

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Серія

«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 40

Серія заснована 2003 р.

BULLETIN

of V.N. Karazin Kharkiv National University

Series

«Mathematical Modeling.
Information Technology.
Automated Control Systems»

Issue 40

First published in 2003

Харків
2018

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних та технічних наук (наказ МОН України № 1328 від 21.12.2015 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 12 від 26.11.2018 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),

д.ф.-м.н., академік НАН України, проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора), д.т.н., проф. ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т. (заст. гол. редактора), д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Споров О.Є. (відповідальний секретар), к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Замула О. А., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ імені Б.І. Веркіна НАН України

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Рассомахін С. Г., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В. Н. Каразіна

Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Толстолузька О. Г. д.т.н., с.н.с., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Угрюмов М. Л., д.т.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"

Стрельникова О.О., д.т.н., проф. Ін-т проблем машинобудування НАН України

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра прикладної інформатики, університет імені Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Professor of Technical Informatics and Computer Systems, Institute of Informatics, Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of computer science, Dep. of C. S., University of Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

ЗМІСТ

▪ В.А. Баранец, Н.Н. Кизилова	4
Дискретное моделирование агрегации и оседания микро- и наночастиц в суспензиях	
▪ R.O. Gamzayev, E. Karaçuha, M.V. Tkachuk, O.Y. Tovstokorenko	16
An approach to assessment of dynamic software variability in mobile applications development	
▪ Д.В. Крютченко	25
Вимушені коливання рідини в циліндричних резервуарах під дією вертикального збудження	
▪ В.М. Куклин	36
Особенности развития искусственного интеллекта на современном этапе	
▪ В.М. Куклин	43
О математических моделях описания параметрических и модуляционных неустойчивостей	
▪ V.T. Lazurik, V.M. Lazurik, G. Popov, Z. Zimek	49
Modeling the influence of electron beam energy distribution on quality of radiation processing	
▪ V.V. Romanuke	60
The exact minimization of total weighted completion time in the preemptive scheduling problem by subsequent length-equal job importance growth	
▪ CONTENTS	67

УДК 532+517.958:531.12

Дискретное моделирование агрегации и оседания микро- и наночастиц в суспензиях

В.А. Баранец, Н.Н. Кизилова

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,**площадь Свободы 4, г. Харьков, 61022, Украина**e-mail: cherevko.vita@mail.com*

Исследуется агрегация частиц в технических наножидкостях как механизм их старения. Предложен количественный индекс старения на основе показателя скорости оседания частиц наножидкости в трубке. Приведен обзор известных экспериментальных данных по агрегации и оседанию разного типа наночастиц, а также имеющиеся теоретические модели, которые показали существенные различия теоретических и экспериментальных кривых оседания. Предложена модификация метода динамики частиц с учетом условий проскальзывания второго порядка и проведены расчеты оседания в прямых и наклонных трубках. Показано хорошее соответствие теории с экспериментом.

Ключевые слова: математическое моделирование, микрочастицы, наночастицы, агрегация, седиментация, метод динамики частиц.

Досліджується агрегація частинок в технічних нанорідинах як механізм їх старіння. Встановлено, що за рахунок агрегації в'язкість нанорідин зростає, а теплопровідність зменшується. Під час осідання у верхній частині трубки утворюється область несучої рідини, вільної від частинок (зона I). Потім розташовується зона IIa, заповнена осідаючими одиночними частинками і агрегатами із невеликого числа частинок. Після слідує зона IIb, заповнена великими агрегатами. Зона IIb складається з великих агрегатів, які утворюють пористий каркас. Самий нижній шар III складається зі щільно упакованих агрегатів без рідини. Динамічні криві $H(t)$, отримані з експериментів, дають можливість оцінити теоретичні моделі, що розробляються. Наведено огляд відомих експериментальних даних по агрегації і осіданню різного типу наночастинок, а також наявні теоретичні моделі, які показали істотні відмінності теоретичних і експериментальних кривих осідання. Для чисельних розрахунків використовується дискретний метод динаміки частинок, який дозволяє проводити комп'ютерні симуляції при будь-якій геометрії і розташуванні трубки. Результати розрахунків з використанням теоретичних і експериментальних даних показали, що осідання швидше за наявності проковзування на поверхнях частинок, що більше виражено в похилих трубках. Зі збільшенням кута нахилу трубки швидкість осідання зростає при $\varphi < 45^\circ$, а при великих кутах - зменшується, причому відразу після початку осідання. Таким чином, оцінка ступеня старіння нанорідин може бути прискорена при проведенні тесту в похилій трубці. Запропоновано кількісний індекс старіння на основі показника швидкості осідання частинок нанорідин в трубці. Запропоновано модифікацію методу динаміки частинок з урахуванням умов проковзування другого порядку і проведені розрахунки осідання в прямих і похилих трубках. Показано гарну відповідність теорії з експериментом.

Ключові слова: математичне моделювання, мікрочастинки, наночастинки, агрегація, седиментація, метод динаміки частинок.

The aggregation of particles in technical nanofluids is investigated as a mechanism of their aging. It has been established that nanofluid viscosity increases, and thermal conductivity decreases due to aggregation. The region of particle-free fluid is formed during the sedimentation in the upper part of the tube (zone I). Zone IIa, filled with sedimenting single particles and aggregates of a small number of particles is located next. Zone IIb filled with the large aggregates is followed. Next zone IIc consists of the large aggregates that form a porous framework. Bottom layer III consists of the compactly placed aggregates without a fluid. Dynamic curves $H(t)$ obtained from the experiments make it possible to evaluate the developed theoretical models. A review of the known experimental data on the aggregation and sedimentation of various types of nanoparticles is presented and the available theoretical models that have shown significant differences between the theoretical and experimental sedimentation curves are reviewed. The discrete particle dynamics method which allows performing computer simulations with any geometry and location of the tube is used for numerical calculations. The results of calculations using theoretical and experimental data shows that the sedimentation is faster in the presence of sliding on the particle's surfaces which is more evident in inclined tubes. With an increase in the inclination angle of the tube the sedimentation rate increases at $\varphi < 45^\circ$, and at large angles it decreases immediately after the start of sedimentation. Thus the evaluation of nanofluid aging may be accelerated if the test is conducted in an inclined tube. A quantitative indicator of aging based on the nanoparticle sedimentation rate in a tube is proposed. A modification of the particle dynamics method which accounts for the second-order slide condition at the fluid-solid interface is proposed. Computer simulations of the sedimentation in straight and inclined tubes have been carried out. A correspondence of theory and experiment has been shown.

Key words: mathematical simulation, microparticles, nanoparticles, aggregation, sedimentation, particle dynamics method.

1. Введение

В настоящее время наблюдается всплеск теоретических и экспериментальных исследований в области нанонаук и нанотехнологий, что связано с разработкой новых материалов с уникальными физико-химическими свойствами, созданием искусственных клеток и тканей, лечением болезней на клеточном уровне, квантовой электроники и компьютерных вычислений, нанооптики, наноионики и многих других перспективных нанобиотехнологий [1-3]. Микро- и нанофлюидика занимается созданием, изучением физико-химических свойств и течений микро- и наножидкостей, т.е. разбавленных и концентрированных суспензий микрочастиц (с диаметрами $d_p \sim 1-100$ мкм) и наночастиц ($d_p \sim 1-100$ нм) [3-5]. Микрожидкости могут быть также представлены растворами и расплавами полимеров, эмульсиями и микропористыми пенами, биологическими жидкостями, суспензиями микроорганизмов и клеток, например, в биореакторах или заменителях крови, синовиальной и других биологических жидкостей. Наиболее часто используемые наножидкости – это коллоидные взвеси наночастиц Al_2O_3 , CuO , SiO_2 , ZnO с диаметрами $d_p = 20-60$ нм, на основе воды, глицерина, этиленгликоля, а также суспензии фуллеренов ($d_p = 1.6-1.8$ нм), нанотрубок ($d_p = 5-100$ нм), нанокристаллов и других частиц. Такие наножидкости обладают уникально высокой электро- и теплопроводностью, поэтому широко используются в качестве охлаждающих жидкостей в различных микрожидкостных устройствах, топливных элементах и микродвигателях [3-6]. Наножидкости имеют уникальные термомеханические, электрические и магнитные свойства уже при малых (<5-10%) концентрациях наночастиц. Добавление всего $C_p = 1.8\%$ наночастиц Al_2O_3 в охлаждающую жидкость приводит к увеличению отвода тепла от микропроцессора ПК на 32% [3]. Вопрос об оптимальных концентрациях, при которых теплопроводность жидкости оказывается высокой, а динамическая вязкость - низкой, остается открытым, поскольку ответ сильно зависит от природы частиц, их размера, формы, шероховатости и адгезивности поверхности [4,5]. В обзоре [7] приведены зависимости эффективности различных наножидкостей в диапазоне $Re = 1-1200$.

Известно, что в ходе эксплуатации таких жидкостей наночастицы становятся нестабильными и образуют агрегаты, вследствие чего жидкость «старееет» - ее вязкость возрастает, а теплопроводность уменьшается [8,9]. Для предотвращения агрегации и последующей гравитационной седиментации наночастицы стабилизируют электростатически (путем вариации pH базовой жидкости) или стерически (путем адсорбции длинных молекул на их поверхностях) [10].

Для диагностики состояния наножидкостей используются методы эмпирической оценки скорости оседания агрегатов в вертикальных капиллярах [6]. Для разработки надежных количественных методов оценки возраста наножидкости необходимо решение соответствующих теоретических задач. Для микрожидкостей, например, суспензии крови, соответствующих двух- и трехфазные модели разработаны и проведена их валидация на данных экспериментальных исследований [11,13]. Для наножидкостей в данной работе используется дискретная модель динамики частиц.

2. Математическая модель и постановка задачи

2.1. Формулировка задачи.

Рассматривается оседание суспензии агрегирующих частиц в тонкой длинной вертикальной микротрубке в поле сил тяжести \vec{g} или центробежных сил центрифуги $n\vec{g}$, которые направлены вертикально вниз (Рис.1а). Концентрация частиц считается достаточно высокой ($C \geq 0.05$), чтобы происходило оседание. Поскольку скорость оседания одиночной частицы в жидкости под действием сил тяжести, Архимедовой и сопротивления Стокса описывается аналитической формулой [11]

$$v = \frac{\chi n g d_p^2 \Delta \rho}{4\mu(C)} \quad (2.1)$$

где μ - вязкость суспензии, d_p - диаметр частицы, $\Delta\rho$ - разность плотностей частицы и несущей жидкости, χ - фактор формы частиц, для сферических частиц $\chi = 2/9$, то скорость оседания неагрегирующих частиц при малых концентрациях и низких значениях n может быть сопоставима с броуновскими флуктуациями. При дополнительной стабилизации поверхности и отсутствии электростатических взаимодействий такие суспензии могут быть устойчивы и находиться во взвешенном состоянии годами [3,4]. При использовании их в микрожидкостных системах число столкновений увеличивается и, за счет высокой адгезивности поверхностей частиц, они чаще образуют агрегаты. Таким образом, порог концентраций C , при который частицы агрегируют и оседают в покоящейся жидкости, определяется значительным числом факторов, но, по различным оценкам, близок к $C^* \sim 0.05$ [3-5].

Так, в водной суспензии нуль-валентных металлических наночастиц с $d_p = 20$ нм при концентрациях 2 мг/л и 60 мг/л через 10 мин образовывались агрегаты со средним радиусом 125 нм и 1200 нм соответственно, которые быстро оседали в воде [14]. Если несущая жидкость отлична от дистиллированной воды (например, подземные воды, питьевая вода), то агрегация и оседание взвешенных наночастиц, например, использующихся при очистке воды, зависит от pH, ионной силы, наличия примесей [15]. Наночастицы оксида цинка ZnO образуют агрегаты и быстро выпадают в осадок уже при $d_p > 50$ нм [16].

В соответствии с многочисленными наблюдениями и экспериментами с суспензиями микрочастиц [11,13], вскоре после начала оседания в верхней части трубки образуется участок несущей жидкости, свободный от частиц (зона I на рис.2.1а). Ниже располагается участок Па, заполненный оседающими одиночными частицами и агрегатами из небольшого числа частиц, который плавно переходит в участок Пб, заполненный крупными агрегатами. По реологическим свойствам материалы, заполняющие зоны Па и Пб – вязкоупругие жидкости с соответственно меньшей и большей вязкостями. Именно поэтому более крупные частицы из зоны Пб, обладающие более высокими скоростями оседания, не могут ускориться из-за больших по значению сил Стокса сопротивления. Таким образом, граница между Па и Пб остается нечеткой. Зона Пв заполнена крупными агрегатами, который контактируют друг с другом и образуют по сути пористый каркас, т.е. вязкоупругое твердое тело. Самый нижний слой III заполнен агрегатами, упакованными плотно, практически без наличия в просветах между ними несущей жидкости (компактный слой). Со временем высоты областей I и III увеличиваются, а областей II а-в – уменьшаются. О скорости оседания можно судить по высоте H зоны I [11]. При проведении экспериментов по оседанию наночастиц проводятся измерения динамических кривых $H(t)$, которые используют для валидации разрабатываемых моделей.

Имеющиеся в литературе модели для суспензий наночастиц основаны на модификациях метода динамики частиц с учетом сил Ван-дер-Ваальса, гравитации, Броуновских и Стоксовых сил на основе полуэмпирических зависимостей для скоростей агрегации и дезагрегации при столкновениях [17-19]. Тем не менее различия в рассчитанных кривых оседания $H(t)$ экспериментальных кривых для суспензий фуллеренов в воде [18], фуллеренов и оксида меди CuO в масле [17], наночастиц диоксидов титана TiO₂ и церия CeO₂ [19] остаются существенными.

В данной работе изучается динамика оседания наночастиц в вертикальной трубке при наличии агрегации и изначально однородном распределении частиц в прямых (Рис.2.1б) и наклонных (Рис.2.1в) под углом ϕ к вертикали микротрубках.

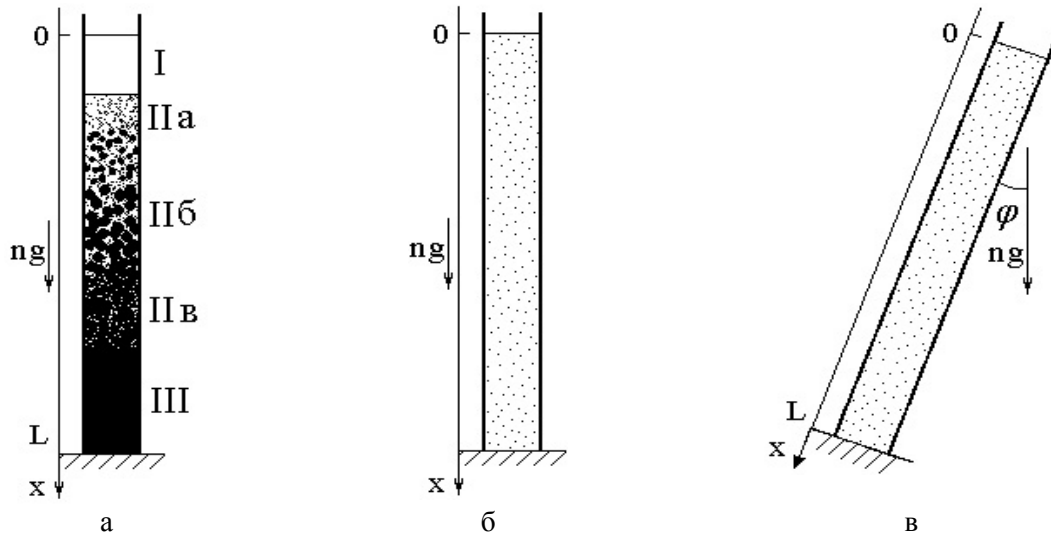


Рис.2.1. Распределение различных зон в суспензии оседающих частиц (а) и геометрия задачи в прямых (б) и наклонных (в) трубках.

Для численных расчетов используется дискретный метод динамики частиц, который позволяет проводить компьютерные симуляции при любой геометрии и расположении трубки, а также размера и формы частиц, основываясь только на физических законах взаимодействия частиц и их геометрии, поскольку при континуальном моделировании динамики суспензий необходимы эмпирические зависимости $\mu(C)$, $\rho(C)$ [11], которые при концентрациях частиц выше 5% неоднозначны. Проводится проверка гипотезы о том, что отличия теоретических и экспериментальных кривых связаны с использованием выражений для Броуновских и Стоксовых сил, не учитывающих условие проскальзывания второго порядка на границе раздела жидкость-стенка, которое существенно для описания динамики наножидкостей [11].

2.2. Метод динамики частиц в моделировании эволюции динамической системы

Метод динамики частиц (Particle dynamics method, PDM) или метод молекулярной динамики (Molecular dynamics method) – это дискретная математическая модель, в которой отдельные атомы, молекулы, нано- или микрочастицы рассматриваются как твердые сферы, взаимодействие которых определяется законами классической механики. При этом временная эволюция системы взаимодействующих частиц определяется путем интегрирования уравнений динамики Ньютона с учетом всех парных взаимодействий на малых промежутках времени. Впервые метод был предложен в [20] для твердых и жидких материалов. Силы межчастичного взаимодействия рассматриваются в виде классических потенциальных сил, но и непотенциальные силы, например, трение и другие неупругие взаимодействия сфер, также могут быть приняты во внимание [21]. Вычисление траекторий движения системы на больших промежутках времени производится путем последовательных итераций процедуры интегрирования траекторий на малых временах с последующим перерасчетом всех сил взаимодействий для каждой из частиц. Было показано, что путем таких расчетов получают наборы конфигураций частиц, которые распределены в соответствии с некоторой статистической функцией, например, микроканоническим распределением.

Существует большое количество различных видов софта для проведения расчетов с помощью PDM в рамках Lattice Boltzmann methods или других, например, XMD [22] для моделирования процессов в металлах и керамике, LAMMPS (Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator) [23], и многие другие [24]. Первый этап моделирования связан с генерацией определенного набора координат $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=1}^N$ центров сферических частиц, равномерно распределенных в заданном объеме, где $N = V \cdot C / V_0$, V – объем жидкости, V_0 – объем частицы.

Движение каждой частицы определяется уравнением Ньютона

$$m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij} + \vec{g}_j, \quad (2.2)$$

где i, j - номера частиц, m_j - масса частицы, \vec{f}_{ij} - силы парных взаимодействий, действующие на частицу j со стороны частицы i , \vec{f}_i^h - силы, действующие только на частицу j со стороны несущей жидкости и внешних полей.

2.3. Силы взаимодействия частиц в наножидкостях

На частицы наножидкостей действуют следующие силы парных взаимодействий [7-9]:

1) силы Ван-дер-Ваальса с потенциалом

$$\Psi = -\frac{A_H}{12} \left(\frac{1}{(\lambda+1)^2} + \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} + 2 \ln \frac{\lambda(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2} \right), \quad (2.3)$$

где A_H - постоянная Гамакера, $\lambda = h/d_p$, d_p - диаметр частицы, $h = h(C, d_p)$ - расстояние между центрами частиц;

2) силы отталкивания с потенциалом

$$\Phi = 32\pi k_B T d_p \rho_i \kappa^{-2} \text{th}^2 \left(\frac{\rho_i \Phi_0}{4k_B T} \right) e^{-\kappa h}, \quad (2.4)$$

возникающие при сближении частиц за счет взаимодействия их ионных облаков, где k_B - постоянная Больцмана, T - температура, κ - постоянная Дебая, ρ_i, Φ_0 - плотность электрического заряда и потенциал двойного слоя на поверхности частицы, который определяет ее дзета-потенциал $\zeta_p = 4\pi\mu_{bf} v_p / \epsilon_{bf}$, ϵ_{bf} - диэлектрическая проницаемость несущей жидкости;

3) электростатическое отталкивание

$$\vec{f}_e = \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (2.5)$$

где q_i, q_j - заряды частиц, $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$, \vec{r}_j, \vec{r}_i - радиус-векторы частиц в некоторой фиксированной системе координат. Наиболее часто с помощью PDM рассматриваются жидкости Леннарда-Джонса [25] с парными взаимодействиями (2.3), (2.4).

Со стороны несущей жидкости на частицы действуют следующие силы:

1) Массовые силы, равные разнице силы тяжести и Архимедовой силы

$$\vec{f}_g = \frac{\pi}{6} d_p^3 (\rho_p - \rho_{bf}) \vec{g} n, \quad (2.6)$$

где ρ_p, ρ_{bf} - плотности частиц и жидкости, \vec{g} - ускорение свободного падения, n - перегрузка (при проведении экспериментов в центрифуге);

2) Силы Стокса

$$\vec{f}_S = -9\mu_{bf} d_p (\vec{v}_p - \vec{v}_{bf}), \quad (2.7)$$

где \vec{v}_p, \vec{v}_{bf} - скорости частиц и жидкости, $\mathcal{Q} = \text{const}$ - фактор формы частицы, для сферических частиц $\mathcal{Q} = 3\pi$;

3) Броуновские силы, связанные с хаотическими дискретными столкновениями

$$\vec{f}_B = \sqrt{\frac{2k_B T}{3\pi^3 \mu_{bf} d_p}} m_p \vec{f}_0, \quad (2.8)$$

где μ_{bf} - вязкость базовой жидкости, \vec{f}_0 - случайный вектор с нулевым средним.

При наличии внешних электромагнитных полей, учитываются также поляризационные взаимодействия, пондеромоторные и другие силы и взаимодействия. В поле температур добавляются также термофоретические силы, а во внешнем сдвиговом потоке – силы Магнуса и ряд других [12]. При наличии высоких скоростей движения (в газах) добавляются условия упругого или неупругого отталкивания частиц, движущихся с разными скоростями, при парных столкновениях (баллистические взаимодействия).

Поскольку на микро/нано уровне не выполняются условия прилипания вязкой жидкости к твердым поверхностям частиц и стенкам сосудов, а вместо них выполняется условие проскальзывания первого/второго порядка для микро/наносuspензий [3-5]

$$\left(v - v_w - C_1 Kn \frac{\partial v}{\partial n} + C_2 Kn^2 \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (2.9)$$

где v и v_w - скорости движения жидкости и твердой поверхности $\partial \Omega$, $\partial / \partial n$ - производная по нормали к поверхности, $Kn = \lambda / L$ - число Кнудсена, λ - длина свободного пробега, L - характерная длина, C_1, C_2 - константы, зависящие от материала и шероховатости стенки, то вместо (2.7) получим [11]

$$\vec{f}_S = -9\mu_{bf} d_p (\vec{v}_p - \vec{v}_{bf} + C_1 Kn \frac{\partial \vec{v}_p}{\partial n} - C_2 Kn^2 \frac{\partial^2 \vec{v}_p}{\partial n^2}), \quad (2.10)$$

Значения C_1, C_2 для некоторых наножидкостей приведены в [5,6].

2.4. Алгоритм численных расчетов.

При использовании PDM после задания внешних сил, свойств частиц и несущей жидкости и генерации начального распределения центров частиц $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^N$ проводятся итеративные расчеты индивидуальных траекторий частиц по (2.2) в следующем порядке:

- 1) Для каждой частицы (x_j, y_j, z_j) определяются те координаты из общего набора $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^N$, положение которых удовлетворяет условию $|\vec{r}_{ij}| \leq 2h$, а парные взаимодействия более удаленных частиц считаются несущественными [25];
- 2) Для текущего положения каждой из частиц и ее ближайшего окружения проводятся вычисления всех сил, входящих в правую часть (2.2) и затем уравнение интегрируется, например, с использованием, например, алгоритма Верле (L. Verlet, 1967)

$$\vec{r}_j(t + \Delta t) = 2\vec{r}_j(t) - \vec{r}_j(t - \Delta t) + \vec{a}_j(t)(\Delta t)^2, \quad (2.11)$$

где Δt - шаг по времени, \vec{a}_j - ускорение j -й частицы, рассчитываемое по правой части (2.2). Метод второго порядка точности и устойчив, но требует наличия значений координат на двух предыдущих шагах по времени, поэтому на первом шаге для интегрирования используется менее точная схема первого порядка

$$\vec{r}_j(t + \Delta t) = \vec{r}_j(t) + \vec{a}_j(t)\Delta t. \quad (2.12)$$

- 3) Для рассчитанных новых положений центров частиц для каждой пары проверяются условия $|\vec{r}_{ij}(t + \Delta t)| \geq (d_i + d_j) / 2$; если условие не выполняется и имеет место перекрытие объемов частиц, чего физически не может быть, производится коррекция положений их центров с учетом Дебаевского (для молекул) или упругого (для наночастиц) отталкивания. Аналогичная коррекция проводится при условии наличия твердой стенки (сосуда, трубки, контейнера). При наличии агрегации частиц и выполнении условия $|\vec{r}_{ij}(t + \Delta t)| \leq (d_i + d_j) / 2$, две частицы

заменяются на одну с эквивалентной суммарной массой и координатой центра $(m_i \vec{r}_i(t + \Delta t) + m_j \vec{r}_j(t + \Delta t)) / 2$;

4) После определения новых координат всех частиц, проводится расчет поля концентраций методом конечных объемов. При этом рассматриваемый объем жидкости делится на заданное число равных малых объемов $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, в каждом из которых подсчитывается общая масса попавших частиц и концентрация в точке (инфинитезимальном объеме среды). По полю концентраций определяется новая эффективная вязкость μ_{eff} наножидкости, которая становится неоднородной за счет эффекта агрегации наночастиц

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\mu_{\text{bf}}}{1 - \alpha(d_p / d_f)^{-0.3} C^{1.03}},$$

где M_{bf} и $d_f = (6M_{\text{bf}} / \pi N_A \rho_{\text{bf}})^{1/3}$ - молекулярная масса и эквивалентный диаметр базовой жидкости, N_A - число Авогадро, $\alpha = \text{const}$ - коэффициент формы частиц, для сферических частиц $\alpha = 2.5$. Вычисленное поле вязкостей жидкости используется для расчета локальных сил Стокса и Броуновских сил.

3. Результаты численных расчетов и обсуждение

Численные расчеты проводились для наножидкостей, наборы параметров и результаты экспериментов для которых представлены в [17-19], а также для крови как суспензии микрочастиц с диаметрами $d_p \sim 5-10$ мкм [11-13] в соответствии с алгоритмом, описанным выше. Наборы значений параметров представлены в Табл.1, $T=300$ К.

Поскольку алгоритм требует случайного начального распределения частиц, для каждого набора значений из Табл.1 проводились повторные расчеты при

Таблица 1. Значения параметров наножидкостей для численных расчетов по (2)-(4),(6),(8),(9): F – фуллерены, C_0 – начальная концентрация, t_{max} – максимальное время наблюдения, h_0 – начальное расстояние между частицами; остальные параметры – см. в тексте.

	F+H ₂ O [17]	F+масло [17]	CuO+ масло[17]	Al ₂ O ₃ + H ₂ O[18]	Кровь [11,13]
C_0	0.005	0.005	0.005	0.02	0.35
t_{max} (ч)	2.8	2.8	2.8	80	3
d_p (нм)	10	10	33	30	5000
ε_{bf} (Ф/М)	$7.1 \cdot 10^{-10}$	$2.5 \cdot 10^{-11}$	$2.5 \cdot 10^{-11}$	$7.84 \cdot 10^{-10}$	$9 \cdot 10^{-10}$
ξ_p (мВ)	25	25	35	40	15
μ_{bf} (Па·с)	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	10^{-3}	$1.5 \cdot 10^{-3}$
ρ_{bf} (кг/м ³)	1000	915	915	998	1050
ρ_p (кг/м ³)	1600	1600	6320	3880	1100
h_0 (нм)	15	15	15	10	50

концентрациях $C=5;10;15;20;30\%$, по 20 начальных случайных распределений для каждой концентрации. Результирующие кривые $N(t)$ обрабатывались статистически и представлены в виде $N(t) = \langle N(t) \rangle + \{N(t)\}$, где $\langle \cdot \rangle$ и $\{ \cdot \}$ соответствуют среднему значению и среднеквадратичному отклонению от среднего. Результаты расчетов с использованием теоретических и экспериментальных данных из [11,13,17-19] представлены на Рис.3.1-3.2.

Для случаев седиментации наночастиц Al₂O₃ в воде и CuO в масле расчеты с использованием условия проскальзывания (2.9) дают кривые $N(t)$, более близкие к данным экспериментов, чем расчеты по модели без учета проскальзывания ($C_1=0, C_2=0$) (Рис.3.1а). Для суспензий фуллеренов в воде и масле соответствие эксперименту в обоих случаях (с проскальзыванием и без) не такое хорошее. По-видимому, фуллерены как двумерные сферические нанообъекты характеризуются иными условиями обтекания на поверхности, представленной графеном. При оседании в наклонных трубках наблюдается более быстрое начальное оседание с последующим

замедлением (Рис.3.1б), которое связано, по-видимому, с накоплением осевших агрегатов на нижней поверхности трубки и их медленным соскальзыванием вдоль нее ко дну трубки в компактную зону III (Рис.2.1а). Во всех расчетах оседание быстрее при наличии проскальзывания на поверхностях частиц, что больше выражено в наклонных трубках. С увеличением угла наклона трубки скорость оседания растет при $\varphi < 45^\circ$, а при больших углах – уменьшается, причем сразу после начала оседания. Наибольшие значения H° при $t=2$ ч отмечаются при $\varphi = 32-38^\circ$, в зависимости от начальной концентрации и вида частиц и несущей жидкости. Таким образом, оценка степени старения наножидкости может быть ускорена при проведении теста в наклонной трубке. Поскольку важна оценка скорости агрегации наночастиц во взвешенном состоянии, то имеет смысл оценивать величину H° при $t=30-60$ мин в зависимости от значений C_0 . В случае наклонной трубки лучше привести наножидкость к начальной концентрации $C_0=0.1$, провести тест

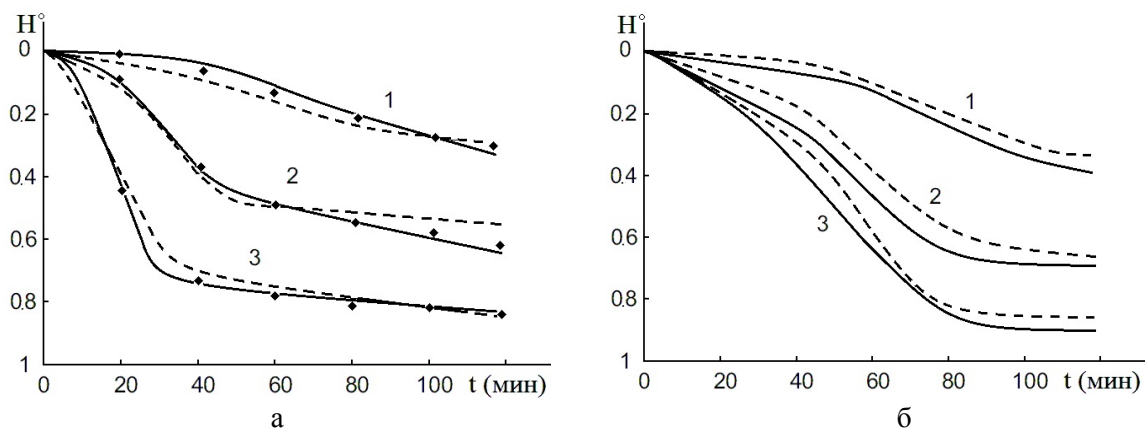


Рис.3.1. Седиментационные кривые для суспензии $Al_2O_3+H_2O$ в прямой (а) и наклонной $\varphi = 10^\circ$ (б) трубках с проскальзыванием (сплошные линии) и без проскальзывания (штриховые линии); кривые 1-3 соответствуют концентрациям $C_0=0.05; 0.15; 0.3$; точки обозначают экспериментальные значения; H° – безразмерная высота зоны I.

вплоть до $t=20$ мин при угле наклона $\varphi = 25-30^\circ$, что подтверждается расчетами для всех исследовавшихся жидкостей (Табл.1).

При проведении расчетов для 20 разных начальных случайных распределений частиц был обнаружен разброс кривых $H(t)$ (Рис.3.2а,б). Аналогичное явление было выявлено в экспериментах по оседанию суспензий клеток крови в микрокапиллярах [11,13], что объяснялось суспензионной нестабильностью крови [26]. Аналогичный разброс для случая наножидкостей тоже может объясняться различным поведением суспензии в случае случайного образования крупного агрегата в верхней части трубки, который за счет более высокой скорости оседания будет присоединять все большее части наночастиц. Кинетика такого процесса была детально рассмотрена в [15]. Кроме этого, о нестабильности седиментации говорят немонотонные кривые оседания [14-17]. Разброс выше при наличии проскальзывания и малых углах наклона, чем в прямой трубке. При больших углах наклона $\varphi > 45^\circ$ разброс меньше, чем в прямой трубке, поскольку оседающие частицы практически скользят ко дну вдоль налегающих слоев наночастиц и агрегатов из них.

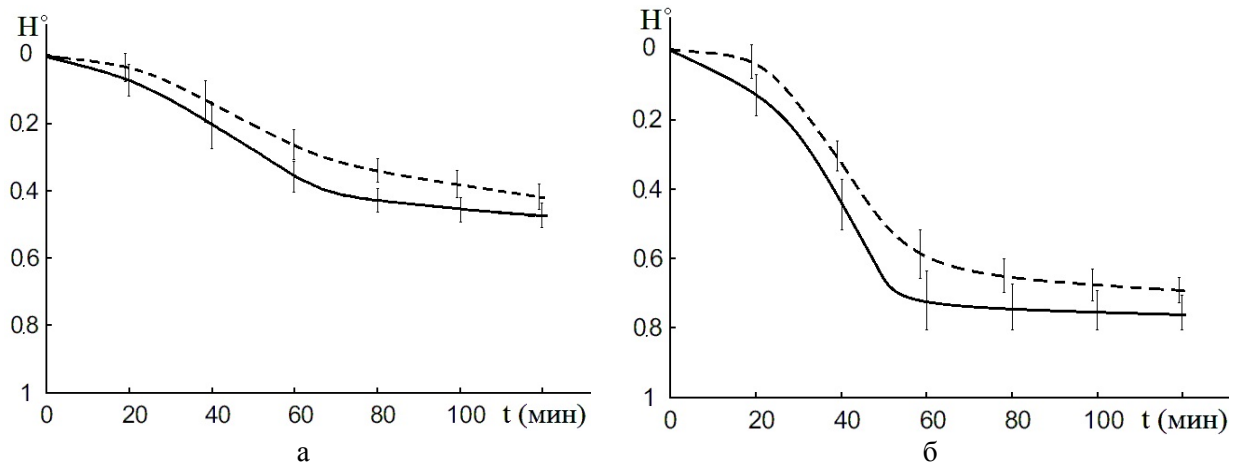


Рис.3.2. Седиментационные кривые для суспензии SiO_2 +масло в прямой (а) и наклонной (б) трубках с проскальзыванием (сплошные линии) и без проскальзывания (штриховые линии) для 20 разных начальных распределений частиц при $C_0=0.1$.

4. Выводы

В работе представлены краткий обзор экспериментальных данных, математических моделей и результатов численных расчетов по ним для понимания закономерностей агрегации и оседания микро- и наночастиц в технических суспензиях, которые широко используются в последнее десятилетие в различных микро/наножидкостных устройствах, а также являются жидкими биологическими тканями и их искусственными заменителями. Микрочастицы представляют собой агрегирующие клетки крови, микроорганизмы и другие клетки в микробиологических реакторах по производству фармацевтической и другой продукции. Суспензии наночастиц разной природы (оксиды металлов, фуллерены, нанотрубки и р.) на основе воды, масел, полиэтиленгликоля и др. эффективно используются в микрожидкостных устройствах. Например, за счет уникальных термомеханических свойств наночастиц, такие наножидкости существенно увеличивают перенос тепла и снижают температуру работающих микромоторов, топливные элементы и микроэлектромеханических систем.

Предложенные к настоящему времени математические модели наножидкостей не соответствуют результатам измерений кривых оседания агрегирующих суспензий наночастиц в вертикальных трубках. В работе предложена модификация модели PDM на случай условий проскальзывания второго порядка на границах раздела жидкость-твердое тело, которые свойственны частицам на наноуровне [3-7]. В случае учета этих условий, рассчитанные кривые седиментации $H(t)$ лучше соответствуют экспериментальным данным, полученным на различных наножидкостях и суспензии крови как микрожидкости. К сожалению, набор данных измерений статистически недостаточен и не позволяет выяснить природу и динамику старения конкретной технической наножидкости. Кроме того, данные измерений не укладываются на монотонную кривую оседания, что может быть вызвано известной для суспензий микрочастиц агрегационной неустойчивостью оседания суспензий технических частиц и биологических клеток [26]. Исследование суспензионной неустойчивости суспензий агрегирующих наночастиц составит предмет наших дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gad-el-Hak M. MEMS Introduction and fundamentals. The MEMS Handbook. N.-Y.: Taylor & Francis Group, 2006. 228 p.
2. MEMS Materials and Processes Handbook, Ghodssi R., and Lin P. (eds.). – N.-Y.: Springer, 2011. 321 p.
3. Liou W., Fang Y. Microfluid Mechanics: Principles and Modeling (Nanoscience and Technology). N.-Y.: McGraw-Hill Education Publ., 2005. 198 p.
4. Microfluidics and BioMEMS Applications, Tay F.E.H. (ed.). N.-Y.: Springer-Science, 2002. 217 p.
5. Karniadakis G.E., Beskok A., Aluru N. Microflows and nanoflows: Fundamentals and simulation. Interdisc. Appl. Math. Series, vol.29. N.-Y.: Springer-Science, 2005. 295 p.

6. Cherevko V., Kizilova N. Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions. *Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications, Springer Proceedings in Physics* O. Fesenko, L. Yatsenko (eds.). N.-Y.: Springer. 2017. vol. 183. P. 207–230.
7. Kleinstreuer C., Xu Z. Mathematical Modeling and Computer Simulations of Nanofluid Flow with Applications to Cooling and Lubrication. A review. *Fluids*. 2016. v.1. P.16-48.
8. Kanagala H. K. Modeling of Particle Agglomeration in Nanofluids: PhD Thesis / Lehigh University Press, 2013. 47 p.
9. Srivastava G. S. Effect of aggregation on thermal conductivity and viscosity of nanofluids. *Applied Nanosciences*. 2012. v. 2. P. 325–331.
10. Yu W., Xie H. A Review on Nanofluids: Preparation, Stability Mechanisms, and Applications. *Journal of Nanomaterials*. 2012. v. 2012. - 435873.
11. Кизилова Н.Н., Черевко В.А. Гравитационная седиментация эритроцитов: эксперименты и теоретическая модель. *Вестник ХНУ. Сер. "Математика, прикладная математика, механика"* – 2009. - №875. – С.80-94.
12. Баранец В.А., Кизилова Н.Н. Обзор дискретных моделей динамики наночастиц в суспензиях // Зб. праць XVIII Міжнародного симпозиуму «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2017). Харків. – 2017. – С. 39-42.
13. Kizilova N., Batiuk L., Cherevko V. Human red blood cell properties and sedimentation rate: a biomechanical study. *Biomechanics in Medicine and Biology*. K. Arkusz, R. Bedzinski, T. Klekiel, S. Piszczatowski, eds. *Springer Series "Advances in Intelligent Systems and Computing"* Vol.831, N.-Y.: Springer, 2019. P. 3-22.
14. Phenrat T., Saleh N., Sirk K., et al. Aggregation and sedimentation of aqueous nanoscale zerovalent iron dispersions // *Environ. Sci. Technol.* – 2007. – v. 41. – P. 284-290.
15. Lu J., Liu D., Yang X., et al. Sedimentation of TiO₂ nanoparticles in aqueous solutions: influence of pH, ionic strength, and adsorption of humic acid. *Desalinat. Water Treatment*. 2015. v.57, N40. P. 1-8.
16. Chung S.J., Leonard J.P., Nettleship I., et al. Characterization of ZnO nanoparticle suspension in water: Effectiveness of ultrasonic dispersion *Powder Technol.* – 2009. – v. 194. – P. 75–80.
17. Jiang W., Ding G., Peng H., Hua H. Modeling of nanoparticles' aggregation and sedimentation in nanofluid *Current Appl. Phys.* 2010. – v. 10. – P. 934–941.
18. Ganguly S., Chakraborty S. Sedimentation of nanoparticles in nanoscale colloidal suspensions. *Phys. Lett., Ser. A*. 2011. v. 375. P. 2394–2399.
19. Markus A. A., Parsons J. R., Roex E. W. M., et al. Modeling aggregation and sedimentation of nanoparticles in the aquatic environment. *Sci. Total Envir.* 2015. N 506–507. P. 323–329.
20. Alder B. J., Wainwright T. E. Phase transition for a hard sphere system. *J. Chem. Phys.* 1957. v. 27. P.1208-1209.
21. Moeendarbary E., Ng T.Y., Zangeneh M. Particle dynamics: introduction, methodology and complex fluid applications - a review. *Intern. J. Appl. Mech.* 2009. v.1, N4. P. 737–763.
22. Rifkin J. XMD - Molecular Dynamics Program. URL: <http://xmd.sourceforge.net/doc/manual/xmd.html> (дата обращения: 25.10.2018).
23. LAMMPS Molecular Dynamics Simulator URL: <https://lammmps.sandia.gov/> (дата обращения: 17.11.2018).
24. Espanol P. Dissipative Particle Dynamics // *Handbook of Materials Modeling*, Yip S. (ed.). – Dordrecht: Springer, 2005. – P. 2503-2569.
25. Ravi R., Guruprasad V. Lennard-Jones fluid and diffusivity: validity of the hard-sphere model for diffusion in simple fluids and application to CO₂ *Ind. Eng. Chem. Res.* 2008. v.47, N4. P. 1297–1303.
26. Kizilova N.N. Stability of erythrocyte sedimentation in a constant magnetic field. *Fluid Dynamics*. 1989. v.24, N6. P.878-881.

REFERENCES

1. M. Gad-el-Hak, "MEMS Introduction and fundamentals. The MEMS Handbook." N.-Y.: Taylor & Francis Group, 228 p., 2006.

2. R. Ghodssi, and P. Lin (eds.), “MEMS Materials and Processes Handbook.” N.-Y.: Springer, 321 p., 2011.
3. W. Liou, and Y. Fang, “Microfluid Mechanics: Principles and Modeling (Nanoscience and Technology).” N.-Y.: McGraw-Hill Education Publ., 198 p., 2005.
4. F.E.H. Tay (ed.), “Microfluidics and BioMEMS Applications.” N.-Y.: Springer-Science, 217 p., 2002.
5. G.E. Karniadakis, and A. Beskok, and N. Aluru, “Microflows and nanoflows: Fundamentals and simulation.” Interdisc. Appl. Math. Series, vol.29. N.-Y.: Springer-Science, 295 p., 2005.
6. V.Cherevko, and N. Kizilova, “Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions.” Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications, Springer Proceedings in Physics, vol. 183. O. Fesenko, L. Yatsenko (eds.). N.-Y.: Springer, pp. 207–230, 2017.
7. C. Kleinstreuer, and Z. Xu, “Mathematical Modeling and Computer Simulations of Nanofluid Flow with Applications to Cooling and Lubrication. A review.” Fluids, v.1, pp.16-48, 2016.
8. H. K. Kanagala, “Modeling of Particle Agglomeration in Nanofluids. PhD Thesis.” Lehigh University Press, 47p. 2013.
9. G. S. Srivastava, “Effect of aggregation on thermal conductivity and viscosity of nanofluids.” Applied Nanosciences, v. 2, pp. 325–331, 2012.
10. W.Yu, and H. Xie, “A Review on Nanofluids: Preparation, Stability Mechanisms, and Applications.” Journal of Nanomaterials, v. 2012. – 435873, 2012.
11. V.A. Cherevko, and N.N. Kizilova, “Gravitational sedimentation of erythrocytes: experiments and theoretical model.” *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, ser. “Mathematics, applied mathematics, mechanics”*, №875, pp.80-94, 2009. [in Russian]
12. V.A. Baranets, N.N. Kizilova, “Review of the discrete models of the nanoparticle dynamics in suspensions.” Collect. Papers of XVIII International Symposium *Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics Problems” (DSMMPH-2017)*, Kharkiv, pp. 39-42, 2017. [in Russian]
13. N. Kizilova, and L. Batyuk, and V. Cherevko, “Human red blood cell properties and sedimentation rate: a biomechanical study.” Biomechanics in Medicine and Biology. K. Arkusz, R. Bedzinski, T. Klekiel, S. Piszczatowski, eds. Springer Series *Advances in Intelligent Systems and Computing*, Vol.831, N.-Y.: Springer, pp. 3-22, 2019.
14. T. Phenrat, and N. Saleh, and K. Sirk, et al, “Aggregation and sedimentation of aqueous nanoscale zerovalent iron dispersions.” *Eenviron. Sci. Technol.*, v. 41, pp. 284-290, 2007.
15. J. Lu, and D. Liu, and X.Yang, et al, «Sedimentation of TiO₂ nanoparticles in aqueous solutions: influence of pH, ionic strength, and adsorption of humic acid.” *Desalinat. Water Treatment*, v.57, N40, pp. 1-8, 2015.
16. S.J. Chung, and J.P. Leonard, and I. Nettleship, et al, “Characterization of ZnO nanoparticle suspension in water: Effectiveness of ultrasonic dispersion.” *Powder Technol.*, v. 194, pp. 75–80, 2009.
17. W. Jiang, and G. Ding, and H. Peng, and H. Hua, “Modeling of nanoparticles’ aggregation and sedimentation in nanofluid.” *Current Appl. Phys.*, v. 10, pp. 934–941, 2010.
18. S. Ganguly, and S. Chakraborty, “Sedimentation of nanoparticles in nanoscale colloidal suspensions.” *Phys. Lett., Ser. A*, v. 375, pp. 2394–2399, 2011.
19. A. A. Markus, and J. R. Parsons, and E. W. M. Roex, et al, “Modeling aggregation and sedimentation of nanoparticles in the aquatic environment.” *Sci. Total Envir.*, N 506–507, pp. 323–329, 2015.
20. B. J. Alder, and T. E. Wainwright, “Phase transition for a hard sphere system.” *J. Chem. Phys.*, v. 27, pp.1208-1209, 1957.
21. E. Moeendarbary, and T.Y. Ng, and M. Zangeneh, “Particle dynamics: introduction, methodology and complex fluid applications - a review.” *Intern. J. Appl. Mech.*, v.1, N4, pp. 737–763, 2009.
22. J. Rifkin, “XMD - Molecular Dynamics Program.” URL: <http://xmd.sourceforge.net/doc/manual/xmd.html> (Last accessed: 25.10.2018).
23. “LAMMPS Molecular Dynamics Simulator.” URL: <https://lammps.sandia.gov/> (Last accessed: 17.11.2018).
24. P. Espanol, “Dissipative Particle Dynamics.” Handbook of Materials Modeling, Yip S. (ed.). Dordrecht: Springer, pp. 2503-2569, 2005.

25. R. Ravi, and V. Guruprasad, "Lennard-Jones fluid and diffusivity: validity of the hard-sphere model for diffusion in simple fluids and application to CO₂." *Ind. Eng. Chem. Res.*, v.47, N4, pp. 1297–1303, 2008.
26. N.N. Kizilova, "Stability of erythrocyte sedimentation in a constant magnetic field." *Fluid Dynamics*, v.24, N6, pp.878-881, 1989.

Баранець Віталія Олександрівна – молодший науковий співробітник; інженер кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: cherevko.vita@gmail.com; ORCID: [http:// 0000-0001-6386-3207](http://0000-0001-6386-3207).

Baranets Vitaliia O. – Junior Researcher; engineer of the Department of Applied Mathematics V. N. Karazin National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine; e-mail: cherevko.vita@gmail.com; ORCID: [http:// 0000-0001-6386-3207](http://0000-0001-6386-3207).

Баранець Віталія Александровна – младший научный сотрудник; инженер кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: cherevko.vita@gmail.com; ORCID: [http:// 0000-0001-6386-3207](http://0000-0001-6386-3207).

Кізілова Наталія Миколаївна – доктор фізико-математичних наук, професор; професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9981-7616>.

Kizilova Natalya M. - PhD, Doctor of Science, Professor; Professor of the Department of Applied Mathematics V. N. Karazin National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine; e-mail: n.kizilova@gmail.com ; ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9981-7616>.

Кизилова Наталья Николаевна – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: orcid.org/0000-0001-9981-7616.

УДК 004.053

An approach to assessment of dynamic software variability in mobile applications development

R.O. Gamzayev¹, E. Karaçuha², M.V. Tkachuk¹, O.Y. Tovstokorenko³¹V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Square 4, Kharkov, 61022, Ukraine²Istanbul Technical University, Maslak, 34467 Sarıyer/İstanbul, Turkey³National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kyrpychova str., 2, Kharkiv, 61002 Ukraine
e-mail: tka.mobile@gmail.com

The article describes the approach to the assessment of code reuse in Dynamic Product Line lines (DSPL). Some existing mechanisms to realize software variability in DSPL, such as machine learning, adaptive configurations based on Java programming tools which allow developing DSPL, especially in mobile applications domain, have been reviewed. During the development, some methods for the implementation of the variability specific to the selected programming language have been tested. For each of these mechanisms, such as Weighted Methods per Class, Response for a Class, Depth of Inheritance Tree, Coupling Between Objects, Number of Children, the code complexity metrics have been calculated. Based on these results the code reusability extent can be estimated for each of given variation mechanisms.

Keywords: *software product line, dynamic variability, complexity metrics, code reusability, mobile application.*

Для забезпечення ефективного проектування будь-якої складної розподіленої програмної системи необхідно забезпечити можливість повторного використання певних ресурсів проекту, особливо вихідних кодів і виконуваних компонентів програмного забезпечення. Це дозволяє скоротити час розробки та зберегти інші важливі проектні ресурси. У багатьох сучасних джерелах вивчаються питання, пов'язані зі здатністю оцінювати можливість повторного використання коду вже на етапі проектування програмного забезпечення. Стаття описує підхід до аналізу ступеня повторного використання коду у динамічних лінійках програмних продуктів (DSPL). Авторами зроблено стислий огляд існуючих підходів до побудови DSPL, зокрема, такі як машинне навчання та використання адаптивних конфігурацій. На основі цього була розроблена доменна модель для аналізу альтернативних механізмів варіабельності у DSPL для мобільних застосунків із використання мови програмування Java. Під час розробки були використані деякі методи імплементації варіабельності специфічні для обраної мови. Перший механізм варіації виконання визначає список серверів, що відповідають за конфігурації збирання: debug або release. Другий визначає, чи має працювати ручне визначення сервера (коли вибирається тестовий сервер) або використовується попередньо визначений сервер. Третій механізм визначає сервер за умовчанням, який буде використовуватися, якщо нічого не вибрано. Для кожного з цих підходів були розраховані такі метрики якості як "Дерево глибини успадкування", "Зв'язок між об'єктами", "Кількість дочірніх класів", а також була оцінена ступінь повторного використання коду кожним з цих методів.

Ключові слова: *лінійка програмних продуктів, варіабельність, метрики якості, повторне використання коду, мобільна розробка.*

Для обеспечения эффективного проектирования любой сложной распределенной программной системы необходимо обеспечить возможность повторного использования определенных ресурсов проекта, особенно исходных кодов и выполняемых компонентов программного обеспечения. Это позволяет сократить время разработки и сохранить другие важные проектные ресурсы. Во многих современных источниках изучаются вопросы, связанные со способностью оценивать возможность повторного использования кода уже на этапе проектирования программного обеспечения. Статья описывает подход к анализу степени повторного использования кода в динамических линейках программных продуктов (DSPL). Авторами сделан краткий обзор существующих подходов к построению DSPL, в частности, такие как машинное обучение и использование адаптивных изменений. На основе этого была разработана доменная модель для анализа альтернативных механизмов вариабельности в DSPL для мобильных приложений с использованием языка программирования Java. При разработке были использованы некоторые методы имплементации вариабельности специфические для выбранного языка. Первый механизм вариации выполнения определяет список серверов, отвечающих за конфигурации сборки: debug или release. Второй определяет, имеет ли работать ручное определение сервера (когда выбирается тестовый сервер) или используется предварительно определенный сервер. Третий механизм определяет сервер по умолчанию, который будет использоваться, если ничего не выбрано. Для каждого из этих подходов были рассчитаны такие метрики качества как "Дерево глубины наследования", "Связь между объектами", "Количество дочерних классов", а также была оценена степень повторного использования кода каждым из этих методов.

Ключевые слова: *линейка программных продуктов, вариабельность, метрики качества, повторное использование кода, мобильная разработка.*

1 Introduction

Nowadays with the growth of businesses and expansion of markets, it is necessary to produce software products at a lower cost, in shorter time, but provide higher quality at the same time. Also, the practice of using the so-called production line takes over the old-fashioned individual product creation. The main disadvantage of the traditional production line approach is lack of diversification. This is where the software product lines come into play. They enable developers to create families of systems

faster and cheaper as in the production line approach, but at the same time give an opportunity to customization. The motivations for product line engineering include reduction of a development cost, an improvement of the quality and a reduction of product delivering time. It also allows for coping with evolution and complexity.

One of the most important activities in the early stages of software product line development process is the definition of commonality and variability of the product line. While the commonality simply describes the reusable assets that systems have in common, what we like to investigate is the variability, i.e. the features that are unique for each system belonging to the family. It is worth mentioning that research on handling the variability at runtime has led to the creation of dynamic software product line engineering, which is the modern approach to developing software product lines.

A lot of researches in software product line engineering area are concerned with the variability management. The following main questions have been recently considered:

- which software components can be varied;
- how to handle variability on different levels efficiently;
- how variability can be achieved.

Considering the speed of development and growing complexity of mobile application market [1], the DSPL can be introduced on it as well. Taking this into account, the questions concerning a common set of software requirements, development approaches and technological complexity are still open. So the goal of current research is to analyze the reusability evaluation tasks during the DSPL development and developing the approach to its management.

This paper is structured in the following way: in the first section, some technological approaches to design variable software are presented; in the second section Dynamic Software Product Lines (DSPL) is overviewed, in the third section, the usage of some Android-related technologies for variability management is discussed. Then our case study is presented and in the conclusion our future work is discussed.

2 Related work

The problem of the system adaptation in response to context changes is covered in [2]. This is why traditional feature models that describe DSPL are augmented with a set of rules that explicitly determine under which condition a reconfiguration should occur. Developing an effective set of adaptation policies is a challenge for developers due to the complexity of the context and its dynamic nature. While usually in DSPL context changes can be anticipated at design time, in some systems it is not possible due to the uncertainty of runtime context changes.

There are several approaches that may help with this kind of uncertainty [2]. The first one, machine learning, aims at learning unanticipated context changes and creating new adaptation rules dynamically. The second approach, evolution, focuses on changing variability of the DSPL, while derived configurations are running. Both learning and evolution address specific problems of uncertainty, which is why they are not used in isolation [3].

The overall adaptive system model to compare with [3] is shown in Fig. 1. Learning and evolution both are the parts of the process.

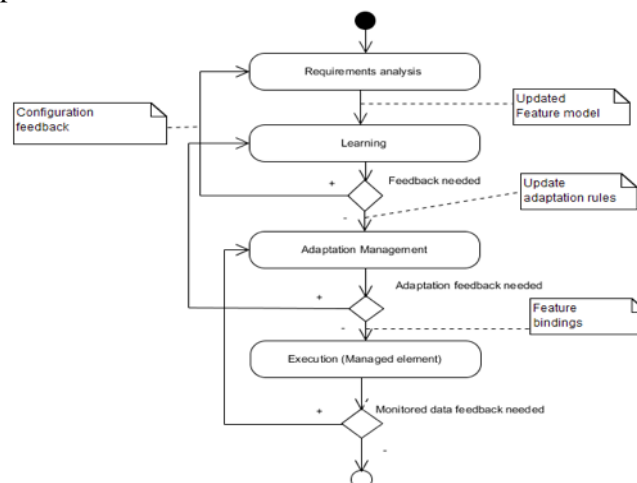


Fig. 1 Workflow Learning and Evolution in DSPLs (to compare with [3])

In the mobile development, this topic can be presented by a number of tasks that could be solved using variability mechanisms, such as multilingual support, the presence of several feature sets for different types of users, as well as the access levels of these users (paid / free accounts). Moreover, taking into account the growing popularity of cross-platform languages for mobile development, it is necessary to pay attention to the specifics of adaptation possibilities for each of the platforms and, in accordance with their requirements, to limit some functionality on one or another end platform.

3 The problem statement: Assessment of code reusability extent in DSPL development

To ensure an efficient design of any complex distributed software system it is necessary to ensure the possibility of reuse of certain project assets, especially a source code and executable software components. This can help to reduce the development time and save other equally important resources.

In many modern sources, issues related to the ability to assess the code reusability already at the design stage of the software development are studied. In particular, the relationship between the complexity of the code and the reusability is indicated in [5].

The complexity of the software code is determined on the basis of the values of the following structural complexity metrics [6]:

- Depth of Inheritance Tree (DIT);
- Response for a Class (RFC);
- Number of Children (NOC);
- Coupling Between Objects (CBO);
- Weighted Methods per Class (WMC).

Also, the correlation between the values of the above metrics and the level of code reusability using the following analytic expression is determined in [6]:

$$C_r = \frac{\beta \times 100}{\alpha}, \quad (1)$$

where α is the total number of classes available for each of the aforementioned metrics; β is the number of newly redesigned classes with the help of reuse.

According to the stated assertion about the correlation between the code reusability level and the values of code structural complexity metrics, an approach to assess the reusability level based on the metrics of the structural complexity of the code is proposed in [7,11]. The evaluation process is shown in Fig. 2.

The input will be the target domain in the form of user stories. Next, based on the requirements, a domain model is constructed using each of the chosen domain-driven design methods and source code is then generated. Then the resulting code complexity is analyzed using structural complexity metrics.

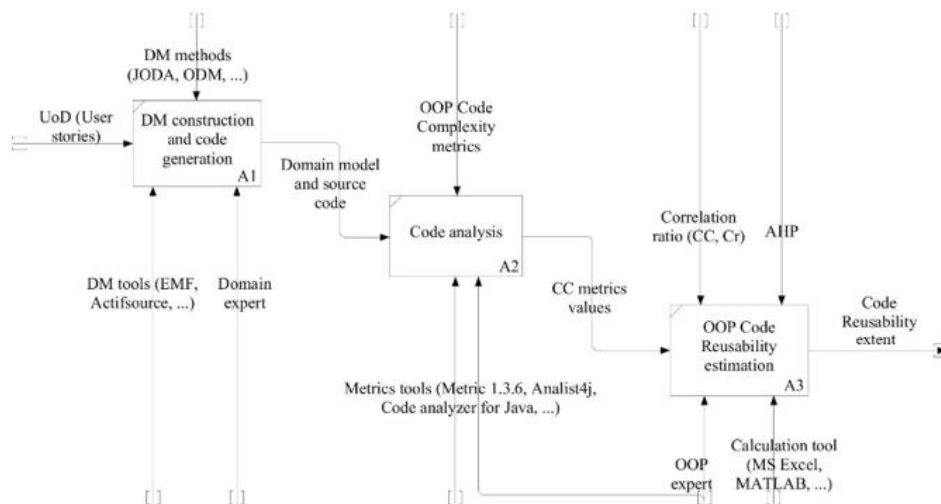


Fig. 2 The information technology to provide a code reuse assessment

In order to obtain the reusability extent, the analytical hierarchy process (AHP) is used [8], which supposes that a synthesis of priorities is to be calculated on the basis of subjective expert assessments. [5] presents statistical data on the values of structural complexity metrics and the reusability level. Applying the weight coefficients the following formula for estimating the integrated value of the reusability level can be used:

$$CR_{extent} = 0,1198WMC + 0,0398RFC + 0,2801DIT + 0,3603NOC + 0,2CBO \quad (2)$$

The approach presented in the formula (2) allows computing the numerical results of assessing the complexity at different variation points. Therefore, it is possible to provide the appropriate data for a further decision on the particular option usage in any module of DSPL to be developed.

4 The proposed approach to assessment of code reusability in DSPL development

Software, specifically in mobile DSPL, supposes to provide the appropriate options in different variability points, so that the complexity of managing the amount of variability becomes a main problem in their development. In [9] it is recognized that a unified approach to variability management still has to be defined.

There are four characteristics that are essential to this approach and therefore have to be defined: consistency, scalability, traceability and means for visualization.

Software engineering for single systems has thus far been done in two dimensions. One dimension represents the phases of software lifecycle and the other, levels of abstraction. All development artifacts can be placed somewhere in these dimensions. With the addition of variability in software product line engineering, the third dimension is added that explicitly captures variability information between members of the product line.

One of the most effective ways to resolve this problem is reusing different project solutions (assets): domain knowledge, requirements specifications, software architectures, design patterns, and finally source (program) code.

The conceptual variability model that addresses traceability of variations at different levels of abstraction and across various generic development artifacts will be presented later. In this model different software development stages will be shown with the respect to variability modeling space and level of abstraction.

The information technology to support the approach to evaluation of code complexity based on (1) can be modified for the purposes of DSPL. It should also be noted that for the final conclusion on the effectiveness of using one or another variability method in order to increase the level of reuse CR_{extent} , it is also necessary to estimate the costs associated with the construction of the appropriate domain models in the process of developing SPL[10].

In order to do so it is necessary to introduce the concept of variation mechanism. These mechanisms are applied at the source code level so it will be done just after the code generation. Let us decompose the activity A1 in order to show where the variation mechanisms will appear (Fig. 3).

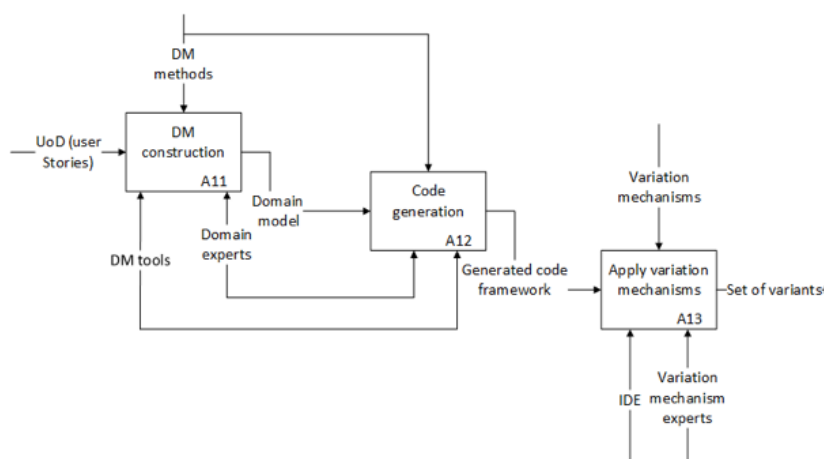


Fig. 3 Introducing variation mechanisms

So after “Code generation” stage, the variability is introduced to the generated code framework. To apply variation mechanisms they are the first to be selected. To select appropriate mechanisms variation mechanism experts are to be consulted with. As a result the approach analyzes not just the generated code framework, but variants obtained after application of some variation mechanisms.

In the next chapter variation mechanism and dynamic adaptation techniques will be analyzed in the context of DSPL implementation on the Android (Java platform) with respect to the code reusability.

5 Case study: dynamic variability used to implement the prototype

As mentioned in the previous chapter, the experiment to support the proposed approach to the assessment of reusability extent has been carried out. For this purpose the sophisticated class has been selected from the developed DSPL, where the variation mechanisms are applied at runtime, namely `ServerSelectionActivity`. The purpose of this class is to let a user choose the server endpoint or manually define it, which can lead to different system behavior depending on the selected server.

As already mentioned, we have decided to choose 2 variation mechanism types for the experiment: runtime conditional (implemented in Java through “if” statement) and inheritance. These mechanisms have been chosen because of relative simplicity of the implementation and also they affect the value of metrics that are used to calculate the reusability extent with the help of the proposed approach. Runtime conditionals affect WMC and inheritance affects DIT.

Also we have decided to choose one more variation mechanism, namely the configurator, and show how little it affects the code reusability. In this case the configurator has been implemented in the form of a property file.

The visual representation of the possible variants after application of these variation mechanisms is given in Fig. 4 in the form of a feature model.

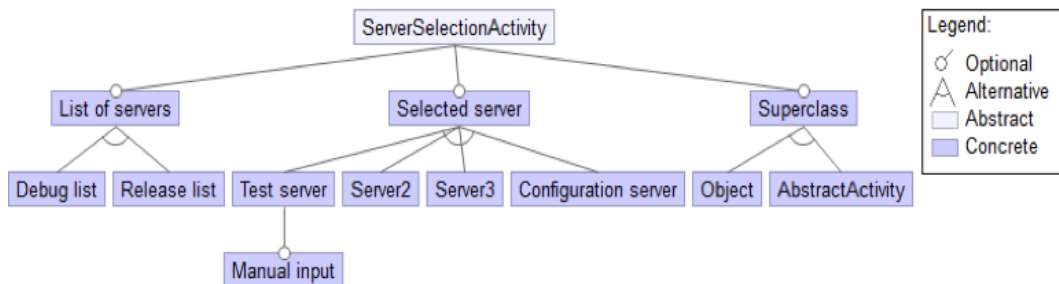


Fig. 4 Feature model for `ServerSelectionActivity`

The first runtime conditional determines the list of servers to be shown with respect to a build configuration: debug or release (Fig. 5). The second one determines whether the manual server definition should work (when test server is selected) or the predefined server should be used.

The third variation mechanism determines whether `ServerSelectionActivity` extends `java.lang.Object` or has an intermediate superclass `AbstractActivity`.

```
// we use different list of servers for debug and release v
if (BuildConfig.DEBUG) {
    serversArrayId = R.array.servers_array_debug;
    serverNamesArrayId = R.array.servers_names_array_debug;
} else {
    serversArrayId = R.array.servers_array;
    serverNamesArrayId = R.array.servers_names_array;
}
```

Fig. 5 Assigning different server list based on version type

The fourth variation mechanism determines the default server to be used if nothing is selected. Two ways of implementing this mechanism can be observed: property file (Fig. 6) and configuration class (Fig. 7). It is worth mentioning that the second approach cannot be considered as a runtime adaptation technique, because it is a compile-time case. The absence of this property file means that these properties are configured in fields. Using the configuration class only moves these fields out of this class to the other class. In this case one more dependency appears and the CBO value changes.

```
#Configuration file
protocol = http
ip_port = 192.168.0.100:8080
folder = test
```

Fig. 6 Configurator based on property file

```
public class Configurator {

    public static final String protocol = "http";
    public static final String ipPort = "192.168.0.100:8080";
    public static final String folder = "test";

}
```

Fig. 7 Configurator based on configuration class

The experiment has been conducted in the following way. First, all the variation mechanisms have been removed and the code reusability extend (CRE) has been calculated for this situation. Then the CRE have been determined for each variation mechanism separately and finally they have been applied simultaneously. To calculate the appropriate values of CRE the software tool presented in the previous section have been used.

The results of the experiments are shown in Table 1.

Table 1 – Results of the experiments

Variation mechanisms / Complexity metrics	WMC	RFC	DIT	CBO	NOC	CRE
Without variability mechanisms	2	1	1	3	0	1.159
With runtime conditionals	5	1	1	3	0	1.518
With inheritance	2	1	2	3	0	1.439
With configurator (property file)	2	1	1	3	0	1.159
With configurator (configuration class)	2	1	1	4	0	1.359
Together (with property file)	5	1	2	3	0	1.79
Together (with configuration class)	5	1	2	4	0	1.999

To sum it up, applying variation mechanisms increases the CRE. Moreover if applied simultaneously they provide for higher CRE than when applied separately. Applying runtime conditionals and inheritance separately in the case of this class shows similar results. Applying the configurator implemented as a configuration class gives a higher CRE than the one implemented as a property file. It results from the fact that obtained results don't take the property file into account, as it

is not a part of the code. The results of the experiment may help developers to solve the problem of variation mechanism selection.

6 Results and future work

With respect to external validity, the main issue is that the experiment has been conducted in context of Android Java platform. There is the possibility that implementing different variation mechanisms in other platforms, such as .NET, PHP, will result in different CRE values. So, this work does not answer the question whether the same results can be applied to other platforms and programming languages.

The second issue in the category of external validity is the CRE formula introduced in the paper. Since it takes into account only code complexity metrics on class or package level, it cannot be applied to some variation mechanisms like aspects or plugins.

Internal validity focuses on how sure a researcher can be that the results of the experiment unambiguously determine which variation mechanisms should be selected. Code reusability is not the only criteria according to which the given mechanism should be chosen. The selection of an appropriate variation mechanism also depends on the application domain where DSPL has to be designed, on specific user' requirements, etc. and these issues can be the focus of our future work.

Acknowledgments

We would like to thank student of NTU "Kharkiv Polytechnic Institute" Andrii Tkachuk for his support in our research activities, and for the software implementation for the testing of our approach.

REFERENCES

1. Sharma Y., "Emerging trends in mobile apps market and their potential impact on mobile users engagement in the global economy", Sharma Y., Kumar B., Nivadit A. *Annual Research Journal of SCMS*, Vol. 5, March 2017.
2. Eleutério J., "A Comparative Study of Dynamic Software Product Line Solutions for Building Self-Adaptive Systems", *Technical Report in Universidade estadual de Campinas*, 30 p. 2017.
3. A. M. Sharifloo, A. Metzger, C. Quinton, L. Baresi and K. Pohl, "Learning and Evolution in Dynamic Software Product Lines," *2016 IEEE/ACM 11th International Symposium on Software Engineering for Adaptive and Self-Managing Systems (SEAMS)*, Austin, TX, pp. 158-164, 2016.
4. Wenhao W. Master thesis: "React Native vs Flutter, cross-platform mobile application frameworks", *Metropolia University of Applied Sciences*. / 01 March 2018.
5. Nandakumar A.N., "Constructing Relationship between Software Metrics and Code Reusability in Object Oriented Design", *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, Vol. 7, No. 2, 2016.
6. Fangjun Wu, Tong Yi, "A Structural Complexity Metric for Software Components", *First International Symposium on Data Privacy and e-Commerce*, pp. 161-163, 2007.
7. Tkachuk M., "An Integrated Approach to Evaluation of Domain Modeling Methods and Tools for Improvement of Code Reusability in Software Development", Tkachuk M., Martinkus I., Gamzayev R., Tkachuk A. // Heinrich C. Mayr, Martin Pinzger (Eds.): *INFORMATIK 2016, Lecture Notes in Informatics*, Vol. P-259: Kollen Druck+Verlag GmbH, Bonn, pp. 143-156, 2016.
8. Saaty T. L., "Relative Measurement and its Generalization in Decision Making: Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors - The Analytic Hierarchy/Network Process", *RACSAM (Review of the Royal Spanish Academy of Sciences, Series A, Mathematics)*, 2008.
9. Berg K., "A Critical Analysis of Using Feature Models for Variability Management", Berg K., Muthig D., *Submitted to SPLC-Europe*, 2005.
10. Martinkus I., "Designing software product lines using domain modeling and code reuse metrics", Iryna Martinkus, Mykola Tkachuk, Rustam Gamzaev, *Systems of control, navigation and communication*, Vol. 3(43), pp. 93-97, 2017.
11. Mykola Tkachuk, Rustam Gamzaev, Iryna Martinkus et al., "Towards Effectiveness Assessment of Domain Modelling Methods and Tools in Software Product Lines Development", *Enterprise Modelling and Information Systems Architectures. International Journal of Conceptual Modeling*, Vol. 13 (2018), Germany. pp. 190-206, 2018.

ЛІТЕРАТУРА

1. Sharma Y., Kumar B., Nivadit A. Emerging trends in mobile apps market and their potential impact on mobile users engagement in the global economy. *Annual Research Journal of SCMS* . Vol. 5. March 2017.
2. Eleutério J., A Comparative Study of Dynamic Software Product Line Solutions for Building Self-Adaptive Systems, *Technical Report in Eniversidade estadual de Campinas*, 2017. 30 p.
3. A. M. Sharifloo, A. Metzger, C. Quinton, L. Baresi and K. Pohl, Learning and Evolution in Dynamic Software Product Lines, *2016 IEEE/ACM 11th International Symposium on Software Engineering for Adaptive and Self-Managing Systems (SEAMS)*, Austin, TX, 2016. pp. 158-164.
4. Wenhao W. Master thesis: “React Native vs Flutter, cross-platform mobile application frameworks”, *Metropolia University of Applied Sciences*. 01 March 2018.
5. Nandakumar A.N., “Constructing Relationship between Software Metrics and Code Reusability in Object Oriented Design”, *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2016. Vol. 7, No. 2.
6. Fangjun Wu, Tong Yi, A Structural Complexity Metric for Software Components. *First International Symposium on Data Privacy and e-Commerce*. 2007. pp. 161-163.
7. Tkachuk M., “An Integrated Approach to Evaluation of Domain Modeling Methods and Tools for Improvement of Code Reusability in Software Development”, Tkachuk M., Martinkus I., Gamzayev R., Tkachuk A. Heinrich C. Mayr, Martin Pinzger (Eds.): *INFORMATIK 2016, Lecture Notes in Informatics*, Vol. P-259: Kollen Druck+Verlag GmbH, Bonn. 2016 pp. 143-156.
8. Saaty T. L., Relative Measurement and its Generalization in Decision Making: Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors - The Analytic Hierarchy/Network Process”, *RACSAM (Review of the Royal Spanish Academy of Sciences, Series A, Mathematics)*, 2008.
9. Berg K., A Critical Analysis of Using Feature Models for Variability Management, Berg K., Muthig D., *Submitted to SPLC-Europe 2005*.
10. Martinkus I., Designing software product lines using domain modeling and code reuse metrics. Iryna Martinkus, Mykola Tkachuk, Rustam Gamzaev, *Systems of control, navigation and communication*. 2017. Vol. 3(43). pp. 93-97.
11. Mykola Tkachuk, Rustam Gamzaev, Iryna Martinkus et al., Towards Effectiveness Assessment of Domain Modelling Methods and Tools in Software Product Lines Development. *Enterprise Modelling and Information Systems Architectures – International Journal of Conceptual Modeling*. Germany, 2018. Vol. 13 (2018). pp. 190-206.

Гамзаєв Рустам Олександрович - кандидат технічних наук, доцент; доцент кафедри моделювання систем і технологій, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: rustam.gamzayev@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2713-5664>

Gamzayev Rustam O. – PhD, Asc. Prof.; Asc. Professor of Department of System and Technologies Modeling, V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, Kharkiv - 22, Ukraine, 61022; e-mail: rustam.gamzayev@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2713-5664>

Гамзаєв Рустам Олександрович - кандидат технічних наук, доцент; доцент кафедри моделювання систем і технологій, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, площа Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: rustam.gamzayev@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2713-5664>

Ертугрул Каракуха – доктор наук, професор; декан факультету природничих та прикладних наук, Стамбульський технічний університет, Маслак-34469, Стамбул, Турція, 34469; e-mail: ertugrulkaracuha@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7555-8952>

Ertuğrul Karacıha – PhD, Doctor of Science, Professor; Head of School of natural and applied sciences, Istanbul Technical University, Maslak-34469, İstanbul, Turkey, 34469; e-mail: ertugrulkaracuha@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7555-8952>

Ертугрул Каракуха – доктор наук, професор; декан факультета естественных и прикладных наук, Стамбульский технический университет, Маслак-34469, Стамбул, Турция, 34469; e-mail: ertugrulkaracuha@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7555-8952>

Ткачук Микола Вячеславович – доктор технічних наук, професор; завідувач кафедри моделювання систем і технологій, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: tka.mobile@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0852-1081>

Tkachuk Mykola V. – PhD, Doctor of Science, Professor; Head of Department of System and Technologies Modeling, V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, Kharkiv - 22, Ukraine, 61022; e-mail: tka.mobile@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0852-1081>

Ткачук Николай Вячеславович – доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой моделирования систем и технологий, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина. 61022; e-mail: tka.mobile@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0852-1081>

Товстокоренко Олег Юрійович – аспірант кафедри програмної інженерії та інформаційних технологій управління, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», вул. Кирпичова, 2, Харків - 2, Україна, 61022; e-mail: tovstokorenko@gmail.com ; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2664-1650>.

Tovstokorenko Oleh Y. - postgraduate student at the Department of Software Engineering and Information Management Technologies, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kirpicheva str., 2, Kharkiv - 22, Ukraine, 61002; e-mail: tovstokorenko@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2664-1650>.

Товстокоренко Олег Юрьевич – аспирант кафедры программной инженерии и информационных технологий управления, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, Харьков-22, Украина, 61002; e-mail: tovstokorenko@gmail.com ; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2664-1650>.

УДК 519.6

Вимушені коливання рідини в циліндричних резервуарах під дією вертикального збудження

Д.В. Крютченко

*Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ,
вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046, Україна
e-mail: wollydenis@gmail.com*

Під час експлуатації оболонки та оболонкові конструкції, що містять різного роду рідкі заповнювачі, можуть піддаватися дії інтенсивних динамічних впливів. Для аналізу міцності конструкцій в цих умовах необхідно враховувати нелінійні явища при русі рідини, оскільки застосування лінійних рівнянь не дає адекватної оцінки для визначення тиску та амплітуди плескань. В даній роботі проведено дослідження коливань рідини в жорсткому циліндричному резервуарі при частковому заповненні рідиною за умови вертикального збудження. Наведені системи диференціальних рівнянь, які відповідають лінійному та нелінійному формулюванню задачі. Вважається, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух, індукований зовнішніми впливами, є безвихровим. В цих умовах існує потенціал швидкостей, що задовольняє рівнянню Лапласа. Як граничні умови для розв'язання крайової задачі обираються умови не протікання на змочених поверхнях оболонки. На вільній поверхні задаються кінематична та статична умови. Статична умова полягає в рівності тиску на поверхні рідини атмосферному тиску. Тис визначається з інтегралу Коші-Лагранжа. При цьому лінеаризація інтегралу Коші - Лагранжа веде до лінійного формулювання задачі. В нелінійному формулюванні враховуються квадратичні доданки. Для формулювання кінематичної умови вводиться додаткова невідома функція, яка описує саме рух вільної поверхні. Кінематична умова полягає в рівності швидкості рідини, яка описується потенціалом швидкостей, та швидкості самої вільної поверхні. Якщо задається вертикальне збудження, то це веде до появи додаткового прискорення. При цьому в лінійному формулюванні отримуємо систему нез'язаних диференціальних рівнянь, кожне з яких є рівнянням Матьє. Це дозволяє дослідити явища параметричного резонансу. При аналізі диференціальних рівнянь, що виникають в нелінійній задачі, виявилось, що розв'язки таких рівнянь суттєво залежать від початкових умов. Наведені фазові портрети динамічної системи зі зазначенням резонансів. Проведено числовий аналіз диференціального рівняння, що відповідає нелінійному формулюванню.

Ключові слова: оболонки обертання, коливання рідини, циліндричний резервуар.

The shell and shell structures containing various types of liquid fillers can be exposed to intense dynamic effects during the exploitation. In order to analyze the strength of structures in these conditions, it is necessary to take into account nonlinear phenomena in fluid motion, since the application of linear equations does not provide an adequate assessment for the determination of the pressure and amplitude of the splashing. In this paper, a study of fluid fluctuations in a rigid cylindrical reservoir partially filled with the liquid under condition of vertical agitation has been carried out. The systems of differential equations that correspond to the linear and nonlinear formulation of the problem are presented. The fluid is believed to be perfect and incompressible, and its movement induced by external influences is non-vortex. Under these conditions there is a velocity potential that satisfies the Laplace equation. The conditions of non-leakage on the wetted surfaces of the shell are chosen as the boundary conditions for solving the boundary value problem. The kinematic and static conditions are specified on a free surface. The static condition consists in the equality of pressure on the liquid surface with atmospheric pressure. The pressure is determined from the Cauchy-Lagrange integral. In this case the linearization of the Cauchy-Lagrange integral leads to the linear formulation of the problem. Quadratic components are taken into account for the nonlinear formulation. To formulate the kinematic condition an additional unknown function describing the motion of the free surface is introduced. The kinematic condition is the equality of the liquid velocity described by the velocity potential and the velocity of the free surface itself. If there is a vertical agitation, an additional acceleration will be present. Therefore for the linear formulation we obtain a system of unbounded differential equations, each of which is the equation of Mathieu. This allows us to investigate the phenomena of parametric resonance. When analyzing differential equations which occur in case of a nonlinear problem, it has been found that the solutions of such equations depend essentially on the initial conditions. The phase portraits of a dynamic system with indication of resonances are presented. A numerical analysis of the differential equation corresponding to nonlinear formulation has been carried out.

Key words: rotation shells, fluid fluctuations, cylindrical reservoir.

Во время эксплуатации оболочки и оболочечных конструкций, которые содержат разного рода жидкие заполнители, оболочки могут подвергаться воздействию интенсивных динамических воздействий. Для анализа прочности конструкций в этих условиях необходимо учитывать нелинейные явления при движении жидкости, поскольку применение линейных уравнений не дает адекватной оценки для определения давления и амплитуды плесканий. В данной работе проведено исследование колебаний жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре при частичном заполнении жидкостью при вертикальном возбуждении. Приведены системы дифференциальных уравнений, соответствующие линейным и нелинейным формулировкам задач. Считается, что жидкость является идеальной и несжимаемой, а ее движение, индуцированное внешними воздействиями, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей, который удовлетворяет уравнению Лапласа. Как граничные условия для решения краевой задачи избираются условия непротекания на смоченных поверхностях оболочки. На свободной поверхности задаются кинематическое и статическое условия. Статическое условие состоит в равенстве давления на поверхности жидкости и атмосферном давлении. Давление определяется из интеграла Коши-Лагранжа. При этом линейаризация

інтеграла Коши - Лагранжа веде до лінійної формулювання задачі. В нелінійній формулюванні враховуються квадратичні слагаємі. Для формулювання кінематичного умови вводиться додаткова невідома функція, яка описує рух вільної поверхні. Кінематичне умовою є рівність швидкості рідини, яка описується потенціалом швидкостей, і швидкості самої вільної поверхні. Якщо задано вертикальне збудження, то це веде до появи додаткового прискорення. При цьому в лінійній формулюванні отримуємо систему незалежних диференціальних рівнянь, кожне з яких є рівнянням Мат'є. Це дозволяє дослідити явища параметричного резонансу. При аналізі диференціальних рівнянь, які виникають в нелінійній задачі, виявилось, що рішення таких рівнянь суттєво залежить від початкових умов. Приведені фазові портрети динамічної системи з урахуванням резонансів. Проведено чисельний аналіз диференціального рівняння, який відповідає нелінійній формулюванні.

Ключові слова: оболонки обертання, коливання рідини, циліндричний резервуар, вертикальне збудження.

1. Актуальність роботи

Оболонки та оболонкові конструкції з відсіками, які частково заповнені рідиною, знаходять широке застосування в різних галузях сучасної промисловості. Під час експлуатації такі конструкції можуть піддаватися дії інтенсивних динамічних впливів, наприклад, при землетрусах, русі танкерів з нафтою в умовах шторму, та ін. Для аналізу міцності конструкцій в цих умовах необхідно враховувати нелінійні явища при русі рідини, оскільки застосування лінійних рівнянь не дає адекватної оцінки для визначення тиску та амплітуди плескань [1]. Існують методи з вивчення нелінійних рівнянь, які засновані на використанні гіпотез потенційної течії, при цьому розглядаються гармонічні навантаження на оболонкову конструкцію. Форма вільної поверхні та тиск рідини у таких випадках зображуються у вигляді рядів за базисними функціями. У [2] доведено, що у якості базисних функцій можуть бути обрані форми власних коливань рідини в припущеннях лінійної теорії. В роботі [3] проведено експериментальне та чисельне дослідження резервуара, на який діє сейсмічне або імпульсне навантаження у лінійному та нелінійному формулюваннях. В статті [4] досліджено вплив вертикальних перегородок на частоти коливань рідини у плоскому прямокутному резервуарі. При розв'язанні задачі з урахуванням нелінійних явищ виникає необхідність розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь та їх систем. Задачі плескань рідини в нелінійному формулюванні досліджено в роботі [5]. Для розв'язання нелінійних рівнянь використовується метод гармонічного балансу. При цьому застосовують гармонічну лінеаризацію нелінійного динамічного об'єкта, тобто використовують заміну вхідної задачі лінійною моделлю, яка описує першу гармонічну складову відклику об'єкта на вхідний синусоїдальний вплив.

Доведено [5], що нелінійні системи при збудженні гармонічним імпульсом дають відгук з нескінченною кількістю гармонік.

Метод гармонічного балансу застосовують для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, які містять поліноміальну нелінійність невідомих функцій [6]. У [7] розглянуто метод нелінійних нормальних форм. Зауважимо, що аналізу саме диференціальних нелінійних рівнянь приділено недостатньо уваги. Також незаняту увагу приділено дослідженням вимушених коливань резервуарів з рідиною за дії вертикального навантаження, як в лінійному, так і в нелінійному формулюванні.

2. Формулювання задачі та основні співвідношення

Дослідимо коливання рідини в жорсткій циліндричній оболонці внаслідок дії вертикального гармонічного збудження, рис. 1. Тут S_0 - вільна поверхня рідини, S_1 - змочена поверхня оболонки, h - рівень заповнення оболонки рідиною.

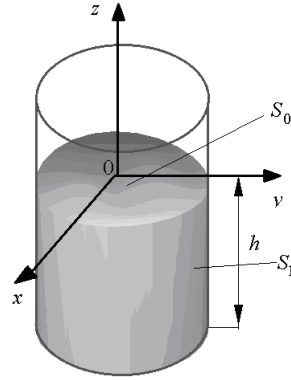


Рис. 1 Циліндрична оболонка, частково заповнена рідиною

Припустимо, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух, індукований вібраціями оболонки, є потенційним. Тоді існує потенціал швидкостей $\Phi(x,y,z,t)$, такий, що

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Цей потенціал за вказаних умов задовольняє рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Нехай функція $\zeta = \zeta(t, x, y)$ описує локацію і рух вільної поверхні. В стані спокою, до початку дії сили збудження маємо

$$\zeta(0, x, y) = 0, \quad \dot{\zeta}(0, x, y) = 0. \quad (1)$$

Розглянемо задачу в аксіально-симетричному формулюванні. Крайова задача в слабкому нелінійному формулюванні для знаходження потенціалу Φ та функції ζ в циліндричній системі координат (ρ, θ, z) формулюється таким чином [8]:

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0, \quad (2)$$

де p_0 – атмосферний тиск, \mathbf{n} - зовнішня одинична нормаль до відповідної поверхні.

Величину тиску p знаходимо з інтегралу Коші-Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho_l \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (a_s(t) + g)\zeta + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right]. \quad (3)$$

Для виконання умов існування розв'язку крайової задачі (2) необхідно також задовольнити умову Неймана

$$\iint_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0.$$

В роботах [9,10] доведено, що потенціал швидкостей та функцію $\zeta = \zeta(t, x, y)$ для розв'язання нелінійної задачі можна наближати рядами за базисними функціями, що є розв'язками відповідної лінійної задачі [11,12]. Тому зобразимо невідомі функції Φ та ζ у вигляді

$$\Phi = \sum_{k=1}^M d_k(t) \varphi_k, \quad (4)$$

$$\zeta = \sum_{k=1}^M c_k(t) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}}. \quad (5)$$

В виразах (4), (5) залежні від часу функції $c_k(t)$, $d_k(t)$ визначатимуться з крайових умов на вільній поверхні. Для знаходження функцій φ_k в [13,14] отримано такі крайові задачі:

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (7)$$

Продиференціюємо друге рівняння в (7) по t і підставимо отриману рівність для $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ в перше рівняння з (7). Далі зобразимо функцію φ_k як $\varphi_k(t, x, y, z) = e^{i\chi_k t} \varphi_k(x, y, z)$. Приходимо до проблеми власних значень

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_k \Big|_{S_0}, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (8)$$

У разі, якщо конструкція, яка розглядається, є оболонкою обертання можна застосовувати такі подання:

$$\varphi_k(r, z, \theta) = \varphi_k(r, z) \cos \alpha \theta, \quad (9)$$

де α - номер гармоніки. Оскільки в даній роботі розглядається аксіально-симетричне формулювання, то $\alpha = 0$.

Тобто спочатку розглядаємо задачу вільних коливань рідини в лінійному формулюванні.

Подання (4) та (5) забезпечують виконання рівняння Лапласа, а також задовольняють умові на жорстких змочених стінках резервуару. Для розв'язання задачі про вимушені коливання рідини в резервуарі в нелінійному формулюванні треба задовольнити таким умовам на вільній поверхні:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (a_s(t) + g)\zeta + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}. \quad (10)$$

Обчислимо градієнт потенціалу швидкостей у циліндричній системі координат

$$\text{grad } \Phi = \vec{e}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \vec{e}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

В рівняння (10) підставимо значення $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, ζ , $\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}$ і $\frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2$.

Обчислимо квадрат модуля градієнта. Оскільки розглядаємо аксіально-симетричні коливання, то $\alpha = 0$. Тоді Φ не залежить від θ , тобто $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0$. Звідси

$$|\text{grad } \Phi|^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2.$$

Для циліндричного баку без перегородок функції φ_k згідно з [8] мають вигляд

$$\varphi_k = J_0 \left(\frac{\zeta_{0k} \rho}{R} \right) \cosh \left(\zeta_{0k} \frac{z+h}{R} \right) \left(\cosh \left(\zeta_{0k} \frac{h}{R} \right) \right)^{-1},$$

а на вільній поверхні

$$\varphi_k = J_0 \left(\frac{\zeta_{0k} \rho}{R} \right). \quad (11)$$

Базисні функції в поданні для функції ζ є такими:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = \frac{\zeta_{0k}}{R} J_0 \left(\frac{\zeta_{0k} \rho}{R} \right) \frac{\sinh \left(\zeta_{0k} \frac{z+h}{R} \right)}{\cosh \left(\zeta_{0k} \frac{h}{R} \right)},$$

а на вільній поверхні

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = \frac{\zeta_{0k}}{R} J_0\left(\frac{\zeta_{0k} \rho}{R}\right) \tanh\left(\zeta_{0k} \frac{h}{R}\right). \quad (12)$$

Константи ζ_{0k} є коренями рівняння

$$\left. \frac{\partial J_0(\zeta_{0k} \rho / R)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = 0.$$

Підставив вирази (11), (12) та відповідні похідні в співвідношення (10), та виконав скалярний добуток отриманих рівнянь на функції $J_0\left(\frac{\zeta_{0m} \rho}{R}\right)$, отримаємо систему неоднорідних нелінійних диференціальних рівнянь порядку $3M$ відносно $c_k(t)$, $d_k(t)$

$$\sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_k(\rho, z) + (g + a_s(t)) \sum_{k=1}^M c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, z)}{\partial z} + \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^M d_k(t) d_m(t) |\nabla \varphi_k(\rho, z)| |\nabla \varphi_m(\rho, z)| \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^M d_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, z)}{\partial z} - \sum_{k=1}^M \dot{c}_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, z)}{\partial z} - \frac{1}{g} \sum_{k,m=1}^M \chi_k^2 c_k(t) d_m(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, z)}{\partial \rho} \frac{\partial \varphi_m(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{z=0} = 0. \quad (13)$$

Спростимо співвідношення (13), використавши зв'язок між базисними функціями на вільній поверхні. Отримаємо рівняння

$$\sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_k(\rho, 0) + (g + a_s(t)) g^{-1} \sum_{k=1}^M \chi_k^2 c_k(t) \varphi_k(\rho, 0) + \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^M d_k(t) d_m(t) |\nabla \varphi_k(\rho, z)| |\nabla \varphi_m(\rho, z)| \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\frac{1}{g} \sum_{k=1}^M \chi_k^2 d_k(t) \varphi_k(\rho, 0) - \frac{1}{g} \sum_{k=1}^M \chi_k^2 \dot{c}_k(t) \varphi_k(\rho, 0) - \frac{1}{g} \sum_{k,m=1}^M \chi_k^2 c_k(t) d_m(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, 0)}{\partial \rho} \frac{\partial \varphi_m(\rho, 0)}{\partial \rho} = 0.$$

Зауважимо, що $\varphi_k = J_0\left(\frac{\zeta_{0k} \rho}{R}\right)$ та здійснимо отриманих рівнянь на $\varphi_m = J_0\left(\frac{\zeta_{0m} \rho}{R}\right)$. В результаті будемо мати таку систему диференціальних рівнянь

$$\dot{d}_m(t) + (g + a_s(t)) g^{-1} \chi_m^2 c_m(t) + \frac{1}{2(\varphi_m, \varphi_m)} \sum_{k,l=1}^M d_k(t) d_l(t) |\nabla \varphi_k(\rho, 0)|^2 |\nabla \varphi_l(\rho, 0)|^2 = 0,$$

$$\chi_m^2 [d_m(t) - \dot{c}_m(t)] - \frac{1}{(\varphi_m, \varphi_m)} \sum_{k,l=1}^M \chi_k^2 c_k(t) d_l(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, 0)}{\partial \rho} \frac{\partial \varphi_l(\rho, 0)}{\partial \rho} = 0 \quad (14)$$

Розв'язання системи (14) потребує завдання $2M$ початкових умов. Ці умови отримуємо з рівнянь (1) та (10). Маємо

$$c_k(t) = 0, \quad d_k(0) = d_{0k}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (15)$$

Таким чином, задачу про вимушені коливання рідини в циліндричній оболонці, підданій дії вертикального збудження, зведено до розв'язання системи диференціальних рівнянь (14) з граничними умовами (15).

3. Аналіз результатів

3.1 Лінійне формулювання

Нехтуючи квадратичними доданками в (14), маємо таку незв'язану систему диференціальних рівнянь:

$$\dot{d}_m(t) + (g + a_s(t)) g^{-1} \chi_m^2 c_m(t) = 0, \quad d_m(t) - \dot{c}_m(t) = 0 \quad (16)$$

З граничними умовами (15).

Продиференціюємо перше з рівнянь (16) за t та підставимо в отриману рівність друге рівняння з (16). Маємо таку систему:

$$\ddot{d}_m(t) + (g + a_s(t)) g^{-1} \chi_m^2 d_m(t) = 0 \quad (17)$$

з граничними умовами

$$d_m(t) = d_{0m}, \quad \dot{d}_m(0) = d_{1m}, \quad k = \overline{1, M}.$$

Будемо розглядати коливання рідини за дії гармонічного вертикального збудження. Це збудження опишемо як $a_s(t) = -a \cos(\omega t)$. Тоді рівняння (17) набудуть вигляду

$$\ddot{d}_m(t) + \chi_m^2 d_m(t) - a \cos(\omega t) g^{-1} \chi_m^2 d_m(t) = 0. \quad (18)$$

Зауважимо, що рівняння (18) – це класичні рівняння Матьє [15].

Далі побудуємо фазові портрети динамічної системи. Розглядаємо такі початкові умови:

$$d_m(t) = 0, \quad \dot{d}_m(0) = 0.05, \quad k = \overline{1, M}.$$

Припустимо, що $a = 1$. Розглянемо жорстку циліндричну оболонку з розмірами $R = 1, H = 1$. Маємо такі значення перших частот вільних осесиметричних коливань [8,9]

$$\chi_1 = 6.1224; \chi_2 = 8.2962$$

Вивчимо вплив частоти сили збурення на поведінку динамічної системи. Припускалось, що частота збурення приймає такі значення

$$\omega = 1; 6.1283; 10.5; 2 \cdot 6.1283; 8.2962; 18.36.$$

На рис. 2 зображені фазові портрети $d_1(t), \dot{d}_1(t)$ для наведених вище частот вертикальної сили збурення.

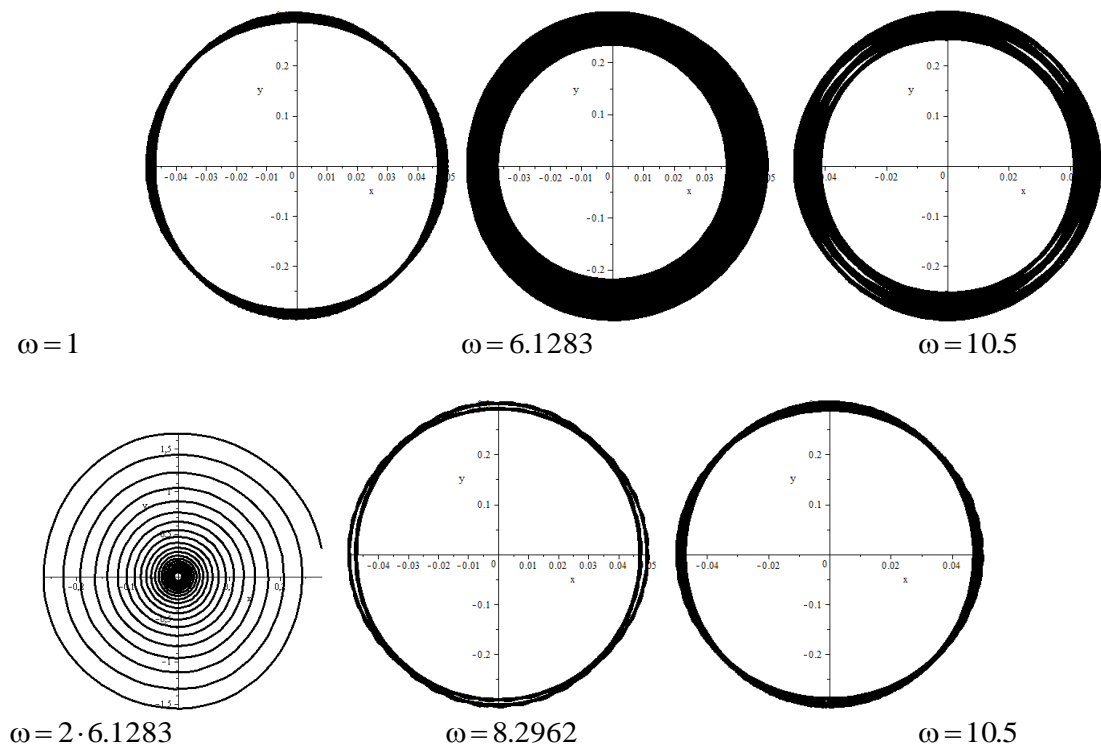


Рис.2. Фазові портрети динамічної системи

Спостерігаємо наявність двох резонансів, що відповідають першій частоті вільних коливань рідини в циліндричному резервуарі $\omega = 6.1283$ та подвоєній першій частоті $\omega = 2 \cdot 6.1283$. Це відповідає отриманим в [13] теоретичним результатам, які свідчать про те, що параметричний резонанс має місце, коли

$$\omega = \frac{2\chi_1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

При цьому головний параметричний резонанс відбувається саме при подвоєній частоті вільних коливань, коли амплітуди $d_1(t), \dot{d}_1(t)$ необмежено зростають.

Зауважимо що в лінійному формулюванні маємо систему незв'язаних диференціальних рівнянь, перехід до нелінійної задачі, окрім появи квадратичних доданків, призводить до зв'язаності системи. Для спрощення аналізу розглянемо спочатку рівняння нелінійної задачі, коли враховується лише один член рялу в розкладах (4), (5).

3.2 Дослідження нелінійного рівняння

Обмежимося $M = 1$ у рівняннях (14) в припущенні відсутності сили збурення. Маємо

$$\varphi_1 = J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{(z+h)}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)}$$

Обчислимо квадрат градієнту цієї функції дає

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} = -\frac{\zeta_{01}}{R} J_1\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{(z+h)}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\zeta_{01}}{R} J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\sinh\left(\zeta_{01} \frac{(z+h)}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)},$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2 = \left[-\frac{\zeta_{01}}{R} J_1\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{(z+h)}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)}\right]^2 + \left[\frac{\zeta_{01}}{R} J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\sinh\left(\zeta_{01} \frac{(z+h)}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)}\right]^2.$$

На вільній поверхні ($z=0$) маємо

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{(\zeta_{01})^2}{R^2} \left[J_0^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + J_1^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \tanh^2\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right) \right]$$

Рівняння на вільній поверхні для визначення $d_1(t)$ приймуть від

$$\ddot{d}_1(t)\varphi_1(\rho, 0) + g d_1(t) \frac{\partial \varphi_1(\rho)}{\partial z} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi_1(\rho)|^2 = \ddot{d}_1(t) J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + g \frac{\zeta_{01}}{R} J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \tanh\left(\frac{\zeta_{01}}{R}\right) d_1(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} (\dot{d}_1(t))^2 \left(\frac{\zeta_{01}}{R}\right)^2 \left[J_0^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + J_1^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \tanh^2\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right) \right]$$

Введемо позначення

$$\omega_1^2 = g \frac{\zeta_{01}}{R} \tanh\left(\frac{\zeta_{01}h}{R}\right)$$

$$\tau(\rho) = \left(\frac{\zeta_{01}}{R}\right)^2 \left[J_0^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + J_1^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \tanh^2\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right) \right]$$

Тоді маємо

$$\ddot{d}_1(t)\varphi_1(\rho, 0) + g d_1(t) \frac{\partial \varphi_1(\rho)}{\partial z} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi_1(\rho)|^2 = \ddot{d}_1(t) J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + \omega_1^2 d_1(t) + \frac{1}{2} (\dot{d}_1(t))^2 \tau(\rho)$$

З кінематичної умови на вільній поверхні маємо

$$\ddot{d}_1(t) J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + \omega_1^2 d_1(t) J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + \frac{1}{2} (\dot{d}_1(t))^2 \tau(\rho) = 0 \quad (19)$$

Знайдемо скалярний добуток (19) на $J_0\left(\frac{\zeta_{01}}{R}\rho\right)$

$$\ddot{d}_1(t) + \omega_1^2 d_1(t) + \frac{1}{2} (\dot{d}_1(t))^2 \frac{(\tau(\rho), J_0(\rho))}{(J_0(\rho), J_0(\rho))} = 0. \quad (20)$$

При нульових початкових умовах рівняння (11) має тривіальний розв'язок. Тому розглянемо такі ненульові початкові умови

$$d_1(0) = 0; \dot{d}_1(0) = 1$$

Знайдемо аналітичний розв'язок рівняння (20) за умови, що $\tau(\rho) = 0$, тобто коли нелінійні ефекти не враховуються

$$d_1(t) = \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \quad (21)$$

На рис 3. зображено зміну рівня вільної поверхні у центральній точці ($r=0, z=H$). Пунктирна лінія відповідає аналітичному розв'язку (21), суцільна лінія відповідає розв'язку рівняння (20), отриманого чисельно за допомогою методу Рунге-Кутта 4-5-го порядку. Бачимо, що урахування нелінійного ефекту суттєво збільшує амплітуду коливань.

Проаналізуємо вплив початкових умов на поведінку розв'язків лінійного та нелінійного рівнянь для знаходження зміни рівня вільної поверхні. При $d_1(0) = 0, \dot{d}_1(0) = 1.1$ бачимо суттєве збільшення амплітуди коливань при незначному збільшенні початкової швидкості $\dot{d}_1(0)$.

Ще більш цікавий результат було отримано при $\dot{d}_1(0) = 1.17$. Бачимо ефект «падіння хвилі».

Відмітимо, що при $\dot{d}_1(0) = 1.16$ падіння хвилі ще не відбувається, але амплітуди коливань при врахуванні нелінійних ефектів суттєво зростає. Це може бути пояснено невиконанням умови Пенлеве [14], яка полягає у наступному: звичайне диференціальне рівняння має властивість Пенлеве, якщо його загальний розв'язок не має рухомих критичних особливостей.

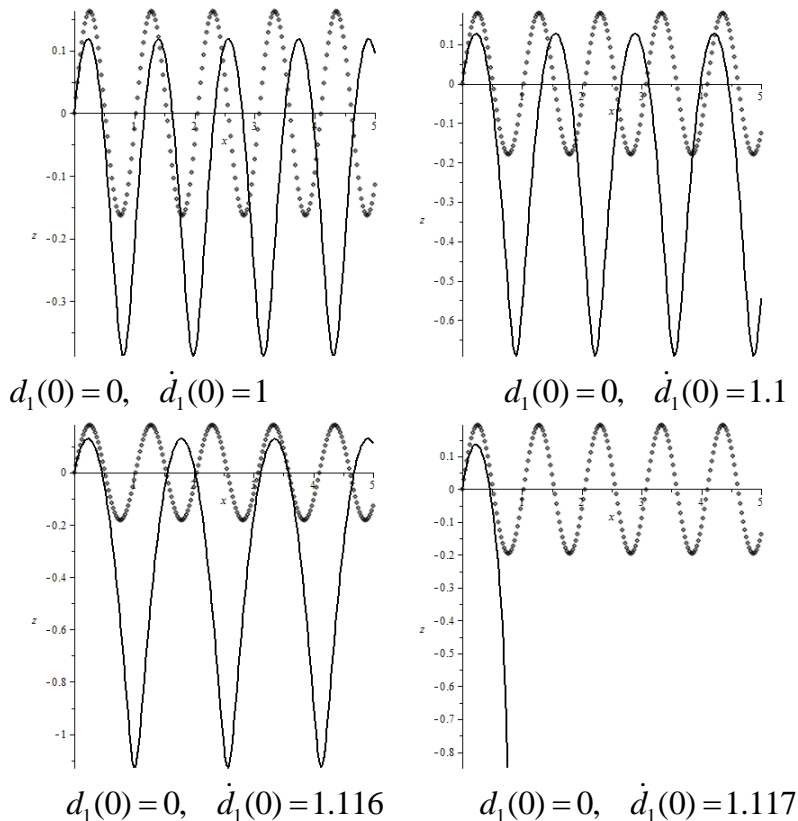


Рис 3. Зміна рівня ζ у центральній точці вільної поверхні за різні початкові умови.

Введемо позначення $\alpha = \frac{1}{2} \frac{(\tau(\rho), J_0(\rho))}{(J_0(\rho), J_0(\rho))}$. Шляхом заміни змінної $w(d_1) = (\dot{d}_1(t))^2$ рівняння

$$\ddot{d}_1(t) + \omega_1^2 d_1(t) + \alpha (\dot{d}_1(t))^2 = 0$$

зводиться до лінійного диференціального рівняння першого порядку

$$w' + \omega_1^2 d_1 + \alpha w = 0,$$

яке має такий аналітичний розв'язок при $d_1(0) = 0$:

$$\dot{d}_1^2(t) = \frac{\omega_1^2}{2\alpha^2} - \frac{d_1}{\alpha^2} + \left[(\dot{d}_1(0))^2 - \frac{\omega_1^2}{2\alpha^2} \right] \exp(-2\alpha d_1). \quad (22)$$

З рівняння (22) бачимо, що при $d_1(t) < 0$ та $y'(0)^2 - \frac{\omega_1^2}{2\alpha^2} > 0$ спостерігається швидке зростання $\dot{d}_1(t)$ (рис. 3), що веде до «падіння хвилі». Зауважимо, що в розглянутому випадку $\omega_1^2 \approx 37.556$, $2\alpha^2 \approx 30.109$, а саме, отримуємо $\frac{\omega_1^2}{2\alpha^2} \approx 1.2473$, $\sqrt{1.2473} \approx 1.118$. Саме цю границю для втрати стійкості отримано числовим методом.

Зауважимо, що коли початкові дані такі, що $d_1(0) < 0$, $\dot{d}_1(0) = 0$, втрати стійкості не спостерігались, навіть для досить великих від'ємних значень $d_1(0)$. Ці результати проілюстровано на рис. 4.

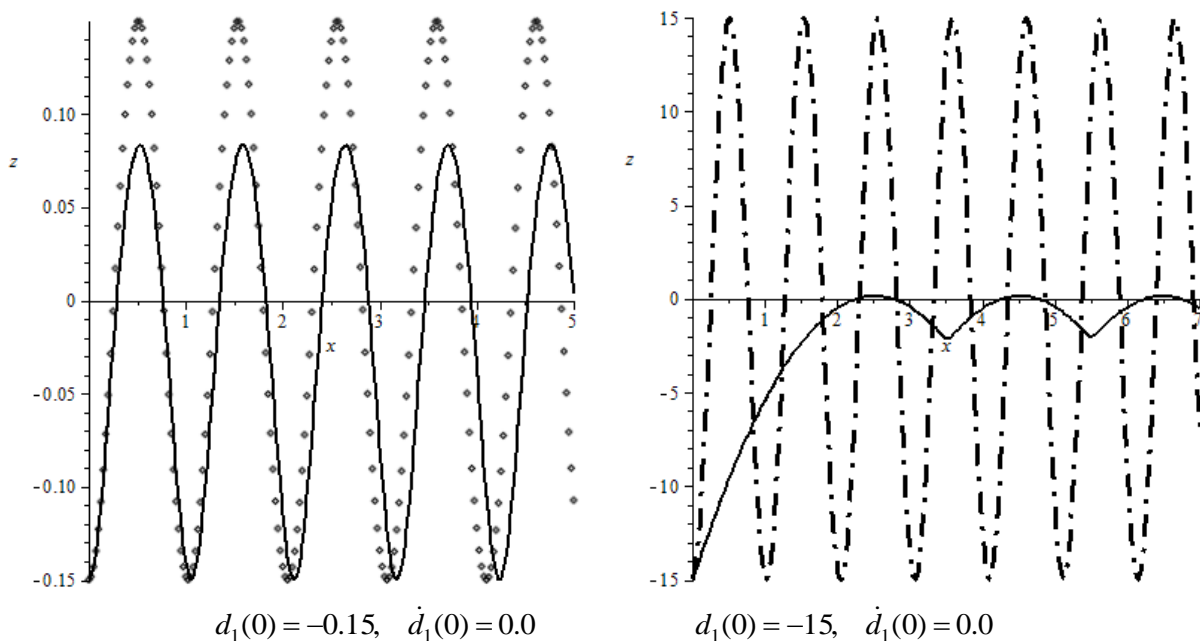


Рис.4. Поведінка розв'язку нелінійного рівняння за різні граничні умови

Таким чином, врахування нелінійності призводить до необхідності дослідження рівнянь, розв'язки яких суттєво залежать від початкових умов. За деяких початкових умов спостерігається втрата стійкості.

4. Висновки

В роботі отримані диференціальні рівняння, що описують вимушені коливання рідини в циліндричному резервуарі під дією вертикального гармонічного збудження в аксіально-

симетричному формулюванні. Проведено числовий аналіз задачі в лінійному формулюванні. На відміну від горизонтальних збуджень спостерігається поява подвійної резонансної частоти. Для аналізу нелінійних коливань проведено попереднє дослідження одного характерного диференціального рівняння за відсутності сили, що збуджує. Цей аналіз дозволив виявити суттєвий вплив початкових умов на поведінку динамічної системи. В подальшому планується дослідження нелінійних коливань рідини в резервуарах, що є оболонками обертання, за дії як вертикальних, так і горизонтальних сил збудження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Feschenko S.F., Lukovsky I.A., Rabinovich B.I. Methods for determining added fluid mass in mobile cavities, Kiev, Naukova Dumka, 2000.
2. Abramson H.N.; The dynamic behavior of liquids in moving containers; NASA SP-106; 1966
3. Khezzar L., Seibi A. C., Goharzadeh A.. Water Sloshing in Rectangular Tanks – An Experimental Investigation & Numerical Simulation. International Journal of Engineering (IJE), Vol. 3, No. 2, 2010, pp. 174-184.
4. Curadelli, O., Ambrosini, D., Mirasso, A., Amani, M. Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement. Journal of Fluids and Structures 26, 2010, pp. 148–159.
5. Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю., Метод гармонического баланса применительно к построению бифуркационных диаграмм колебательных систем с полиномиальной нелинейностью, Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины, Донецьк: ПИММ НАН України, 2013, Т. 26, С. 12-20..
6. Toure C., Normal form theories and nonlinear normal modes, Theoretical settings and applications, Paris, 2012, pp-232-238,
7. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics Cambridge University Press, New York, 2005.
8. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences, V1, No1, 2016, pp. 14-27.
9. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U., BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 67, 2016: pp. 13-18
10. D.V . Krutchenko, E.A. Strelnikova, Yu.S. Shuvalova, Вісник Харківського національного університету. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". 2017, Т.35, No1, С. 31-37.
11. Еселева Е.В., Гнитко В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью, Институт пробл. машиностроения. 2006, №1, С.105-118.
12. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. Государственное издательство теоретико-технической литературы. Москва, 1956, 600с.
13. Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F., Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd Edition , Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2003.
14. Кудряшов Н.А.. Свойство Пенлеве в теории дифференциальных уравнений, Соросовский образовательный журнал, №9, 1999. с. 121-122.

REFERENCES

1. S.F Feschenko., I.A. Lukovsky, B.I. Rabinovich, Methods for determining added fluid mass in mobile cavities, Kiev, Naukova Dumka, 2000.
2. Abramson H.N.; The dynamic behavior of liquids in moving containers; NASA SP-106; 1966
3. L. Khezzar, A. C. Seibi, A. Goharzadeh. Water Sloshing in Rectangular Tanks – An Experimental Investigation & Numerical Simulation. International Journal of Engineering (IJE), Vol. 3, No. 2, ,pp. 174-184, 2010.
4. O.Curadelli, D. Ambrosini, , A. Mirasso, M. Amani, *Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement.* Journal of Fluids and Structures 26, pp. 148–159, 2010.

5. Belovodskiy V.N. Sukhorukov M.Y. *The harmonic balance method for the finding of bifurcation diagrams of oscillatory systems with polynomial nonlinearity*. "Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine", Donetsk: IAMM of NAS of Ukraine, Vol. 26, pp. 12-20, 2013. [in Russian]
6. C.Toure, *Normal form theorems and nonlinear normal modes*, Theoretical settings and applications, Paris, pp-232-238, 2012.
7. R.A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics*, Cambridge University Press, New York, 2005.
8. K. Degtyarev, V.Gnitko, V.Naumenko, E.Strelnikova, *Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles* Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences, V1, No1, pp. 14-27, 2016.
9. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U., *BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 67, pp. 13-18, 2016
10. D.V.Krutchenko, E.A.Strelnikova, Yu.S.Shuvalova. *Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. Вісник Харківського національного університету. , Серія "Математичне моделювання. 2017, Т.35, No1, С. 31-37.
11. Yeseleva E., Gnitko V., Strelnikova E. A. *Intrinsic oscillations of high pressure tanks when interacting with a liquid*, Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, №1, P.105-118, 2006. [in Russian]
12. Bolotin V.V. *The Dynamic Stability of Elastic Systems*. Gostekhizdat, Moscow. 600 p. 1956 [in Russian]
13. A. D Polyanin, V. F Zaitsev, *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2003.
14. Kidryashov N.A. *The Painlevé property in the theory of differential equations*. Soros Education Journal №9, pp. 121-122, 1999. [in Russian]

Крютченко Денис Владимирович – аспірант;. Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного, ул. Пожарського, 2/10, г.Харьков, Україна, 61046. ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Крютченко Денис Владимирович – аспірант. Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного, ул. Пожарського, 2/10, г.Харьков, Україна, 61046. ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Kriutchenko Denys - graduate student, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, vul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046. ORCID: 0000-0002-6804-6991.

УДК 004

Особенности развития искусственного интеллекта на современном этапе

В.М. Куклин

*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: kuklinvm1@gmail.com*

Обсуждаются особенности работы интеллектуальных системах логического вывода, а также их сравнение с деятельностью нейронных сетей. Поясняется каким образом формируется новое знание в системах логического вывода и как накапливаются данные в нейронных сетях, организуя систему понятий. Отмечается, что наполнение базы данных и правил в системах логического вывода является процессом, который требует значительных ресурсов и потому имеет ограниченную сферу применения. Накопление информации в обширных нейронных сетях за счет подключения к громадному числу собеседников – агентов напротив позволяет надеяться на эффективное обучение машин и открывает новые перспективы для создания систем искусственного интеллекта. Единственной проблемой здесь могут быть трудности обучения нейронных систем формальным описаниям, использованию абстракций, количественным расчетам. Рассмотрены перспективы формирования планетарного разума и дальнейшего развития планетарной интеллектуальной системы. Неоднозначность решения ранее сдерживала процесс увеличения числа элементов нейронных систем. Но сейчас получение множества решений вместо одного единственного несколько не волновало создателей гигантских нейронных сетей, связанных с громадной аудиторией. Прежде всего, они вряд ли осознавали важность требования единственности решения, а с другой стороны - человек всегда при разрешении своих проблем находит множество возможных сценариев поведения. Обсуждаются возможности появления искусственного интеллекта, сравнимого с возможностями природного. Представлены проблемы обучения экспертных систем и нейронных сетей, как они были определены ранее и что случилось позднее. Особо интересным может быть применение нечеткой логики, которая способна сформировать язык общения с нейронными сетями, свободный от необходимости двойного перевода на естественные языки и упростит передачу информации непосредственно между человеческим мозгом и сетью. Обсуждаются нейронные сети на основе нечетких нейронов, которые способны объединить возможности экспертных систем логического вывода и нейрокомпьютеры.

Ключевые слова: *системы логического вывода, нейронные сети, допустимость многозначности решений, расширение аудитории обучающих агентов, объединение сетей на нечеткой логике и экспертных систем.*

Обговорюються особливості роботи інтелектуальних системах логічного висновку, а також їх порівняння з діяльністю нейронних мереж. Пояснюється яким чином формується нове знання в системах логічного висновку і як накопичуються дані в нейронних мережах, організовуючи систему понять. Відзначається, що наповнення бази даних і правил в системах логічного висновку є процесом, який вимагає значних ресурсів і тому має обмежену сферу застосування. Накопичення інформації в великих нейронних мережах за рахунок підключення до величезного числа співрозмовників - агентів навпаки дозволяє сподіватися на ефективне навчання машин і відкриває нові перспективи для створення систем штучного інтелекту. Єдиною проблемою тут можуть бути труднощі навчання нейронних систем формальним описами, використання абстракцій, кількісним розрахунками. Розглянуто перспективи формування планетарного розуму і подальшого розвитку планетарної інтелектуальної системи. Неоднозначність рішення раніше стримувала процес збільшення числа елементів нейронних систем. Але зараз отримання безлічі рішень замість одного єдиного анітрохи не хвилювала творців гігантських нейронних мереж, пов'язаних з величезною аудиторією. Перш за все, вони навряд чи усвідомлювали важливість вимоги єдності рішення, а з іншого боку - людина завжди при вирішенні своїх проблем знаходить безліч можливих сценаріїв поведінки. Обговорюються можливості появи штучного інтелекту, який можна порівняти з можливостями природного. Представлені проблеми навчання експертних систем і нейронних мереж, як вони були визначені раніше і що сталося пізніше. Особливо цікавим може бути застосування нечіткої логіки, яка здатна сформувати мову спілкування з нейронними мережами, вільний від необхідності подвійного перекладу на природні мови і спростить передачу інформації безпосередньо між людським мозком і мережею. Обговорюються нейронні мережі на основі нечітких нейронів, які здатні об'єднати можливості експертних систем логічного висновку та нейрокомп'ютери.

Ключові слова: *системи логічного висновку, нейронні мережі, допустимість багатозначності рішень, розширення аудиторії навчальних агентів, об'єднання мереж на нечіткій логіці і експертних систем.*

The features of the intelligent logical systems have been discussed. Their comparison with the activity of neural networks has been made. The processes of forming new knowledge in the logical systems and accumulating data in neural networks by organizing a system of concepts have been explained. It has been noted that filling the base of data and rules in logical systems is a process that requires significant resources and therefore has a limited application range. On the contrary, the accumulation of information in extensive neural networks by connecting it to a huge number of agents could provide for effective machine learning and opens up new perspectives for creating artificial intelligence systems. Although teaching the formal descriptions, the usage of abstractions and quantitative calculations to neural systems can present a difficult problem. The prospects for the planetary mind formation and the further development of the planetary intellectual system are considered. The process of increasing the number of elements of neural systems was held back by the ambiguity of the solution before. But, the multiplicity of solutions did not bother the creators of giant neural networks associated with a huge audience. First of all, they were hardly aware of the importance of the solution uniqueness because resolving the problems a person always develops a lot of different scenarios. The possibility of the emergence of artificial intelligence comparable to a natural one in his capabilities

has been discussed. The problems of teaching the expert systems and neural networks, how they were defined in the past and what has changed later are explained. The usage of fuzzy logic which is able to form a language of communication with neural networks, free from the need for double translation into natural languages and to simplify the direct transfer of information between a person's brain and a network may be of a particular interest. Neural networks based on fuzzy neurons which are able to combine the capabilities of expert logical systems and neurocomputers are discussed.

Keywords: *inference systems, neural networks, the admissibility of polysemy solutions, the expansion of the audience of training agents, unification of networks on fuzzy logic and expert systems.*

1. Системы логического вывода и/или нейронная сеть?

Решение задач в математической логике основано на формировании понятий (первый уровень – это, например, литералы в теории предикатов) и создании правил, по которым они взаимодействуют (второй уровень – в теории предикатов это предложения). Правила взаимодействия предложений сформированы на основе формализма резолюции. Это эквивалентно утверждению, что решение задач основано на дедукции. Прямая дедукция от фактов к выводам имеет трудности с выбором пути решения и не нашла применения в языках логического программирования. Однако она полезна для самообучения, для получения нового знания из прежде представленного. Обратная дедукция, (фактически – это доказательство теорем) – от вопросов к фактам, напротив получила развитие в языках логического программирования (например, ПРОЛОГ).

Дальнейшее развитие логических систем – это семантическая паутина, формирование предикатов высоких порядков и дальних, и ближних связей между предложениями. В языках логического программирования, основанных на логике предикатов первого порядка (и в перспективе на семантических сетях, оформленных подобным образом), алгоритм решения (резолюция) построен на согласовании ветвей (предложений) явно или неявно создаваемого машиной графа решения (то есть, это доказательство теорем). Квалификация пользователя может быть достаточно невысокой, что позволяет применять построенные на этих языках экспертные системы повсеместно. Программист может построить логическую систему связей, ориентируясь на тип задачи, между заданными в начальных условиях понятиями. И позволить машине искать условия согласования начальных данных и выбранной логической схемы. По существу, решением являются эти подобранные машиной условия.

На основе функциональных языков (типа ЛИСП и его модификаций) с развитым логическим формализмом, это вполне можно делать. Однако, требования к квалификации программиста значительно выше, чем в случае применения языков логического программирования. Так как роль программиста при использовании функциональных языков более ответственная, сама деятельность носит явно творческий характер, интеллектуалам этот подход больше импонирует.

Что же собой представляли традиционные нейронные сети? Здесь на вход сети подается запрос-сигнал, и сеть реагирует на него на выходе распределяя сигналы в n -мерном пространстве значений. В простейшем случае – это одномерное пространство значений. В двумерном – это значения распределены на плоскости двух выходных параметров. Подобные (близкие по смыслу) решения локализируются в каком-то одном месте пространства вывода. Для того, чтобы разделять решения разного типа (класса, вида) нужно, чтобы области локализации решений разного класса не перекрывались. Именно поэтому первые нейронные сети назывались перцептронами, они были ориентированы на узнавание объектов.

Таким образом в перцептроне создается первый уровень – система понятий. С усложнением нейронной сети формируется второй уровень – связь между созданными в ней понятиями, то есть предложения-правила, чему тоже придется сеть обучать. Дальнейшее развитие нейронной сети – это уже формирование семантической паутины, – прямых (сильных) и ассоциативных (слабых) связей между предложениями-правилами. Естественный интеллект (человеческий разум) – пример дальнейшего развития и усложнения нейронной сети, где происходит усиление возможностей системы связей – позволяющая формировать динамические картины представлений, то, что принято называть воображением.

2. О перспективах дальнейшего развития планетарной интеллектуальной системы

Природа создала нейронную сеть коры головного мозга, которая позволяет высшим живым организмам решать задачи выживания в этом мире. Рост объема коры головного мозга, то есть накопление количественных изменений позволило появиться изменениям качественным.

Считается, что рост связей в расширяющейся нейронной сети коры привел к эффекту перколяции, то есть резкому увеличению взаимодействия между нейронами в разных областях мозга и столь же резкому увеличению скорости передачи и обмена информации. Заметим, что эволюционное развитие коры головного мозга сопровождалось и развитием систем, поддерживающих ее функционирование, а также систем, обеспечивающих связь с внешним миром и с механизмами воздействия на него. Постоянная дефрагментации освоенных объемов информации в информационном окружении (например, при одной из таких дефрагментаций мы забываем детство) привела к задержке развития человека (время роста лишь в несколько раз меньше времени жизни, у животных эта величина на порядок меньше).

Обвальное число браузеров, рост числа связей между ними приводит к формированию нейронной сети, сравнимой с нейронной сетью коры головного мозга человека. Параллельно развиваются системы поддержки и обеспечения функционирования Интернета, усложняется сетевая структура. Понятно, что наступит момент, когда степень сложности, объемы информации глобальной сети достигнут уровня, позволяющего независимо от нашего желания дать начало процессу формирования в ней второй сигнальной системы [1]. Основной проблемой человечества при развитии такой глобальной планетарной интеллектуальной системы будет проблема взаимодействия с ней цивилизации.

И здесь потребуются освоение языка, на котором с этой вообще говоря не зависящей от людей планетарной интеллектуальной системой можно будет общаться. Таким языком может быть язык, разработанный на основе нечеткой логики. Или придется обучить интеллектуальную систему глобальной сети языкам человечества, что, собственно, сейчас и происходит, но об этом ниже.

3. Можно ли надеяться на появление искусственного интеллекта, сравнимого с возможностями природного?

Но человечество не хочет ждать. Искусственный интеллект высокого уровня, сравнимый с человеческим, хочется получить здесь и сейчас. Когда мы хотим создать искусственную (именно) интеллектуальную систему и намерены заполнить ее базу данных и знаний, вот тут-то и возникают проблемы. Во-первых, у человека масса знаний, которые он полагает известными (по умолчанию), машине все это надо разжевать и пояснить.

Во-вторых, заполнение базы данных машины должны делать эксперты, а их работа – высокооплачиваемая. В-третьих, время, которое затрачивается на заполнение баз данных, проверки и перепроверки этого заполнения достаточно значительное. Уже от этого опускаются руки. Потому, полагали, что пока не найдут эффективный машинный способ автоматического заполнения баз данных, дело быстро не пойдет, разве что у военных.

Кстати, как у нейронных сетей. Там оказался весьма полезен машинный режим обучения нейронных сетей, в частности, сетей Тэуово Кохоннена. Смущает только явное несоответствие скорости реакции природного нейрона и нейрона искусственной сети, то есть скорости отдельных операций вычислительных систем. Тем не менее скорость получения решения человеком частенько значительно превосходит скорость достижения результата у современных машин. Особенно в условиях одновременного решения многих задач.

В чем же дело? Дело скорее всего в том, что мозг человека – это мультипроцессорная система, причем количество процессоров – отдельных нейронов и нейронных узлов–скоплений, исчисляется сотнями миллионов. Одновременное и независимое подключение этого гигантского числа процессоров к внешним рецепторам и датчикам ускоряет получение решения в такое же число раз. Поэтому усилия исследователей полезно применить в области разработки мультипроцессорных (скорее даже мегапроцессорных) систем новых поколений.

4. Как обучить нейронную сеть тому, что мы сами знаем?

Девид Румельхард и Джеффри Хинтон (1986) предложили наиболее распространенный ныне метод обучения сети – метод обратного распространения ошибки: Оценив степень отклонения от нужного ответа они рекомендовали пройти в обратном порядке по слоям сети и поправить настройки. И по сей день, все нейронные сети, нейрокомпьютеры, библиотеки которых насчитывают миллионы, обучаются по этой схеме, хотя существуют сети, которые в обучении не нуждаются. Эта идея получила развитие – стали искать более мягкие формы активации нейронов, усложнение связей нейронов разных слоев (например, архитектура ResNet и подобные

ей). Но обучение имеет свои проблемы – нужно большое количество правильно решенных задач – примеров (для этого даже создавали коллективы разработчиков таких примеров), при большом количестве слоев влияние корректирующих поправок ослабляется, кроме того нужно проводить много операций по настройке – фактически в режиме итераций. Оказалось, например, полезным предварительно готовить сеть для обработки данных определенного типа – метод предобучения сети Д. Хинтона (2006). Перспективной процедурой является использование параллельных вычислений при настройке сети с технологиями CUDA на графических картах (GPU – graphics processing unit). Уже для сотовой связи созданы специальные процессоры – NPU (neural processing unit), так называемые ускорители искусственного интеллекта (AI accelerator) для увеличения производительности параллельных вычислений аналогично GPU при заметной экономии энергии.

Если после обучения, тесты показывали, что ошибки убывают, то значит повезло, научили. А если ошибки на тестовых примерах растут, значит сеть просто запомнила все что ей сообщили, во время обучения, а реально ничему не научилась. Это политкорректно назвали переобучением (overfitting). Переобучение больших сетей ожидаемо, ибо увеличение свободных управляющих параметров эквивалентно увеличению степеней свободы. Недостаточное число обучающих задач позволяет обеспечить правильность необходимых ответов, однако другие подобные задачи могут быть решены неправильно. Кроме того, нельзя обеспечить прямое соответствие начальных условий конечным результатам. Различные начальные условия могут давать один и тот же или близкий результат. Бороться с переобучением сложно, но некоторые подходы оказались удачными.

Например, часто применяют ослабление воздействия соседних нейронов друг на друга (для количественных критериев такого ослабления используют известные в математике методы регуляризации Тихонова), используют отключение во время обучения больших участков сети – оригинальная методика обучения Д. Хинтона Dropout (2012). Это временно уменьшает сложность сети, создавая условия подавления переобучения, а затем при подключении прежде выключенных участков, их адаптация к новому состоянию улучшается. Кроме того, человеческий мозг нашел же способ бороться с переобучением (пусть даже не так успешно, как хотели бы математики), отключая целые отделы коры головного мозга, не нужные для решения простой задачи.

Но если все это не помогает, тогда сеть искренне считали необучаемой и отказывались от нее. Хотя есть и иная причина появления неожиданных ответов. Когда сеть достаточно мощная, она способна выйти из навязанного ей программой обучения класса решений и предложить свои, несколько иные, которые экспериментаторы не предполагали. Для них сеть нарушает сложившуюся картину мира. Такая сообразительность сети тоже не приветствовалась и от этой излишне умной сети тоже отказывались.

Хотя рациональным выходом могло быть перманентное увеличение количества и качества (общности, разнообразия) обучающих задач для сохранения устойчивости картины мира В книге автора «О пользе размышлений», было высказана гипотеза «необходимого развития». Любая эволюционирующая интеллектуальная система (в частности цивилизация), все время увеличивает свои интеллектуальные ресурсы (то есть подключаются все новые и новые блоки интеллектуальной сети) растет ее усложнение. И прежний объем обучающих задач и соответственно предложенных решений вскорости оказывается недостаточным. В том смысле, что при этом возникают проблемы с формированием производных решений, растут рассогласования, которые воспринимаются как ошибки. То есть нарушается устойчивость картины мира. Единственным выходом здесь может быть увеличение объема известных задач, обеспечивающих эффективное обучение глобальной сети. Это увеличение может быть поддержано именно наукой, выходом из замкнутого круга прежних понятий и представлений.

5. Сети на основе нечеткой логики

Объединение более близкой к природе естественного языка и сформированных человеком понятий системы нечеткой логики [2] с искусственными нейронными сетями было впервые выполнено Ж –С. Р. Чангом из Тайванского университета [3]. Нечеткие нейронные сети построены по следующему принципу: Выводы делаются на основе аппарата нечеткой логики, а функции принадлежности подстраиваются с использованием алгоритмов обучения нейронных сетей. Роль нечеткой логики оказывается столь велика, что позволяет вернуться к извечной

проблеме осознания поиска решений нейронными сетями вообще и человеческим разумом в частности. Дело в том, что предложенная древними учеными система логических и математических методов содержит чуждые для нейронных сетей способы описания и процедуры решений. Нейронная сеть ищет ответы, используя иные принципы и подходы, основанные на сравнениях «больше–меньше». Действительно, ступая на проезжую часть, человек никогда не решает в уме задачу встречи, опираясь на математический аппарат, а оценивает возможность наезда приближающимся автомобилем на основе сравнения наблюдаемой ситуации с предыдущим опытом.

Природа создала уникальный инструмент – человеческий мозг, представляющий собой нейронную сеть со множеством вспомогательных систем, обеспечивающих его эффективное функционирование. Который действует приблизительно так, как описано нечеткой логикой, где каждый предмет, явление или действие имеет многочисленные стороны, грани. Оценка этих элементов, составляющих предмет, явление или действие может быть представлена некоторыми характеристическими функциями, определяющими степень принадлежности к определенному понятию. Похоже, что поиск решения в нейронной сети происходит подобно тому, как описал в своей математической теории Лотфи А. Заде. Несомненно, что человечество непременно осознает важность такого описания и попытается понять, как именно устроена система принятия решений природным и искусственным интеллектом в форме нейронных сетей. И тогда, освоив язык нейронных сетей, приняв на вооружение методы его функционирования, люди обретут возможность общаться друг с другом, не используя обедненные эмоциями и чувствами современные языки, не переводя интуитивные образы и догадки в формальные символичные описания. Оставляя последним только прямые расчеты и вычисления, где интуиция и догадки уже выполнили свою роль. Введенные в описание так называемые нечеткие нейроны позволили понять характер работы таких нейронных систем с нечеткой логикой и появилась возможность просматривать процесс решения.

Эти системы позволяют, правда с трудом, но все–таки понимать, что происходит со знанием в процессе решения такой нейронной сетью задач. Таким образом произошло **историческое объединение искусственных нейронных сетей и экспертных систем принятия решений на основе логики**. Этот процесс еще не завершен, но его течение вселяет уверенность в его успешности.

6. Что уже меняется в подходах и чего ждать от будущего?

Люди, обмениваясь мнениями, сообщая друг другу о мнениях третьих лиц, постепенно формируют представления о том, что следует и не следует делать, мораль, стандарты поведения, вообще все то, чем они руководствуются в своей жизни. Это и есть метод формирования наборов решений на основе осознания множества событий, явлений и мнений. Таким образом формируется неформализованное знание отдельного человека, знание, которое трудно или даже невозможно записать в виде теорий, алгоритмов и схем.

Но одновременно с этим, пытаясь понять механизмы явлений, люди стали анализировать их детали, искать способы описания и пришли к теориям, научились рассчитывать и прогнозировать. Эти способы формирования знаний были построены на понятиях, абстракциях, позволяли формализовать описание явлений. Формализация позволила развить науку, методы описания явлений.

Попытки создания машин, которые бы могли как человек разобраться в характере процессов, спрогнозировать результаты, пояснить явления и вырабатывать решения поначалу опирались на сформулированные и формализованные знания и такие же формализованные операции с ними. Это логический вывод и расчеты. Этот подход был хорош для задач *вычислимых*, позволяющих использовать формализованную базу данных и правила взаимодействия ее элементов.

Но для объемных, сложных и масштабных задач создание базы данных системы логического вывода стало неподъемной задачей, которая требовала, в частности, больших затрат человеческого труда по формализации данных и формированию обширной базы этих данных. Объемы данных, которые собирает человек за всю жизнь, формируя свою память, аналог базы данных машины, столь велики, и столь разнообразны, что формализовать их вряд ли удастся. Кроме того, никто и не возьмется за эту задачу. Поэтому подход, основанный на формальном логическом выводе, использующий формализацию данных может быть привлекательным лишь для частных задач. Например, таких задач, где может потребоваться высокая точность, где

можно использовать научные теории, где нужно обеспечить осознаваемую разработчиками вариабельность и, конечно, где расходы и время для создания таких программ будут приемлемыми.

Но мир всегда выбирает наиболее простой путь. Увлеченные создатели нейронных сетей, значительно увеличили число элементов-нейронов, доведя их численность до величин, сравнимых с человеческим разумом. Кроме того, нейронные сети успели обучить общению с человеком, дали возможность понимать машине человеческую речь. Нетрудно понять, как был сделан следующий шаг: машину связали с гигантским числом людей в любимой для человека развлекательной форме интерактивного общения.

И обнаружилось, что все эти люди занялись совершенно бесплатно, а то и за собственный счет обучать эти нейронные сети. Проблема обучения нейронных сетей получила мощный импульс развития. Кроме того, проблема переобучения оказалась не столь опасной, как она представлялась математикам и интеллектуалам. Неоднозначность решения ранее сдерживала процесс увеличения числа элементов нейронных систем. Но сейчас получение множества решений вместо одного единственного нисколько не волновала создателей гигантских нейронных сетей, связанных с громадной аудиторией. Прежде всего, они вряд ли осознавали важность требования единственности решения, а с другой стороны - человек всегда при разрешении своих проблем находит множество возможных сценариев поведения, из которых по наитию, по совету друга или телевизора, выбирает какое-то одно. Так что ничего страшного в проблеме переобучения в этом случае никто не увидел.

С развитием нейронных сетей, с качественным увеличением их элементной базы, усложнением их архитектуры, появилась возможность загрузить в память машины гигантское количество сценариев поведения, данных и вариантов решения частных задач, что полностью подобно тому, как человек сам осознает окружающий мир. В этом случае как у человека, так и у машины происходит выделение наиболее повторяющихся сценариев поведения и реакций, то есть формируется понимание мира, что позволяет более-менее адекватно реагировать на поставленные вопросы. Понятно, что такое знание остается неформализованным, не вполне осознанным, интуитивным, не есть результатом применения теорий, но зато полезно в жизни и в текущей деятельности.

Понятно также и то, что, задавая вопрос такой машине и человеку, можно столкнуться с тем, что решение это в принципе не вычислимо, не только потому, что не ясен способ расчета (то есть, неизвестен алгоритм), но и потому, что решение основано на выборе наиболее приемлемого (причем оценка этой приемлемости также не формализована) сценария среди массы ему подобных. Но и машина - здесь это конечно нейронная сеть, - и человек, тем не менее этот выбор ответа на эту невычислимую задачу сделают, с чем придется примириться. Подключая машину к большому числу людей, которые общаясь с ней ее обучают, можно спустя время, длительность которого обратно пропорциональна числу участников диалогов, обнаружить, что ее ответы стали мало отличимыми от ответов людей с ней общавшихся и ее тем самым обучавших.

Напомним, что вычислимые задачи – где есть исчислимое число вариантов, - осваиваются искусственным интеллектом с помощью машинного обучения. Программа AlphaZero за сутки освоила игры и превзошла человека. Невычислимые задачи решают иначе – обрабатывается и воспринимается громадное число данных. В результате получается уже осознание материала за счет оптимизации реакций и рефлексий, сравнения их на уровне больше-меньше - именно так формируется человеческое понимание. Это, например, реализовано в программе IBM Debater, где реакции программы подгоняли под реакции человека (тест Тьюринга). Конкурс с такой программой пока выиграл человек (Хариш Натараиан), но как полагали эксперты за счет недоступной машине эмоциональной подачи материала, а не научной строгости.

7. Каким станет Интернет? Semantic Web — это уже другой Интернет, где информация предварительно обрабатывается машинами. Традиционный Интернет основан на HTML-страницах, информация извлекается с помощью браузера самим пользователем. Семантическая же паутина использует возможности семантической сети, обрабатывая информацию программой-клиент и предоставляя пользователю результат логической обработки. Термин «семантическая паутина» был впервые введен Т. Дж. Бёрнерсом-Ли (май 2001 года, журнал «Scientific American») и был определен им как «следующий шаг в развитии Всемирной

паутины». В паутине могут использоваться подобные традиционным веб-сервисы, использующие программную логику. Пока эффективность использования специализированных веб-сервисов невелика из-за трудностей создания сервисно-ориентированной архитектуры и удаются пока только узкоспециализированные запросы на выбор сервисов.

Семантический Web объединит разные виды информации в единую структуру, где каждому смысловому элементу данных будет соответствовать специальный синтаксический блок (тэг). Интересная для нас сторона Семантического Web связана с направлениями, близкими к области искусственного интеллекта, то есть с использованием систем логического вывода и нейронных сетей большого масштаба.

Но есть проблема, на которую обратил наше внимание известный философ В. В. Шкода: «такие сети постепенно приведут к отказу от абстракций, знание будет принципиально иным, не похожим на теперешнее». Серьезной проблемой, возможно первое время, могут быть трудности обучения нейронных систем формальным описаниям, использованию абстракций, количественным расчетам, то чем оперирует наука. Увлечение же неформализованным искусственным интеллектом может еще больше отодвинуть науку на периферию общественного интереса, а значит приведет к снижению ее материального и финансового обеспечения.

ЛІТЕРАТУРА

1. Куклин В. М. Взгляд на будущее планетарной цивилизации. О пользе размышлений. *Universitate. Наука и просвещение: ХНУ. 2003. № 4 (16). С. 18 –22.*
2. Zadeh L. A., Lotfi A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control. 1965. Vol.8. P. 338 – 353; Fuzzy sets and systems. System Theory. Fox J, editor . Brooklyn. New York: Polytechnic Press, 1965. P. 29 – 39.*
3. Jang J.S.R. ANFIS: adaptive–network–based fuzzy inference system. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics. 1993. Vol.23, № 3. P.665 – 685.*

REFERENCES

1. Kuklin V.M. “A look at the future of planetary civilization. The benefits of thinking.” *Universitates. Science and education. KhNU, № 4 (16), 2003, P. 18 –22. [in Russian]*
2. Zadeh L. A., Lotfi A. Zadeh. “Fuzzy sets. Information and Control.” 1965. Vol.8. P. 338 – 353; *Fuzzy sets and systems. System Theory. Fox J, editor . Brooklyn. New York: Polytechnic Press, 1965, P. 29 – 39.*
3. Jang J.S.R. “ANFIS: adaptive–network–based fuzzy inference system.” *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics. Vol.23, № 3, 1993, P.665 – 685.*

Куклін Володимир Михайлович – доктор фізико-математичних наук, професор; завідувач кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: v.m.kuklin@karazin.ua; kuklinvm1@gmail.com ; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0310-1582>.

Kuklin Volodymyr M. PhD, Doctor of Science, Professor, Head of Department of Artificial Intelligence and Software V. N. Karazin National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, v.m.kuklin@karazin.ua; kuklinvm1@gmail.com ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0310-1582>.

Куклин Владимир Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедры искусственного интеллекта и программного обеспечения, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: v.m.kuklin@karazin.ua; kuklinvm1@gmail.com ; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0310-1582>

УДК 53.01

PACS numbers: 52.35.Mw; 47.35.Bb ;
47.55.pb; 68.35.B

О математических моделях описания параметрических и модуляционных неустойчивостей

В.М. Куклин

*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: kuklinvm1@gmail.com; v.m.kuklin@karazin.ua*

Рассмотрено развитие модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды. Модифицированная S-теория, ранее разработанная в работах В.Е. Захарова была использована для описания неустойчивых режимов. Отмечено, что вблизи порога неустойчивости самоподобная пространственная волновая структура может формироваться в разных масштабах. Вдали от порога нестабильность анализируется в модели высокоинтенсивного практически незатухающего океанического волнения, показан механизм формирования волн аномальной амплитуды. Обсуждаются режимы возбуждения параметрических неустойчивостей. Отмечено сходство в развитии модуляционной и параметрической неустойчивостей, однако есть и различия, связанные с характером динамики волновых пакетов неустойчивых возмущений. Характер параметрической неустойчивости связан с наличием высокочастотной, пространственно однородной составляющей одного или нескольких параметров среды. Поскольку волновое число таких высокочастотных колебаний равно нулю или чрезвычайно мало, по сравнению с характерными длинами системы, спектр неустойчивых возмущений также расположен симметрично, напоминая нестабильный спектр модуляционной неустойчивости. Однако растущие возмущения практически не движутся в пространстве. Вдали от порога параметрической нестабильности может формироваться сильная мелкомасштабная модуляция параметров окружающей среды, которая часто принимает характер процесса с обострением. Представлено формирование самоподобных пространственных структур в развитой конвекции тонкого слоя жидкости или газа вследствие развития модуляционной неустойчивости. Тороидальные конвекционные вихри создают полоидальные вихри большого масштаба - эффект гидродинамического динамо. Представлены экспериментальные результаты исследования самоподобных структур на графите.

Ключевые слова: модуляционные и параметрические неустойчивости, самоподобные волновые структуры, волны аномальной амплитуды, мелкомасштабная модуляция параметрических процессов.

Розглянуто розвиток модуляційної нестійкості хвилі великої амплітуди. Модифікована S-теорія, раніше розроблена в роботах В.Є. Захарова була використана для опису нестійких режимів. Відзначено, що поблизу порогу нестійкості самоподібна просторова хвильова структура може формуватися в різних масштабах. Далеко від порога нестабільність аналізується в моделі високоінтенсивного практично невщухаючого океанічного хвилювання, де показаний механізм формування хвилі аномальної амплітуди. Обговорюються режими збудження параметричних нестійкостей. Відзначено схожість у розвитку модуляційної і параметричної нестійкостей, проте є і відмінності, пов'язані з характером динаміки хвильових пакетів нестійких збурень. Характер параметричної нестійкості пов'язаний з наявністю високочастотної, просторово однорідної складової одного або декількох параметрів середовища. Оскільки хвильове число таких високочастотних коливань дорівнює нулю або надзвичайно мало, в порівнянні з характерними довжинами системи, спектр нестійких збурень також розташований симетрично, нагадуючи нестабільний спектр модуляційної нестійкості. Однак зростаючі обурення практично не рухаються в просторі. Далеко від порогу параметричної нестабільності може формуватися сильна дрібномасштабна модуляція параметрів середовища, яка часто приймає характер процесу з загостренням. Характер самоузгоджених параметричних нестійкостей аналогічний процесам модуляційної нестійкості. Представлено формування самоподібних просторових структур в розвиненому конвекції тонкого шару рідини або газу внаслідок розвитку модуляційної нестійкості. Тороїдальні конвекційні вихори створюють полоїдальним вихори великого масштабу - ефект гідродинамічного динамо. Представлені експериментальні результати дослідження самоподібних структур на графіті.

Ключові слова: модуляційні і параметричні нестійкості, самоподібні хвильові структури, хвилі аномальної амплітуди, дрібномасштабна модуляція параметричних процесів.

The development of modulation instability of a finite amplitude wave is considered. A modified S-theory, previously developed in the works of V. Ye. Zakharov, was used to describe unstable modes. It is noted that near the instability threshold a self-similar spatial wave structure can form at different scales. The dynamics of the instability is analyzed in a model of a high intensity practically undamped oceanic wave, the mechanism of the formation of anomalous amplitude waves is shown. The modes of excitation of parametric instabilities are discussed. It is noted, that there is a similarity in the development of modulation and parametric instabilities, however there are also differences related to the nature of the dynamics of the wave packets of unstable perturbations. The nature of parametric instabilities is associated with the presence of a high-frequency, spatially homogeneous component of one or more parameters of the medium. Since the wave number of such HF oscillations is zero, or extremely small, in comparison with the characteristic lengths of the system, the spectrum of unstable disturbances is also located symmetrically, resembling the unstable spectrum of modulation instability. However, the growing perturbations practically do not move in space. Far from the threshold of parametric instability, a strong small-scale modulation of environmental parameters can form, which often takes on the character of a process with aggravation. The formation of self-

similar spatial structures in the developed convection of a thin liquid or gas layer due to the development of modulation instability. The toroidal convection vortices generate poloidal vortices of large scale - the effect of a hydrodynamic dynamo and the experimental results of the investigation self-similar structures on the graphite are presented. The nature of self-consistent parametric instabilities is similar to the processes of modulation instability.

Keywords: modulation and parametric instabilities, self-similar wave structures, waves of anomalous amplitude, small-scale modulation of parametric processes.

Модуляционные неустойчивости. Как известно, монохроматическая волна конечной амплитуды $A(x, t) \cdot \exp\{i\omega t - ikx\}$ в средах с наиболее распространенным видом локальной кубической нелинейности, например,

$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot \vec{k}^2 + \alpha \cdot |A|^2, \quad (1)$$

оказывается неустойчивой с возбуждением двух симметричных или несимметричных спектров волновых возмущений в окрестности своего волнового числа [1-4]. Уравнение Лайтхилла (часто называемое НУШ), описывающее медленную эволюцию огибающей колебаний в этих условиях принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\delta A - i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - iA |A|^2 + g, \quad (2)$$

где δ – декремент поглощения и g – внешний источник волновой энергии. Опираясь на учет лишь двух диаграмм взаимодействия, а именно

$$2\omega_0 = \omega(k) + \omega(-k) \quad (3)$$

и

$$\omega(k) + \omega(-k) = \omega(k') + \omega(-k'), \quad (4)$$

где ω_0 - частота основной волны, были сформулированы подходы к описанию нелинейной стадии модуляционной неустойчивости, что в дальнейшем получило название S-теории [5]. Хотя для корректного описания отдельных волн пакетов пришлось уравнения S-теории несколько модифицировать [6].

В случае большого уровня поглощения волновой энергии в среде и при наличии источника, который поддерживает интенсивность основной волны, возникают условия для формирования узких спектров, практически линейчатого спектра модулированной волны, что приводит к высокой пространственной четкости возникающей крупномасштабной модуляции. Модуляция основной волны происходит на значительно большем масштабе. Замечательным явлением, обнаруженным в работах [7,8], стало формирование самоподобных структур. Причина их появления - каскады следующих крупномасштабных модуляционных неустойчивостей, возникающих в условиях формирования линейчатых спектров модулированных волн.

Далеко от порога модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды, возбуждаемые моды формируют волновые пакеты, представляющие собой наборы стоячих волн, которые смещаются навстречу друг другу, формируя огибающую, амплитуда которой в случае плоских волновых фронтов в три раза превосходить среднюю амплитуду основной волны [9].

Поверхностные волны большой амплитуды на поверхности морей и океанов (которые называют гравитационными) вдали от берегов в регионах, где развито судоходство, могут оказаться опасными. Для частоты и волнового вектора этих волн справедливо выражение

$$\omega = \sqrt{g \cdot k} \cdot \{1 + |A|^2 k^2 / 2\} \quad (5)$$

здесь амплитуда отклонений поверхности воды равна A , для скорости волны и ускорения свободного падения использованы обозначения W и g . Следует обратить внимание на сравнительно небольшую ширину спектра этих волн. Именно поэтому уравнение для комплексной медленной меняющейся (здесь исключена зависимость $\propto \exp\{-i\omega_0 t\} = \exp\{-igk_0 t\}$) амплитуды поля $k_0 + K$ пространственной моды представляется в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_K}{\partial t} &= -\delta A_K - i(\sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0})A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \{|A|^2 A\}_K = \\
&= -\delta A_K - i(\sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0})A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot \\
&\cdot \{A_K [2|A_0|^2 + 2 \sum_{K' \neq K, 0} |A_{K'}|^2 + |A_K|^2] + A_{-K}^* \{A_0^2 + \sum_{K' \neq K, 0} A_{K'} \cdot A_{-K'}\}\},
\end{aligned} \tag{6}$$

Вид этого волнового пакета неустойчивых возмущений обнаружен как при рассмотрении динамики модуляционной неустойчивости [9], так и при поиске методами обратной задачи автомодельных решений волнового движения конечной амплитуды в консервативной среде [10], что подтвердили эксперименты [11]. При искажении волновых фронтов, возможен еще больший рост амплитуды огибающей [12], что согласуется с наблюдениями и экспериментами. Таким образом особенности динамики модуляционной неустойчивости связаны с характером развития возмущений разного масштаба, которые формируют или линейчатые спектры в среде с большим уровнем поглощения волновой энергии и соответственно самоподобные структуры, или в условиях почти консервативных сред короткоживущие возмущения аномальной амплитуды [9].

Другие виды модуляции периодических структур. Модуляционная неустойчивость регулярной пространственной структуры может возникнуть и в неволновых средах. Например, возможна модуляционная неустойчивость системы конвективных ячеек в рамках описания чрезвычайно продуктивной модели Проктора-Сивашинского-Письмена. Подобная модуляция системы конвективных ячеек (тороидальные вихри) возникает между недостаточно хорошо проводящими тепло горизонтальными стенками и определяется возникновением полоидальных вихревых движений. Результатом модуляционной неустойчивости системы конвективных ячеек также является формирование плоских полоидальных вихрей значительно большего масштаба [6]. Другими словами, это эффект гидродинамического (вихревого) динамо [9]. Для его возникновения, как полагал еще профессор Моисеев С.С., не обязательно должна существовать нескомпенсированная спиральность и вполне возможна регулярная динамика развития такого процесса. Таким образом при модуляционной неустойчивости системы развитых конвективных ячеек не только появляется самоподобная структура – конвективные ячейки разного масштаба, но и формируется крупномасштабный полоидальный вихрь. Высокая пространственная четкость вихревых структур определялась небольшим превышением порога обсуждаемых неустойчивостей, которые формировали линейчатые спектры, обеспечивающие развитие последующих каскадов процессов.

Каждая структура кристалла как в объеме, так и на поверхности, возникает в результате процесса упорядочения при фазовых переходах. Это формально является первичным процессом, который характеризуется некоторым характерным временем и насыщающей нелинейностью. Нелинейность связана с отклонением от равновесия однородной системы атомов или молекул, где взаимодействия важны лишь между ближайшими их соседями. Ибо остальные дальние взаимодействия достаточно слабы и в первичном процессе себя заметно не проявляют. Система в целом чувствительна к напряжениям и перегревам, а вынос энергии обусловленный упругими волнами-фононами, определяет значительное ослабление любых возмущений. Нелинейность обычно кубическая по амплитуде возмущений, именно из-за ослабления дальних взаимодействий.

Но кроме основного процесса упорядочения, который формирует первичную систему, возможны вторичные неустойчивости, более слабые, которые могут только исказить возникшую структуру. Они проявляют себя уже после завершения формирования периодической системы кристаллов. Поверхность кристалла имеет несколько иную структуру, отличную от той, которая формируется в объеме. Возмущения поверхности также могут быть периодическими, причем наблюдается подобие между микроструктурой на уровне элементарных ячеек и масштабными возмущениями поверхности.

Хорошо исследованы крупномасштабные ромбовидные регулярные образования на поверхности монокристалла кремния (так называемая, "7×7 ячейка". Здесь можно увидеть дюжину возмущений электронной плотности, которые отвечают положениям отдельных атомов.

Эксперименты с помощью сканирующего микроскопа, которые обсуждаются в книге [9], показали, что на поверхности образцов графита можно увидеть периодическую модуляцию (гофрировку) электронной плотности, с коэффициентом подобия равном десяти или ста, что

отвечает разным видам внутренней структуры графита. Однако, в отличие от предыдущих исследований здесь наблюдается вертикальная гофрировка, причем в первом случае подобие крупномасштабной модуляции как в горизонтальном, так и в вертикальном направлении с элементарной ячейкой на поверхности образцов полное.

Параметрические неустойчивости. Природа параметрических неустойчивостей связана с наличием высокочастотной составляющей у одного или нескольких параметров среды. При этом возможен рост амплитуды низкочастотных волн или возмущений. Обычно рассматривают однородные в пространстве и осциллирующие во времени высокочастотные возмущения параметров среды.

Причиной таких осцилляций могут быть интенсивные однородные в пространстве переменные поля. Так как волновое число таких ВЧ колебаний равно нулю, или чрезвычайно мало, в сравнении с характерными длинами системы, то спектр ВЧ и НЧ неустойчивых возмущений располагается также симметрично, напоминая нестабильный спектр модуляционной неустойчивости. Однако растущие возмущения практически не перемещаются в пространстве. Вблизи порога неустойчивости в нелинейном режиме также могут формироваться узкие спектральные линии и анализ устойчивости такого нелинейного решения подобен обсуждаемой выше околопороговой модуляционной неустойчивости.

Вдали от порога параметрической неустойчивости может формироваться сильная мелкомасштабная модуляция параметров среды, которая часто приобретает характер процесса с обострением. На это явление обратил внимание В. Е. Захаров, обнаруживший такие режимы при распаде однородных в пространстве ленгмюровских колебаний в двухкомпонентной неизотермической плазме [13].

Плотность энергии поля при этом предполагалась много меньше плотности тепловой энергии электронов (а ионы считались холодными). Выбор такого вида поля объяснялся значительными длинами ленгмюровских волн, возбуждаемых в плазменных приборах корпускулярными и лазерными потоками. В сравнении с характерными размерами задач, длины этих ленгмюровских волн были весьма значительными и как представлялось физикам, поле этих колебания можно было считать пространственно однородным. Наличие каверн плотности плазмы позволяло говорить о модуляции ее плотности, поэтому процесс распада мощного ленгмюровского поля в неизотермической плазме с легкой руки В. Е. Захарова был назван «модуляционной неустойчивостью ленгмюровских колебаний». Более строгое рассмотрение распада однородного мощного ленгмюровского поля, но для случая холодной плазмы (физически это соответствует случаю, когда плотность энергии поля была много больше тепловой энергии электронов плазмы) было проведено В. П. Силиным и его коллегами [14-15]. Этот процесс обоснованно был назван «параметрической неустойчивостью ленгмюровских колебаний». Так как формально описания В. Е. Захарова и В. П. Силина отвечали случаям параметрического распада интенсивных однородных в пространстве ленгмюровских колебаний, то из нелинейных уравнений В. П. Силина, которые были обобщены в работах [16-17] можно было без труда получить уравнения В. Е. Захарова, по крайней мере в одномерном случае [18].

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E + \frac{\omega_{pe}}{32Mc_s^2 n_0} |E|^2 E = 0. \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} + c_s^2 \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} = \frac{1}{16\pi M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2. \quad (8)$$

где ω_{pe} - частота ленгмюровской волны, v_{Te} - тепловая скорость электронов и c_s - скорость звука, M - масса иона, n_0 - плотность плазмы.

Следует отметить, что параметрические неустойчивости, рассматриваемые в плазме, традиционно являются самосогласованными, в отличие например уравнения Матъе или Хилла, где учет обратного воздействия на источник осцилляций параметров среды не проводится.

Выбор В. Е. Захаровым названия заведомо параметрической неустойчивости как модуляционной был связан лишь с последствиями ее развития, ибо рассмотренный им с коллегами ранее случай воздействия однородного магнитного поля на материал, где возбуждались спиновые волны, был корректно назван «параллельной накачкой или параметрическим возбуждением спиновых волн» [5].

Появление глубоких каверн плотности плазмы было способно приводить к быстрому нагреву плазмы, как поначалу полагали за счет затухания Ландау [19]. Это обстоятельство привело к обилию исследований как теоретических, так и экспериментальных, причем последние подтвердили эффективность такого нагрева. Однако, формирование большого числа каверн при более корректном теоретическом описании ионов частицами, правда лишь в одномерном случае, приводило к формированию Максвелловского распределения частиц по скоростям за счет рассеяния их на неоднородностях поля, то есть механизмом термализации, по крайней мере ионов [18], оказался эффект Ферми.

Процессы, описываемые в моделях В.Е. Захарова и В.П. Силина описания параметрических неустойчивостей ленгмюровских волн конечной амплитуды подобны, что закономерно, ибо уравнения модели Захарова, могут быть получены из уравнений модели Силина при уменьшении интенсивности поля ленгмюровской волны и при учете температуры электронов.

С уменьшением затухания ВЧ мод функция распределения ионов все меньше отличается от Максвелловской, что позволяет говорить о температуре ионов, причем в модели Силина процесс неустойчивости характеризуется наличием большой доли быстрых частиц.

ЛІТЕРАТУРА

1. Lighthill M.J. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system. *J.Inst. Math. Appl.*, 1965. Vol.1, No.2. P.269–306.
2. Silin V.P. Parametric resonance in plasma. *ЖЭТФ*. 1965. Vol. 48, No.6. P. 1679–1691.
3. Zakharov V.E. Stability of nonlinear waves in dispersive media. *J Teor. Prikl.Fiz.* 1966. Vol. 51. P. 668–671.
4. Benjamin T.B., Feir J.E. The disintegration of wave trains on deep water. *J. Fluid Mech.* 1967. Vol.27. P. 417–430.
5. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения :УФН. 1974. Т.114, №.4. С.609–654.
6. Куклин В.М. Роль поглинання та дисипації енергії у формуванні просторових нелінійних структур у нерівноважних середовищах. *УФЖ. Огляди*. 2004. Т. 1, № 1. С. 49–81.
7. Куклина О.В., Киричок А.В., Куклин В.М. Динамика формирования самоподобных структур в нелинейных волновых диссипативных средах с нераспадным спектром. *The Journal of Kharkiv National University, physical series "Nuclei, Particles, Fields"*. 2001. №541, Iss.4(16). P.73–76.
8. Куклин В.М., Киричок А.В., Куклина О.В. О механизмах образования самоподобных структур в неравновесной сплошной среде . *Вопросы атомной науки и техники. (ВАНТ). - Сер. Плазменная электроника и новые методы ускорения*. 2000. № 1. С. 222–224.
9. Куклин В. М. Избранные главы (теоретическая физика). Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2018. 224с.
10. Akhmediev N., Korneev V. Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear Schrodinger equation. *Theoretical and Mathematical Physics*. 69 (2). 1986. P. 1089–1093.
11. Chabchoub A., Hoffmann N., Akhmediev N. Rogue wave observation in a water wave tank. *Physical Review Letters*. 106 (20) (2011) 204502.
12. McAllister M.I., Draycott S., Adcock T.A.A., Taylor P.H. and van den Bremer/V.860. 10 February. 2019. P. 767–786.
13. Захаров В.Е. Коллапс ленгмюровских волн: ЖЭТФ, 1972. Т. 62, № 5. С. 1745–1759.
14. Силин В.П. Параметрический резонанс в плазме: ЖЭТФ, 1965. Т. 48. 1679 с.
15. Силин В.П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М.: Наука, 1973. 287 с.
16. Chernousenko V. V, Kuklin V.M., Panchenko I.P. The structure in nonequilibrium media. In book: *The integrability and kinetic equations for solitons*. AN USSR, ITPh. K. Nauk. Dumka. 1990. 472 с.
17. Куклин В.М., Севидов С.М. К нелинейной теории устойчивости интенсивных колебаний холодной плазмы. *Физика плазмы*. 1988. Т. 14, № 10. С. 1180–1185.
18. Загородний А. Г., Киричок А. В., Куклин В. М. Одномерные модели модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме на основе уравнений Захарова и Силина. *УФН*. 2016. Т. 186, №7. С. 743–762.
19. Захаров В.Е. и др. Кинетика трехмерного ленгмюровского коллапса: ЖЭТФ, 1989. Т. 96, № 4. 591 с.

REFERENCES

1. Lighthill M.J. “Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system”. J.Inst. Math. Appl., Vol.1, No.2. P.269-306, 1965.
2. Silin V.P. “Parametric resonance in plasma”, JETP., Vol. 48, No.6, 1965, P. 1679-1691.
3. Zakharov V.E. “Stability of nonlinear waves in dispersive media”, J Teor. Prikl.Fiz, Vol. 51, P. 668-671, 1966,
4. Benjamin T.B., Feir J.E. “The disintegration of wave trains on deep water”, J. Fluid Mech., Vol.27, P. 417-430, 1967.
5. Zakharov V.E., Lvov V.S., Starobinets S.S. “Turbulence of spin waves beyond the threshold of their parametric excitation”, UFN, - T.114, No.4, pp.609-654. 1974.[in Russian]
6. Kuklin V.M. “The role of the discrepancy of energy in formulating large-scale non-linear structures in the new medium means”, UPhZ. Review, V. 1, № 1, pp. 49-81, 2004, [in Ukrainian]
7. Kuklina O.V., Kirichok A.V., Kuklin V.M. “Dynamics of the formation of self-similar structures in nonlinear wave dissipative media with a non-decay spectrum”, *The Journal of Kharkiv National University, physical series “Nuclei, Particles, Fields”*, №541. Iss.4 (16), pp. 73–76, 2001. [in Russian]
8. Kuklin V.M., Kirichok A.V., Kuklina O.V. “On the mechanisms of formation of self-similar structures in a nonequilibrium continuous medium”, *Problems of Atomic Science and Technology. Ser. Plasma electronics and new acceleration methods*. № 1, p. 222–224, 2000. [in Russian]
9. Kuklin V. M. *Selected chapters (theoretical physics)*. Kh.:VN Karazin KNU, 2018. 224 P. [in Russian]
10. Akhmediev N., Korneev V. “Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear Schrodinger equation”, *Theoretical and Mathematical Physics* 69 (2), 1089–1093, 1986.
11. Chabchoub A., Hoffmann N., Akhmediev N. “Rogue wave observation in a water wave tank”, *Physical Review Letters*, 106 (20), 204502, 2011.
12. McAllister M.I., Draycott S., Adcock T.A.A., Taylor P.H. and van den Bremer, V.860. 10, pp. 767-786, February 2019.
13. Zakharov V.E. “Collapse of Langmuir Waves”, JETP. V. 62. № 5, P. 1745-1759, 1972. [in Russian]
14. Silin V.P. *Parametric resonance in plasma*, JETP. 1965. T. 48. p. 1679. [in Russian]
15. Silin V.P. Parametric effect of high power radiation on the plasma. M., Science, 287с. 1973. [in Russian]
16. Chernousenko V. V, Kuklin V.M., Panchenko I.P. The structure in nonequilibrium media. In book: *The integrability and kinetic equations for solitons*, AN USSR, ITPh. K. Nauk. Dumka. – С. 472. 1990.
17. Kuklin V.M., Sevidov S.M. “On the nonlinear theory of the stability of intense oscillations of a cold plasma”, *Plasma Physics*, V. 14, № 10, P. 1180-1185, 1988. [in Russian]
18. Zagorodnii, AG, Kirichok, AV, Kuklin, VM, “One-Dimensional Models of the Modulation Instability of Intense Langmuir Oscillations in a Plasma Based on the Zakharov and Silin Equations”, UFN., V. 186, №7, p. 743–762, 2016. [in Russian]
19. Zakharov B.E. et al., *Kinetics of Three-Dimensional Langmuir Collapse*, JETP, T. 96, № 4, p. 591, 1989. [in Russian]

Куклін Володимир Михайлович – доктор фізико-математичних наук, професор; завідувач кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: v.m.kuklin@karazin.ua; kuklinvm1@gmail.com ; ORCID: 0000-0002-0310-1582.

Kuklin Volodymyr M. PhD, Doctor of Science, Professor, Head of Department of Artificial Intelligence and Software V. N. Karazin National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, v.m.kuklin@karazin.ua; kuklinvm1@gmail.com ORCID: 0000-0002-0310-1582.

Куклин Владимир Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедры искусственного интеллекта и программного обеспечения, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: v.m.kuklin@karazin.ua; kuklinvm1@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0310-1582.

УДК 004.942:519.6

Modeling the influence of electron beam energy distribution on quality of radiation processing

V.T. Lazurik¹, V.M. Lazurik¹, G. Popov¹, Z. Zimek²¹V.N. Karasin Kharkiv National University Svobody Sq. 4, 61022, Kharkov, Ukraine²Institute of Nuclear Chemistry and Technology Ul. Dorodna 16, 03-195, Warsaw, Poland

E-mail: lazurik@hotmail.com

The obtained values of most probable energy and practical range have been compared to values calculated according to the formula proposed by the internationally recognized documents. The presented results of the study are focused on the issue of the influence of electron beam energy spread on the depth dose distribution and practical range of electron beam in the irradiated material. The computational experiments have been performed using the Monte-Carlo simulation method for modeling the electron beam energy spectra and depth dose distributions of electrons in aluminum target. Obtained values of most probable energy E_p and practical range R_p have been compared to the values calculated according to formula proposed by the internationally recognized report. The value of a practical range of electrons R_p strongly depends on electron beam energy spread, even in case when value of most probable energy E_p of electrons in the beam is unchanged. Results of computer experiments show that in case of a large energy spread, and presence of asymmetry of electron energy distribution, the electrons energy can't be determined properly by empirical formulas included to the international standards.

Keywords: Monte-Carlo simulation, computational experiments, modeling of beam energy spread, depth-dose distribution, radiation processing.

Зміни енергетичного розподілу електронного пучка мають певний вплив на техніко-економічні параметри обробки випромінюванням об'ємних полімерних пристроїв. Щоденна відтворюваність розподілу енергії електронів може погіршитися з кількох різних причин, таких як погана якість експлуатації, вплив зовнішньої температури на параметри прискорювача, слабка або погана якість компонентів, відповідальних за процес прискорення електронів. Слід також зауважити, що в даний час, розподіл енергії електронного пучка на радіаційно-технологічних лініях, не вимірюється. Тому, проведення досліджень впливу розподілу енергії електронного пучка на розподіл глибинних доз в опромінену продукцію є актуальною науково-практичною задачею щодо радіаційних технологій. Наведено результати дослідження, присвячені питанню впливу енергетичного розподілу пучка електронів на розподіл глибинних доз і практичного пробігу електронного пучка в опромінену матеріалі. Отримані значення найбільш ймовірної енергії електронного пучка E_p та практичного пробігу електронів R_p порівнювали зі значеннями, розрахованими за формулою, запропонованою у міжнародних стандартах. Обчислювальні експерименти виконувалися з використанням методу Монте-Карло при моделюванні спектрів електронного пучка та глибинних розподілів доз електронів в алюмінієвих мішенях. Значення практичного пробігу електронів R_p сильно залежить від енергетичного розподілу електронного пучка навіть у випадку, коли значення найбільш ймовірної енергії E_p електронів в пучку незмінно. Проведена серія комп'ютерних експериментів з виявлення впливу асиметрії енергетичного розподілу електронного пучка на розподіл глибинних доз. Результати комп'ютерних експериментів показують, що в разі великого розкиду енергії електронів в пучку та наявності асиметрії в розподілі енергії електронів, стандартні характеристики енергії електронів не можуть бути визначені за допомогою емпіричних співвідношень, представлених в міжнародних стандартах.

Ключові слова: моделювання за методом Монте-Карло, обчислювальні експерименти, моделювання розподілу енергії пучка, розподіл глибинних доз, обробка радіацією.

Полученные значения наиболее вероятной энергии электронов в пучке и практического пробега электронов были сопоставлены с значениями, рассчитанными по формулам, предложенным в международных стандартах. Представлены результаты исследований влияния разброса энергии электронного пучка на распределение глубинной дозы и величины практического пробега электронов в облучаемом материале. Вычислительные эксперименты по моделированию энергетических спектров электронного пучка и распределений дозы электронов по глубине в алюминиевой мишени проводились с использованием метода Монте-Карло. Полученные значения наиболее вероятной энергии E_p электронов и практического пробега электронов R_p сопоставлены с значениями, рассчитанными по формулам, предложенным в международных стандартах. Значение практического пробега электронов R_p сильно зависит от разброса энергии электронного пучка, даже в том случае, когда значение наиболее вероятной энергии E_p электронов в пучке не изменяется. Результаты компьютерных экспериментов показывают, что в случае большого разброса энергии электронов в пучке и наличия асимметрии в распределении энергии электронов, стандартные характеристики энергии электронов не могут быть определены с помощью эмпирических соотношений, представленных в международных стандартах.

Ключевые слова: моделирование методом Монте-Карло, вычислительные эксперименты, моделирование распределений энергии пучка, распределение дозы по глубине, обработка излучением.

1. Introduction

Electron beam energy spread variation may have some influence on technical and economical parameters of radiation processing of bulk polymer devices. High energy electron accelerators powered

by magnetron type of RF source are frequently used in radiation sterilization process [1]. Such device implementation in accelerator may lead to relatively high instability of electron energy and electron energy spread [2]. As an example, Fig.1 shows spectra of electrons in electron beam accelerator in Warsaw, Poland [3].

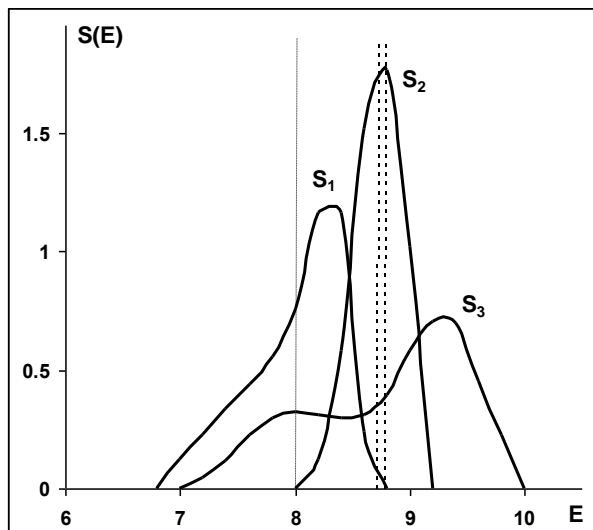


Fig. 1. Spectra of electrons $S(E)$ for different accelerator parameters (S_1 – magnetron RF source average current: 600 mA; pulse current of electron gun: 400 mA, and respectively: S_2 – 700 mA; 500 mA, S_3 – 550 mA; 300 mA)

Day-to-day reproducibility of electron energy and energy spread may be deteriorated by several different reasons like bad quality exploitation, influence of outside temperature on accelerator parameters, weak or bad quality components responsible for electron accelerating process. It should be also noticed that electron beam energy spread is not currently measured in radiation facilities.

The variation of electron energy spread in sterilization facility was investigated with application of computational method for determination of e-beam energy on the base of two-parametric fitting depth dose distribution curve [4,5]. Method can effectively consider electron energy spread value influence on experimental data obtained by the use of aluminum wedge with a continuous polymer strip of dosimetry film [6]. The total effect corresponds to energy losses in accelerator output window, distance between window and irradiated material surface and initial energy spread of electron beam. The e-beam energy losses due to window and air presence are constant for certain electron energy level and specific geometry of irradiation zone. Those energy losses can be estimated on the base of existing literature data [7]. Therefore initial e-beam energy spread and its variation can be evaluated by processing the depth dose distribution data connected to R_p (practical range) measurements by two-parametric fitting method. The practical range R_p is defined as the depth where extrapolated straight line plotted through the steepest section of electron depth dose curve meets the depth. It should be noticed that influence of electron energy spread on conditions of radiation processing were investigated experimentally long time ago [2]. The following conclusions were formulated: information about the energy spectrum of electron beam is necessary for proper general description but it is less essential for the given radiation installation. The presence of energy spectrum in electron beam can change intensity of the scanned electron beam, what should be considered by suitable arrangement of a beam scanning device.

Paper objective is related to investigating the influence of e-beam energy spread on the depth dose distribution within an irradiated product. The following investigation methods have been applied:

- Computational experiments with e-beams of different spectra; selection of mathematical models of the e-beam spectra and determining the sets of spectrum for performing the numerical investigations;
- Modeling the depth dose distribution of electron radiation in an aluminum target with Monte-Carlo method based on detailed physical model covered by RT-Office software [8];
- Processing of computer experiments results with standard methods, that is used in the electron radiation dosimetry with techniques of dosimetry wedge;

- Procedures described in “Radiation dosimetry: electron beams with energies between 1 and 50 MeV” [7, 9];
- Comparison results of the computer experiments to identify the characteristics dose distributions dependency from the model parameters of the e-beam spectra.

2. Models of the energy spread of electrons used in the numerical investigations

The depth dose distribution initiated by e-beam with energy spread in aluminum has been investigated. Dose distribution can be described by the formula:

$$D_M(x) = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} S(E) \cdot D_M(x, E) dE \quad (1)$$

Where: $S(E)$ – electron beam energy spectrum,

$D_M(x)$ – depth dose distribution of electrons radiation in material **M**,

$D_M(x, E)$ – depth dose distribution in material **M** irradiated by monoenergetic electron beam with energy **E**.

The numerical studies have been performed for which uniform and triangular probabilities of energy distribution have been used to describe the spectrum of electrons. The spectrum of the model with uniform distribution of the electron energy has been defined by two parameters: E_{\min} (minimum) and E_{\max} (maximum) value of the energy of electrons within the beam. The spectrum in the model of the triangular distribution of electron energies has been defined by three parameters: E_{\min} and E_{\max} as in the previous case and E_p the most probable value of the electrons energy in the beam. The most probably energy E_p is defined as an energy at which electron energy spectrum curve has the maximum. Physical quantities with the stochastic nature, such as the electrons spectrum or the angular distribution of the electrons (the terms of probability theory) have been used for description. For example, when the electron energy in the beam is a random variable, the energy spread of the electrons (the term in physics electron spectrum) describes the density function of the random variable probability. Herewith, the value E_p is called the mode of the probability density of a random variable.

The notation $S(E_{\min}, E_{\max})$ has been introduced for describing the model spectra of uniform electron energy distribution. The notation $S(E_{\min}, E_p, E_{\max})$ has been applied for the triple parameters, describing the triangle distribution of electron energy spectrum. According to the abovementioned notations, the expression $S(10,10)$ or $S(10,10,10)$ describes a mono-energetic electron beam with energy 10 MeV energy in the model of uniform or triangular electron energy distribution in the beam.

As an example, Fig.2 shows electron spectra for uniform and triangular models of the electron energy distribution in the beam. The dashed curve shows the spectrum of electrons in a symmetrical pattern of the triangular electron energy distribution. Examples of entries symmetric $S(6,8,10)$ and asymmetric $S(6,10,10)$ spectra of electrons in the beam can be noticed.

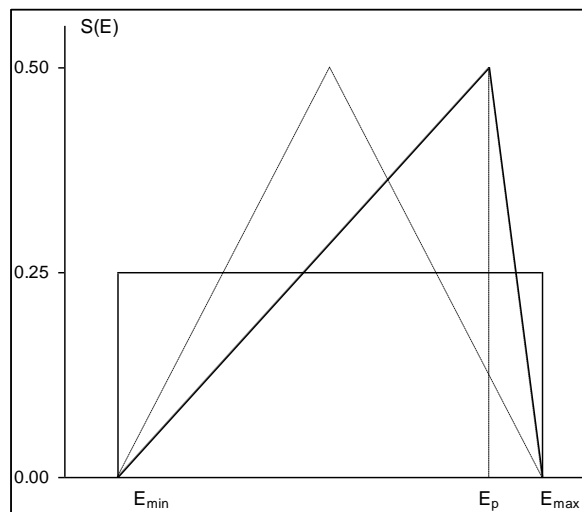


Fig. 2. Models of the electron beam spectrum: uniform and triangular distributions of the electron energy.

The ratios for the mean value $M(\xi)$ and variance $D^2(\xi)$ of the random variable ξ having a uniform probability distribution:

$$M(\xi) = (E_{\min} + E_{\max}) / 2 \quad (2)$$

$$D^2(\xi) = (E_{\max} - E_{\min})^2 / 12 \quad (3)$$

For a triangular probability distribution:

$$M(\xi) = (E_{\min} + E_p + E_{\max}) / 3 \quad (4)$$

$$D^2(\xi) = ((E_{\min}^2 + E_p^2 + E_{\max}^2) - (E_{\min} \cdot E_p + E_p \cdot E_{\max} + E_{\min} \cdot E_{\max})) / 18 \quad (5)$$

3. Computer experiments

The first series of computer experiments have been performed for studying possibility of calculating the most probable energy of electrons beam E_p with using the value of practical range R_p of electrons [7, 9]. The value of practical range R_p of the electrons has been determined by measuring the depth dose distribution results in a standard dosimetry device (aluminum dosimetry wedge). Determining the value of the most probable electron energy E_p in this particular model is out of interest, since the triangle electron energy distribution of the beam defines its value (Fig. 2).

A set of model spectra of electrons has been selected with different energy spread for performing the numerical experiments with the fixed (the same) most probable energy of the electrons in the beam $E_p = 10$ MeV. Fig. 3 presents examples of the spectra in this set.

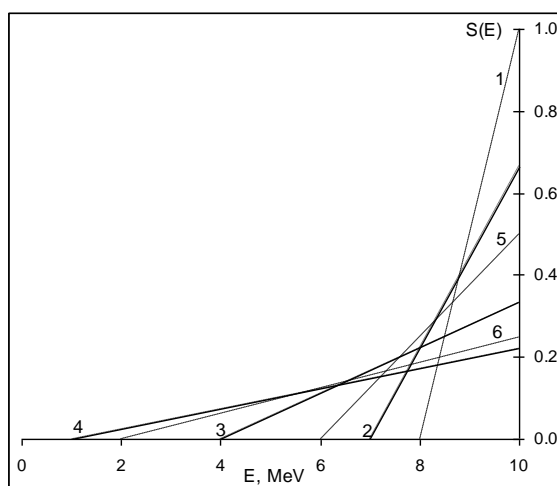


Fig. 3. Electrons spectra in the model of triangular distribution the electrons energy with different energy spread, but with fixed the most probably energy of the electrons in the beam ($E_p = 10$ MeV)

Table 1. Parameters and integral characteristics of the model distributions of electron energy E in beam.

Name	S(a,b,c)	$M(E)$	$D^2(E)$	$\sigma(E)$
S0	(10,10,10)	10.00	0.000	0.000
S1	(8,10,10)	9.33	0.222	0.471
S2	(7,10,10)	9.00	0.500	0.707
S3	(4,10,10)	8.00	2.000	1.414
S4	(1,10,10)	7.00	4.500	2.121
S5	(6,10,10)	8.67	0.889	0.943
S6	(2,10,10)	7.33	3.556	1.886

Table 1 show the main integrated characteristics of the model spectra of electrons which have been used for the first series of numerical experiments. The column “Name” contains the symbols spectrum instance, column “S(a, b, c)” model parameters, “ $M(E)$ ” (mean values), “ $D^2(E)$ ” (dispersion) and “ $\sigma(E)$ ” (variance and standard deviation) of the electron energy distribution within the beam.

Calculations of depth dose distributions of electron radiation in an aluminum target have been performed according to Monte Carlo method according to detailed physical model applied at RT-Office software [8]. Calculations have been performed with mono-energetic electrons beam (energy 10 MeV) and electron beams with different energy spread, which are shown in Fig. 3 and presented in Table 1. Some results calculations of the depth dose distributions of electron radiation are shown in Fig. 4. Irradiation has been performed by mono-energetic electron beam (with energy 10 MeV) and electron beams with different energy spread (spectra are shown in Fig. 3 with solid lines marked: 2, 3 and 4).

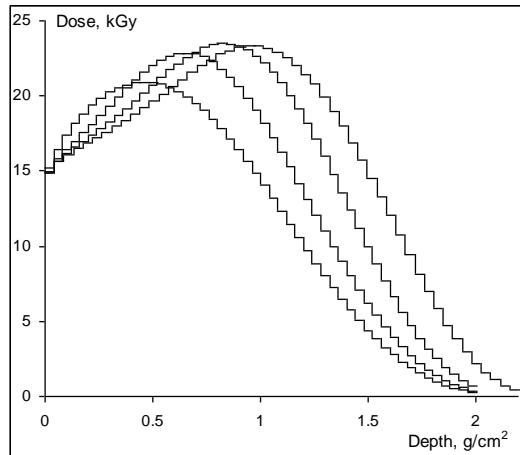


Fig. 4. Depth dose distributions in aluminum target irradiated by electron beams with different energy spread.

4. Results calculation and discussion

Fig. 5 shows smooth curves, drawn through the middle of the histogram cell, shown at Fig. 4. The points (open circles) in the middle of the histogram have been selected for the calculation of the practical range R_p of the electrons with the linear approximation method (lines passing through the points). As it can be seen at Fig. 5 the depth dose distributions are strongly modified for different value of by electrons energy spread within the beam. To assess the possibility of determination the most probable energy of electrons E_p on the basis of depth dose distribution data in the standard material (aluminum), the value of practical range R_p of electrons and the depth of half dose reduction R_{50} have been identified.

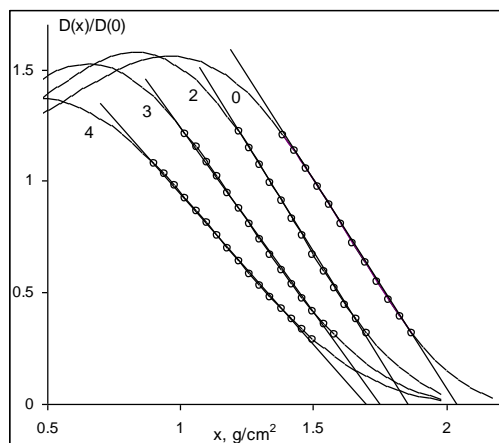


Fig. 5. Procedures for determination the practical range R_p of the electrons for normalized depth dose distributions curves.

Fig. 5 illustrates procedures for determining the practical range R_p of electrons and adequately the depth of half dose reduction R_{50} for normalized depth dose distributions. The data are related to the energy spread distributions presented above and illustrate the change of practical range R_p for selected cases of the electron beam energy spread value. It can be seen from Fig. 5, that value of practical range R_p of electrons strongly depends on the energy spread of electron beam. It contradicts the statement, presented in the international reports [7, 9], about a direct correlation between the value of the most

probable energy of electrons E_p and the value of practical range of electrons R_p . The value of most probable energy E_p for all spectra presented in Fig. 3 is 10 MeV, but the values of practical range R_p of electrons are significantly different. In respect to that there is a principal question: for which case of the energy spread the formulas are correct. This question is related to empirical relationships of electron radiation dosimetry performed by using the aluminum wedge method:

$$E_p^* = 5.09 \cdot R_p + 0.2 \quad (6)$$

$$E_{Av}^* = 6.2 \cdot R_{50} \quad (7)$$

The results of calculation values of practical range R_p of electrons and depth of half-dose reduction R_{50} in aluminum irradiated by electron beams of various spectra are shown in Table 2. The values of most probably energy E_p^* and average electron beam energy E_{Av}^* have been calculated according to the formulas (6) and (7) respectively.

Table 2. Practical range R_p of electrons and depth of the half-dose reduction R_{50} in aluminum irradiated by electron beams with different spectra (energy in [MeV], ranges in [cm]). $E_p=10\text{MeV}$.

	$M(E)$	R_p	R_{50}	E_p^*	E_{Av}^*
S0	10.00	2.01	1.61	10.46	9.98
S1	9.33	1.89	1.50	9.82	9.3
S2	9.00	1.83	1.44	9.49	8.93
S3	8.00	1.73	1.28	9.02	7.94
S4	7.00	1.68	1.18	8.77	7.32
S5	8.67	1.78	1.38	9.28	8.56
S6	7.33	1.69	1.22	8.78	7.56

Comparison of the most probable energy of electrons E_p , for model distributions of electrons energy E within the beam, with those obtained on basis of the standard depth dose distribution processing procedures values E_p^* leads to the conclusion, that for asymmetric electron beam spectra, the recommendations presented in [7, 9] may not be correct. Comparison of the mean energy of electrons $M(E)$, for the model of electron energy E distribution within the beam, with those obtained on the basis of the standard depth dose distribution processing procedure, reveals that values of the average energy of electrons in the beam E_{Av}^* shows their correlation, even for large values of the relative standard deviations of the energy of electrons.

The conclusion formulated on the base of results obtained from series of computer experiments, allows supposing that development of scientific bases and formation the recommendations on dosimetry of electron radiation in the international reports have been performed using the model of energy distributions of electrons with a small asymmetry. The high-power electron beams in practice have widely and significantly asymmetrical energy distribution of electrons. Therefore first series of computer experiments have been performed with the maximum asymmetric model distribution of electron energy in the beam.

The second series of computer experiments has been devoted to study the influence of asymmetry of electron beam energy spread on the depth dose distributions. At the same time, it has been considered that the main changes in depth dose distribution are associated with change the value of average energy of electrons within the beam having an energy spread.

Fig. 6 shows an example of a set of model spectra of electrons with a fixed value of the average energy $M(E) = 8$ MeV, but different with symmetry (curves 1 and 2) and asymmetric (curve 3) spread of energy relative to the average energy of the electrons.

Table 3 presents the main integrated characteristics of the model spectra of electrons that have been used for second series of numerical experiments. It contains the integral characteristics of electron spectra which correspond to the description given in Table 1.

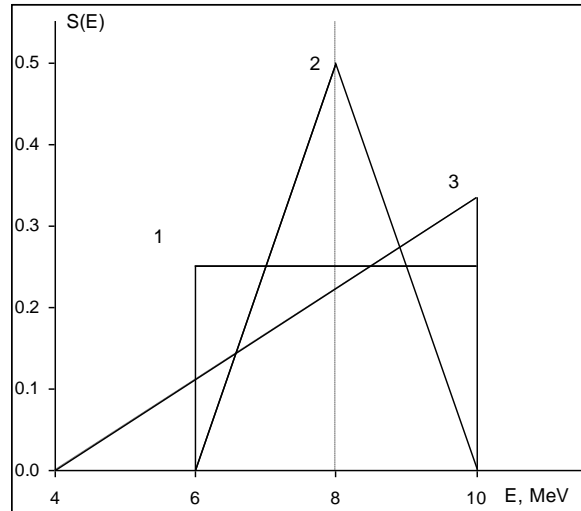


Fig. 6. The spectra of the electron beams with an average energy $M(E) = 8 \text{ MeV}$. Curves 1 and 2 are symmetric; curve 3 is asymmetric (energy spread of electrons, regarding average value of the electron energy).

Table 3. Parameters and integral characteristics of the model of the electron energy distribution in the beam.

Name	S(a,b,c)	$M(E)$	$D^2(E)$	$\sigma(E)$
S7	(9, 9)	9.00	0.000	0.000
S2	(7,10,10)	9.00	0.500	0.707
S8	(8, 9,10)	9.00	0.167	0.408
S9	(8,10)	9.00	0.333	0.577
S10	(8, 8)	8.00	0.000	0.000
S3	(4,10,10)	8.00	2.000	1.414
S11	(6, 8,10)	8.00	0.667	0.816
S12	(6,10)	8.00	1.333	1.155
S13	(7, 7)	7.00	0.000	0.000
S4	(1,10,10)	7.00	4.500	2.121
S14	(4,7,10)	7.00	1.5	1.225
S15	(4,10)	7.00	3	1.732

The calculations of depth dose distributions after aluminum target electron irradiation have been held by Monte Carlo method with application a detailed physical model of RT-Office software [8]. The calculations have been performed with assumptions related to electron beams with different energy spread. The electron beam parameters are presented in Table 3. Calculations results of depth dose distributions of electron radiation in an Al target have been grouped by value of the average energy of electrons in the beam $M(E)$. They are shown in Fig. 7.

The values $D_M(x)$ of the depth dose distribution of electron radiation are normalized to maximum dose D_{\max} in the target. The dashed curves are marked as the depth dose distribution in target irradiated by mono-energetic electron beam (S7, S10, S13).

As it can be seen from Fig. 7, the depth distribution of electron radiation dose depends on dispersion and asymmetry of the electron beam energy distribution. The results of calculating the values practical range R_p of electrons and the depth of half-dose reduction R_{50} in aluminum for the second series of computer experiments are given in Table 4. The practical range R_p of electrons and the depth of half dose reduction R_{50} have been calculated according to the formulas (6) and (7). The values of the most probable electron energy E_p^* and average energy of electrons within the beam E_{Av}^* are presented in Table 4.

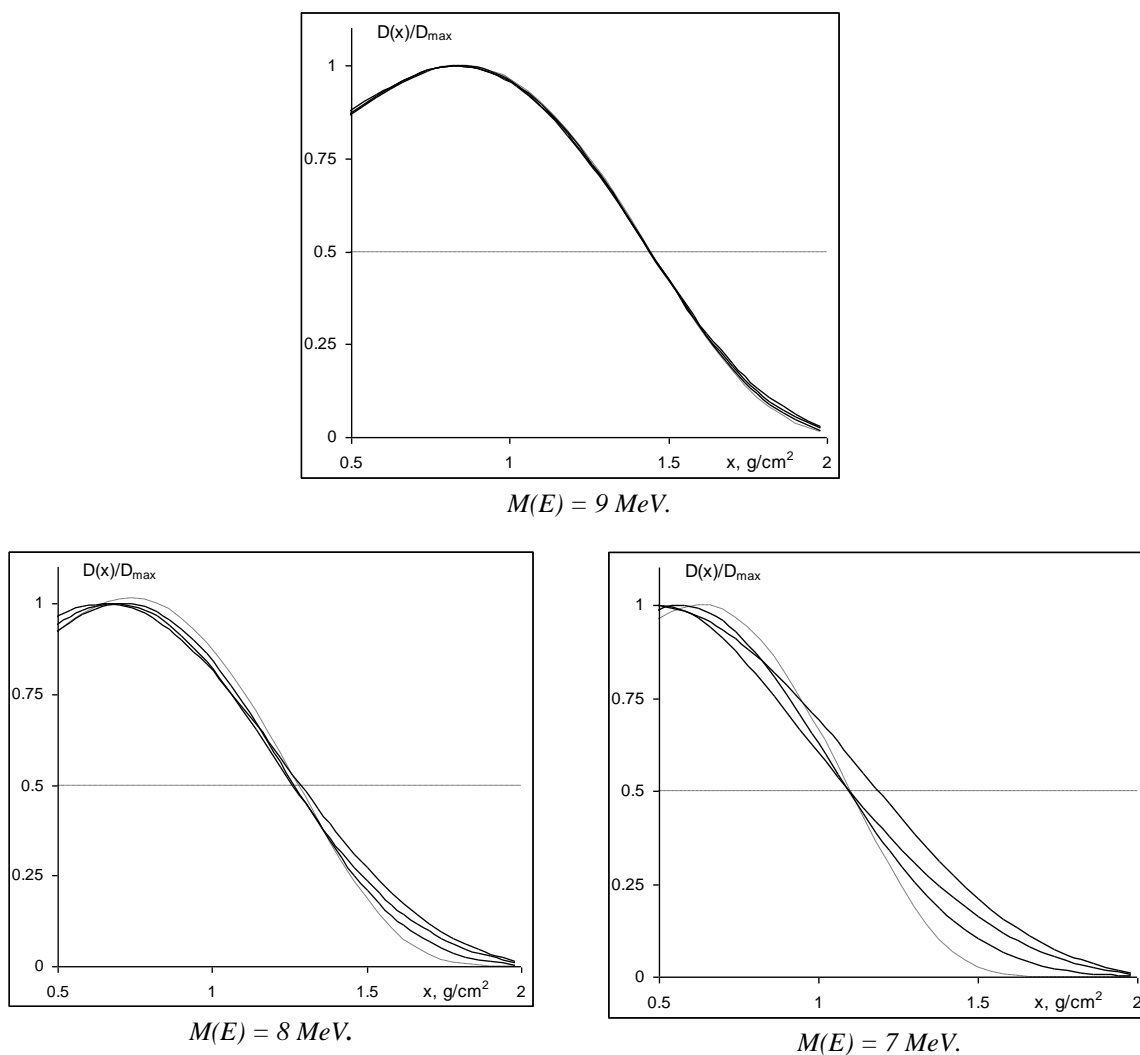


Fig. 7. Depth dose distribution of electron radiation in the aluminum target irradiated by electron beams with different energy spread and average energy of the electrons $M(E)$

Table 4. Practical range R_p of electrons and depth of the half-dose reduction R_{50} in aluminum irradiated by electron beams with different spectra (energy in [MeV], ranges in Al in [cm]).

Name	E_p	$M(E)$	R_p	R_{50}	E_p^*	E_{Av}^*
S7	9.00	9.00	1.81	1.44	9.42	8.93
S2	10.00	9.00	1.83	1.44	9.49	8.93
S8	9.00	9.00	1.81	1.44	9.44	8.93
S9	--	9.00	1.82	1.44	9.44	8.93
S10	8.00	8.00	1.61	1.26	8.38	7.81
S3	10.00	8.00	1.73	1.28	9.02	7.94
S11	8.00	8.00	1.63	1.29	8.51	8.00
S12	--	8.00	1.67	1.26	8.72	7.81
S13	7.00	7.00	1.39	1.10	7.28	6.82
S4	10.00	7.00	1.68	1.18	8.77	7.32
S14	7.00	7.00	1.48	1.09	7.71	6.76
S15	--	7.00	1.59	1.09	8.27	6.76

The assumption of symmetry of the electron energy distribution allows establishing a correlation between the average energy of the electrons in the beam E_{Av} and a depth of half dose reduction R_{50} . The value R_{50} corresponds to the point of intersection of the curves of depth depending on the dose with the

dashed line shown in the figures. In the case of a large energy spread the presence of asymmetry in electron energy distribution does not allow determining the average energy of the electrons in the beam, using empirical formulas recommended in the international standards [7, 9]. To assess accuracy of empirical dependence of the average energy E_{Av}^* of electron beam calculated with the half depth dose reduction R_{50} range (equation (7)), one should take into account results of calculating the average energy E_{Av} of electron beam with approximation proposed in [4]:

$$R_{50}(E_{Av}) = 0.1691 \cdot E_{Av} - 0.0965 \quad (8)$$

Comparing the data within the columns “ E_{Av}^* ” and “ E_{Av} ” allows estimating the errors of empirical dependences of the average energy of electron beam on the depth of half dose reduction. The value <4% can be achieved on the basis of estimates of the error of empirical formula which can be seen in Table 5.

Table 5. Evaluation of the results of errors according to computer experiments.

Name	$M(E)$	E_{Av}^*	E_{Av}	Δ_F	Δ_E
S7	9.00	8.93	9.09	0.16	0.07
S2	9.00	8.93	9.09	0.16	0.07
S8	9.00	8.93	9.09	0.16	0.07
S9	9.00	8.93	9.09	0.16	0.07
S10	8.00	7.81	8.02	0.21	0.19
S3	8.00	7.94	8.14	0.2	0.06
S11	8.00	8.00	8.20	0.2	0
S12	8.00	7.81	8.02	0.21	0.19
S13	7.00	6.82	7.08	0.26	0.18
S4	7.00	7.32	7.55	0.23	-0.32
S14	7.00	6.76	7.02	0.26	0.24
S15	7.00	6.76	7.02	0.26	0.24

Δ_F – distinction values of energy calculated with different empirical formulas $\Delta_F = E_{Av} - E_{Av}^*$,

Δ_E – distinction values of energy calculated with standard empirical formula from the average value of energy in the spectrum $\Delta_E = M(E) - E_{Av}^*$,

5. Conclusions

The depth dose distribution can vary greatly with changing the energy spread of electrons within a beam. The value of a practical range R_p of electrons strongly depends on the energy spread of the electron beam, even in the cases when the value of the most probable energy of the electrons in the beam E_p is unchanged. This contradiction result of computer experiments was revealed on the base of the international technical reports for standards of electron radiation dosimetry based on measurements of depth dose distributions with wedge or stack. The possible explanation of arisen contradictions is proposed according to the results of numerical studies in the first part of this paper. We suggest that the conclusions presented in [7] are based on the investigated cases where electron beams are characterized by a small asymmetric energy spread distribution.

The series of computer experiments on identifying the influence of energy spread asymmetry of electron beam on the depth dose distribution have been planned and performed. The results of computer experiments show that in the case of a large energy spread, the presence of asymmetry in electron energy distribution does not allow determining properly the energy of electrons by empirical formulas recommended in the technical reports [7, 9].

REFERENCES

1. Z. Zimek, L. Waliś, A.G. Chmielewski, "EB Industrial facility for radiation sterilization of medical devices". *Radiat. Phys. Chem*, vol.42, pp. 571–572. 1993.
2. Z.P. Zagórski, "Dependence of dept-dose distribution on the energy spectrum of 5 to 13 MeV electron beams". *Radiat. Phys. Chem*, vol. 22, No 3-5. pp. 409–418, 1983.
3. V.T. Lazurik, V.M. Lazurik, G. Popov, Z. Zimek, "Determination of electron beam parameters on radiation-technological facility for simulation of radiation processing". *East European Journal of Physics*, vol.1, No. 3. pp. 74–78, 2014.
4. V.M. Lazurik, V.T. Lazurik, G. Popov, Z. Zimek, "Two-parametric model of electron beam in computational dosimetry for radiation processing". *Radiat. Phys. Chem*, vol. 124, pp. 230–234, 2016.
5. V.T. Lazurik, V.M. Lazurik, G. Popov, Z. Zimek, "Method of Dosimetry Based on a Two-Parametric Model of Electrons Beam for Radiation Processing", *Problems of Atomic Science and Technology*, №6 (112), pp.137–141, 2017.
6. L. Pages, E. Bertel, H. Joffre, L. Sklavenitis, "Pertesd'energie, parcours et rendement de freinage pour less electrons de 10 keV à 100 MeV dans les elements simples et quelques composes chimiques", Rapport CEA-R-3942, 1970.
7. Radiation dosimetry: electron beams with energies between 1 and 50 MeV, ICRU REP. 35, 1984. 160 p.
8. V.M. Lazurik, V.T. Lazurik, G. Popov, Yu. Rogov, Z. Zimek, *Information System and Software for Quality Control of Radiation Processing*. Book, Warsaw, Poland: IAEA Collaborating Center for Radiation Processing and Industrial Dosimetry, 2011.
9. ISO/ASTM Standard 51649, Practice for dosimetry in an e-beam facility for radiation processing at energies between 300 keV and 25 MeV, Annual Book of ASTM Standards, Vol. 12.02, 2005.

ЛІТЕРАТУРА

1. Zimek Z., Waliś L., Chmielewski A.G. 1993. EB Industrial facility for radiation sterilization of medical devices. *Radiat. Phys. Chem*. 1993. Vol.42. P. 571–572/
2. Zagórski Z.P. Dependence of dept-dose distribution on the energy spectrum of 5 to 13 MeV electron beams. *Radiat. Phys. Chem*. 1983. Vol. 22, No 3–5. P. 409–418.
3. Lazurik V.T., Lazurik V.M., Popov G., Zimek Z. Determination of electron beam parameters on radiation-technological facility for simulation of radiation processing". *East European Journal of Physics*. 2014. vol.1, No. 3. P. 74-78.
4. Lazurik V.M., Lazurik V.T., Popov G., Zimek Z. Two-parametric model of electron beam in computational dosimetry for radiation processing. *Radiat. Phys. Chem*. 2016. Vol. 124, P.230–234.
5. Lazurik V.T., Lazurik V.M., Popov G., Zimek Z. Method of Dosimetry Based on a Two-Parametric Model of Electrons Beam for Radiation Processing. *Problems of Atomic Science and Technology*. 2017. №6 (112). P.137-141.
6. Pages L., Bertel E., Joffre H., Sklavenitis L. Pertesd'energie, parcours et rendement de freinage pour less electrons de 10 keV à 100 MeV dans les elements simples et quelques composes chimiques. *Rapport CEA-R-3942*, 1970.
7. ICRU REP, 35. Radiation dosimetry: electron beams with energies between 1 and 50 MeV. 1984, 160 p.
8. Information System and Software for Quality Control of Radiation Processing: book. / Lazurik V.M., Lazurik V.T., Popov G., Rogov Yu., Zimek Z. Warsaw, Poland: IAEA Collaborating Center for Radiation Processing and Industrial Dosimetry. 2011. 220 p.
9. ISO/ASTM Standard 51649. Practice for dosimetry in an e-beam facility for radiation processing at energies between 300 keV and 25 MeV. Annual Book of ASTM Standards. Vol. 12.02 (2005).

Lazurik Valentine T. – doctor of physical and mathematical sciences, professor; Dean of Computer science faculty; V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine, 61022, Kharkiv, Svobody Sq., 4; e-mail: vtlazurik@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-8319-0764.

Lazurik Valentina M. – Senior programmer, senior lecturer of Computer science faculty; V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine, 61022, Kharkiv, Svobody Sq., 4; e-mail: lazurik@hotmail.com; ORCID: 0000-0002-3340-9780.

Popov Gennadiy F. – Leader researcher, senior lecturer of Computer science faculty; V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine, 61022, Kharkiv, Svobody Sq., 4; e-mail: popov_gen@yahoo.com; ORCID: 0000-0002-4794-8427.

Zimek Zbigniew – Head of Centre for radiation chemistry and technology; Institute of nuclear chemistry and technology, Poland, 03-195, Warsaw, Ul. Dorodna 16, e-mail: Z.Zimek@ichtj.waw.pl; ORCID: 0000-0002-8653-5609.

Лазурик Валентин Т. – доктор фізико-математических наук, професор; декан факультета комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Україна, 61022, Харків, пл. Свободи, 4; e-mail: vtlazurik@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-8319-0764.

Лазурик Валентина М. – ведучий програміст, старший преподаватель факультета комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Україна, 61022, Харків, пл. Свободи, 4; e-mail: lazurik@hotmail.com; ORCID: 0000-0002-3340-9780.

Попов Геннадій Ф. – ведучий научный сотрудник, доцент факультета комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Україна, 61022, Харків, пл. Свободи, 4; e-mail: popov_gen@yahoo.com; ORCID: 0000-0002-4794-8427.

Зимек Збігнев – заведуючий центром радіаційної хімії і технології; Інститут ядерної хімії і технології, Польща, 03-195, Варшава, ул. Дородная 16, e-mail: Z.Zimek@ichtj.waw.pl; ORCID: 0000-0002-8653-5609.

Лазурик Валентин Т. - доктор фізико-математичних наук, професор; декан факультету комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Україна, 61022, Харків, пл. Свободи, 4; ; e-mail: vtlazurik@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-8319-0764.

Лазурик Валентина М. – провідний програміст, старший викладач факультету комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Україна, 61022, Харків, пл. Свободи, 4; e-mail: lazurik@hotmail.com; ORCID: 0000-0002-3340-9780.

Попов Геннадій Ф. – провідний науковий співробітник, доцент факультету комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Україна, 61022, Харків, пл. Свободи, 4; e-mail: popov_gen@yahoo.com; ORCID: 0000-0002-4794-8427.

Зіmek Збігнев – завідувач центром радіаційної хімії і технології; Інститут ядерної хімії та технології, Польща, 03-195, Варшава, вул. Дорідна 16, , e-mail: Z.Zimek@ichtj.waw.pl; ORCID: 0000-0002-8653-5609.

UDC 519.852+519.687.1

The exact minimization of total weighted completion time in the preemptive scheduling problem by subsequent length-equal job importance growth

V. V. Romanuke

*Polish Naval Academy, Poland**romanukevadimv@gmail.com*

For the preemptive scheduling problem in case of subsequent job importance growth, it is studied whether the optimal schedule might be found faster within an exact model. It is ascertained that when the number of jobs up to six (except for the case of four jobs) and there is no randomness in problem forming, a little advantage of weight-descending job order exists only on average. As the number of jobs increases, the advantage of either weight-descending or weight-ascending job order becomes more certain. When priority weights are formed randomly, weight-descending job order is expected to be faster than weight-ascending.

Key words: *optimal schedule, job order, preemption, total weighted completion time, exact solution, computation time gain.*

Теорія розкладів є важливою галуззю прикладної математики, спрямованою на організацію багатоступінних процесів компонування, виробництва, будівництва, диспетчеризації, обчислень тощо. Одним з головних критеріїв є мінімізація загального зваженого часу завершення. Існує клас задач планування з перемиканнями, у яких виконання одного завдання може бути перервано на користь виконання іншого завдання. У цьому класі існує підклас задач, у якому значущість наступних завдань зростає. Такі задачі планування виникають у системах, чий розвиток стає більш складним разом зі зростаючими витратами для підтримки цього розвитку. Коли кількість завдань сягає кількох сотень, такі задачі можуть розв'язуватися за допомогою евристик. Але знаходження точного мінімального загального зваженого часу завершення є цілком можливим для випадків з кількома завданнями, хоча це і потребує значно довших обчислень. Однак, оскільки евристики можуть дати лише наближені розклади, точні розклади для короткострокових задач планування все ще представляють інтерес. Тому метою є з'ясувати, чи оптимальний розклад міг би бути знайдений швидше у рамках точної моделі. Встановлюється, що за числа завдань до шести, без випадковостей у формуванні задачі, за виключенням випадку з чотирма завданнями, слабка перевага порядку завдань зі спадаючими вагами існує лише у середньому. Зі зростанням кількості завдань перевага порядку завдань або зі спадаючими вагами, або зі зростаючими вагами стає більш чіткою. Коли ваги пріоритетів сформовані випадково, очікується, що саме порядок завдань зі спадаючими вагами буде швидшим.

Ключові слова: *оптимальний розклад, порядок завдань, перемикання, загальний зважений час завершення, точний розв'язок, виграти у часі обчислення.*

В задаче планирования с переключениями при возрастании значимости последующих заданий изучается вопрос о том, может ли оптимальное расписание быть найдено быстрее в пределах точной модели. Устанавливается, что с числом заданий до шести, без случайностей в формировании задачи, за исключением случая с четырьмя заданиями, слабое преимущество порядка заданий с убывающими весами существует только в среднем. С возрастанием количества заданий преимущество порядка заданий либо с убывающими весами, либо с возрастающими весами стаёт более чётким. Когда веса приоритетов сформированы случайно, ожидается, что именно порядок заданий с убывающими весами будет быстрее, чем с возрастающими весами.

Ключевые слова: *оптимальное расписание, порядок заданий, переключение, общее взвешенное время завершения, точное решение, выигрыш во времени вычисления.*

The preemptive scheduling problem by subsequent job importance growth

The scheduling theory is a quite important field of applied mathematics helping in organizing multistep processes of assembling, manufacturing, building, dispatching, computing, etc. [1, 2]. Given a number N of jobs, where $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ and each of them has its own importance designated as a weight, one of main criteria is minimizing the total weighted completion time (TWCT) [2, 3]. There exists a class of preemptive scheduling problems (PESPs), wherein a job can be interrupted in favor of another job [3]. A subclass of this class contains problems in which importance of subsequent jobs grows. Such PESPs arise in systems whose development becomes more complicated along with its growing costs. When N is of order of hundreds, PESPs can be solved only by using some heuristics [1, 2, 3]. Meanwhile, finding the exact minimal TWCT is surely possible for a few jobs, although it requires much longer computation time compared to heuristics [3, 4]. However, whereas heuristics may give only approximate solutions, exact solutions for short-termed scheduling are still a matter of interest.

An approach to find the exact minimal TWCT by the Boolean linear programming model

Let job n have a processing period (PP) H_n (job n is divided into H_n equal parts), a release date (RD) r_n , and a priority weight (PW) w_n , $n = \overline{1, N}$. Vectors of PPs, PWs, and RDs are

$$\mathbf{H} = [H_n]_{1 \times N} \in \mathbb{N}^N, \quad \mathbf{W} = [w_n]_{1 \times N} \in \mathbb{N}^N, \quad \mathbf{R} = [r_n]_{1 \times N} \in \mathbb{N}^N, \quad (1)$$

respectively, where r_n is the time moment, at which job n becomes available for processing, and

$$\exists n_1 \in \{\overline{1, N}\} \text{ such that } r_{n_1} = 1, \quad 1 + \sum_{n=1}^k \overline{H_n} \geq \overline{r_{k+1}} \quad \forall k = \overline{1, N-1} \quad (2)$$

by having sorted components of \mathbf{R} in ascending order to vector $\overline{\mathbf{R}} = [\overline{r_n}]_{1 \times N}$, whereupon vector \mathbf{H} becomes respectively sorted after $\overline{\mathbf{R}} = [\overline{r_n}]_{1 \times N}$ to $\overline{\mathbf{H}} = [\overline{H_n}]_{1 \times N}$. The goal is to minimize the TWCT, i. e. to schedule the jobs so that sum

$$\sum_{n=1}^N w_n \theta(n; H_n) \quad (3)$$

would be minimal, where job n is completed after moment $\theta(n; H_n)$, which is

$$\theta(n; H_n) \in \{\overline{1, T}\} \text{ by } T = \sum_{n=1}^N H_n. \quad (4)$$

Let $x_{nh_n,t} = 1$ if the h_n -th part of job n is assigned to time moment t ; otherwise, $x_{nh_n,t} = 0$. The respective triple-indexed weights are calculated as follows:

$$\lambda_{nh_n,t} = 0 \text{ by } r_n - 1 + h_n \leq t \leq T - H_n + h_n \quad \forall h_n = \overline{1, H_n - 1} \quad (5)$$

and

$$\lambda_{nh_n,t} = \alpha \text{ by when double inequality in (5) is not true,} \quad (6)$$

where $\alpha > 0$ is a sufficiently great integer (similar to the meaning of infinity), e. g., $\alpha = \sum_{n=1}^N \sum_{t=1}^T w_n t$;

$$\lambda_{nH_n,t} = w_n t \text{ by } r_n - 1 + H_n \leq t \leq T \quad (7)$$

and

$$\lambda_{nH_n,t} = \alpha \text{ by when double inequality in (7) is not true.} \quad (8)$$

Denote an aggregate of all variables by $X = \left\{ \left\{ \left\{ x_{nh_n,t} \right\}_{n=1}^N \right\}_{h_n=1}^{H_n} \right\}_{t=1}^T \in A$, where A is a set of all possible aggregates. The factual goal is to find such an aggregate

$$X^* = \left\{ \left\{ \left\{ x_{nh_n,t}^* \right\}_{n=1}^N \right\}_{h_n=1}^{H_n} \right\}_{t=1}^T \in \arg \min_{X \in A} \sum_{n=1}^N \sum_{h_n=1}^{H_n} \sum_{t=1}^T \lambda_{nh_n,t} x_{nh_n,t} \quad (9)$$

by constraints which constitute set A (an integer binary lattice):

$$x_{nh_n,t} \in \{0, 1\} \text{ by } n = \overline{1, N} \text{ and } h_n = \overline{1, H_n} \text{ and } t = \overline{1, T}, \quad (10)$$

$$\sum_{t=1}^T x_{nh_n,t} = 1 \text{ by } n = \overline{1, N} \text{ and } h_n = \overline{1, H_n}, \quad \sum_{n=1}^N \sum_{h_n=1}^{H_n} x_{nh_n,t} = 1 \text{ by } t = \overline{1, T}, \quad (11)$$

$$\sum_{j=t+1}^T \sum_{h_n=1}^{H_n-1} x_{nh_n,j} + H_n x_{nH_n,t} \leq H_n \text{ by } n = \overline{1, N} \text{ and } t = \overline{1, T-1}. \quad (12)$$

Formulae (1) — (12) is the Boolean linear programming model (BLPM) [4] allowing to find the optimal job schedule $\mathbf{S}^* = [s_t^*]_{1 \times T}$ by $s_t^* \in \{\overline{1, N}\}$ for every $t = \overline{1, T}$ and its exact minimal TWCT [3]

$$\rho^*(N) = \sum_{n=1}^N \sum_{h_n=1}^{H_n} \sum_{t=1}^T \lambda_{nh_t} x_{nh_t}^* \quad (13)$$

for those N jobs. However, problem (9) by the BLPM is NP-hard [1, 2, 4]. It becomes hardly tractable for a few tens of jobs. So, reducing the BLPM computation time even for a few jobs is very important.

An example of that the job order into the BLPM matters

Consider a PESP by subsequent job importance growth of eight jobs:

$$\mathbf{H} = [H_n]_{1 \times 8} = [2]_{1 \times 8}, \quad \mathbf{W} = [w_n]_{1 \times 8} = [1 \ 3 \ 7 \ 16 \ 33 \ 44 \ 55 \ 67], \quad \mathbf{R} = [r_n]_{1 \times 8} = [n]_{1 \times 8}. \quad (14)$$

Here the total processing time is $T = 16$, and the optimal schedule given by the BLPM (1) — (12) is

$$\mathbf{S}^* = [s_t^*]_{1 \times 16} = [1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 5 \ 5 \ 7 \ 7 \ 8 \ 8 \ 6 \ 6 \ 4 \ 4 \ 2 \ 2]. \quad (15)$$

The exact minimal TWCT by schedule (15) is 2138. However, this problem might be stated as

$$\mathbf{H} = [H_n]_{1 \times 8} = [2]_{1 \times 8}, \quad \mathbf{W} = [w_n]_{1 \times 8} = [67 \ 55 \ 44 \ 33 \ 16 \ 7 \ 3 \ 1], \quad \mathbf{R} = [r_n]_{1 \times 8} = [8 - n + 1]_{1 \times 8}. \quad (16)$$

Then, obviously, the optimal schedule given by the BLPM (1) — (12) remains the same, that is

$$\mathbf{S}^* = [s_t^*]_{1 \times 16} = [8 \ 8 \ 6 \ 6 \ 4 \ 4 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 5 \ 5 \ 7 \ 7] \quad (17)$$

giving the exact minimal TWCT of 2138, but it is obtained at least by 25 % faster than schedule (15). Thus, the job order in the BLPM (which uses the branch-and-bound approach for solving [4]) matters.

The object of studying

Taking into account that the job order in the BLPM may determine the computation time, the purpose is to study whether the optimal schedule is found faster in the PESP by subsequent length-equal job importance growth (SLEJIG) when the job order is weight-descending (just like in the example above). The PP will be set at 2 for simplification. To achieve the goal, the three following tasks are to be accomplished:

1. To compare computation times of weight-descending job order (WDJO) and weight-ascending job order (WAJO) for PESP with trivially increasing PWs and RDs. RDs will be set trivially as

$$\mathbf{R} = [r_n]_{1 \times N} = [n]_{1 \times N} \text{ for WAJO and } \mathbf{R} = [r_n]_{1 \times N} = [N - n + 1]_{1 \times N} \text{ for WDJO.} \quad (18)$$

2. To compare computation times of WDJO and WAJO for PESP by SLEJIG, whose PWs are formed randomly by definite statistical laws along with (18) and sorted. The comparison will be a ratio

$$\beta(N) = 100 \cdot \frac{\tau_{As}(N) - \tau_{Des}(N)}{\tau_{Des}(N)}, \quad (19)$$

where $\tau_{As}(N)$ and $\tau_{Des}(N)$ are averages of computation times for WAJO and WDJO, respectively.

3. To finally conclude on the statistical results and find out regularities/laws, if any, of solving PESP by SLEJIG with WDJO/WAJO by the BLPM. Then practical recommendations are to be given.

PESPs with trivially increasing PWs and RDs

Here, two versions of PESP with WAJO and WDJO are given as

$H_n = 2$, $r_n = n$ by $w_n = n$ (WAJO) and $r_n = N - n + 1$ by $w_n = N - n + 1 \ \forall n = \overline{1, N}$ (WDJO), (20) and

$$\begin{aligned} &H_n = 2, \ r_n = n \text{ by } w_n = 2n - 1 \text{ (WAJO)} \\ &\text{and } r_n = N - n + 1 \text{ by } w_n = 2N - 2n + 1 \ \forall n = \overline{1, N} \text{ (WDJO),} \end{aligned} \quad (21)$$

respectively, for $N = 2, 10$. Fig. 1 shows ratio (19) for cases (20) and (21), whence it follows that WDJO is definitely computed faster for $N \in \{2, 3, 6\}$. This particular conclusion is confirmed by disclosing the averages — see Fig. 2, wherein two bunches of ratios (19) for cases (20) and (21)

obtained separately in the repetitious solutions of the same problem (9) by BLPM (1) — (12) are really tight, especially when N increases. On average, only PESP with nine jobs are solved slower by WDJO than by WAJO.

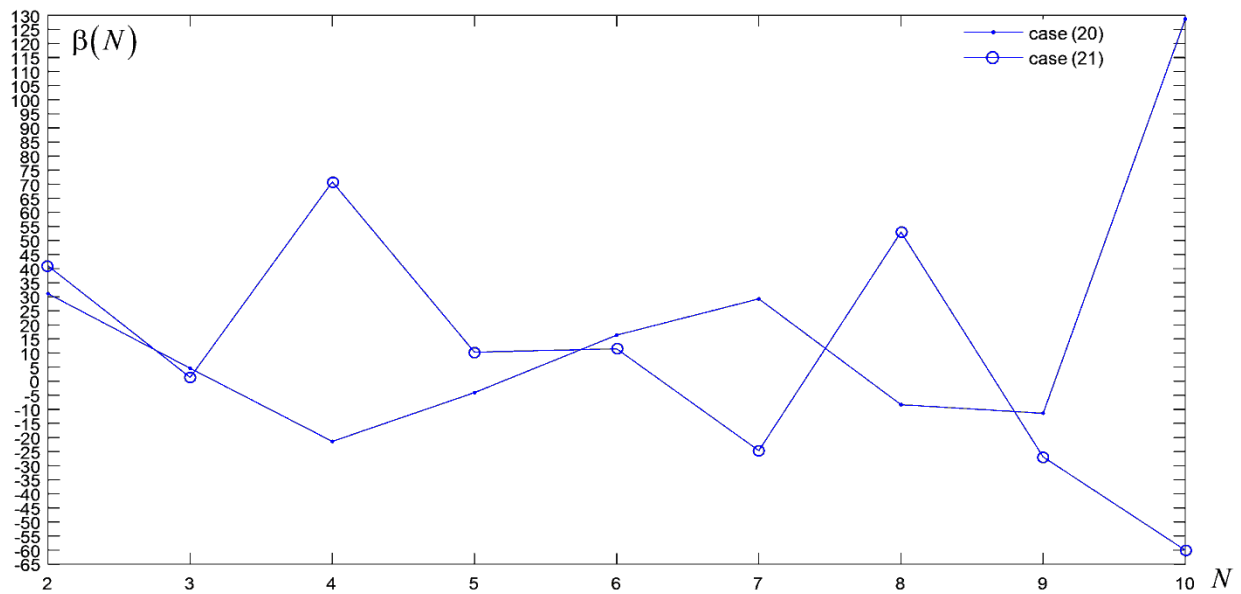


Fig. 1. Ratio (19) for cases (20) and (21): on average, PESP by WDJO are 13.4 % solved faster than by WAJO

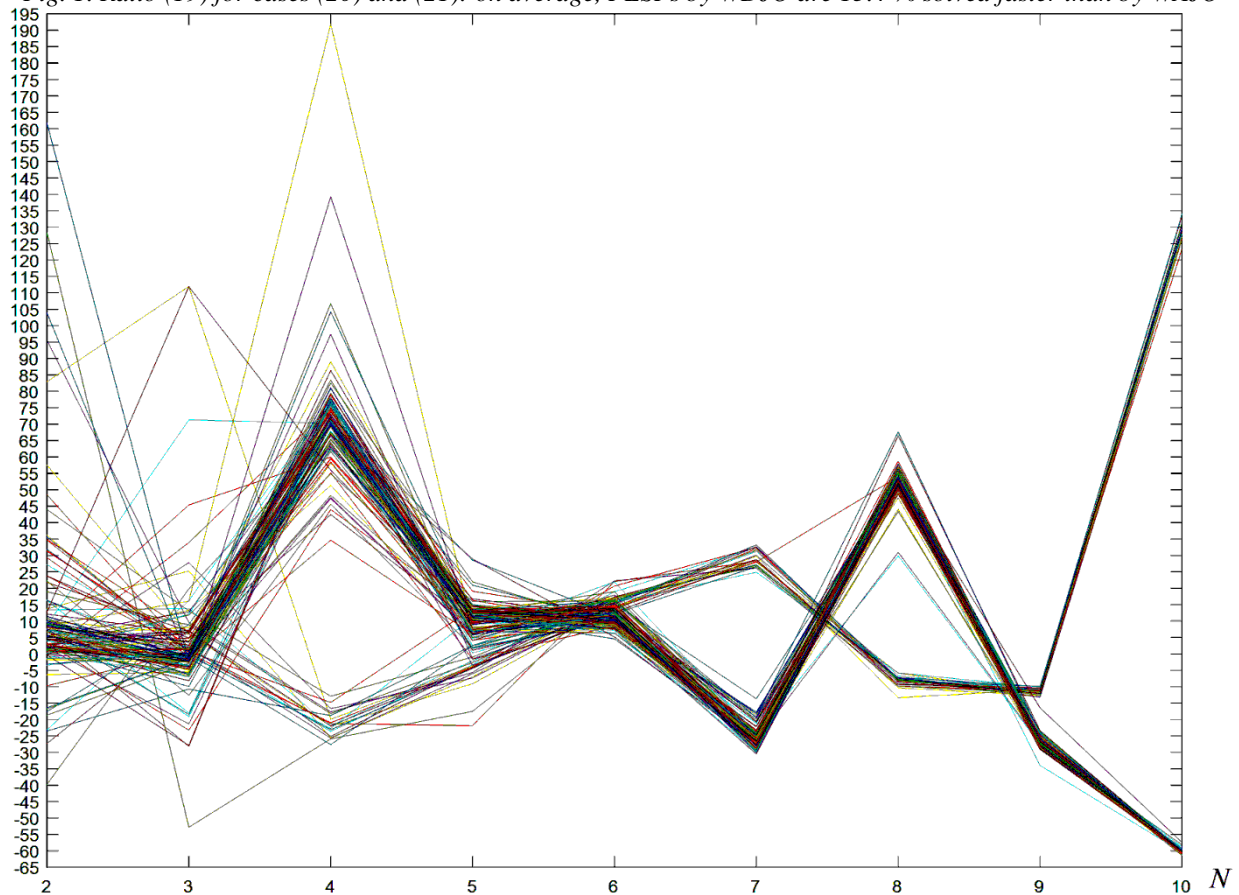


Fig. 2. Two bunches of ratios (19) for cases (20) and (21) obtained separately in the repetitious solutions of the same problem (9) by BLPM (1) — (12)

Obviously, cases (14) and (16), (20) and (21) do not confirm that PESP by WDJO are solved faster. Moreover, Fig. 1 and 2 prove that WAJO by SLEJIG is preferable for 4, 5, 8, 9 jobs by case (20), where

PWs are the most compact, and for 7, 9, 10 jobs by case (21), where PWs are slightly loose. Nevertheless, the averaged time-advantage of WDJO is an evidence of that the job order in the BLPM might be optimized for other cases of PWs generated by the certain laws (e. g., see [5]).

PESPs whose PWs are formed randomly along with (18) and sorted

Let PWs for WAJO be generated by the following law:

$$H_n = 2, \quad r_n = n \quad \text{by} \quad w_n = w_n^{(0)} + \gamma d_n, \quad \gamma \in \{0, 1\}, \quad w_n^{(0)} = \psi(N\zeta + 1) \quad \forall n = \overline{1, N}$$

$$\text{and} \quad w_{l-1}^{(0)} \leq w_l^{(0)} \quad \forall l = \overline{2, N} \quad \text{but} \quad \exists l_* \in \{2, N\} \quad \text{such that} \quad w_{l_*-1}^{(0)} < w_{l_*}^{(0)}, \quad (22)$$

where ζ is a pseudorandom number drawn from the standard uniform distribution on the open interval $(0; 1)$, function $\psi(\xi)$ returns the integer part of number ξ , and

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 3, \quad d_k = \psi(d_{k-2} + d_{k-1} + \sigma_i k), \quad k = \overline{3, N} \quad \text{by} \quad \sigma_i = i/8, \quad i = \overline{0, 8}. \quad (23)$$

PWs for WDJO are generated similarly to (22) by (23):

$$H_n = 2, \quad r_n = N - n + 1 \quad \text{by} \quad w_n = w_n^{(0)} + \gamma d_{N-n+1}, \quad \gamma \in \{0, 1\}, \quad w_n^{(0)} = \psi(N\zeta + 1) \quad \forall n = \overline{1, N}$$

$$\text{and} \quad w_{l-1}^{(0)} \geq w_l^{(0)} \quad \forall l = \overline{2, N} \quad \text{but} \quad \exists l_* \in \{2, N\} \quad \text{such that} \quad w_{l_*-1}^{(0)} > w_{l_*}^{(0)}. \quad (24)$$

Fig. 3 shows ratio (19) for 10 cases by (22) — (24), whence it follows that WDJO is computed faster for $N \in \{4, 6, 10\}$. It is preferably to use WAJO for PESPs with three jobs. The average computation time gain by ratio (19) is 15.9 % for PESPs with 10 jobs. This gain is over 28.7 % for PESPs with four and six jobs. The lowest gain has been revealed for PESPs with five and eight jobs. Moreover, disadvantage of WDJO has occurred for every studied number of jobs (see Fig. 4). The averaged advantage of WDJO is nonetheless observed, although it doesn't grow as the number of jobs increases.

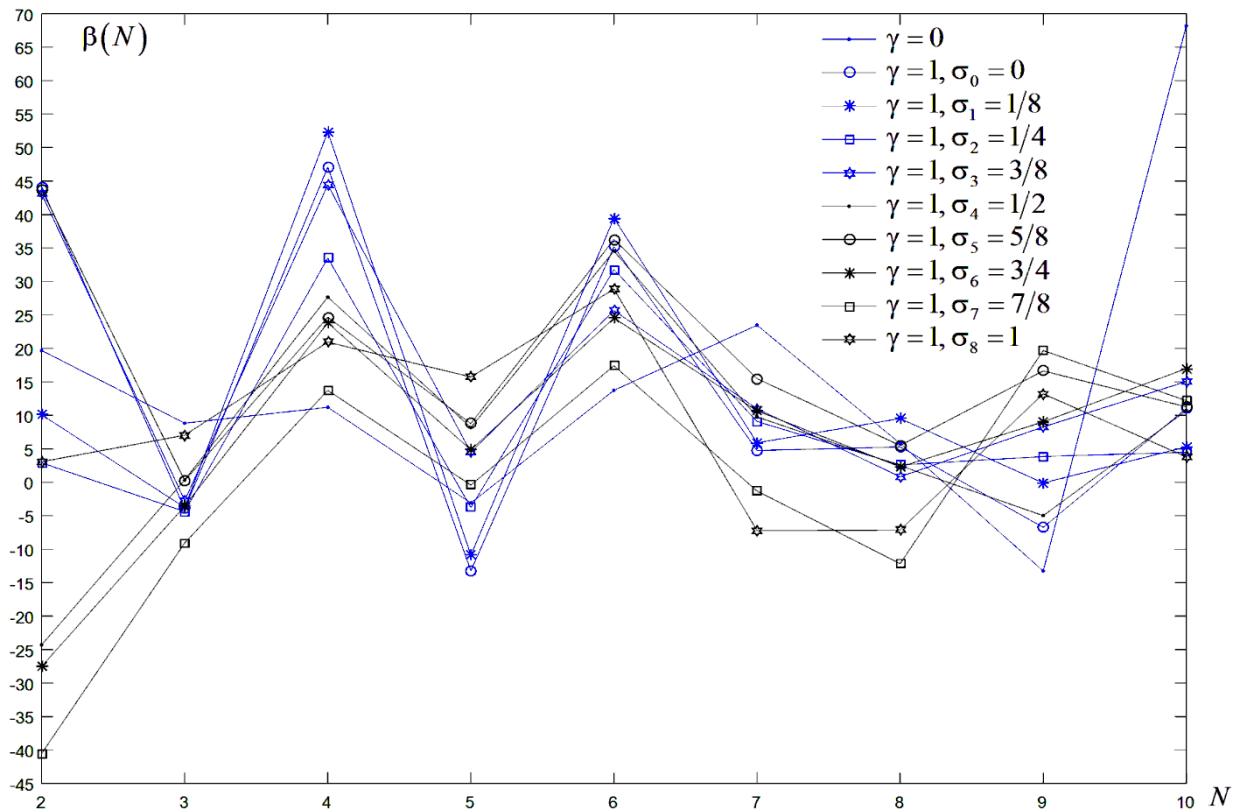


Fig. 3. Ratios (19) for 10 cases by (22) — (24), wherein PESPs with the even number of jobs seem to be better to be solved by WDJO when using BLPM (1) — (12)

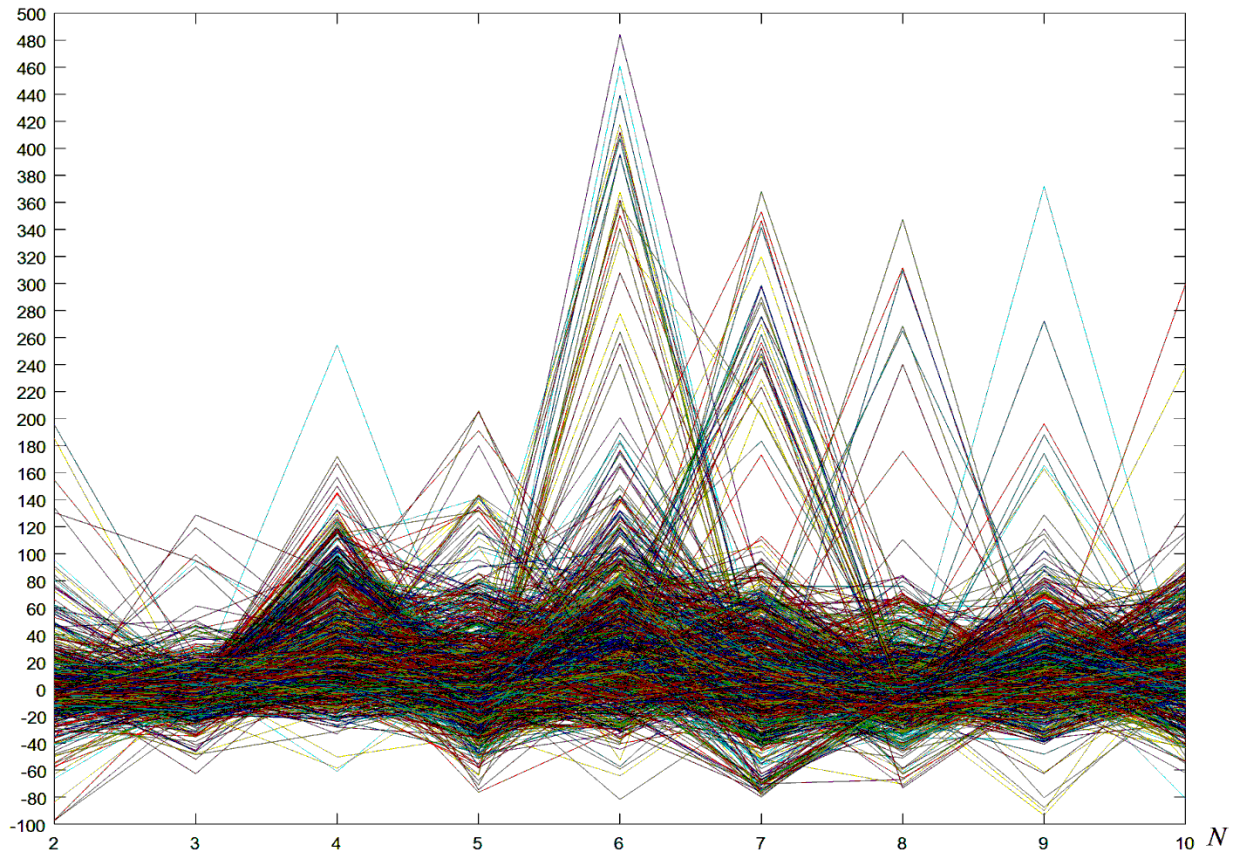


Fig. 4. Bunches of ratios (19) for 10 cases by (22) — (24) obtained separately in repetitive solutions

Discussion

Even if the plotted polylines suggest that WDJO is computed faster, some of results appear quite contradictory. For instance, considering only polylines in Fig. 1, the inference about the averaged time-advantage of WDJO for the even number of jobs is a bit inconsistent. Polyline in Fig. 3 are more convincing for the case of the even number of jobs, although the case with eight jobs just falls out the mentioned inference. After all, during a single repetition of the problem solving, a negative ratio (19) is not excluded for case (22) — (24), where monotonic PWs are nonetheless formed randomly. So, on average for randomly monotonic PWs, it is better to solve PESP by SLEJIG by the BLPM with WDJO. However, a small possibility of a slower solution (compared to WAJO) still exists.

Cases (20) and (21), which do not contain any random parameters, show us in Fig. 2 that an assured conclusion on WDJO/WAJO advantage must be made for PESP with six to ten jobs. Indeed, those polylines in Fig. 2 become more “stable” as the number of jobs increases up from 5. Thus, it is faster to solve PESP with WDJO for 6, 7, 10 jobs in PESP (20), and 6 and 8 jobs in PESP (21). Conversely, PESP with WAJO for 8 and 9 jobs in PESP (20), and 7, 9, 10 jobs in PESP (21) are solved faster. Note that this time-advantage of WDJO/WAJO here is not averaged. A similar conclusion on 5 and 4 jobs, and especially for 3 and 2 jobs, is not possible. Even by implying “on average”, only the case with 4 jobs is consistent: PESP (20) and (21) are solved faster by WAJO and WDJO, respectively.

Conclusion, practical recommendations, and a further research outlook

WDJO is not definitely better (i. e., faster) than WAJO. For PESP without randomness with the number of jobs up to six, except for the case of four jobs, a small advantage of WDJO exists only on average. As the number of jobs increases, the advantage of either WDJO or WAJO becomes more certain. For PESP by SLEJIG which do not have such “regular” PWs, WDJO is expected to be faster than WAJO. However, this averaged time-advantage of WDJO is not truly reliable for all cases (like reliability of just cases with 4, 6, 10 jobs by Fig. 3).

Solving PESP by SLEJIG with WDJO/WAJO by the BLPM does not have a statistical law of the averaged time-advantage of WDJO or WAJO, which (i. e., the law) could be described in general. To

obtain the gain in computation time, it is recommended to study statistics as per Fig. 1 – 4 before using either WDJO or WAJO. A further research outlook will be focused on WDJO/WAJO in heuristics.

REFERENCES

1. M. L. Pinedo, *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*. Springer Int. Publ., 2016.
2. P. Brucker, *Scheduling Algorithms*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
3. H. Belouadah et al., “Scheduling with release dates on a single machine to minimize total weighted completion time”. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 36, iss. 3, pp. 213 – 231, 1992.
4. L. P. Fávero and P. Belfiore, “Integer Programming”, in: *Data Science for Business and Decision Making*, Fávero L. P., Belfiore P. (eds.). *Academic Press*, pp. 887 – 918, 2019.
5. V. V. Romanuke, “Acyclic-and-asymmetric payoff triplet refinement of pure strategy efficient Nash equilibria in trimatrix games by maximimin and superoptimality”. *KPI Science News*, no. 4, pp. 38 – 53, 2018.

ЛІТЕРАТУРА

1. Pinedo M. L. *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*. Springer Int. Publ., 2016. 670 p.
2. Brucker P. *Scheduling Algorithms*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. 371 p.
3. Belouadah H., Posner M. E., Potts C. N. Scheduling with release dates on a single machine to minimize total weighted completion time. *Discrete Applied Mathematics*. 1992. Vol. 36, Iss. 3. P. 213 – 231.
4. Fávero L. P., Belfiore P. Integer Programming, in: *Data Science for Business and Decision Making / Fávero L. P., Belfiore P. (eds.)*. *Academic Press*. 2019. P. 887 – 918.
5. Romanuke V. V. Acyclic-and-asymmetric payoff triplet refinement of pure strategy efficient Nash equilibria in trimatrix games by maximimin and superoptimality. *KPI Science News*. 2018. No. 4. P. 38 – 53.

Romanuke Vadim – doctor of technical sciences, professor; Polish Naval Academy, Poland, 81-127, Gdynia, Śmidowicza str., 69; e-mail: romanukevadimv@gmail.com; ORCID: 0000-0003-3543-3087.

Романюк Вадим Васильович – доктор технічних наук, професор; професор кафедри інформаційних технологій, Одеська національна академія зв'язку ім. О. С. Попова, вул. Кузнечна, 1, Одеса, Україна, 65029; e-mail: romanukevadimv@gmail.com ; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3543-3087>

Романюк Вадим Васильевич – доктор технических наук, профессор; профессор кафедры информационных технологий, Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова, ул. Кузнечная, 1, Одесса, Украина, 65029; e-mail: romanukevadimv@gmail.com ; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3543-3087>

CONTENTS

▪ V.A. Baranets, N.N. Kizilova	4
The discrete simulation of aggregation and sedimentation of micro- and nanoparticles in suspensions	
▪ R.O. Gamzayev, E. Karaçuha, M.V. Tkachuk , O.Y. Tovstokorenko	16
An approach to assessment of dynamic software variability in mobile applications development	
▪ D.V. Kriutchenko	25
Forced fluid fluctuations in cylindrical reservoirs under vertical excitation	
▪ V.M. Kuklin	36
Features of the development of artificial intelligence at the present stage	
▪ V.M. Kuklin	43
On mathematical models for the description of parametric and modulation instabilities	
▪ V.T. Lazurik, V.M. Lazurik, G. Popov, Z. Zimek	49
Modeling the influence of electron beam energy distribution on quality of radiation processing	
▪ V.V. Romanuke	60
The exact minimization of total weighted completion time in the preemptive scheduling problem by subsequent length-equal job importance growth	
▪ CONTENTS	67

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 40

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О. О. Афанасьєва

Підписано до друку 26.11.2018 р.
Формат 70×108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. – 8,3.
Обл.– вид. арк. – 9,6.
Наклад 50 пр. Зам. №
Безкоштовно

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна.
Видавництво

Надруковано: ХНУ імені В. Н. Каразіна
61022 м. Харків, майдан Свободи, 4,
тел.: 362-01-52
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09