_{3\kappa}^{(s_3(q))})] \mathbf{U}_{2\kappa}^{(s)} \\ & = \overline{\mathbf{U}}_{2\kappa}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{U}}_{2\kappa}^{\text{inc}} \end{aligned} \right\}_{s=1} \right\}_{S_2(q): \eta_2(S_2(q)) < \xi} \right\}_{q=1}^Q$$

$$\left\{ \left\{ \left\{ \begin{aligned} & [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{3\kappa}(\mathbf{U}_{\kappa}^{(S_1(q))}, \mathbf{U}_{2\kappa}^{(s_2(q))}, \mathbf{U}_{3\kappa}^{(s-1)})] \mathbf{U}_{3\kappa}^{(s)} \\ & = \mathbf{C}_{3\kappa}(\mathbf{U}_{\kappa}^{(S_1(q))}, \mathbf{U}_{2\kappa}^{(s_2(q))}) + \overline{\mathbf{U}}_{3\kappa}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{U}}_{3\kappa}^{\text{inc}} \end{aligned} \right\}_{s=1} \right\}_{S_3(q): \eta_3(S_3(q)) < \xi} \right\}_{q=1}^Q$$

$$\tag{7}$$

with

$$\eta_n(s) = \left\| \mathbf{U}_{n\kappa}^{(s)} - \mathbf{U}_{n\kappa}^{(s-1)} \right\| / \left\| \mathbf{U}_{n\kappa}^{(s)} \right\|, \quad n = 1, 2, 3.$$

Given a relative error tolerance  $\xi > 0$ , the terminating index  $Q \in \mathbb{N}$  and  $Q \geq 2$  is defined by the requirement

$$\max\{\eta_1(Q), \eta_2(Q), \eta_3(Q)\} < \xi.$$

Finally we mention that the classification of scattered and generated fields of the dielectric layer by the  $H_{m,l,p}$ -type adopted in our paper is identical to that given in [6-9, 11]. In the case of E-polarization,  $H_{m,l,p}$  (or  $TE_{m,l,p}$ ) denotes the type of polarization of the wave field under investigation. The subscripts indicate the number

of local maxima of  $|E_x|$  (or  $|U|$ , as  $|U| = |E_x|$ , see (3)) in the dielectric layer, i.e. along the coordinate axes  $x$ ,  $y$  и  $z$  (see Fig. 1). Since the considered waves are homogeneous along the  $x$ -axis and quasi-homogeneous along the  $y$ -axis, we actually study fields of the type  $H_{0,0,p}$  (or  $TE_{0,0,p}$ ), where the subscript  $p$  is equal to the number of local maxima of the function  $|U|$  of the argument  $z$  in  $[-2\pi\delta, 2\pi\delta]$ .

**4. The type-conversion of the generated oscillations of a decanalizing nonlinear layer media**

The Fig. 2 show the properties of a decanalizing ( $\alpha(z) < 0$ ) nonlinear dielectric structure with the parameters  $\varepsilon^{(L)}(z) = 16$ ,  $\alpha(z) = -0.01$ ,  $\delta = 0.5$ . The excitation of the nonlinear layer takes place from above by only one strong top electromagnetic field at  $\varphi_\kappa = 0^0$  and the basic frequency  $\kappa = \kappa^{inc} = 0.375$ , i.e.  $\{a_\kappa^{inc} \neq 0, b_\kappa^{inc} = a_{2\kappa}^{inc} = b_{2\kappa}^{inc} = a_{3\kappa}^{inc} = b_{3\kappa}^{inc} = 0\}$ .

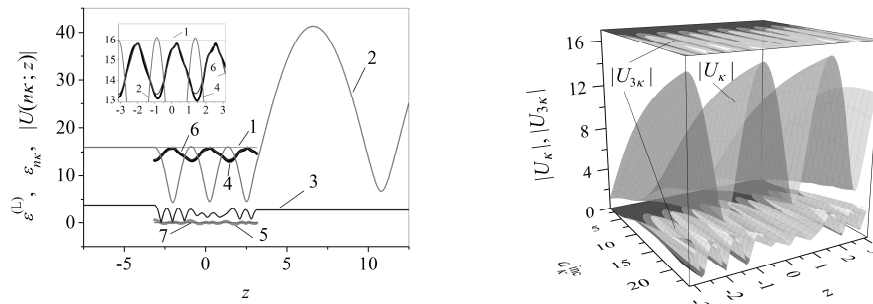


Fig. 2. Curves: 1 –  $\varepsilon^{(L)}$ , 2 –  $|U(\kappa; z)|$ , 3 –  $|U(3\kappa; z)|$ , 4 –  $\text{Re}(\varepsilon_\kappa)$ , 5 –  $\text{Im}(\varepsilon_\kappa)$ , 6 –  $\text{Re}(\varepsilon_{3\kappa})$ , 7 –  $\text{Im}(\varepsilon_{3\kappa}) \equiv 0$  at  $a_\kappa^{inc} = 24$  (left); and surfaces of scattered  $|U_\kappa[a_\kappa^{inc}, z]|$  and generated  $|U_{3\kappa}[a_\kappa^{inc}, z]|$  fields in the nonlinear layer (right).

In Fig. 2 we see a symmetry violation in the generated field in the radiation zone (graphs no. 3, left). In particular, inside the decanalizing layer the symmetry violation is accompanied by the presence of an inflection point  $z \approx 1,25$ , where  $|U(3\kappa; z)| = 1,81$  for  $a_\kappa^{inc} = 24$ , see graph no. 3 (left) and the surface  $|U_{3\kappa}[a_\kappa^{inc}, z]|$  (right). In the considered ranges of amplitudes  $a_\kappa^{inc}$ , the plane waves exciting the nonlinear layer under the angle  $\varphi_\kappa$  produce a scattered field  $U_\kappa$  of the type  $H_{0,0,4}$ . The generated field  $U_{3\kappa}$  changes its type with increasing amplitude  $a_\kappa^{inc}$ . The generation of a third harmonic field  $U_{3\kappa}$  is observed in the range  $a_\kappa^{inc} \in [4, 24]$ , (right). Here it is of the

type  $H_{0,0,10}$  for  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [4, 23)$  and of the type  $H_{0,0,9}$  for  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [23, 24]$ . The type-conversion of the generated oscillations from  $H_{0,0,10}$  to  $H_{0,0,9}$  with increasing  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$  is due to the loss of one maximum point of the function  $|U(3\kappa; z)|$  for  $z \in [-2\pi\delta, 2\pi\delta]$  at the inflection point  $z=1.15$  for  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 23$ , see the point with coordinates  $(a_{\kappa}^{\text{inc}} = 23, z = 1.15, |U_{3\kappa}| = 1.61)$  on the surface  $|U_{3\kappa}[a_{\kappa}^{\text{inc}}, z]|$  (right).

The increase in the intensity of the excitation field leads to critical inflection points of the function (the absolute value of the amplitude of the scattered/generated field) identifying the type of oscillation. If in these points the local maximum of the function along the characteristic spatial coordinate of the investigated structure (the transverse coordinate along the height of the nonlinear layer) is lost, then the effect of type-conversion of the radiation field occurs. The amplitudes of the incident field, for which the described effect is observed, can be called the threshold of the considered types of oscillations.

**5. The type-conversion of the scattering oscillations at the two-sided excitation of nonlinear layered structures**

The Fig. 3 show the properties of the nonlinear structures with the parameters:

$$\{\varepsilon^{(L)}(z), \alpha(z)\} = \begin{cases} \{\varepsilon^{(L)} = 16, \alpha = \alpha_1\}, & z \in [-2\pi\delta, z_1 = -2\pi\delta/3]; \\ \{\varepsilon^{(L)} = 64, \alpha = \alpha_2\}, & z \in (z_1 = -2\pi\delta/3, z_2 = 2\pi\delta/3); \\ \{\varepsilon^{(L)} = 16, \alpha = \alpha_3\}, & z \in [z_2 = 2\pi\delta/3, 2\pi\delta]; \end{cases}$$

at  $\delta = 0.5$ ,  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0.01$ ,  $\alpha_2 = -0.01$ . The excitation takes place from above and below by electromagnetic fields at the basic frequency  $\kappa = \kappa^{\text{inc}} = 0.25$  and  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38, b_{\kappa}^{\text{inc}} \neq 0, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = b_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc}} = b_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0\}$ .

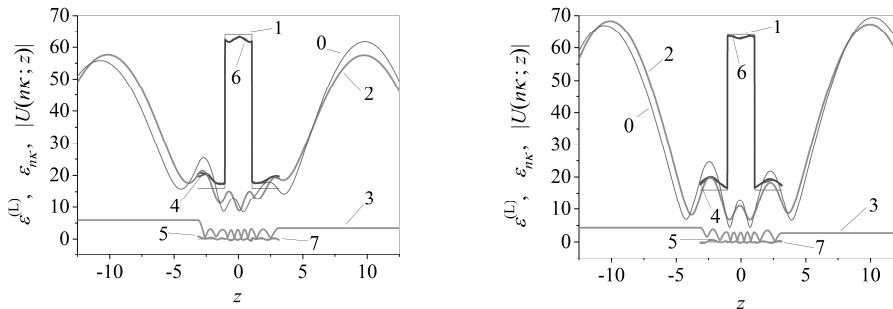


Fig. 3. Curves: 0 –  $|U(\kappa; z)|$  for  $\alpha(z) = 0$ , 1 –  $\varepsilon^{(L)}$ , 2 –  $|U(\kappa; z)|$ , 3 –  $|U(3\kappa; z)|$ , 4 –  $\text{Re}(\varepsilon_{\kappa})$ , 5 –  $\text{Im}(\varepsilon_{\kappa})$ , 6 –  $\text{Re}(\varepsilon_{3\kappa})$ , 7 –  $\text{Im}(\varepsilon_{3\kappa}) \equiv 0$  at  $\{\varphi_{\kappa}, 180^0 - \varphi_{\kappa}\}$  with  $\varphi_{\kappa} = 0^0$  and (left):  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38, b_{\kappa}^{\text{inc}} = 20\}$ ; (right):  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38, b_{\kappa}^{\text{inc}} = 30\}$ .

The absolute values of the amplitudes of the total scattering  $|U(\kappa; z)|$  and generation  $|U(3\kappa; z)|$  fields, for different variants of two-sided  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}}, b_{\kappa}^{\text{inc}}\}$  normal  $\{\varphi_{\kappa}, 180^{\circ} - \varphi_{\kappa}\}_{\varphi_{\kappa}=0^{\circ}}$  excitation of the nonlinear structure are illustrated by the graphs no. 2 and no. 3 in Fig. 3. They may be identified as oscillations of the types  $\{H_{0,0,4}$  and  $H_{0,0,9}\}$  (left),  $\{H_{0,0,3}$  and  $H_{0,0,9}\}$  (right). We mention a resonance effect of type-conversion of the total scattered field  $H_{0,0,4} \Leftrightarrow H_{0,0,3}$ . The resonant type-conversion of oscillations, which is observed for the two-sided excitation of both linear and nonlinear structures, occurs if the symmetry of the excitation is violated.

The resonant type-conversion of oscillations, which is observed for the two-sided excitation of nonlinear structures, occurs if the symmetry of the nonlinear structures or excitation is violated. The fundamental difference in the occurrence of this effect between the nonlinear and the linear situations consists in the presence of the nonlinear part  $\varepsilon_{n\kappa}^{(\text{NL})}$  of the dielectric permittivity  $\varepsilon_{n\kappa}$ ,  $n = 1, 3$ , see (2).

We mention that the behaviour of the quantity  $\varepsilon_{n\kappa}^{(\text{NL})} = \varepsilon_{n\kappa} - \varepsilon^{(\text{L})}$  can be estimated easily by means of the graphs nos. 4, 5, 6, 7 and 1 in Figs. 2 (left) and 3 (left/right). The graph no. 1 depicts the dielectric permittivity  $\varepsilon^{(\text{L})}$  of a linear non-absorbing  $\text{Im}(\varepsilon^{(\text{L})}) \equiv 0$  structure. The graphs nos. 4, 5, 6, 7 show the real and imaginary parts of the nonlinear dielectric permittivity  $\varepsilon_{n\kappa}$ ,  $n = 1, 3$ , for the excitation variants under consideration, see Figs. 2 (left) and 3 (left/right). In particular,  $\text{Im}(\varepsilon_{\kappa}^{(\text{NL})})$  takes positive and negative values along the height of the nonlinear layer, for all the considered excitation variants of the nonlinear structure. The variation of this quantity characterizes the energy consumption of the nonlinear medium which is spent for the third harmonic generation.

The numerical results for the scattering and generation of a wave package by a nonlinear cubically polarizable layer are obtained by means of the solution of the system of nonlinear integral equations (5). Applying Simpson's quadrature rule, the system (5) is reduced to a system of nonlinear algebraic equations (6). The numerical solution of (6) is carried out using a self-consistent iterative algorithm (7) based on a block Jacobi method. In the investigated range of problem parameters the dimension of the algebraic systems was 301 and 501 in the case of single-layered (Section 4) and three-layered (Section 5) structures, respectively. The relative error of the calculations did not exceed  $10^{-7}$ .

## 6. Conclusion

The type-conversion effect was observed at a symmetry violation of the nonlinear problem caused by different amplitudes of the excitation fields. For the first time, two-sided acting fields at the scattering frequency were taken into account and a type-conversion of the oscillations could be observed. The latter effect was observed at a symmetry violation of the nonlinear problem caused by different amplitudes of the excitation fields. This effect may serve as a basis for numerical and analytical methods

for the synthesis and analysis of nonlinear structures in the vicinity of critical points of the amplitude-phase dispersion, similar to the approach developed in the papers [12]. That is, mathematical models for the control of anomalous scattering and generation properties of nonlinear structures via the variation of amplitudes in a one/two-sided excitation of a nonlinear structure at scattering and generation frequencies near the resonance frequencies of the linearized spectral problems can be created.

## REFERENCES

1. Shen Y.R. *The Principles of Nonlinear Optics*, - NY–Chicester–Brisbane–Toronto–Singapore: John Wiley and Sons, 1984. – 567 p.
2. Akhmediev N.N., Ankiewicz A. *Solitons*, - M.: Fizmatlit, 2003. – 304 p.
3. Kivshar Y.S., Agrawal G.P. *Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals*, - NY: Academic Press, 2003. – 540 p.
4. Chernogor L.F. *Nonlinear Radio Physics*. – Kharkiv: V.N. Karazin Kharkiv National University, 2004. – 200 p.
5. Miloslavsky V.K. *Nonlinear Optics*. – Kharkiv: V.N. Karazin Kharkiv National University, 2008. – 312 p.
6. Angermann L., Yatsyk V.V. *Generation and Resonance Scattering of Waves on Cubically Polarizable Layered Structures*. // In: Ed. L. Angermann, *Numerical Simulations – Applications, Examples and Theory*. – Rijeka, Croatia: InTech, 2011. – Chapter 8. – P. 175–212.
7. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. *Preset Field Approximation and Self-Consistent Analysis of the Scattering and Generation of Oscillations by a Layered Structure*. // In: Eds. L. Beilina and Y.V. Shestopalov, *Inverse Problems and Large-Scale Computations*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 52. – Switzerland: Springer International Publishing, 2013. – Chapter 4. – P. 41-56.
8. Angermann L., Yatsyk V.V. *Mathematical Models of Electrodynamical Processes of Wave Scattering and Generation on Cubically Polarizable Layers*. // *Progress In Electromagnetics Research B*. – 2013. – Vol. 56. – P. 109-136.
9. Angermann L., Shestopalov Y.V., Yatsyk V.V. *Eigenmodes of Linearised Problems of Scattering and Generation of Oscillations on Cubically Polarizable Layers*. // In: Ed. L. Beilina, *Inverse Problems and Applications*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 120. – Switzerland: Springer International Publishing, 2015. – Chapter 5. – P. 67-80.
10. Kleinman D.A. *Nonlinear Dielectric Polarization in Optical Media*. // *Phys. Rev.* – 1962. – Vol. 126. – P. 1977-1979.
11. Shestopalov V.P., Sirenko Y.K. *Dynamic Theory of Gratings*. – Kiev: Naukova Dumka, 1989. – 214 p.
12. Shestopalov V.P., Yatsyk V.V. *Spectral Theory of a Dielectric Layer and the Morse Critical Points of Dispersion Equations* // *Ukrainian Journal of Physics*. – 1997. – Vol. 42. – No. 7. – P. 861-869.

УДК 368.91:004.942

## Математические модели и система поддержки принятия решений для оценки финансового состояния страхового фонда

К. А. Базилевич, М. С. Мазорчук

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

Предлагается система поддержки принятия решений для оценки финансового состояния страхового фонда на основе моделей актуарной математики. Особенностью данной системы является наличие модуля генерации сценариев формирования страхового фонда при различных начальных условиях, наличие модуля расчета сбалансированного размера тарифной ставки, а также прогнозирование финансового состояния фонда под влиянием внешних и внутренних факторов. Приведена структура и основные результаты работы автоматизированной системы поддержки принятия решений.

**Ключевые слова:** система поддержки принятия решений, актуарные расчеты, страхование.

Пропонується система підтримки прийняття рішень для оцінки фінансового стану страхового фонду на основі моделей актуарної математики. Особливістю даної системи є наявність модуля генерації сценаріїв формування страхового фонду при різних початкових умовах, наявність модуля розрахунку збалансованого розміру тарифної ставки, а також прогнозування фінансового стану фонду під впливом зовнішніх і внутрішніх факторів. Приведено структуру та основні результати роботи автоматизованої системи підтримки прийняття рішень.

**Ключові слова:** система підтримки прийняття рішень, актуарні розрахунки, страхування.

Decision support system for assessment of the insurance fund financial state based on the models of actuarial mathematics is offered. A feature of this system is that it contains the module of scenarios generation for the insurance fund formation under different initial conditions, the module for calculating a balanced tariff rate, and forecasting of financial state of the fund under the influence of external and internal factors. The system structure is described and main results of the automated decision support are presented.

**Key words:** decision support system, actuarial calculations, insurance.

### 1. Постановка проблемы и ее актуальность

Процесс проведения страховой деятельности является сложно прогнозируемым и трудно управляемым, информационные потоки предметной области страхования разнородны и имеют большой объем, что затрудняет их автоматизацию и обработку.

Управление финансовым состоянием страхового фонда сопряжено со множеством неопределенностей и рисков: вероятность наступления того или иного страхового события, количество исков, поступающих в страховую компанию за определенный промежуток времени, продолжительность жизни и состояние здоровья конкретного страхователя, процесс инфляции и доходность инвестиций, а также многое другое. Для учета и прогнозирования воздействия подобных неопределенных факторов в страховании, а также для расчета и моделирования многих страховых показателей предлагается применять системы

поддержки принятия решений (СППР), которые помогут лицу, принимающему решение (ЛПР), в выборе рациональной стратегии управления.

В настоящее время рынок страхования в Украине находится на этапе своего развития и становления. Теоретическому обоснованию страхования посвящено множество отечественных и зарубежных работ [1-4]. Разработаны теоретические основы страхования [1], большое внимание уделяется актуарным методам [3], разработаны методики расчета тарифных ставок по отдельным видам страхования [4].

Однако, по-прежнему, отсутствуют автоматизированные средства, в том числе, СППР для оценивания финансового состояния страхового фонда, использование которых позволило бы получать конкретные практические результаты для страховщиков: обоснованную сбалансированную величину тарифной ставки, величину страховой премии, значение предельного возраста, при котором возможно заключение договора, состояние страхового фонда при разных условиях с заданной гарантией безопасности и т.д. для конкретных рыночных условий с учетом множества факторов внешней среды.

В работе [5] проводится подробный анализ существующих украинских автоматизированных систем поддержки принятия решений в страховании. Авторы работы делают выводы о том, что функциональных возможностей существующих систем в сфере поддержки страховых решений явно недостаточно. Существует необходимость в разработке новой автоматизированной СППР, которая позволила бы поддерживать управленческие решения страховщиков, а также оценивать риски, связанные в неопределенностью в страховании.

Для обеспечения эффективного управления страховым фондом необходимо проанализировать процессы, влияющие на его формирование, провести формализацию предметной области, а также разработать общую модель функционирования страхового фонда.

Объектом изучения в данной работе является процесс формирования страхового фонда для решения задач личного страхования.

Предметом изучения является разработка механизмов автоматизации расчетов в сфере личного страхования, а также системы поддержки принятия решения для страховщиков.

Личное страхование в Украине включает в себя страхование жизни, страхование от несчастных случаев, добровольное медицинское страхование, добровольное страхование дополнительной пенсии [1].

В работе решаются следующие задачи:

- 1) выявление факторов, которые оказывают влияние на финансовое состояние страхового фонда;
- 2) разработка и описание структуры СППР для оценки состояния страхового фонда и определения страховых показателей, необходимых ЛПР при проведении личного страхования;
- 3) разработка средств автоматизации данной СППР.



## 2. Общая модель процесса формирования страхового фонда при личном страховании

Личное страхование, в зависимости от срока проведения, может быть краткосрочным (рассматривается временной промежуток до одного года) и долгосрочным (от одного года до тридцати лет). В данной работе рассматриваются оба вида страхования. При моделировании страхового фонда по этим двум видам страхования необходимо учитывать разные факторы, которые зависят от специфики вида страхования.

Финансовое состояние страхового фонда (ФССФ) прежде всего определяется финансовыми потоками внутри фонда, а также внешними факторами влияния.

Факторы влияния – это внешние факторы, которые напрямую или косвенно влияют на численные характеристики денежных потоков страхового фонда.

Рассмотрим общую схему формирования ФССФ при проведении личного страхования, основанную на модели индивидуальных рисков [3]. Для формализации предметной области представим процесс формирования ФССФ в виде наглядной схемы (рис. 1).

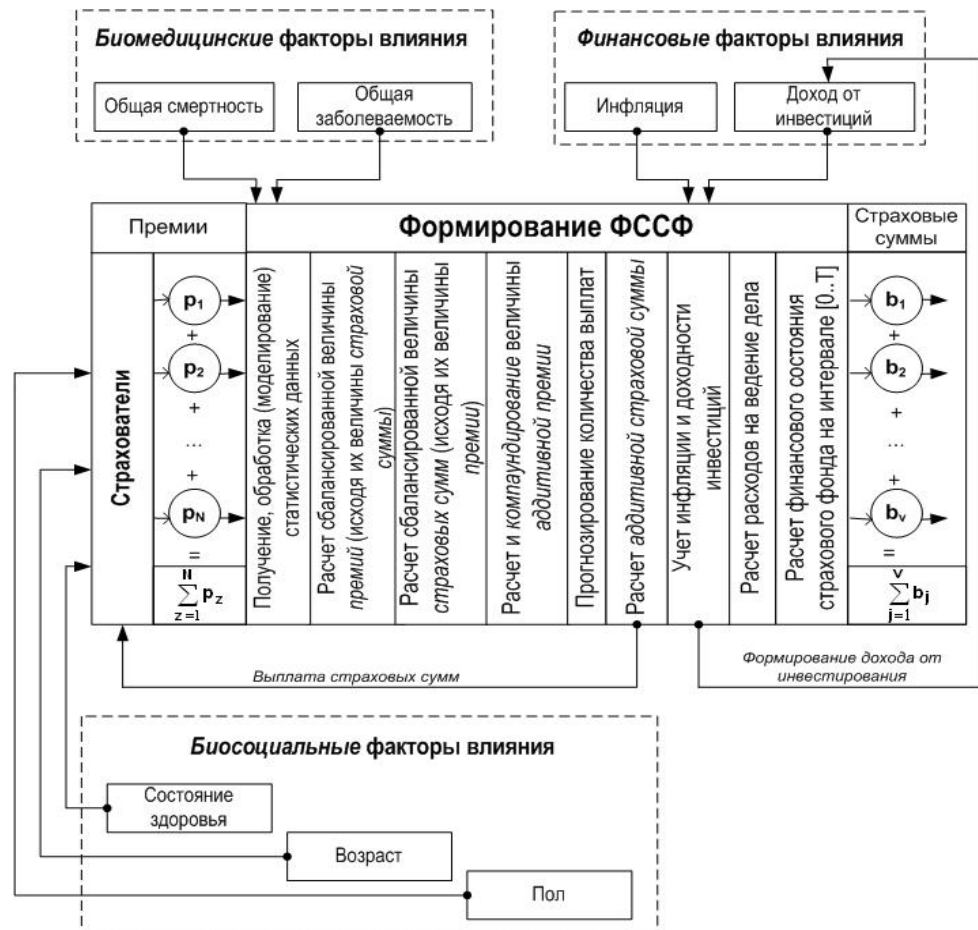


Рис. 1. Схема формирования финансового состояния страхового фонда и факторы влияния

Денежные суммы или величины  $p_1, p_2, \dots, p_N$ , которые платят страховой компании, называются страховыми премиями. Величины  $b_1, b_2, \dots, b_v$ ,  $v \leq N$ , которые выплачивает компания в случае наступления страхового случая, называются страховыми выплатами [6], где  $N$  - количество страхователей, а  $v$  - количество страховых случаев (исков) в рассматриваемом периоде.

В рамках данной модели моменты времени поступления страховых премий и их размеры являются детерминированными величинами, а моменты выплат и их объемы – случайными, которые определяются на основе различных моделей смертности с учетом вероятностей рисков, влияющих на выплаты [3].

Пусть  $t=0$  – это начальный момент моделирования страхового фонда, тогда  $t=T$  – конечный, в котором производится оценка ФССФ. Параметр  $t$  характеризует время в годах и может принимать различные значения на интервале  $[0..T]$ .

Обозначим через величину  $F_T$  финансовое состояние страхового фонда на момент времени  $T$ , т.е. суммарный объем денежных поступлений и выплат в момент оценки. Величина  $F_T$  определяется на основе следующего соотношения:

$$F_T = \left( u + \sum_{z=1}^N p_z \right) \cdot (1+i)^T - \sum_{t=0}^T \sum_{j=1}^v b_{jt} \cdot (1+i)^{T-t},$$

где  $u$  – капитал страховой компании в начальный момент моделирования,

$i$  – предполагаемая процентная ставка в данном периоде,  $\sum_{z=1}^N p_z \cdot (1+i)^T$  – суммарное (аддитивное) значение премий, приведенное к конечному моменту моделирования [7],  $N$  – количество страхователей,  $\sum_{t=0}^T \sum_{j=1}^v b_{jt} \cdot (1+i)^{T-t}$  – суммарное (аддитивное) значение выплат, приведенное к конечному моменту моделирования,  $v$  – количество исков в рассматриваемом периоде.

В случае краткосрочного страхования ставкой доходности инвестиций можно пренебречь, т.к. рассматриваемый период слишком короткий для достаточного накопления средств, однако, в данной работе наращение осуществляется по сложной схеме процентов.

Величина процентной ставки учитывает не только доходность средств, но и риски, связанные с инфляцией и другими факторами, оказывающими влияние на процесс страхования.

На схеме также представлены факторы, оказывающие влияние на процесс страхования и состояние страхового фонда. Все внешние факторы влияния на ФССФ разделены на биомедицинские, биосоциальные и финансовые

К биомедицинским факторам относятся данные о популяционной динамике, т.е. смертности и состоянии здоровья популяции в стране, регионе, области, городе (в зависимости от потребности страховщика).

В случае отсутствия статистической информации необходимые данные могут быть смоделированы с использованием аналитических законов смертности и регрессионных моделей прогнозирования заболеваемости.

Пол, возраст, а также состояние здоровья страхователя можно отнести к биосоциальным факторам. Информация о биосоциальных факторах, характеризующих каждого страхователя, обычно хранится в личном деле. Состояние здоровья характеризуется группой, к которой можно отнести страхователя. Принадлежность к каждой группе определяется профессией, возрастом, полом, наличием хронических заболеваний страхователя.

К финансовым факторам можно отнести доход от инвестирования и инфляцию, которые учитываются при проведении долгосрочного страхования. Уровень инфляции и ожидаемую доходность инвестиций определяет сам страховщик.

### **3. Проектирование системы поддержки принятия решений**

СППР предназначена для прогнозно-аналитического и информационного обеспечения процесса принятия решения при проведении личного страхования.

Среди основных этапов проектирования СППР можно выделить следующие:

1) разработка математических и алгоритмических моделей для расчета показателей ФССФ при личном страховании индивидов. Для расчета величины страховой премии при проведении страхования жизни в данной работе применяются математические модели, представленные в [6]. Для оценивания величины страховой премии добровольного медицинского и пенсионного страхования используются модели из [8,9]. Алгоритмические модели по всем видам личного страхования представлены в методическом пособии [8].

2) проектирование функциональных возможностей СППР;

3) проектирование и разработка средств автоматизации СППР для оценки ФССФ.

Функциональные возможности СППР:

1) обработка и хранение статистических данных о смертности и заболеваемости населения;

2) возможность восстановления данных в случае их неполноты по истории (с использованием различных моделей аппроксимации);

3) моделирование необходимых статистических данных в случае их отсутствия (методики расчета параметров для моделирования смертности по аналитическим законам описаны в [10]);

4) расчет сбалансированных тарифных ставок и страховых сумм (пенсий) по индивидуальным договорам для долгосрочного и краткосрочного страхования;

5) расчет аддитивной величины премий и страховых сумм (пенсий) по всем договорам при различных начальных условиях для долгосрочного и краткосрочного страхования;

6) анализ «что-если»: расчет и сохранение финансового состояния страхового фонда при различных начальных условиях для долгосрочного и краткосрочного страхования, сохранение всех возможных сценариев;

7) генерация сценариев формирования страхового фонда с учетом влияния различных факторов риска;

8) формирование базы рекомендаций для поддержки принятия решений ЛППР.

#### 4. Архитектура автоматизированной системы поддержки принятия решений

На основе описанного выше проекта системы была разработана автоматизированная система поддержки принятия решений для оценки финансового состояния страхового фонда.

Данная система позволяет проводить моделирование и оценивать финансовое состояние фонда по страхованию жизни, медицинскому и пенсионному страхованию.

Рассмотрим архитектуру и автоматизированные средства СППР.

Графическое представление архитектуры данной автоматизированной СППР представлено на рис. 2.

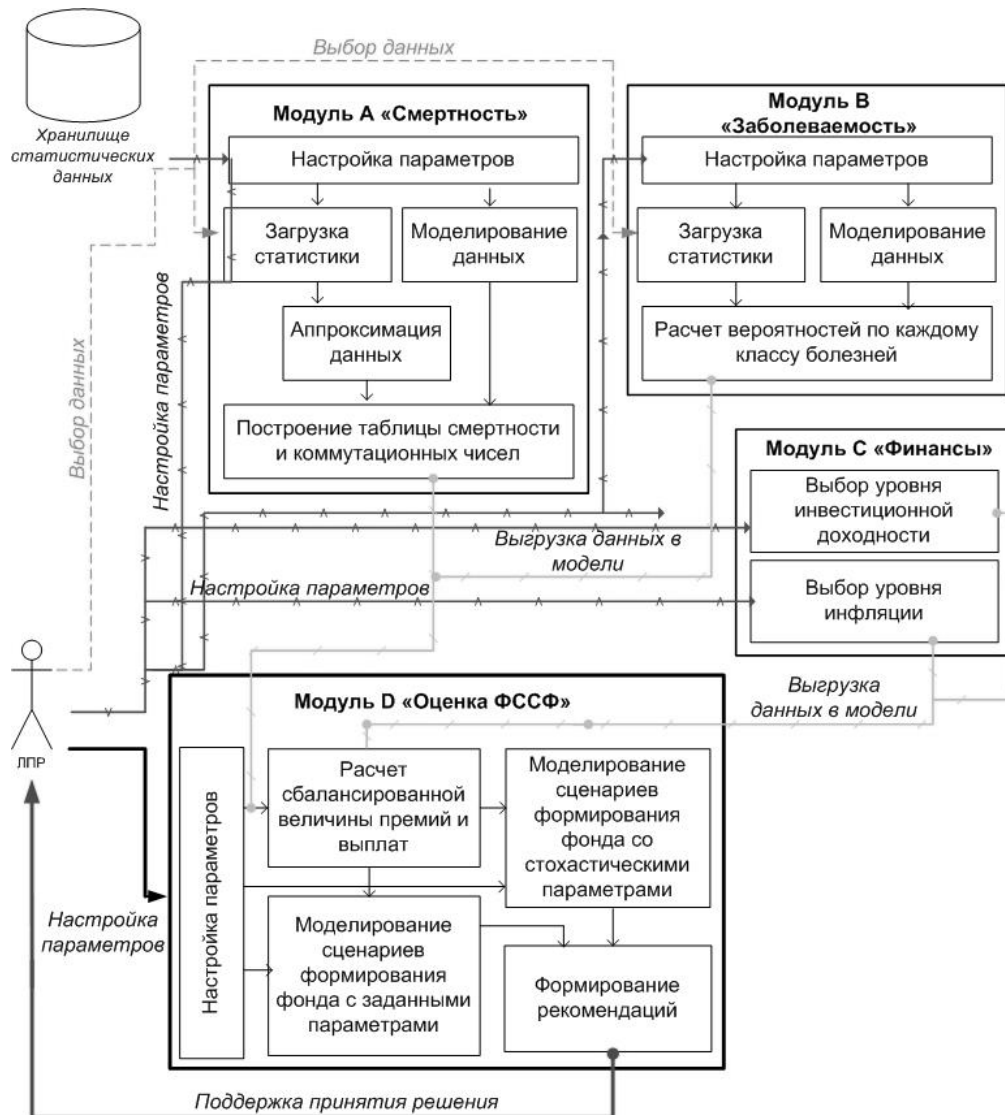


Рис. 2. Архитектура автоматизированной системы поддержки принятия решений для оценки финансового состояния страхового фонда

Автоматизированная СППР состоит из четырех основных функциональных блоков: моделирование или обработка популяционной динамики (блок А), моделирование или обработка заболеваемости по классам болезней (блок В), учет и настройка финансовых факторов (блок С) и центральный блок моделирования ФССФ, а также других страховых показателей (блок D).

### 5. Результаты работы автоматизированной системы поддержки принятия решений

Рассмотрим результаты работы предложенной системы на одном из видов личного страхования – страховании жизни.

Главный источник неопределенности по данному виду страхования – продолжительность жизни страхователя, о которой нельзя сказать ничего определенного. Поэтому, самый важный биомедицинский фактор для этого вида страхования – это статистическая информация о популяционной динамике, т.е. о количестве людей, умерших при переходе из одного возраста в другой (рис. 3, а). Автоматизированная СППР включает в себя подсистему моделирования популяционной динамики (смертности) на основании аналитических законов (рис. 3, б).



Рис. 3. Настройка параметров моделирования популяционной динамики: а) общие настройки модуля, б) параметры аналитических законов

Эта функция полезна ЛПР в случае отсутствия статистики за определенный период. Полученные данные могут быть представлены численно и графически (рис. 4.). Также, ЛПР предоставляется возможность выбрать закон с минимальной ошибкой моделирования на основании исходных данных (рис. 4).

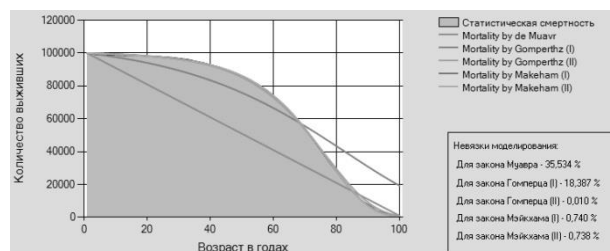


Рис. 4. Графическая интерпретация популяционной динамики по всем аналитическим законам, ошибки моделирования

В случае наличия статистики, происходит ее обработка (или аппроксимация, если данные неполные), а также построение таблицы смертности и коммутационных чисел (рис. 5).

x	Lx	Dx	Qx	Px	CDx	CMx	CNx	CCx
0	100000.0000	343.33333	0.00343	0.99657	100000.0000	16859.11242	2893981.96	353.63
1	99656.66667	343.33333	0.00345	0.99655	96754.04531	16305.47909	2793981.96	343.33
2	99313.33333	343.33333	0.00346	0.99654	93612.34172	15862.14575	2697227.91	333.33
3	98970.00000	45.00000	0.00045	0.99955	90571.57003	15620.81242	2603615.57	42.416
4	98925.00000	45.00000	0.00045	0.99955	87893.58122	15586.39560	2513044.00	41.181
5	98980.00000	45.00000	0.00046	0.99954	85294.75660	15545.21423	2425150.42	39.981
6	98935.00000	45.00000	0.00046	0.99954	82772.75651	15505.23231	2339855.66	38.817
7	98790.00000	26.40000	0.00027	0.99973	80325.31041	15466.41432	2257082.90	22.109
8	98763.60000	26.40000	0.00027	0.99973	77964.89785	15444.30533	2176757.59	21.465
9	98737.20000	26.40000	0.00027	0.99973	75673.84218	15422.83972	2098792.70	20.840
10	98710.80000	26.40000	0.00027	0.99973	73450.10561	15401.99931	2023118.05	20.233
11	98684.40000	26.40000	0.00027	0.99973	71291.71023	15381.76591	1949668.75	19.644
12	98658.00000	29.00000	0.00029	0.99971	69196.73622	15362.12183	1878377.04	20.950
13	98629.00000	29.00000	0.00029	0.99971	67161.54971	15341.17162	1809180.30	20.340
14	98600.00000	29.00000	0.00029	0.99971	65186.21565	15320.83160	1742018.75	19.747
15	98571.00000	29.00000	0.00029	0.99971	63268.97402	15301.08401	1676832.54	19.172
16	98542.00000	29.00000	0.00029	0.99971	61408.11652	15281.91159	1613563.56	18.614
17	98513.00000	74.80000	0.00076	0.99924	59601.98513	15263.29760	1552155.45	46.612
18	98438.20000	74.80000	0.00076	0.99924	57822.06786	15216.68471	1492593.46	45.255
19	98363.40000	74.80000	0.00076	0.99924	56095.27257	15171.42949	1434731.29	42.937
20	48298.50000	74.80000	0.00076	0.99924	54420.01473	15127.49296	1378936.12	42.697

Рис. 5. Численная интерпретация популяционной динамики (таблица смертности и коммутационные числа). Использованы статистические данные с аппроксимацией

Среди финансовых факторов учитываются инфляция и доход от инвестиций, а среди биосоциальных – учитывается возраст страхователя (рис. 6) и его пол (рис. 3, а).

Работу основной подсистемы по моделированию и оценке ФССФ можно увидеть на рис. 6.

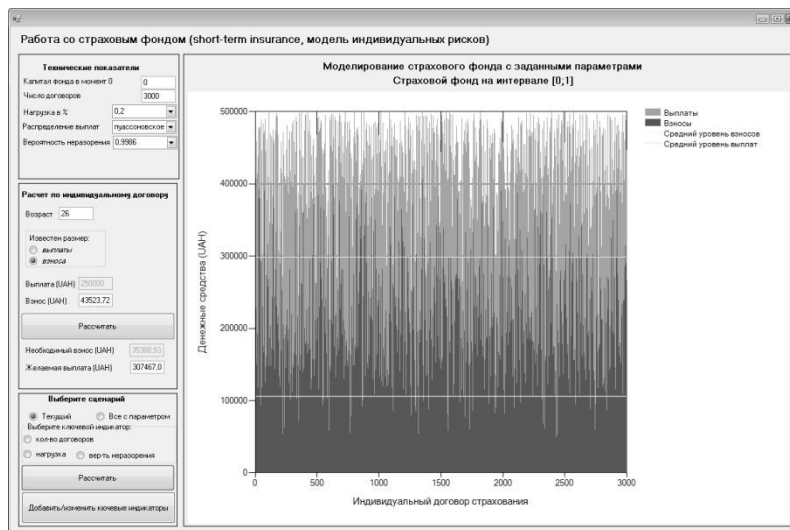


Рис. 6. Моделирование взносов и выплат страхового фонда для краткосрочного страхования жизни. Расчет по индивидуальному договору и общее состояние фонда

Подсистема моделирования ФССФ состоит из таких функциональных частей: настройка параметров (резерв фонда в начальный момент времени, общее число договоров, нагрузка в процентах (расходы на ведение дела и так далее), распределение выплат и вероятность неразорения страховщика); расчет по индивидуальному договору; моделирование ФССФ с разными параметрами.

Основные возможности системы:

1) *Анализ «Что-если».* Получение финансового состояния фонда в текущий момент времени при интересующих параметрах (рис. 6). При изменении значений страховые показатели пересчитываются автоматически.

2) *Сценарное моделирование.* Получение и сохранение состояния фонда при всех возможных вариациях ключевого индикатора. ЛПП может выбрать любое из прогнозируемых состояний и получить расчетные значения ключевых индикаторов, таких как:

- количество договоров (см. рис. 7);
- страховая нагрузка (см. рис. 8);
- вероятность неразорения (см. рис. 9).

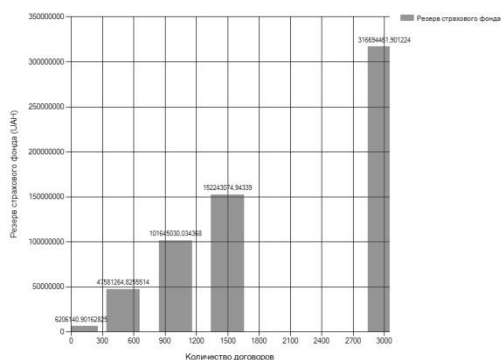


Рис. 7. Финансовое состояние страхового фонда при разных количествах договоров

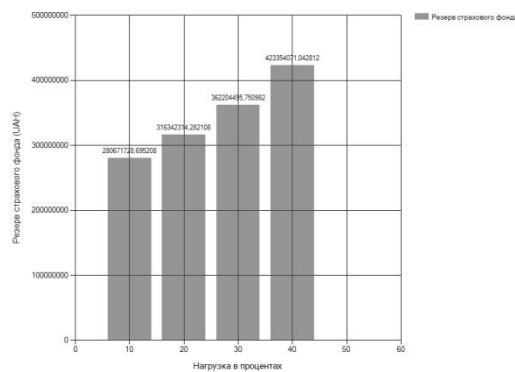


Рис. 8. Финансовое состояние страхового фонда при разной нагрузке

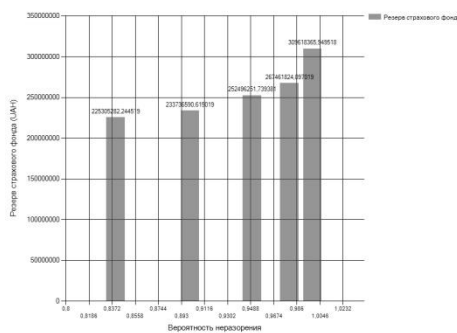


Рис. 9. Финансовое состояние страхового фонда при разных вероятностях неразорения

В системе существует возможность добавлять и настраивать дополнительные ключевые индикаторы.

При краткосрочном страховании моделируются возможные выплаты и взносы страхователей в течении одного года. Видно (см. рис. 6), что уровень взносов значительно ниже уровня выплат, однако, выплаты происходят с малой вероятностью, поэтому модель индивидуальных рисков покрывает все страховые иски с заданной вероятностью неразорения и позволяет накопить страховой резерв. При моделировании финансового состояния всего страхового фонда возраст страхователя, размер премии и страховой суммы (в заданном интервале) генерируются стохастически.

В результате работы системы формируется база рекомендаций (рис. 10). В данном случае можно увидеть оптимальный результат моделирования аналитическими законами смертности, ошибку моделирования; рекомендацию о возрасте страхователя. Был установлен предельный возраст страхователя для конкретного набора статистических данных. При страховании лиц старше установленного возраста, размер премии будет резко возрастать в связи с большей вероятностью смерти в течении года.

Рекомендации по формированию ФССФ

Страхование жизни (short-term insurance, модель индивидуальных рисков)

**Популяционная динамика:**

- Минимальная ошибка моделирования составила 0,010% при аналитическом законе Гемперца с параметрами методики II.
- Рекомендуется проводить страхование в возрасте до 57 лет, т.к. на основании выбранной статистической выборки вероятность смерти на интервале [57;100] резко возрастает, величина премии будет слишком высока.

**ФССФ:**

Выбраны такие параметры:

- ключевые индикаторы: количество испытаний, вероятность неразорения, нагрузка.
- моделируется пуассоновский поток выплат.

Получены результаты:

- усредненная вероятность смерти составила 0,0057062.
- ожидаемое количество исков составляет 19.
- рациональное количество договоров в диапазоне [100;3000] составляет 1500, при этом премия составляет 8,77% от выплаты, что является рациональным соотношением между прибыльностью и привлечением страхователей.
- рациональная величина неразорения страховщика составляет 0,9986, что обеспечивает максимально возможное покрытие рисков.
- ожидаемая аддитивная величина выплат составляет 5362474 UAH.
- финансовое состояние страхового фонда в момент выплаты по искам составляет 181448760 UAH.

**Основные показатели ФССФ:**

N#	Age	q	Benefit	Tn	Tb	u
0	39	0,00563331828248296	136237	39778,5265423136	49723,158177892	0,364975433824086
1	28	0,00254954415056732	163440	27000,0902094413	33750,1127618017	0,199186217904873
2	18	0,000759867612370024	352909	24023,8838590077	30029,8548237597	0,0850923462528858
3	52	0,0146191969736873	316005	200913,930758086	251142,413447608	0,794741897905437
4	18	0,000759867612370024	437792	29802,1987605947	37252,7484507434	0,0850923462528858
5	20	0,000761024167604411	396752	27035,8683111389	33794,8353889237	0,0851787398398084

Изменить параметры моделирования    Добавить/изменить ключевые индикаторы    Графическая интерпретация рекомендаций    ОК

Рис. 10. База рекомендаций для поддержки принятия решений в страховании

Была найдена усредненная вероятность смерти для всей когорты, ожидаемое количество исков, ожидаемая аддитивная величина страховых выплат. Полученные данные позволяют оценить ФССФ в заданный момент времени с учетом влияния различных факторов риска.

Аналогичным образом рассчитывается финансовое состояние страхового фонда по долгосрочному страхованию жизни и другим видам личного страхования.



## 6. Выводы

В данной работе рассматривается процесс формирования страхового фонда при личном страховании по различным видам. Проведен анализ предметной области и выделено множество факторов, влияющих на процесс страхования. На основе разработанных математических моделей актуарной математики предложена автоматизированная СППР.

В результате моделирования можно спрогнозировать финансовое состояние страхового фонда в разные моменты времени с учетом множества факторов внешней среды, которые оказывают влияние на процесс страхования. Результатом работы системы является база рекомендаций, которая помогает ЛПР в принятии управленческих решений. Результаты данной статьи могут быть использованы как в работе страховых фондов, так и в работе страховых компаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Страхування: Підручник / За ред. В.Д. Базилевича. - К.: Знання, 2008. - С. 687-690.
2. Александрова М.М. Страхування: Навч.-метод. посіб. - К.: ЦУЛ, 2002. - С. 5-30.
3. Фалин Г. И., Фалин А.И. Актуарная математика в задачах. 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, - 2003. - С. 81-129.
4. Шоломицкий А.Г. Финансирование накопительных пенсий: актуарные методы и динамические модели // Обозрение прикладной и промышленной математики. - 2002. - Т. 9. - С. 544-577.
5. Гужва В.М., Скрипова А.С. Интеллектуальные системы поддержки принятия решений в страховании: потребности украинских страховых компаний и их удовлетворение // Бизнес Информ. - 2012. №3. - С. 183-187.
6. Базилевич К.А., Мазорчук М.С. Разработка алгоритмических моделей расчета тарифных ставок для краткосрочного и долгосрочного страхования жизни // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. - 2011. - №3(51). - С. 57-63
7. Мазорчук М.С., Соколов О.Ю., Бакуменко Н.С., Волков С.Г. Математичні основи фінансових розрахунків: навч. посібник. - Х.: Нац. аерокосм. ун-т ім. М.Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2009. - 51 с.
8. Базилевич К.А., Мазорчук М.С. Особенности расчета страховых тарифов при добровольном медицинском страховании // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. - 2013. - №3(62). - С. 27-31.
9. Мазорчук М.С., Базилевич К.А., Бакуменко Н.С. Решение актуарных задач в страховании: учеб. пособие. - Х. : Нац. аерокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авіац. ін-т», 2013. - 50 с.
10. Базилевич К.А., Мазорчук М.С., Бакуменко Н.С. Алгоритмическая модель определения параметров модели популяционной динамики старения Гомперца // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. - 2014.- №3(67). - С. 27-32.

UDC 539.3

## Study of stress-strain state of the transversely isotropic plates using the refined theory

I. P. Bokov, N. S. Bondarenko, E. A. Strelnikova

*A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine*

The fundamental solution of statics equations of transversely isotropic plate was obtained using the two-dimensional Fourier integral transform and the inversion technic based on the special G-function. Such method allows reducing the system of resolving differential equations, which describe static state of flat plate or shell, to a system of algebraic equations. Then, the inverse Fourier transform restores the fundamental solution. Numerical studies, which were carried out, have detected the behavior patterns of stress-strain state components in dependence on material elastic constants. This approach demonstrates development of refined theory of plates and shells based on the three-dimensional elasticity theory.

**Key words:** *transversely isotropic plates, refined theory, the equations of statics, fundamental solution, special G-function.*

Фундаментальное решение уравнений статики трансверсально-изотропных пластин найдено с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье и методики обращения, построенной с помощью специальной G-функции. Данный метод позволяет свести систему разрешающих дифференциальных уравнений статики пологих пластин и оболочек к системе алгебраических уравнений. После этого обратное преобразование Фурье восстанавливает фундаментальное решение. Проведены численные исследования, которые демонстрируют закономерности поведения компонент напряженно-деформированного состояния в зависимости от упругих констант трансверсально-изотропного материала. Данный подход демонстрирует развитие уточненных теорий пластин и оболочек на основе трехмерной теории упругости.

**Ключевые слова:** *трансверсально-изотропные пластины, уточненная теория, уравнения статики, фундаментальное решение, специальная G-функция.*

Фундаментальне рішення рівнянь статики трансверсально-ізоотропних пластин знайдено за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є та методики звернення, побудованої за допомогою спеціальної G-функції. Цей метод дозволяє звести систему дозвільних диференціальних рівнянь статики пологих пластин та оболонок до системи алгебраїчних рівнянь. Після цього зворотне перетворення Фур'є відновлює фундаментальне рішення. Проведено численні дослідження, які демонструють закономірності поведінки компонент пружно-деформованого стану в залежності від пружних констант трансверсально-ізоотропного матеріалу. Цей підхід демонструє розвиток уточнених теорій пластин і оболонок на основі тривимірної теорії пружності.

**Ключові слова:** *трансверсально-ізоотропні пластины, уточнена теорія, рівняння статики, фундаментальне рішення, спеціальна G-функція.*

### Introduction

Engineering facilities consisting of thin-walled structural components, which are widely used in modern equipment, usually are submitted to the action of strong forces. Calculations related with such elements are never simple and become even more complicated when the forces have the concentrated nature.

This paper considers the transversely isotropic plates and proposes a technology that allows reducing the three-dimensional problem to two-dimensional one. To achieve this goal, we expand the sought functions in series of Legendre polynomials in the normal (transverse) coordinate. This approach allows us to take into account both the tangent and the normal transverse stresses. Applying it, we have derived the equations for transversely isotropic plates and developed a method to evaluate the stress-strain state (SSS) of these plates under the action of concentrated forces.

A lot of publications are dedicated to development of methods for construction of fundamental solutions of elasticity theory equations for thin plates and shells (particularly, in the case of concentrated forces). Problem statements, methods of their solution and a number of concrete results are presented in monographs and scientific articles of S.A. Ambartsumyan [1], A.L. Goldenveizer [2], S. Lukasiewicz [3], as well as in reviews of V.M. Darevsky [4], Y.P. Zhigalko [5] and others. Shear forces for isotropic plates were obtained in the paper of I.P. Bokov, E.A. Strelnikova [6].

Classical Kirchhoff-Love theory satisfactorily describes the SSS of relatively thin transversely isotropic plates, but it does not take into account the phenomena caused by shifts and compression. On the other hand, solving the elasticity theory problems in their three-dimensional formulation runs into considerable mathematical difficulties. One of the ways for further theory development proposes reduction of the three-dimensional problems to the two-dimensional ones.

From the point of view of refined theory development, study of SSS of transversely isotropic plates affected by concentrated forces is an actual scientific and technical problem. Such study is the main objective of the present paper.

### 1. The problem statement

In accordance with [7, p. 231], we call “the concentrated force” some abstraction, which actually is a force of finite value acting over a patch of the surface.

We consider the transversely isotropic plate of thickness  $2h$  in the rectangular Cartesian coordinate system  $x, y, z$ . Let us suppose that the concentrated force  $\vec{F}$  affects a plate and the coordinate origin coincides with the force application point (singular point). Solving the problems on effect of concentrated forces, we assume that sought SSS is local, that is, it does not rich edges of the plate. Therefore, we can consider the plate as infinite one and set that the components of the sought SSS tend to zero at infinity. Any obtained solution is to be validated checking whether it meets this assumption.

Stated mathematically, the problem represents a complete system of equations of the elasticity theory with no boundary conditions over the plate real edges. The sought functions tend to zero at infinity. The system of equations, which describes the bended plate SSS on the base of the theory of S.P. Timoshenko for transversely isotropic plates, consists of [8, p. 35-37]:

- the geometrical relations

$$e_{x1} = h \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}, \quad e_{xy1} = h \left( \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right), \quad e_{xz0} - \frac{e_{xz2}}{5} = \gamma_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (x \rightarrow y). \quad (1.1)$$

- the elasticity relations (Hooke's law)

$$M_x = D(e_{x1} + \nu e_{y1}), \quad M_y = D(e_{y1} + \nu e_{x1}), \quad H = \frac{1-\nu}{2} D e_{xy1}, \quad (1.2)$$

$$Q_x = \Lambda \left( e_{xz0} - \frac{e_{xz2}}{5} \right) \quad (x \rightarrow y),$$

where  $D = \frac{2h^2}{3} \frac{E}{1-\nu^2}$ ,  $\Lambda = \frac{5hG}{3}$ .

• the equilibrium equations

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x + m_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_y + m_y = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0.$$

To find the fundamental solution of the system (1.1) – (1.3), the vector components of body forces in formulas (1.3) should be taken in the form

$$m_x(x, y) = h^2 m_x^* \delta(x, y), \quad m_y(x, y) = h^2 m_y^* \delta(x, y), \quad (1.4)$$

$$q_z(x, y) = h^2 q_z^* \delta(x, y) \quad (x \rightarrow y),$$

where  $m_x^*, m_y^*, q_z^*$  are constants and  $\delta(x, y)$  is a two-dimensional Dirac delta function [9].

## 2. Definition of transforms of generalized displacements

Substituting the geometrical relations (1.1) into the elasticity relations (1.2) and passing to the dimensionless coordinate system  $x_1 = x/h$ ,  $x_2 = y/h$ ,  $x_3 = z/h$ , we obtain

$$M_1 = D_0 \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right), \quad M_2 = D_0 \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right),$$

$$H = \frac{1-\nu}{2} D_0 \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right), \quad (2.1)$$

$$Q_1 = \Lambda_0 \left( \gamma_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right), \quad Q_2 = \Lambda_0 \left( \gamma_2 + \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right),$$

where  $D_0 = \frac{D}{Eh^2} = \frac{2}{3} \frac{1}{1-\nu^2}$ ,  $\Lambda_0 = \frac{5G}{3E}$ .

Bending moments and torque are proportional to the value  $Eh^2$ , and shear forces – to the value  $Eh$ .

In the dimensionless coordinates, we obtain:

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_1 + m_1 = 0, \quad \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_1} - Q_2 + m_2 = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q_3 = 0,$$

where  $m_1 = m_1^* \delta(x_1, x_2)$ ,  $m_2 = m_2^* \delta(x_1, x_2)$ ,  $q_3 = q_3^* \delta(x_1, x_2)$ .

Solving this system, we obtain the generalized displacement transforms:

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{m_1^* \xi_1^2}{D_0 p^4} + 3(1+\nu)m_1^* \frac{\xi_2^2}{p^2(p^2+a^2)} + \frac{q_3^* i \xi_1}{D_0 p^4} + \frac{m_2^* \xi_1 \xi_2}{D_0 p^4} - 3(1+\nu)m_2^* \frac{\xi_1 \xi_2}{p^2(p^2+a^2)} \right], \quad (2.3)$$

$$\tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{m_2^* \xi_2^2}{D_0 p^4} + 3(1+\nu)m_2^* \frac{\xi_1^2}{p^2(p^2+a^2)} + \frac{q_3^* i \xi_2}{D_0 p^4} + \frac{m_1^* \xi_1 \xi_2}{D_0 p^4} - 3(1+\nu)m_1^* \frac{\xi_1 \xi_2}{p^2(p^2+a^2)} \right],$$

$$\tilde{w}_0 = \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{m_1^* i \xi_1}{D_0 p^4} - \frac{m_2^* i \xi_2}{D_0 p^4} + \frac{q_3^*}{D_0 p^4} + \frac{q_3^*}{\Lambda_0 p^2} \right],$$

where  $p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ ,  $a^2 = 3(1+\nu)\Lambda_0$ ;  $(\xi_1, \xi_2)$  are the point coordinates in the space of transforms.

### 3. Finding of generalized moments in the space of transforms

The Fourier transform applied to the Hooke's law equations (2.1) gives:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 &= -D_0(i\xi_1\tilde{\gamma}_1 + i\nu\xi_2\tilde{\gamma}_2), \quad \tilde{M}_2 = -D_0(i\xi_2\tilde{\gamma}_2 + i\nu\xi_1\tilde{\gamma}_1), \\ \tilde{H} &= \frac{1-\nu}{2} D_0(i\xi_2\tilde{\gamma}_1 + i\xi_1\tilde{\gamma}_2), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\tilde{Q}_1 = \Lambda_0(\tilde{\gamma}_1 - i\xi_1\tilde{w}_0), \quad \tilde{Q}_2 = \Lambda_0(\tilde{\gamma}_1 - i\xi_2\tilde{w}_0).$$

Having substitute the previously obtained expressions for transforms of generalized displacements (2.3) into the transforms of bending moments equations (3.1) we obtain:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 &= -\frac{1}{2\pi} \left[ m_1^* \frac{\xi_1^3}{p^4} + 2m_1^* \frac{i\xi_1\xi_2^2}{p^2(p^2+a^2)} - q_3^* \frac{\xi_1^2}{p^4} + m_2^* \frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^4} - \right. \\ &\quad \left. - 2m_2^* \frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^2(p^2+a^2)} + m_2^* \nu \frac{\xi_2^3}{p^4} - q_3^* \nu \frac{\xi_2^2}{p^4} + m_1^* \nu \frac{i\xi_1\xi_2^2}{p^4} \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_2 = & -\frac{1}{2\pi} \left[ m_2^* \frac{\xi_2^3}{p^4} + 2m_2^* \frac{i\xi_1^2 \xi_2}{p^2(p^2 + a^2)} - q_3^* \frac{\xi_2^2}{p^4} + m_1^* \frac{i\xi_1 \xi_2^2}{p^4} - \right. \\ & \left. - 2m_1^* \frac{i\xi_1 \xi_2^2}{p^2(p^2 + a^2)} + m_1^* \nu \frac{\xi_1^3}{p^4} - q_3^* \nu \frac{\xi_1^2}{p^4} + m_2^* \nu \frac{i\xi_1^2 \xi_2}{p^4} \right]. \end{aligned}$$

Let us denote

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{i\xi_1^3}{p^4}, \quad \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{i\xi_1^2 \xi_2}{p^4}, \\ \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1^2}{p^4}, \quad \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{i\xi_1^2 \xi_2}{p^2(p^2 + a^2)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Then the bending moments in the space of transforms take this form:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 = & -\frac{1}{2\pi} \left[ m_1^* \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) + 2m_1^* \tilde{\Phi}_4(\xi_2, \xi_1) - q_3^* \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) + m_2^* \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) - \right. \\ & \left. - 2m_2^* \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) + m_2^* \nu \tilde{\Phi}_1(\xi_2, \xi_1) - q_3^* \nu \tilde{\Phi}_3(\xi_2, \xi_1) + m_1^* \nu \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1) \right], \quad (3.4) \\ \tilde{M}_2 = & -\frac{1}{2\pi} \left[ m_2^* \tilde{\Phi}_1(\xi_2, \xi_1) + 2m_2^* \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) - q_3^* \tilde{\Phi}_3(\xi_2, \xi_1) + m_1^* \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1) - \right. \\ & \left. - 2m_1^* \tilde{\Phi}_4(\xi_2, \xi_1) + m_1^* \nu \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) - q_3^* \nu \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) + m_2^* \nu \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) \right]. \end{aligned}$$

#### 4. Finding the originals of bending moments

Now we need to invert the expressions (3.4). First, to find the originals of functions (3.3), let us apply the Fourier integral transform [10, c. 58]

$$F^{-1}[\tilde{f}(\xi_1, \xi_2)] = f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} d\xi_1 d\xi_2. \quad (4.1)$$

We obtain

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1, x_2) &= \frac{x_1(x_1^2 + 3x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \Phi_2(x_1, x_2) = -\frac{x_2(x_1^2 + 3x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \Phi_3(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} - \frac{1}{4} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (4.2) \\ \Phi_4(x_1, x_2) &= \frac{x_2}{2(x_1^2 + x_2^2)} G_{0,1}|a|\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_2(3x_1^2 - x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} G_{1,2}|a|\sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

where  $G_{n,\nu}(rz)$  is some special G-function [11].

Applying the formula of two-dimensional Fourier integral inversion (4.1) to the transforms of bending moments (3.4) and taking into account the expression (4.2), we obtain the expressions for  $M_1$  and  $M_2$  in the space of the originals

$$\begin{aligned}
 M_1 = & -\frac{1}{2\pi} \left[ m_1^* \frac{x_1(x_1^2 + 3x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} + 2m_1^* \left\{ \frac{x_1}{2(x_1^2 + x_2^2)} G_{0,1} |a| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{x_1(x_1^2 - 3x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} G_{1,2} |a| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\} + q_3^* \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} + \frac{1}{4} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right\} - \right. \\
 & \left. - m_2^* \frac{x_2(x_1^2 + 3x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} - 2m_2^* \left\{ \frac{x_2}{2(x_1^2 + x_2^2)} G_{0,1} |a| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{x_2(3x_1^2 - x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} G_{1,2} |a| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\} + m_2^* \nu \frac{x_2(3x_1^2 + x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} + \right. \\
 & \left. + q_3^* \nu \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} + \frac{1}{4} \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \right\} - m_1^* \nu \frac{x_1(3x_1^2 + x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} \right], \\
 M_2 = & -\frac{1}{2\pi} \left[ m_2^* \frac{x_2(3x_1^2 + x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} + 2m_2^* \left\{ \frac{x_2}{2(x_1^2 + x_2^2)} G_{0,1} |a| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{x_2(3x_1^2 - x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} G_{1,2} |a| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\} + q_3^* \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} + \frac{1}{4} \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \right\} - \right. \\
 & \left. - m_1^* \frac{x_1(3x_1^2 + x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} - 2m_1^* \left\{ \frac{x_1}{2(x_1^2 + x_2^2)} G_{0,1} |a| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{x_1(x_1^2 - 3x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} G_{1,2} |a| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\} + m_1^* \nu \frac{x_1(x_1^2 + 3x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} + \right. \\
 & \left. + q_3^* \nu \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} + \frac{1}{4} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right\} - m_2^* \nu \frac{x_2(x_1^2 + 3x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} \right]. \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

### 5. Some numerical results

To study the features of the SSS of transversely isotropic plates under concentrated force action we set:  $m_1^* = m_2^* = q_3^* = 1$ .

The calculation results are shown in the dimensionless Cartesian coordinate system  $x_1, x_2$ .

Numerical evaluations were carried out for lead plates and zinc ones. Poisson's ratios ( $\nu$ ) for these materials are 0.446 and 0.212, respectively [12, p. 200]. The sliding compliance is  $\frac{E}{G} = 2,6$ .

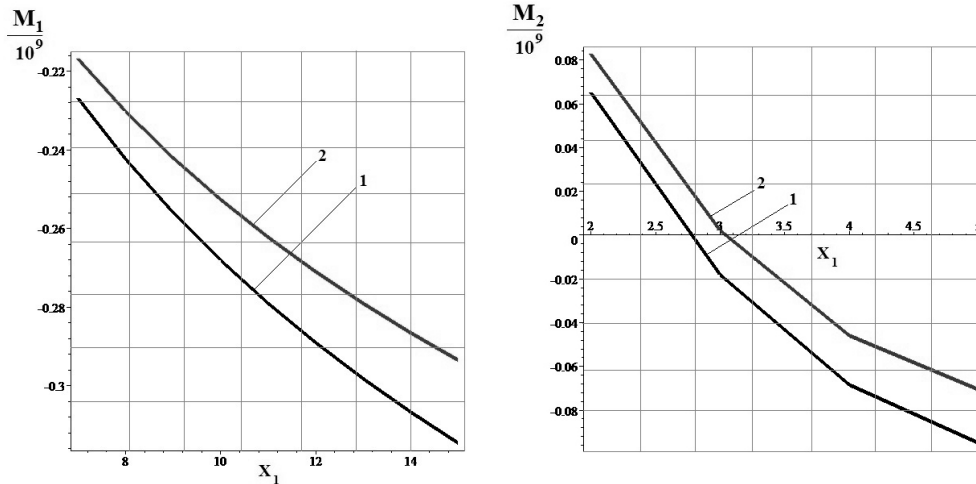


Fig. 1. The bending moments  $M_1, M_2$  for plates of: 1 – lead, 2 - zinc

Fig. 1 contains the graphs of generalized moments  $M_1, M_2$  along the abscissa axis ( $x_2 = 0$ ). These graphs show that with decreasing of the Poisson's ratio the values of generalized moments increase.

### 6. Conclusions

The developed method allows calculating the internal force components for plates subjected to the action of a concentrated force. This makes it possible to consider the shells and plates with thickness of about  $1/5$  with respect to their characteristic size.

The resulting fundamental solution provides a tool for solving a number of new problems related to medium thickness plate bending. In presence of concentrated dislocations, the fundamental solutions, which are the Green's functions, serve as foundation for building the integral representations of displacement discontinuities distributed with unknown density. Such integral representations can be used for solving the problems of plates bending when the plates have different defects, cuts and incisions.

Numerical studies of the SSS of transversely isotropic plates allowed revealing the behavior patterns of SSS components, depending on the material elastic constants.



## REFERENCES

1. Ambartsumyan, S. A. The general theory of anisotropic shells. M.: Science, 446, 1974.
2. Goldenveizer, A. L. Research of the stress condition of the spherical shell. Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 6, 441–467, 1944.
3. Łukasiewicz, S. A. Introduction of concentrated loads in plates and shells. Progress in Aerospace Sciences, Vol. 17, 109–146, 1976.
4. Darevskii, V. M. Contact problems of the theory of shells (the action of local loads on the shell). Proceedings of VI All-Union Conference on the theory of shells and plates. M.: Nauka, 927–933, 1966.
5. Zhigalko, Y. P. Calculation of thin elastic cylindrical shells at local loads (literature review, methods and results). Investigations in the theory of plates and shells, Vol. 4, 3–41, 1966.
6. Bokov, I.P., Strelnikova, E.A. Construction of the fundamental solution of the equations of statics isotropic plates using the theory of S.P. Tymoshenko. Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, №1156, 29-35, 2015.
7. Han, H. Elasticity Theory: Fundamentals of linear theory and its application. M.: World, 344, 1988.
8. Pelekh, B. L., Lazko, V. A. Laminated anisotropic plates and shells with stress concentrators. K.: Science thought, 296, 1982.
9. Vladimirov, V. S. Generalized functions in mathematical physics. M.: Science, 280, 1976.
10. Sneddon, I. Fourier transform. M.: Foreign literature publishing house, 668, 1955.
11. Khizhnyak, V. K., Shevchenko, V. P. Mixed problem in the theory of plates and shells. DonGU: Donetsk, 128, 1980.
12. Demytyev, A. D., Nazarov, L. A., Nazarova, L. A. Applications of the theory of elasticity. Novosibirsk, 224, 2002.

УДК 51-74

## Узагальнення рівняння консолідації ґрунтів з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів

В. А. Герус, П. М. Мартинюк

*Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне,  
Україна*

Запропоновано узагальнення рівняння фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням фізико-хімічних факторів. Запис рівнянь нерозривності рідкої та твердої фаз ґрунту з використанням повної похідної в часі дозволив розглянути процес фільтраційної консолідації з урахуванням довільної скінченної кількості факторів впливу. За допомогою класичної теорії отримано нове рівняння фільтраційної консолідації. В якості конкретизації факторів впливу розглянуто концентрації хімічних речовин в рідкій фазі ґрунту, температуру, механічну та хімічну суфозію. Проведено огляд експериментальних та теоретичних залежностей густин фаз ґрунту від вказаних чинників. Таким чином отримано передумови подальшого дослідження впливу різних чинників на процеси консолідації ґрунтів (повзучість скелету ґрунту, солеперенесення, теплоперенесення, хімічна суфозія, механічна суфозія тощо).

**Ключові слова:** *насичений ґрунт, консолідація, диференціальні рівняння в частинних похідних, техногенні фактори.*

Предложено обобщение уравнения фильтрационной консолидации грунтов с учетом физико-химических факторов. Уравнения неразрывности жидкой и твердой фаз грунта записаны с использованием полной производной во времени, что позволило рассмотреть процесс фильтрационной консолидации с учетом произвольного конечного количества факторов влияния. С помощью классической теории получено новое уравнение фильтрационной консолидации. В качестве конкретизации факторов влияния рассмотрены концентрации химических веществ в жидкой фазе грунта, температура, механическая и химическая суффозии. Проведен обзор экспериментальных и теоретических зависимостей плотностей фаз грунта от указанных факторов. Таким образом получено уравнение для дальнейшего исследования влияния разных факторов на процессы консолидации грунтов (ползучесть скелета грунта, солеперенос, теплоперенос, химическая суффозия, механическая суффозия и тому подобное).

**Ключевые слова:** *насыщенный грунт, консолидация, дифференциальные уравнения в частных производных, техногенные факторы.*

Generalization, which includes physical and chemical factors in the equation of soil filtration consolidation, has been proposed. The equation of continuity of soil liquid and solid phases is written using the total time derivative. This allows considering the process of filtration consolidation taking into account an arbitrary finite number of affecting factors. The authors have applied the classical theory method, but the investigation object - the equation of filtration consolidation - is new. The specific factors that have been considered in this study are: concentrations of chemicals in the liquid phase of the soil, mechanical and chemical suffusion, and temperature. A survey of experimental and theoretical dependences of the densities of soil phases on these factors has been performed. Thus backgrounds for further research of influence of various factors on the processes of soil consolidation (such as soil skeleton creep, salt transfer, heat transfer, chemical suffusion, mechanical suffusion, etc) have been obtained.

**Key words:** *saturated soil, consolidation, partial differential equation, technogenic factors.*

### 1. Аналіз останніх результатів та актуальність задачі

Класичну теорію консолідації ґрунтів розроблено в 30-40-х роках ХХ-го століття (див. наприклад [1-3] та наведену там бібліографію). Проблеми консолідації ґрунтових основ безпосередньо стосуються будівництва цивільних, промислових та гідротехнічних споруд, безпеки та надійності їх експлуатації, безаварійності, а тому і на даний час залишаються актуальними.

В роботах А. П. Власюка, О. В. Жеребятьєва, В. М. Булавацького, В. В. Скопечького, П. М. Мартинюка набула розвитку теорія консолідації ґрунтів з урахуванням впливу тепломасоперенесення (див. [4-7] та наведену там бібліографію). Крім того в роботах [8, 9] розвинуто теорію консолідації ґрунтів з урахуванням їх фільтраційного руйнування. В роботі [10] обґрунтовано коректність задачі консолідації ґрунтів в областях з рухомими межами.

В роботах [4, 11] запропоновано при урахуванні впливу температури на процеси консолідації ґрунтів використати наступні рівняння нерозривності двофазного пористого середовища, в яких враховано термічне розширення фаз ґрунту:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_p \mathbf{u}) + \frac{\partial(\sigma \rho_p)}{\partial t} - (\alpha_p + q \alpha_m) \sigma \rho_p \frac{\partial T}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) + \frac{\partial(\sigma_m \rho_m)}{\partial t} - \alpha_m (1 - q) \sigma_m \rho_m \frac{\partial T}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Тут:  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  – вектор швидкості фільтрації;  $\sigma$  – пористість ґрунту;  $\sigma_m$  – об'єм твердих частинок в одиниці об'єму ґрунту ( $\sigma_m = 1 - \sigma$ );  $\rho_m$  – густина твердих нерозчинних частинок ґрунту;  $\rho_p$  – густина порової рідини;  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  – вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту, що формують його скелет;  $\alpha_p$ ,  $\alpha_m$  – коефіцієнти теплового розширення рідкої та твердої фаз ґрунту;  $T$  – температура пористого середовища;  $q = \frac{\alpha_m - \alpha}{\alpha_m}$ ,  $\alpha$  – коефіцієнт

об'ємного термічного розширення ґрунту, як пористого матеріалу.

В роботі [12], ґрунтуючись на ідеях М. М. Веригіна, запропоновано в рівняннях нерозривності враховувати вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах пористого середовища. Пізніше дана ідея була узагальнена на консолідацію засолених та загіпсованих ґрунтів, а також на багатокомпонентні хімічні розчини [13-15]. В результаті, узагальнюючи вказані впливи, можна записати наступні рівняння нерозривності рідкої та твердої фаз ґрунту:

$$\nabla \cdot (\rho_p \mathbf{u}) + \frac{\partial \left( \sigma \rho_p \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\rho_i} \right) \right)}{\partial t} - (\alpha_p + q \alpha_m) \sigma \rho_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) + \frac{\partial \left( \rho_m \left( \sigma_m - \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\rho_i} \right) \right)}{\partial t} - \alpha_m (1 - q) \sigma_m \rho_m \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Тут:  $c_i, N_i, i = \overline{1, n}$  – концентрації хімічних речовин в рідких та твердих фазах, а  $n$  – їх (хімічних речовин) кількість;  $\rho_i, i = \overline{1, n}$  – густини хімічних речовин в твердій фазі. Рівняння (1), (2) слугували однією з відправних точок для побудови математичних моделей фільтраційної консолидації ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів. Однак, їх можна узагальнити.

## 2. Ціль статті

Запис рівнянь нерозривності у вигляді (1), (2) має свої недоліки. Фактично в (1), (2) припускається, що густина рідкої фази ґрунту та вміст твердих частинок ґрунту лінійно залежать від концентрації хімічних речовин. Але, по перше, залежність густини порової рідини від розчинених в ній хімічних речовин при високих концентраціях останніх не є лінійною. По друге, зміна фізико-хімічного складу порової рідини та твердої фази пористого середовища (наприклад, урахування механічної суфозії [16-18]) вимагає нової модифікації рівнянь нерозривності, що є незручним. Тому ціллю даної статті є узагальнення рівнянь типу (1), (2) на випадок впливу різних фізико-хімічних факторів і, відповідно, узагальнення рівняння фільтраційної консолидації.

## 3. Узагальнення рівнянь нерозривності фаз ґрунту

Основне рівняння фільтраційної консолидації двохфазного ґрунту виведемо ґрунтуючись на наступних залежностях:

- рівняння нерозривності рідкої фази ґрунту

$$\nabla \cdot (\rho_p \mathbf{u}) + \frac{d(\sigma \rho_p)}{dt} = 0; \quad (3)$$

- рівняння нерозривності твердої фази ґрунту

$$\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) + \frac{d(\sigma_m \rho_m)}{dt} = 0; \quad (4)$$

- узагальнений закон Дарсі-Герсеванова на випадок урахування осмотичних явищ

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h(t, \mathbf{S}) \nabla h + \mathbf{F}_{osm}, \quad (5)$$

де  $\mathbf{K}_h(t, \mathbf{S})$  - коефіцієнт (тензор) фільтрації, що залежить від часу  $t$  та вектора  $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , де  $s_i, i = \overline{1, n}$ , характеризують той чи інший фактор (температура, концентрації хімічних речовин, концентрації рухомих суфозійних частинок тощо);  $e$  - коефіцієнт пористості ґрунту;  $h$  - надлишковий напір;  $\rho_m$  - густина твердих частинок ґрунту (включаючи водорозчинні та нерозчинні компоненти);  $\mathbf{F}_{osm}$  - вектор-функція осмотичних впливів. Наприклад, в роботах [4, 5, 14]

$$\mathbf{F}_{osm} = \mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T,$$

де  $\mathbf{K}_c$  - коефіцієнт (тензор) хімічного осмосу;  $\mathbf{K}_T$  - коефіцієнт (тензор) термічного осмосу;  $c$  - концентрація однокомпонентного хімічного розчину. В (5) " $n$ " має інше значення, аніж в (1). В роботах [14, 15] осмотичні впливи

узагальнені на випадок багатоконпонентного хімічного розчину. Оскільки детальний розгляд осмотичних явищ не є метою статті, то ми на цьому зупинятись не будемо.

На перший погляд рівняння (3), (4) не враховують тих факторів, які враховують рівняння (1), (2). Це не так. Наявність повної похідної за часом означає, наприклад

$$\frac{d(\sigma\rho_p)}{dt} = \frac{\partial(\sigma\rho_p)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\sigma\rho_p)}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial t}.$$

Тут вимагається задання залежностей величин  $\sigma$  та  $\rho_p$  від впливу техногенних факторів. Це ж саме стосується  $\sigma_m$  та  $\rho_m$ . Однак, в якості таких залежностей може бути використана будь-яка, відома з експериментів або теоретична, а не лише лінійна, як в попередніх роботах [11-13].

#### 4. Узагальнення рівняння фільтраційної консолідації

Застосуємо підхід, використаний в класичній теорії фільтраційної консолідації ґрунтів [1, 2]. Продиференціювавши кожне з рівнянь (5) відповідно по змінних  $x$ ,  $y$ ,  $z$  та додавши їх, отримаємо

$$\nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \nabla e - e \nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, \mathbf{S}) \nabla h) + \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}. \quad (6)$$

З рівнянь (3) і (4) маємо

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{d\sigma}{dt} - \mathbf{F}_p, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{d\sigma_m}{dt} - \mathbf{F}_m, \quad (8)$$

де

$$\mathbf{F}_p = \frac{1}{\rho_p} \left( \mathbf{u} \nabla \rho_p + \sigma \frac{d\rho_p}{dt} \right), \quad \mathbf{F}_m = \frac{1}{\rho_m} \left( \mathbf{v} \nabla \rho_m + \sigma_m \frac{d\rho_m}{dt} \right).$$

Оскільки процеси консолідації в основному складають проблему для глинистих ґрунтів, то, зважаючи на мале значення коефіцієнта фільтрації, швидкість фільтрації по абсолютній величині є малою. Зважаючи на те, що у виразі для  $\mathbf{F}_p$  ця швидкість ще і ділиться на  $\rho_p$  - знехтуємо величиною

« $\frac{1}{\rho_p} \mathbf{u} \nabla \rho_p$ ». Під  $\mathbf{v}$  мається на увазі швидкість руху твердих частинок ґрунту, що

складають його скелет (не вільнорухомі суфозійні частинки). Ця величина ще менша за швидкість фільтрації. Тому в виразі для  $\mathbf{F}_m$  знехтуємо членом

« $\frac{1}{\rho_m} \mathbf{v} \nabla \rho_m$ », а в (6) – « $\mathbf{v} \nabla e$ ». Підставивши (7), (8) в (6), з урахуванням

вищесказаного, маємо

$$-\frac{d\sigma}{dt} - \frac{\sigma}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - e \left( -\frac{d\sigma_m}{dt} - \frac{\sigma_m}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) = -\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, \mathbf{S}) \nabla h) + \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}. \quad (9)$$

Далі дещо перетворимо ліву частину рівняння (9) з урахуванням наступних залежностей [2, ст. 30]:

$$\sigma_m + \sigma = 1, \quad \sigma_m = \frac{1}{1+e}, \quad \sigma = \frac{e}{1+e}, \quad \frac{d\sigma_m}{dt} = -\frac{1}{(1+e)^2} \frac{de}{dt}.$$

Маємо

$$\frac{de}{dt} + e \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) = (1+e) (\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, \mathbf{S}) \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}). \quad (10)$$

Згідно з принципом гідроємності Герсеванова [2, ст. 132] зміна коефіцієнта пористості ґрунту визначається тільки зміною суми головних напружень  $\Theta$  в скелеті пористого середовища. Однак, з урахуванням впливу техногенних факторів, цей принцип має бути дещо уточнений. Розуміючи важливість даного питання (про модифікацію принципу гідроємності Герсеванова), його детальний розгляд анонсуємо, як тему однієї із наступних статей. Зараз лише відзначимо, що  $e = e(t, \mathbf{S})$ , де, наприклад,  $s_1 \equiv \Theta$ . Тоді

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial e}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial e}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial t}. \quad (11)$$

Перший член в правій частині рівності (11) відображає зміну коефіцієнта пористості внаслідок реологічних властивостей скелету пористого середовища, а останні – техногенних факторів (концентрації хімічних речовин, температури, суфозії тощо).

Підставивши (11) в (10) ми фактично і отримуємо узагальнене рівняння фільтраційної консолидації з урахуванням впливу техногенних факторів

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial e}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial t} + e \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) = \\ = (1+e) (\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, \mathbf{S}) \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}). \end{aligned} \quad (12)$$

Рівняння (12) містить дві невідомі функції -  $h$  та  $\Theta$ . Для його практичного застосування потрібний перехід до однієї невідомої функції  $h$ , що можна зробити згідно основної розрахункової моделі Флоріна [2, §8.7], або перехід до визначення напружено-деформівного стану пористого середовища згідно теорії об'ємних сил (модель Біо-Флоріна) [2, §8.6]. Також мають бути відомі залежності коефіцієнта пористості  $e$  від часу  $t$ ,  $\Theta$  та від  $s_i$ ,  $i = \overline{2, n}$ . Аналогічне стосується величин  $\rho_p$  та  $\rho_m$ . В наступних пунктах статті приведемо деякі з таких експериментальних залежностей, а деякі виведемо, ґрунтуючись на певних припущеннях. Але зручність рівняння (12) для подальшого використання полягає в тому, що такі залежності легко можуть бути замінені іншими. Крім того мають бути відомими, або визначатись як розв'язки крайових задач

математичної фізики (математичних моделей) відповідні техногенні функції впливів  $s_i$ ,  $i = \overline{2, n}$ .

### 5. Залежність густини порової рідини від концентрації хімічних речовин та температури

В роботі [19] наведено формулу залежності густини водного розчину NaCl від його концентрації  $c$  (%) та від температури  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ )

$$\rho_p(c, T) = \sum_{i=1}^3 A_i T^{i-1} \sum_{j=1}^3 a_j c^{j-1}. \quad (13)$$

Значення коефіцієнтів  $A_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $a_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Значення коефіцієнтів у формулі (13)

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$A_1$	750.2834	26.7822	-0.26389
$A_2$	1.90165	-0.11734	0.00175
$A_3$	-0.003604	0.0001701	-0.00000261

В [20, ст. 395] запропоновано густину  $\rho_p$  багатокомпонентного хімічного розчину розраховувати згідно модифікованого методу Езрохі за формулою

$$\lg \rho_p = \lg \rho_0 + \sum_{i=1}^n A_i c_i,$$

де  $\rho_0$  - густина води;  $A_i$  - коефіцієнти;  $c_i$  - концентрація хімічних компонент (%). Густина води розраховується за формулою

$$\begin{aligned} \rho_0 = & 999.972 / (1 - 0.189173965 \cdot 10^{-5} \psi + 0.080064627 \psi^2 - \\ & - 0.0866561397 \psi^3 + 0.141326458 \psi^4 - 0.227708811 \psi^5 + \\ & + 0.305765045 \psi^6 - 0.292859639 \psi^7 + 0.17991657 \psi^8 - \\ & - 0.0625693644 \psi^9 + 0.00930376776 \psi^{10}), \end{aligned}$$

або

$$\rho_0 = 1000 - 0.062T - 0.00355T^2,$$

де  $\psi = (T - 3.98)/100$ ,  $T \in [0; 100 \text{ } ^{\circ}\text{C}]$ . Коефіцієнти  $A_i$  визначаються згідно залежностей

$$A_i = a_{0i} + a_{1i}T + a_{2i}T^2,$$

а коефіцієнти  $a_{0i}$ ,  $a_{1i}$ ,  $a_{2i}$  для ряду неорганічних речовин наведено в таблицях 3.7 та 3.8 вказаного довідника [20].

Про залежність густини води від температури та її немонотонність вказано в роботі [21]. Залежність густини води від температури та тиску наведено в [22].

### 6. Залежність густини скелету ґрунту від температури

В [23] запропоновано наступну формулу для визначення зміни густини глинистих частинок залежно від зміни температури:

$$\Delta\rho_m = -\frac{\alpha_m\Delta T}{1+\alpha_m\Delta T}\rho_m, \quad (14)$$

де  $\alpha_m$  - коефіцієнт об'ємного термічного розширення глинистих частинок,  $\Delta\rho_m$ ,  $\Delta T$  - зміна густини та зміна температури відповідно. Також відмічено, що згідно роботи [24] значення  $\alpha_m$  для звичайних ґрунтів варіюється від  $1.5 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$  до  $5.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ .

З (14) маємо

$$\frac{\Delta\rho_m}{\Delta T} = -\frac{\alpha_m}{1+\alpha_m\Delta T}\rho_m$$

і, переходячи до границі при  $\Delta T \rightarrow 0$ , отримаємо

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial T} = -\alpha_m\rho_m.$$

### 7. Урахування механічної та хімічної суфозій

Виділимо елементарний фрагмент ґрунту загальним об'ємом  $V$ , який повністю насичений поровою рідиною. Виділений фрагмент ґрунту буде містити: 1) поровий розчин об'ємом  $V_\sigma$ , який дорівнює об'єму пор; 2) тверді структурні частинки об'ємом  $V_m^{(0)}$ , які утворюють «скелет» пористого середовища; 3) тверді суфозійні багатофракційні вільнорухомі частинки об'ємами  $V_m^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, l}$ , де номер  $i$  відповідає частинкам певної фракції; 4) тверді водорозчинні хімічні речовини об'ємами  $V_N^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, k}$ , де номер  $j$  відповідає частинкам певних солей.

Згідно означення

$$\sigma = \frac{V_\sigma}{V}; \sigma_m^{(0)} = \frac{V_m^{(0)}}{V}; \sigma_m^{(i)} = \frac{V_m^{(i)}}{V}; \sigma_N^{(j)} = \frac{V_N^{(j)}}{V}; \sigma_m = \sigma_m^{(0)} + \sum_{i=1}^l \sigma_m^{(i)} + \sum_{j=1}^k \sigma_N^{(j)}.$$

Тут  $\sigma_m^{(i)}$  - це концентрація суфозійних нерозчинних частинок ґрунту  $i$ -ї фракції,  $i = \overline{1, l}$  [25];  $\sigma_N^{(j)} = \frac{N_j}{\rho_N^{(j)}}$ , де  $\rho_N^{(j)}$  - густина солей  $i$ -го хімічного компонента в твердій фазі,  $N_j$  - концентрація цих солей в твердій фазі пористого середовища.

Оскільки  $\sigma_m = \frac{1}{1+e}$ , то  $e = \frac{1}{\sigma_m} - 1$  [2, ст. 30]. Тоді  $j = \overline{1, k}$



$$e = \frac{1}{\sigma_m^{(0)} + \sum_{i=1}^l \sigma_m^{(i)} + \sum_{j=1}^k \frac{1}{\rho_N^{(j)}} N_j} - 1 \quad (15)$$

і, наприклад

$$\frac{\partial e}{\partial \sigma_m^{(i)}} = -\frac{1}{(\sigma_m)^2}, \quad i = \overline{1, l}, \quad \frac{\partial e}{\partial N_j} = -\frac{1}{\rho_N^{(j)} (\sigma_m)^2}, \quad j = \overline{1, k}$$

або

$$\frac{\partial e}{\partial \sigma_m^{(i)}} = -(1+e)^2, \quad i = \overline{1, l}, \quad \frac{\partial e}{\partial N_j} = -\frac{(1+e)^2}{\rho_N^{(j)}}, \quad j = \overline{1, k}.$$

### 8. Залежність густини скелету ґрунту від концентрації хімічних речовин та суфозійних частинок

Нехай  $m$  - маса твердих частинок у виділеному фрагменті пористого середовища об'ємом  $V$ . Оскільки під густиною ґрунту розуміється густина пористого матеріалу, то

$$\rho_m = \frac{m}{V} = \frac{\rho_m^{(0)} V_m^{(0)} + \sum_{i=1}^l \rho_m^{(i)} V_m^{(i)} + \sum_{j=1}^k \rho_N^{(j)} V_N^{(j)}}{V} = \sigma_m^{(0)} \rho_m^{(0)} + \sum_{i=1}^l \sigma_m^{(i)} \rho_m^{(i)} + \sum_{j=1}^k \sigma_N^{(j)} \rho_N^{(j)} = \sigma_m^{(0)} \rho_m^{(0)} + \sum_{i=1}^l \sigma_m^{(i)} \rho_m^{(i)} + \sum_{j=1}^k N_j.$$

Тут  $\rho_m^{(0)}$  - густина твердих частинок, які утворюють скелет ґрунту (поки що вважаємо його однорідним, але в загальному випадку скелет теж може складатись із різнотипних частинок – глин, пісків тощо);  $\rho_m^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, l}$ , - густина твердих суфозійних частинок  $i$ -ї фракції.

### 9. Частковий випадок рівняння фільтраційної консолідації з урахуванням взаємозв'язаних процесів хімічної та механічної суфозії

Зробимо наступні припущення:

1. Знехтуємо повзучістю скелету ґрунту. Тобто,  $e = e(\Theta, T, \sigma_m, \mathbf{N})$ , де  $\sigma_m = (\sigma_m^{(0)}; \sigma_m^{(1)}; \dots; \sigma_m^{(l)})$ ,  $\mathbf{N} = (N_1; N_2; \dots; N_k)$ . Тоді  $\frac{\partial e}{\partial t} \equiv 0$ .
2. Складним і не до кінця вирішеним залишається питання залежності коефіцієнта пористості ґрунту від одночасного впливу різних факторів. Наприклад, в якості такої залежності можна запропонувати

$$e(\Theta, T, \sigma_m, \mathbf{N}) = \chi_1(\Theta) \chi_2(T) \bar{e}(\sigma_m, \mathbf{N}),$$

де  $\chi_1(\Theta)$ ,  $\chi_2(T)$  - функції впливів відповідних факторів і значення яких (функцій) є безрозмірними величинами;  $\bar{e}(\sigma_m, \mathbf{N})$  визначається формулою (15). В якості  $\chi_1(\Theta)$  можна взяти, наприклад

$$\chi_1(\Theta) = \frac{1}{e_0} \left( -a \frac{\Theta}{1 + (R-1)\xi} + e_0 \right),$$

де  $a$  - коефіцієнт стискуваності ґрунту [2, ст. 46];  $R$  - розмірність задачі;  $\xi$  - коефіцієнт бічного тиску ґрунту [2, ст. 54];  $e_0$  - початкове значення коефіцієнта пористості. Функція впливу  $\chi_2(T)$  може виражати собою явище термоповзучості скелету пористого середовища [26].

Відмітимо, що компресійна залежність в класичній механіці ґрунтів має вигляд [2, ст. 132]

$$e = -a \frac{\Theta}{1 + (R-1)\xi} + e_0.$$

Тому інша можлива залежність

$$e(\Theta, T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N}) = -a(T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N}) \frac{\Theta}{1 + (R-1)\xi} + \bar{e}(\boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N}), \quad (16)$$

де коефіцієнт стискуваності є функцією, залежною від фізико-хімічних факторів. Загалом, проблема комплексного урахування одночасного впливу різних факторів на параметри залежностей в ґрунтах залишається. Це в основному стосується проведення натурних експериментів. Деякі з натурних експериментів компресійних досліджень засолених та загіпсованих ґрунтів наведено в [27, глава III].

Якщо за основу взяти залежність (16), то

$$\frac{\partial e}{\partial \Theta} = -\frac{a(T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N})}{1 + (R-1)\xi}. \quad (17)$$

3. Припустимо, що виконуються положення основної розрахункової моделі Флоріна [2, §8.7]. Тоді  $\Theta = \Theta^* + R\gamma h^* - R\gamma h$  і

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} + R\gamma \frac{\partial h^*}{\partial t} - R\gamma \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Тут  $\Theta^*$ ,  $h^*$  - сума головних напружень та надлишкові напори в стані повної стабілізації;  $\gamma$  - питома вага порового розчину. Якщо, більш того, припустити,

що  $\Theta^* = const$ ,  $h^* = const$ , то  $\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -R\gamma \frac{\partial h}{\partial t}$ .

З урахуванням вищенаведених залежностей та припущень, нехтуючи явищами термоповзучості пористого середовища, рівняння (12) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{R\gamma a(T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N})}{1 + (R-1)\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{i=1}^l \frac{\partial \sigma_m^{(i)}}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\rho_N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} - \\ & - e \left( \frac{1}{\rho_p} \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_p}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_m}{\partial N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} \right) \right) = \quad (18) \\ & = (1+e) (\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, h, T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N}, \mathbf{c}) \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}). \end{aligned}$$

Рівняння (18) містить одну невідому функцію -  $h$  (при умові, що функції  $\Theta$ ,  $T$ ,  $\sigma_m$ ,  $N$ ,  $c$  відомі, або визначені з відповідних крайових задач). Залежності коефіцієнта фільтрації  $K_h$  від концентрації солей та температури наведено в роботах [4, 8]; від концентрації суфозійних частинок – [18, 25]; експериментальні залежності для засолених та загіпсованих ґрунтів від концентрації гіпсу в твердій фазі – [27]; від функції напорів – [28]. Однак, для вираження комплексного впливу фізико-хімічних факторів на коефіцієнт фільтрації, по аналогії з коефіцієнтом пористості, потрібні додаткові теоретичні викладки або натурні експерименти.

#### 10. Висновки та напрямки подальших досліджень

В роботі виведене узагальнене рівняння фільтраційної консолідації, яке дозволяє системно враховувати вплив різних факторів на цей процес. Для формування математичної моделі досліджуваних процесів його (рівняння) потрібно доповнити рівняннями, які описують зміну функцій-техногенних впливів, відповідними початковими та граничними умовами, а також експериментальними або теоретичними залежностями параметрів ґрунтів від фізико-хімічних факторів. Оскільки процеси консолідації пов'язані з просіданням (набуханням) пористого середовища, то аналогічного узагальнення потребує і кінематична гранична умова на верхній рухомій межі ґрунту. Також, як було відмічено вище, потребує детальнішого обґрунтування модифікація принципу гідроємності Герсеванова.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Флорин В. А. Основы механики грунтов. В 2 т. Т.2. / В. А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1961. – 544 с.
2. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П. Л. Иванов – М.: Высш. школа, 1991. – 447 с.
3. Зарецкий Ю. К. Теория консолидации грунтов / Ю. К. Зарецкий. – М.: Наука, 1967. – 270с.
4. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
5. Власюк А. П. Фильтрационная консолидация трёхфазных грунтов с учётом ползучести скелета и влияния солепереноса в неизо термическом режиме / А. П. Власюк, П. М. Мартынюк // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22, № 4. – С. 32–56.
6. Булавацкий В. М. Моделирование динамики некоторых локально-неравновесных геомиграционных процессов на основе дробно-дифференциальной геоинформационной модели / В. М. Булавацкий // Проблемы управления и информатики. - 2013. - №6. - С. 103-111.
7. Булавацкий В. М. Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации / В. М. Булавацкий, В. В. Скопецкий // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – №6. – С. 71–79.

8. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с.
9. Власюк А. П. Контактный размыв и фильтрационная консолидация грунтов в условиях тепло-солепереноса / А. П. Власюк, П. Н. Мартынюк // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, №11. – С. 97–112.
10. Martynyuk P. M. Existence and uniqueness of a solution of the problem with free boundary in the theory of filtration consolidation of soils with regard for the influence of technogenic factors / P. M. Martynyuk // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. - Vol. 207, No. 1. – P. 59-73.
11. Власюк А. П. Математичне моделювання впливу термічного розширення на надлишкові напори в насичених ґрунтах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2007. – Вип.12. – С. 68–77.
12. Мартинюк П. М. Про урахування наявності в поровій воді розчинених солей при математичному моделюванні консолідації ґрунтів / П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2003. – Вип. 2. – С. 168–174.
13. Vlasyuk A. P. Numerical solution of a one-dimensional problem of filtration consolidation of saline soils in a nonisothermal regime / A. P. Vlasyuk, P. M. Martynyuk, O. R. Fursovych // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 160, № 4. – P. 525–535.
14. Мичута О. Р. Моделирование влияния химической суффозии на фильтрационную консолидацию засоленных грунтов в неизотермических условиях / О. Р. Мичута, А. П. Власюк, П. Н. Мартынюк // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 2. – С. 3–18.
15. Мічута О. Р. R-вимірна задача впливу багатокомпонентних хімічних розчинів на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів / О. Р. Мічута, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки. – 2013. – Вип.2. – С. 196-204.
16. Комплексне моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів у ґрунтових греблях / А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк, А. Теребус, М. М. Хлапук // Вісник Нац. ун-ту водного госп-ва та природокорист. Серія тех. науки. – 2011. – Вип. 3(55). – С. 70–77.
17. Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених задач процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // Вісник Харківського національного університету. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2012. – Вип. 1037. – С. 18–27.
18. Поляков В. Л. Фильтрационные деформации в дренируемых грунтах: теория и приложения / В. Л. Поляков. – Киев: Аграр Медиа Групп, 2014. – 382 с.
19. Mathematical modeling of density and viscosity of NaCl aqueous solutions / A. I. Simion, C.-G. Grigoras, A.-M. Rosu, L. Gavrilă // J. of Agroalimentary Processes and Technologies. – 2015. – 21(1). – P. 41-52.
20. Зайцев И. Д. Физико-химические свойства бинарных и многокомпонентных растворов неорганических веществ. Справ. изд. / И. Д. Зайцев, Г. Г. Асеев. – М.: Химия, 1988. – 416 с.

21. Букреев В. И. Влияние немонотонной зависимости плотности воды от температуры на распад начального скачка плотности / В. И. Букреев // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, №1. – С. 66-73.
22. Simonson J. M. Densities of NaCl(aq) to the temperature 523K at pressure to 40MPa measured with a new vibrating-tube densitometer / J. M. Simonson // J. Chem. Thermodynamics. – 1994. – 26. – P.345-359.
23. Tsutsumi A. Combined effects of strain rate and temperature on consolidation behavior of clayey soils / A. Tsutsumi, H. Tanaka // Soils and Foundations. – 2012. – 52(2). – P. 207-215.
24. Campanella R. G. Influence of temperature variations on soil behavior / R. G. Campanella, J. K. Mitchell // ASCE Journal of SMFE. – 1968. – 94(3). – P. 709-734.
25. Мартинюк П. М. Математична модель фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням багатofракційної суфозії // П. М. Мартинюк, О. В. Гошко // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2013.–Вип. 4.–С.136–141.
26. Математичне моделювання одновимірної задачі фільтраційної консолідації з урахуванням термоповзучості скелета ґрунту / В. І. Лаврик, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, В. С. Герасимчук // Наукові записки Національного університету “Києво–Могилянська Академія”. Сер. фіз.-матем. науки. – 2007. – Т. 61. – С. 23–26.
27. Петрухин В. П. Строительные свойства засоленных и загипсованных грунтов / В. П. Петрухин. – М.: Стройиздат, 1980. – 119 с.
28. Власюк А. П. Математичне моделювання процесів консолідації ґрунтів з урахуванням нелінійного закону фільтрації в умовах тепло-солепереносу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 125–130.

УДК 517.9:[532.5+539.3]/66.074.1

## Решение уравнений Навье-Стокса и задачи гидроаэроупругости для процессов сепарации в криволинейных каналах

М. Н. Демьяненко, А. А. Ляпощенко, И. В. Павленко, В. И. Склабинский  
*Сумский государственный университет, Украина*

В статье рассматриваются способы решения систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих процесс инерционной газодинамической сепарации в криволинейных каналах. В результате решения уравнений Навье-Стокса для потока газа в кольцевом канале получены аналитические выражения для окружной и радиальной компонент скорости с учетом граничных условий, а также предложенных гипотез и ограничений. Получено выражение для распределения давления в окружном направлении, а также уравнение для определения расхода газа.

**Ключевые слова:** инерционная газодинамическая сепарация, течение в криволинейном канале, гидродинамика, уравнения Навье-Стокса, задача гидроупругости.

У статті розглядаються способи розв'язання систем диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описують процес інерційної гідродинамічної сепарації у криволинійних каналах. У результаті розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса для потоку газу у кільцевому каналі отримані аналітичні вирази для окружної та радіальної компонент швидкості з урахуванням граничних умов, а також запропонованих гіпотез і обмежень. Отримано вираз для розподілу тиску в окружному напрямі, а також рівняння для визначення витрат газу.

**Ключові слова:** інерційна газодинамічна сепарація, течія у криволинійному каналі, гідродинаміка, рівняння Нав'є-Стокса, задача гідропружності.

In this paper, the radial and circumference velocity components were found as a result of the analytical solution of the Navier-Stokes equations for gas flow in the semicircular annular channel, which takes into account the boundary conditions and some proposed limitations and hypotheses. The equation for gas leakage calculation and the expression describing pressure distribution were obtained.

**Key words:** inertial gas-dynamic separation, the flow in the curvilinear channel, hydrodynamics, the Navier-Stokes equations, hydro-elasticity problem.

### 1. Введение. Истоки исследования авторов. Нерешённые проблемы и цель работы

Процессы образования и, как следствие, разделения (сепарации) неоднородных гетерогенных дисперсных систем (эмульсий, суспензий, аэрозолей) играют существенную роль в науке и технике. С точки зрения удельных энергозатрат и эффективности разделения оптимальными считаются методы инерционной газодинамической и инерционно-фильтрующей сепарации, которые отличаются способами формирования геометрической конфигурации сепарационных каналов, характером и траекториями движения потоков [1]. Традиционно в сепараторы устанавливаются блоки жалюзийных насадок (гофрированные пластины), имеющие волнообразную (синусоидальную) форму или зигзагообразную, если насадка выполнена в виде набора уголков. В отечественных конструкциях сепараторов наибольшее применение нашли первые, в зарубежных – вторые. В обоих случаях научная задача моделирования гидродинамических процессов с целью прогнозирования эффективности

сепарации, а также разработки надёжной инженерной методики проектирования типовых сепарационных устройств является актуальной.

Следует отметить, что теория движения жидкости (газа) базируется на двух основных уравнениях гидродинамики – уравнении неразрывности и уравнении движения (Навье-Стокса). Решение этой системы дифференциальных уравнений в частных производных представляет одну из важнейших задач гидродинамики. Они включают в себя учёт турбулентности, в которой заключается суть одной из шести не решённых «Millennium Prize Problems» (состоянием на апрель 2015 г.), за решение которых Clay Mathematics Institute в начале XXI века назначил премию в US \$ 1,000,000 [2], для получения которой достаточно доказать или опровергнуть существование и гладкость решения в любом из двух вариантов. В первом варианте рассматривается пространственная задача с некоторыми ограничениями на скорость роста решения на бесконечности. Во втором варианте уравнения рассматриваются на поверхности тора с периодическими граничными условиями. В 2014 г. М. Отелбаев опубликовал работу [3], в которой утверждает, что дал полное решение проблемы. В последнее время в кругах физиков и математиков остро обсуждаются контрпримеры к основным утверждениям этой работы. Один из них — Т. Тао, лауреат премии Филдса, опубликовал препринт, в котором утверждается невозможность решения «Millennium Prize Problems» существующими в настоящий момент средствами [4]. Подтверждённые аналитические решения уравнений найдены лишь в некоторых частных случаях ламинарного течения с простой геометрией каналов (например, течение Пуазейля). В остальных случаях используется численное моделирование с применением современных систем вычислительной гидродинамики.

Целью данной работы является математическая постановка и решение задачи моделирования движения газожидкостных потоков в криволинейных каналах сепарационных устройств с жёсткими стенками и динамическими отбойными элементами, что ещё более усложнено необходимостью решения сопряженной задачи гидроаэроупругости.

## **2. Общая постановка задачи и математическая модель**

Все вышеперечисленные математические формулировки являются системой нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которые имеют аналитическое решение лишь в очень редких случаях, обусловленных простой геометрией каналов. Поэтому в данной работе приняты следующие упрощения и допущения:

а) рассматривается плоское течение вдоль криволинейного канала (уравнения Навье-Стокса составляются в двухмерном пространстве и для удобства в полярной системе координат)

б) перетоки, а также изменение полей скоростей и давления по высоте канала незначительны по сравнению с аналогичными параметрами по длине канала;

в) изменение величины давления по ширине канала незначительно вследствие малой ширины канала, а существенное изменение величины давления происходит по длине канала, при этом криволинейное течение вязкого

потока сопровождается процессом преобразования механической энергии потока из потенциальной (давление) в кинетическую и обратно.

Изотермическое течение газа в плоском полукруглом канале с учётом окружного градиента давления ( $p = p(\varphi)$ ,  $\partial p / \partial r = 0$ ), в полярной системе координат описывается уравнениями Навье-Стокса

$$\begin{aligned} V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{r} = \varepsilon \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right); \\ V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi V_r}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{dp}{d\varphi} + \\ + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

и уравнением неразрывности потока:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r} = 0, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность газа;  $\varepsilon$  – коэффициент турбулентной вязкости в соответствии с гипотезой Буссинеска.

Для заданных условий на входе в сепарационные каналы и на выходе из них (расход сплошной фазы, скорость, давление и направление потока) с учетом вязкости существует оптимальная геометрическая форма канала, обеспечивающая минимальные потери полного давления. Точное решение задачи оптимального профилирования представляет существенные сложности. На практике применяют простые приближенные приемы, основанные на понятных физических представлениях о гидродинамически целесообразном распределении скоростей газа в ядре потока и вблизи стенок каналов [1, 5]. В данном случае предлагается упрощенная форма профиля стенок криволинейного канала: допускается, что криволинейные участки имеют постоянные внутренний  $r_1$  и наружный  $r_2$  радиусы (Рис. 1).

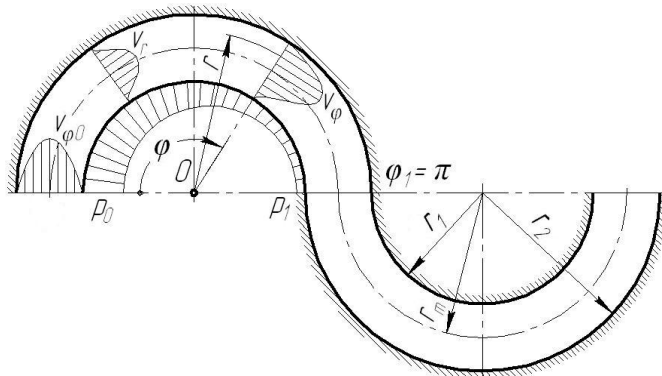


Рис. 1 – Расчетная модель криволинейного канала



### 3. Решение уравнений с применением полиномов

Предполагаем, что окружная скорость газового потока изменяется по следующей квадратичной зависимости:

$$V_{\varphi}(r, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} [c]_{ij} \varphi^i r^j. \quad (3)$$

В дальнейшем ограничиваясь членами для  $i=0\dots 2$ ,  $j=0\dots 3$ , а также принимая матрицу коэффициентов разложения в виде

$$[c] = \begin{bmatrix} N & B & A \\ F & M & 0 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

что соответствует представлению  $V_{\varphi} = Ar^2 + Br + N + C\varphi^2 + F\varphi + M\varphi r$ , удовлетворяем граничные условия: на радиусах  $r_1$ ,  $r_2$ , ограничивающих канал,  $V_{\varphi} = 0$ , а также на входе ( $\varphi = 0$ ) и на среднем радиусе ( $r_m = (r_1 + r_2)/2$ )  $V_{\varphi} = h$ . Получим следующие значения коэффициентов разложения (1–2):

$$A = -\frac{4h}{\delta^2}; \quad B = \frac{8hr_m}{\delta^2}; \quad N = -\frac{4hr_1r_2}{\delta^2}. \quad (5)$$

где  $\delta = r_2 - r_1$  – радиальный зазор.

Подставляя полученные коэффициенты в выражение (3) для окружной скорости, уравнение неразрывности (2) приобретает вид:

$$\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}(V_r + 2C\varphi + Mr + F) = 0, \quad (6)$$

в результате решения которого определяется радиальная скорость

$$V_r = \frac{C_1}{r} - 2C\varphi - \frac{1}{2}Mr - F. \quad (7)$$

С учётом граничных условий (на радиусах  $r_1$ ,  $r_2$   $V_r = 0$ ,  $V_{\varphi} = 0$ ) определяются коэффициенты

$$C_1 = \frac{r_1}{2}(4C\varphi + Mr_1 + 2F); \quad C = -\frac{Mr_m + F}{2\varphi}; \quad F = -\frac{3}{2}M\left(r_2 - \frac{r_1}{3}\right). \quad (8)$$

Предполагая, что окружная составляющая скорости определяет расход газа  $q$  между стенками канала

$$q = \int_{r_1}^{r_2} V_{\varphi} dr, \quad (9)$$

получаем выражение для величины  $h$ :

$$h = \frac{3}{2\delta} \left( \frac{M\delta^2}{2} - Q \right). \quad (10)$$

В предположении, что расстояние между стенками канала мало ( $\delta \ll r_m$ ), пренебрегая радиальным градиентом давления, а также используя ранее полученные выражение для окружной и радиальной составляющих скорости, второе и первое уравнения (1) позволяют последовательно определить выражения для параметра  $M = M(q, \varphi, r)$  и окружной градиент давления,  $\partial p / \partial \varphi$ .

Дальнейшее интегрирование приводит к достаточно громоздким выражениям для определения распределения давления по длине канала  $p(\varphi)$ , а также к

зависимости расхода газа  $q$  через криволинейный канал через полный перепад давления  $\Delta p$ .

В качестве численного примера расчёта рассмотрим систему со следующими параметрами:  $r_1 = 0,1$  м;  $r_2 = 0,2$  м;  $q = 2$  м<sup>2</sup>/с;  $\varphi = 1$ ;  $\varepsilon = 1$ .

Результаты расчётов – компоненты скорости потока представлены на Рис. 2.

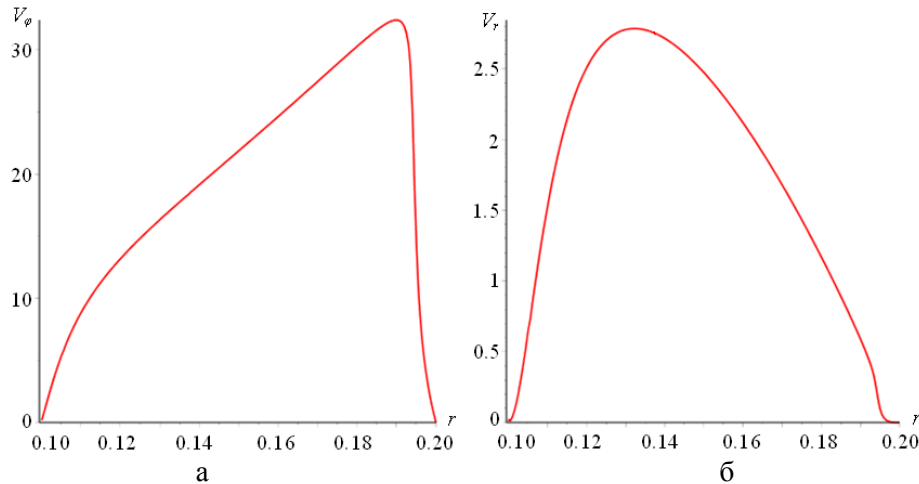


Рис. 2 – Распределение окружной (а) и радиальной (б) компонент скорости потока по радиусу криволинейного канала

#### 4. Решение уравнений с применением модифицированных степенных рядов

Способ решения уравнений Навье-Стокса, описанный выше, учитывает ограниченное число членов разложения (3), а также имеет недостаток, заключающийся в том, что коэффициенты  $[c]_{ij}$  изначально не зависят от параметров  $\varphi$ ,  $r$ . Выражения для параметров  $C_1$ ,  $C$ ,  $F$ ,  $M$ , зависящих от  $\varphi$ ,  $r$  следует понимать как полученные в первом приближении.

Рассмотрим второй, более общий способ решения уравнений (1).

Функцию распределения радиальной составляющей скорости представим в виде бесконечного ряда

$$V_r = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{dA_i(\varphi)}{d\varphi} f_i(r) \equiv \sum_{i=2}^{\infty} A_i' f_i(r), \quad (11)$$

где  $A_i(\varphi)$  – семейство функций, подлежащих дальнейшему определению, удовлетворяющих граничным условиям  $A_i(r_1) = A_i(r_2) = 0$ ;  $f_i(r)$  – линейно независимые функции, удовлетворяющие граничным условиям  $f_i(r_1) = f_i(r_2) = 0$ , принимаемые в следующем виде:

$$f_i(r) = (r - r_1)^i (r - r_2)^i. \quad (12)$$

Подстановка выражения (11) в уравнение неразрывности (1) после интегрирования позволяет представить окружную составляющую скорости в виде

$$V_\varphi = q\beta(r) + \sum_{i=2}^{\infty} A_i(\varphi)\psi_i(r), \quad (13)$$

где  $\beta(r) = 6f_1(r)/\delta^2$  – функция расхода, удовлетворяющая граничным условиям  $\beta(r_1) = \beta(r_2) = 0$ ;  $\psi_i$  – функции распределения:

$$\psi_i(r) = 1 + \frac{2ir(r-r_m)}{(r-r_1)(r-r_2)}. \quad (14)$$

Нормировочный коэффициент  $6/\delta^2$  выбран из условия  $\int_{r_1}^{r_2} \beta dr = 1$ . Параметр  $q$ ,

входящий в выражение (13) является расходом (9), поскольку  $\int_{r_1}^{r_2} \psi_i(r) dr = 0$ .

Вследствие  $\delta \ll r_m$  произведём осреднение первого уравнения (1) по радиальному зазору:

а) компоненты конвективных сил инерции:

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} r V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} dr &= \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} A_i' A_j' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} r f_i f_j' dr}_0 = 0; \quad \int_{r_1}^{r_2} V_\varphi \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} dr = q \sum_{i=2}^{\infty} A_i'' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \beta f_i dr}_{\xi_{1i}} + \\ &+ \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} A_i A_j'' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} f_i f_j \psi_i dr}_0 = q \sum_{i=2}^{\infty} \xi_{1i} A_i; \quad \int_{r_1}^{r_2} V_\varphi^2 dr = q^2 \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \beta^2 dr}_{\kappa_1} + \\ &+ \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} A_i A_j \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} f_i f_j \psi_i \psi_j dr}_0 + 2q \sum_{i=2}^{\infty} A_i \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \beta f_i \psi_i dr}_{\xi_{2i}} = \kappa_1 q^2 + 2q \sum_{i=2}^{\infty} \xi_{2i} A_i; \end{aligned} \quad (15)$$

а) компоненты сил трения:

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} r \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} dr &= \sum_{i=2}^{\infty} A_i' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} r f_i'' dr}_0 = 0; \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial V_r}{\partial r} dr = \underbrace{V_r|_{r=r_2}}_0 - \underbrace{V_r|_{r=r_1}}_0 = 0; \\ \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2} dr &= \sum_{i=2}^{\infty} A_i''' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \frac{f_i}{r} dr}_{\gamma_{1i}} = \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_{1i} A_i'''; \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{V_r}{r} dr = \sum_{i=2}^{\infty} A_i' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \frac{f_i}{r} dr}_{\gamma_{1i}} = \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_{1i} A_i'; \\ \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} dr &= \sum_{i=2}^{\infty} A_i' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \frac{f_i \psi_i}{r} dr}_{\gamma_{1i}} = \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_{1i} A_i'. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, осреднённое первое уравнение (1) принимает вид:

$$q \sum_{i=2}^{\infty} \xi_{1i} A_i'' - 2q \sum_{i=2}^{\infty} \xi_{2i} A_i = \kappa_1 q^2 - \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_{1i} (3A_i' - A_i'''). \quad (17)$$

Произведём осреднение второго уравнения (1):

а) компоненты конвективных сил инерции:

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} r V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} dr &= q \sum_{i=2}^{\infty} A_i' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} r \beta' f_i dr}_{-\xi_{2i}} + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} A_i' A_j \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} f_i (f_i \psi_j) dr}_{0} = -q \sum_{i=2}^{\infty} \xi_{2i} A_i'; \\ \int_{r_1}^{r_2} V_\varphi \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} dr &= q \sum_{i=2}^{\infty} A_i' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \beta f_i \psi_i dr}_{\xi_{2i}} + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} A_i A_j' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} f_i f_j \psi_i \psi_j dr}_{0} = q \sum_{i=2}^{\infty} \xi_{2i} A_i'; \\ \int_{r_1}^{r_2} V_\varphi V_r dr &= q \sum_{i=2}^{\infty} A_i' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \beta f_i dr}_{\xi_{1i}} + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} A_i A_j' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} f_i f_j \psi_i dr}_{0} = q \sum_{i=2}^{\infty} \xi_{1i} A_i'; \end{aligned} \quad (18)$$

а) компоненты сил трения:

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} r \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} dr &= q \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} r \beta'' dr}_{-\kappa_2} + \sum_{i=2}^{\infty} A_i \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} r (f_i \psi_i)'' dr}_{\gamma_{2i}} = -\kappa_2 q + \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_{2i} A_i; \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} dr = \\ &= \underbrace{V_\varphi \Big|_{r=r_2}}_0 - \underbrace{V_\varphi \Big|_{r=r_1}}_0 = 0; \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} dr = \sum_{i=2}^{\infty} A_i'' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \frac{f_i \psi_i}{r} dr}_{\gamma_{1i}} = \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_{1i} A_i''; \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{V_\varphi}{r} dr = \\ &= q \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \frac{\beta}{r} dr}_{\kappa_3} + \sum_{i=2}^{\infty} A_i \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \frac{f_i \psi_i}{r} dr}_{\gamma_{1i}} = \kappa_3 q + \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_{1i} A_i; \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} dr = \sum_{i=2}^{\infty} A_i'' \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \frac{f_i}{r} dr}_{\gamma_{1i}} = \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_{1i} A_i''. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, осреднённое второе уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{dp}{d\varphi} = -\frac{\rho}{\delta} \left[ \sum_{i=2}^{\infty} \xi_{1i} A_i' + \varepsilon (\kappa_2 + \kappa_3) \right] q + \varepsilon \left[ \sum_{i=2}^{\infty} (\gamma_{2i} - \gamma_{1i}) A_i + 3 \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_{1i} A_i'' \right]. \quad (20)$$

Коэффициенты, входящие в уравнения (17), (20) являются коэффициентами расхода ( $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ), конвективных сил инерции ( $\xi_{1i}, \xi_{2i}$ ) и сил трения ( $\gamma_{1i}, \gamma_{2i}$ ):

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \int_{r_1}^{r_2} \beta_i^2 dr; \quad \kappa_2 = \int_{r_1}^{r_2} r \beta_i'' dr; \quad \kappa_3 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\beta}{r} dr; \\ \xi_{1i} &= \int_{r_1}^{r_2} \beta f_i dr; \quad \xi_{2i} = \int_{r_1}^{r_2} \beta f_i \psi_i dr; \\ \gamma_{1i} &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{f_i}{r} dr; \quad \gamma_{2i} = \int_{r_1}^{r_2} r (f_i \psi_i)'' dr. \end{aligned} \quad (21)$$

Следует отметить, что эти коэффициенты принимают нулевые значения при  $i \geq 4$ , а некоторые из них – при  $i \geq 3$ . Причём ненулевые коэффициенты для  $i = 3$  на несколько порядков меньше, чем при  $i = 2$ .

В частности, для  $i=2$  поле скоростей определяется компонентами  $V_\varphi = \beta q + Af\psi$ ;  $V_r = Af$ , а уравнение (17) принимает форму линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка:

$$A''' - \theta A'' - 3A' + k^2 \theta A = -\sigma \quad (22)$$

относительно искомой функции  $A(\varphi)$  с постоянными коэффициентами

$$\theta = \frac{\xi_1 q}{\varepsilon \gamma_1}; \quad k = \sqrt{\frac{2\xi_2}{\xi_1}}; \quad \sigma = \frac{\kappa_1 q^2}{\varepsilon \gamma_1}, \quad (23)$$

общее решение которого

$$A(\varphi) = \sum_{k=1}^3 C_k e^{\lambda_k \varphi} - \frac{\sigma}{k^2 \theta}, \quad (24)$$

содержит корни  $\lambda_k$  характеристического уравнения  $\lambda^3 - \theta \lambda^2 - 3\lambda + k^2 \theta = 0$ .

Постоянные интегрирования  $C_k$  определяются из условий:

- а)  $A'(0) = 0$  – отсутствие радиальной скорости во входном сечении;
- б)  $A(0) = 0$  – гипотеза начального профиля окружной скорости;
- в)  $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{A(\varphi)}{\varphi} = const$  – допущение об ограничении градиента скорости.

Для  $i=2$  окружной градиент давления (20)

$$\frac{dp}{d\varphi} = -\frac{\rho}{\delta} \left[ \xi_1 A' + \varepsilon (\kappa_2 + \kappa_3) q + \varepsilon [(\gamma_2 - \gamma_1) A + 3\gamma_1 A''] \right] \quad (25)$$

В частности, для случая  $\frac{(\gamma_2 - \gamma_1) A + 3\gamma_1 A''}{\xi_1 A' + \varepsilon (\kappa_2 + \kappa_3) q} \ll \frac{\rho q}{\varepsilon \delta}$ , а также

$A' = \alpha = \kappa_1 q^2 / (3\varepsilon \gamma_1) = const$  ( $\varphi \gg 0$ ) интегрирование уравнения (26) с учётом граничного условия  $p(0) = p_0$  приводит к выражению для распределения давления в окружном направлении:

$$p(\varphi) = p_0 - \frac{\rho \varphi_1}{\delta} \sum_{k=1}^3 a_k q^k, \quad (26)$$

где  $p_0$  – давление на входе;  $a_k$  – коэффициенты, определяемые по формулам:

$$a_1 = \kappa_2 + \kappa_3; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = \frac{\xi_1 \kappa_1}{3\varepsilon \gamma_1}. \quad (27)$$

Здесь  $\varphi_1$  – угол, определяющий выходное сечение, для которого  $p(\varphi_1) = p_1$  – давление на выходе.

Расход газа является действительным корнем уравнения

$$(\kappa_2 + \kappa_3) q + \frac{\xi_1 \kappa_1}{3\varepsilon \gamma_1} q^3 = \frac{\delta \Delta p}{\rho \varphi_1}, \quad (28)$$

где  $\Delta p = p_0 - p_1$  – перепад давления в криволинейном канале. В частности, при выполнении условия  $q \ll \sqrt{\frac{3\varepsilon \gamma_1 (\kappa_2 + \kappa_3)}{\xi_1 \kappa_1}}$  расход  $q = g_L \Delta p$ , где  $g_L = \frac{\delta}{(\kappa_2 + \kappa_3) \rho \varphi_1}$

– коэффициент проводимости канала. Для больших расходов газа  $q = g_T \Delta p^{1/3}$ ,

а коэффициент проводимости  $g_T = \left( \frac{3\varepsilon \gamma_1 \delta}{\xi_1 \kappa_1 \rho \varphi_1} \right)^{1/3}$ .

Таким образом, в результате аналитического решения уравнений движения газа, определены окружная и радиальная компоненты скорости потока с учётом граничных условий, а также принятых гипотез и ограничений. Получено выражение для распределения давления по длине криволинейного канала, а также уравнение для определения расхода газа.

### 5. Учёт деформации стенок канала

В отличие от традиционно устанавливаемых в сепараторы блоков жалюзийных насадок (гофрированные пластины), имеющие волнообразную (синусоидальную) форму или зигзагообразную, если насадка выполнена в виде набора уголков, образующих криволинейные каналы с абсолютно жёсткими стенками, в работе предлагается новый способ газодинамической сепарации, вследствие чего возникает необходимость исследовать соответствующую конструкцию инерционного газодинамического сепарационного устройства с блоком упругих отбойных плоско-параллельных пластин. Данный способ и устройство позволяет повысить эффективность сепарации и одновременно оптимизировать гидравлическое сопротивление при различных гидродинамических режимах и пульсациях потока, возникающих в разные периоды эксплуатации скважин, что позволяет улучшить качество получаемых целевых продуктов (например, углеводородного газа и конденсата). Под действием потока, направляемого в закрытые в исходном состоянии каналы с упругими плоскопараллельными пластинами, скошенными и консольно закрепленными под острым углом к траектории движения газового потока, создаётся гидродинамическое давление, а в стенках канала возникают внутренние напряжения, которые приводят к изменению формы и радиуса кривизны поверхностей стенок канала. Упругие пластины изгибаются и принимают форму наклонного параболического полуцилиндра. При этом система «газожидкостный поток – упругие элементы» является системой автоматического регулирования.

Учитывая постановку задачи и характер исследуемой проблемы (поток, воздействуя на стенки канала, изменяет параметры потока), необходимо решать задачу гидроаэроупругости, аналитическое решение которой вызывает ряд трудностей. Для определения деформаций стенок в первом приближении решается плоская стационарная задача. Рассматривается одна полуволна криволинейного канала. Исходными допущениями являются гипотезы Кирхгофа-Лява.

Рассмотрим бесконечно малый элемент стенки. Радиус кривизны срединной поверхности  $R$ , ширина  $dx$ , длина дуги  $ds = R d\varphi$ , где  $d\varphi$  – элементарный угол. На стенки толщиной  $h$  действуют давление  $p$  и погонные усилия: окружная растягивающая сила  $S$ , поперечная перерезывающая сила  $Q_\varphi$ , изгибающий момент  $M_\varphi$  (рис. 3).

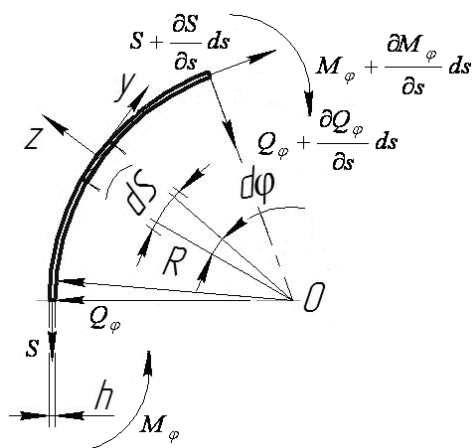


Рис. 3 – Расчетная схема

Необходимые и достаточные условия равновесия элемента

$$\begin{cases} \sum F_{ky} = \left( S + \frac{\partial S}{\partial s} ds \right) dx - S dx + \left( Q_\varphi + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial s} ds \right) dx \frac{d\varphi}{2} + Q_\varphi dx \frac{d\varphi}{2} = 0; \\ \sum F_{kz} = \left( Q_\varphi + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial s} ds \right) dx - Q_\varphi dx - \left( S + \frac{\partial S}{\partial s} ds \right) dx \frac{d\varphi}{2} - S dx \frac{d\varphi}{2} + p ds dx = 0; \\ \sum m_0(\vec{F}_k) = - \left( Q_\varphi + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial s} ds \right) dx \frac{ds}{2} - Q_\varphi dx \frac{ds}{2} + \left( M_\varphi + \frac{\partial M_\varphi}{\partial s} ds \right) dx - M_\varphi dx = 0 \end{cases} \quad (29)$$

после тождественных преобразований приводятся к уравнениям:

$$\frac{\partial S}{\partial s} + \frac{Q_\varphi}{R} = 0; \quad \frac{\partial Q_\varphi}{\partial s} - \frac{S}{R} + p = 0; \quad Q_\varphi = \frac{\partial M_\varphi}{\partial s}. \quad (30)$$

Связь между внутренними интегральными силовыми факторами  $M_\varphi$ ,  $S$  и компонентами вектора перемещений в полярной системе координат определяется соотношениями:

$$M_\varphi = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} \right); \quad S = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R} \right). \quad (31)$$

где  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$  – цилиндрическая жесткость;  $E$  – модуль упругости первого рода;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $v$ ,  $w$  – компоненты вектора перемещений вдоль осей  $y$ ,  $z$  соответственно.

После подстановки выражений (31) в систему уравнений (30) получаем:

$$\begin{cases} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial s} \right) - \frac{D}{R} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right) = 0; \\ -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \right) - \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} \left( \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) + p = 0. \end{cases} \quad (32)$$

С учётом малости толщины стенки и окружных перемещений ( $h \ll R$ ,  $\nu \ll w$ ) последняя система принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{h^2}{12R} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} = 0; \\ \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 4\lambda^4 w = \frac{pR^4}{D}, \end{cases} \quad (33)$$

где введён параметр  $\lambda = \sqrt[4]{3}\sqrt{R/h}$ .

Общее решение второго уравнения (33), описывающего радиальные перемещения стенок канала, определяется для функций давления в виде полинома максимум третьей степени,

$$w(\varphi) = \frac{pR^4}{4\lambda^4 D} + \sin \lambda \varphi (c_1 sh \lambda \varphi + c_2 ch \lambda \varphi) + \cos \lambda \varphi (c_3 sh \lambda \varphi + c_4 ch \lambda \varphi) \quad (34)$$

содержит константы интегрирования  $C_{1,2,3,4}$ , определяемые путём удовлетворения смягченных кинематических и силовых граничных условий  $w(0) = 0$ ,  $w'(0) = 0$ ,  $w'(\pi) = 0$ ,  $w''(\pi) = 0$ . В матричной форме записи

$$\{C\} = -[A]^{-1} \{F\}, \quad (35)$$

где  $\{C\} = \{C_1; C_2; C_3; C_4\}^T$ ,  $\{F\} = \{1; 0; 0; 0\}^T \cdot pR^4/(4\lambda^4 D)$  – векторы-столбцы неизвестных коэффициентов и внешнего воздействия;  $[A]$  – матрица коэффициентов влияния:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cos(\lambda\pi)sh(\lambda\pi) + \sin(\lambda\pi)ch(\lambda\pi); & \cos(\lambda\pi)ch(\lambda\pi) + \sin(\lambda\pi)sh(\lambda\pi); & -\sin(\lambda\pi)sh(\lambda\pi) + \cos(\lambda\pi)ch(\lambda\pi); & -\sin(\lambda\pi)ch(\lambda\pi) + \cos(\lambda\pi)sh(\lambda\pi); \\ \cos(\lambda\pi)sh(\lambda\pi) - \sin(\lambda\pi)ch(\lambda\pi); & \cos(\lambda\pi)ch(\lambda\pi) - \sin(\lambda\pi)sh(\lambda\pi); & -\cos(\lambda\pi)ch(\lambda\pi) - \sin(\lambda\pi)sh(\lambda\pi); & -\cos(\lambda\pi)sh(\lambda\pi) - \sin(\lambda\pi)ch(\lambda\pi) \end{bmatrix} \quad (36)$$

Решение (35)

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{\sin(2\lambda\pi) - sh(2\lambda\pi)}{\sin(2\lambda\pi) + sh(2\lambda\pi)}; & C_2 &= \frac{\cos(2\lambda\pi) - ch(2\lambda\pi)}{\sin(2\lambda\pi) + sh(2\lambda\pi)}, \\ C_3 &= -\frac{\cos(2\lambda\pi) - ch(2\lambda\pi)}{\sin(2\lambda\pi) + sh(2\lambda\pi)}; & C_4 &= -1. \end{aligned} \quad (37)$$

Значения констант  $C_{1,2,3,4}$  зависит от параметра  $\lambda$ . Для случая  $R/h \gg 1$   $C_1 = -C_2 = C_3 = 1$ , а функция прогиба (34) после тождественных преобразований

$$w(\varphi) = w_{\max} \left[ 1 + \sqrt{2} e^{-\lambda\varphi} \sin\left(\lambda + \frac{\pi}{4}\right)\varphi \right], \quad (38)$$

где максимальный прогиб

$$w_{\max} = (1 - \nu^2) \frac{p}{E} \frac{R^2}{h}. \quad (39)$$

Таким образом, в результате рассмотрения плоской стационарной задачи о деформации криволинейного упругого элемента под действием давления определено поле перемещений, а также получено аналитическое выражение для максимального прогиба стенок канала инерционно-фильтрующего сепаратора.



### 6. Выводы и направления дальнейших исследований

Анализируя полученные результаты аналитического решения уравнений движения газа, следует отметить, что осесимметричный на входе газожидкостный поток по мере движения вдоль криволинейного канала регулярно с периодом  $\varphi = \pi$  образует завихрения (обратные токи) в области впадин по наружному радиусу  $r_2$ , а также пульсации динамического напора (увеличение более чем в два раза локальных скоростей по отношению к скорости ядра потока) в области выступов и изменений кривизны канала по внутреннему радиусу  $r_1$ , как можно судить из распределения значений поля радиальных и окружных составляющих локальных скоростей потока. В этом случае представляется целесообразным сгладить образующие стенок криволинейного канала, придав им волнообразную, синусоидальную форму, оптимальную с точки зрения предположений о минимальных потерях напора (гидравлического сопротивления), исключив, таким образом, соединения участков со скачкообразным изменением радиуса кривизны по направлению движения потока, поскольку в этих местах распределение поля скоростей и давления при движении вязкого потока газа имеет значительную окружную составляющую и наблюдается отрывное течение.

Последующие исследования будут направлены на численное моделирование процессов газодинамической сепарации в криволинейных каналах с упругими стенками, что сопряжено с решением связанной задачи гидроаэроупругости для случая взаимодействия газодисперсного потока с упругими динамическими отбойными элементами.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Роммахи М. Фізична модель руху газокраплинних потоків сепараційними каналами та фільтруючими секціями інерційно-фільтруючих газосепараторів / Роммахи М., Логвин А. В., Ляпощенко О. О // Нафтогазова енергетика. – 2011. – № 2 (15). – С. 5–11.
2. Fefferman С. Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation / С. Heffernan. – Cambridge : Clay Mathematics Institute, 2000. – P. 1–5.
3. Отелбаев М. Существование сильного решения уравнения Навье–Стокса / М. Отелбаев // Математический журнал. – 2013. – Т. 13. – № 4 (50). – С. 5–104.
4. Tao T. Finite Time Blowup for an Averaged Three-Dimensional Navier-Stokes Equation / T. Tao // New York : Cornell University Library, № 1402.0290. – 2015. – P. 1–72.
5. Sklabinskyi V. Gas Flow Formation in the Inertial Filtering Gas Separators with Curvilinear Channels / V. Sklabinskyi, O. Liaposchenko, A. Logvyn, M. Rommakhi // Journal of Engineering. – 2014. – Vol.10. – №5. – P.160–169.

УДК 004.932.72'1

## Статистическая модель множества позиционных измерений на серии кадров участка небесной сферы

Н. Ю. Дихтяр<sup>1</sup>, Я. С. Мовсесян<sup>1</sup>, В. Е. Саваневич<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Харьковский национальный университет имени радиоэлектроники, Украина

<sup>2</sup>Ужгородский национальный университет, Украина

В статье разработано две статистических модели совокупности измерений, сформированных на серии кадров. Первая модель основана на предположении о том, что количество ложных измерений и измерений, принадлежащих другим классам объектов, имеет Пуассоновское распределение с известной интенсивностью. Вторая модель предполагает разделение кадров на элементарные объемы разрешения, в каждом из которых может быть сформировано только одно измерение, независимо от того, сколько небесных объектов ему соответствует. Данные статистические модели необходимы для разработки вычислительного метода формирования внутреннего каталога объектов неподвижных на серии кадров.

**Ключевые слова:** позиционные измерения, внутренний каталог, функция правдоподобия, внутрикадровая обработка.

У статті розроблено дві статистичних моделі сукупності вимірювань, сформованих на серії кадрів. Перша модель ґрунтується на припущенні про те, що кількість помилкових вимірювань і вимірювань, що належать іншим класам об'єктів, має Пуассонівський розподіл з відомою інтенсивністю. Друга модель припускає розподіл кадрів на елементарні обсяги дозволу, в кожному з яких може бути сформований тільки один вимір, не залежно від того, скільки небесних об'єктів йому відповідає. Дані статистичні моделі необхідні для розробки обчислювального методу формування внутрішнього каталогу об'єктів нерухомих на серії кадрів.

**Ключові слова:** позиційні вимірювання, внутрішній каталог, функція правдоподібності, внутрішньокадрова обробка.

The article presents two statistical models developed to treat the set of measurements performed on the sequence of coelosphere shots (frames). The first model is based on the assumption that the quantity of measurements, both false or related to other classes of objects, has the Poisson distribution of known intensity. In the second model, each frame is divided into elementary volumes, and for each of them only one measurement is made, not depending on number of the sky objects it contains. These models will be used to numerically determine fixed objects existing in sequential frames.

**Key words:** positional measurement, internal catalog, likelihood function, intraframe processing.

### 1 Введение

Астероидные наблюдения с автоматической или автоматизированной обработкой их результатов в настоящее время является значимым направлением астрометрии малых тел Солнечной системы. Астероиды наблюдаются на фоне большого количества звезд и распознаются на основании того, что они, в отличие от звезд, перемещаются, имеют не нулевое видимое движение.

Для качественного выделения астероидов (объектов с ненулевым видимым движением) на фоне большого количества звезд (объектов с нулевым видимым движением) необходима адекватная статистическая модель совокупности измерений, сформированных на исследуемой серии кадров.

## 2. Цель работы

Целью статьи является разработка адекватной статистической модели совокупности измерений, сформированных на исследуемой серии кадров, которая может быть использована при разработке вычислительного метода формирования внутреннего каталога объектов неподвижных на серии кадров.

## 3. Анализ литературы

Еще недавно астрометрические звездные каталоги формировались на основе двух обзоров (серий кадров) полученных через десятилетия одна от другой [1, 2, 3, 4]. Даже широко используемые сегодня астрометрические каталоги UCAC 4 [5, 6], XPM [7], Tycho-2 [8] сформированы по этому принципу. Возросшее количество наблюдений, доступное астрометристам, позволяет использовать до десятков и даже сотен наблюдений одного и того же небесного объекта при построении астрометрического каталога. Примером тому может быть проект GAIA [9] в котором, каждая звезда будет измерена от десятков до двухсот пятидесяти раз. При этом использование вычислительных методов, основанных на старом подходе, приведет к существенным потерям, содержащихся в измерениях информации. Следовательно, такой подход не кажется оправданным.

Параллельно с астрометрией в последние десятилетия бурно развивалась теория межкадровой (вторичной) обработки локационной информации [10, 11, 12]. При разреженном размещении контрастных объектов задача построения каталогов наблюдаемых объектов является тривиальной и может быть решена классическими стробовыми методами [11, 13, 14]. При плотных размещениях объектов и большом их количестве стробовые методы не обеспечивают заданные показатели качества построения каталогов наблюдаемых объектов. Данная ситуация исследовалась в работах Бакута П.А., Бар-Шалом, и других авторов [15, 16]

При формировании астрометрических каталогов, основанном на использовании десятков и сотен измерений положений каждой звезды, целесообразно использовать формальные методы и приемы, наработанные в теории межкадровой (вторичной) обработки локационной информации. При этом необходимо учесть основные особенности формирования астрометрических (позиционных) измерений в современных астрометрических обзорах [9, 17, 18, 19].

## 4. Изложение основного материала

**Постановка задачи разработки статистической модели множества измерений, сформированных на  $N_{fr}$  кадрах.** Для решения задачи необходимо записать выражение для соответствующей функции правдоподобия [20, 21, 22, 23, 24]. В качестве функции правдоподобия будет использована условная вероятность формирования на исследуемой серии кадров конкретного множества измерений с учетом наличия в исследуемом участке небесной сферы определенного количества небесных объектов  $Q_{sky}$  с параметрами их

положения и движения  $\Omega_{sky} = \{\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_{Q_{sky}}\}$ . Множество измерений можно считать выборкой фиксированного объема.

В статье рассматриваются две статистические модели множества измерений, сформированных на исследуемой серии кадров. Первая модель предполагает, что количество измерений, не принадлежащих небесным объектам с практически нулевым видимым движением (объекты Солнечной Системы, ложные объекты), распределено по закону Пуассона с известной интенсивностью  $\mu$ . Вторая модель предполагает возможность разделения кадра на элементарные объемы разрешения и возможность формирования в каждом элементе разрешения кадра только одного измерения, без относительно того, сколько небесных объектов ему соответствует.

Исходные предпосылки используемые при статистической модели множества измерений, сформированных на  $N_{fr}$  кадрах. Для обеих моделей справедливы следующие общие исходные предпосылки. Количество  $Q_{sky}$  небесных объектов, соответствующих исследуемому участку небесной сферы, не известно. Существует  $Q_{cat}$  каталогизированных объектов используемого звездного каталога, соответствующих исследуемому участку небесной сферы. Естественно, в исследуемом участке небесной сферы имеет место  $Q_{nocat} = Q_{sky} - Q_{cat}$  некаталогизированных объектов.

Множество измерений  $n_{fr}$ -го кадра обозначается  $\Omega_{nfr}$  и состоит из  $\Omega_{nfr} = \{Y_{1nfr}, \dots, Y_{infr}, \dots, Y_{Qfr}\}$  измерений. При этом, каждое измерение  $Y_{infr} = \{x_{in}; y_{in}; A_{in}\} = \{Y_{Kin}; A_{in}\}$  содержит оценки положения  $Y_{Kin} = \{x_{in}; y_{in}\}$  и яркости (блеска)  $A_{in}$  небесных объектов. Множество измерений серии кадров  $\Omega_{set}$  состоит из множеств измерений кадров  $\Omega_{nfr}$  рассматриваемой серии  $\Omega_{set} = \{\Omega_{1fr}, \dots, \Omega_{nfr}, \dots, \Omega_{Nfr}\}$ .

На каждом кадре имеют место измерения как от неподвижных объектов, так и от ложных и подвижных объектов (объектов с ненулевым видимым движением). На одном кадре от одного небесного объекта не может быть более одного измерения. Ошибки координат  $i$ -го измерения положения и блеска небесного объекта на  $n_{fr}$ -ом кадре распределены по нормальному закону с нулевым средним и известной диагональной корреляционной матрицей  $\Sigma_{fin}$ . Данные ошибки можно считать независимыми как от измерения к измерению, так и от параметра к параметру в одном измерении. Координаты измерений ложных и подвижных объектов распределены равномерно и взаимно независимы. Из некоординатной информации используется только оценка блеска небесных объектов, содержащихся в измерениях.

При использовании первой модели (количество измерений от ложных и подвижных объектов распределено по закону Пуассона с известной интенсивностью) для записи выражения функции правдоподобия, описывающего множество  $\Omega_{nfr}$  измерений, сформированных на исследуемой

серии кадров, дополнительно использованы следующие исходные предпосылки. Количество ложных и подвижных объектов на каждом кадре серии случайно и может быть описано законом Пуассона. Вероятность того, что на кадре присутствует измерение от  $j$ -го объекта  $n_c$ -го звездного каталога (вероятность правильного формирования измерения) равна  $D_{\theta jnc}$  и зависит от блеска объекта и его взаимного расположения с соседними ему объектами на небесной сфере.

Функция правдоподобия должна учитывать следующие возможные результаты наблюдений. Во-первых,  $j$ -му небесному объекту с параметрами  $\theta_j$  не соответствует ни одно из  $Q_{nfr}$  измерений  $n_{fr}$ -го кадра, то есть, все измерения принадлежат ложным и подвижным объектам (такие измерения, для краткости, в работе при описании метода формирования внутреннего каталога неподвижных объектов иногда называются ложными). Данная ситуация в статье называется «пропуском измерения». Во-вторых, только одному из  $Q_{sky}$  небесных объектов с параметрами  $\theta_j$  соответствует одно измерение из  $Q_{nfr}$ , полученных на  $n_{fr}$ -ом кадре, остальные  $(Q_{nfr} - 1)$  принадлежат ложным или подвижным объектам. В-третьих, только двум из  $Q_{sky}$  небесных объектов соответствует два измерения из  $Q_{nfr}$ , остальные  $(Q_{nfr} - 2)$  измерения принадлежат ложным или подвижным объектам. И так далее. Перебор возможных вариантов причисления измерений объектам продолжается до тех пор, пока  $Q_{nfr} - Q_{sky} \geq 0$ .

Результатом внутрикадровой обработки является множество измерений. Реализацией шума (помехи) в результатах внутрикадровой обработки являются как ошибки оценок положения и блеска истинных небесных объектов, так и как «пропуск измерений» от истинных объектов, так и появление ложных измерений (измерений от ложных объектов).

Относительно исходных предпосылок, используемых при второй статистической модели множества измерений, сформированных на исследуемой серии кадров. Данная модель, как отмечалось ранее, предполагает возможность разделения кадра на множество элементарных объемов разрешения (ЭОР) и возможность формирования в каждом элементе разрешения кадра только одного измерения, без относительно того, сколько небесных объектов ему соответствует.

Размер кадра в этой связи выражается в ЭОР, задан (или может быть вычислен) и равен  $L_{EOR}$ . Данный размер определяется сингом (seeing) [25], выражаемым в угловых секундах, а через масштаб пикселя – и в пикселях. Синг характеризует качество астрономических изображений и обусловлен состоянием воздуха на пути светового луча от небесного объекта к телескопу [25]. Синг постоянен для различных объектов на кадре [25]. Как правило, в современной практике астрономических ПЗС-наблюдений при проведении астероидных обзоров размер ЭОР по одной координате составляет  $3 \div 5$  пикселей.

Множество  $\Omega_{nfr}$  измерений, сформированных на различных кадрах, по шуму (помехе) между собой независимо. Изначально шум (помеха) могут быть нестационарны. Однако за счет операций внутрикадровой обработки статистические характеристики шума (помехи) постоянны во времени и пространстве. Реализации шума (помехи) в различных измерениях (в результатах внутрикадровой обработки в различных ЭОР) независимы. Условная вероятность формирования измерения в ЭОР при отсутствии в нем небесного объекта  $F_{EOR}$  постоянна, известна и не равна своим предельным значениям 0 и 1; координаты ложных измерений распределены равномерно на кадре и взаимно независимы.

Условная вероятность формирования множества измерений кадра при заданном множестве небесных объектов исследуемого участка небесной сферы. Так как множества измерений различных кадров независимы, то далее будет обосновано выражение для условной вероятности формирования множества  $\Omega_{nfr}$  измерений  $n_{fr}$ -го кадра при заданном множестве  $\Omega_{sky}$  звезд исследуемого участка небесной сферы. При этом индекс  $n_{fr}$ , где это возможно, далее опущен.

В соответствии с исходными предположениями выражение для условной вероятности формирования  $Q_{fr}$  измерений на  $n_{fr}$ -ом кадре при отсутствии ( $Q_{sky} = 0$ ) хотя бы одной звезды  $P_{\Omega_{nfr}/(0)}$  имеет вид:

$$P_{\Omega_{nfr}/(0)} = F_{EOR}^{Q_{sky}} (1 - F_{EOR})^{L_{EOR} - Q_{sky}} \cdot C^{Q_{sky}} \cdot \prod_{i=1}^{Q_{sky}} P_A(A_i/0), \quad (1)$$

где  $C = \frac{1}{\Delta_{CCD}^2}$ ;

$\Delta_{CCD}$  – угловой размер пикселя ПЗС-матрицы;

$Q_{fr} = Q_{nfr}$  – количество измерений, сформированных на  $n_{fr}$ -ом кадре;

$P_A(A_i/0)$  – условная вероятность формирования оценки блеска небесного объекта  $A_i$  в  $i$ -ом измерении исследуемого кадра, при условии, что измерение принадлежит ложному объекту;

$L_{EOR}$  – количество элементов разрешения, на которое можно разделить кадр.

В случае наличия на исследуемом участке небесной сферы одного объекта ( $Q_{sky} = 1$ ) при условии, что на одном кадре от объекта (звезды) не может быть более одного измерения, возможны две ситуации. Первая носит название «пропуск измерения» и соответствует случаю, когда ни одно из измерений на кадре не принадлежит объекту. Ее вероятность определяется выражением:

$$P_{\Omega_{nfr} (0)/\theta} = F_{EOR}^{Q_{sky}} (1 - F_{EOR})^{L_{EOR} - Q_{sky} - 1} \cdot C^{Q_{sky}} (1 - D_{\theta}) \cdot \prod_{i=1}^{Q_{sky}} P_A(A_i/0), \quad (2)$$

или при  $F_{EOR} \neq 1$ :

$$P_{\Omega_{nfr} (0)/\theta} = P_{\Omega_{nfr} / (0)} \cdot \frac{1 - D_{\theta}}{1 - F_{EOR}}, \quad (3)$$

где  $D_{\theta}$  – условная вероятность правильного обнаружения небесного объекта с параметрами видимого движения и блеска  $\theta$ .

Во второй ситуации ровно одно (любое) измерение, сформированное на кадре, соответствует небесному объекту с параметрами видимого движения и блеска  $\theta$ . (остальные ложные). Выражение для условной вероятности формирования множества измерений кадра при дополнительном условии, что  $I_{obj}$ -е измерение соответствует объекту (звезде), имеет вид:

$$P_{\Omega_{nfr} : I_{obj} / \theta} = F_{EOR}^{Q_{sky} - 1} \cdot (1 - F_{EOR})^{L_{EOR} - Q_{sky}} \times C^{Q_{sky} - 1} \cdot D_{\theta} \cdot P_A(A_{I_{obj}} / \theta) \cdot P_K(Y_{KI_{obj}} / \theta) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq I_{obj}}}^{Q_{sky}} P_A(A_i / 0). \quad (4)$$

где  $P_K(Y_{Ki} / \theta)$ ,  $P_A(A_i / \theta)$  – условные вероятности формирования оценки положения  $Y_{Ki}$  (координат) звезды и блеска  $A_i$  в  $i$ -ом измерении  $n_{fr}$ -го кадра, при условии, что измерение соответствует звезде с параметрами  $\theta$  видимого движения и блеска, соответственно.

При использовании первой модели (количество измерений от ложных и подвижных объектов распределено по закону Пуассона с известной интенсивностью) вместо выражения (4) для условной вероятности формирования множества измерений кадра при дополнительном условии, что  $I_{obj}$ -е измерение соответствует звезде, целесообразно использовать выражение [26]:

$$P_{\Omega_{nfr} : I_{obj} / \theta} = P_{false}^{(Q_{sky} - 1)} \cdot C^{Q_{sky} - 1} \cdot (1 - D_{\theta}) \cdot D_{\theta} \cdot P_K(Y_{KI_{obj}} / \theta), \quad (5)$$

где  $P_{false}^N = \frac{\mu^N}{N!} \cdot e^{-\mu}$  – вероятность формирования на исследуемом кадре ровно  $N$  измерений от ложных объектов, определенная с учетом того, что количество измерений от ложных объектов распределено по закону Пуассона [27] с интенсивностью  $\mu$ .

Таким образом, выражение для условной вероятности формирования множества измерений кадра при наличии на кадре изображения одного небесного объекта с параметрами  $\theta$  примет вид:

$$P_{\Omega nfr/\theta} = F_{EOR}^{Q_{sky}} (1 - F_{EOR})^{L_{EOR} - Q_{sky} - 1} \cdot C^{Q_{sky}} \cdot (1 - D_{\theta}) \prod_{i=1}^{Q_{sky}} P_A(A_i/0) + \\ + F_{EOR}^{Q_{sky} - 1} (1 - F_{EOR})^{L_{EOR} - Q_{sky}} \cdot C^{Q_{sky} - 1} \times \\ \times \sum_{\eta=1}^{Q_{sky}} \left[ D_{\theta} \cdot P_A(A_{Iobj}/\theta) \cdot P_K(Y_{KIobj}/\theta) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq Iobj}}^{Q_{sky}} P_A(A_i/0) \right], \quad (6)$$

или при  $F_{EOR} \neq 0$ ,  $F_{EOR} \neq 1$ ,  $P_A(A_i/0) \neq 0$ ,

$$P_{\Omega nfr/\theta} = P_{\Omega nfr/(0)} \left[ \frac{1 - D_{\theta}}{1 - F_{EOR}} + \frac{D_{\theta}}{F_{EOR}} \sum_{i=1}^{Q_{sky}} \frac{P_A(A_i/\theta)}{P_A(A_i/0)} \cdot \frac{P_K(Y_{KIobj}/\theta)}{C} \right]. \quad (7)$$

Вероятность формирования измерения от звезды с параметрами видимого движения и блеска  $\theta$  на  $n_{fr}$ -м кадре в малой окрестности  $dy$  точки с координатами  $Y_{KIobj}$  определяется выражением:

$$P_K(Y_{KIobj}/\theta) = N_{Y_{KIobj}}(Y_{KIobj}(\theta); \Sigma_{fri n}) dy, \quad (8)$$

$$\text{где } N_x(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)} \quad (9)$$

– значение многомерного нормального распределения с математическим ожиданием  $\mu$  и корреляционной матрицей  $\Sigma$  в точке  $x$ .

При записи выражения для условной вероятности формирования множества измерений на рассматриваемом кадре при наличии на нем изображений  $Q_{sky}$  звезд с параметрами блеска и видимого движения  $\Omega_{sky} = \{\Theta_1, \dots, \Theta_{Q_{sky}}\}$  первоначально предполагается, что каждая звезда различаема, а изображения соседних объектов практически не пересекаются.

Из  $Q_{fr}$  измерений, сформированных на  $n_{fr}$ -ом кадре,  $H$  принадлежат объектам (звездам)  $H = \overline{0, Q_{sky}}$ , остальные являются ложными, а ситуация «пропуск измерения» на  $n_{fr}$ -м кадре повторяется  $Q_{sky} - H$  раз.

Вероятность  $P_{\Omega nfr(0)/\Omega_{sky}}$  отсутствия на кадре измерений от звезд ( $H = 0$ ) равна произведению вероятностей одновременного пропуска всех  $Q_{sky}$  объектов и формирования в оставшихся  $(L_{EOR} - Q_{sky})$  ЭОР кадра ровно  $Q_{fr}$  ложных измерений:

$$P_{\Omega nfr(0)/\Omega_{sky}} = P_{\Omega nfr/(0)} \cdot \prod_{j=1}^{Q_{fr}} \frac{1 - D_{\theta_j}}{1 - F_{EOR}}. \quad (10)$$

Вероятность формирования множества измерений кадра при одном



измерении от звезды (остальные измерения – ложные) на кадре  $P_{\Omega nfr (1)/\Omega sky}$  по аналогии с (7) определяется  $Q_{fr}$  слагаемыми. Каждое из указанных слагаемых соответствует гипотезе о том, что очередное измерение соответствует изображению от  $j$ -го ( $j = \overline{1, Q_{sky}}$ ) небесного объекта. Каждое из этих слагаемых содержит, в свою очередь,  $Q_{fr}$  слагаемых (по количеству гипотез о номере измерения, которое соответствует звезде):

$$P_{\Omega nfr (1)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} \sum_{j=1}^{Q_{sky}} \frac{1 - F_{EOR}}{1 - D_{\theta j}} \times \frac{D_{\theta j}}{F_{EOR}} \sum_{i=1}^{Q_{fr}} \left[ \frac{P_A(A_i/\theta_j) P_K(Y_{KlObj}/\theta_j)}{P_A(A_i/0) C} \right]. \quad (11)$$

Аналогичные выражения при двух, трех и  $H$  измерений звезд имеют вид:

$$P_{\Omega nfr (2)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \frac{(1 - F_{EOR})^2}{(1 - D_{\theta j_1})(1 - D_{\theta j_2})} \times \frac{D_{\theta j_1} D_{\theta j_2}}{F_{EOR}^2} \sum_{i_1=1}^{Q_{fr}} \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^{Q_{fr}} \left[ \frac{P_A(A_{i_1}/\theta_{j_1}) P_A(A_{i_2}/\theta_{j_2}) P_K(Y_{KlObj1}/\theta_{j_2}) P_K(Y_{KlObj2}/\theta_{j_2})}{P_A(A_{i_1}/0) P_A(A_{i_2}/0) C^2} \right]; \quad (12)$$

$$P_{\Omega nfr (3)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} \cdot \left( \frac{1 - F_{EOR}}{F_{EOR}} \right)^3 \cdot \prod_{lObj=1}^3 \left[ \frac{D_{\theta j}}{1 - D_{\theta j}} \right] \times \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \sum_{j_3=j_2+1}^{Q_{sky}} \sum_{i_1=1}^{Q_{fr}} \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3 \\ i_1 \neq i_3}}^{Q_{fr}} \sum_{i_3=1}^{Q_{fr}} \left[ \frac{1}{C^3} \prod_{lObj=1}^3 \frac{P_A(A_{lObj}/\theta_{j_{lObj}}) \cdot P_K(Y_{KlObj}/\theta_{j_{lObj}})}{P_A(A_{lObj}/0)} \right]; \quad (13)$$

$$P_{\Omega nfr (H)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} \cdot \left( \frac{1 - F_{EOR}}{F_{EOR}} \right)^H \left[ \prod_{lObj=1}^H \frac{D_{\theta j}}{1 - D_{\theta j}} \right] \frac{1}{C^H} \times \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \dots \sum_{j_H=j_{H-1}+1}^{Q_{sky}} \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_\alpha \neq i_\beta}}^{Q_{fr}} \dots \sum_{\substack{i_H=1 \\ for \forall \alpha, \beta}}^{Q_{fr}} \prod_{lObj=1}^H \frac{P_A(A_{lObj}/\theta_{j_{lObj}}) \cdot P_K(Y_{KlObj}/\theta_{j_{lObj}})}{P_A(A_{lObj}/0)}. \quad (14)$$

Итоговая формула для условной вероятности формирования конкретного множества  $\Omega_{nfr}$  измерений на кадре при наличии в соответствующем участке небесной сферы  $Q_{sky}$  звезд с параметрами  $\Omega_{sky} = \{\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_{Q_{sky}}\}$  в предположении, что все объекты различаемы, имеет вид:

$$P_{\Omega nfr / \Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} \cdot \sum_{H=0}^{\min(Q_{fr}, Q_{sky})} \tilde{P}_{\Omega nfr (H)/\Omega sky}, \quad (15)$$

$$\text{где } \tilde{P}_{\Omega nfr (H)/\Omega sky} = \frac{P_{\Omega nfr (H)/\Omega sky}}{P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky}}.$$

Впервые выражения, подобные (1), (14), (15), были использованы в качестве функции правдоподобия потока измерений/отметок/сигналов в работе [10]. По сути, это представление поля правдоподобия на входе межкадровой обработки смесью вероятностных распределений, в данном случае – многомерных нормальных распределений.

При использовании первой статистической модели множества измерений, сформированных на исследуемом кадре (количество измерений, не принадлежащих небесным объектам исследуемой группы или ложных измерений, распределено по закону Пуассона с известной интенсивностью) выражение (15) останется без изменения, а выражения (10) ÷ (14) примут следующий вид:

$$P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)} \cdot \prod_{j=1}^{Q_{sky}} (1 - D_{\theta_j}). \quad (16)$$

$$P_{\Omega nfr (1)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} \cdot \frac{Q_{fr}}{\mu \cdot \tilde{N}} \cdot \sum_{j=1}^{Q_{sky}} \left[ D_{\theta_j} \sum_{i=1}^{Q_{fr}} P_K(Y_{KlObj}/\theta_j) \right]. \quad (17)$$

$$P_{\Omega nfr (2)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} \left[ \frac{Q_{fr}}{\mu \cdot \tilde{N}} \right]^2 \times \\ \times \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} D_{\theta_{j_1}} D_{\theta_{j_2}} \sum_{\substack{i_1=i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^{Q_{fr}} P_K(Y_{KlObj1}/\theta_{j_1}) \cdot P_K(Y_{KlObj2}/\theta_{j_2}). \quad (18)$$

$$P_{\Omega nfr (3)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} \left[ \frac{Q_{fr}}{\mu \cdot C} \right]^3 \times \\ \times \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \sum_{j_3=j_2+1}^{Q_{sky}} \sum_{i_1=1}^{Q_{fr}} \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3}}^{Q_{fr}} \sum_{\substack{i_3=1 \\ i_1 \neq i_3}}^{Q_{fr}} \prod_{\eta=1}^3 P_K(Y_{KlObj}/\theta_j). \quad (19)$$

$$P_{\Omega nfr (H)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} \left[ \frac{Q_{fr}}{\mu \cdot C} \right]^H \times \\ \times \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \dots \sum_{j_H=j_{H-1}+1}^{Q_{sky}} \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_\alpha \neq i_\beta}}^{Q_{fr}} \dots \sum_{\substack{i_H=1 \\ \text{for } \forall \alpha, \beta}}^{Q_{fr}} \prod_{\eta=1}^H P_K(Y_{KlObj}/\theta_j). \quad (20)$$

При допустимости ситуации покрытия звезд друг друга (ситуации

неразрешения)  $Q_{sky}$  звезд на исследуемом кадре занимают  $\xi \leq Q_{sky}$  ЭОР. При этом два небесных объекта с параметрами  $\Theta_\alpha$  и  $\Theta_\beta$  занимают  $\xi_{\alpha\beta} \leq 2$  ЭОР, три небесных объекта занимают  $\xi_{\alpha\beta\gamma} \leq 3$  ЭОР и т.д. Кроме того, в некоторых случаях изображение от некоторых звезд не обнаруживается. Вместе с тем при достаточно малых расстояниях между небесными объектами изображение от них выделяется весьма устойчиво. Данный факт при необходимости можно учесть введением совместной плотности распределения или соответствующих вероятностей яркостных и координатных параметров измерений от группы близких объектов/звезд  $P_A(A_i/\theta_{j1}, \theta_{j2})$  и  $P_K(Y_{KObj}/\theta_{j1}, \theta_{j2})$ .

С целью минимизации громоздкости выражения для условной вероятности формирования множества  $\Omega_{nfr}$  измерений кадра при наличии в соответствующем участке небесной сферы  $Q_{sky}$  звезд с параметрами  $\Omega_{sky} = \{\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_{Q_{sky}}\}$  предлагается следующий подход. Параметры множества  $\Omega_{sky}$  звезд исследуемого участка неба прогнозируются на время привязки  $n_{fr}$ -го кадра. Определяются взаимные расстояния между объектами и определить взаимно-неразличаемые объекты. Такие объекты на  $n_{fr}$ -м кадре объединяются в один с параметрами  $\Theta_j = (\Theta_m \vee \Theta_n)$ . Указанные параметры характеризуют особенности законов распределения координат и блеска небесных объектов, которые соответствуют «совмещенным» измерениям. Сформированное таким образом множество  $\Omega_{sky}$  звезд исследуемого участка небесной сферы подставляются в выражения (14), (15). При этом будет получен искомый закон условного распределения множества  $\Omega_{nfr}$  измерений кадра при заданном множестве  $\Omega_{sky}$  звезд исследуемого участка небесной сферы с учетом возможного покрытия (неразрешения) изображений звезд, принадлежащих компактным группам близких объектов. На другом кадре другие объекты будут или могут быть объединены в один объект, соответствующий неразрешаемой компактной группе близких звезд.

## 5. Выводы

В статье разработано две статистической модели совокупности измерений, сформированных на исследуемой серии кадров. Первая модель предполагает, что количество измерений, не принадлежащих небесным объектам с практически нулевым видимым движением (объекты Солнечной Системы, ложные объекты), распределено по закону Пуассона с известной интенсивностью. Вторая модель предполагает разделение любого кадра на элементарные объемы разрешения и возможность формирования в каждом элементе разрешения кадра только одного измерения, без относительно того, сколько небесных объектов ему соответствует. Введенные модели учитывают основные особенности формирования множества измерений на серии кадров.

Разработанные статистические модели могут быть использованы при

разработке вычислительного метода формирования внутреннего каталога объектов неподвижных на серии кадров.

Дальнейшие исследования целесообразно сконцентрировать на разработке вычислительного метода оценки параметров положений близких объектов, что особенно актуально при ненулевой вероятности перепутывания измерений от разных объектов, сформированных на серии кадров.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fricke W., Schwan H., Corbin T. Fifth Fundamental Catalogue (FK5) Part II. The FK5 Extension Veroeff. Astron. Rechen-Institut Heidelb. – 1991. – N. 33.
2. Heckmann O., Dieckvoss W., et al.: Star catalogue of positions and proper motions north of -2.5 deg declination AGK3. Hamburg-Begerdorf – 1975. – V. 8.
3. Luyten, W. J. VizieR Online Data Catalog: NLTT Catalogue (Luyten, 1979). VizieR On-line Data Catalog: I/98A – 1995.
4. Gill D., Kapteyn J. C. The Cape photographic Durchmusterung. For the equinox 1875. Pt.1: Zones -18 deg. to -37 deg. Annals of the Cape Observatory, London: Darling, 1896
5. Zacharias, N.; Finch, C. T. et al (2013). The Fourth US Naval Observatory CCD Astrograph Catalog (UCAC4). The Astronomical Journal, 145(2), id. 44, 14.
6. Zacharias N. The fourth U.S. Naval Observatory CCD Astrograph Catalog (UCAC4) // Norbert Zacharias for the UCAC team, USNO, Washington DC. – July 2012 // [Электронный ресурс] – Режим доступа к ресурсу: [http://ad.usno.navy.mil/ucac/readme\\_u4v5](http://ad.usno.navy.mil/ucac/readme_u4v5) – Название с экрана.
7. Fedorov P. N., Myznikov A. A., Akhmetov V. S. The XPM Catalogue: absolute proper motions of 280 million stars // MNRAS. – 2009. – V. 393. – P. 133-138
8. Hog E.; Fabricius C.; Makarov V. V. The Tycho-2 catalogue of the 2.5 million brightest stars // Astronomy and Astrophysics, – 2000. – V. 355. – P. L27-L30
9. Gaia Follow-Up Network for Solar System Objects [Электронный ресурс] — Режим доступа: <https://gaiafunso.imcce.fr/> — Загл. с экрана.
10. Бакут П.А., Жулина Ю.В., Иванчук Н.А. Обнаружение движущихся объектов. – М.: «Сов. Радио». – 1980. – 288 с.
11. Кузьмин С.З. Цифровая радиолокация. Введение в теорию / С.З. Кузьмин – К.: Издательство КвіЦ, 2000. – 428 с.
12. Bar-Shalom Y. Kalman Filter Versus IMM Estimator: When Do We Need / Y. Bar-Shalom // IEEE Trans. on AES. – 2003. – Vol. 39, № 4. – P. 1452 – 1456.
13. Кузьмин С.З. Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации – М.: "Радио и связь", 1986 - 352 с.
14. Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации – М.: "Сов. радио", 1974 г. - 432 с.
15. Саваневич В.Е. Програма CoLiTec автоматизированного обнаружения небесных тел со слабым блеском / В. Е. Саваневич, А. Б. Брюховецкий, А. М. Кожухов, Е. Н. Диков, В. П. Власенко // Космічна наука і технологія. – 2012. – т.18. – №1. – С. 39 – 46.
16. Брюховецкий, А. Б. Вычислительные методы обработки данных для обнаружения объектов с локально неизменными параметрами видимого

- движения / А. Б. Брюховецкий // Радиоэлектроника и информатика : науч.-техн. журн. – Х. : Изд-во ХНУРЭ, 2012. – Вып. 2. – С. 15-22.
17. The Large Synoptic Survey Telescope [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://www.lsst.org/> — Загл. с экрана.
  18. Ory, M. THE MOROCCO OUKAIMEDEN SKY SURVEY, THE MOSS TELESCOPE [Текст] / M. Ory, A. Daassou, F. Colas, et.al. // Asteroids, Comets, Meteors – 2012
  19. Spacewatch Project Telescopes on Kitt Peak [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://spacewatch.lpl.arizona.edu/> – Загл. с экрана.
  20. Брандт З. Анализ данных: Статистические и вычислительные методы для научных работников и инженеров / З. Брандт; пер. с англ. – М.: Мир, АСТ, 2003. – 686 с.
  21. Закс Ш. Теория статистических выводов / Ш. Закс; пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 776 с.
  22. Леман Э. Проверка статистических гипотез / Э. Леман; пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 408 с.
  23. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Кобзарь А. [Текст] / Кобзарь А.И. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
  24. Андреева М.И., Горелик Р.Е., Чесноков О.К., Случайные величины и законы их распределения: учеб. пособие [Текст] / М.И.Андреева, Р.Е. Горелик, О.К. Чесноков, ВолгГТУ.: – Волгоград, 2010. - 116 с.
  25. Frederick Chromey R. To measure the sky : an introduction to observational astronomy (1. publ. ed.) / Chromey R. Frederick // Cambridge: Cambridge University Press. –2010 – P. 140.
  26. Симонова О.Г. МНК–оценка параметров зависимых линейных траекторий по классифицированной выборке // Системи обробки інформації: Зб. наук. пр. – Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2004. Вип. 9 (37). – С. 164 – 169.
  27. Вагис Г.А., Гупал А.М., Сергиенко И.В. Эффективность байесовской процедуры распознавания. Дискретный случай // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 4. – С. 3 – 13.

УДК 519.688

## Моделирование напряжённно-деформированного состояния конструкций механики эластомеров в САПР FORTU-FEM

В. В. Лаврик

*Бердянский государственный педагогический университет, Украина*

Современные САПР ориентированы на решение разных классов задач механики твёрдого тела. Их преимуществами является удобство в работе с ними, высокая точность автоматизации. Однако следует отметить, что эффективное применение этих программ требует значительных затрат на закрепление принципов работы с ними. Но основным недостатком является то, что конкретную систему невозможно применить для решения задачи, метод решения которой не предусмотрен данной системой. В данной статье рассматривается САПР FORTU-FEM и схема, которая реализована в этой системе.

**Ключевые слова:** *объектно-ориентированное моделирование, конечные элементы, моментная схема, САПР.*

Сучасні САПР орієнтовані на розв'язок різних класів задач механіки твердого тіла. Їх перевагами є зручність у роботі з ними, висока точність автоматизації. Однак слід зазначити, що ефективно застосування цих програм вимагає значних витрат на закріплення принципів роботи з ними. Але основним недоліком є те, що конкретну систему неможливо застосувати для розв'язку завдання, метод вирішення якої непередбачений даною системою. У даній статті розглядається САПР FORTU-FEM і схема, яка реалізована в цій системі.

**Ключові слова:** *об'єктно-орієнтоване моделювання, скінчені елементи, моментна схема, САПР.*

Modern CAD oriented to the solution of various classes of problems of mechanics of solids. Their advantage is the ease of working with them, high precision automation. However, it should be noted that the effective use of these programs requires a considerable amount of work on the principles of securing them. But the main disadvantage is that a particular system can not be applied to solve the problem, the method of the solution of which is not specified by this system. This article discusses the CAD FORTU-FEM and the scheme, which is implemented in this system.

**Keywords:** *object-oriented modeling, finite elements, moments of diagram, CAD.*

### 1. Актуальность исследования.

Современные расчётно-вычислительные комплексы, предназначенные для изучения свойств материалов, находящиеся в напряжённно- деформированном состоянии, содержат целый ряд методов приближённых вычислений: решение больших систем алгебраических и трансцендентных уравнений, численное интегрирование и дифференцирование и т.д., а так же большое количество вспомогательных нестандартных расчётов. Реализация итерационных и пошаговых расчётных схем связана с неоднократным повторением этих операций. При программировании задач такого вида остро встают задачи экономии оперативной памяти вычислительной машины и, как следствие, скорости выполнения операций [1, 2]. Сравнительно много времени идёт как на подготовку задачи к программированию, так и на само программирование. Это

приводит к значительным затратам средств и времени на общую реализацию расчётов.

## **2. Постановка проблемы исследования.**

При решении практической задачи механики эластомеров встаёт проблема выбора наиболее удачной, по возможности оптимальной, расчётной схемы, которая базируется на целом ряде конкретных методов вычислительной математики [3]. Но, на данном этапе через недостаточные научные исследования говорить про оптимальность той или другой вычислительной схемы сложно. Это обстоятельство часто заставляет строить разные вычислительные алгоритмы, а потом сравнивать их преимущества и недостатки. Полученные окончательные и некоторые промежуточные результаты расчётов должны исследоваться на соответствия их механического смысла задачи. Это так же является необходимой частью расчётов, т.к. ошибки округления и проявление нестойкости некоторых расчётных алгоритмов могут значительно изменить результат. Процесс анализа результатов есть очень сложным и трудоёмким процессом [6].

Выходом из данной ситуации может быть разработка систем автоматизированного проектирования (САПР), которое позволило бы инженеру - программисту создавать надёжные модели в своей предметной области. Данные расчётные комплексы должны состоять из систем прикладных программ и содержать в своих библиотеках заранее разработанные модули расчётов конкретных объектов [5].

У этих САПР помимо многих достоинств есть существенный недостаток: если в системе не предусмотрен какой-либо метод расчёта конструкции, то данную систему невозможно применить для решения задачи.

Более перспективным направлением развития расчётно-вычислительных комплексов является переход к проблемно-ориентированным языкам высокого уровня в некоторых предметных областях. Автоматизированные системы, основанные на данном методе, дают пользователю возможность общения с САПР на близком к естественному проблемно-ориентированном языке. Инженер работает в своей предметной области, что повышает надёжность и эффективность разработанных прикладных программ [4].

## **3. Формулировка цели статьи.**

Целью данной статьи является представление инструментальной системы, позволяющей автоматизировать численный анализ широкого класса задач механики эластомеров с возможностью параметрического задания оптимальной схемы расчёта конструкции.

В работе представлена математическая модель расчёта конструкций из слабосжимаемых материалов, показан формальный способ описания схем расчётов механики эластомеров. Произведена апробация разработанной схемы на модели виброизолятора ВР-201.

#### 4. Моделирование задач механики эластомеров в напряжённо-деформированном состоянии

Объектно-ориентированный подход к программированию механической системы позволяет в отличие от традиционных технологий программирования разрабатывать все алгоритмы и процедуры в соответствии с законами математических абстракций [1] (рис. 1).

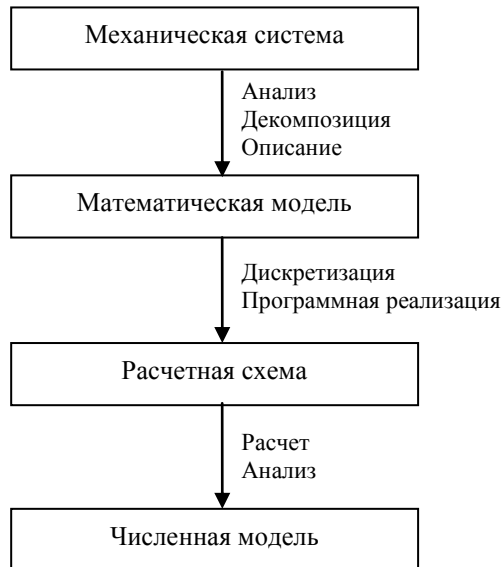


Рис. 1. Процесс объектно-ориентированного анализа и моделирования механической системы

Общую объектную модель механической системы, включающую описание составляющих ее механических объектов, связей между ними, а также состояний системы, можно представить в следующем виде (рис. 2).

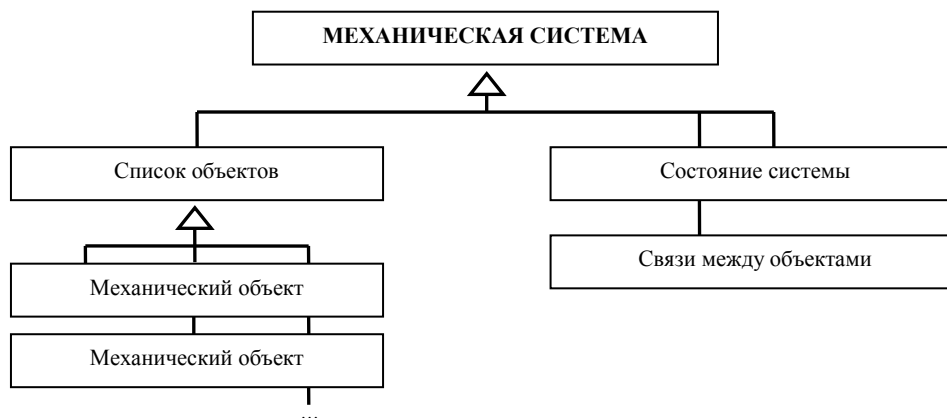


Рис. 2. Общая объектная модель механической системы



Информационную модель механической системы представим в виде унифицированного языка моделирования - языка графического описания для объектного моделирования в области разработки программного обеспечения – UML. Сама UML- диаграмма представлена на рис. 2.4.



Рис. 3. Общая информационная модель механического объекта

Сам механический объект можно представить в виде совокупности описания геометрической и математической моделей, а также его состояния (рис. 4).

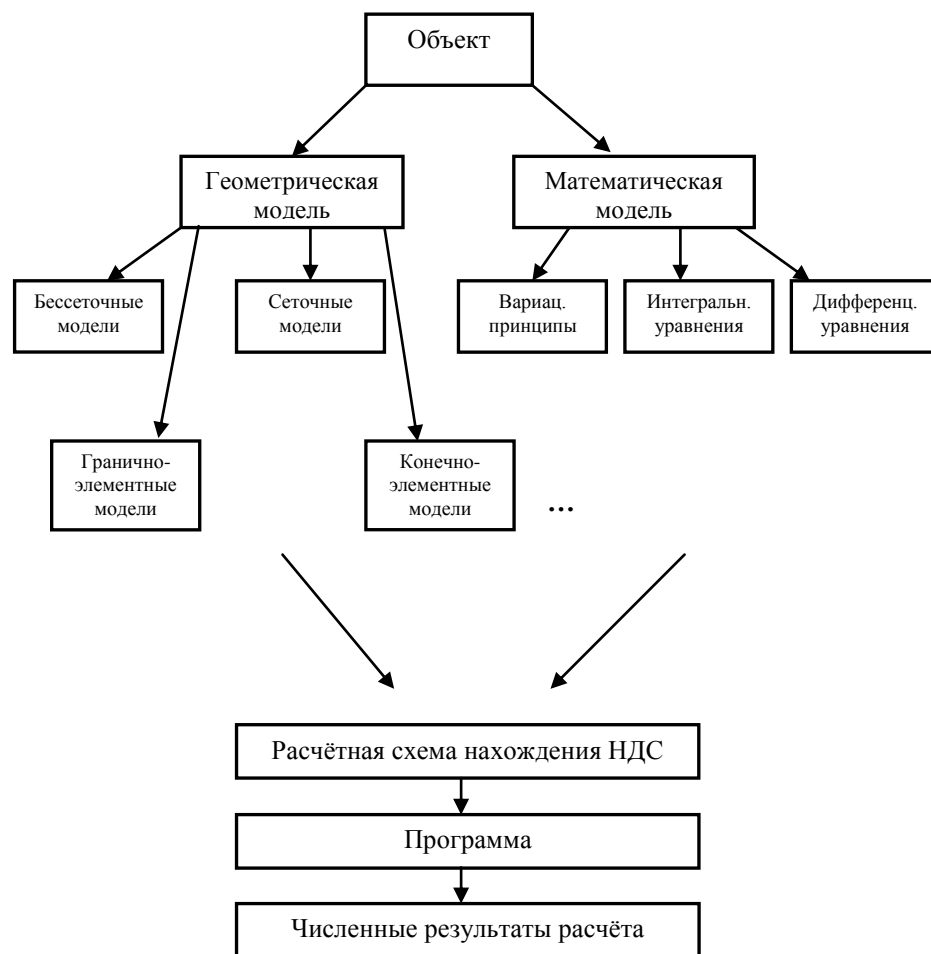


Рис. 4. Схема численного анализа НДС конструкций

Для реализации модели механической системы важно также выполнить анализ и формализацию возможных ее состояний в целом. Формализация состояния механической системы является достаточно трудоемким процессом, так как она напрямую зависит как от сложности самой системы, так и от выбранного способа ее дискретизации и расчета. Более подробно о состояниях механических систем в механике эластомеров можно ознакомиться в работах [1-5].

### 5. Формализация описания схем расчёта задач механики эластомеров

Объектно-ориентированный подход к декомпозиции механической системы при ее проектировании и анализе позволяет в отличие от традиционных способов разрабатывать все алгоритмы и процедуры анализа механического процесса в соответствии с законами математических абстракций. Однако, для эффективного применения метода объектно-ориентированной декомпозиции механической системы необходима разработка специального программного инструментария, позволяющего описывать, как саму структурированную механическую систему, так и связи в ней между образующими ее объектами, а также и вычислительную схему численного расчета [4, 5].

Одним из примеров реализации подобных проблемно-ориентированных программ является универсальная система FORTU- FEM, позволяющая описывать общую постановку задачи механики, геометрическую и физическую модель рассчитываемого механического объекта (или механической системы), а также схему расчета, основанную на записи соответствующего вариационного принципа и правил вывода из него.

В основу САПР FORTU- FEM положен метод конечных элементов и спроектирован так, что бы позволять изменять расчетную схему задач с целью её отладки и выбора оптимальной среди них.

Система FORTU- FEM состоит из трёх подсистем:

- подсистема подготовки начальных данных (препроцессор);
- подсистема расчёта (процессор);
- подсистема анализа полученных результатов (постпроцессор)

Общая схема работы системы FORTU- FEM приведена на рис.5.

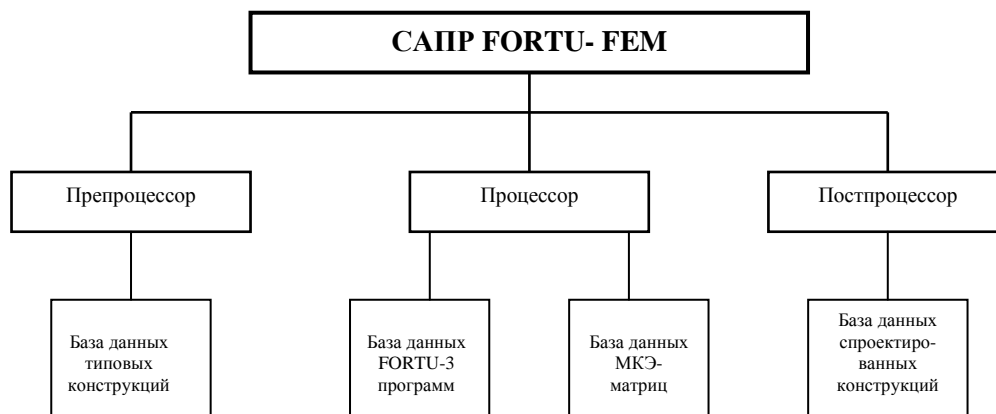


Рис.5. Структура системы автоматизированного проектирования FORTU-FEM

Успех решения непосредственно зависит от корректности модели, заданной на языке FORTU- 3. Точность расчёта определяется типом КЭ, густотой и структурой заданной конечно- элементной сетки, выбранной схемой расчёта.

### 6. Схема выводов вариационных соотношений в статике

В данный момент в рассмотренной системе FORTU-FEM разработан новый модуль, позволяющий инженеру- проектировщику самостоятельно выбирать методы расчёта конструкций. Для простоты восприятия рассмотрим используемую модель в её плоском представлении.

Энергия упругой деформации КЭ определяется из формулы [2, 7, 8]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy}) dv, \quad (1)$$

при этом её вариация, исходя из принципа Лагранжа, равна нулю  $\delta\Pi = 0$ .

Для нахождения элементов матрицы жёсткости зададим аппроксимирующую функцию для поля перемещений, которая определяет перемещения  $u(x, y)$  в любой точки внутри КЭ через перемещения узловых точек  $u_i$  этого же КЭ. Запишем аппроксимацию перемещения по первому направлению:

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^3 u_i N_i(x, y), \quad (2)$$

где  $N_i(x, y)$  -функция формы, определяемые по формулам :

$$N_i(x, y) = \alpha^i_0 + \alpha^i_1 x + \alpha^i_2 y + \alpha^i_3 xy \quad (3)$$

при условии

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

Аналогично определяются формулы по второму направлению. Аппроксимация перемещения и функции формы определяются в виде:

$$v(x, y) = \sum_{i=0}^3 v_i N_i(x, y) \quad (5)$$

$$N_i(x, y) = \beta^i_0 + \beta^i_1 x + \beta^i_2 y + \beta^i_3 xy$$

Деформации  $\varepsilon$  внутри КЭ определяются через перемещения внутренних точек по следующим формулам:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6)$$

Подставим в формулу (6) соответствующие значения из (4) и (5) получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_0(\alpha_1^0 + \alpha_3^0 y) + u_1(\alpha_1^1 + \alpha_3^1 y) + u_2(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 y) + u_3(\alpha_1^3 + \alpha_3^3 y), \\ \varepsilon_{yy} &= v_0(\beta_1^0 + \beta_3^0 x) + v_1(\beta_1^1 + \beta_3^1 x) + v_2(\beta_1^2 + \beta_3^2 x) + v_3(\beta_1^3 + \beta_3^3 x), \\ \varepsilon_{xy} &= u_0(\alpha_2^0 + \alpha_3^0 x) + v_0(\beta_2^0 + \beta_3^0 y) + u_1(\alpha_2^1 + \alpha_3^1 x) + v_1(\beta_2^1 + \beta_3^1 y) + \\ &+ u_2(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 x) + v_2(\beta_2^2 + \beta_3^2 y) + u_3(\alpha_2^3 + \alpha_3^3 x) + v_3(\beta_2^3 + \beta_3^3 y). \end{aligned} \quad (7)$$

Если в сплошной среде отсутствуют остаточные и температурные напряжения, то упругие напряжения  $\sigma$  внутри КЭ выражаются через деформации  $\varepsilon$  на основании закона Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (2\mu + \lambda)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda\varepsilon_{xx} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{yy}, \\ \sigma_{xy} &= \mu\varepsilon_{xy}\end{aligned}\quad (8)$$

Подставляем значения формул (7) в формулу (8) и после преобразований компоненты тензора напряжения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mu(u_0(\alpha_1^0 + \alpha_3^0 y) + u_1(\alpha_1^1 + \alpha_3^1 y) + u_2(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 y) + u_3(\alpha_1^3 + \alpha_3^3 y)) + \\ &+ \lambda(u_0(\alpha_1^0 + \alpha_3^0 y) + u_1(\alpha_1^1 + \alpha_3^1 y) + u_2(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 y) + u_3(\alpha_1^3 + \alpha_3^3 y) + \\ &+ v_0(\beta_1^0 + \beta_3^0 x) + v_1(\beta_1^1 + \beta_3^1 x) + v_2(\beta_1^2 + \beta_3^2 x) + v_3(\beta_1^3 + \beta_3^3 x)) \\ \sigma_{yy} &= 2\mu(v_0(\beta_1^0 + \beta_3^0 x) + v_1(\beta_1^1 + \beta_3^1 x) + v_2(\beta_1^2 + \beta_3^2 x) + v_3(\beta_1^3 + \beta_3^3 x)) + \\ &+ \lambda(u_0(\alpha_1^0 + \alpha_3^0 y) + u_1(\alpha_1^1 + \alpha_3^1 y) + u_2(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 y) + u_3(\alpha_1^3 + \alpha_3^3 y) + \\ &+ v_0(\beta_1^0 + \beta_3^0 x) + v_1(\beta_1^1 + \beta_3^1 x) + v_2(\beta_1^2 + \beta_3^2 x) + v_3(\beta_1^3 + \beta_3^3 x)) \\ \sigma_{xy} &= \mu(u_0(\alpha_2^0 + \alpha_3^0 x) + v_0(\beta_2^0 + \beta_3^0 y) + u_1(\alpha_2^1 + \alpha_3^1 x) + v_1(\beta_2^1 + \beta_3^1 y) + \\ &+ u_2(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 x) + v_2(\beta_2^2 + \beta_3^2 y) + u_3(\alpha_2^3 + \alpha_3^3 x) + v_3(\beta_2^3 + \beta_3^3 y))\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь  $\mu$ ,  $\lambda$  - параметры Ляме, которые находятся по формулам:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (10)$$

где  $E$ - модуль Юнга и  $\nu$ - коэффициент Пуассона являются физическими постоянными.

Элементарный объём можно найти из соотношения :

$$dv = \sqrt{g} dx dy \quad (11)$$

Рассмотренный метод конечных элементов требует, чтобы поле перемещения точек внутри КЭ аппроксимировалось полиномиальными функциями. Этот вариант МКЭ обладает медленной сходимостью в силу того, что эти функции, аппроксимирующие поля перемещений, включают слагаемые, описывающие жёсткие смещения КЭ и не учитывались «эффекты ложного сдвига». Эти недостатки можно устранить, используя метод моментных схем.

Основной принцип данного метода лежит в представлении аппроксимирующей функции в ряд Тейлора с последующим отбрасыванием  $n$ -ых членов ряда. Для четырёхугольного плоского конечного элемента эта функция, представленная в виде ряда, будет иметь следующий вид:

$$u_k' = w_k' \cdot \psi^{00} + w_k' \cdot \psi^{10} + w_k' \cdot \psi^{01} + w_k' \cdot \psi^{11} \quad (12)$$

где  $w_k^{pq}$ -коэффициенты разложения,  $\psi^{pq}$ - набор степенных координатных функций, определяемых по формуле:

$$\psi^{pq} = \frac{x^p y^q}{p! q!} \quad (p=0, 1; q=0, 1) \quad (13)$$

На основании формул (12), (13) получим выражения для производных от функции перемещения внутри КЭ:

$$u_{k',1} = w_k^{10} + w_k^{11}\psi^{01}, \quad u_{k',2} = w_k^{01} + w_k^{11}\psi^{01} \quad (14)$$

Компоненты тензора деформации разложим в ряд Тейлора в окрестности начала координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{st} e^{(st)}_{ij} \psi^{(st)} \quad (15)$$

или

$$\varepsilon_{xx} = e_{11}^{00} + e_{11}^{01}\psi^{01}, \quad \varepsilon_{yy} = e_{22}^{00} + e_{22}^{10}\psi^{10}, \quad \varepsilon_{xy} = e_{12}^{00} \quad (16)$$

Коэффициенты разложения  $\varepsilon^{(st)}_{ij}$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} e_{11}^{(pq)} &= \sum_{\mu\nu} w_k^{(\mu+1\nu)} b_{(p+1-\mu q-\nu)}^{k'}; \\ e_{22}^{(pq)} &= \sum_{\mu\nu} w_k^{(\mu\nu+1)} b_{(p-\mu q+1-\nu)}^{k'}; \\ e_{12}^{(pq)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \left( w_k^{(\mu\nu+1)} b_{(p+1-\mu q-\nu)}^{k'} + w_k^{(\mu+1\nu)} b_{(p-\mu q+1-\nu)}^{k'} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{где } b_{(\mu\nu)}^{k'} = \left. \frac{\partial^{(\mu+\nu)} z^{k'}}{(\partial x)^\mu (\partial y)^\nu} \right|_{x=0, y=0} \quad (18)$$

Для данного конечного элемента, учитывая формулы(15)-(18), тензоры деформации будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= e_{11}^{00} + e_{11}^{01}\psi^{01} = w_k^{10} b_{10}^{k'} + (w_k^{10} b_{11}^{k'} + w_k^{11} b_{10}^{k'}) y = w_k^{10} b_{10}^{k'} + w_k^{11} b_{10}^{k'} y; \\ \varepsilon_{yy} &= e_{22}^{00} + e_{22}^{10}\psi^{10} = w_k^{01} b_{01}^{k'} + (w_k^{01} b_{11}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'}) x = w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'} x; \\ \varepsilon_{xy} &= e_{12}^{00} = \frac{1}{2} (w_k^{01} b_{10}^{k'} + w_k^{10} b_{01}^{k'}) \end{aligned} \quad (19)$$

Для нахождения плоских напряжений по методу моментных схем воспользуемся формулами (8). Получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= (2\mu + \lambda)(w_k^{10} b_{10}^{k'} + w_k^{11} b_{10}^{k'} y) + \lambda(w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'} x) = \\
&= 2\mu(w_k^{10} b_{10}^{k'} + w_k^{11} b_{10}^{k'} y) + \lambda(w_k^{10} b_{10}^{k'} + w_k^{11} b_{10}^{k'} y + w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'} x) \\
\sigma_{yy} &= \lambda(w_k^{10} b_{10}^{k'} + w_k^{11} b_{10}^{k'} y) + (2\mu + \lambda)(w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'} x) = \\
&= 2\mu(w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'} x) + \lambda(w_k^{10} b_{10}^{k'} + w_k^{11} b_{10}^{k'} y + w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'} x) \\
\sigma_{xy} &= \frac{1}{2} \mu (w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{10} b_{10}^{k'})
\end{aligned} \tag{20}$$

Для составления энергетического функционала воспользуемся формулой (1), подставив в неё соответствующие значения из формул (10), (11), (19), (20). Получим:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} \iint_V (2\mu(w_k^{10} b_{10}^{k'} + w_k^{11} b_{10}^{k'} y) w_k^{10} b_{10}^{k'} + (2\mu(w_k^{10} b_{10}^{k'} + w_k^{11} b_{10}^{k'} y) w_k^{11} b_{10}^{k'} y + \\
&\quad + \lambda(w_k^{10} b_{10}^{k'} + w_k^{11} b_{10}^{k'} y) w_k^{10} b_{10}^{k'} + \lambda(w_k^{10} b_{10}^{k'} + w_k^{11} b_{10}^{k'} y) w_k^{11} b_{10}^{k'} y + \\
&\quad + \lambda(w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'} x) w_k^{10} b_{10}^{k'} + \lambda(w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'} x) w_k^{11} b_{10}^{k'} y + \\
&\quad + 2\mu(w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'} x) w_k^{01} b_{01}^{k'} + 2\mu(w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'} x) w_k^{11} b_{01}^{k'} x + \\
&\quad + \lambda(w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'} x) w_k^{01} b_{01}^{k'} + \lambda(w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'} x) w_k^{11} b_{01}^{k'} x + \\
&\quad + \lambda(w_k^{01} b_{01}^{k'} + w_k^{11} b_{01}^{k'} y) w_k^{01} b_{01}^{k'} + \lambda(w_k^{10} b_{10}^{k'} + w_k^{11} b_{10}^{k'} y) w_k^{11} b_{01}^{k'} x + \\
&\quad + \frac{1}{4} \mu (w_k^{01} b_{10}^{k'})^2 + \frac{1}{2} \mu w_k^{01} b_{10}^{k'} w_k^{10} b_{01}^{k'} + \frac{1}{4} \mu (w_k^{10} b_{01}^{k'})^2) dv
\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, непосредственно из вариационных принципов можно с учётом моментной схемы выводить необходимые разрешающие соотношения для эластомеров с использованием различных теорий конечных элементов.

## 7. Исследование осадки резинового виброизолятора ВР-201

Рассмотрим объект сложной формы, такой как виброизолятор ВР-201. Виброизоляторы ВР служат для работы в качестве основных упругих и виброизоляционных элементов, связывающих между собой колеблющиеся и неподвижные части машин.

Материал, который используется для их производства, резиновая смесь 51-1562 ТУ 105 1325-79.

Расчёт объекта будет производиться с жёстко закреплённым основанием и распределённой нагрузкой на его верхнюю часть.

Согласно техническим характеристикам, приведённым в [9], рабочая нагрузка на виброизолятор составляет  $P_{раб} = 250H$ , предельная-

$P_{пред} = 400H$ . При этом осадка при рабочей нагрузке равна  $w_{раб} = 8 \cdot 10^{-3} м$ , а при предельной -  $w_{пред} = 12 \cdot 10^{-3} м$ .

В работе [10] приведены результаты испытания резины марки 51-1562 на протяжении  $t = 31350$  часов. При  $t = 0$  коэффициент Пуассона материала был равен  $\nu = 0,499$ . Но в процессе эксплуатации происходит износ материала и в конце срока коэффициент равен  $\nu = 0,467$ .

Размеры исследуемой конструкции представлены на рис. 6.а и 6.б.

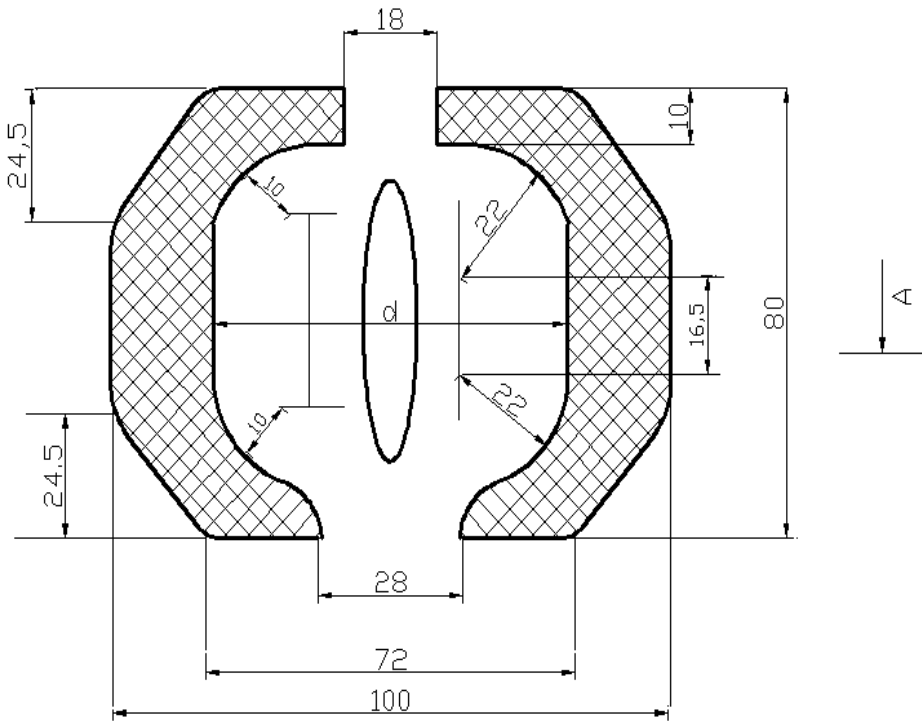


Рис. 6.а. Схема виброизолятора ВР-201

Данная задача решалась при  $E = 2.1 МПа$ .

С помощью препроцессора системы FORTU-FEM была построена регулярная конечно-элементная модель виброизолятора, состоящая из 12575 узлов и 6830 в форме параллелепипеда (рис. 7). Т. к. изучаемый объект является телом вращения, то для простоты и удобства расчёта будем рассматривать его четвертую часть.

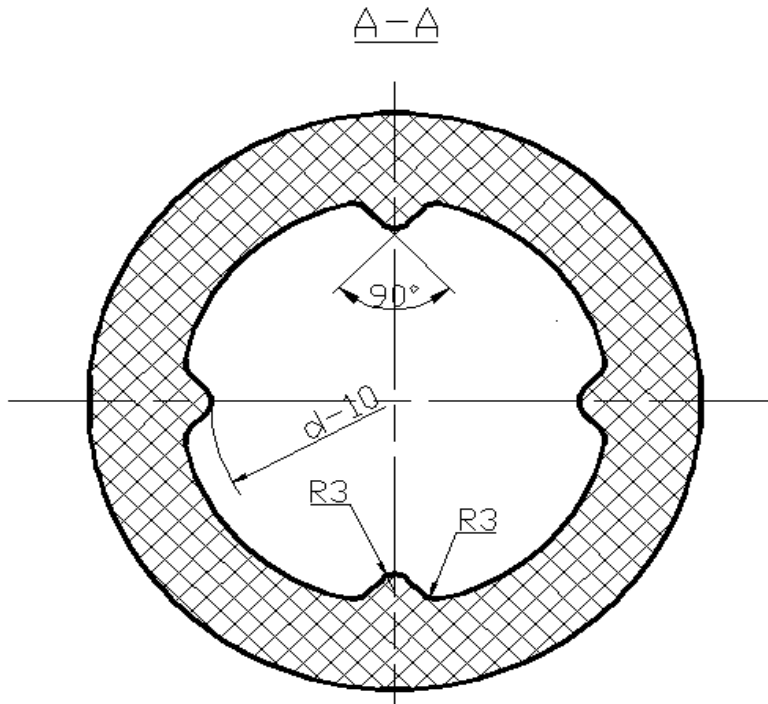


Рис. 6.б. Схема віброізолятора ВР-201

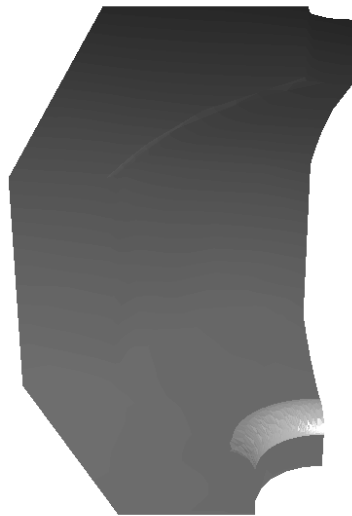


Рис 7. Модель віброізолятора ВР-201

Результаты расчёта при разных коэффициентах Пуассона представлены в таблице 1.



Таблиця 1. Результати расчёта виброизолятора ВР-201

Коэффициент Пуассона $\nu$	Модуль Юнга, Па	Осадка при рабочей нагрузке, $\text{м} \cdot 10^{-3}$	Осадка при предельной нагрузке, $\text{м} \cdot 10^{-3}$	$\varepsilon_{\text{раб}}, \%$	$\varepsilon_{\text{пред}}, \%$
0,467	5163840	10,97	17,55	13,7	21,9
0,470	5174400	10,69	17,11	13,4	21,4
0,473	5184960	10,39	16,63	13,0	20,8
0,476	5195520	10,07	16,11	12,6	20,1
0,479	5206080	9,72	15,55	12,2	19,4
0,482	5216640	9,34	14,95	11,7	18,7
0,485	5227200	8,90	14,24	11,1	17,8
0,488	5237760	8,41	13,46	10,5	16,8
0,490	5244800	8,03	12,85	10,0	16,1
0,491	5248320	7,82	12,51	9,8	15,6
0,494	5258880	7,08	11,33	8,9	14,2
0,499	5276480	4,75	7,60	5,9	9,5

Следует отметить, что при  $\nu = 0,49$  прогиб виброизолятора ВР-201 соответствует характеристикам, которые заявлены в технической документации.

На рис. 8 показаны графики зависимости разных видов осадок от коэффициента Пуассона.

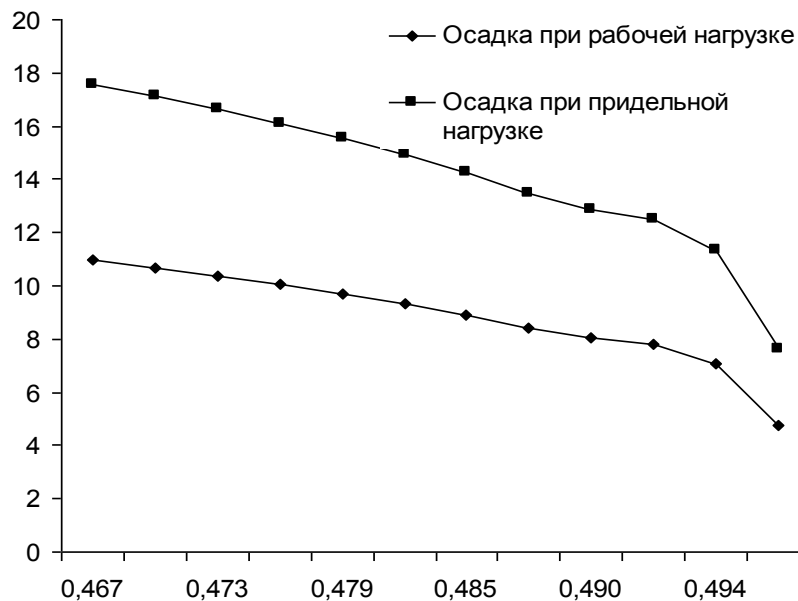


Рис.8. Графики зависимостей разных видов осадок от коэффициента Пуассона

Из представленных графиков можно заключить, что за время эксплуатации виброизолятора ВР-201, из-за износа материала осадка увеличивается более чем в два раза.

Для проверки эффективности работы рассматриваемой расчётной схемы сопоставили численные результаты расчётов нормальных напряжений в системе FORTU-FEM и MIRELA+ при различных вертикальных нагрузках (рис. 9).

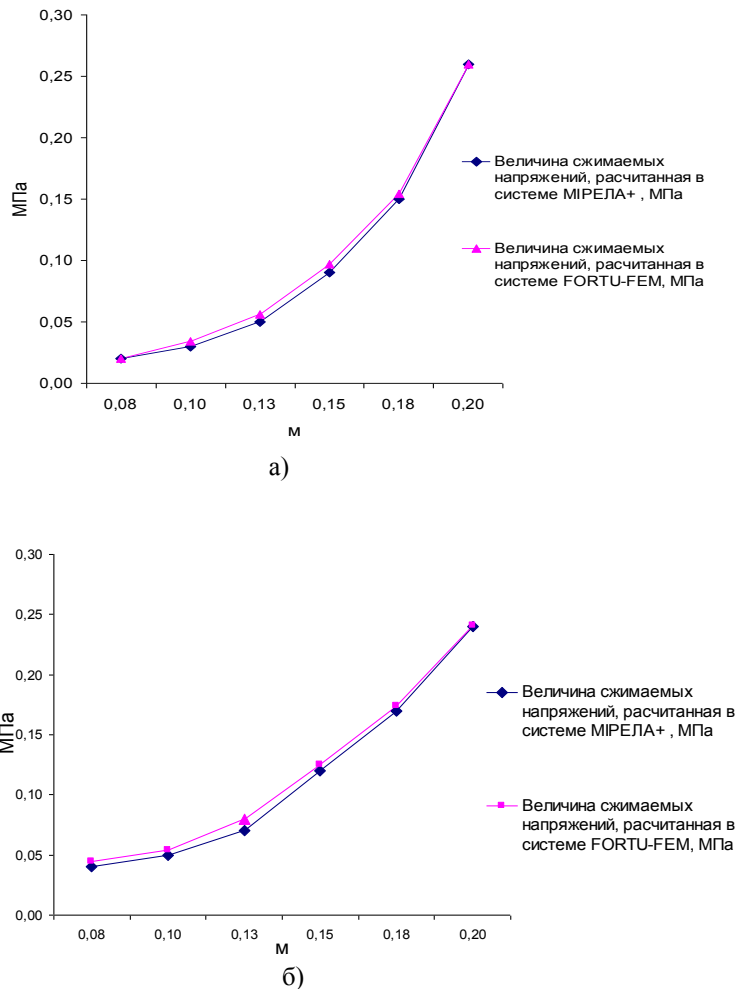


Рис. 9. Графики сравнения распределения нормальных напряжений в виброизоляторе ВР-201: а) при нагрузке 1,3 МПа, б) при нагрузке 0,79 МПа

Была выявлена хорошая согласованность данных.

## 8. Выводы и направления дальнейшего исследования

В статье представлены результаты, которые в соответствии с целью исследования в совокупности являются решением важной научно-технической проблемы: разработки универсальных систем автоматизации проектирования,

позволяющих инженеру- проектировщику самостоятельно выбирать схему расчёта конструкций из эластомеров, находящихся в напряжённо-деформированном состоянии. Для решения данной проблемы была проанализирована и охарактеризована моментная схема расчёта конечных элементов в механике. Это позволило внедрить разработанную модель в универсальную автоматизированную систему FORTU-FEM.

Точность и вероятность используемой схемы проверено на конкретном примере.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гоменюк С. И. Объектно-ориентированные модели и методы анализа механических процессов / С. И. Гоменюк. – Николаполь: Николапольская коммунальная типография, 2004. – 316 с.
2. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В. В. Киричевский. – К. : Наукова думка, 2002. – 655 с.
3. Vazhenov V. A., Sakharov A. S., Tsykhanovskii V. K., The Moment Finite-Element Scheme in Problems of Nonlinear Continuum Mechanics // *International Applied Mechanics*, Vol. 38, Issue 6, June 2002, P. 658-692.
4. Лаврик В.В. Инструментальная система FORTU-FEM: структура организации и перспективы дальнейшего развития / В. В. Лаврик // *Вестник Херсонского национального технического университета*. Вып. 3(39).– Херсон: ХНТУ.– 2010. – С. 244–251.
5. Lavrik V. et al. Development of the CAD system for designing non-standard constructions from elastomers / V. Lavrik et al // *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*. – Vol. 3, Issue 3, March 2014. – P. 10717– 10726.
6. Барабаш М.С., Артамонова А.Е. Методы организации обмена информацией между участниками процесса проектирования на основе ПК САПФИР / М.С. Барабаш, А.Е. Артамонова // *Сборник научных трудов «Перспективы развития программных комплексов для расчёта несущих зданий и сооружений»*. Курск: ЮЗГУ. – 2013. – С. 83– 90.
7. Michael N., A Unified analysis of three finite element methods for the Monge-Ampère equation // *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, Vol. 41, 2014, P. 262-288.
8. Miedzialowsk C., Kretowska J., Finite Element Analysis for the Modelling of Building Structures in Three Dimensional Schemes // *American Journal of Civil Engineering and Architecture*, Vol. 2, Issue 4, 2014, P. 143-148.
9. Сенченков И. К. Метод амплитудно-дифференциальной аппроксимации для расчёта динамических задач вязкоупругости / И. К. Сенченков // *Прикладная механика*. – 1982. – № 9. – С. 57–62.
10. Трелоар Л. Физика упругости каучука / Л. Трелоар. – М. : Иностран. литер., 1953. – 240 с.

УДК 004.052: 004.414.23

## Термодинамический подход к моделированию процесса роста надёжности ПС с учётом «вторичных дефектов»

В. О. Мищенко

*Харківській національний університет імені В. Н. Каразіна, Україна*

В статье на основе термодинамического подхода разработана концепция моделирования процессов роста надёжности программных систем, допускающая появление т.н. вторичных дефектов при исправлениях в системе. Отсутствие таких дефектов в процессе трактуется как свойство зрелости системы, которое означает завершение ею определённого фазового перехода. Обнаружение дефектов и появление новых в процессе исправлений могут воспроизводиться модельным генератором. Можно судить о точности существующих моделей надёжности, учитывающих вторичные дефекты, по их оценкам на основании статистики процесса имитации, подобной статистике реальных проектов.

**Ключевые слова:** надёжность программных систем, вторичные дефекты, концепция, термодинамика, фазовый переход, имитационная модель, статистика, верификация.

У статті на основі термодинамічного підходу розроблено концепцію моделювання процесів росту надійності програмних систем, яка допускає появу т.зв. вторинних дефектів при виправленнях в системі. Відсутність таких дефектів у процесі трактується як властивість зрілості системи, що означає завершення нею певного фазового переходу. Виявлення дефектів і поява нових в процесі виправлень можуть відтворюватися модельним генератором. Можна судити про точність існуючих моделей надійності, що враховують вторинні дефекти, за їхніми оцінками на підставі статистики процесу імітації, подібної статистиці реальних проектів на підставі статистики процесу імітації, подібної статистиці реальних проектів.

**Ключові слова:** надійність програмних систем, вторинні дефекти, концепція, термодинаміка, фазовий перехід, імітаційна модель, статистика, верифікація.

In this paper, the process of software system correction intended to make the system more reliable is considered and this process modeling concept, which allows emergence of so-called secondary defects in course of said correction, is developed based on the thermodynamic approach. The absence of such defects is interpreted as the property of system maturity, which means that certain phase transition is finished. Detection of defects and emergence of new ones in the process of system correction can be simulated with the help of some generator. One can make conclusions about the accuracy of existing probabilistic reliability models from the estimates of the number of secondary errors on the basis of simulation process statistics similar to the statistics of real projects.

**Key words:** the reliability of software systems, secondary defects, concept, thermodynamics, phase transitions, simulation model, statistics, verification.

### 1 Введение

Проблема адекватной оценки роста надёжности программных систем (ПС) в процессе систематических испытаний с возможным исправлением дефектов всегда вызывала повышенный интерес. Судя по всему, теория таких процессов нашла своё завершение (если не сказать, исчерпала себя) в рамках представлений о таком процессе, в котором новые дефекты не образуются, и который продолжается практически до исчерпания дефектов, первоначально имевшихся в ПС. Последнее время приобрели актуальность постановки задач, в

которых учитывается то обстоятельство, что исправление обнаруженных дефектов (ошибок) в сложной системе, которое повышает её надёжность, одновременно вносит в неё изменения, чреватые некоторым ослаблением этой надёжности. Для математических моделей, которые используют понятие остаточных дефектов (или ошибок), это, по сути, означает, что остаток вычитания из числа остаточных дефектов  $N(t)$  числа  $\delta N$  исправленных между моментами  $t$  и  $t+\Delta t$  дефектов может быть не равен  $N(t+\Delta t)$ . Если при моделировании процесса следят за динамикой остаточных дефектов, то в выражении для этой величины нужна добавка  $\delta_2 N$  - число вторичных дефектов:

$$N(t + \Delta t) = N(t) - \delta N + \delta_2 N. \quad (1)$$

Проблема в том, что наблюдается только динамика обнаруженных дефектов, но выделить среди них в статистике проектов вторичные дефекты сложно [1].

Наш концептуальный подход состоит в постулировании необходимости отражения в динамических моделях роста надёжности, хотя бы в идеализированной форме, *обстоятельств* ликвидации и воспроизводства дефектов. В связи с этим полезно следить за зрелостью ПС. При её отсутствии дефекты кода не всегда могут быть объективно отделены друг от друга по замеченным проявлениям дефектности. Тогда ликвидация какого-то числа таких проявлений не гарантирует уменьшения числа (нечёткого!) «оставшихся в системе» дефектов на ту же величину даже без новых ошибок. Переход системы в зрелое состояние, в процессе чего одни дефекты уже можно отделить от других, напоминает фазовые переходы в веществах. При этом надёжность, возрастающая вместе с уменьшением дефектности кода, относится к его смыслу, а не к характеристикам архитектуры или объёма. Эти характеристики в процессе исправления дефектов в приобретающей зрелость системе или не меняются вовсе или изменяются слабо. В этом смысле затраты интеллектуальной энергии происходят скрытно, она передаётся «тепловым способом». Речь может идти об интеллектуальном тепле, известном как метрика процесса разработки ПС [2].

## 2 Известные примеры моделирования эволюции качества ПС с учётом «вторичных дефектов»

В работе [3], нацеленной на инициацию дискуссии по вопросам надёжности ПО, отмечается недостаток новых концепций математического моделирования в терминах дефектов, в том числе, вторичных дефектов:

“Predictive models based on the study of the process of identifying defects allow to foresee of the development of this process over time, and to obtain estimated reliability of the program. ... However, as the experience shows, none of these models can claim to be a universal one, each model "serves" its class of software systems, boundaries between the classes remain very shaky.

If you pay attention to the essence of scientific publications on the theory of software reliability, we can see that in the last twenty years, no fundamentally new ideas in this area have been proposed. ... the attempts of mechanical introduction into the existing variable models, designed to take into account the secondary defects, were made. However, according to the authors [здесь в цитируемом тексте ссылка на работу [4]], it is practically impossible to introduce these variables into some models

and for some of them such complicated mathematical expressions are obtained, that their practical application becomes difficult.” [3, С.60].

В изложении собственной концепции будем отталкиваться от известных подходов к задаче моделирования с целью прогноза эволюции качества программных систем в процессе их отладки или испытаний с исправлением обнаруженных дефектов. Они предполагают доступность статистики обнаружения дефектов и поддержку режима их исправления, при котором дальнейшему тестированию подвергается исправленная по поводу найденного дефекта система. Вероятностные модели такого процесса, например, рассматриваемые или упоминаемые в монографии [1, С. 13-18, 115-124], хорошо известны. Недавние исследования [4-8] (отраженные в [1]) связаны с тем, что за счёт дополнительной информации (или гипотез) возможно уточнение этих моделей с привлечением понятия вторичных дефектов/ошибок. Каждая из работ этого направления оговаривает класс рассматриваемых программных систем и уточняет этап жизненного цикла, ЖЦ (например, подготовка к эксплуатации, опытная или начальная эксплуатация ИС). В результате классы систем и период применимости моделей не совпадают, но методы всех работ применимы к далеко не пустому общему множеству систем (не только программных!) при сопоставимых условиях процесса обнаружения-исправления дефектов. Далее будем условно говорить о «времени», в котором протекает этот процесс, хотя в каждом конкретном случае эта величина, часто дискретная, понимается по-своему: как число контрольных периодов процесса испытания системы, число транзакций, наработанных в ансамбле одинаковых систем и т.п.

**2.1** В работе [4] исследовалась принципиальная возможность учёта эффекта вторичных дефектов на основе существующих вероятностных моделей надёжности (ВМН) программных систем. Оказалось, что из 9 проанализированных моделей и семейств моделей только у 3-х такая перспектива определённо существует и может оказаться практически в реализации. Однако эти модели после их модификации широкого применения пока не нашли, поскольку математически невозможна однозначная оценка всех их параметров на основании полученных данных о динамике обнаружения дефектов [1]. Впрочем, при наличии оснований для принятия определённых значений некоторыми из параметров, остальные можно определить, включая наиболее интересный с рассматриваемой точки зрения – число обнаруженных дефектов, возникших уже в процессе исправления дефектов, т.е., вторичных дефектов.

**2.2** Подход [5] ориентирован на практическое извлечение информации о вторичных дефектах из опытных данных по динамике обнаружения дефектов при том, что эта динамика принимается приближенно имеющей, по крайней мере на каждом характерном этапе, постоянную скорость обнаружения дефектов при том, что они немедленно удаляются. «Во время исправления ошибок новые ошибки не вносятся. Это допущение позволяет создать идеальную модель на этапе эксплуатации УИС, на базе которой возможно построение реальной модели, в которой такое допущение снято» [5, С.207]. Такой шаг к более реалистичной модели был сделан [6] путём дополнения линейного дифференциального уравнения для интенсивности потока исключаемых

первичных дефектов уравнением для потока вносимых вторичных дефектов (подробнее в [1, С.47-58]). Траектории полученной таким образом модельной динамической системы можно рассматривать как возможные трендовые кривые для стохастических процессов, в том числе, при наличии вторичных дефектов.

**2.3** Простейший, можно сказать, прикидочный вариант метода оценки наличия и количества вторичных дефектов представлен в [7,8]. Рассматривается ситуация, отмеченная при работе с реальной учётной ИС, когда тренд для кумулятивного числа дефектов можно считать сформировавшимся на начальном этапе процесса (это проверяется сравнением графика изменения кумулятивного числа дефектов с построенной аппроксимирующей кривой экспоненциального закона). Тогда участок (а, более общим образом, нужно полагать, участки), где разность между трендовым прогнозом числа обнаруженных и сразу устранённых дефектов и фактическим их числом положительна, считается бесполезным для анализа (обнаружение дефектов тормозилось какими-то объективными причинами), а участок (участки), для которых эта разность отрицательна, напротив, считается несущим искомую информацию. Эта разность принимается за ожидаемое число внесенных вторичных дефектов, а сумма всех таких разностей – за общее число таких дефектов. Подобная оценка может оказаться слишком грубой, прежде всего потому, что отклонения от трендовой кривой в большинстве случаев носят случайный характер.

**2.4** В [9] близкий по идее метод имеет то принципиальное отличие, что учитываются только участки расхождения «тренда» с функцией дефектов на величину оценки, напрашивается сказать, своего математического ожидания. Эту величину, что бы она собой ни представляла, получают на основе правдоподобных предположений для каждого момента умножением квадратичного отклонения тренда от реальных данных по модулю (осреднённого по всей области функции дефектов) на величину обратную времени, прошедшему с начала процесса. Наконец, допускается та эвристика, что на заключительных этапах прогнозируемое число вторичных дефектов, отличное от нуля, игнорируется, если имеются соображения за то, что совершение ошибок при устранении найденных дефектов стало к данному моменту маловероятным.

**2.5** Другой усовершенствованный вариант оценки вторичных дефектов основывается на оценке коэффициентов линейной модели второго порядка динамики дефектов (в духе феноменологической термодинамики), о которой шла речь выше в пункте 2.2 [1, С.47]:

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= -A_1 f_1 - A_2 f_2 \\ \dot{f}_2 &= -A_2 f_1 - A_1 f_2 \end{aligned} \quad (1)$$

где  $f_1$  – количество дефектов выходного потока, которые *ещё* находятся в системе в данный момент ( $f_1(0) = F_0$  - число всех первичных дефектов);

( $-f_2$ ) – количество дефектов входного потока, возникших в процессе и *пока* находящихся в системе без шансов немедленного обнаружения ( $f_2(0) = 0$ ).

В этой модели величины, целочисленные в моменты их контроля, считаются интерполированными для всех промежуточных моментов с тем, чтобы иметь

гладкие функции времени. «Дефекты выходного потока» можно понимать как образно скажем, доступные для обнаружения в любой последующий момент. В начальный момент это все первичные дефекты. «Дефекты входного потока» - это возникшие вторичные, но ещё не «созревшие» для обнаружения дефекты. Смысл первого уравнения в том, что суммарный поток  $\dot{f}_1$  складывается из отрицательного потока (убыль за счёт обнаружения дефектов), пропорционального количеству оставшихся первичных и ранее созревших дефектов ( $-A_1 f_1$ ) и положительного потока созревших ( $A_2(-f_2)$ ), пропорционального числу незрелых. Смысл второго уравнения: суммарный поток ( $-\dot{f}_2$ ) складывается из положительного потока новых дефектов, пропорционального числу выходящих ( $A_2 f_1$ ), и отрицательного потока, связанного с созреванием, пропорционального числу незрелых ( $-A_1(-f_2)$ ).

Система (1) легко решается при указанных начальных условиях [1, С.49,52]:

$$f_1 = F_0 \cdot ch(A_2 t) \cdot \exp(-A_1 t), \quad f_2 = -F_0 \cdot sh(A_2 t) \cdot \exp(-A_1 t), \quad (2)$$

и для числа, скажем так, «остаточных» дефектов получается простое выражение:

$$f_{1,2} = f_1 + f_2 = F_0 \cdot \exp((A_2 - A_1)t). \quad (3)$$

Кумулятивное число обнаруженных дефектов согласно рассматриваемой модели

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \int_0^t A_1 f_1(\tau) \cdot d\tau = F_0 A_1 \int_0^t f_1(\tau) \cdot d\tau = \frac{F_0 A_1}{2} \left[ \frac{e^{(A_2 - A_1)t}}{A_2 - A_1} - \frac{e^{-(A_2 + A_1)t}}{A_2 + A_1} \right]_0^t = \\ &= \frac{F_0 A_1^2}{A_1^2 - A_2^2} - \frac{F_0 A_1}{2} \left( \frac{e^{A_2 t}}{A_1 - A_2} + \frac{e^{-A_2 t}}{A_1 + A_2} \right) e^{-A_1 t}. \quad (4) \end{aligned}$$

По известной функции кумулятивного числа фактически *обнаруженных* дефектов  $\mu(t)$  предлагается определённым методом последовательных приближений строить приближающую функцию  $\mu_1(t)$ , определённую выражением для кумулятивного числа обнаруженных дефектов согласно *модели*, что приводит к идентификации параметров  $A_1, F_0, A_2$  [1, С.92-94]. Критерием близости служит среднеквадратичное отклонение трендовой кривой  $\mu_1(t)$  от  $\mu(t)$ , данной в дискретном времени (т.е. даны  $\mu(t_1), \dots, \mu(t_n)$ ).

**2.6** На самом деле валидность вероятностных и термодинамических моделей надёжности существенно зависит от сценария диагностики и ликвидации дефектов, который реализуется в отношении данной ПС на каждом этапе процесса обнаружения-исправления дефектов [1]. Формализация и анализ таких сценариев помогают обоснованно формировать процедуры моделирования и прогноза дальнейшей эволюции характеристик ПС (пример имеем в [9,1]).

«Вторичные дефекты» рассмотренных ВМН представлены в них дополнительными параметрами, а методы оценки используют величины, которые *предположительно* связаны с реально вносимыми в ПО дефектами. Тем самым, мы имеем дело с *метриками* для оценок числа таких дефектов, а не



с реальной характеристикой числа вторичных дефектов. Верификация этих метрик (в смысле корреляции их значений с числом фактических дефектов) и, тем более, валидация, на основе доступной и общепринятой статистики реальных программных проектов пока не представляется реальной. Больше того, прямой учёт вторичных дефектов, даже, если бы его пытались налаживать, сам по себе затруднён по многим причинам. Всё это авторы описанных подходов учитывали: «Основной проблемой при развитии и реализации предложенного подхода (как и для количественной оценки надёжности ПС в целом) является получение репрезентативной информации о дефектах как первичных, так и вторичных ...» [4, С. 216]. Поэтому они шли, преимущественно, по пути косвенной верификации, понимаемой их полезность для уточнения существующих процедур оценки надёжности в динамике.

Актуальным является поиск новых перспективных путей построения математических моделей надёжности ПС с учётом вторичных дефектов, и, что представляется ещё более важным, практичного способа верификации процедур оценки характеристик надёжности таких моделей. Этому поиску посвящена данная работа.

### **3 Феноменологический и статистический подходы к термодинамике ПС при вторичных ошибках**

Наряду со статистикой дефектов и сценариями работы с ними, важен учёт особенностей разработки и проверки программ, в процессе которых и возникают дефекты. Это отмечают все исследователи. Однако в силу разнообразия и сложности механизмов этих процессов, их полный учёт, как и понимание относительной роль в конкретных проектах, пока что проблематичны.

Это подсказывает, что вместо многих деталей следовало бы, применяя *термодинамический подход*, отражать указанные механизмы с помощью макропараметров. Шаги в этом направлении вполне реальны.

Уже существующая *феноменологическая* термодинамическая модель процесса разработки ПС трактует его как эволюцию параметров взаимосвязанных исходных текстов модулей этой системы [10, раздел 4]. Время при этом удобно исключать, рассматривая вместо этого изменяющиеся объёмы разработки модулей, от которых *в зависимости от характера процесса* зависят трудность разработки (аналог давления в физике) и потенциальный объём (аналог температуры, - название параметра традиционное, хотя не во всех отношениях удачное). Эволюция параметров всех модулей продолжается, естественно, и в процессе их отладки, и в процессе испытаний и опытной эксплуатации. Установим, однако, два рубежа ЖЦ, связанных с обсуждавшимся во введении понятием зрелости ПС, как важным аспектом её надёжности.

Первый рубеж связан со стабилизацией интегральной метрики ПС – интеллектуального тепла [10,11]. График этой величины (разности между метриками спецификационной энергией и работы программирования системы [11]) демонстрирует в начале разработки колебания с большим размахом, амплитуда которых в какой-то момент резко сокращается. До этого в системе шли значительные архитектурные перестройки, изменения в интерфейсах и (или) включения или исключения больших объёмов кода. После этого рубежа происходит доработка сложившейся базовой версии. В непрерывном времени

этот рубеж, разумеется, был бы сильно размыт, но на практике речь идёт об оценке некоторого числа версий, относимых к дискретным моментам. Момент, начиная с которого размах колебаний графика интеллектуального тепла сокращается на порядок, определяется без труда, причём так, что в дальнейшем значения этой метрики чаще всего монотонно выходят на стационар. Смысл данного рубежа в том, что все проектные решения окончательно отработаны и реализованы, но ещё сохраняются последствия не проявивших себя случайных недосмотров, ошибки спецификаций, ошибки интерпретации спецификаций, последствия поздних изменений в требованиях заказчика (напр. [7, С.106-107]).

Второй рубеж соответствует прекращению заметных (т.е., хотя бы порядка нескольких %) флуктуаций потенциальных объёмов модулей и суммы их объёмов разработки. По смыслу это соответствует наступлению ситуации, когда в устранении дефектов данной системы накоплен большой опыт, а сохранившиеся дефекты объективно разделяются в артефактах проекта. В этих условиях шансы на то, что исправление дефекта породит новые ошибки или разблокирует другие скрытые дефекты, минимальны.

Эти рубежи зрелости интересны возможностью индикации признаков своего прохождения в реальном времени разработки проекта на основе статических метрик энергетического анализа программ. Они, по сути, определяют *период ЖЦ ПС*, для которого наиболее *актуален* учёт вторичных дефектов. Действительно, до наступления первого из рубежей моделировать эволюцию «дефектов в системе», «первичных» и «вторичных» дефектов, в том числе, с построением гладких зависимостей, нет смысла, поскольку такие изменения в системе, как например, удаление одних компонент и добавление других, меняют функцию количества дефектов скачкообразно и непредсказуемо. После прохождения второго рубежа новые вторичные дефекты не появляются, а возникшие раньше должны при моделировании динамики дефектов рассматриваться на этом интервале как первичные (чем оправдывается использование классических уравнений вероятностной теории надёжности). С общей точки зрения феноменологической термодинамики ПС, первый рубеж следует считать началом фазового перехода системы от фазы активной разработки к фазе доводки по надёжности, а второй рубеж – как завершение этого фазового перехода. Об аналогии с фазовыми переходами в материальных средах уместно говорить потому, что после второго рубежа термодинамическое и калорическое уравнения состояния модулей этой системы (точнее, модулей её СПС) [10,11], аналогичные уравнениям состояния газов, не могут описывать дальнейшую эволюцию надёжности. Действительно, интеллектуальное тепло при исправлении дефектов поступать в систему должно, и часто немало, но макроскопические параметры модулей при этом практически не изменяются.

Переходя собственно к моделированию процесса роста надёжности ПС за счёт исправления дефектов, мы должны обратиться к «микроскопическому» описанию процессов (*статистическая термодинамика*). К сожалению, на «микроуровне» коды программ и действия с ними при исправлениях настолько разнородны и уникальны, что использовать «закон больших чисел» и вывести уравнения макродинамики из принятых уравнений микродинамики (как в физике) не получится. Придётся идти обходным путём.

Приведём неформальные соображения. В этих рассуждениях под *вероятностной моделью надёжности* (ВМН) будем понимать вероятностную модель надёжности ПС, которая определяет некий закон динамики первично образованных дефектов, а предусматривать вторичные дефекты не обязана.

Всякая такая ВМН основывается на определённых допущениях, аксиомах. Из системы предположений данной ВМН выводится (математически или эмпирически) *способ оценки динамики* (СОД) выявления-ликвидации дефектов на интервале наблюдения, имея в виду в дальнейшем экстраполяцию с целью прогноза. Представим себе *генераторы* (математические описания вычислительных процедур), порождающие объекты, называемые «дефектами», и стохастический *процесс их обнаружения-ликвидации*, промежуточные итоги которого в конце каждого периода заданной длины сообщаются внешним наблюдателям для статистики. Данному СОД (не обязательно построенному по ВМН), сопоставим класс *согласованных с ним генераторов*, обладающих тем свойством, что применяя к статистике их процессов эту СОД можно получить точный в заранее выбранном смысле прогноз такой статистики на будущем (контрольном) интервале времени. В частности, для согласованности генератора с такими СОД, которые позволяют оценивать числа первоначальных дефектов  $D_0$  и вторичных дефектов  $S_T$ , обнаруженных к моменту  $T$ , будем требовать, достаточной точности оценок чисел  $D_0$  и  $S_T$ , наблюдаемых в порождённых генератором процессах. Для СОД классических ВМН очевидно, что классы согласованных генераторов не пусты (предположения ВМН, по сути, описывают процесс генерации). Если непустой класс генераторов факторизовать по отношению «сложнее», то в нём выделится подкласс минимальной сложности. Представителей таких классов будем называть *минимальными генераторами* данного СОД. Для ВМН это те генераторы, которые буквально реализуют их предположения. Примером согласованных генераторов являются ПС и реальные процессы их отладки/испытаний с чётким сценарием, если с выполняются предположения ВМН. Ясно, что такие генераторы не минимальны.

В чём смысл проведенного рассмотрения? Обсуждавшиеся выше СОД, учитывают вторичные дефекты, связанные с обобщением классических ВМН (пункты 2.1, 2.4), как, впрочем, и с иными соображениями (пункты 2.3-2.5). Они используют обобщения систем уравнений ВМН либо предположения о случайных отклонениях процессов от классических гладких трендов. Из нашего рассмотрения вытекает другая возможность: строить, по возможности, более согласованные с реальными процессами генераторы, не заботясь об их формальной согласованности с классическими ВМН.

**Определение 1.** Некоторую вероятностную модель надёжности назовём *естественной вероятностной моделью надёжности* (ЕВМН) программных систем, если она определяется параметризованным генератором, который допускает математическое описание в терминах случайных величин и воспроизводит «первичные» и «вторичные» дефекты.

*Собственный СОД* ЕВМН тривиален, поскольку генератор ЕВМН как раз и производит идеализированную статистику *всех* дефектов. Если описание такого генератора ЕВМН не может быть содержательно редуцировано, то этот

генератор является минимальным генератором (не обязательно единственным) собственной СОД ЕВМН. Самые простые ЕВМН имеют более сложные минимальные генераторы, чем классические ВМН (и подобные им) в аспекте явного механизма генерации «вторичных» дефектов. Если же генератор ЕВМН таков, что при частных и только частных, значениях своих параметров вырождается в генератор кокой-то ВМН, то он будет сложнее минимального генератора этой ВМН по всем аспектам.

Прикладное использование собственного СОД ЕВМН возможно на основе идентификации параметров генератора этой ЕВМН по известной статистике фактических дефектов ПС.

С учётом этого, плодотворное использование ЕВМН в моделировании процесса роста надёжности ПС с учётом «вторичных дефектов» может быть реализовано благодаря решению задач трёх типов:

- Отыскание эффективных методов идентификации параметров ЕВМН по известной статистике фактических дефектов и проверка точности предсказаний модели на данных, полученных при отладке (испытаниях или эксплуатации) реальных ПС;
- *Относительная верификация* или, как минимум, *оценка точности* СОД ВМН классического типа, с помощью данных, полученных в процессах генерации на основе ЕВМН с характерными параметрами (подразумевается верификация в смысле достаточной точности предсказаний *по отношению* к одной или множеству ЕВМН);
- *Верификация* СОД некоторой ВМН относительно ЕВМН, которая сама имеет точный СОД по отношению к какому-то классу *реальных* ПС.

В данной работе, посвященной выработке концепций, мы ограничимся простейшей постановкой вопроса: не приведут ли простейшие ЕВМН (которые, безусловно, представляют первоочередной интерес) к генерации в точности тех процессов, к которым с успехом применимы известные модели со вторичными дефектами, прежде всего, упоминавшиеся в пунктах 2.3, 2.4?

Что касается модели, п. 2.5, то для её разностного аналога легко строится минимальный генератор, близкий к ЕВМН, но нарушено условие определения 1: процесс не описан в терминах «первичных» и «вторичных» дефектов. Вместо этого фигурируют термины «выходящие» и «входящие» дефекты с иной семантикой. Можно ли в модели п. 2.5 оценить число  $S$  вторичных дефектов обнаруженных к моменту  $t$ ? Выше мы условно называли «входящие» в систему вторичными, но в выходной поток наряду с первичными дефектами попадают не «входящие» непосредственно, а «созревшие»! Как оценить их число:

$$\int_0^t A_1(-f_2)d\tau = \frac{F_0 A_1 A_2}{A_1^2 - A_2^2} - \frac{F_0 A_1}{2} \left( \frac{e^{-A_2 t}}{A_1 - A_2} - \frac{e^{-A_1 t}}{A_1 + A_2} \right) \quad \text{или}$$

$$\int_0^t A_2 f_1 d\tau = \frac{F_0 A_2 A_1}{A_1^2 - A_2^2} - \frac{F_0 A_2}{2} \left( \frac{e^{-A_2 t}}{A_1 - A_2} + \frac{e^{-A_1 t}}{A_1 + A_2} \right) \quad \text{или} \quad S = \int_0^t A_1(-f_2)d\tau ? \quad (5)$$

Эти величины при нетривиальных значениях параметров  $A_1, A_2$  не совпадают, исключая отдельные значения  $t$ . Средств, позволяющих отличить первичные

дефекты от вторичных на выходе, модель не предлагает. Не ясно и со вторичными дефектами среди остаточных. Если это  $f_2$ , то они неравноправны с первичными в плане обнаружения, да и помимо них при  $t > 0$  есть ещё бывшие дефекты входного потока, перешедшие в выходной... Поэтому модель, основанную на (1), имеет смысл рассмотреть в будущем отдельно и тщательно.

#### 4 Пример построения простой ЕВМН

Идея состоит в следующем. Введём  $m$ -мерное пространство возможных дефектов и выделим в нём некоторый объём, который в простейшем случае может быть кубом  $(0;l) \times (0;l) \times \dots \times (0;l)$ . Назовём его *объёмом системы*. Точки с целыми координатами будут множеством мест потенциальных дефектов. Заполним случайным образом некоторые из этих мест *первичными дефектами* (в простейшем случае число дефектов задано, а их вероятностное распределение равномерно по объёму). Дефект – это точка  $m$ -мерного пространства дефектов, причём для каждой координаты возможно  $l$  вариантов значений. Каждая координатная ось символизирует отдельный вид дефектов (или ошибок), а целая точка на ней – разновидность внутри вида. Если дефект имеет смешанный (при другой интерпретации – комплексный) характер, он, всё же, тяготеет к одному и только одному из видов, т.е. осей,  $1 \dots m$ , пространства возможных дефектов. По определению, расстояние от дефекта  $D = (D_i)_{i=1}^m$  до оси тяготения  $k$  должно быть минимальным (при справедливости этого условия для нескольких осей выбор из них оси тяготения случаен):

$$D \text{ тяготеет } \_k \_ \text{оси } k \Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m D_i^2 \xrightarrow{k} \min. \quad (6)$$

*Вероятность обнаружения* дефекта на каждом шаге по времени равна или (при усложнении модели) является функцией от числа наличных дефектов, делённого на число мест для дефектов (т.е. на выделенный объём пространства возможных дефектов). В реализованном простейшем варианте после обнаружения дефекта он должен быть удалён с уменьшением вероятности отыскания одного из оставшихся дефектов на следующем шаге времени. При этом с некоторой вероятностью может быть сделана ошибка, угрожающая новым дефектом  $S$  (пусть одним). В реальных условиях такая ошибка совершается в условиях, отличных от тех, при которых возникали первичные дефекты: возрос опыт разработчиков, усовершенствовались тесты и т.п. Поэтому «вторичная ошибка», ведущая к дефекту  $S$ , может быть обнаружена сразу. Это имитируется так.  $S$  не учитывается, если при просмотре обнаруженных дефектов  $D$  окажется, что

$$\exists D \exists k : (D \text{ тяготеет } \_k \_ \text{оси } k) \wedge (S \text{ тяготеет } \_k \_ \text{оси } k) \wedge (\forall i \neq k : S_i = D_i). \quad (7)$$

Иначе  $S$  включается в число дефектов, а вероятность обнаружения дефекта на следующем шаге увеличивается. Далее цикл поиска-ликвидации продолжается аналогично, причём после появления вторичных дефектов возможна реализация двух вариантов поиска, соответствующих различным сценариям тестирования. При первом (принятом в статье) вероятности обнаружения дефекта не зависит от

того, является ли он первичным или вторичным. При другом - зависит (основанием к такому предположению может быть то, что обычно можно назвать вероятные места локализации вторичных дефектов, если они есть, и очередной шаг тестирования начинается с тщательной проверки их появления). После определённого числа шагов по времени выводится статистика, доступная на практике, как и та, которая доступна лишь при имитационном моделировании (действительное число остаточных дефектов, первичных и вторичных).

Этому описанию очевидным образом соответствует математический генератор с параметрами, который включает случайные величины с известными распределениями. Поэтому условия определения 1 выполнены.

В численных экспериментах использовалась компьютерная реализация *Reliability\_Simulation* описанной ЕВМН на языке Ада. Такая реализация всегда является носителем не выбранной ЕВМН, а несколько иной модели того же типа. Например, элементом такого различия является то, что случайные величины замещаются псевдослучайными последовательностями значений по алгоритму, предусмотренному в системе программирования (в данном случае GNAT AdaCore) и настроенному (преобразованному) в процессе разработки программы путем того или иного использования компонент стандартной библиотеки системы программирования. Очевидно, что эти различия не играют в данном случае принципиальной роли.

### **5 Точность некоторых ВМН относительно простой ЕВМН**

Как пояснялось выше, целью проведения численных экспериментов данной работы было выяснить, нет ли признаков того, что ЕВМН, по крайней мере, в простейшем варианте, является методом воспроизводства процессов илиминации ошибок, который покрывается известными моделями. Эта проверка произведена в формате проверки точности некоторых известных ВМН, учитывающих вторичные ошибки. В контексте темы это – как раз точность прогноза динамики вторичных дефектов.

Оценим на примерах правдоподобность гипотезы о том, что на данных имитационного моделирования, напоминающих реальные, тестируемая ВМН предсказывает появление вторичных дефектов в количестве, не более, чем на 25% отличном от действительной величины (однократного процесса имитационного моделирования с помощью генератора *Reliability\_Simulation*).

В [7,8] приведены данные по динамике выявления ошибок ПО учётной ИС «Агрокомплекс»: 43 контрольных точек в концах периодов продолжительностью, в среднем, по 51 дню. Кумулятивные числа обнаруженных и исправленных дефектов составляли соответственно: 72, 133, 156, 176, 226, ... 578, 580, 583, 584, 585. Просматривая результаты имитации процесса обнаружения дефектов при разных параметрах, мы обратили внимание на следующий вариант - виртуальный проект 5451. При  $m = 4$ ,  $l = 5$  и вероятности вторичной ошибки  $p = 0.2$  вводятся 34 контрольные точки периодов, содержащих по 79 шагов процесса (считайте, «дней»). Получен ряд кумулятивных чисел найденных ошибок: 73, 134, 186, 234, 285, ... 614, 617, 618, 620, 620. На 43-х периодах (при числе шагов 2686 против 2191 в 34 периодах) обнаруживается лишь немногим больше дефектов, а в целом данные имитационного моделирования вполне напоминают статистику реального

процесса. В табл. 1 помещены полные итоги генерации дефектов для этого варианта, включая «секретную» статистику вторичных и остаточных дефектов.

Таблица 1. Итоги генерации процесса обнаружения дефектов - проект 5451.

№ периода	Всего дефектов	В этом периоде	Всего первичных	Всего вторичных	Остаточных дефектов	Из них вторичных
1	73	73	72	1	538	10
2	134	61	133	1	479	12
3	186	52	185	1	429	14
4	236	50	234	2	382	16
5	285	49	281	4	337	18
6	317	32	312	5	307	19
7	355	38	348	7	270	18
8	379	24	370	9	247	17
9	406	27	395	11	221	16
10	431	25	416	15	196	12
11	452	21	437	15	175	12
12	470	18	454	16	157	11
13	490	20	471	19	138	9
14	502	12	483	19	126	9
15	518	16	498	20	110	8
16	530	12	510	20	98	8
17	540	10	520	20	88	8
18	558	18	536	22	70	6
19	568	10	544	24	60	4
20	576	8	551	25	52	3
21	584	8	558	26	44	2
22	589	5	563	26	39	2
23	591	2	565	26	37	2
24	595	4	568	27	33	1
25	598	3	571	27	30	1
26	603	5	576	27	25	1
27	609	6	581	28	19	0
28	612	3	584	28	15	0
30	614	1	586	28	14	0
31	617	3	589	28	11	0
32	618	1	590	28	10	0
33	620	2	592	28	8	0
34	620	0	592	28	8	0

Для процесса, представленного табл. 1, нами в соответствии с [5,7,1] рассчитывался тренд экспоненциального закона роста надёжности:

$$q(t) = R_0(1 - e^{-ht}), \quad (8)$$

где  $R_0$  – параметр, имеющий смысл общего числа обнаруженных дефектов при неограниченном времени их поиска при условии точного следования процесса своему тренду;

$h$  – параметр, который рекомендуется находить первым, используя, возможно, в качестве приближения для  $R_0$  общее число дефектов, обнаруженных на момент окончания процесса;

$t$  – «время», под которым в данном случае понимается номер периода.

Элементарная приближенная оценка [7; 1, С. 91-92] привела к значению  $h = h(1) = -0.1851$ , а на основе оптимизационного подхода к аппроксимации мы получили  $h = h(2) = -0.1111$ . Значения  $R_0$  в соответствии с [7; 1, С. 92] уточнялись локальной подгонкой (для выполнения равенства (1)) с подстановкой туда экспериментальных значений кумулятивных чисел дефектов вместо  $q(t)$  для точек  $t_i$  ( $q(t) = q(t_i) = q_i$ ) и последующим усреднением. Получились такие оценки:  $R_{0(1)} = 552.9$  и  $R_{0(2)} = 645.4$ . В первом случае получим оценку 424 вторичных ошибок (?), а во втором **39**. Если же действовать по плану [8] и воспользоваться аппроксимацией кумулятивной кривой методом наименьших квадратов (МНК), подбирая «тип тренда» по качеству этой аппроксимации, то аппроксимирующая зависимость будет такой:

$$a(t) = 780.6 \cdot (1.0 - t^{0.8711} \cdot e^{-0.03015t}) \quad (9)$$

По ней прогноз вторичных ошибок составил **96**.

К данным табл. 1 нами был также применён метод работы [9; 1, С. 132]. Число обнаруженных дефектов хорошо приближается зависимостью

$$D(t) = 771.00 \cdot t^{0.0088} \cdot e^{-0.1185t} \quad (10)$$

(против альтернатив с «чистыми» степенями или экспонентами). Вот предсказанные этим методом числа обнаруженных вторичных дефектов по 34-рём периодам моделирования:

$$3 + 0 + 1 + 0 + 4 + 6 + 2 + 6 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 2 + 1 + 0 + 0 + \\ + 8 + 0 + 0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 0 + 1 + 3 + 0 + 1 + 6 + 1 + 0 + 1 + 1 = \mathbf{52}. \quad (11)$$

Если подключить упомянутую в пункте 2.5 эвристику, то концовку этого ряда можно было бы считать такой: ... + 3 + 0 + 1 + **1** + 1 + 0 + **0** + **0** = **45**. Интересно было расширить статистическую базу, продолжив процесс имитации ещё на 8 периодов (отметим, что к 40-му периоду вообще все моделируемые дефекты, вторичные и первичные, были ликвидированы). Тогда метод предсказывает 49 вторичных дефектов, но после эвристической правки на отрезке последних 5 периодов это число можно сократить только до 43.

По табл. 1 в процессе имитации последний **28** вторичный дефект в «действительности» выявляется на 26 периоде, и больше они не образуются. Оценки всех рассмотренных методов показали на данном примере завышение числа вторичных дефектов (не менее, чем на 30%).

В литературе по обсуждаемой теме неоднократно использовались данные по динамике выявления ошибок ПО учётной ИС платежей населения за природный газ малого государственного предприятия «Лайф» г Измаила [5,9,1]: 12 контрольных точек, соответствующих 12 месяцам эксплуатации при одинаковом примерно (по 12 тыс.) числе «транзакций» в месяц [5]. Числа обнаруженных и исправленных ошибок составляли: 13, 11, 8, 7, 6, 5, 4, 6, 3, 2, 1, 1 (всего 67 дефектов). Мы выбрали близкий вариант генерации, в котором обнаруживается 65 дефектов. Это виртуальный «проект 1060»:  $m = 3$ ,  $l = 6$ , вероятность вторичной ошибки  $p = 0.225$ , 12 контрольных точек (в периодах бралось всего по 53 шага процесса, поскольку периоды, имеющие десятки тыс. шагов при 5-6



обнаруженных дефектах, имитировать не практично). Итоги однократного имитационного моделирования для этого варианта помещены в табл. 2.

Таблица 2. Итоги генерации процесса обнаружения дефектов - проект 1060.

№ периода	Всего дефектов	В этом периоде	Всего первичных	Всего вторичных	Остаточных дефектов	Из них вторичных
1	17	17	17	0	53	4
2	32	15	30	2	38	2
3	40	8	36	4	31	1
4	43	3	39	4	29	2
5	47	4	43	4	25	2
6	49	2	44	5	23	1
7	53	4	48	5	21	3
8	56	3	50	6	18	2
9	59	3	53	6	15	2
10	62	3	55	7	12	1
11	63	1	56	7	11	1
12	65	2	57	8	9	0

К этому процессу мы применяли те же СОД аналогично предыдущему, и поэтому ограничимся кратким сообщением по итогам. По методам [7,8] подбор трендового закона вида (8) и «МНК» применительно к кумулятивным числам дали оценки: **22** и **19** вторичных дефектов соответственно.

Применение метода [9; 1, С. 132] привело к таким результатам: закон убывания обнаруженных дефектов - степенной с показателем  $-0,8024$ , оценка числа вторичных дефектов – **4** (рис. 1), причём, начиная с 7-го периода данный метод их не обнаруживает (в «действительности» они были, табл. 2).

"Время"	Дефекты	Погрешн.аппроксим.	"Мат.ож."	Инд-тор	Втор.ош.		
1	18	-1,35E+00	1,35	12	2,286736	-0,93674	0
2	16	4,90E+00	4,9	11	2,096174	2,803826	3
3	9	9,86E-01	0,986	10	1,905613	-0,91961	0
4	4	-2,36E+00	2,36	9	1,715052	0,644948	1
5	5	-3,19E-01	0,319	8	1,52449	-1,20549	0
6	3	-1,60E+00	1,6	7	1,333929	0,266071	0
7	5	9,40E-01	0,94	6	1,143368	-0,20337	0
8	4	3,52E-01	0,352	5	0,952807	-0,60081	0
9	4	6,81E-01	0,681	4	0,762245	-0,08125	0
10	4	9,50E-01	0,95	3	0,571684	0,378316	0
11	2	-8,25E-01	0,825	2	0,381123	0,443877	0
12	3	3,65E-01	0,365	1	0,190561	0,174439	0
Сандарт=	5,247655					Всего :	4

Рис.1.2 Расчёт оценки числа обнаруженных вторичных дефектов для проекта 1060

Согласно табл. 2 среди обнаруженных на 12 периодах моделируемого процесса дефектов присутствовало **8** вторичных. Как видим, оценки всех применённых методов отклоняются от виртуальной «действительностью» не менее, чем на 50%.

Можно сделать такой общий вывод. Гипотеза о том, что простейшие ЕВМН не приносят ничего нового в вероятностное моделирование надёжности программных систем по сравнению с хорошо известными методами оценки числа вторичных дефектов, должна быть отвергнута ввиду контрпримеров. Действительно, хотя генерируемые зависимости числа дефектов от «времени» демонстрируют близость в смысле МНК к традиционным экспоненциальным и степенным зависимостям аналогично реальным процессам, число вторичных дефектов в сгенерированных по ЕВМН примерах, оценивалось рассмотренными известными СОД с точностью, не достигавшей даже 25%.

## **6 Заключение**

В данной работе сформулирована и апробирована концепция нового способа моделирования процессов обнаружения-исправления дефектов программных систем с учётом вторичных дефектов с помощью генераторов. Прежде всего, этот путь может быть использован для верификации существующих моделей и основанных на них методов прогноза. Основанный на имитации процесса обнаружения-исправления, он, в отличие от статистики реальных проектов, позволяет иметь информацию об «истинном» числе вторичных дефектов, равно как и об остаточных дефектах.

Уже эксперименты с простейшим вариантом представителя ЕВМН показали, что по доступной извне системы статистике её дефектов вероятностные модели надёжности, предполагающие объективную значимость трендов, могут не оценить число вторичных дефектов с приемлемой точностью. Однако все СОД классических ВМН, если разобраться, имеют резерв в виде тех или иных параметров (констант, вспомогательных методов и т.п.), которые можно настраивать для оценки процессов тех или иных классов, если доступна статистика *многих* проектов данного класса. Как правило, она недоступна, тогда как имитационное моделирование доступно всегда. При этом даже в простейшей версии хватает собственных параметров настройки для воспроизводства разных по характеру процессов обнаружения и исправления дефектов. В этом состоит практическое значение данной работы.

В дальнейшем требует исследования точность известных моделей, но уже не с точки зрения отдельных примеров их несоответствия, а с точки зрения средней точности с обязательной оценкой разброса. Другое направление дальнейших исследований – совершенствование используемых ЕВМН. В частности, их потенциал состоит в том, что, в отличие от существующих ВМН, они способны отражать влияние на динамику повышения надёжности ПС в терминах уменьшения числа дефектов особенностей архитектуры этих систем. Это направление усовершенствования ВМН с точки зрения появления вторичных дефектов, насколько известно, ещё не исследовалось.

## ЛИТЕРАТУРА

1. CASE-оценка критических программных систем. Т. 2. Надежность [Монография] / Одарущенко О. Н., Харченко В. С., Маевский Д. А. и др. – Под ред. Харченко В. С. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т и м. Н. Е. Жуковского “ХАИ”, 2012. – 292 с.
2. Мищенко В.О. Термодинамический подход к моделированию процесса программирования / В. О. Мищенко // Моделирование и программное обеспечение систем и технологий. Часть 1. Математическое моделирование физических процессов и технических систем. – научно-методический сб. – Харьков, 2014. – С. 209-260.
3. Maevsky D. A. Software reliability. what is it? / Dmitry A. Maevsky, Igor A. Ushakov, Ludmila N. Shapa // RT&A # 04 (31) (Vol.8) 2013, December. – P. 60-65.
4. Одарущенко О. Н. Учет вторичных дефектов в моделях надежности программных средств / О. Н. Одарущенко, А. А. Руденко, В. С. Харченко // Математичні машини і системи, 2010, № 1. – С. 205-217.
5. Антощук С. Г. Прогнозирование количества ошибок на этапе эксплуатации адаптируемых учетных информационных систем / С. Г. Антощук, Д. А. Маевский, С. А. Яремчук // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2010. – № 6 (47). – С. 204-210.
6. Маевський Д. А. Влияние вторичных дефектов на надежность динамических информационных систем / Д. А. Маевский // Вісник НТУ “ХПІ». – 2012. – №50 (956). – С. 54-58.
7. Маевський Д. А. Структурна динаміка програмних систем і прогнозування їх надійності при наявності вторинних дефектів / Д. А. Маевский // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2010. – № 3 (44). – С. 103-109.
8. Маевский Д. А. Использование теории временных рядов для выделения вторичных ошибок на этапе тестирования программного обеспечения / Д. А. Маевский, О. П. Жеков // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2011. – № 2 (16). – С. 82-85.
9. Одарущенко О. Н. Метод оценивания надежности программных средств с учетом вторичных дефектов / О. Н. Одарущенко, А. А. Руденко, В. С. Харченко // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2012. – № 7 (59). – С. 294-300.
10. Мищенко В. О. CASE–оценка критических программных систем. Том 1. Оценка качества [Монография] / В. О. Мищенко, О. В. Поморова, Т. А. Говорущенко ; под ред. Харченко В. С. – Х. : Нац. аэрокосмический ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2012. – 201 с.
11. Мищенко В. О. Энергетический анализ программного обеспечения с примерами реализации для Ада–программ / В. О. Мищенко Х. : ХНУ имени В.Н. Каразина, 2007. – 129 с.

УДК 519.64, 539.3

## Моделирование дифракции $SH$ -волн на неоднородностях методами сингулярных интегральных уравнений

А. М. Назаренко

*Сумской государственной университет, Украина*

Методами дискретных особенностей и механических квадратур численного решения сингулярных интегральных уравнений исследуются задачи дифракции волн сдвига на системе замкнутых неоднородностей в полупространстве. Для получения достаточной точности привлекаются высокоэффективные алгоритмы компьютерного моделирования. Эффективность методов численной реализации интегральных уравнений проверяется на примере дифракции гармонических  $SH$ -волн на системе полостей и включений эллиптического поперечного сечения.

**Ключевые слова:** сингулярные интегральные уравнения, системы неоднородностей, численная реализация, точность вычислений, высокоэффективные алгоритмы.

Методами дискретних особливостей і механічних квадратур чисельного розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь досліджуються задачі дифракції хвиль зсуву на системі замкнутих неоднорідностей у півпросторі. Для отримання достатньої точності залучаються високоефективні алгоритми комп'ютерного моделювання. Ефективність методів чисельної реалізації інтегральних рівнянь перевіряється на прикладі дифракції гармонічних  $SH$ -хвиль на системі порожнин та включень еліптичного поперечного перерізу.

**Ключові слова:** сингулярні інтегральні рівняння, системи неоднорідностей, чисельна реалізація, точність обчислень, високоефективні алгоритми.

The problem of diffraction of shear waves in the closed system of irregularities in the half-space is studied by the method of discrete irregularities and mechanical quadrature for numerical solution of singular integral equations. Computer simulation is involved to achieve sufficiently high algorithm accuracy. Effectiveness of numerical implementation of these methods is checked by solving the example of integral equations for the case of harmonic SH-waves diffraction against the system of cavities and inclusions in elliptical cross-section.

**Key words:** singular integral equations of irregularities, numerical implementation, the calculation accuracy, highly efficient algorithms.

### 1. Введение

Для исследования обратных задач математической физики, к которым сводится управление механическими характеристиками динамических систем с усложненными свойствами, необходимо, как правило, строить трудоемкие аналитические процедуры и выполнять ресурсоемкие вычислительные алгоритмы. К тому же, при определении, например, оптимальных геометрических характеристик системы неоднородностей в неограниченных и ограниченных средах при воздействии стационарных динамических нагрузок так, чтобы максимальные напряжения были не выше заданных, краевая задача будет некорректно поставленной.

Однако может быть построена компьютерная модель решения значительного числа прямых задач. И указанный класс задач может быть оценочно исследован численно путем прямого моделирования поведения таких систем. Тогда задачи управления, а также идентификации геометрических или волновых

характеристик могут быть исследованы приближенно методом интерполяции. При этом, если результаты решения прямых задач будут выполнены с хорошей точностью, достоверность интерполирования будет вполне удовлетворительной. Тем более, что получаемые даже начальные оценки управления таких малоисследованных систем позволят избежать разрушений конструкций и значительных затрат.

Среди аналитических методов решения прямых задач теории дифракции в случае произвольной формы  $u$  отражающих неоднородностей наиболее применимым для разработки кластерных алгоритмов является метод интегральных уравнений [1-3]. Важным преимуществом этого метода является сокращение числа пространственных переменных. В связи с тем, что моделирование динамических взаимодействий упругих волн с системой неоднородностей требует привлечения больших объемов вычислений и значительных ресурсов цифровой памяти, особое значение приобретают различные эффективные численные методы [4, 5] и высокоэффективные алгоритмы компьютерного моделирования [6, 7]. Тем более, что такие задачи являются все еще малоисследованными.

В настоящей работе исследуются двумерные задачи дифракции волн сдвига (SH-волны) на системе замкнутых неоднородностей различного типа. Краевые задачи сводятся к системам сингулярных интегральных уравнений первого рода и уравнений Фредгольма второго рода. Численная реализация сингулярных интегральных уравнений осуществляется методами дискретных особенностей [4, 8] и механических квадратур [2, 5]. С помощью компьютерного моделирования сравнивается эффективность этих методов и рассчитывается напряженное состояние на контурах включений различного типа и полостей с привлечением высокоэффективных алгоритмов.

## 2. Постановка задачи

Под продольным сдвигом (или антиплоской деформацией) понимают напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела, нагруженного по боковой поверхности усилиями, направленными и равномерно распределенными вдоль образующей. В предположении, что ось цилиндра направлена вдоль оси  $Ox_3$ , отличными от нуля являются две компоненты тензора напряжений  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{23}$  и перемещение  $u_3(x_1, x_2, t)$ , причем [9]

$$\Delta u_3 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu} f, \quad \tau_{13} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \tau_{23} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность,  $\mu$  – модуль сдвига среды,  $f$  – объемная сила,  $t$  – время,  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Рассмотрим упругое полупространство  $x_2 \geq 0$ , содержащее систему бесконечно длинных вдоль оси  $Ox_3$  однородных цилиндров, поперечные сечения которых ограничены замкнутыми контурами (без общих точек)  $L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) типа Ляпунова. Пусть  $L$  – совокупность этих контуров и

положительное направление выбрано так, что при движении вдоль  $L$  область  $D_1$  (матрица) остается слева (рис. 1).

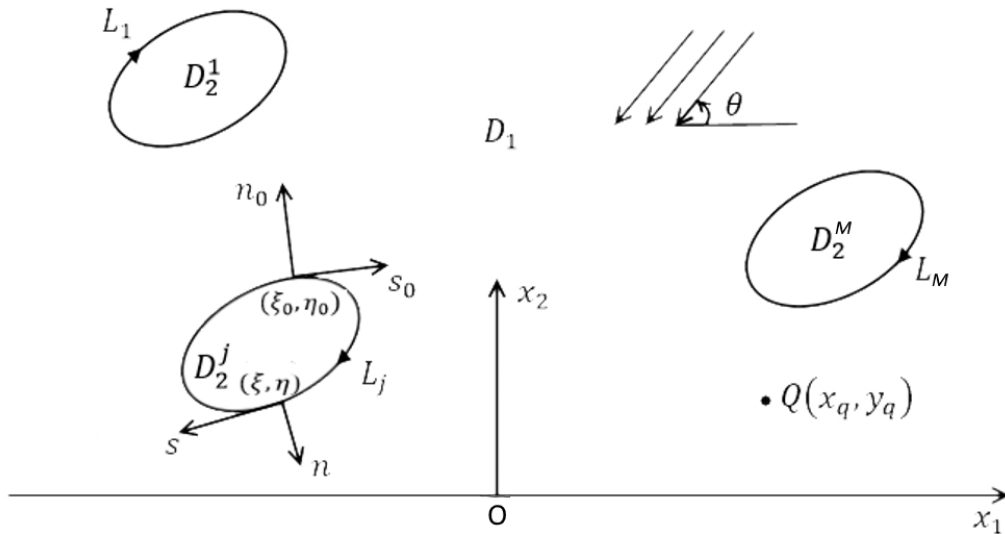


Рис. 1. Система неоднородностей в полупространстве

Будем считать, что внутренности цилиндров (область  $D_2$ ) представляют собой полости, неподвижные, жесткие (впаянные в полупространство) или упругие включения. Граница полупространства  $x_2 = 0$  предполагается заземленной ( $A=1$ ) или свободной от сил ( $A=-1$ ). Источники возбуждающего волнового поля полагаем заданными вне неоднородностей, т.е. в области  $D_1$ . В качестве такого источника может быть излучающаяся из бесконечности гармоническая волна сдвига, нормаль, к фронту которой составляет угол  $\theta$  с осью  $Ox_1$  или сосредоточенный в точке  $Q(x_q, y_q)$  гармонический источник. В частности, источник может быть расположен на свободной от сил границе полупространства ( $y_q = 0$ ).

Предполагаем, что зависимость от времени всех величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние, выражается множителем  $e^{-i\omega t}$  ( $\omega$  – частота колебаний,  $i^2 = -1$ ). Тогда амплитуды падающей  $W_0$  и отраженной от границы полупространства  $V_0$  волн представим в виде:

$$W_0 = \tau e^{-i\gamma_1(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)}, \quad V_0 = \tau e^{-i\gamma_1(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)}, \quad \tau = \text{const} \quad (2)$$

в случае набегающей из бесконечности волны сдвига ( $NV = 1$ ) и

$$W_0 = -\frac{\tau}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_1 r_q), \quad V_0 = -\frac{\tau}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_1 r_q^*), \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad (3)$$

$$r_q = |z - z_q|, \quad r_q^* = |z - \bar{z}_q|, \quad z = x_1 + ix_2, \quad z_q = x_q + iy_q,$$

если в матрице в точке  $Q(x_q, y_q)$  действует сосредоточенный источник ( $NV = 2$ ).

В результате взаимодействия волн  $W_0$  и  $V_0$  с цилиндрами в области  $D_1$  возникает рассеянное волновое поле  $W_1$ . Общее поле перемещений в матрице запишем в виде

$$W = W_1 + V_0, \quad V_0 = W_0 - AV_0, \quad (x_1, x_2) \in D_1. \quad (4)$$

Если  $D_2$  – совокупность упругих включений, то для проникающего внутрь цилиндров волнового поля положим  $W = W_2$ . Из волнового уравнения (1) вытекает, что амплитуды перемещений  $W_1$  и  $W_2$  в областях  $D_1$  и  $D_2$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta W_k + \gamma_k^2 W_k = 0, \quad \gamma_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad c_k = \sqrt{\frac{\mu_k}{\rho_k}}, \quad (5)$$

где  $\rho_k$  и  $\mu_k$  – плотность и модуль сдвига матрицы ( $k=1$ ) и упругих включений ( $k=2$ ),  $c_k$  – скорость волны сдвига в области  $D_k$ .

Сформулируем теперь граничные условия на контурах неоднородностей.

1. Если  $D_2$  – совокупность упругих включений, то на контурах  $L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) будем требовать выполнения условий сопряжения, вытекающих из непрерывности амплитуд перемещений и сдвиговых напряжений на границе раздела двух сред. В этом случае граничные условия на  $L$  таковы ( $n_0$  – положительная нормаль к  $L$ ):

$$W_2 = W_1 + V_0, \quad \mu_2 \frac{\partial W_2}{\partial n_0} = \mu_1 \frac{\partial}{\partial n_0} (W_1 + V_0). \quad (6)$$

Соотношение (6) следует понимать как равенство граничных значений соответствующих величин при стремлении точки наблюдения к  $L$  из области  $D_1$  или  $D_2$ .

2. В случае, когда  $D_2$  – совокупность неподвижных включений, на  $L$  имеем

$$W_1 + V_0 = 0. \quad (7)$$

3. Если цилиндр  $D_2^j$  перемещается как абсолютно жесткое тело, то на контуре  $L_j$  должно быть:

$$W_1 + V_0 = B_j, \quad (8)$$

где  $B_j$  – неизвестная комплексная постоянная ( $j = \overline{1, M}$ ).

Дополнительные условия, необходимые для определения неизвестной постоянной  $B_j$  вытекают из закона Ньютона, описывающего движение  $j$ -го включения как абсолютно жесткого тела. Уравнение движения включения  $D_2^j$  приобретает вид

$$\mu_1 \int_{L_j} \frac{\partial}{\partial n_0} (W_1 + V_0) ds_0 = -\rho_e S_e^j \omega^2 B_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (9)$$

Здесь  $\rho_e$  – плотность,  $S_e^j$  – площадь  $j$ -го включения.

4. В случае, когда  $D_2$  – совокупность полостей, границы цилиндров свободны от сил. Граничное условие на  $L$  имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial n_0} (W_1 + V_0) = 0. \quad (10)$$

Отметим также, что на бесконечности рассеянное цилиндрами волновое поле  $W_1$  должно удовлетворять условиям излучения типа Зоммерфельда [2]. На границе полупространства  $x_2 = 0$  должны выполняться условия:

$$W_1 = 0, \text{ если граница } x_2 = 0 \text{ заземлена } (A=1);$$

$$\partial W_1 / \partial x_2 = 0, \text{ если граница } x_2 = 0 \text{ свободна от сил } (A=-1).$$

Далее будем решать задачу (6). Другие краевые задачи следуют из нее как частные случаи.

### 3. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям

1. Представим функции  $W_1$  и  $W_2$ , характеризующие дифрагированные волновые поля перемещений в областях  $D_1$  и  $D_2$ , в виде потенциалов типа простого слоя:

$$W_k(x_1, x_2) = \int_L p_k(s) G_k(x_1, x_2, \xi, \eta) ds, \quad k = 1, 2, \quad (11)$$

$$G_1 = \frac{1}{4i} (H_0^{(1)}(\gamma_1 r) - A H_0^{(1)}(\gamma_1 r_1)), \quad G_2 = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_2 r),$$

$$r = |z - \zeta|, \quad r_1 = |z - \bar{\zeta}|, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta, \quad \zeta \in L,$$

где  $H_m^{(1)}(x)$  – функция Ханкеля первого рода  $m$ -го порядка.

Представление (11) удовлетворяет уравнению Гельмгольца (5) в области  $D_k$  и условиям на границе полупространства  $x_2 = 0$  при соответствующем выборе параметра  $A$  (значение  $A=0$  отвечает случаю неограниченного пространства). Кроме того, оно обеспечивает выполнение условий излучения на бесконечности.



Используем интегральное представление (11) для сведения краевой задачи (6) к интегральным уравнениям. Пусть параметрическое уравнение контура  $L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) имеет вид

$$\xi = \xi(\beta), \eta = \eta(\beta), \zeta = \xi + i\eta = \zeta(\beta), \zeta(\beta + 2\pi) = \zeta(\beta), 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (12)$$

Непосредственное удовлетворение первого из граничных условий (6) приводит к  $M$  интегральным уравнениям с логарифмическими ядрами (суммирование по  $k = 1, 2$ ):

$$(-1)^{k-1} \left( \frac{\delta_{lj}}{2\pi} \int_L p_k(\beta) \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0^j}{2} \right| d\beta + \int_L p_k(\beta) K_k(\beta_0^j, \beta) d\beta \right) = -V_0(\beta_0^j), j = \overline{1, M}, \quad (13)$$

$$K_k = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_k r_0) - \frac{\delta_{lj}}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0^j}{2} \right| - A \delta_{lk} \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_k r_{10}), p_k(\beta) = p_k(s(\beta))s'(\beta),$$

$$\zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}, \bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta} = r_{10} e^{i\alpha_{10}}, \zeta_0 = \zeta(\beta_0^j) \in L_j, \zeta \in L_l, l = \overline{1, M}.$$

Здесь  $\delta_{lj}$  и  $\delta_{lk}$  – символы Кронекера; интегрирование проводится по  $L$  – совокупности контуров  $L_l$  ( $l = \overline{1, M}$ ); логарифмические ядра возникают в том случае, если контур  $L_l$  совпадает с контуром  $L_j$ , т.е. когда  $l = j$  (при  $\beta = \beta^j$  символ Кронекера  $\delta_{lj}$  становится равным единице).

С целью получения сингулярных интегральных уравнений, схема численной реализации которых более эффективна, продифференцируем первое граничное условие (6) по дуговой координате  $s_0 \in L_j$ . Осуществляя в модифицированном граничном условии предельный переход при  $z \rightarrow \zeta_0 \in L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) с привлечением формул Сохоцкого-Племеля [10] для вычисления предельных значений интегралов типа Коши, аналогично [11], приходим к сингулярным интегральным уравнениям 1-го рода. Удовлетворение второго из граничных условий (6) приводит к  $M$  уравнениям Фредгольма второго рода. Искомая система  $2M$  интегральных уравнений имеет вид (суммирование по  $k = 1, 2$ ):

$$\int_L p_k(\beta) B_k(\beta_0^j, \beta) d\beta = N(\beta_0^j), j = \overline{1, M}, \quad (14)$$

$$\frac{\mu_k}{2} p_k(\beta_0^j) + \int_L p_k(\beta) C_k(\beta_0^j, \beta) d\beta = T(\beta_0^j),$$

$$\begin{pmatrix} B_k \\ \frac{1}{\mu_k} C_k \end{pmatrix} = (-1)^{k-1} \frac{i\gamma_k}{4} \left[ \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 - \alpha_0) \\ -\sin(\varphi_0 - \alpha_0) \end{pmatrix} H_1^{(1)}(\gamma_k r_0) - A \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 - \alpha_{10}) \\ -\sin(\varphi_0 - \alpha_{10}) \end{pmatrix} H_1^{(1)}(\gamma_k r_{10}) \right] s_0',$$

$$\begin{pmatrix} N \\ \frac{1}{\mu_1} T \end{pmatrix} = i\gamma_1 \tau e^{-i\gamma_1 \xi_0 \cos \theta} \left[ \begin{pmatrix} \xi'_0 \\ -\eta'_0 \end{pmatrix} Q_1(\eta_0) \cos \theta + \begin{pmatrix} \eta'_0 \\ \xi'_0 \end{pmatrix} Q_2(\eta_0) \sin \theta \right],$$

$$Q_n = e^{-i\gamma_1 \eta_0 \sin \theta} + (-1)^n A e^{i\gamma_1 \eta_0 \sin \theta}, \quad \text{если } NV = 1;$$

$$\begin{pmatrix} N \\ \frac{1}{\mu_1} T \end{pmatrix} = \frac{i\gamma_1 \tau}{4} \left[ \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 - \alpha_{q_0}) \\ -\sin(\varphi_0 - \alpha_{q_0}) \end{pmatrix} H_1^{(1)}(\gamma_1 r_{q_0}) - A \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 - \alpha_{q_0}^*) \\ -\sin(\varphi_0 - \alpha_{q_0}^*) \end{pmatrix} H_1^{(1)}(\gamma_1 r_{q_0}^*) \right] s'_0,$$

$$\zeta_0 - z_q = r_{q_0} e^{i\alpha_{q_0}}, \quad \zeta_0 - \bar{z}_q = r_{q_0}^* e^{i\alpha_{q_0}^*}, \quad \text{если } NV = 2.$$

Здесь ядра  $C_1(\beta_0^j, \beta^j)$  и  $C_2(\beta_0^j, \beta^j)$  непрерывны при любых значениях  $l, j = \overline{1, M}$ ; ядра  $B_1(\beta_0^j, \beta^j)$  и  $B_2(\beta_0^j, \beta^j)$  становятся сингулярными, если  $l = j$ . В этом случае

$$B_k(\beta_0^j, \beta^j) = (-1)^k \frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta^j - \beta_0^j}{2} + F_k(\beta_0^j, \beta^j), \quad k = 1, 2, \quad (15)$$

где  $F_k(\beta_0^j, \beta^j)$  – непрерывная функция.

Следовательно, первые  $M$  уравнений в (14) являются сингулярными интегральными уравнениями первого рода. Следующие  $M$  уравнений – интегральными уравнениями Фредгольма второго рода.

Сделаем важное замечание. Условия типа склейки для перемещений и для производных перемещений по  $\beta_0^j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) на границе раздела двух сред будут эквивалентными, если к последним присовокупить  $M$  дополнительных условий. В данной работе в качестве таковых выбираются условия равенства средних перемещений на  $L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ). Интегрирование (13) по  $\beta_0^j$  в пределах от 0 до  $2\pi$  дает (суммирование по  $k = 1, 2$ ):

$$\int_L p_k(\beta) A_k^j(\beta) d\beta = M^j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (16)$$

$$A_k^j = (-1)^{k-1} \left( -\delta_{lj} \ln 2 + \int_0^{2\pi} K_k(\beta_0^j, \beta) d\beta_0^j \right), \quad M^j = -\int_0^{2\pi} V_0(\beta_0^j) d\beta_0^j.$$

Соотношение (16) следует использовать в качестве дополнительных условий, необходимых для однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений первого рода в (14).

**2.** Если  $D_2$  – совокупность неподвижных включений, то, как нетрудно заметить, интегральные уравнения краевой задачи с модифицированными граничными условиями (дифференцирование по  $\beta_0^j$ ,  $j = \overline{1, M}$ ) получаются из первых  $M$  уравнений (14), если в них положить  $p_2(\beta) \equiv 0$ . Эквивалентность

краевой задачи (7) и задачи с модифицированными граничными условиями обеспечивается равенством нулю средних перемещений на  $L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ).

Соответствующие  $M$  сингулярных интегральных уравнений и  $M$  необходимых для их однозначной разрешимости дополнительных условий приобретают вид:

$$\int_L p_1(\beta) B_1(\beta_0^j, \beta) d\beta = N(\beta_0^j), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0^j) \in L_j, \quad (17)$$

$$\int_L p_1(\beta) A_1^j(\beta) d\beta = M^j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (18)$$

Отметим, что интегральные уравнения (17) и дополнительные условия (18) вытекают из (14) и (16) при  $\rho_2 \rightarrow \infty$ . Поэтому задача дифракции на неподвижных включениях может рассматриваться как частный случай соответствующей задачи дифракции на упругих включениях при  $\rho_1/\rho_2 \rightarrow 0$ .

3. Дифракция гармонических волн сдвига на системе жестких включений также описывается системой сингулярных интегральных уравнений первого рода (17). Необходимые дополнительные условия вытекают из (9) и записываются в виде:

$$\int_L p_1(\beta) R^j(\beta) d\beta = Q^j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (19)$$

$$R^j = \frac{1}{2} \delta_{ij} - \frac{1}{\mu_1} \int_0^{2\pi} C_1(\beta_0^j, \beta) d\beta_0^j + \frac{\rho_e}{\rho_1} S_e^j \gamma_1^2 \frac{1}{2\pi} A_1^j(\beta),$$

$$Q^j = -\frac{1}{\mu_1} \int_0^{2\pi} T(\beta_0^j) d\beta_0^j + \frac{\rho_e}{\rho_1} S_e^j \gamma_1^2 \frac{1}{2\pi} M^j.$$

Случай (17), (19) вытекает из (14), (16) предельным переходом при  $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$ .

4. В случае дифракции гармонических  $SH$ -волн на системе цилиндрических полостей интегральные уравнения краевой задачи (10) могут быть получены непосредственно из  $M$  последних уравнений (14) при  $\mu_2 = 0$ . Имеем

$$\frac{\mu_1}{2} p_1(\beta_0^j) + \int_L p_1(\beta) C_1(\beta_0^j, \beta) d\beta = T(\beta_0^j), \quad j = \overline{1, M}. \quad (20)$$

Краевая задача для системы полостей в полупространстве может рассматриваться также как предельный случай соответствующей задачи для упругих включений при  $\mu_2/\mu_1 \rightarrow 0$ .

Численная реализация полученных интегральных уравнений осуществлялась двумя способами: методом дискретных особенностей [4] и методом механических квадратур [2]. На всех замкнутых контурах выбиралось нечетное число узлов  $N = 2n + 1$ . Внутренние и внешние узлы определялись из уравнений

$\sin \frac{N}{2}(\beta_v - \beta_*) = 0$  и  $\cos \frac{N}{2}(\beta_v - \beta_{0m}) = 0$  соответственно, т. е. они задавались соотношениями

$$\beta_v = \beta_* + \frac{2\pi}{N}v, \beta_{0v} = \beta_v - \frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N} \leq \beta_* \leq \frac{2\pi}{N}, v = \overline{0, 2n}. \quad (21)$$

Запишем интерполяционный тригонометрический полином порядка точно  $n$  для функции  $p_k(\beta)$ . В случае нечетного  $N$  он имеет вид [2]

$$p_{kn}(\beta_0) = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{2n} p_k^N(\beta_v) \frac{\sin \frac{N}{2}(\beta_v - \beta_0)}{\sin \frac{1}{2}(\beta_v - \beta_0)}, \quad k = 1, 2, \quad (22)$$

где  $p_k^N(\beta_v)$  – значение плотности  $p_k(\beta)$  в узле  $\beta_v$  при заданном  $N$ .

1. В соответствии с методом дискретных особенностей составим для уравнений (14), (16), которые отвечают совокупности упругих включений в полупространстве, систему  $(2N+1)M$  линейных алгебраических уравнений с  $(2N+1)M$  неизвестными  $\gamma_{0N}^j, p_k^N(\beta_v)$  (суммирование по  $k = 1, 2$ ):

$$\gamma_{0N}^j - \frac{2\pi}{N} \sum_{l=1}^M \sum_{v=0}^{2n} p_k^N(\beta_v^l) B_k(\beta_{0m}^j, \beta_v^l) = N(\beta_{0m}^j), \quad j = \overline{1, M} \quad (23)$$

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{l=1}^M \sum_{v=0}^{2n} p_k^N(\beta_v^l) D_k(\beta_{0m}^j, \beta_v^l) = T(\beta_{0m}^j), \quad m = \overline{0, 2n}, \quad (24)$$

$$\sum_{l=1}^M \sum_{v=0}^{2n} p_k^N(\beta_v^l) A_k^j(\beta_v^l) = \sum_{m=0}^{2n} V_0(\beta_{0m}^j), \quad (25)$$

$$D_k(\beta_{0m}^j, \beta_v^l) = \frac{\mu_k}{4\pi} \frac{\sin \frac{N}{2}(\beta_v^l - \beta_{0m}^j)}{\sin \frac{1}{2}(\beta_v^l - \beta_{0m}^j)} - C_k(\beta_{0m}^j, \beta_v^l),$$

$$A_k^j(\beta_v^l) = (-1)^{k-1} \left( -\delta_{lj} \ln 2 + \frac{2\pi}{N} \sum_{m=0}^{2n} K_k(\beta_{0m}^j, \beta_v^l) \right).$$

Здесь  $\gamma_{0N}^j$  – регуляризующие постоянные, которые вводятся в дискретную модель сингулярных интегральных уравнений первого рода, чтобы получить невырожденную систему линейных алгебраических уравнений (23)-(25). С увеличением  $N$  решение этой системы  $p_k^N(\beta_v^l)$  приближается к точному значению плотности  $p_k(\beta)$  в узле  $\beta_v^l$ , а постоянные  $\gamma_{0N}^j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) уменьшаются и стремятся к нулю при  $N \rightarrow \infty$ .

В методе механических квадратур дискретной моделью сингулярных интегральных уравнений первого рода является модель (23), в которой постоянные  $\gamma_{0N}^j$  отсутствуют. Тогда ранг системы (23) будет равен  $M(N-1)$  и для выделения единственного решения требуется  $M$  дополнительных условий. Они имеют вид (25) и вытекают из дискретизации  $M$  условий эквивалентности (16). Если для каждого  $j = \overline{1, M}$  одно из  $M$  соответствующих уравнений в (23) заменить  $j$ -м соотношением в (25), то получится система  $MN$  уравнений с рангом  $MN$ , которая вместе с  $MN$  уравнениями (24) образует совместную систему линейных алгебраических уравнений с полным рангом. Тогда, решая эту систему, однозначно определим значения  $p_k^N(\beta_v)$  во внутренних узлах совокупности  $L$ . Далее увеличивая  $N$ , получим искомое решение  $p_k(\beta)$  в узловых точках с заданной точностью.

Аналогично составляются дискретные модели других краевых задач.

2. В случае  $M$  неподвижных включений система  $M$  сингулярных интегральных уравнений первого рода (17) с  $M$  необходимыми дополнительными условиями (18) дискретизируется в виде (23), (25), если последние рассматривать в случае  $k=1$ . Однозначное решение, которое получается после решения возникающей системы линейных алгебраических уравнений, должно совпадать с соответствующим решением системы (23)-(25) при  $\rho_1/\rho_2 \rightarrow 0$ .

3. Если рассматривается совокупность жестких включений, то система сингулярных интегральных первого рода (17) имеет дискретную модель (23) при значении  $k=1$ , которая дополняется необходимыми условиями разрешимости. Последние получаются после дискретизации соотношений (19). Здесь значения плотности  $p_1(\beta)$  в узлах интерполяции должны совпадать с соответствующими значениями плотности  $p_1(\beta)$  – решения системы (23)-(25) при  $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$ .

4. Совокупности полостей в полупространстве отвечает система  $M$  уравнений Фредгольма второго рода (20). Ее дискретная модель вытекает из (24) при  $k=1$ . Значения внеинтегральной плотности во внешних узлах выражаются с помощью интерполяционного полинома. В результате получается система  $MN$  линейных алгебраических уравнений с  $MN$  неизвестными, которая имеет единственное решение. Оно должно совпадать с соответствующим решением системы (23)-(25) при  $\mu_2/\mu_1 \rightarrow 0$ .

#### 4. Численная реализация

С целью исследования сходимости построенных алгоритмов рассматривалась система однородных эллиптических неоднородностей. В ходе численной реализации на контурах эллипсов (со стороны матрицы) вычислялись безразмерные напряжения  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  путем деления соответствующих напряжений на  $\tau\mu_1$ . Точность вычислений проверялась сравнением результатов, полученных при различных значениях  $N$ . Проводилось также сравнение с результатами, приведенными в [12-14] в случае нормального падения волны

сдвига на одиночные эллиптические полость или упругое включение в неограниченной среде, и в [11, 15, 16] – в случае полупространства.

Эффективность метода дискретных особенностей в случае одиночных эллипсов проверялась при различных углах  $\theta$  падения волны сдвига (2) и различном расположении узлов на контуре  $L$ . Расчеты показывают, что во всех рассмотренных случаях постоянная  $\gamma_{0N}$  быстро уменьшается и уже при  $N=25$  значение  $|\gamma_{0N}|$  не превосходит  $10^{-8}$ . В табл. 1 приводятся максимальные значения  $|\gamma_{0N}|$  в зависимости от числа узлов  $N$  на контуре эллиптического упругого включения при изменении угла  $\theta$  в (2) от 0 до  $\pi/2$  и решении соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (23)-(25).

Табл. 1. Эффективность метода дискретных особенностей

$N$	3	7	11	15	25	35	55
$\max \gamma_{0N} $	2,61	0,035	0,00087	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-12}$	$3,9 \cdot 10^{-14}$

Следует отметить, что при  $N \geq 21$  значения напряжений  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  на контуре эллиптического упругого включения, вычисленные двумя методами – дискретных особенностей и механических квадратур – практически не отличаются: с точностью  $10^{-3}$  результаты совпадают (для достижения точности  $10^{-10}$  требуется около 600 узлов). При этом замена метода никак не влияет на потери вычислительных ресурсов (память, быстродействие).

В работе рассчитывалась также решетка из однородных эллипсов, поочередно расположенных на одинаковом расстоянии один от другого и ориентированных вдоль границы полупространства  $x_2=0$ . При нормальном падении волны сдвига (2) или действии гармонического сосредоточенного источника (3), расположенного на оси симметрии системы, рассматриваемые дифракционные задачи обладают свойством симметрии относительно оси  $Ox_2$  (рис. 2). Свойство симметрии решетки позволяет осуществить первичное самотестирование полученных результатов и уменьшить количество решаемых линейных алгебраических уравнений. Здесь целесообразно разбиение всех контуров на нечетное число точек  $N=2n+1$  так, чтобы на каждом эллипсе одна из точек, в которых удовлетворяются уравнения соответствующей дискретной модели, была ближайшей к границе полупространства. Тогда при численной реализации методом механических квадратур те из линейных алгебраических уравнений в (23), которые отвечают указанным точкам эллипсов, удобно заменить на соответствующие дополнительные условия в (25), что увеличит эффективность численной схемы.

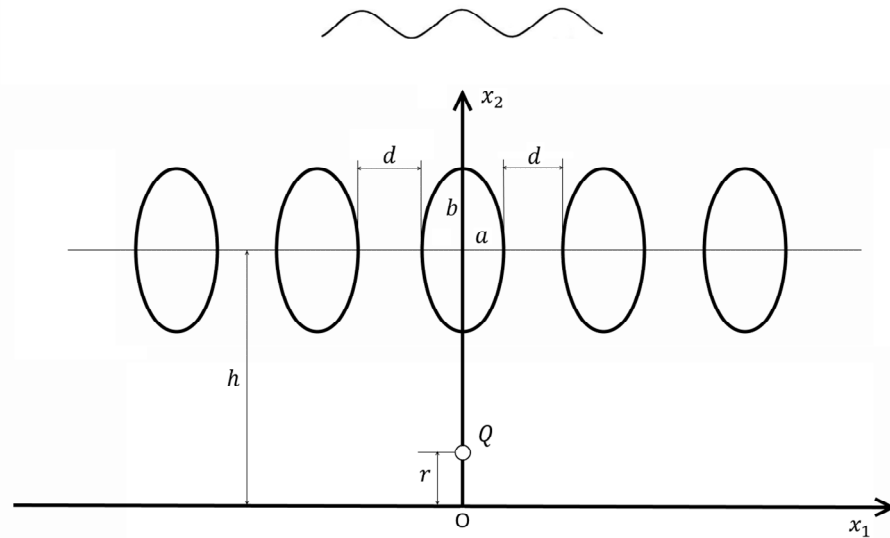


Рис. 2. Система эллиптических включений или полостей в полупространстве

Численное исследование показало, что в полупространстве точно также, как и в неограниченной среде [17], при воздействии на решетку  $SH$ -волны в распределении напряжений на контурах эллиптических неоднородностей наблюдается эффект насыщения [18] уже при  $M=9$ . Значения напряжений с большой точностью совпадают с аналогичными значениями соответствующей периодической задачи [19], и дальнейшее увеличение количества объектов практически не влияет на значения амплитуд напряжений. Обусловленность матриц решаемых систем линейных алгебраических уравнений при этом проверялась согласно алгоритму, описанному в [20].

В качестве примеров рассмотрим прикладные задачи о распределении контурных напряжений  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  на решетке, состоящей из пяти эллиптических неоднородностей (рис. 2). Интерес представляют центральный и крайние объекты. Отсчет внешних узлов будем вести от уже указанных точек, ближайших к границе полупространства. Они являются теньвыми в случае набегания на решетку волны сдвига (2) или лобовыми при действии гармонического источника, сосредоточенного в точке  $Q$  (3). Угол  $\beta$  будет изменяться от нуля (теньвая или лобовая точка) до  $\pi$  (лобовая или теньвая точка) для центрального эллипса в силу симметрии рассматриваемых задач и от  $0$  и  $2\pi$  для крайнего справа эллипса (распределения напряжений на контурах, симметричных относительно центра центрального эллипса, зеркальны). Выбраны следующие геометрические параметры системы: полуоси эллипса  $a=0,6$  и  $b=1,4$ ; расстояние между эллипсами  $d=2$ ; удаленности от границы  $x_2=0$  центров эллипсов и точки  $Q$  равны  $h=4$  и  $r=1$  соответственно. На всех рисунках кривая 1 соответствует заземленному полупространству, кривая 2 –

полупространству с границей свободной от сил и кривая 3 – неограниченной среде. Во всех случаях полагается  $\gamma_1 d = 3$ .

Рис. 3 и рис. 4 характеризуют распределения  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  на центральном (а) и крайнем (b) эллипсах при нормальном падении волны сдвига ( $NV=1$ ) и действии гармонического сосредоточенного источника ( $NV=2$ ) на решетку, составленную из пяти упругих волокон ( $\rho_2/\rho_1=2, \mu_2/\mu_1=5$ ).

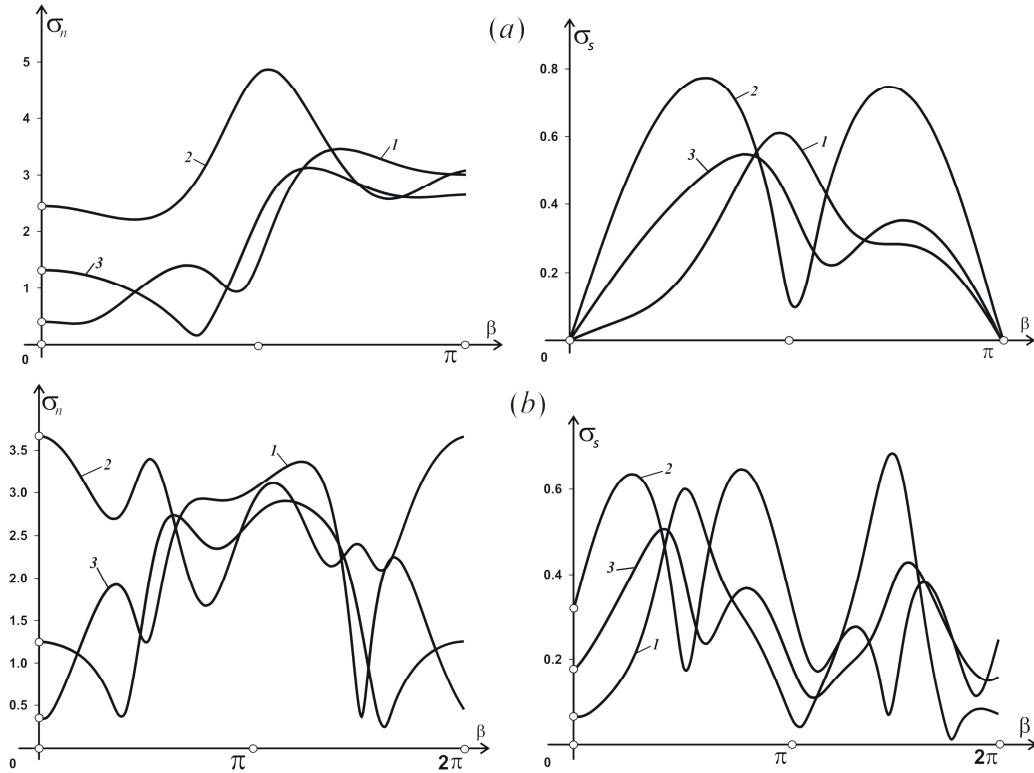


Рис. 3. Распределение контурных напряжений на центральном (а) и крайнем (b) эллиптических упругих включениях в случае  $NV=1$

Стабильность результатов (точность  $\varepsilon = 10^{-3}$ ) здесь достигается при  $N=55$ , что с учетом симметрии соответствует системе 280 линейных комплексных алгебраических уравнений в случае метода дискретных особенностей и 275 уравнений в случае метода механических квадратур. Расчеты подтверждают существенное влияние границы полупространства на напряженное состояние упругих включений, особенно это проявляется в случае границы  $x_2=0$ , свободной от сил. Преобладающими на границе матрица-волокно являются напряжения  $\sigma_n$ , которые значительно превосходят напряжения  $\sigma_s$ .



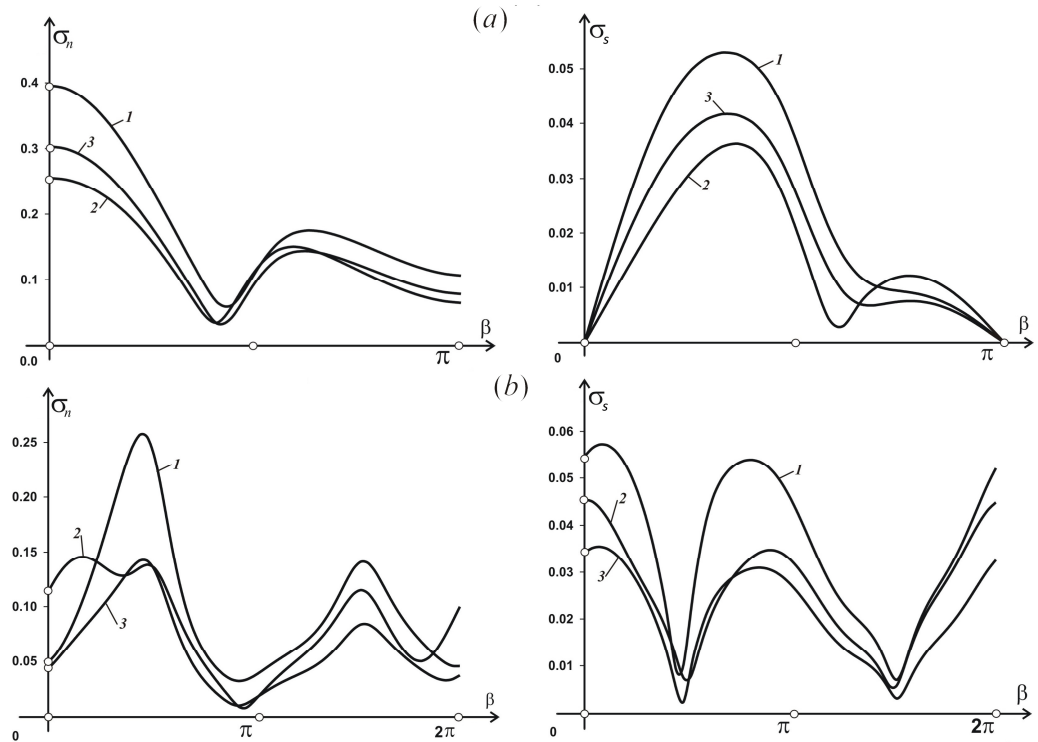


Рис. 4. Распределение контурных напряжений на центральном (а) и крайнем (б) эллиптических упругих включениях в случае  $NV=2$

Влияние нормально падающей волны сдвига на распределение напряжения  $\sigma_n$  на центральном (а) и крайнем (б) эллипсах в случае решетки из пяти неподвижных включений иллюстрирует рис. 5, а в случае решетки из пяти подвижных жестких включений ( $\mu_2/\mu_1 = 2$ ) – рис. 6.

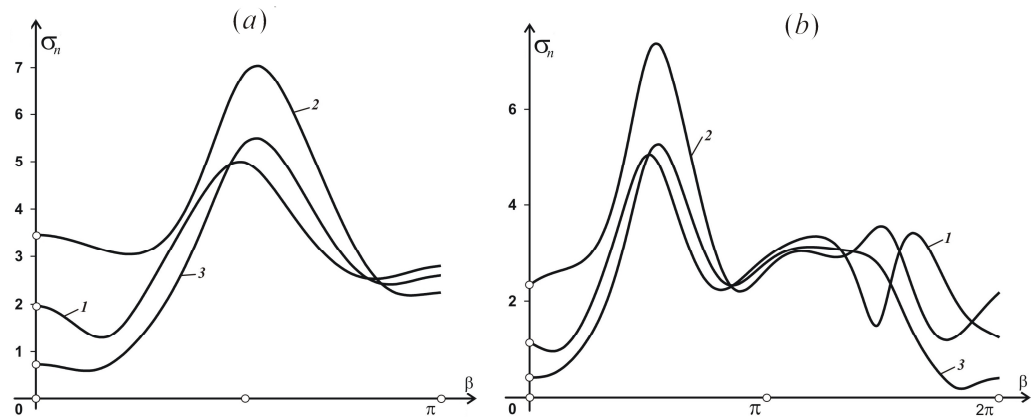


Рис. 5. Распределение напряжения  $\sigma_n$  на центральном (а) и крайнем (б) эллиптических неподвижных включениях в случае  $NV=1$

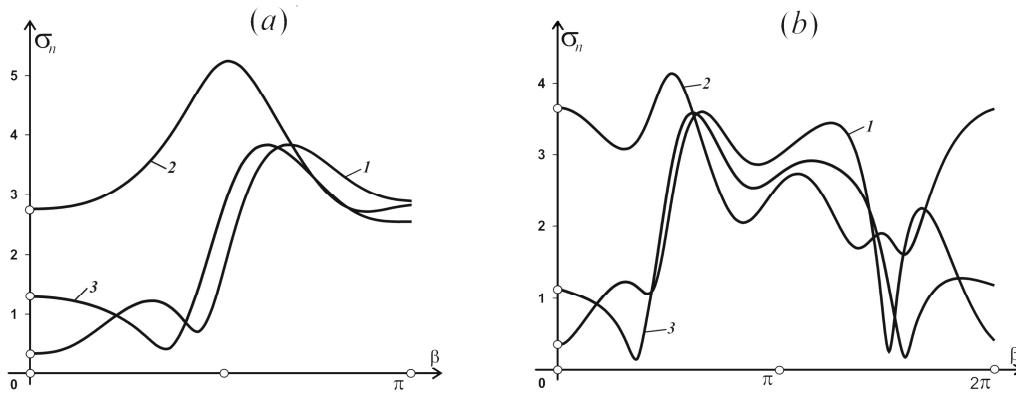


Рис. 6. Распределение напряжения  $\sigma_n$  на центральном (а) и крайнем (б) эллиптических жестких включениях в случае  $NV=1$

Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что с удалением эллипса от оси симметрии характер изменения контурных напряжений усложняется, причем максимальные значения  $\sigma_n$  уменьшаются. Как и в случае упругих включений, значительное увеличение амплитуд напряжений наблюдается в полупространстве со свободной от сил границей. В этом случае на центральном эллипсе  $\max \sigma_n$  достигается вблизи точек соскальзывания ( $\beta = \pm \pi/2$ ). Отметим, что в случае действия гармонического сосредоточенного источника напряжения  $\sigma_n$  на порядок меньше, поэтому их распределения здесь не приводятся.

На рис. 7 и рис. 8 приведены распределения напряжения  $\sigma_s$  на центральном (а) и крайнем (б) эллипсах при нормальном падении волны сдвига ( $NV=1$ ) и действии гармонического сосредоточенного источника ( $NV=2$ ) на решетку, составленную из пяти эллиптических отверстий.

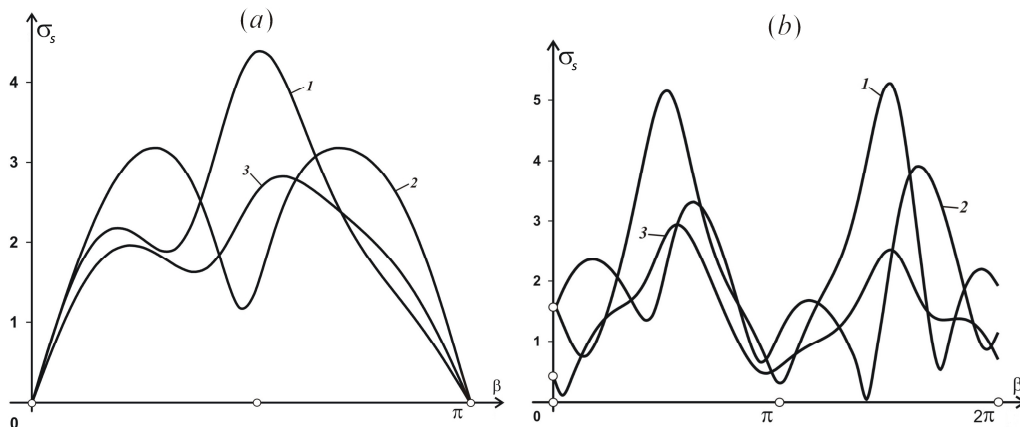


Рис. 7. Распределение напряжения  $\sigma_s$  на центральном (а) и крайнем (б) эллиптических отверстиях в случае  $NV=1$

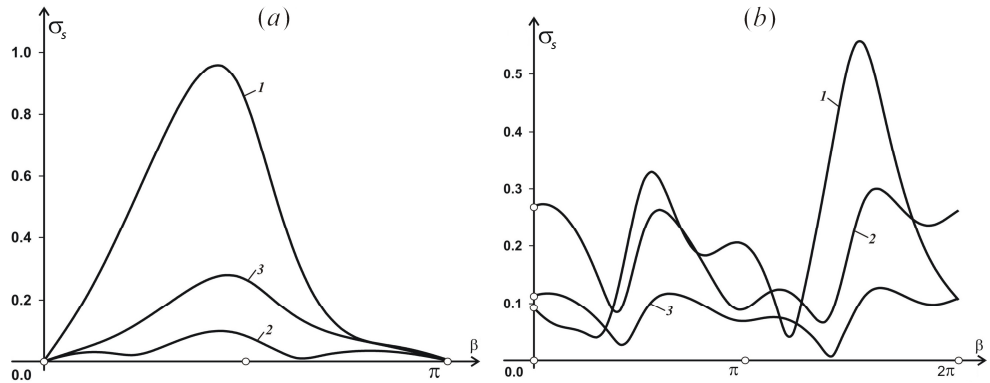


Рис. 8. Распределение напряжения  $\sigma_s$  на центральном (а) и крайнем (б) эллиптических отверстиях в случае  $NV=2$

Как видно, в отличие от предыдущих случаев, наиболее сильно себя проявляют напряжения  $\sigma_s$  в защемленном полупространстве. Здесь на центральном и крайних отверстиях  $\max \sigma_s$  достигается вблизи точек соскальзывания, причем при удалении от оси симметрии  $\max \sigma_s$  увеличивается.

### 5. Выводы

В данной работе методами сингулярных интегральных уравнений решаются задачи дифракции волн сдвига на системе различного типа неоднородностей в полупространстве. Численная реализация алгоритмов осуществлялась методами дискретных особенностей и механических квадратур. Показано, что в случае рассматриваемого класса задач эти два метода имеют одинаковую эффективность и сходятся с заданной точностью при одном и том же количестве узлов на контурах неоднородностей. Сделан количественный и качественный анализ напряженного состояния решеток, состоящих из эллиптических включений различного типа или полостей.

Построенные предложенными методами инструментальные программные средства, численно решающие разнообразные интегральные уравнения, позволяют с высокой точностью описывать поведение различных систем с усложненными свойствами.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В., Душкин В.Д. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. – Харьков: Ак. ВВ МВД Украины. – 2012. – 544с.
2. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К.: Наук. думка. – 1984. – 344 с.
3. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – №4. – С. 119-127.

4. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука. – 1985. – 256 с.
5. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. – К.: Наук. думка. – 1968. – 287 с.
6. Вертгейм И.И., Терпугов В.Н. Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДГТ: Уч. пособ. – Пермь: ПГУ. – 2007. – 84 с.
7. Назаренко А.М., Панченко Б. Е. Схема параллельных вычислений в задачах дифракции волн сдвига на системе отверстий в бесконечной изотропной среде // Пробл. програмування. – 2010. – №2–3. – С. 604–610.
8. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функций, функциональный анализ и их прил. – 1982. – Вып. 38. – С. 15-18.
9. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука. – 1973. – Т. 2. – 584 с.
10. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматиз. – 1962. – 511 с.
11. Назаренко А.М. Дифракция волн сдвига на цилиндрических включениях и полостях в упругом полупространстве // Проблемы прочности. – 1990. – №11. – С. 90–94.
12. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка. – 1978. – 307 с.
13. Шульга Н.А., Колодий В.И. Дифракция  $SH$ -волн на некруговой цилиндрической полости // Прикл. механика. – 1981. – №3. – С. 129-131.
14. Шульга Н.А., Колодий В.И. Дифракция волн сдвига на упругом включении некруговой цилиндрической формы // Мех. композит. материалов. – 1981. – №1. – С. 153-156.
15. Панченко Б.Е. Высокоточное кластерное решение задачи дифракции волн сдвига на системе отверстий в полубесконечной изотропной среде с защемленной границей // Пробл. програмування. – 2012. – №1. – С. 121-131.
16. Панченко Б.Е. Поведение системы некруговых отверстий в полупространстве со свободной границей от воздействия стационарных  $SH$ -волн // Проблемы управления и информатики. – 2012. – №4. – С. 84-93.
17. Панченко Б.Е., Назаренко А.М. Каркасный анализ предметной области: стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №1. – С. 172-187.
18. Кюркчан А.Г., Скородумова Е.А. Решение трехмерной задачи дифракции волн на группе объектов // Акустический журнал. – 2007. – №1. – С. 5-14.
19. Назаренко А.М., Панченко Б.Е. Взаимодействие волн сдвига с периодической системой цилиндрических неоднородностей произвольного поперечного сечения // Пробл. машиностр. – 1992. – Вып. 38. – С. 48-52.
20. Химич А.М., Полянко В.В. Эффективность двумерных блочно-циклических параллельных алгоритмов // Пробл. програм. – 2008. – №3. – С. 145-149.

УДК 519.71

## Ідентифікація стаціонарних слабо формалізованих систем з невідомими входами у $n$ -вимірному фазовому просторі

О. М. Назаренко, О. М. Ніколаєнко

*Сумський державний університет, Україна*

Проводиться моделювання та ідентифікація динамічної моделі з невідомими входами з метою імітації та прогнозування. Невідомий вхід зв'язується лінійною залежністю з керуваннями та їх похідними, а фазові координати розкладаються на трендову і періодичну складові. Оцінювання невідомих параметрів моделі, на які накладаються певні обмеження, проводиться методами економетрики.

**Ключові слова:** невідомі входи, специфікація, ідентифікація, фазові координати, керування, імітація, прогнозування.

Проводится моделирование и идентификация динамической модели с неизвестными входами с целью имитации и прогнозирования. Неизвестные входы связываются линейной зависимостью с управлениями и их производными, а фазовые координаты разлагаются на трендовую и периодическую составляющие. Оценивание неизвестных параметров модели, на которые накладываются определенные ограничения, проводится методами эконометрики.

**Ключевые слова:** неизвестные входы, спецификация, идентификация, фазовые координаты, управления, имитация, прогнозирование.

Held modeling and identification of dynamic model with unknown inputs to simulate and predict. Unknown inputs associated linear relationship with management and their derivatives, and the phase coordinates are decomposed into trend and periodic components. Estimation of unknown parameters of the model, which imposed certain restrictions, by the methods of econometrics.

**Keywords:** unknown inputs, specification, identification, phase coordinates, control, simulation, prediction.

### 1. Вступ

Сучасний системний аналіз вивчає властивості реальних систем за допомогою їх динамічних моделей, поданих у вигляді диференціальних або диференціально-алгебраїчних рівнянь. Однак розв'язанню прямої задачі, як правило, передує розв'язання оберненої задачі динаміки, яка полягає у відновленні закону руху динамічної системи за статистичними даними [1, 2]. Характерними особливостями слабо формалізованих систем [3, 4] є відсутність предметно-орієнтованої специфікації їх моделей, неповнота інформації про динаміку змінних, неможливість проведення безпосереднього експерименту.

Нехай стан системи у будь-який момент часу  $t \in [t_0, t_f]$  характеризується фазовим вектором  $\mathbf{k}(t)$ , а вхід системи – вектором  $\mathbf{I}(t)$ . Позначимо  $\{\mathbf{I}_t\}$ ,  $\{\mathbf{k}_t\}$  множину даних спостережень у  $N$  цілочисельних точках проміжку  $[t_0, t_*)$ ,  $t_* < t_f$ . Проміжок  $[t_0, t_*)$  будемо називати періодом ідентифікації, а відрізок  $[t_*, t_f]$  – періодом прогнозування. В залежності від вхідної статистичної інформації обернені задачі динаміки діляться на 4 типи.

1. Задачі чистої параметричної ідентифікації ( $\{\mathbf{I}_t\}$ ,  $\{\mathbf{k}_t\}$  відомі).

2. Задачі сумісної ідентифікації входу і параметрів ( $\{\mathbf{I}_t\}$  невідоме).
3. Задачі сумісної ідентифікації стану і параметрів ( $\{\mathbf{k}_t\}$  невідоме).
4. Задачі сумісної ідентифікації входу, стану і параметрів ( $\{\mathbf{I}_t\}, \{\mathbf{k}_t\}$  – невідомі).

Якщо статистичні дані  $\{\mathbf{k}_t\}$  невідомі, то можна використовувати заміщуючі змінні. Нехай, наприклад, відома статистична інформація відносно приростів  $\mathbf{n}_t = \mathbf{k}_t - \mathbf{k}_{t-1}$  ( $t = \overline{1, N}$ ). Тоді у якості заміщуючих змінних доцільно вибрати

$$\mathbf{y}_t = \sum_{\tau=1}^t \mathbf{n}_\tau \Rightarrow \mathbf{k}_t = \mathbf{y}_t + \mathbf{k}_0, \quad (1)$$

причому значення компонент вектора  $\mathbf{k}_0$  заздалегідь невідомі.

Невідомий вхід  $\mathbf{I}(t)$  породжує проблему його моделювання. На практиці використовують такі варіанти моделювання [5].

1. Принцип мультиплікатора:

$$\mathbf{I}(t) = R\mathbf{x}(t). \quad (2)$$

2. Принцип акселератора:

$$\mathbf{I}(t) = B\dot{\mathbf{x}}(t). \quad (3)$$

3. Модель з інерційною ланкою:

$$\mathbf{I}(t) = D\mathbf{x}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t). \quad (4)$$

Вектор  $\mathbf{x}(t)$  в (2) – (4) будемо називати вектором керувань. Припускаємо, що відомі статистичні дані  $\{\mathbf{x}_t\}$ ,  $t = \overline{1, N}$ . Конструювання закону керування здійснює регулятор [6], за допомогою якого досліджуваний об'єкт переводиться із початкового стану  $\mathbf{k}_0$  (в момент часу  $t_0$ ) в кінцевий бажаний стан  $\mathbf{k}_*$  (в момент часу  $t_*$ ). Регулятор повинен реалізувати основну ідею теорії керування – принцип оберненого зв'язку, який вказує на те, щоб вектор керувань  $\mathbf{x}(t)$  або вхід  $\mathbf{I}(t)$  в кожний момент часу  $t$  був функцією фазового вектора  $\mathbf{k}(t)$  та його похідною  $\dot{\mathbf{k}}(t)$ . У випадку лінійної стаціонарної моделі пропонується зв'язок

$$\mathbf{I}(t) = \dot{\mathbf{k}}(t) + \Lambda\mathbf{k}(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (5)$$

де  $\Lambda$  – діагональна матриця з додатними елементами.

Експериментальні дослідження макроекономічних процесів підтверджують справедливості нульової гіпотези  $H_0: \Lambda = \lambda E$  ( $\lambda$  – скалярна додатна величина,  $E$  – одинична матриця). В [7] використано принцип мультиплікатора (2) при ідентифікації динамічної моделі (5), за допомогою якої описувалась економіка в цілому розвинутих країн Західної Європи.

## 2. Постановка задачі

Складність і швидка мінливість слабо формалізованих процесів, присутність не формалізованих і невизначених факторів – основні причини, які перешкоджають складанню математичних моделей, які б адекватно описували досліджувані динамічні системи. Для встановлення закономірностей, властивих слабоформалізованим системам, будемо припускати, що об'єм вибірки  $N$  є

достатньо великим і на періоді ідентифікації  $[t_0, t_*)$  стабілізувались взаємозв'язки між окремими елементами системи. На практиці це означає, що елементи матриць, що фігурують в (2) – (5), зв'язані між собою певними співвідношеннями, які заздалегідь невідомі. Крім того, на елементи цих матриць можуть накладатись обмеження, які випливають з фізичної сутності задачі.

У даній роботі розглядається лінійна стаціонарна модель вигляду

$$\dot{\mathbf{k}}(t) + \lambda \mathbf{k}(t) = D\mathbf{x}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (6)$$

в якій замість  $\mathbf{k}(t)$  використовується згідно (1) замішуючий вектор

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{k}(t) + \mathbf{k}_0. \quad (7)$$

Задача полягає у специфікації фазових координат  $\mathbf{k}_i$  і відповідних керувань  $\mathbf{x}_i$  ( $i=1, n$ ), визначенні розмірності  $n$  фазового простору та оцінюванні невідомих параметрів системи диференціальних рівнянь (6). Оскільки метою дослідження є прогнозування майбутніх станів системи, то ідентифікацію невідомих параметрів моделі необхідно проводити через призму імітаційних та прогнозних властивостей фазових координат і керувань. Основну роль в процесі налаштування модельних траєкторій руху на необхідні властивості повинен відіграти регулятор, який буде складатись із декількох регулюючих пристроїв [8].

### 3. Метод розв'язання задачі

Тенденцію розвитку динамічної системи будемо характеризувати лінійним трендом, а коливальний процес будемо описувати за допомогою розкладу в ряд Фур'є відхилень статистичних даних відносно відповідного тренду. Нехай

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \beta(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos \omega_k t + \beta_k \sin \omega_k t), \quad t = \overline{1, N}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}. \quad (8)$$

Визначення періоду  $T$  коливань даної системи і встановлення частот із спектра (8), на які налаштовані гармонічні хвилі, будемо встановлювати за допомогою першого регулюючого пристрою, що обчислює сумарні значення керувань. Для нього складемо регресійну модель

$$x_i - \bar{x} = \beta(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos \omega_k t + \beta_k \sin \omega_k t) + v_t, \quad t = \overline{1, N}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}. \quad (9)$$

Керування повинні бути обраними такими, щоб властиві їм гармонічні хвилі налаштовувалися на частоти, ідентифіковані в (9). Оскільки кожна підмножина, яка відповідає певному керуванню, має свою специфіку функціонування, то кількості значущих гармонік у розкладі різних керувань (8) можуть різнитись. Якщо вибрана підмножина швидко реагує на якісні зміни у даній динамічній системі, то їй відповідатиме максимальна кількість гармонік у розкладі (8), тобто  $n-1$  гармонік. Мінімальна кількість гармонік буде відповідати тим підмножинам, які слабо реагують на зміни в інших підмножинах.

Нехай проведена специфікація компонент вектора керувань і тим самим встановлені розмірність фазового простору  $n$  та період коливань  $T$ . Тоді покладемо  $N=T$  і можна розпочинати ідентифікацію рівняння руху (6).

У випадку (8) помножимо рівняння (6) на  $e^{\lambda t}$  і проінтегруємо його від заданого значення  $t_*$  до моменту  $t$ . Маємо

$$\int_{t_*}^t e^{\lambda\tau} (\dot{\mathbf{k}}(\tau) + \lambda\mathbf{k}(\tau)) d\tau = \int_{t_*}^t e^{\lambda\tau} (D\mathbf{x}(\tau) + C\dot{\mathbf{x}}(\tau)) d\tau.$$

Після деяких перетворень одержуємо

$$\mathbf{k}(t) = e^{-\lambda(t-t_*)} (\mathbf{k}_* - C\mathbf{x}_*) + C\mathbf{x}(t) + (D - \lambda C) e^{-\lambda t} \int_{t_*}^t e^{\lambda\tau} \mathbf{x}(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Тоді інтеграл в (10) можна подати у вигляді

$$\int_{t_*}^t e^{\lambda\tau} \mathbf{x}(\tau) d\tau = e^{\lambda t} \mathbf{f}(t) \Big|_{t_*}^t, \quad (11)$$

де  $\mathbf{f}(t)$  – відома вектор-функція при заданому розкладі (8) вектора  $\mathbf{x}(t)$ .

Тепер розв'язок (10) можна записати так:

$$\mathbf{k}(t) = C\mathbf{x}(t) + (D - \lambda C)\mathbf{f}(t). \quad (12)$$

Отже, при заданих векторах  $\mathbf{x}(t)$  (8) і  $\mathbf{f}(t)$  (11) задача зводиться до оцінювання невідомих матриць  $C$ ,  $D$  і параметра  $\lambda$ . При практичних дослідженнях елементи матриць  $C$  і  $D$  є додатними. Крім того, для зменшення числа ступенів вільності при оцінюванні цих коефіцієнтів необхідно встановити можливі зв'язки між ними. Для цього використаємо регулятор, який буде складатися з трьох регулюючих пристроїв, що обчислюють сумарні значення  $y$ ,  $f$  і  $x$ . Відповідні регресійні моделі мають вигляд:

$$\begin{aligned} y_t - \bar{y} &= \mathbf{c}'((\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}) - \lambda(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}})) + \mathbf{d}'(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}) + h_t, \quad t = \overline{1, N}, \\ f(t) - \bar{f} &= \mathbf{q}'(\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}}) - \mathbf{p}'((\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}) - \lambda(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}})) + v_t, \quad t = \overline{1, N}, \\ x(t) - \bar{x} &= \lambda(f(t) - \bar{f}) + \mathbf{m}'(\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}}) - \mathbf{l}'(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}) + w_t, \quad t = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $h_t, v_t, w_t$  – випадкові відхилення; всі невідомі параметри регулятора додатні.

Регресійна модель для фазового вектора  $\mathbf{y}$  реалізовувалася у вигляді:

$$\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}} = C((\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}) - \hat{\lambda}(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}})) + D(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}) + \mathbf{h}_t, \quad t = \overline{1, N}. \quad (14)$$

Тут на елементи невідомих матриць  $C$  і  $D$  накладалися наступні обмеження ( $\hat{a}$  – МНК-оцінка параметра  $a$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_{ij} &= \hat{d}_j, \quad \sum_{i=1}^n c_{ij} = \hat{c}_j, \quad \sum_{i=1}^n \hat{q}_i c_{ij} = \hat{p}_j, \quad \sum_{i=1}^n \hat{q}_i d_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^n \hat{m}_i d_{ij} = \hat{l}_j, \quad \sum_{i=1}^n \hat{m}_i c_{ij} = 1, \\ \frac{1}{3} \hat{d}_j &< d_{ii} < \frac{2}{3} \hat{d}_j, \quad \frac{1}{3} \hat{c}_j < c_{ii} < \frac{2}{3} \hat{c}_j, \quad d_{ij} > 0, \quad c_{ij} > 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

що впливають з фізичної постановки задачі і сутності параметрів регулюючих пристроїв в (13).

#### 4. Практична реалізація алгоритму

Апробація моделі проводилася на прикладі макроекономічного розвитку Франції за 1956–2011 рр. [9]. У якості координат фазового вектора  $\mathbf{y}$  вибиралися прирости основних фондів (статистичні дані – Gross fixed capital formation), а вектора керувань  $\mathbf{x}$  – випуски секторів (статистичні дані – Value added). Чисельний експеримент встановив оптимальне значення об'єму вибірки



$N = 50$ , при цьому 1960–2009 рр. – період ідентифікації, 2010–2011 рр. – період прогнозування. Встановлено, що при рівні значущості  $\alpha=0,005$  і числу ступенів вільності  $k=N-2n$  економіці Франції властиві чотири значущі гармоніки ( $k=1, 2, 3, 6$ ): хвиля Кондратьєва ( $k=1$ ), хвиля Кузнеця ( $k=3$ ), хвиля Жугляра ( $k=6$ ) [10] і хвиля з періодом, що дорівнює половині періоду хвилі Кондратьєва ( $k=2$ ). Оптимальний поділ економіки Франції на сектори такий: промисловість та сільське господарство (Industry; Agriculture); будівництво та транспорт (Construction; Transport); фінансовий сектор і нерухомість (Finance; Real estate); комунікації та наука (Communication; Science); сфера послуг (Service Industries).

Оцінювання регресійної моделі (8) дало наступні значення коефіцієнтів детермінації  $R^2$  трендів, навколо яких відбуваються коливання (табл. 1).

Табл. 1. Коефіцієнти детермінації трендів

№ сектора	1	2	3	4	5	$\Sigma$
$R^2$	0,5231	0,8548	0,8993	0,8220	0,8756	0,8021

Аналіз табл. 1 показує, що для вибраних секторів (особливо для першого сектору) і для економіки в цілому коливання випусків навколо відповідного тренду є відчутними. Частки дисперсій гармонік у загальній дисперсії коливань кожного сектору обчислюються за допомогою відповідних коефіцієнтів детермінації, значення яких наведені в табл. 2.

Табл. 2. Коефіцієнти детермінації гармонік

№ сектора	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=6$	$\Sigma$
1	0,9523	0,0179	0,0205	0,0020	0,9926
2	0,6319	0,2883	0,0486	0,0072	0,9760
3	0,7604	0,1792	0,0385	0,0035	0,9815
4	0,8661	0,0911	0,0220	0,0045	0,9836
5	0,8174	0,1632	0,0061	0,0017	0,9882
$\Sigma$	0,8082	0,1596	0,0186	0,0046	0,9909

Регресійні моделі коливань мають якісні апроксимаційні властивості і можна очікувати значущого вкладу в дисперсії випусків. Значення коефіцієнтів детермінації модельних траєкторій випусків (ВВП) приводяться в табл. 3.

Табл. 3. Якість модельних траєкторій випусків

№ сектора	1	2	3	4	5	$\Sigma$
$R^2$	0,9992	0,9991	0,9989	0,9989	0,9995	0,9992

На рис. 1 приведені графіки модельних кривих ВВП економіки в цілому та їх коливань. Тут точками зображені статистичні дані, а суцільною лінією – траєкторії руху (всі дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідне значення у початковому 1960 р.). Порівняння прогнозних значень з реальними даними (дві останні точки, що відповідають 2010 і 2011 рр.) свідчить про високоточні прогнозні властивості моделі (9).

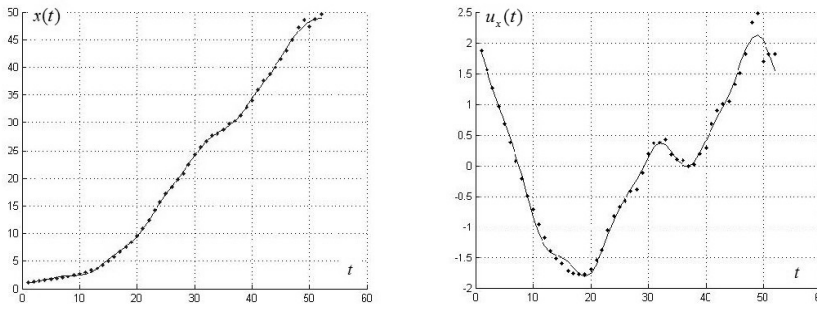


Рис. 1. Модельні криві ВВП та відповідних коливань за 1960-2011 рр.

Наступним кроком є оцінювання регулятора (13). При  $\hat{\lambda} = 0.0177$  та ідентифікованому розкладі (8) обчислюємо інтеграли, що фігурують в (11), і знаходимо вектор-функцію  $\mathbf{f}(t)$ . Далі оцінюємо регресійну модель (14).

МНК-оцінки елементів матриці  $C$  і  $D$  наведені в табл. 4.

Табл. 4. МНК-оцінки елементів матриці  $C$  і  $D$

Матриця $C$					Матриця $D$				
2,1232	0,3216	0,2242	0,2988	0,2656	0,0424	0,0084	0,0067	0,0058	0,0060
0,3183	2,1093	0,2755	0,3145	0,2545	0,0069	0,0379	0,0052	0,0070	0,0080
0,2472	0,2712	2,1716	0,2855	0,2943	0,0061	0,0045	0,0362	0,0083	0,0041
0,2849	0,3469	0,3516	2,1309	0,2845	0,0072	0,0134	0,0063	0,0326	0,0035
0,2679	0,2855	0,2832	0,2755	1,9954	0,0062	0,0052	0,0085	0,0065	0,0417

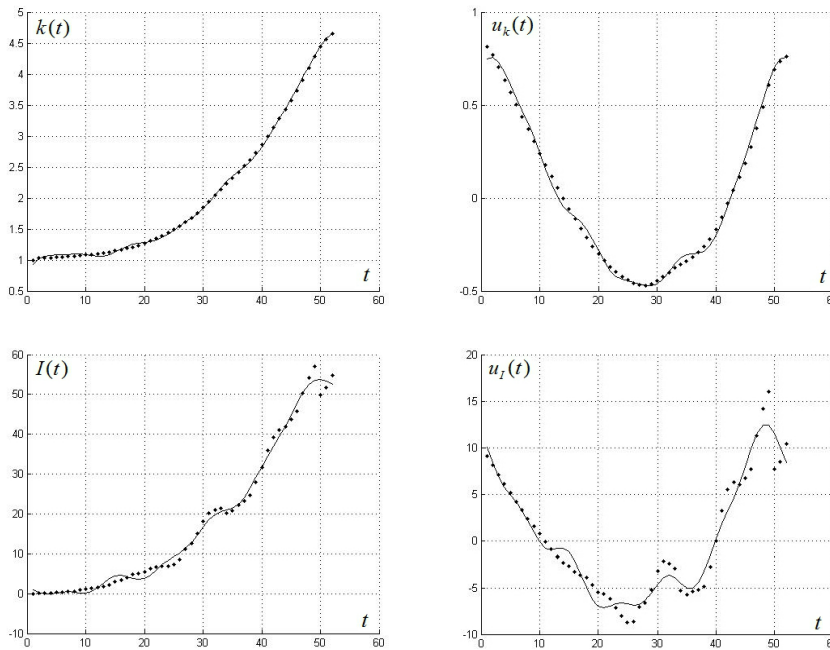


Рис. 2. Модельні траєкторії ОФ, інвестицій та відповідних коливань

Розроблений алгоритм параметричної ідентифікації моделі  $n$ -секторної економіки дозволяє оцінити невідомі значення  $\mathbf{k}_0$  основних фондів секторів у початковий момент часу  $t_0$ . Ці значення дозволяють відновити статистичні дані по ОФ, які нам були невідомі. За формулою (4) можна також відновлювати статистичні дані по інвестиціям і будувати їх траєкторії. Рис. 2 ілюструє зміну ОФ і інвестицій економіки Франції в цілому та їх відповідних коливань.

### 5. Висновки

У даній роботі запропонований алгоритм параметричної ідентифікації стаціонарної динамічної моделі з невідомим входом. Траєкторії руху керувань моделюються за допомогою розкладання на трендову та періодичну складові. Ідентифікація невідомих параметрів проводилася за допомогою регулятора, який складався з трьох регулюючих пристроїв. На параметри моделі накладалися обмеження, що впливають з фізичної сутності задачі. Чисельна реалізація побудованих алгоритмів на статистичних даних реальної динаміки показала їх ефективність.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели. – М.: Наука. – 1987. – 304 с.
2. Ljung L. System Identification. Theory for the user. 2nd ed. – N.J.: PTR Prentice Hall, Upper Saddle River. – 1999. – 432 p.
3. Альбрехт Э. Г. Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электронный журнал «Исследовано в России». – 2002. – Т.5. – С. 54–86.
4. Nazarenko O.M., Filchenko D.V. Parametric Identification of State-Space Dynamic Systems: A Time-Domain Perspective // Int. J. of Innovating Computing, Information and Control. – Japan, 2008. – Vol. 4, No. 7. – P. 1553 – 1566.
5. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М: Юнити-Дана. – 2005. – 295с.
6. Бабаков И. М. Теория колебаний. Изд. 4-е, испр. – М.: Наука. – 2004. – 591 с.
7. Назаренко О. М., Ніколаєнко О.М. Параметрична ідентифікація моделі Солоу макроєкономічної системи // Вісник НТУ«ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №6(1115). – С. 82-91.
8. Назаренко О. М., Ніколаєнко О. М. Моделювання та ідентифікація лінійної стаціонарної моделі з невідомими входами // Труды XVII Міжнародного симпозиуму «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2015). Харків-Суми. – 2015. – С. 177-180.
9. INSEE. – <http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action>.
10. Коротаев А.В. Кондратьевские волны в мировой экономической динамике // Системный мониторинг. Глобальное и региональное развитие. – М.: Либроком / URSS, 2010. – С. 189-229.

УДК 51-72, 517.958

## Точное решение начально-краевой задачи для уравнения аномальной диффузии

В. В. Николенко, В. А. Ячменёв

*Сумский государственный университет, Украина*

В этой статье мы представляем точное решение начально-краевой задачи для дробного дифференциального уравнения аномальной диффузии с дробной производной Римана-Лиувилля по времени порядка  $(0, 1)$ , что соответствует режиму так называемой медленной диффузии. Решение получено для отрезка  $[0, l]$  с использованием преобразований Лапласа и в предположении, что один из концов отрезка ( $x=0$ ) изолирован, а на другом ( $x=l$ ) поддерживается постоянная концентрация вещества. Полученное решение записано в замкнутом виде и представляет собой обобщенный степенной ряд.

**Ключевые слова:** Дробные операторы Римана-Лиувилля, аномальная диффузия, начально-краевая задача, точное решение.

У цій статті отримано точний розв'язок початково-крайової задачі для дробового рівняння аномальної дифузії з дробовою похідною Рімана-Ліувілья за часом порядку  $(0, 1)$ , що відповідає режиму так званої повільної дифузії. Розв'язок отримано для відрізка  $[0, l]$  з використанням перетворень Лапласа і в припущенні, що один із кінців відрізка ( $x = 0$ ) ізольований, а на іншому ( $x = l$ ) підтримується постійна концентрація речовини. Отриманий розв'язок записано в замкнутому вигляді і являє собою узагальнений степеневий ряд.

**Ключові слова:** Дробові оператори Рімана-Ліувілья, аномальна дифузія, початково-крайова задача, точний розв'язок.

In this paper, we present an exact solution of the initial boundary value problem of fractional differential equation for anomalous diffusion with Riemann-Liouville time derivative of the order  $(0, 1)$ , which corresponds to the so-called slow diffusion. A solution over the interval  $[0, l]$  is obtained using the Laplace transformation and assuming that one of the endpoints ( $x = 0$ ) is isolated and at the another endpoint ( $x = l$ ) the constant concentration is kept. The resulting solution is written in fundamental form and represents a generalized power series.

**Key words:** Riemann-Liouville fractional operators, anomalous, diffusion, initial-boundary value problem, exact solution.

### 1. Введение

Как известно, описание процессов диффузии основано на законах Фика, а классическое уравнение одномерной диффузии имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где  $D$  - коэффициент диффузии, а  $u = u(x, t)$ .

Для уравнений такого рода хорошо разработаны как точные, так и численные методы решения краевых задач [1].

Однако было замечено, что поведение некоторых процессов, таких как пластическая деформация распространение тепла, диффузия и др. не укладывается в рамки классического описания с помощью дифференциальных уравнений с производными целого порядка. Однако, оказалось, что процессы,

проходящие, в частности, во фрактальных средах, можно моделировать дифференциальными уравнениями, содержащими дробные производные [2, 3]. Впрочем, впервые дробные частные производные были использованы в 1948 году А. Н. Герасимовым в его работе [4] при обобщении задач теории пластичности и их приложений к задачам внутреннего трения.

Отметим, что дробная производная по времени возникает при учете нелокальности по времени, которая связана с прилипанием диффундирующих атомов к стенкам пор [5].

К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных решению различного рода краевых задач для уравнений дробного порядка, но в основном численными методами [6–10]. Тем не менее, для проведения достаточно полного «качественного» исследования изучаемой проблемы, желательно использование точных решений.

В данной работе получено точное решение начально-краевой задачи для уравнения аномальной диффузии с дробной производной по времени.

## 2. Постановка задачи и математическая модель

Будем изучать аномальную диффузию в ограниченном стержне  $0 < x < l$ . Будем считать, что вещество равномерно распределено внутри интервала  $(0, l)$ , на одном из торцов поддерживается постоянная концентрация, а другой конец изолирован. Задача сводится к решению уравнения

$$(D_{0+t}^{\alpha} u)(x, t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

при начальном условии

$$u|_{t=0} = u_0 \quad (2.2)$$

и граничных условиях

$$\begin{aligned} (D_{0+t}^{1-\alpha} u)(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= u_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь

$$(D_{0+t}^{\alpha} u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, \tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau$$

дробная производная Римана-Лиувилля относительно  $t=0$  порядка  $\alpha$  ( $\alpha = p/q$ , где  $p, q \in \mathbb{Z}$ ). Здесь мы будем полагать, что  $0 < \alpha < 1$ , т.е. в данной статье рассматривается «медленная» диффузия, а  $\lambda^2$  - коэффициент диффузии.



Для перехода от изображения  $U(x, s)$  к оригиналу  $U(x, t)$  воспользуемся обобщением правила дробных показателей [11].

**Теорема.** Пусть  $U(x, s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Re} s < 0$  и не имеет в конечной  $s$ -плоскости никаких особенностей, кроме начала координат  $s = 0$ , которое является точкой разветвления конечного порядка  $q$ .

Тогда, если разложение  $U(x, s)$  в обобщенный ряд имеет вид:

$$U(x, s) = s^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) s^{\beta k},$$

где  $\beta$  - рационально и положительно, то оригиналом  $U(x, s)$  служит (умноженный на функцию Хевисайда  $\eta(t)$ ) ряд

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(x)}{\Gamma(-\alpha - k\beta)} \cdot \frac{1}{t^{k\beta}},$$

в котором вычеркнуты все члены с целыми неотрицательными  $\alpha + k\beta$ .

Действительно, обратимся к выражению (3.4). Гиперболические функции  $ch\left(\frac{x}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}\right)$  и  $ch\left(\frac{l}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}\right)$  представим в виде обобщенных степенных рядов:

$$ch\left(\frac{x}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{x}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x) s^{\alpha k}, \quad (3.5)$$

$$ch\left(\frac{l}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{l}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^{\alpha k}, \quad (3.6)$$

где

$$b_k(x) = \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{2k}, \quad a_k = \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^{2k}.$$

Выполнив деление степенных рядов (3.5) и (3.6), получим ряд

$$\frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) s^{\alpha k},$$

где коэффициенты  $c_k(x)$  находятся последовательно из соотношений

$$\begin{aligned}
 a_0 c_0 &= b \\
 a_0 c_1 + a_1 c_0 &= b_1 \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_0 c_n + a_1 c_{n-1} + \dots + a_n c_0 &= b_n \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Здесь аргумент  $x$  для  $b_k(x)$  опущен.

Таким образом, изображение  $U(x, s)$  может быть представлено в виде ряда

$$U(x, s) = \frac{u_0}{s^\alpha} + \frac{1}{a_0} \left( \frac{u_1}{s} - \frac{u_0}{s^\alpha} \right) \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) s^{\alpha k} \quad (3.7)$$

Тогда согласно сформированной ранее теоремы находим, что оригиналом для (3.7) служит выражение

$$u(x, t) = u_0 + \frac{u_1}{a_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(x)}{\Gamma(1-k\alpha)} \cdot \frac{1}{t^{k\alpha}} - \frac{u_0}{a_0 t^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(x)}{\Gamma(1-k\alpha)} \cdot \frac{1}{t^{k\alpha}},$$

где  $\Gamma(z)$  – гамма-функция.

#### 4. Заключение

Полученное решение можно использовать для проведения численных экспериментов при моделировании процессов аномальной диффузии в системах, обладающих фрактальной структурой.

Вместе с тем на основании описанного в статье приема можно получить решение так называемого «волнового» уравнения

$$(D_{0+t}^\alpha u)(x, t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial y^2},$$

где  $1 < \alpha < 2$ .

Отметим также, что фундаментальное решение для уравнения такого типа получено в работах [13, 14].

Авторы выражают благодарность Шпоте И. В. и Беде И. Н. за ценные советы и помощь в подготовке статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фарлоу, С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров : пер. с англ. / С. Фарлоу . – М. : Мир, 1985
2. R Gorenflo, F Mainardi, D Moretti and P Paradisi. Time fractional diffusion: a discrete random walk approach. *Nonlinear Dynamics* 29 (1-4), 129-143
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.: Наука и техника, 1987. - 688 с.



4. Герасимов А.Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. С. 529-539.
5. Golovizin V. M., Kiselyov V. P., Korotkin I. A. Chislennyye metody uravneniya drobnoy diffuzii v odnomernom sluchaye. M., 2002 (pereprint /IBR AE RAN. IBRAE-2002-01)
6. Бейбалаев В.Д. Численный метод решения математической модели теплопереноса в средах с фрактальной структурой // Фундаментальные исследования. – 2007. – 12. – С. 249-251.
7. Корчагина А. Н. Численное моделирование диффузионных процессов в фрактальных средах / А. Н. Корчагина, Л. А. Мержиевский // Ученые записки ЗГУ. Серия: Физика, математика, техника, технология. - 2013. - № 3 (50). - С. 53-59.
8. Мейланов Р.П., Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д., Шахбанова М.Р. Уравнение параболического типа с дифференцированием дробного порядка// Вестник ДНЦ РАН,- 2006,-С. 11-15.
9. Головизнин В.М., Короткий И.А. Методы численного решения некоторых одномерных уравнений с дробными производными // Дифференц. уравнения. 2006. - Т42, №7. - С. 907-913.
10. Фильштинський Л. А., Мукомел Т. В., Кірічок Т. А. Одновимірна початково-крайова задача для дробово-диференціального рівняння теплопровідності // Вісник Запорізького національного університету №1, 2010, с. 113-118
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.-716 с.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962, 1100 с.
13. Huang, F., Liu, F., The Space-Time Fractional Diffusion Equation with Caputo Derivatives, Journal of Applied Mathematics and Computing, 19 (2005), 1-2, pp. 179-190.
14. Mainardi, F., The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation, Appl. Math. Lett., 9(6), (1996), pp. 23-28.

УДК 519.6, 537.5

## Имитационное моделирование системы «электронный пучок – модуляционно неустойчивые плазменные колебания»

А. В. Приймак

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

Выполнено объединение модели системы «электронный пучок - плазма» и гибридной модели модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн в плазме. Влияние моделей друг на друга частично симитировано через параметр уровня поглощения и законы сохранения энергии. Найдено такое поглощение в модели «электронный пучок - плазма», при котором динамика процессов в рассматриваемых моделях наиболее близка по энергетическим показателям. Показано использование переменного значения поглощения, которое рассчитывается из законов сохранения энергии двух моделей. Определены параметры многомодового режима в модели «электронный пучок - плазма».

**Ключевые слова:** модель пучка электронов в плазме, параметрическая неустойчивость ленгмюровских волн, модель Силина, баланс энергии в системе, имитация влияния моделей.

Виконано об'єднання моделі системи «електронний пучок - плазма» і гібридної моделі модуляційної нестійкості ленгмюрівських хвиль в плазмі. Вплив моделей одна на одну частково імітований через параметр рівня поглинання і закони збереження енергії. Знайдено таке поглинання в моделі «електронний пучок - плазма», при якому динаміка процесів в розглянутих моделях найбільш близька за енергетичними показниками. Показано використання змінного значення поглинання, яке розраховується із законів збереження енергії двох моделей. Визначено параметри многомодового режиму в моделі «електронний пучок - плазма».

**Ключові слова:** модель пучка електронів в плазмі, параметрична нестійкість ленгмюрівських хвиль, модель Силина, баланс енергії в системі, імітація впливу моделей.

The integration of "electron beam - plasma" model and the hybrid model of modulation instability of Langmuir waves in plasma was performed. The influence of models on each other is partly simulated through the parameter of absorption level and the energy conservation law. In the "electron beam - plasma" model, such absorption level was found, in which the dynamics of processes in both considered models is the closest comparing by the energy indicators. It was shown how to use the variable absorption value, which is calculated from the energy conservation laws of two models. Also the parameters of the multimode regime in the "electron beam - plasma" model were defined.

**Key words:** model of electron beam in plasma, parametric instability of plasma waves, Silin's model, energy conservation laws, imitation of model influence.

### 1. Введение

Использование возбуждаемых пучком в плазме интенсивных колебаний представляет интерес для целей генерации и усиления [1–5], а также для нагрева электронов и ионов плазмы в условиях развития модуляционных неустойчивостей [6–14] и конечного поглощения энергии. В пучково-плазменных взаимодействиях развивается многомодовый режим генерации, возбуждаемые волновые пакеты имеют определенную спектральную ширину.

Создание полноценной аналитической модели взаимодействия пучка с плазмой является весьма сложной задачей, поэтому представляет интерес

использование имитационного моделирования, состоящего в имитации влияния пучка и плазмы друг на друга, используя их энергетические показатели.

Целью работы является объединение двух моделей:

- модели многомодового режима взаимодействия пучка электронов с плазмой в условиях линейного по амплитудам возмущений поглощения;

- модели модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн в плазме, которая описывает нелинейное поглощение.

При объединении моделей необходимо найти такой уровень поглощения  $\Theta$  в модели «электронный пучок - плазма», динамика процесса которой близка к режиму работы модели модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн по энергетическим показателям.

## 2. Имитационное моделирование

В качестве одномерных гибридных моделей модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн в плазме рассматривались модели Силина и Захарова [14, 17-19]. В настоящей работе используется гибридная модель Силина, т.к. нас интересовало возбуждение параметрически неустойчивых ленгмюровских волн именно пучком релятивистских электронов. Характерное время развития модуляционной неустойчивости  $\omega_{pe} / \delta = 29.4$  в модели «электронный пучок - плазма» в работах [15, 16] в наибольшей степени соответствует модели Силина. Математическая модель Силина детально представлена в работах [17,20].

Математическая одномерная модель системы «электронный пучок - плазма» приведена в работе [15], физическая модель обсуждается в работе [16].

Математические модели изложены в единой системе обозначений далее.

**Гибридная модель Силина [17,20].** Уравнения для высокочастотных колебаний представлены в виде уравнений для амплитуды и фазы в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_n}{\partial \tau} + \theta \cdot \frac{n^6}{n_M^6} \cdot e_n - \frac{|n|}{n} J_1(a_n) [M_{nr} \cos(\phi - \psi_n) - M_{ni} \sin(\phi - \psi_n)] + \\ + \frac{|n|}{2} \sum_{m \neq 0; \pm 1; n; n \pm 1} \frac{1}{|m|} \cdot \{e_{-m} J_2(a_{n-m}) [M_{n-m,r} \sin(2\phi - \psi_n - \psi_{-m}) + M_{n-m,i} \cos(2\phi - \psi_n - \psi_{-m})] + \\ + e_m \cdot J_0(a_{n-m}) [M_{n-m,r} \sin(\psi_m - \psi_n) + M_{n-m,i} \cos(\psi_m - \psi_n)]\} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_n}{\partial \tau} - \Delta - \frac{|n|}{ne_n} J_1(a_n) [M_{nr} \sin(\phi - \psi_n) + M_{ni} \cos(\phi - \psi_n)] - \\ - \frac{|n|}{2e_n} \sum_{m \neq 0; \pm 1; n; n \pm 1} \frac{1}{|m|} \cdot \{e_{-m} J_2(a_{n-m}) [M_{n-m,r} \cos(2\phi - \psi_n - \psi_{-m}) - M_{n-m,i} \sin(2\phi - \psi_n - \psi_{-m})] + \\ + e_m \cdot J_0(a_{n-m}) [M_{n-m,r} \cos(\psi_m - \psi_n) - M_{n-m,i} \sin(\psi_m - \psi_n)]\} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\theta \cdot n^6 / n_M^6; \theta = 0.05$  определяет поглощение энергии ВЧ колебаний (поглощение  $\Theta$  в модели «электронный пучок - плазма» и поглощение энергии ВЧ колебаний  $\theta$  - различные параметры).

Уравнения движения ионов имеют вид

$$\frac{dv_s}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{m_e \omega_p^2}{M \delta^2} \right) \sum_{n \neq 0; \pm 1} \frac{1}{|n|} \{ \bar{E}_{nr} \cos(2\pi n \xi_s) - \bar{E}_{ni} \sin(2\pi n \xi_s) \}, \quad (3)$$

$$\frac{d\xi_s}{d\tau} = v_s, \quad (4)$$

где параметром является величина  $\frac{m_e \omega_p^2}{M \delta^2} = 0.43$ .

Для безразмерной плотности ионов  $M_n = M_{nr} + iM_{ni}$  используются выражения

$$M_{nr} = \left(\frac{\omega_0}{\delta}\right) \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \text{Cos}(2\pi n \cdot \xi_s) \cdot d\xi_{s0}, \quad (5)$$

$$M_{ni} = -\left(\frac{\omega_0}{\delta}\right) \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \text{Sin}(2\pi n \cdot \xi_s) \cdot d\xi_{s0}. \quad (6)$$

В выражения (5)-(6) входит параметр  $\omega_0 / \delta = \omega_p / \delta$ .

Безразмерная напряженность медленно меняющегося электрического поля  $\bar{E}_n = \bar{E}_{nr} + i\bar{E}_{ni}$

$$\bar{E}_{nr} = \frac{|n|}{n} \left(\frac{\delta}{\omega_{pe}}\right) M_{ni} [1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n)] + \frac{1}{2} J_1(a_n) [e_n \cdot \text{Cos}(-\phi + \psi_n) - e_{-n} \text{Cos}(\phi - \psi_{-n})] + \quad (7)$$

$$+ \frac{1}{4} |n| J_0(a_n) \sum_{m \neq 0; \pm 1; n, n \pm 1} \frac{1}{|m| |n-m|} e_{-m} \cdot e_m \text{Sin}(\psi_{n-m} - \psi_{-m})$$

$$+ \frac{1}{4} |n| J_2(a_n) \sum_{m \neq 0; \pm 1; n, n \pm 1} \frac{(n-m)}{|m| |n-m|} [e_{n-m} \cdot e_m \cdot \text{Sin}(\psi_{n-m} + \psi_m - 2\phi) + e_{-n+m} \cdot e_{-m} \cdot \text{Sin}(2\phi - \psi_{-n+m} - \psi_{-m})],$$

$$\bar{E}_{ni} = -\frac{|n|}{n} \left(\frac{\delta}{\omega_p}\right) M_{nr} [1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n)] + \frac{1}{2} J_1(a_n) [e_n \text{Sin}(-\phi + \psi_n) - e_{-n} \text{Sin}(\phi - \psi_{-n})] - \quad (8)$$

$$- \frac{1}{4} |n| J_0(a_n) \sum_{m \neq 0; \pm 1; n, n \pm 1} \frac{1}{|m| |n-m|} e_{-m} \cdot e_m \text{Cos}(\psi_{n-m} - \psi_{-m})$$

$$- \frac{1}{4} |n| J_2(a_n) \sum_{m \neq 0; \pm 1; n, n \pm 1} \frac{(n-m)}{|m| |n-m|} [e_{n-m} \cdot e_m \cdot \text{Cos}(\psi_{n-m} + \psi_m - 2\phi) + e_{-n+m} \cdot e_{-m} \cdot \text{Cos}(2\phi - \psi_{-n+m} - \psi_{-m})].$$

Выражения для безразмерной амплитуды и фазы внешней волны

$$\frac{\partial a_0}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \sum_{m \neq 0; \pm 1} \frac{1}{|m|} \{M_{-mr} [e_{-m} \cdot J_2(a_m) \text{Cos}(\phi - \psi_{-m}) + e_m \cdot J_0(a_m) \text{Cos}(\psi_m - \phi)] - \quad (9)$$

$$- M_{-mi} [e_{-m} \cdot J_2(a_m) \text{Sin}(\phi - \psi_{-m}) + e_m \cdot J_0(a_m) \text{Sin}(\psi_m - \phi)]\},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2a_0} \sum_{m \neq 0; \pm 1} \frac{1}{|m|} \{M_{-mr} [e_{-m} \cdot J_2(a_m) \text{Sin}(\phi - \psi_{-m}) + e_m \cdot J_0(a_m) \text{Sin}(\psi_m - \phi)] - \quad (10)$$

$$+ M_{-mi} [e_{-m} \cdot J_2(a_m) \text{Cos}(\phi - \psi_{-m}) + e_m \cdot J_0(a_m) \text{Cos}(\psi_m - \phi)]\}.$$

**Модель взаимодействия пучка электронов с плазмой в условиях конечного уровня диссипации [15].** Уравнения амплитуды  $A_{0p}$  и фазы  $\varphi_{0p}$  мод спектра:

$$\frac{1}{p} \frac{\partial A_{0p}}{\partial \tau} + \Theta \frac{A_{0p}}{p} = -R_{0p} \int_{-1/2}^{1/2} (1 + V_b / V_{0b}) \text{sin}(2\pi p \zeta_b - \varphi_{0p}) d\zeta_0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi_{0p}}{\partial \tau} + \Delta_p = R_{0p} \frac{p}{A_{0p}} \int_{-1/2}^{1/2} (1 + V_b / V_{0b}) \text{cos}(2\pi p \zeta_b - \varphi_{0p}) d\zeta_0, \quad (12)$$

где  $R_{0p} = \frac{2\gamma_{b0}^3 p^2}{p_0 p^2 + p_0^2} G$ ,  $G = 1$ ,  $V_{0b} = \frac{\omega_{pe}}{\delta} \frac{1}{2\pi p_0}$ ,  $\Delta_p = \frac{\omega_{pe}}{\delta} \frac{p}{p_0} \frac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2}$ ,  $\frac{\omega_{pe}}{\delta} = 29.4$ .

Амплитуда  $a_0$  и фаза  $\phi_0$  возбуждаемых пучком электронов длинноволновых ленгмюровских колебаний в фиксированной точке в лабораторной системе отсчета:

$$a_0 = p_0 \left(\frac{\delta}{\omega_{pe}}\right)^2 \sqrt{\left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \cos(\phi_{0p}')\right]^2 + \left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \sin(\phi_{0p}')\right]^2}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial \tau} = & \left\{ \cos(\phi_0) \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \left[ \frac{\partial A_{0p}}{\partial \tau} \frac{1}{p} \sin(\phi_{0p}') + \frac{A_{0p}}{p} \cos(\phi_{0p}') \frac{\partial \phi_{0p}'}{\partial \tau} \right] - \right. \\ & \left. - \sin(\phi_0) \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \left[ \frac{\partial A_{0p}}{\partial \tau} \frac{1}{p} \cos(\phi_{0p}') - \frac{A_{0p}}{p} \sin(\phi_{0p}') \frac{\partial \phi_{0p}'}{\partial \tau} \right] \right\} / \\ & \sqrt{\left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \cos(\phi_{0p}')\right]^2 + \left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \sin(\phi_{0p}')\right]^2}, \quad (14) \end{aligned}$$

где  $\phi_{0p}' = \phi_{0p} + \frac{\omega_{pe}}{\delta} \frac{(p - p_0)\tau}{p_0}$ .

Уравнения движения частиц, моделирующих пучок:

$$\frac{d\zeta_b}{d\tau} = V_b, \quad (15)$$

$$\frac{dV_b}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\gamma_b^3} \sum_{p=1}^P \frac{A_{0p}}{p} \sin(2\pi p \zeta_b - \phi_{0p}), \quad (16)$$

где  $\gamma_b = \gamma_b(\tau) = [1 - V_{0b}^2 (1 + \frac{V_b}{V_{0b}})^2 / C^2]^{-1/2}$ ,  $C = \frac{1}{2\pi p_0} \frac{\omega_{pe}}{\delta} \frac{1}{\beta_0}$ ,  $\beta_0 = (1 - \gamma_{b0}^{-2})^{1/2}$ .

**Влияние двух обсуждаемых моделей друг на друга при их объединении.**

Влияние модели Силина на модель «электронный пучок - плазма» осуществляется через использование поглощения  $\Theta \frac{A_{0p}}{p}$  в уравнении  $A_{0p}$  (11), как и в работах [15, 16].

Влияние модели «электронный пучок - плазма» на модель Силина осуществляется через использование в последней уравнений  $a_0, \phi_0$  (13,14), а также через использование в рамках объединенной модели в уравнении  $\frac{\partial \psi_n}{\partial \tau}$  (2)

величины фазовой расстройки  $\Delta = -\frac{\partial \phi_0}{\partial \tau}$ , в то время как в отдельной модели Силина ранее использовалось  $\Delta = 1$ :

После выхода значения  $a_0$  на максимум уравнение  $a_0$  из модели «электронный пучок - плазма» (13) заменяется на уравнение  $a_0$  из отдельной модели Силина (9). Благодаря такой замене обеспечивается спадание  $a_0$  до

близких к нулю значений. Без проведения замены после выхода на максимум  $a_0$  спадает слабо, а затем сильно осциллирует.

**Закон сохранения энергии в системе.**

Для модели «электронный пучок - плазма» выполняется соотношение, представляющее собой закон сохранения энергии [15]

$$\sum_{p=1}^P \frac{p^2 + p_0^2}{8\pi p^2} \frac{A_{0p}^2}{p^2} + 2\Theta \sum_{p=1}^P \left( \frac{p^2 + p_0^2}{8\pi p^2} \sum_0^\tau \frac{A_{0p}^2}{p^2} \partial\tau \right) + 2\pi C^2 \gamma_{b0}^3 \frac{\delta}{\omega_{pe}} G \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N (\gamma_b - \gamma_{b0}) = const, \quad (17)$$

где первое слагаемое отвечает за плотность энергии поля продольных колебаний в текущий момент, второе - за энергию, потерянную за счет диссипативных механизмов поглощения энергии колебаний в плазме (столкновительная диссипация) в единице объема, третье - определяет энергию, потерянную частицами пучка в единице объема.

Закон сохранения энергии для модели Силина имеет вид

$$\frac{a_0^2}{4\pi p_0^2} + \frac{\omega_{pe}^4}{\delta^4} \frac{1}{p_0^2} \frac{1}{16\pi} \sum_n \frac{e_n^2}{n^2} + \frac{\omega_{pe}^4}{\delta^4} \frac{1}{p_0^2} \frac{\theta}{8\pi} \int_0^\tau d\tau' \sum_n \frac{n^6}{n_M^6} \cdot \frac{e_n^2(\tau')}{n^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\delta^2} \frac{\pi}{2p_0^2} \frac{M}{m_{eo}^{-1/2}} \int \left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 \cdot d\xi_0 = Const. \quad (18)$$

Здесь (18) энергия интенсивной длинноволновой ленгмюровской волны (1-е слагаемое) переходит сначала в энергию ВЧ ленгмюровского коротковолнового спектра (2-е слагаемое). Затем ВЧ поле вследствие затухания на электронах выгорает, передавая свою энергию электронам плазмы (3-е слагаемое). Каверны в этих условиях «схлопываются», возбуждаются НЧ волны, траектории ионов пересекаются и энергия «схлопнувшихся» каверн и НЧ спектра передается ионам (4-е слагаемое) [19]:

В рамках объединенной модели 2-е слагаемое выражения (17) соответствует сумме 2,3,4 слагаемых в выражении (18):

$$2\Theta \sum_{p=1}^P \left( \frac{p^2 + p_0^2}{8\pi p^2} \sum_0^\tau \frac{A_{0p}^2}{p^2} \partial\tau \right) = \frac{\omega_{pe}^4}{\delta^4} \frac{1}{p_0^2} \frac{1}{16\pi} \sum_n \frac{e_n^2}{n^2} + \frac{\omega_{pe}^4}{\delta^4} \frac{1}{p_0^2} \frac{\theta}{8\pi} \int_0^\tau d\tau' \sum_n \frac{n^6}{n_M^6} \cdot \frac{e_n^2(\tau')}{n^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\delta^2} \frac{\pi}{2p_0^2} \frac{M}{m_{eo}^{-1/2}} \int \left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 \cdot d\xi_0. \quad (19)$$

где сумма слагаемых в правой части (19) отвечает поглощению энергии поля, возбуждаемого пучком электронов в плазме.

**Переменное значение поглощения  $\Theta$ .**

В работе [15] рассмотрены случаи постоянного значения поглощения в модели «электронный пучок - плазма»  $\Theta = 0; 0.1; 0.3; 0.7; 1; 3; 5; 7$ .

Из выражения (19) можно рассчитывать значение  $\Theta$ , которое будет изменяться со временем  $\tau$ :

$$\Theta = \frac{\frac{\omega_{pe}^4}{\delta^4} \frac{1}{p_0^2} \frac{1}{16\pi} \sum_n \frac{e_n^2}{n^2} + \frac{\omega_{pe}^4}{\delta^4} \frac{1}{p_0^2} \frac{\theta}{8\pi} \int_0^\tau d\tau' \sum_n \frac{n^6}{n_M^6} \cdot \frac{e_n^2(\tau')}{n^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\delta^2} \frac{\pi}{2p_0^2} \frac{M}{m_{eo}} \int_{-1/2}^{1/2} (d\xi)^2 \cdot d\xi_0}{2 \sum_{p=1}^P \left( \frac{p^2 + p_0^2}{8\pi p^2} \sum_0^\tau \frac{A_{0p}^2}{p^2} \partial\tau \right)}. \quad (20)$$

Рассчитанное значение  $\Theta$  подставляется в уравнение (11).

### 3. Постановка задачи и начальные условия

Для выполнения цели работы проводится численный эксперимент на графическом процессоре с использованием технологии compute unified device architecture (CUDA) для ускорения вычислений. Применение CUDA детально описано в [17]. Численный эксперимент представляет собой решение задачи Коши методом Эйлера.

На первом этапе в рамках объединенной модели подбирается такое значение  $\Theta$ , чтобы выполнялось равенство в выражении (19). Также подбирается такое значение релятивистского фактора  $\gamma_0$ , при котором  $a_{0\max}$  близко к значению 0.06. Это связано с тем, что в модели Силина  $a_0|_{\tau=0} = a_{0\max} = 0.06$ . Также определяются значения  $p_{\min}; p_{\max}$  из значений средней полуширины спектра, как это показано в [15]. Вычислительный эксперимент, как и в предыдущих работах [14, 17-19], продолжается пока энергия ионов  $\sum_s (d\xi_s/dt)^2$  в модели

Силина не выйдет на постоянное значение.

На втором этапе в рамках объединенной модели рассчитывается переменное значение поглощения  $\Theta$  из уравнения (20) и подставляется в уравнение (11) в каждый момент времени. При этом ожидается, что равенство в выражении (19) будет выполняться.

На третьем этапе сравниваются полученные в рамках объединенной модели результаты с результатами отдельной модели Силина.

Значения параметров модели «электронный пучок - плазма» соответствуют работе [15]. Число мод спектра  $P = 150$ . Значение  $p_0 = 100$ . Число частиц пучка  $I = 50 \cdot P = 7500$ . Частицы равномерно распределены в начальный момент времени на интервале  $-0.5 < \zeta_b < 0.5$ , скорости частиц  $V_b|_{\tau=0} = 0$ .

Начальные значения  $\frac{A_{0p}}{p}|_{\tau=0} = 10^{-5}$ ,  $\varphi_{0p}|_{\tau=0} \in [0; 2\pi]$  – случайное число,

$$a_0|_{\tau=0} = p_0 \left( \frac{\delta}{\omega_{pe}} \right)^2 \sqrt{\left[ \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \cos(\varphi_{0p}') \right]^2 + \left[ \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \sin(\varphi_{0p}') \right]^2}, \quad \phi_0|_{\tau=0} = 0.$$

Значения параметров модели Силина соответствуют работе [18]. Количество частиц, моделирующих ионы  $S = 20000$ . Частицы равномерно распределены на интервале  $-1/2 < \xi < 1/2$ ,  $v_s|_{\tau=0} = 0$ . Число мод спектра  $-N < n < N$ ,  $N = S/100$ .

Начальная амплитуда ВЧ мод задается формулой  $e_n|_{\tau=0} = e_{n0} = (2 + g) \cdot 10^{-3}$ , где

$g \in [0;1]$  - случайное число,  $\psi_n|_{\tau=0}$  также случайным образом распределены в интервале  $0 \div 2\pi$ . Поглощение энергии ВЧ колебаний  $\theta \cdot n^6 / n_M^6; \theta = 0.05; n_M = 20$ .

#### 4. Результаты численного эксперимента

##### *Подбор значения $\Theta$ , при котором выполняется равенство (19).*

В работе [15] было определено, что для значений  $\Theta \approx 0.6$  скорость отбора энергии у пучка наибольшая. Поэтому проверяется выполнение равенства в выражении (19) для значений  $\Theta$  вблизи 0.6 (рис.1). Для  $\Theta = 0.3$  подобран релятивистский фактор  $\gamma_0 = 5.25$ , при котором  $a_{0\max} = 0.05996$ . Для  $\Theta = 0.5$  подобран  $\gamma_0 = 5.21$ , при котором  $a_{0\max} = 0.05996$ . Для  $\Theta = 0.7$  подобран  $\gamma_0 = 4.926$ , при котором  $a_{0\max} = 0.05994$ . Во всех трех случаях  $\Theta = 0.3; 0.5; 0.7$  определены значения  $p_{\min} = 96; p_{\max} = 104$ .

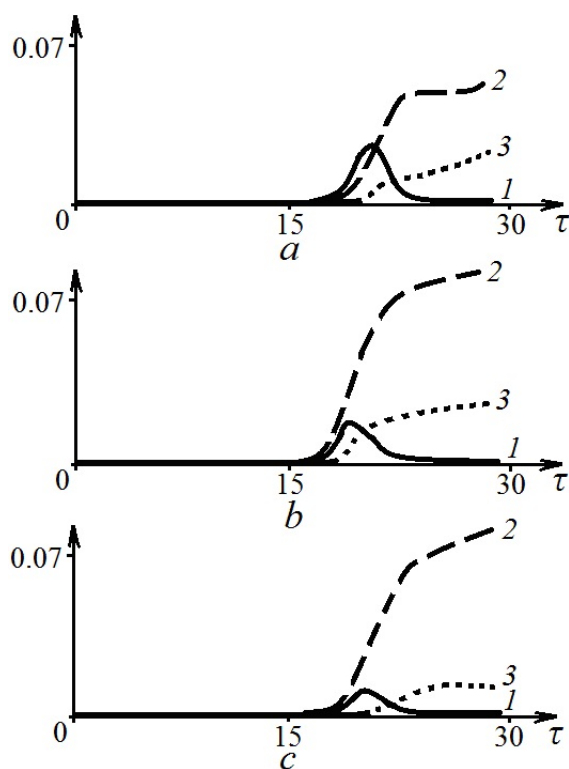


Рис.1. Поведение энергии поля (кривая 1), поглощения (кривая 2) и кривой 3 - суммы 2,3,4 слагаемых в выражении (18) от времени (a -  $\Theta = 0.3$ , b -  $\Theta = 0.5$ , c -  $\Theta = 0.7$ )

Из рисунка 1 видно, что при уменьшении поглощения  $\Theta$  разница между кривыми 2 и 3, составляющими равенство (19), сокращается. Поэтому далее рассматриваются случаи еще более низкого значения поглощения  $\Theta = 0.03; 0.05; 0.07$ . Для всех трех случаев  $\Theta = 0.03; 0.05; 0.07$  подобран релятивистский фактор  $\gamma_0 = 4.085$  и определены значения  $p_{\min} = 96; p_{\max} = 104$ .



Для  $\Theta = 0.03$  получено  $a_{0\max} = 0.0598$ . Для  $\Theta = 0.05$  получено  $a_{0\max} = 0.0601$ . Для  $\Theta = 0.07$  получено  $a_{0\max} = 0.0603$ . Из рисунка 2 видно, что равенство в выражении (19) лучше всего выполняется при  $\Theta = 0.05$ .

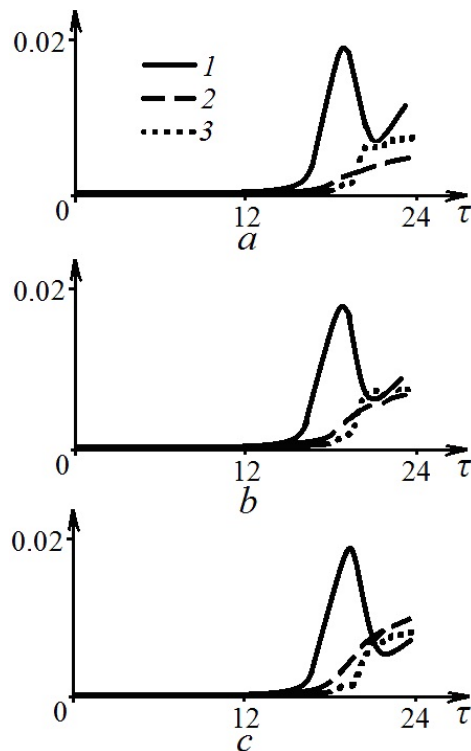


Рис.2. Поведение энергии поля (кривая 1), поглощения (кривая 2) и кривой 3 - суммы 2,3,4 слагаемых в выражении (19) от времени (а -  $\Theta = 0.03$ , б -  $\Theta = 0.05$ , в -  $\Theta = 0.07$ )

#### **Вычисление переменного значения поглощения $\Theta$**

Переменное значение поглощения  $\Theta$  рассчитывается из уравнения (20) и подставляется в уравнение (11) в каждый момент времени. Из рис.3 видно, что на начальной стадии численного эксперимента рассчитанное значение  $\Theta$  оказывается слишком большим.

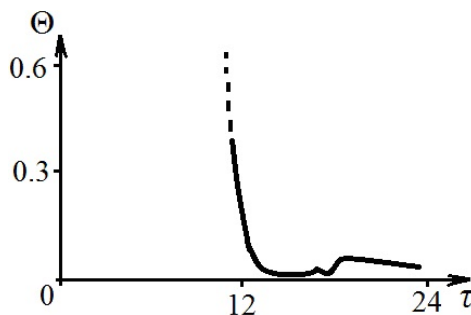


Рис.3. Поведение рассчитанного значения поглощения  $\Theta$  от времени

Поэтому на начальной стадии численного эксперимента используется постоянное значение  $\Theta = 0.05$ , при котором, как было определено выше, выполняется равенство в выражении (19). После того, как рассчитанное значение поглощения станет меньше  $\Theta = 0.05$ , до конца счета в уравнение (11) будет подставляться именно рассчитанное  $\Theta$ , даже если оно затем превысит  $\Theta = 0.05$  (рис.4).

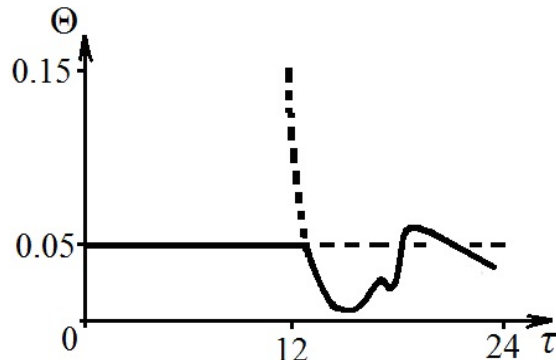


Рис.4. Подставляемое значение поглощения  $\Theta$  в уравнение (11) от времени. Сначала подставляется постоянное значение  $\Theta = 0.05$ , затем рассчитанное  $\Theta$ . Пунктиром показаны не используемые значения  $\Theta$

В результате получается полное совпадение составляющих равенства (19). При этом кривая 2 из рисунка 5 совпадает с кривой 3 из рисунка 2б.

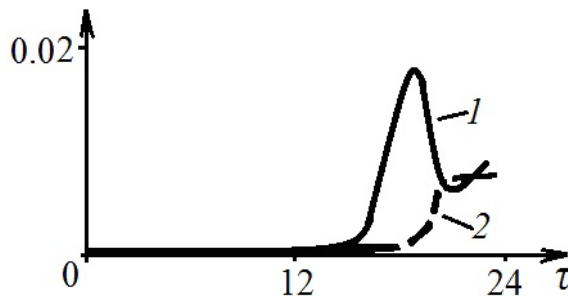


Рис.5. Поведение энергии поля (кривая 1), кривой 2 - совпадающих составляющих равенства (19) от времени

#### **Сравнение результатов**

В рамках объединенной модели для обеспечения спада амплитуды основной волны  $a_0$  (рис.6) после выхода  $a_0$  на максимум уравнение (13) заменяется на уравнение (9).

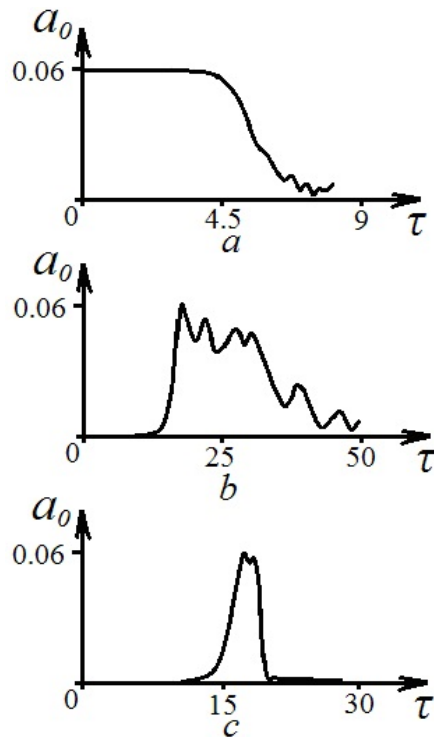


Рис.6. Поведення  $a_0$  в одній моделі Силина (а), в одній моделі «електронний пучок - плазма» (б), в об'єднаній імітаційній моделі (с)

Вычислительный эксперимент продолжается до выхода энергии ионов на постоянное значение (рис.7). В объединенной модели кривая поведения энергии ионов от времени (кривая 2 рисунка 7) совпадает для случаев постоянного поглощения  $\Theta = 0.05$  и переменного поглощения (рис.4):

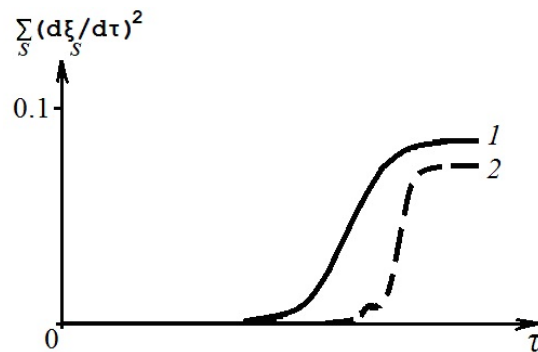


Рис.7. Энергия ионов  $\sum_s (d\xi_s / dt)^2$  от времени (1 - в отдельной модели Силина, 2 - в объединенной модели)

Найдены отличия в распределении ионов по скоростям от наиболее близкого нормального распределения (способ нахождения отличий показан в [18]). Для

отдельной модели Силина отличия составляют 13%, в объединенной модели отличия меньше и составляют для  $\Theta = 0.05$  - 8,3%, для переменного  $\Theta$  - 8,1% (рис. 8).

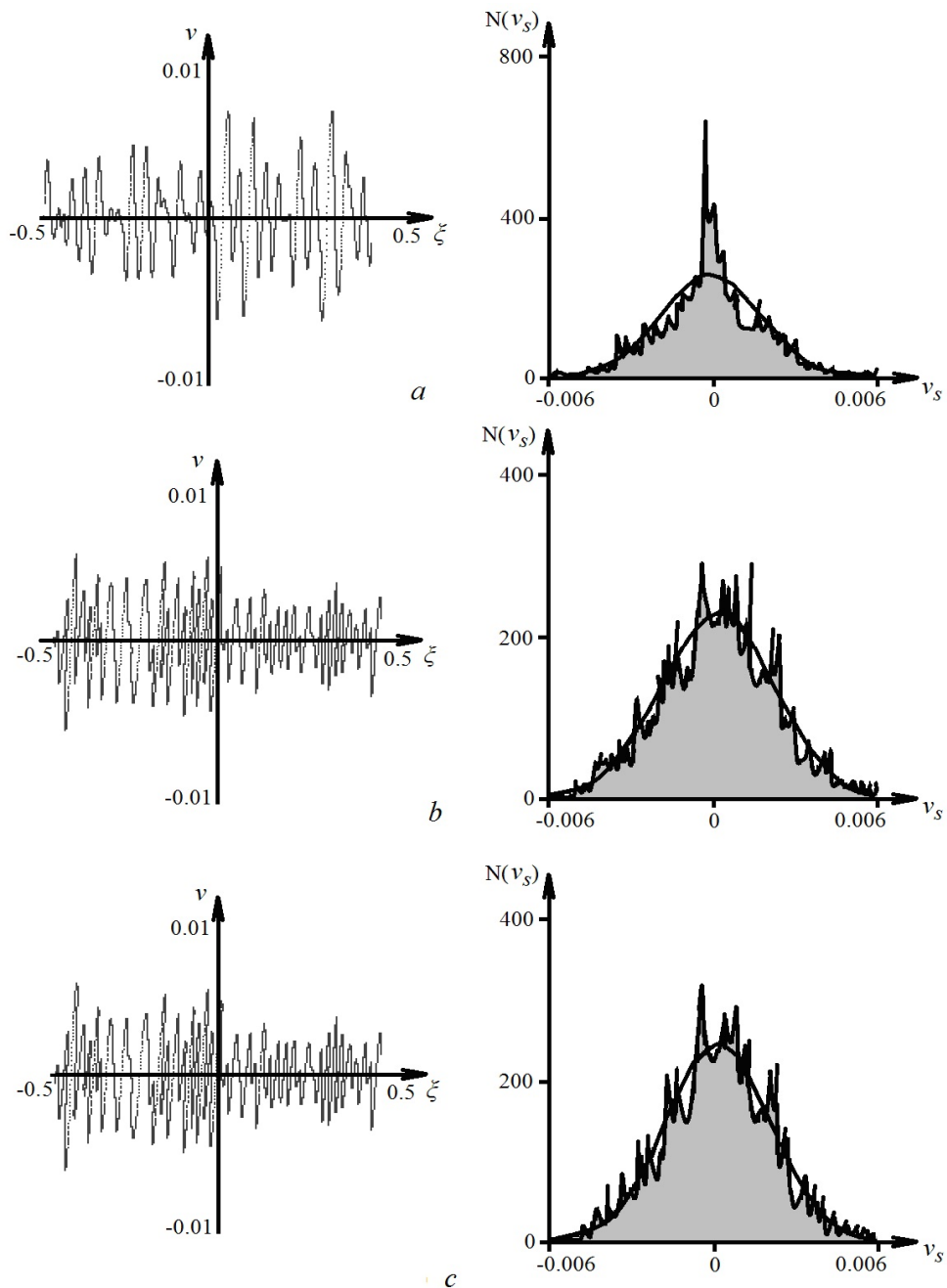


Рис.8. Ионы на плоскости  $(\xi, v)$  (слева) и распределение ионов по скоростям (справа) (a - в отдельной модели Силина, b - в объединенной модели для  $\Theta = 0.05$ , c - в объединенной модели для переменного  $\Theta$ )

## 5. Выводы

Создана имитационная модель взаимодействия релятивистского пучка электронов с плазмой путем объединения 1D модели «электронный пучок - плазма» и 1D гибридной модели модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн в плазме (модель Силина) с имитацией влияния плазменных колебаний на пучок через параметр поглощения  $\Theta$ . Определено, что степень влияния плазменных колебаний на пучок наиболее близко соответствует значению  $\Theta = 0.05$ .

Показано использование переменного значения  $\Theta$ , которое рассчитывается из законов сохранения энергии рассматриваемых моделей. При переменном значении поглощения  $\Theta$  степень влияния плазменных колебаний на пучок и степень развития модуляционной неустойчивости соответствуют постоянному значению  $\Theta = 0.05$ .

Корректность имитационной модели подтверждается наблюдением за развитием неустойчивости в численных экспериментах. Действительно, при возбуждении пучком интенсивной волны происходит быстрое развитие модуляционной неустойчивости, которая насыщается за время медленных осцилляций поля, возбуждаемого пучком. При насыщении модуляционной неустойчивости каверны в плазме успевают «схлопнуться», потери энергии внешней волны (играющей роль накачки для модуляционной неустойчивости) уменьшаются и поле, возбуждаемое пучком, восстанавливает свое максимальное значение, качественно сохраняя динамику, характерную для пучково-плазменного взаимодействия.

Автор выражает благодарность Куклину В.М. за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Файнберг Я. Б. Плазменная электроника. // Укр. физ. журн. 1978, Т. 23, № 11, с. 1885–901. Некоторые вопросы плазменной электроники // Физика плазмы. 1985, Т.11, № 11, с. 1398–1410.
2. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 336с.
3. Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Взаимодействие волна–частица в неравновесных средах. // Радиофизика, 1976, Т.19, №5–6, с.787–791.
4. Кондратенко А.Н., Куклин В.М. Основы плазменной электроники. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 320с.
5. Буц В.А., Лебедев А.Н. Когерентное излучение интенсивных электронных пучков. – М. Изд. ФИАН РАН. 2006. – 333с.
6. Силин В.П. Параметрический резонанс в плазме. ЖЭТФ, 1965, т. 48, в.6, с. 1679–1691.
7. Захаров В.Е. О спектре слабой турбулентности в плазме без магнитного поля. ЖЭТФ, 1966, том 51, вып.6., стр. 688–696.
8. Krueger, W. L., P. K. Kaw, J. M. Dawson, C. Oberman, Anomalous high-frequency resistivity and heating of a plasma, 1970, Phys. Rev. Lett., 24, p.987.
9. Силин В.П. Аномальная нелинейная диссипация высокочастотных радиоволн в плазме. УФН 1972, том 108, вып. 4., стр. 625–654.

10. Kruer W.L. Heating of underdense plasma by intense lasers. *Phys. Fluids*. 1973, V.16, N.9, p.1548–1550.
11. Иванов А.А. Никулин М.Г. Нелинейное взаимодействие ленгмюровских волн большой амплитуды в бесстолкновительной плазме. *ЖЭТФ*, 1973, т.65, №1, с.168–174.
12. Андреев Н.Е. Силин В.П., Стенчиков Г.Л. О насыщении параметрической неустойчивости плазмы в сильном электрическом поле. *Физика плазмы*. 1977, Т.3, №5, с.1088–1096.
13. Коврижных Л.М. Модуляционная неустойчивость и нелинейные волны в холодной плазме. *Физика плазмы*. 1977, Т.3, В.5, с. 1097–1105.
14. Belkin E.V., Kirichok A.V., Kuklin V.M., Pryjmak A.V., Zagorodny A.G. Dynamics of ions during development of parametric instability of langmuir waves/ *VANT*, 2013, N.4 (86). – series “Plasma Electronics and New Methods of Acceleration” issue 8. P.260–266.
15. Куклин В. М., Приймак А. В. Анализ модели системы «релятивистский электронный пучок-плазма». // *Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления"* (в печати).
16. Загородний А.Г., Киричок А.В., Куклин В.М., Приймак А.В. Модуляция интегрального поля многомодовых пучковых неустойчивостей в плазме // *East Eur. J. Phys.* 2014. V.1 no.2. – С.53–66.
17. Приймак А.В. Анализ гибридных моделей модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн в плазме. // *Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина*, - 2013. - № 1089. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 23. - С. 145-162.
18. Загородний А.Г., Киричок А.В., Куклин В.М., Приймак А.В. Особенности нагрева ионов при развитии неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме. // *Журнал "Физические основы приборостроения"*. - 2014. - Том 3, №1. - С.58-69.
19. Kirichok A.V., Kuklin V.M., Pryimak A.V. Zagorodny A.G. Ion heating, burnout of the HF field and ion sound generation with the development of modulation instability of an intensive Langmuir wave in a plasma. (в печати).
20. Kuklin V.M. Similarity of 1D Parametric Instability description of Langmuir waves. / *The Journal of Kharkiv National University, physical series: Nuclei, Particles, Fields*. – 2013. - №1041. - Iss.2(58). - P.20-32.

УДК 539.3:534.1

## Моделювання відгуку багатошарового оскління на статичне і динамічне навантаження

Н. В. Сметанкіна, С. В. Угримов, О. М. Шупіков

*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, Україна*

Запропоновано метод дослідження напружено-деформованого стану багатошарових елементів оскління літаків під впливом різних експлуатаційних факторів. Метод ґрунтується на уточненій моделі оскління та методі занурення області складної форми у плані в область канонічної форми. Задача зводиться до інтегрування системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь. Досліджено деформації та напруження у шарах елементів оскління під дією імпульсного та статичного навантажень. Теоретичні результати дослідження добре узгоджуються з експериментальними даними.

**Ключові слова:** багатошарове оскління, імпульсне навантаження, надлишковий тиск, метод занурення.

Предложен метод исследования напряженно-деформированного состояния многослойных элементов остекления самолетов при воздействии разных эксплуатационных факторов. Метод основывается на уточненной модели остекления и методе погружения области сложной формы в плане в область канонической формы. Задача сводится к интегрированию системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Исследованы деформации и напряжения в слоях элементов остекления под действием импульсной и статической нагрузок. Теоретические результаты исследования хорошо согласуются с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** многослойное остекление, импульсное нагружение, избыточное давление, метод погружения.

The method for analysis of the stress-strained state of laminated elements of the airplane glazing at effect of different operational factors is proposed. The method is based on the advanced glazing model and the method of immersing of an area of complicated shape in plan view to a canonical shape area. The problem is reduced to integration of systems of the singular integral-differential equations. Strains and stresses in layers of glazing elements under impulse and static loading are investigated. The theoretical results are consistent with experimental data.

**Keywords:** laminated glazing, impulse loading, overpressure, immersion method.

### 1. Вступ

Розвиток авіаційної техніки потребує удосконалення матеріалів, конструкцій і технологій виробництва оскління для кабін пілотів. Одним з найбільш важливих конструктивних елементів літальних апаратів є лобове оскління (ліхтарі й кабіни пілотів), тому що від його міцності залежить безпека екіпажа.

Збільшення швидкості й розмірів літаків, розширення мережі маршрутів і інтенсивності авіаційних вантажних і пасажирських перевезень приводять до зростання кількості зіткнень літальних апаратів із птахами [1, 2].

У більшості випадків проектування птахостійких елементів конструкцій літака здійснюється на основі експериментальних даних шляхом емпіричного підбору композиції пакета. Теоретичне обґрунтування конструкторських рішень практично відсутнє. Це пояснюється складністю розв'язання задач нестационарної динаміки багатошарових конструкцій при імпульсному й

ударному навантаженні, а також складністю опису процесу зіткнення із птахом [3, 4].

Велике значення для забезпечення нормального польоту має надійний і високоефективний захист від наддуву кабіни – статичного навантаження, яке виникає через перепад тисків зовні та всередині кабіни.

Таким чином, розробка методів розрахунку нестационарних коливань та напруженого стану багатошарового оскління є актуальним питанням.

Метою роботи є розробка методу розрахунку параметрів напружено-деформованого стану елементів багатошарового оскління при впливі статичних та динамічних навантажень, який дозволяє подати розв'язок задачі в аналітичному вигляді.

## 2. Постановка задачі

Будемо розглядати багатошарове скло як незамкнену шарувату циліндричну оболонку радіуса  $R$ , яка складена з  $I$  ізотропних шарів сталої товщини. На координатній поверхні  $xOy$  оболонка займає область  $\Omega$ , обмежену довільним контуром  $\Gamma$ :  $x_\Gamma = x_\Gamma(s)$ ,  $y_\Gamma = y_\Gamma(s)$  ( $s$  – поточна довжина дуги). За координатну поверхню приймається зовнішня поверхня першого шару. Координата  $x$  змінюється вздовж твірної, координата  $y$  – вздовж дуги поперечного перерізу оболонки. Додатний напрям осі  $Oz$  збігається з напрямом зовнішньої нормалі до координатної поверхні. На оболонку діють нестационарні навантаження  $\mathbf{P} = \{p_j(x, y, t)\}$ ,  $j = \overline{1, 3I+3}$ . Динамічна поведінка оболонки описується на основі кінематичних гіпотез, які враховують деформації поперечного зсуву, обтиснення вздовж товщини та інерції обертання нормального елемента у межах кожного шару [5, 6]

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I(k-1)+i}, \quad k = 1, 2, 3, \quad i = \overline{1, I}, \quad (1)$$

де  $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$ ,  $\delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i$ ;  $h_i$  – товщина  $i$ -го шару;  $u_k = u_k(x, y, t)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) –

переміщення точки координатної поверхні в напрямку координатних осей;  $u_{3+I(k-1)+i} = u_{3+I(k-1)+i}(x, y, t)$  ( $k = 1, 2$ ) – кути повороту нормального елемента в  $i$ -му шарі навколо координатних осей  $Ox$  та  $Oy$ ;  $u_{3+2I+i} = u_{3+2I+i}(x, y, t)$  – обтиснення нормального елемента в  $i$ -му шарі;  $t$  – час.

Деформації шарів визначаються відповідно до формул Коші. Напруження і деформації в шарах зв'язані законом Гука. Рівняння руху багатошарової оболонки та граничні умови виводяться на основі варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона з урахуванням гіпотез (1)

$$\mathbf{M} \mathbf{U}_{,tt} + \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{,t} = 0, \quad t = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{B}^\Gamma \mathbf{U} = \mathbf{P}^\Gamma, \quad (3)$$

де  $\mathbf{U}$  – вектор, компонентами якого є шукані функції переміщень (1);  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{A}$  – квадратні матриці порядку  $3I+3$  [5, 6];  $\mathbf{P}$  – вектор навантажень. Вигляд



елементів матриці  $\mathbf{V}^\Gamma$  та вектора граничних навантажень  $\mathbf{P}^\Gamma$  залежить від граничних умов на контурі оболонки [5, 6].

У випадку статичного навантаження система рівнянь руху оболонки перетворюється на систему рівнянь рівноваги.

### 3. Метод розв'язання

Розв'язання отриманої системи рівнянь (2) здійснюється методом занурення [5, 6]. Згідно з цим методом замість вихідної оболонки складної форми у плані розглядається допоміжна шарнірно оперта циліндрична оболонка прямокутної форми у плані того ж радіуса кривини, з тією ж композицією шарів. В області  $\Omega$  допоміжна оболонка навантажена так само, як і вихідна оболонка. Тотожність напружено-деформованого стану в області  $\Omega$  допоміжної оболонки стану вихідної оболонки забезпечується шляхом додавання компенсуючих навантажень  $q_j^{\text{comp}}(s, t)$ ,  $j = \overline{1, 3I+3}$ , які неперервно розподілені вздовж контуру  $\Gamma$ .

Компенсуючі навантаження входять у рівняння руху допоміжної оболонки у вигляді таких інтегральних співвідношень:

$$p_j^{\text{comp}}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{3I+3} \oint_{\Gamma} \zeta_{jk} q_k^{\text{comp}}(s, t) \delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma) ds, \quad j, k = \overline{1, 3I+3},$$

де  $\delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma)$  – двовимірний  $\delta$ -функція.

Елементи матриці  $\zeta_{jk}$ , що не дорівнюють нулю, мають вигляд

$$\zeta_{11} = \zeta_{22} = \zeta_{3+i, 3+i} = \zeta_{3+I+i, 3+I+i} = y'_\Gamma, \quad \zeta_{33} = \zeta_{3+2I+i, 3+2I+i} = 1,$$

$$\zeta_{12} = \zeta_{3+i, 3+I+i} = x'_\Gamma, \quad \zeta_{21} = \zeta_{3+I+i, 3+i} = -x'_\Gamma, \quad i = \overline{1, I},$$

де  $x'_\Gamma = \frac{dx_\Gamma}{ds}$ ,  $y'_\Gamma = \frac{dy_\Gamma}{ds}$ .

Компенсуючі навантаження визначаються з розв'язку системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, в основі якої лежать граничні умови вихідної оболонки (3). Метод розв'язання цієї системи полягає в тому, що переміщення  $U$  та навантаження розвиваються в тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють умови шарнірного опирання допоміжної прямокутної оболонки

$$u_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{jmn}(t) B_{jmn}(x, y), \quad p_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}(t) B_{jmn}(x, y), \quad (4)$$

$$p_j^{\text{comp}}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^{\text{comp}}(t) B_{jmn}(x, y),$$

$$B_{1mn} = \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad B_{2mn} = \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \quad B_{3mn} = \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$B_{3+i, mn} = B_{1mn}, \quad B_{3+I+i, mn} = B_{2mn}, \quad B_{3+2I+i, mn} = B_{3mn},$$

$$p_{jmn}(t) = \frac{4}{AB} \int_0^{\frac{AB}{2}} \int_0^{\frac{AB}{2}} p_j(t) B_{jmn}(x, y) dx dy,$$

$$p_{jmn}^{\text{comp}}(t) = \frac{4}{AB} \sum_{k=1}^{3I+3} \oint_{\Gamma} \zeta_{jk} q_k^{\text{comp}}(s,t) B_{jmn}(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}) ds;$$

$$\alpha_m = m\pi/A, \beta_n = n\pi/B, m = \overline{1, m^*}, n = \overline{1, n^*}, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, 3I+3},$$

де  $A$  – довжина твірної допоміжної оболонки;  $B$  – довжина прямої цієї оболонки.

Крім того, функції компенсуючих навантажень і граничних переміщень розвиваються в ряд уздовж контуру  $\Gamma$  [5, 6]

$$q_j^{\text{comp}}(s,t) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{j\alpha\mu}(t) d_{\alpha\mu}(s),$$

$$u_j(s,t) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} u_{j\alpha\mu}(t) d_{\alpha\mu}(s), \quad j = \overline{1, 3I+3}, \quad (5)$$

де  $d_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)]$ ,  $d_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)]$ ,  $\gamma(s) = 2\pi \int_0^s d\tilde{s} / \int_0^{s^*} d\tilde{s}$ ,  $0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi$ .

У результаті розвинення переміщень і зовнішніх навантажень у ряди (4) та (5) система (2) зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами і нульовими початковими умовами. Ця система інтегрується за допомогою однокрокового методу [5, 6], який ґрунтується на розвиненні розв'язку в ряд Тейлора.

Після обчислення компенсуючих навантажень, визначаються переміщення (1), деформації і напруження у шарах вихідної оболонки.

#### 4. Математична модель ударного імпульсу

Пропонується математична модель імпульсу тиску, що виникає при зіткненні багат шарового оскління зі птахом. Птах моделюється еліпсоїдом обертання з півсями  $a$ ,  $b$  і  $c$ . Експериментально встановлено, що область взаємодії птаха з елементом оскління являє собою еліптичну площадку [7, 8], а компоненти вектора навантаження  $\mathbf{P}$  в системі (2) можна подати у вигляді

$$p_1 = p_2 = p_{3+i} = p_{3+I+i} = p_{3+2I+i} = 0, \quad i = \overline{1, I}, \quad p_3 = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(\tau_b - t)] F(t),$$

де  $\tau_b$  – час дії імпульсу;  $F(t) = P_0(t) \left[ 1 - \frac{(x-x_1)^2}{u_b^2} - \frac{(y-y_1)^2}{v_b^2} \right]^{1/2}$ ;  $u_b$  и  $v_b$  –

півосі площадки навантаження, які встановлюються на основі експериментальних даних;  $x_1$  и  $y_1$  – координати точки перетинання траєкторії центра маси птаха з елементом оскління.

Функція  $p_3(x, y, t)$  задовольняє умову

$$P_b(t) = \iint_{\Omega(t)} p_3 d\Omega = \frac{2}{3} P_0 \pi u_b v_b,$$

де  $P_b(t)$  – сила контактної взаємодії птаха й оскління (миттєва сила удару);  
 $\Omega(t)$  – область контакту птаха й оскління. Звідси  $P_0(t)$

$$P_0(t) = \frac{3 P_b(t)}{2 \pi u_b v_b}.$$

### 5. Чисельні результати

Досліджено реакцію елемента оскління ліхтаря кабіни літака АН-24 на удар птаха. Оскління являє собою пружно оперту циліндричну оболонку з радіусом 1,1 м. Шари оболонки виконані з матеріалів з наступними характеристиками:  $E_i = 6,12 \cdot 10^4$  МПа (модуль пружності),  $\nu_i = 0,22$  (коефіцієнт Пуассона),  $i = 1, 3, 5$ ;  $E_2 = 1$  МПа,  $E_4 = 280$  МПа,  $\nu_i = 0,39$ ,  $i = 2, 4$ ;  $\rho_i = 2500$  кг/м<sup>3</sup>,  $i = 1, 3, 5$ ,  $\rho_i = 1200$  кг/м<sup>3</sup>,  $i = 2, 4$  (густина матеріалу);  $h_1 = 5$  мм,  $h_2 = 5$  мм,  $h_3 = 6$  мм,  $h_4 = 2$  мм,  $h_5 = 10$  мм (товщини шарів).

Удар наносився в середину зовнішньої поверхні оскління паралельно осі фюзеляжу літака. Також методом динамічної широкосмугової тензометрії проводилося експериментальне дослідження [5].

На рис. 1 показана розрахункова схема елемента оскління і позначена точка  $C$ , у якій досліджувалися деформації. Геометричні параметри елемента оскління такі:  $l_1 = 0,36$  м,  $l_2 = 0,39$  м,  $l_3 = 0,34$  м,  $l_4 = 0,45$  м,  $R_i = 0,04$  м,  $i = \overline{1, 4}$ .

Також на рис. 1 наведена залежність від часу головної деформації  $\varepsilon_1^5$  в точці  $C$  при ударі птаха 1,74 кг зі швидкістю 99,07 м/с. Результатам розрахунку відповідає суцільна лінія, результатам експерименту – пунктирна. Добре узгодження розрахункових і експериментальних даних підтверджує вірогідність результатів, одержаних за допомогою розробленого методу.

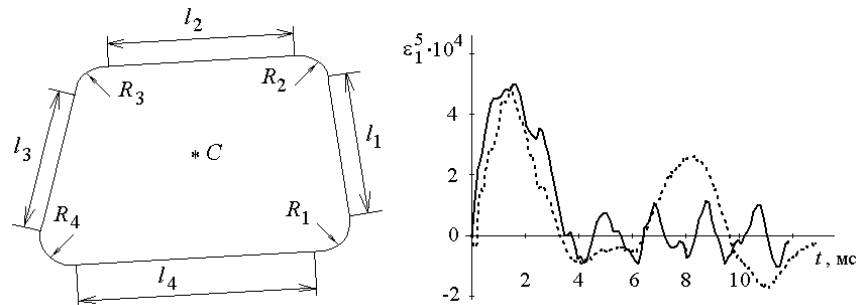


Рис. 1. Розрахункова схема та реакція елемента оскління літака АН-24 на удар птаха

Досліджено напружений стан елемента оскління літака типу ІЛ-76 під дією наддуву кабіни – статичного навантаження, рівномірно розподіленого по всій площі оскління з інтенсивністю навантаження  $P_0 = 0,172$  МПа. Це перепад тисків зовні й усередині кабіни літака на висоті 14500 м.

На рис. 2 наведена розрахункова схема оскління з такими геометричними параметрами:  $l_1 = 0,74$  м,  $l_2 = 0,16$  м,  $l_3 = 0,75$  м,  $l_4 = 0,26$  м,  $R_k = 0,03$  м,  $k = 1,4$ ,  $R = 2,5$  м. Шари виконані з матеріалів з наступними характеристиками:  $E_i = 6,8 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_i = 0,22$ ,  $i = 1, 3, 5$ ;  $E_i = 2,2 \cdot 10^2$  МПа,  $\nu_i = 0,38$ ,  $i = 2, 4$ ;  $h_1 = 5$  мм,  $h_2 = 3$  мм,  $h_3 = 12$  мм,  $h_4 = 2$  мм,  $h_5 = 8$  мм.

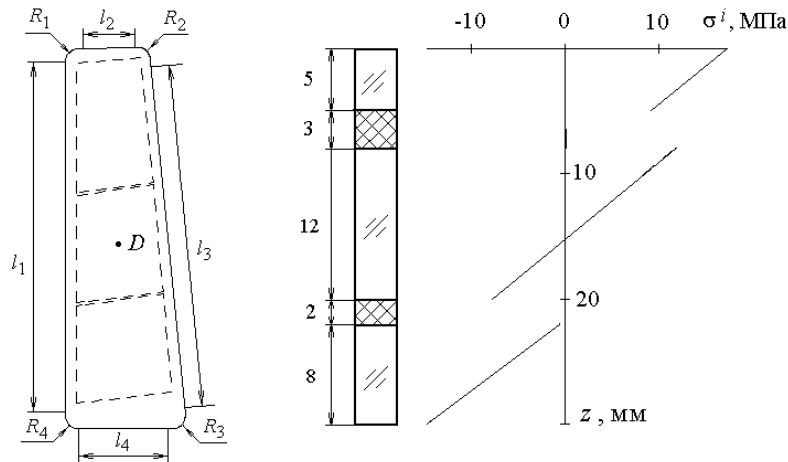


Рис. 2. Розрахункова схема та розподіл напруження вздовж елемента оскління літака типу ІІ-76

Крім того, на рис. 2 показано композицію шарів та розподіл головного напруження  $\sigma^i$  ( $i = \overline{1, I}$ ) вздовж товщини оскління в точці  $D$ . На рисунку видно, що на зовнішній поверхні оскління виникає розтягуюче напруження, яке є небезпечним. Але у розглядуваному випадку це напруження не перевищило допустимого значення.

### 5. Висновки за результатами й напрямки подальших досліджень

Створено метод дослідження напружено-деформованого стану багатошарових елементів оскління літаків, який базується на уточненій моделі оскління і враховує вплив різних експлуатаційних факторів.

Елементи оскління розглядаються як багатошарові незамкнені циліндричні оболонки складної форми в плані, поведінка яких досліджується в рамках теорії першого порядку, що враховує деформації поперечного зсуву, обтиснення по товщині й інерції обертання нормального елемента у кожному шарі. На основі методу занурення розв'язок задачі подано у вигляді тригонометричного ряду.

Можливості методу проілюстровані на прикладі розрахунку деформацій та напружень у шарах елементів оскління сучасних літаків під дією імпульсного (удар птаха) та статичного (надлишковий тиск) навантажень. Добре узгодження теоретичних і експериментальних даних підтвердило вірогідність результатів, одержаних за допомогою запропонованого методу.

Надалі метод можна застосувати до розрахунку елементів конструкцій літальних апаратів під дією інтенсивних навантажень, що дозволить скоротити витрати і час на передпроектні дослідження і натурні випробування.

Робота виконана у рамках Цільової комплексної програми наукових досліджень НАН України «Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин» («Ресурс»).

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Эндерс Г. Столкновения с птицами – постоянная угроза / Г. Эндерс // Аэропорт.– 2001.– № 5.– С.29-31.
2. Статистика авиакатастроф // Гражд. авиация.– 2007.– № 1.– С. 37–39.
3. Heimbs S. Computational methods for bird strike simulations: a review // Computers and Structures. – 2011. – v. 89, №. 23–24. – P. 2093–2112.
4. Shupikov A.N., Ugrimov S.V., Smetankina N.V., Yareshchenko V.G., Onhirsky G.G., Ukolov V.P., Samoylenko V.F., Avramenko V.L. Bird dummy for investigating the bird-strike resistance of aircraft components // J. of Aircraft.– 2013. – v. 50, № 3. – P. 817–826.
5. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / А.Н. Шупиков, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Угримов. – Харьков: Изд-во ХНЭУ, 2004.– 252 с.
6. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков: Изд-во «Міськдрук», 2011.– 376 с.
7. Онгирский Г.Г. Влияние кинематических факторов на реакцию деформируемой преграды при столкновении с птицей / Г.Г. Онгирский, А.Н. Шупиков, С.В. Угримов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2008. – Вып. 5(56). – С. 54-62.
8. Голощанов В.Н., Лебединский В.И., Якоби В.Э., Янчина В.И. Некоторые результаты обобщения физических, геометрических и весовых характеристик птиц, необходимых для оценки динамических процессов при соударении с преградой // Защита материалов и технических устройств от птиц. Сер. Биологические повреждения.– М.: Наука, 1984.– С. 201–214.

УДК 004.82

## Формальная спецификация свойств баз нечетких знаний Мамдани на основе метаграфа

М. Ю. Терновой, Е. С. Штогриня

*Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина*

В работе рассмотрено представление базы нечетких знаний Мамдани в виде метаграфа. Проведен анализ свойств базы нечетких знаний для повышения достоверности нечеткого логического вывода. Сформулированы определения свойств базы нечетких знаний Мамдани: избыточности, лингвистической непротиворечивости, отсутствия заикливания и лингвистической полноты, базы нечетких знаний Мамдани. Определены требования к структуре метаграфа, соответствующего базе нечетких знаний Мамдани, для случаев, когда база нечетких знаний является избыточной, лингвистически непротиворечивой, не содержит заикливания и является лингвистически полной. Предложено проводить статическую верификацию баз нечетких знаний на основе структуры метаграфа, а также его графического представления.

**Ключевые слова:** база нечетких знаний Мамдани, лингвистическая переменная, метаграф, избыточность, противоречивость, заикливание, полнота.

У роботі розглянуто подання бази нечітких знань Мамдані у вигляді метаграфа. Проведено аналіз властивостей бази нечітких знань для підвищення достовірності нечіткого логічного виведення. Сформульовано визначення властивостей бази нечітких знань Мамдані: ненадлишковості, лінгвістичної несуперечливості, відсутності заиклювання та лінгвістичної повноти бази нечітких знань Мамдані. Визначено вимоги до структури метаграфа, який подає базу нечітких знань Мамдані, для випадків, коли база нечітких знань є ненадлишковою, лінгвістично несуперечливою, не містить заиклювання та є лінгвістично повною. Запропоновано проводити статичну верифікацію баз нечітких знань на основі структури метаграфа, а також його графічного подання.

**Ключові слова:** база нечітких знань Мамданф, лінгвістична змінна, метаграф, надлишковість, протиріччя, заиклювання, повнота.

The paper describes Mamdani fuzzy knowledge base representation in the form of a metagraph. The fuzzy knowledge base properties which have an influence on confidence of fuzzy inference are analyzed. The definitions of non-redundant, linguistic non-contradicted, without circularity and linguistic complete Mamdani fuzzy knowledge base are given. The metagraph structure requirements corresponding to non-redundant, linguistic non-contradicted and linguistic complete Mamdani fuzzy knowledge base are defined. Mamdani fuzzy knowledge base properties static verification based on metagraph structure analysis is proposed.

**Key words:** Mamdani fuzzy knowledge base, linguistic variable, metagraph, redundancy, contradictoriness, circularity, completeness.

### Введение

Базы знаний (БЗ) получили широкое распространение как составная часть экспертных систем для поддержки принятия решений в различных организациях и предприятиях. При лингвистической неопределенности и необходимости оперирования как количественной, так и качественной информацией наиболее часто используются такой вид БЗ, как базы нечетких знаний (БНЗ).

Эффективность работы экспертных систем, основанных на БЗ, зависит от способа хранения (представления) БЗ и методов логического вывода [1 – 5]. При создании и наполнении баз знаний (БЗ) в них могут появляться аномалии. Аномалии указывают на то, что в БЗ существуют проблемы, которые могут привести к получению неправильных выводов, либо о невозможности выполнить логический вывод вообще. В работах [6, 7] описаны аномалии, которые могут присутствовать в продукционных БЗ, а именно избыточность, противоречивость, заикливание и неполнота. При отсутствии описанных аномалий говорят, что БЗ обладает свойствами неизбыточности, непротиворечивости, полноты и в ней отсутствует заикливание [8 – 27]. В данной работе рассматриваются эти свойства с учетом особенностей БЗ Мамдани.

Для повышения достоверности вывода при использовании БЗ, необходимо чтобы она обладала соответствующим набором свойств из описанных выше. Существует множество методов для верификации БЗ. Для выявления аномалий и определения обладает ли продукционная БЗ определенным свойством рассматривается сведение БЗ к графовым структурам [19 – 21], бинарным диаграммам решений [22, 23], таблицам принятия решений [24], матричным представлениям [25, 26]. Данные представления не всегда взаимно-однозначно соответствуют БЗ и в большинстве случаев не учитывают особенности БЗ.

В работах [3 – 5] предлагается и подробно описывается представление и использование БЗ в виде метаграфа. Такое представление позволяет взаимно-однозначно описывать правила, а графическое представление метаграфа позволяет эксперту в визуальной форме работать с БЗ как на этапе наполнения и верификации БЗ, так и на этапе ее использования.

В данной работе проводится проверка описанных выше свойств БЗ на основе метаграфа, который ее представляет. Использование метаграфа позволяет повысить эффективность статической верификации БЗ за счет структуризации нечетких знаний, а также визуализации метаграфа.

### Основная часть

Для того чтобы рассмотреть свойства БЗ, а также предложить дальнейшую их проверку с помощью метаграфа, выпишем определение БЗ и метаграфа. Отметим, что в дальнейшем изложении в данной работе под БЗ подразумеваются БЗ Мамдани.

*Определение 1.* БЗ Мамдани представляет собой объединение множеств  $P \cup X$ :

1)  $X = \{X_i | i = \overline{1, N_X}\}$  – множество лингвистических переменных (ЛП), где  $X_i$  – имя ЛП,  $N_X$  – количество ЛП, и каждая ЛП содержит терм-множество  $T_i = \{t_i^k | k = \overline{1, N_i}\}$ , где  $t_i^k$  – терм, который имеет функцию принадлежности (ФП)  $\mu_{t_i^k}$ , где  $k$  – номер терма,  $N_i$  – количество термов ЛП  $X_i$ ;

2)  $P = \{P_g | g = \overline{1, N_P}\}$  – множество правил «Если - То», где  $N_P$  – количество правил БЗ.  $P_g$  – это обозначение для правил вида (1):

$$(P_l^z)_j = \text{ЕСЛИ} (X_{j_1} = t_{j_1}^{k_1}) \text{И} (X_{j_2} = t_{j_2}^{k_2}) \text{И} \dots \text{И} (X_{j_{n_j}} = t_{j_{n_j}}^{k_{n_j}}) \text{ТО} (X_l = t_l^z), \quad (1)$$

где  $(P_l^z)_j$  -  $j$ -е правило для определения  $z$ -го термина ЛП с идентификатором  $l$ , в котором  $X_{j_s}$  - ЛП, которая принимает значение  $t_{j_s}^{k_s}$ ;  $s = \overline{1, n_j}$  - номер ЛП в левой части  $j$ -го правила,  $n_j$  - количество ЛП, которые находятся в левой части  $j$ -го правила.

Для сокращения записи введем обозначения левой и правой части правила  $P_g$ :

$$P_g = (P_g^A, P_g^C),$$

где  $P_g^A = \{t_{j_s}^{k_s} \mid s = \overline{1, n_j}\}$  - множество термов, которые входят в левую часть правила;

$P_g^C = t_l^z$  - терм, который является результатом правила.

Отметим, что рассматривается БНЗ, которая сформирована для определения одной ЛП, которую будем называть результирующей и обозначать  $X_{rez}$ . ЛП, значения которых определяются с помощью фаззификации или сразу задаются в качественном виде, будем называть входными и обозначать  $X^{input} = \{X_i^{input} \mid i = \overline{1, N_{X^{input}}}\}$ . Для входных переменных не существует правил их определяющих.

*Определение 2.* Частичная БНЗ – это БНЗ для определения одной ЛП, включающая в себя только такие правила, результатами которых являются термы данной ЛП. При этом такую ЛП будем называть ЛП верхнего уровня, а ЛП, входящие в левые части правил, будем называть ЛП нижнего уровня.

*Определение 3.* Метаграф – это структура данных, которая определяется тройкой множеств  $S = \langle V, M, E \rangle$ , где  $V = \{v_r \mid r = \overline{1, N_V}\}$  – порождающее множество (множество вершин метаграфа),  $M = \{m_q \mid q = \overline{1, N_M}\}$  – множество метавершин,  $E = \{e_h \mid h = \overline{1, N_E}\}$  – множество ребер, где  $N_V$  – количество вершин метаграфа,  $N_M$  – количество метавершин,  $N_E$  – общее количество ребер в метаграфе.

Метавершина метаграфа – определяется как множество вершин  $m_q = \{v_r \mid v_r \in V, r = \overline{1, N_{m_q}}\}$ , где  $N_{m_q}$  – количество вершин, входящих в метавершину  $m_q$ . Если две или больше метавершины соответствуют одному и тому же множеству вершин, то такие метавершины считаются одинаковыми и рассматривается только одна из таких метавершин.

Для упрощения дальнейшей подачи материала введем понятие узла метаграфа. Для этого множество вершин представим в виде разбиения на одноэлементные подмножества, каждое из которых содержит одну вершину. Тогда узел метаграфа можно представить как  $mv \in \bigcup_r \{v_r\} \cup M$ . Таким образом,



узел метаграфа – это метавершина или одноэлементное множество содержащее вершину. Ребро метаграфа в общем случае определяется как  $e_h = \{mv_h^{out}, mv_h^{in}\}$ . Если ребро ориентированное, то будет использоваться термин дуга и записываться  $e_h = (mv_h^{out}, mv_h^{in})$ , где  $mv_h^{out}$  – узел, из которого исходит дуга  $e_h$ ,  $mv_h^{in}$  – узел, в который заходит дуга  $e_h$ . При дальнейшей подаче материала если указано, что дуга исходит/заходит из/в вершину  $v_r$ , это означает, что дуга исходит/заходит из/в узел, соответствующий одноэлементному множеству, содержащему данную вершину, т.е.  $mv_h^{out} = \{v_r\} / mv_h^{in} = \{v_r\}$ .

*Определение 4.* Путь в ориентированном метаграфе  $S$  из узла  $mv_p$  в узел  $mv_q$  – это последовательность дуг  $Path(mv_p, mv_q) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , такая что  $\forall i: mv_i^{in} \cap mv_{i+1}^{out} \neq \emptyset$ .

*Определение 5.* Путь  $Path(mv_p, mv_q)$ , в котором  $mv_p \cap mv_q \neq \emptyset$  называется циклом.

*Определение 6.* Будем называть метаграфом, представляющим БНЗ Мамдани, такой метаграф  $S' = \langle V, M, E \rangle$ , который удовлетворяет следующим условиям:

1. Каждая вершина  $v_r = v(t_i^k)$  метаграфа  $S'$  соответствует терму ЛП  $t_i^k$ .
2. Каждая метавершина  $m_g = \{v_r | r = \overline{1, n_g}\}$  метаграфа  $S'$  соответствует  $P_g^A$  - левой части правила  $P_g$ . Метавершина  $m_g$  содержит в себе вершины, которые взаимно-однозначно соответствуют термам, входящим в  $P_g^A$ .
3. Каждая дуга  $e_g$  метаграфа  $S'$ , соответствует правилу  $P_g$  БНЗ. Дуга  $e_g = (m_g, \{v_r\})$  исходит из метавершины  $m_g$  и заходит в вершину  $v_r = v(t_i^z)$ , которая соответствует терму  $t_i^z = P_g^C$ .

Графическое представление метаграфа позволяет наглядно осуществлять анализ свойств БНЗ, тем самым повышая эффективность статической верификации БНЗ экспертом, а также коррекции БНЗ для устранения аномалий. После описания каждого свойства приведем графическое представление метаграфа, представляющего БНЗ Мамдани, с примерами невыполнения данных свойств.

Графическое представление части метаграфа, которая соответствует правилу  $(P_i^z)_j$ , определенного формулой (1), представлено на рис. 1.

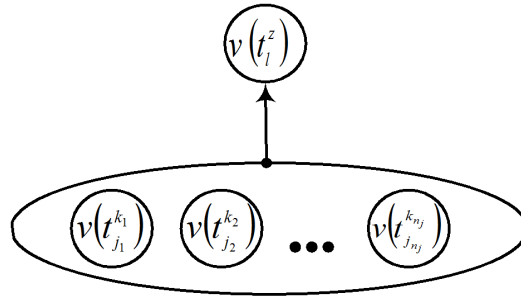


Рисунок 1. Графическое представление части метаграфа, соответствующей правилу  $(P_l^z)_j$

На множестве вершин  $V$  зададим отношение  $Q = \{(v_p, v_q) \mid (v_p, v_q \in V, v_p = v(t_i^k), v_q = v(t_i^a)) \wedge (t_i^k, t_i^a \in T_i)\}$ , где  $(t_i^k, t_i^a \in T_i)$  означает, что  $t_i^k, t_i^a$  являются термами  $X_i$ . Легко видеть, что данное отношение  $Q$  является отношением эквивалентности, т.к. оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Тогда, классом эквивалентности, порожденным  $v_p = v(t_i^k)$ , будет множество вершин метаграфа, которые соответствуют термам одной ЛП  $X_i$ ,  $[v_p]_Q = \{v_q \in V \mid v_p Q v_q\}$ . Для упрощения записи такой класс эквивалентности в дальнейшем будем обозначать как  $V_i$  ( $V_i = [v_p]_Q$ ), где  $i$  - номер ЛП  $X_i$ . Фактор-множеством множества всех вершин метаграфа  $V$  по отношению эквивалентности  $Q$  будет множество  $V/Q = \{V_i \mid i = \overline{1, N_X}\}$  всех классов эквивалентности. Элементами фактор-множества будут классы эквивалентности, каждый из которых будет содержать вершины, соответствующие термам только одной ЛП. Фактор-множество является разбиением множества вершин метаграфа  $V = \bigcup_i V_i$  и  $\forall i \neq j: V_i \cap V_j = \emptyset$ .

Мощность фактор-множества равна количеству ЛП  $N_X$  в БНЗ.

Множество вершин, которые соответствуют термам результирующей ЛП, будем называть результирующими вершинами. Исходя из введенного в начале статьи условия, в БНЗ будет всего одна результирующая ЛП. Все результирующие вершины будут содержаться в одном классе эквивалентности, который будем называть классом эквивалентности результирующих вершин  $V_{rez}$ . Вершины, соответствующие термам входных ЛП, будем называть входными вершинами. В отличие от результирующих вершин, в метаграфе  $S'$  будет существовать несколько классов эквивалентности входных вершин, которые будем обозначать  $V_i^{input}$ .

Исходя из описанного выше, для метаграфа  $S'$ , который представляет БНЗ Мамдани, будут справедливы следующие свойства:

1. Не может содержать:

1.1. Дуг, которые исходят из вершины, т.е. полустепень исхода вершины всегда равна нулю

$$\forall mv_h = \{v_r\} : \text{deg}^-(mv_h) = 0.$$

1.2. Дуг, которые заходят в метавершину, т.е. полустепень захода метавершины равна нулю

$$\forall mv_h = m_g : \text{deg}^+(mv_h) = 0.$$

1.3. Метавершин с нулевой полустепенью исхода, т.е.  $\forall mv_h = m_g : \text{deg}^-(mv_h) > 0$ . Это означает, что для любой метавершины существует хотя бы одна дуга, которая соединяет ее с какой-то вершиной

$$\forall m_g \in M : \exists e_h = (m_g, \{v_r\}).$$

2. Обязательно содержит вершины, которые не включены ни в одну метавершину (это все результирующие вершины)  $\exists V_{rez} = \{v_r | \forall g: v_r \notin m_g\}$ .

На рис.2 продемонстрировано графическое представление метаграфа, который не соответствует БНЗ Мамдани.

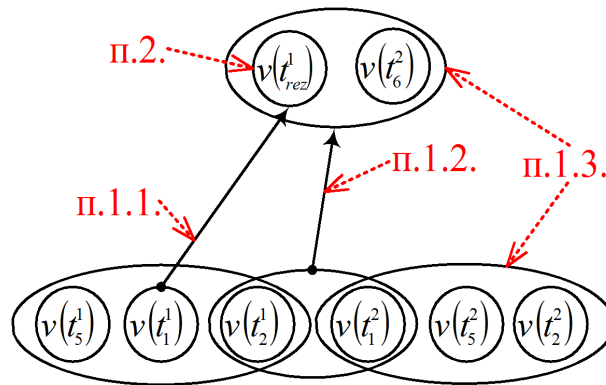


Рисунок 2. Пример метаграфа  $S'$ , который не соответствует БНЗ Мамдани

Поскольку при представлении БНЗ в виде метаграфа в нем отображены все термы ЛП и все правила, присутствующие в БНЗ, то метаграф  $S'$  имеет такие свойства:

1. Количество классов эквивалентностей вершин равно количеству ЛП БНЗ  $N_{V_i} = N_X$ .

2. Количество вершин в метаграфе равно сумме количеств термов всех ЛП, которые входят в БНЗ  $N_V = \sum_{i=1}^{N_X} N_i$ .

3. Количество дуг в метаграфе равно количеству правил  $N_E = N_P$ .

4. Количество метавершин в метаграфе не больше, чем количество правил  $N_M \leq N_P$ .

### Избыточность БНЗ

Под избыточной БНЗ в работах [6 – 8, 11] понимают такую, в которой содержатся правила, дублирующие друг друга.

В работе [8] указывается, что наличие одинаковых правил при автоматизированном построении БНЗ может свидетельствовать не о избыточности, а о необходимости усиления повторяющегося правила, либо о модификации данных правил. Также следует отметить, что в работах [9, 10, 15] рассматривается понятие схожести правил, при котором одинаковыми считаются правила, если их мера схожести не ниже заданного порога. Такие правила также должны удаляться из БНЗ при проверке на избыточность за исключением выше описанного случая.

В работах [6, 7, 11], как вносящие избыточность, также относят правила, в которых при одинаковых заключениях присутствует включение условий. Сюда же относят случаи с присутствием невыполнимого правила и неиспользуемым консеквентом.

Ниже введем определение неизбыточной БНЗ, которого будем придерживаться в дальнейшем изложении.

*Определение 7.* БНЗ будем называть неизбыточной, если выполняются следующие условия:

1. Отсутствуют дубликаты правил, т.е. в БНЗ не существует правил с одинаковыми условиями и одинаковыми заключениями

$$\neg \exists P_i, P_j : (P_i^A = P_j^A) \wedge (P_i^C = P_j^C) \wedge (i \neq j).$$

2. Отсутствует включение условий, т.е. в БНЗ не существует правил с одинаковыми результатами, таких, что левая часть некоторого правила является подмножеством левой части другого правила

$$\neg \exists P_i, P_j : (P_i^C = P_j^C) \wedge (P_i^A \subset P_j^A).$$

3. Отсутствуют неиспользуемые термы не результирующей ЛП. В БНЗ для любого терма каждой не результирующей ЛП существует хотя бы одно правило, в левую часть которого он входит

$$\forall t_i^k \in T_i : (X_i \neq X_{rez}) \Rightarrow (\exists P_q : (t_i^k \in P_q^A)).$$

4. Отсутствуют невыполнимые правила.

а. Если ЛП является входной, то ни для одного ее терма не существует правила, в котором терм данной ЛП будет результатом

$$\forall t_i^k \in T_i : (X_i \in X^{input}) \Rightarrow (\neg \exists P_q : t_i^k = P_q^C).$$

б. Если ЛП не является входной, то для каждого ее терма должно существовать хотя бы одно правило, в котором данный терм является результатом

$$\forall t_i^k \in T_i : (X_i \notin X^{input}) \Rightarrow (\exists P_q : t_i^k = P_q^C).$$

При помощи анализа структуры метаграфа можно провести статическую верификацию БНЗ и определить является ли БНЗ неизбыточной в определенном выше смысле. Особенности структуры метаграфа, соответствующего неизбыточной БНЗ сформулированы ниже в виде утверждения.

Утверждение 1.

БНЗ избыточна, т.т.т.к. метаграф  $S^I$ , которым она представлена, имеет следующие свойства:

1. Отсутствуют кратные дуги

$$\neg \exists e_a, e_b : (e_a = (m_g, \{v_p\})) \wedge (e_b = (m_g, \{v_p\})) \wedge (a \neq b).$$

2. Отсутствуют метавершины, содержащие подмножество вершин, которое в свою очередь соответствует другой метавершине, и эти две метавершины соединены дугами с одной и той же вершиной

$$\neg \exists m_g, m_q : (e_a = (m_g, \{v_r\})) \wedge (e_b = (m_q, \{v_r\})) \wedge (m_q \subset m_g).$$

3. Если вершина не принадлежит к классу эквивалентности результирующей вершины, то она должна принадлежать метавершине

$$\forall v_p : (v_p \notin V_{rez}) \Rightarrow \exists m_g : (v_p \in m_g).$$

4. В классе эквивалентности вершин или все вершины не имеют заходящих дуг, или все имеют хотя бы одну заходящую дугу

$$\forall mv_p = \{v_p\}, v_p \in V_i : \begin{cases} \deg^+(mv_p) = 0 \Rightarrow \neg \exists mv_q = \{v_q\}, v_q \in V_i : \deg^+(mv_q) > 0 \\ \deg^+(mv_p) > 0 \Rightarrow \neg \exists mv_q = \{v_q\}, v_q \in V_i : \deg^+(mv_q) = 0 \end{cases}$$

На рис.3 продемонстрировано графическое представление метаграфа, соответствующего БНЗ Мамдани, в которой присутствует избыточность.

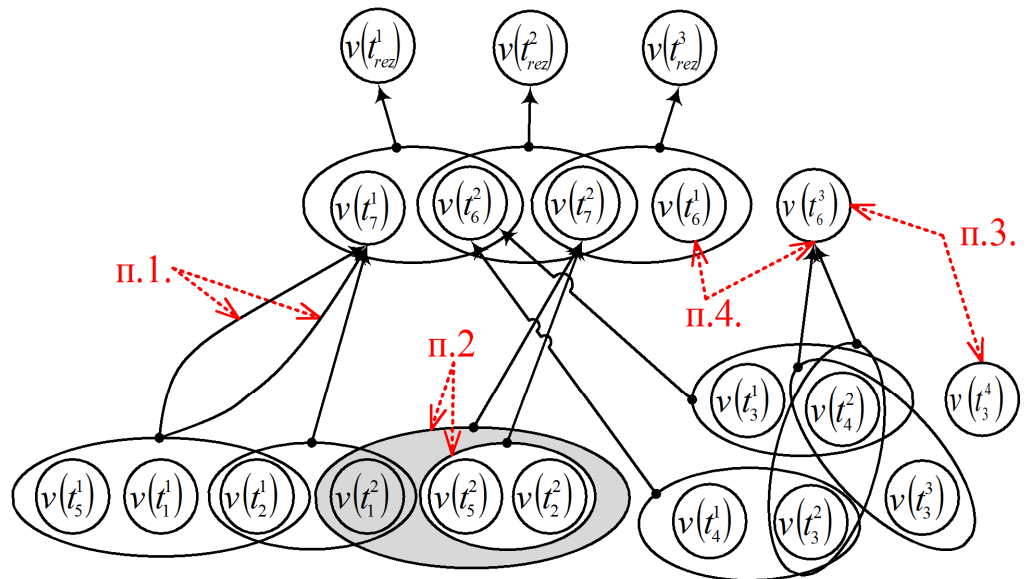


Рисунок 3. Пример метаграфа  $S^I$ , соответствующего БНЗ Мамдани, в которой присутствует избыточность

### Непротиворечивость БНЗ

В нечеткой логике не работает закон противоречия Аристотелевой логики – исключающий одновременную истинность утверждения и его отрицания. Противоречие будет иметь место при одновременно высоких значениях степеней уверенности для различных по смыслу термов ЛП (например, высокий и низкий с одинаково большой степенью уверенности) [13].

В работе [11] под противоречивостью продукционных БЗ понимается получение разных результатов при одинаковых входных данных. В работе [8] БНЗ называется непротиворечивой, если в ней отсутствуют несовместные правила, т. е. правила, имеющие одинаковые условия, но разные заключения. Также в данном случае применимо понятие схожести для правил. Т.е. правила со схожими левыми частями и разными правыми считаются противоречивыми. Для нахождения таких противоречивых правил необходимо рассматривать функции принадлежности термов, а также проводить нечеткий логический вывод.

Введем понятие лингвистической непротиворечивости, т.е. такой, которую можно определить, основываясь только на информации о структуре правил и не прибегая к проведению нечеткого логического вывода.

*Определение 8.* БНЗ называется лингвистически непротиворечивой, если выполняются следующие условия:

1. В БНЗ не существует правил с одинаковыми условиями, в которых в правой части стоят разные термы одной и той же ЛП

$$\neg \exists P_i, P_j : (P_i^A = P_j^A) \wedge (P_i^C \neq P_j^C) \wedge (p = q), \text{ где } P_i^C = t_p^a, P_j^C = t_q^b.$$

2. В БНЗ не существует правил, в которых в левой части присутствует два и более термина одной ЛП

$$\neg \exists P_g : (t_{j_p}^{k_p} \in P_g^A) \wedge (t_{j_q}^{k_q} \in P_g^A) \wedge (j_p = j_q).$$

Особенности структуры метаграфа, соответствующего лингвистически непротиворечивой БНЗ сформулированы ниже в виде утверждения.

*Утверждение 2.*

БНЗ является лингвистически непротиворечивой, т.т.т.к. метаграф  $S'$ , которым она представлена, имеет следующие свойства:

1. Каждая метавершина может быть соединена не более чем с одной вершиной из одного класса эквивалентности вершин

$$\forall m_g : (e_a = (m_g, \{v_p\})) \wedge (e_b = (m_g, \{v_q\})) \wedge (v_p \in V_i) \wedge (v_q \in V_j) \Rightarrow (i \neq j).$$

2. Метавершина не может включать две и более эквивалентные вершины

$$\neg \exists m_g : (v_p \in m_g) \wedge (v_q \in m_g) \wedge (v_p \in V_i) \wedge (v_q \in V_j) \wedge (i = j).$$

На рис. 4 продемонстрировано графическое представление метаграфа, соответствующего БНЗ Мамдани, которая является лингвистически непротиворечивой.

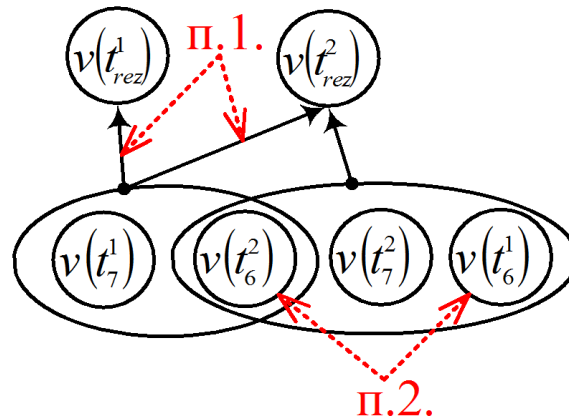


Рисунок 4. Пример метаграфа  $S^l$ , соответствующего БЗ Мамдани, которая является лингвистически противоречивой

**Защикливание в базе нечетких знаний**

В работах [6, 7] отмечается, что в продукционной базе знаний (БЗ) присутствует защикливание, когда существуют посылки, которые зависят от себя через последовательность правил. В работах [25, 27] выделяются два типа циклов прямой и непрямой. Прямой цикл подразумевает наличие правил, в которых заключение присутствует в условии того же правила. Непрямой цикл присутствует в случае, если факты зависят от себя же через несколько правил.

*Определение 9.* В базе нечетких знаний (БЗ) отсутствует защикливание, если выполняются следующие условия:

1. Отсутствует прямой цикл, т.е. в БЗ не существует правил, в которых в левой и в правой части присутствуют термы одной лингвистической переменной (ЛП)

$$\neg \exists P_g : (t_{j_p}^{k_p} \in P_g^A) \wedge (t_{i'}^z = P_g^C) \wedge (j_p = i').$$

2. Отсутствует непрямой цикл, т.е. в БЗ не существует правил, при которых ЛП определяют ЛП, от которых они зависят.

*Утверждение 3.*

В БЗ отсутствует защикливание, т.т.т.к. метаграф  $S^l$ , которым она представлена, имеет следующие свойства:

1. Метавершина, из которой исходит дуга, не может содержать вершин эквивалентных вершине, в которую данная дуга заходит

$$\neg \exists m_g : (e_h = (m_g, \{v_p\})) \wedge (v_p \in V_i) \wedge (v_q \in m_g) \wedge (v_q \in V_j) \wedge (i = j).$$

2. Метаграф  $S^l$  не имеет циклов.

На рис.5 продемонстрировано графическое представление метаграфа, соответствующего БЗ Мамдани, в которой присутствует защикливание.

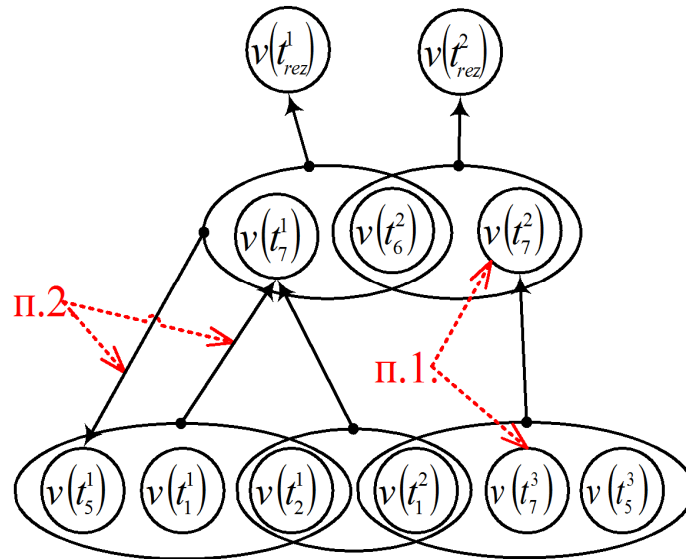


Рисунок 5. Пример метаграфа  $S^1$ , соответствующего БНЗ Мамдани, в которой присутствует зацикливание

### Полнота БНЗ

Под неполной понимают такую БНЗ, используя которую невозможно осуществить вывод для ряда определенных исходных ситуаций [6, 7, 11].

В работе [8] показано, что, исходя из набора правил, можно определить только лингвистическую полноту. Для определения остальных видов полноты, таких как полнота нечеткой модели, полнота нечеткого разбиения и численная полнота БНЗ, необходимо рассматривать функции принадлежности термов ЛП, а также проводить нечеткий логический вывод. Отметим, что в работе [8] рассматриваются только такие виды БНЗ, которые в данной работе определены как частичные. Ниже приведено определение лингвистической полноты частичной БНЗ, которое расширено предположением о том, что каждому терму ЛП верхнего уровня соответствует хотя бы одно правило. Также стоит отметить, что все ЛП нижнего уровня разные.

*Определение 10.* Частичная БНЗ является лингвистически полной, если ее правила заданы на всем декартовом произведении терм-множеств ЛП нижнего уровня и для каждого терма ЛП верхнего уровня существует хотя бы одно правило.

Из данного определения следует, что если представить БНЗ, как отображение, которое переводит элементы из декартового произведения терм-множеств ЛП нижнего уровня в термы ЛП верхнего уровня, то такое отображение будет сюръективным. Отметим, что такое отображение не будет инъективным и не будет функциональным.

Ниже приведено определение лингвистической полноты для таких БНЗ Мамдани, которые состоят из частичных БНЗ для определения результирующей ЛП.



*Определение 11.* БНЗ называется лингвистически полной, если все ее частичные БНЗ являются лингвистически полными, и все они задействованы для определения значения результирующей ЛП.

Используя данные о структуре метаграфа, который представляет БНЗ, можно проверить является ли БНЗ лингвистически полной. Особенности структуры метаграфа, соответствующего лингвистически полной БНЗ сформулированы ниже в виде утверждения.

*Утверждение 4.*

БНЗ является лингвистически полной, т.т.т.к. метаграф, который ей соответствует, имеет следующие свойства:

1. Если в метавершину, соединенную дугой с вершиной из класса эквивалентности  $V_i$ , входит вершина из класса эквивалентности  $V_j$ , то и во все остальные метавершины, соединенные дугами с вершинами из класса эквивалентности  $V_i$ , должна входить вершина из класса эквивалентности  $V_j$

$$\forall m_a, m_b, a \neq b: (e_h = (m_a, \{v_p\})) \wedge (v_p \in V_i) \wedge (e_r = (m_b, \{v_q\})) \wedge (v_q \in V_i) \wedge \\ \wedge (v_s \in m_a) \wedge (v_s \in V_j) \Rightarrow \exists v_d : (v_d \in m_b) \wedge (v_d \in V_j)$$

2. Если существует метавершина, которая содержит вершины, каждая из которых принадлежит классам эквивалентности  $\{V_{j1}, V_{j2}, \dots, V_{jn}\}$  соответственно, и данная метавершина соединена дугой с вершиной из класса эквивалентности  $V_i$ , то в метаграфе должны существовать метавершины, которые включают в себя все возможные наборы вершин из классов эквивалентности  $\{V_{j1}, V_{j2}, \dots, V_{jn}\}$ , и данные метавершины должны быть соединены дугами с вершинами из класса эквивалентности  $V_i$ .

3. Метавершина не может включать две и более эквивалентные вершины

$$\neg \exists m_g : (v_p \in m_g) \wedge (v_q \in m_g) \wedge (v_p \in V_i) \wedge (v_q \in V_j) \wedge (i = j) \wedge (p \neq q).$$

4. Если вершина не принадлежит к классу эквивалентности результирующей вершины, то она должна принадлежать метавершине

$$\forall v_p : (v_p \notin V_{rez}) \Rightarrow \exists m_g : (v_p \in m_g).$$

5. Если вершина не является входной, то она имеет хотя бы одну заходящую дугу, т.е. ее полустепень захода больше нуля

$$\forall i, p : (v_p \notin V_i^{input}) \Rightarrow \deg^+(mv_p) > 0, \text{ где } mv_p = \{v_p\}.$$

На рис.6 продемонстрировано графическое представление метаграфа, соответствующего БНЗ Мамдани, которая не является лингвистически полной.

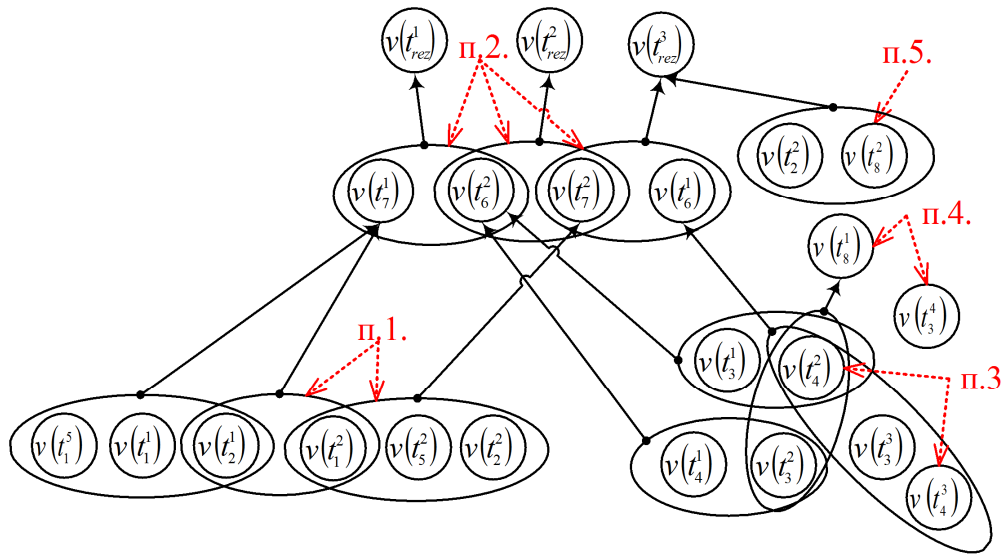


Рисунок 6. Пример метаграфа  $S^l$ , соответствующего БНЗ Мамдани, которая не является лингвистически полной

### Выводы

Сформулированные в данной работе утверждения позволят в дальнейшем применить их для статической верификации БНЗ, представленной в виде метаграфа. Данное представление позволяет повысить эффективность проверки описанных свойств и выявления аномалий. В дальнейшем планируется совместить автоматическую проверку приведенных в работе утверждений, а также автоматическую визуализацию метаграфа для предоставления экспертам возможности идентифицировать, отслеживать, анализировать и исправлять выявленные аномалии в графическом виде. Это позволит увеличить наглядность и эффективность работы эксперта в процессе построения и анализа БНЗ.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ротштейн А. П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети / Винница: УНИВЕРСУМ, 1999. – 320 с.
2. Глоба Л.С., Терновой М.Ю., Штогріна О. С. Технологія обробки інформації в гетерогенному інформаційно-телекомунікаційному середовищі // Електроніка і зв'язь. Тематический выпуск «Проблеми електроніки», ч. 1, 2008. – С. 204 – 207.
3. Терновой М.Ю., Штогріна О.С. Представлення баз нечітких знань за допомогою метаграфа та проведення нечіткого логічного виведення на його основі // Вісник Харк. нац. ун-ту., Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», 2014, № 1105. –С. 156 – 165.

4. Amit Basu, Robert W. Blanning. Metagraphs and their applications. Springer. 2007. 172 p.
5. Zheng-Hua Tan. Fuzzy Metagraph and Its Combination with the Indexing Approach in Rule-Based Systems // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 2006. Vol. 18, No. 6. pp.829-841.
6. Preece A.D., Shinghal R. Foundation and Application of Knowledge Base Verification // International Journal of Intelligent Systems. 1994. Vol. 9. pp. 683-701.
7. Nguyen T. A., Perkins W. A., Laffey T. J., Pecora D. Knowledge base verification // AI Magazine. 1987. Vol. 8, No. 2. pp. 69–75.
8. Перат А. Нечеткое моделирование и управление / А. Перат; пер. с англ. 2-е изд. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 798 с.: ил.
9. Сергиенко М.А. Методы анализа и структуризации базы нечетких правил. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.13.17 – Теоретические основы информатики. Воронеж, 2010.
10. Сергиенко М.А. Методы проектирования нечеткой базы знаний. Вестник ВГУ, серия: Системный анализ и информационные технологии, 2008, № 2. – С. 67-71.
11. Поспелова Л.Я., Чуканова О.В. Поиск противоречий в продукционных базах знаний [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://library.mephi.ru/data/scientific-sessions/2009/t5/0-5-1.doc> – Электрон. текстовые данные. (дата обращения 7.04.2014)
12. Поспелова Л.Я. Метод поиска противоречий в нечеткой базе знаний. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ekhneu.org.ua/content/metod-poiska-protivorechiy-v-nechetkoy-baze-znaniy> – Электрон. текстовые данные. (дата обращения 19.01.2015)
13. Поспелова Л.Я. Оценка степени непротиворечивости системы нечетких правил. БизнесИнформ №12, 2013. – С. 124-129.
14. Кривуля Г.Ф. Власов И.В., Павлов О.А. Оптимизация продукционных правил в диагностической экспертной системе. Тезисы тринадцатой международной научно-технической конференции «Проблемы информатики и моделирования», НТУ "ХПИ", Харьков-Ялта, 2013. – С. 5-7.
15. Carmona P., Castro J.L., Zurita J.M. Contradiction Sensitive Fuzzy Model-Based Adaptive Control – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.101.9361&rep=rep1&type=pdf> – Электрон. текстовые данные. (дата обращения 19.01.2015)
16. Поморова О.В., Гнатчук Є.Г. Виявлення суперечливості правил в нечітких базах знань інтелектуальних систем технічного діагностування. – Радіоелектронні і комп'ютерні системи, 2009, № 7 (41). – С. 171–176.
17. Поморова О.В., Кришук А.Ф. Метод виявлення суперечностей у базах знань систем технічного діагностування. Вісник Хмельницького національного університету. –Хмельницький: ХНУ, 2010, №.3. – С. 257 – 260.
18. Пивкин В. Я., Бакулин Е. П., Кореньков Д. И. Нечеткие множества в системах управления – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ref.rushkolnik.ru/v46863/?page=7> – Электрон. текстовые данные. (дата обращения 19.01.2015)

19. El-Korany A., Shaalan K., Baraka H., Rafea A. An Approach for Automating the verification of KADS-based Expert Systems // *New review of applied expert systems*. 1998. Vol. 4. pp. 107–124.
20. Arman N. Fault Detection in Dynamic Rule Bases Using Spanning Trees and Disjoint Sets // *The International Arab Journal of Information Technology*. 2007. Vol.4, No.1 pp.67–72.
21. G. Valiente Feruglio Knowledge Base Verification using Algebraic Graph Transformations [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.55.2760&rep=rep1&type=pdf> – Электрон. текстовые данные. (дата обращения 27.02.2015)
22. Mues C., Vanthienen J. Efficient Rule Base Verification using Binary Decision Diagrams // *Database and Expert Systems Applications Lecture Notes in Computer Science*. 2004. V. 3180. pp. 445–454.
23. Strehl K., Moraga C., Karl-Heinz Temme, Stancovi R. Fuzzy Decision Diagrams for the Representation, Analysis, and Optimization of Rule Bases // *Research Report No. 725 Department of Computer Science, University of Dortmund*. 1999.
24. Vanthienen J., Mues C., Goedertier S. Experiences with Modeling and Verification of Regulations // *In Proceedings of the CAiSE'06 Workshop on Regulations Modeling and their Validation & Verification (REMO2V'06)*. 2006. pp. 793-799.
25. Saud M.A. Maghrabi Matrix Verification of Knowledge-Based System // *JKAU: Sci*. 2001. Vol. 13. pp. 63-82.
26. Обідін Д.М. Метод верифікації баз знань системи автоматичного управління за допомогою матричних операцій // *Системи обробки інформації*, 2012, випуск 3 (101), т. 2. – С. 85–89.
27. Simiński R., Wakulicz-Deja A. Circularity in Rule Knowledge Bases Detection using Decision Unit Approach // *Monitoring, Security, and Rescue Techniques in Multiagent Systems Advances in Soft Computing*. 2005. Vol. 28. pp 273-279.

УДК 519.6

## A method synthesis of selection function scalar convolutions for the multi-objective decision-making problems

S. V. Chernysh, Ie. S. Meniaïlov, K. M. Ugryumova, M. L. Ugryumov  
*N.E. Zhukovsky National aerospace university «KhAI», Ukraine*

The statement of the estimation problem for selection functions and sought values in multi-objective problems is considered. The authors propose a method of synthesis of selection function scalar convolutions in multi-objective problems of mathematical model identification, optimization and decision-making. The types of scalar convolutions of selection functions have been obtained, which are specific to some practical problems of such kind. Application of the scalar convolutions as a tool for solution synthesis with the help of regularizing algorithms provides the stable effective estimates of values sought when data are a priori uncertain.

**Key words:** *mathematical modeling, stochastic optimization, computational methods.*

Розглядається постановка задачі оцінювання функцій вибору та шуканих величин в багатокритеріальних задачах при апіорній невизначеності даних. Запропоновано метод синтезу скалярних згорток функцій вибору для багатокритеріальних задач ідентифікації математичних моделей, оптимізації та прийняття рішень. Отримано види скалярних згорток функцій вибору для ряду практичних завдань цього типу. Застосування отриманих скалярних згорток при синтезі рішень за допомогою регуляризуючих алгоритмів забезпечить отримання стабільних ефективних оцінок величин, що потребують пошуку при апіорній невизначеності даних.

**Ключові слова:** *математичне моделювання, стохастична оптимізація, обчислювальні методи.*

Рассматривается постановка задачи оценивания функций выбора и искомых величин в многокритериальных задачах при априорной неопределенности данных. Предложен метод синтеза скалярных сверток функций выбора для многокритериальных задач идентификации математических моделей, оптимизации и принятия решений. Получены виды скалярных сверток функций выбора для ряда практических задач этого типа. Применение полученных скалярных сверток при синтезе решений с помощью регуляризирующих алгоритмов обеспечивает получение стабильных эффективных оценок искомых величин при априорной неопределенности данных.

**Ключевые слова:** *математическое моделирование, стохастическая оптимизация, вычислительные методы.*

### 1. The problem statement and actuality

Let us consider as an object of study the processes of selection functions and sought values estimation in multi-objective problems of mathematical model identification, optimization and decision-making in the case of the a priori uncertain data.

In accordance to the Law of Requisite Variety (W. Ross Ashby's law), the creation of a problem resolving system requires that the system's variety is greater than one of the problem being addressed, or the system is able to produce such a variety. The Ashby's law obviously implies that introduction of information redundancy may be chosen by decision-makers (DM) as one of the ways to improve the quality of estimation in the course of the above problems' solution synthesis.

As it is known, when structuring the above named problems, whose data are random variables, an uncertainty appears in the choice of metrics for estimating the selection functions and sought values (parameters, control variables or state variables). Thus, for solving ill-defined problems of such kind, the regularizing algorithms should be used that will provide the stable effective estimates of sought values, while the mathematical models based on them will possess the property of robustness.

Already a lot of works were published, which were devoted to description of the methods of selection functions and sought values estimation in multi-objective problems of mathematical model identification, optimization or decision-making during technical and medical-biological systems designing, improvement, and diagnosing.

For structuring the problems of multivariate observation classification, the A. N. Kolmogorov's concept of power averages [1] has being widely used. According to this concept, for partitions quality estimation, a number of functionals are proposed: the interclass distance (e.g., the Mahalanobis type distance), the measure of concentration of points in each partition, the measure of intraclass scattering (e.g., generalized intraclass dispersion).

As a computational method for the synthesis of quasi-solutions of ill-defined problems, the decision regularization method by A. N. Tikhonov [2] has being often applied, in which the smoothing functional serves for a scalar convolution of selection functions. This smoothing functional contains as a supplemental summand some stabilizing functional (fitness function), which, on the one hand, allows taking into account the decision maker's system of preferences, and on the other hand, ensures the method correctness. When choosing the stabilizing functional, one has to take into account a number of conditions [2]; in particular, this functional should be continuous, non-negative, and convex.

The big amount of publications devoted to mathematical issues both in multi-objective optimization, formulated as stochastic problems, and in robust optimal design can be found in proceedings of World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO).

The following locally stochastic methods (including those based on self-organization) are used as computational methods for solution synthesis in stochastic optimization problems:

- stochastic quasi-gradient algorithms [3];
- evolutionary (genetic, immune) algorithms [4-8];
- multi-agent methods (simulation of motion in migrating flights or in ant and bee colonies).

In proceedings of Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO), one can find many publications devoted to evolutionary methods in stochastic optimization issues.

The analysis of the existing literature sources shows that the development of estimation methods for selection functions and sought values in multi-objective problems of mathematical model identification, optimization and decision-making, especially in the case of the a priori uncertain data, faces a number of mathematical issues:

- shaping of the decision-maker's system of preferences: the generalized choice functions (the scalar convolutions), the system limitations, and the correctness set;
- structuring of the regularizing algorithms of the quasi-solutions synthesis.

It should be noted, that in the most of works devoted to the selection functions and sought values estimation in the above listed problems, there is no analysis of significance of nonlinear model variables based on their correlation and measurement accuracy.

Thus, there is a need to improve existing and develop new mathematical methods for selection functions and sought values estimation in multi-objective problems of mathematical model identification, optimization and decision-making in the case of the a priori uncertain data.

This article is devoted to the development of such method of selection function scalar convolution synthesis in multi-objective problems, which, in order to improve the quality of estimation, takes into account the measurement accuracy. The case of the pairwise correlation between the values of participating variables is considered.

## 2. Statement of the problem and a method of selection functions and sought values estimation in multi-objective problems with the a priori uncertain data

Let  $X^0$  is a vector of random variables (the model parameters, control variables, and state variables), whose dimension is  $M$ ;  $F^0$  is a vector of random variables (measurement data, selection functions), whose dimension is  $I$ . The values  $F^0$  can be found using the initial mathematical model (IMM) of the subject of investigation, presented in the form  $F^0 = F(X^0)$ , where  $F$  is a vector function.

Let us define the projections of  $X^0$  and  $F^0$  as the random variables with normal distribution having given mathematical expectations, standard deviations, and correlation matrices. This allows considering  $X^0$  and  $F^0$  as systems of several random variables with the multidimensional normal distribution.

In accordance with the A. N. Kolmogorov's concept of power averages, we will use the Student's statistics as criterion for testing the hypothesis of equality of distribution centers for representative samples of two multidimensional general populations  $t$ , and the multidimensional analogue of Romanovsky criterion for testing the hypothesis of equality of covariance matrices  $Ro$ :

$$t = \sqrt{\frac{n_\alpha}{2}} MD^2, \quad (2.1)$$

where  $n_\alpha$  is the dimension of samples from the general populations;

$MD$  - Mahalanobis distance;

$$Ro = \frac{|\chi^2 - k|}{\sqrt{2k}}, \quad k = n_\alpha - 2, \quad (2.2)$$

where  $\chi^2 = \frac{n_\alpha}{N} (\sigma^0)^T R \sigma^0$  is the multidimensional analogue of Pearson's chi-squared test;

$N$  is dimension of  $X^0$  (or  $F^0$ );

$$\sigma^0 = \left\{ \frac{\sigma_n}{\sigma_n^*} \right\}, n = 1..N;$$

$\sigma_n, \sigma_n^*$  - standard deviations of variables  $x_n \in X^0$  (sign \* marks target values);

$R$  - correlation matrix.

The difficulty of developing quality criteria in the problems of optimization and decision-making lies in identification of such formal relational systems, which would be isomorphic (or, at least, homomorphic) to the given empirical relational system. This correspondence is usually defined by a coordinating scale of relational systems, which in our case can be represented by a cortege of the form:

$$\{F^0, \phi, t_F, \xi, Ro_F, \zeta, \psi_t, \psi_{Ro}\}, \quad (2.3)$$

where  $F^0, t_F, Ro_F$  - carriers of relational systems;

$\phi, \xi, \zeta$  - binary relations of priority;

$\psi_t, \psi_{Ro}$  - isomorphisms between  $F^0$  and  $t_F$  (2.1),  $F^0$  and  $Ro_F$  (2.2), respectively.

Expression of the form  $\hat{F}\phi\hat{F}^*$ , where  $\hat{F} = (M[F^0], \sigma_F^0)$ ,  $\hat{F}^* = (F^*, 1)$ , means that solution  $\hat{F}$  is equivalent to the target values  $\hat{F}^*$ , if the predicate value is true:

$$\left( |M[F^0] - F^*| < \varepsilon_F \right) \vee \left( |\sigma_F^0 - 1| < \varepsilon_\sigma \right)$$

Relation of the form  $t_F \xi t_{crt}$  means that if  $t_F \leq \varepsilon_t < t_{crt}$ , where  $t_{crt} = t_{n_\alpha + n_\alpha - 2, \alpha}$ , then one can assume with the reliability  $P = 1 - \alpha$  that divergence of averages  $M[F^0]$  and  $F^*$  is not significant (is random). Similarly,  $Ro_F \zeta Ro_{crt}$  means that if  $Ro_F \leq \varepsilon_{Ro} < Ro_{crt}$ , where  $Ro_{crt} = Ro_{n_\alpha, n_\alpha, \alpha}$ , then, with the reliability  $P = 1 - \alpha$ , it can be assumed that accuracy of estimates of averages, which are compared, is the same.

Mappings  $\psi_t$  and  $\psi_{Ro}$  define the correspondence between the properties of the samples  $F^0$  described informally and the properties of criteria  $t_F$  and  $Ro_F$ , which have formal definitions.

Thus, having in mind reduction of the problem overall dimension, we have aggregated the variables with the help of introduced quantitative scale (2.3) (the scalar convolutions of selection functions are obtained).

Further, assuming the isomorphism of maps  $\psi_t$  and  $\psi_{Ro}$ , let us estimate parameters of distributions represented by samples  $X^0$  and  $F^0$ , which is equivalent to looking up a solution in such form:

$$\hat{X} = (M[X^0], \sigma_X^0).$$

Let us find the density of probability distribution of several joint events:



$$\rho(t_X, Ro_X, t_F, Ro_F) = \rho(t_X, Ro_X) \cdot \rho(t_F / t_X, Ro_X) \cdot \rho(Ro_F / t_F, t_X, Ro_X), \quad (2.4)$$

where  $\rho(t_X, Ro_X) = \rho(Ro_X / t_X) \cdot \rho(t_X)$ .

Then, according to Bayes' formula, the expression for the a posteriori probability density  $(t_X, Ro_X)$  after  $n_\alpha$  measurements of  $F^0$  looks as:

$$\rho(t_X, Ro_X / t_F, Ro_F) = \frac{\rho(t_X, Ro_X, t_F, Ro_F)}{\rho(t_F, Ro_F)},$$

where, by the formula of total probability:

$$\rho(t_F, Ro_F) = \rho(t_X) \cdot \rho(t_F, Ro_F / t_X) + \rho(Ro_X) \cdot \rho(t_F, Ro_F / Ro_X). \quad (2.5)$$

Let us consider some possible hypotheses, which, if adopted, would simplify the equality (2.5).

In the first case, taking into account that the IMM is deterministic, we have:

$$\rho(t_F, Ro_F) = \rho(t_X) + \rho(Ro_X). \quad (2.5a)$$

In the second case, assuming that the IMM is deterministic and  $Ro_F$  does not depend on  $X^0$  (the homoscedasticity hypothesis), we have:

$$\rho(t_F, Ro_F) = c_\rho \text{ (the uniform distribution)}, \quad (2.5b)$$

or

$$\rho(t_F, Ro_F) = \rho(\Delta F^0 / F^0, \varepsilon, \theta) \text{ (the noise model)}, \quad (2.5c)$$

where  $\varepsilon, \theta$  are the hyperparameters of the noise model.

Let us define the log-likelihood function

$$L(\hat{X} / t_F, Ro_F) = -\ln \rho(t_X, Ro_X / t_F, Ro_F) = -\ln \rho(t_X) - \ln \rho(Ro_X / t_X) - \ln \rho(t_F / t_X, Ro_X) - \ln \rho(Ro_F / t_F, t_X, Ro_X) + \ln \rho(t_F, Ro_F). \quad (2.6)$$

Further, let us take into account that the statistics  $t_F$  and  $Ro_F$  are random variables whose distribution laws tend to normal one with mean equal to zero and variance equal to unity, when  $n_\alpha \rightarrow \infty$ .

Obviously, the final form of the scalar convolution of selection functions (2.6) will depend on the accepted hypotheses, for example (2.5a) - (2.5c). Thus, in (2.5a)-case, which is typical for the identification problems, we have

$$L(\hat{X} / t_F, Ro_F) = \frac{1}{2} (t_F^2 + Ro_F), \quad (2.6a)$$

in (2.5b)-case, typical for decision-making, we have

$$L(\hat{X} / t_F, Ro_F) = \frac{1}{2} (t_F^2 + Ro_F + t_X^2 + Ro_X) + C_L. \quad (2.6b)$$

Hence, the estimation problem  $\hat{X} = (M[X^0] \sigma_X^0)$  can be reduced to multi-objective problem of stochastic optimization with mixed conditions (MPSOMC), whose quasi-solution, according to the principle of maximum likelihood, is:

$$\hat{X} = \underset{\hat{X} \in D_X}{\operatorname{arg\,inf}} L(\hat{X} / t_F, Ro_F), \quad (2.7)$$

where  $D_X$  is a correctness set, which, in the general case, is defined by the DM's system of preferences.

### 3. The results of synthesis of selection function scalar convolutions for the multi-objective problems with the a priori uncertain data

Let us consider some particular cases of scalar convolutions of selection functions for a number of practical problems of mathematical model identification, optimization, and decision-making.

**The identification problem.** Let us assume that  $R_F = E, n_\alpha = 2$ . Using (2.6a), we obtain:

$$L(\hat{X} / t_F, Ro_F) = \frac{1}{2PI} \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^I \left[ 4 \left( \frac{\Delta_{f_i,p}}{\sigma_{f_i}^*} \right)^2 \cdot \left( 1 + \sigma_{f_i,p}^0 \right)^{-2} + \left( \sigma_{f_i,p}^0 \right)^2 \right],$$

where  $\Delta_{f_i} = f_i - f_i^*, \sigma_{f_i}^* = \frac{\Delta_{f_i}^0 \sqrt{n_\alpha}}{300} f_{i,\max}$ ;

$\Delta_{f_i}^0$  is the relative error of  $f_i$ , in percentage.

It is the form shown in (3.1) that should be used as the scalar convolution of selection function in the case of the identification problem.

$$E = \frac{1}{2PI} \sum_{p=1}^P \gamma^{P-p} \sum_{i=1}^I \left\{ f_{fit} \left[ 4 \left( \frac{\Delta_{f_i,p}}{\sigma_{f_i}^*} \right)^2 \left( 1 + \sigma_{f_i,p}^0 \right)^{-2} \right] + \beta \cdot f_{fit} \left[ \left( \sigma_{f_i,p}^0 \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.1)$$

$\gamma = 0,95..0,99$

where  $f_{fit}$  is a fitness function (FF);

$f_{fit}(d) = 1 - \exp(-C \cdot d)$ ,  $C > 1$ ,  $d$  is an argument of FF ( $d > 0$ );

$\beta$  is a regularization parameter.

**MPSOMC.** Let us assume that  $R_F = R_X = E$ . Using (2.6b), we obtain:

$$L(\hat{X} / t_F, Ro_F) = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \left[ 4 \left( \frac{\Delta_{f_i}}{\sigma_{f_i}^*} \right)^2 \left( 1 + \sigma_{f_i}^0 \right)^{-2} + \frac{|\chi_{f_i}^2 - k|}{\sqrt{2k}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M \left[ 4 \left( \frac{\Delta_{x_m}}{\sigma_{x_m}^*} \right)^2 \left( 1 + \sigma_{x_m}^0 \right)^{-2} + \frac{|\chi_{x_m}^2 - k|}{\sqrt{2k}} \right] + C_L,$$

where  $\Delta_{f_i} = M_\alpha[f_i] - f_i^*$ ,  $\chi_{f_i}^2 = n_\alpha \frac{M_\alpha[(f_i - M_\alpha[f_i])^2]}{(\sigma_{f_i}^*)^2}$ ,

$$\Delta_{x_m} = M_\alpha[x_m] - x_m^*, \chi_{x_m}^2 = n_\alpha \frac{M_\alpha[(x_m - M_\alpha[x_m])^2]}{(\sigma_m^*)^2},$$

$x_m^*$ ,  $\sigma_m^*$  are the values of mathematical expectation and standard deviation of variable  $x_m$  for the prototype.

It is the form shown in (3.2) that should be used as the scalar convolution of selection function in the MPSOMC-case

$$E = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \left\{ f_{fit} \left[ 4 \left( \frac{\Delta_{f_i}}{\sigma_{f_i}^*} \right)^2 (1 + \sigma_{f_i}^0)^{-2} \right] + \beta \cdot f_{fit} \left( \frac{|\chi_{f_i}^2 - k|}{\sqrt{2k}} \right) \right\} + \tag{3.2}$$

$$+ \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M \left\{ f_{fit} \left[ 4 \left( \frac{\Delta_{x_m}}{\sigma_{x_m}^*} \right)^2 (1 + \sigma_{x_m}^0)^{-2} \right] + \beta \cdot f_{fit} \left( \frac{|\chi_{x_m}^2 - k|}{\sqrt{2k}} \right) \right\}.$$

Obviously, another cortege of the form (2.3) can contain the alternative statistics, as well as their distribution laws, depending on the additional information and assumed heuristics.

Let us define a measure of informativeness of a system as its average entropy:

$$S(F^0) = \int s(F^0) \cdot \varphi(dF^0),$$

where  $s(F^0) = -\rho(F^0) \log_2 \rho(F^0)$ ;

$\varphi(dF^0)$  is an a priori probability measure  $F^0 = F(X^0)$ .

Let us choose statistics  $H$  instead of statistics  $Ro$ , where  $H$  is the mutual information: some statistical function of two random variables, which describes the amount of information about one of these variables contained in another one. Then the mutual system information  $H_F$  can be obtained from the formula:

$$H_F = h_F(F^0, t_F, t_X, H_X) = S(F^0) - S(F^0 / t_F, t_X, H_X).$$

Let us take as a basis such heuristic, according to which the statistics  $H_F$  should satisfy the distribution law of the form:

$$\rho(H_F / t_F, t_X, H_X) \sim \exp(-\beta \cdot H_F).$$

Then, in the case (2.5a) instead of (2.6a), we obtain:

$$L(\hat{X} / t_F, H_F) = \frac{1}{2} t_F^2 + \beta \cdot H_F. \tag{3.3}$$

Let us assume that  $R_F = E$ . In this case  $H_F = \ln \left[ \prod_{i=1}^I (\sigma_{f_i}^0)^2 \right] + C_H$ .

Then using (3.3), we obtain

$$L(\hat{X} / t_F, H_F) = \frac{1}{2PI} \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^I \left\{ 4 \left( \frac{\Delta_{f_i,p}}{\sigma_{f_i}^*} \right)^2 (1 + \sigma_{f_i,p}^0)^{-2} + \beta \cdot \ln(\sigma_{f_i,p}^0)^2 \right\} + C_H,$$

and it is the form shown below that should be used as the scalar convolution of selection function

$$E = \frac{1}{2PI} \sum_{p=1}^P \gamma^{P-p} \sum_{i=1}^I \left\{ f_{fit} \left[ 4 \left( \frac{\Delta_{f_i,p}}{\sigma_{f_i}^*} \right)^2 (1 + \sigma_{f_i,p}^0)^{-2} + \beta \cdot \ln(\sigma_{f_i,p}^0)^2 \right] \right\}, \gamma = 0,95..0,99. \quad (3.4)$$

Note that, due to the monotonicity of functions  $f_{fit}(d)$  and  $\ln(d)$ , the solutions of the problem (2.7) obtained using either (3.1) or (3.4) coincide.

Thus, the types of scalar convolutions of selection functions are obtained for some practical optimization and decision-making problems with the a priori uncertain data.

Methodological preciousness of this work is that the synthesis of scalar convolutions of selection functions has been formalized, whereas previously they were entirely heuristic (see. for example [9-12]).

#### 4. Results and conclusions

The authors gave further development to the theory of selection functions and sought values estimation in multi-objective problems of mathematical model identification, optimization and decision-making.

The method of synthesis of selection function scalar convolutions has been proposed for the mentioned above problems under condition of the a priori uncertain data.

For a number of practical problems of named kinds, the types of scalar convolutions of selection functions have been obtained, whose application for solution synthesis with the help of regularizing algorithms would provide the stable effective estimates of sought values in the case of the a priori uncertain data.

#### REFERENCES

1. Aivazian S.A. Multivariate observation classification / S.A. Ayvazyan, Z.I. Bezhaeva, O.V. Staroverov. – M.: Statistics, 1974. – 240 p.
2. Tikhonov A.N. Methods of solving ill-posed problems / A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin. – Moscow: Nauka, ch. ed. sci. litas., 1986. – 288 p.
3. Uryasev S.P., Adaptive algorithms in stochastic optimization and game theory / Edited by J.M. Yermolyeva. – M.: science, ch. ed .fiz. mat. litas., 1990. – 184 p.
4. Li M. A Multi-Objective Genetic Algorithm for Robust Design Optimization / M. Li, S. Azarm, V. Aute. – Proceedings of GECCO 2005, Washington, D.C., USA, June 25-29.– pp. 771-778.

5. Egorov I.N. Multi-Objective Robust optimization of Air Engine Using IOSO Technology / I.N. Egorov, G.V. Kretinin, I.A. Leshchenko, S.V. Kuptzov. – Conference ASME Turbo Expo 2004, Vienna, Austria, June 14-17. – 7 p. (ASME Paper GT2004-53504).
6. Egorov I.N. Stochastic Optimization of Parameters and Control Laws of the Aircraft Gas-Turbine Engines – a Step to a Robust Design / I.N. Egorov, G.V. Kretinin, I.A. Leshchenko – Elsevier Science Ltd, “Inverse Problem in Engineering Mechanics III”, (2002), pp.345-353.
7. Egorov I.N. Search for Compromise Solution of the Multistage Axial Compressor’s Stochastic Optimization Problem / I.N. Egorov, G.V. Kretinin, – World Publishing Corporation, Aerothermodynamics of internal flows III, Beijing, China, (1996), pp. 112-120.
8. J. Marczyk Stochastic Multidisciplinary Improvement: Beyond Optimization – AIAA- 2000-4929, Proceedings of 8<sup>th</sup> AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Long Beach, USA, (2000).
9. Menyailov A.V. Application of evolutionary methods for solving optimization gas turbine compressor / A.V. Menyailov, A.A Tronchuk, K.M. Ugryumova, // Aerospace techniques and technology, 2008, No. 5 (52), pp. 59-65.
10. Ugryumov M.L. Gas Turbine Engine Elements Systematic Improvement on the Base of Inverse Problem Concept by Stochastic Optimization Methods / M.L. Ugryumov, A.A. Tronchuk, V.E. Afanasjevska, A.V. Myenyaylov – Abstracts Book and CD-ROM Proceedings of the 20-th ISABE Conference, Gothenburg, Sweden, ISABE Paper No. 2011–1255.
11. Tronchuk A.A., Mathematical models and evolutionary method for solving problems of stochastic optimization / A.A. Tronchuk, E.M. Ugryumova // Visnyk of Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2012 – 19 issue (№ 1015). – pp. 292-305.
12. Meniailov Ie.S. Formation of image of technical systems under conditions of input data uncertainty based on artificial intelligence methods / Ie.S. Meniailov, K.M. Ugryumova, A.A Tronchuk, S.V. Chernysh // Aerospace techniques and technology. – 2014. – № 7 (114). – pp. 169-174.

## CONTENTS

▪ <b>O. V. Agulov, P. U. Bondarenko, L. V. Vasilyeva, A. A. Goncharov.</b> . . . . .	<b>5</b>
Simulation of thermal processes in the cutting insert	
▪ <b>L. Angermann, V. V. Yatsyk, M. V. Yatsyk.</b> . . . . .	<b>13</b>
The Type-Conversion of Oscillations at the Excitation of Nonlinear Layered Media	
▪ <b>K. A. Bazilevich, M. S. Mazorchuk.</b> . . . . .	<b>22</b>
Mathematical models and decision support system for assessing the financial statement of the insurance fund	
▪ <b>I. P. Bokov, N. S. Bondarenko, E. A. Strelnikova.</b> . . . . .	<b>33</b>
Study of stress-strain state of the transversely isotropic plates using the refined theory	
▪ <b>V. A. Gerus, P. M. Martynyuk.</b> . . . . .	<b>41</b>
Generalization of equation of soil filtration consolidation	
▪ <b>M. N. Demianenko, O. O. Liaposchenko, I. V. Pavlenko, V. I. Sklabinskyi.</b> . . . . .	<b>53</b>
Solution of the Navier-Stokes Equation and the Problem of Hydro-Aero-Elastic for the Processes of Separation in the Curvilinear Channels	
▪ <b>M. Yu. Dikhtyar, Ia. S. Movsesian, V. E. Savanevych.</b> . . . . .	<b>65</b>
The statistical model of the set of positional changes on the series of frames portion of the celestial sphere	
▪ <b>V. V. Lavrik.</b> . . . . .	<b>77</b>
Modeling of the stress - strain state structures mechanics elastomers CAD FORTU-FEM	
▪ <b>V. O. Mishchenko.</b> . . . . .	<b>91</b>
Thermodynamic approach to modeling the software reliability growth process, taking into account the "secondary defects"	
▪ <b>O. M. Nazarenko.</b> . . . . .	<b>107</b>
Modeling of SH-wave diffraction on non-homogeneous method of singular integral equations	

▪ <b>O. M. Nazarenko, O. M. Nikolaenko</b> . . . . .	<b>124</b>
Identification of poorly formalized stationary systems with unknown inputs in n-dimensional phase space	
▪ <b>V. V. Nikolenko, V. A. Yachmenev</b> . . . . .	<b>131</b>
The exact solution of the initial boundary value problem for the equation of anomalous diffusion	
▪ <b>O. V. Pryimak</b> . . . . .	<b>137</b>
Simulation of "electron beam – modulation instability of plasma oscillations" system	
▪ <b>N. V. Smetankina, S. V. Ugrimov, A. N. Shupikov</b> . . . . .	<b>150</b>
Modelling of the Response of Laminated Glazing on Static and Dynamic Loading	
▪ <b>M. Y. Ternovoy, O. S. Shtogrina</b> . . . . .	<b>157</b>
Properties of fuzzy knowledge base representation in the form of metagraph	
▪ <b>S. V. Chernysh, Ie. S. Menailov, K. M. Ugryumova, M. L. Ugryumov</b> . . . . .	<b>172</b>
A method synthesis of selection function scalar convolutions for the multi-objective decision-making problems	
<b>CONTENTS</b> . . . . .	<b>181</b>

**ВІСНИК ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
імені В.Н. Каразіна**

**Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.  
Автоматизовані системи управління»**

*Випуски даної серії розповсюджуються у академічних та наукових колах України та за її межами з метою оперативного висвітлення досліджень у таких актуальних галузях: математичне та комп'ютерне моделювання, обчислювальний експеримент, теорія і прикладні методи обробки інформації, захист інформації, програмно-апаратні системи інформаційного або управляючого призначення, застосування математичного моделювання та системного аналізу у високих, наукоємних технологіях, враховуючи технології створення програмної продукції. Приймаються роботи, що відносяться до напрямів фізико-математичних і технічних наук (бажаний об'єм 6-18 сторінок). Усі рукописи рецензуються.*

*Примітка. Протягом 2015-17 рр. редакційна колегія при інших рівних умовах надаватиме перевагу роботам, що представлені англійською мовою, якщо мова статті отримала схвалення при рецензуванні.*

*Офіційний сайт <http://mia.univer.kharkov.ua>*

*Сайт редколегії <http://www.dsmmph.org.ua/bulletin.html>*

**ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА  
имени В.Н. Каразина**

**Серія «Математическое моделирование. Информационные технологии.  
Автоматизированные системы управления»**

*Випуски данной серии распространяются в академических и научных кругах Украины и за ее пределами с целью оперативного освещения исследований в следующих актуальных областях: математическое и компьютерное моделирование, вычислительный эксперимент, теория и прикладные методы обработки информации, защита информации, программно-аппаратные системы информационного или управляющего назначения, приложения математического моделирования и системного анализа в высоких, наукоёмких технологиях, включая технологии создания программной продукции. Принимаются работы, относящиеся к направлениям физико-математических и технических наук (желательный объем 6-18 страниц). Все рукописи рецензируются.*

*Примечание. На протяжении 2015-17 гг. редакционная коллегия при прочих равных условиях будет отдавать предпочтение работам, представленным на английском языке, если язык статьи получил одобрение при рецензировании.*

*Официальный сайт <http://mia.univer.kharkov.ua>*

*Сайт редколлегии <http://www.dsmmph.org.ua/bulletin.html>*