

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Серія
«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 39

Серія заснована 2003 р.

Харків
2018

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних та технічних наук (наказ МОН України № 1328 від 21.12.2015 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 10 від 29.10.2018 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),

д.ф.-м.н., академік НАН України, проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора),

д.т.н., проф. ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т. (заст. гол. редактора), д.ф.-

м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Споров О.Є. (відповідальний секретар),

к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ

імені В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ

імені Б.І. Веркіна НАН України

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ

імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН

України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені

В. Н. Каразіна

Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ

імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-

енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ

ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ

імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний

технічний університет "ХПІ"

Стрельнікова О.О., д.т.н., проф. Ін-т

проблем машинобудування НАН України

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра

прикладної інформатики, університет імені

Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter,** Dr.-Ing., Dr. rer. nat.

habil. Professor of Technical Informatics and

Computer Systems, Institute of Informatics,

Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire,** Dr. habil., Professor of

computer science, Dep. of C. S., University of

Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

ЗМІСТ

▪ Н.М. Антоненко	4
Плоска термопружна деформація багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами	
▪ А.В. Безлюбченко, Е.С. Меняйлов, М.Л. Угрюмов, К.М. Угрюмова, С.В. Черныш	14
Метод синтеза решений многокритериальных задач стохастической оптимизации со смешанными условиями	
▪ Ю.Л. Грабовская, С.Н. Рева	26
Модернизация канала компьютерного управления учебной моделью цифрового процессора	
▪ О.С. Кончаковська, М.В. Сидоров	33
Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи	
▪ Д.В. Крютченко	42
Компьютерное моделирование вынужденных колебаний жидкости в призматическом резервуаре	
▪ Н.С. Подцыкин	48
Оптимизация надежности сложной системы	
▪ N.V. Prykhodko, S.B. Prykhodko	61
Constructing the nonlinear regression equations based on multivariate normalizing transformations	
▪ V.V. Romanuke	69
Wind farm deployment by wind turbines of different power curves under a 2-way routine of energy-and-costs constrained optimization	
▪ CONTENTS	76

УДК 539.3

Плоска термопружна деформація багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами

Н.М. Антоненко

*Запорізький національний технічний університет, вул. Жуковського 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна
e-mail: antonenkonina.ua@gmail.com*

Розв'язано плоску стаціонарну задачу термопружності для багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами. Для розв'язання задачі використано одномірне інтегральне перетворення Фур'є та метод функцій податливості. У матричній формі побудовано рекурентні співвідношення для функцій податливості плити, які враховують вплив температури та наявність пружних зв'язків між шарами. Для двошарової плити, що знаходиться під дією теплових навантажень, проаналізовано вплив коефіцієнтів пружних зв'язків, коефіцієнтів теплового розширення та теплопровідності шарів на розподіл нормальних та дотичних напружень на стику шарів двошарової плити.

Ключові слова: багатошарова плита, пружні зв'язки, інтегральне перетворення Фур'є, функція податливості, напруження, температура.

The method of the solution of the stationary plane thermoelastic problem of a multilayer plate with elastic links between its layers is proposed. It is assumed that tangential (normal) elastic links between two neighboring layers exist if the difference between the horizontal (vertical) displacements of points of the upper boundary of the lower layer and of the corresponding points of the lower boundary of the upper layer are proportional to the tangential (normal) stresses on their boundary. It is assumed that the conditions of perfect thermal contact are satisfied on their common boundaries. The technique is based on a compliance functions method and a Fourier transformation method. The Fourier transforms of displacements, stresses, and functions used to describe temperature and flow at the points of a layer can be represented in the form of linear combinations of the auxiliary functions. The auxiliary functions are connected with the Fourier transforms of displacements, stresses, and functions used to describe temperature and flow at the points of the upper boundary of the corresponding layer. For considered problem six auxiliary functions can be found from boundary conditions. Using the conditions on the common boundaries of the layers and the boundary conditions the recurrent formulas for finding other auxiliary functions are constructed. We've proved that the auxiliary functions are dependent. This dependence can be represented in the matrix form using so-called compliance functions. We've constructed the recurrence relations for the compliance functions of the thermoelastic plate. The algorithm for solving the problem is formulated. For a two-layer plate subjected to the action of thermal load the influence of the coefficients of elastic links, the coefficients of thermal expansion and the coefficients of thermal conductivity on the distribution of the normal stresses and the tangential stresses on its common boundary is investigated. The proposed method allows analyzing the influence of the mechanical and temperature characteristics of the layers on the distribution of stresses and displacements in the layers of the plate with any finite number of the layers.

Keywords: multilayer plate, elastic links, Fourier transformation, compliance function, stress, temperature.

1 Вступ

Багато інженерних об'єктів знаходяться в умовах значних силових та теплових навантажень, тому при розрахунках на міцність їх елементів варто враховувати дію обох вище зазначених типів навантажень. Дослідженню напружено-деформованого стану багатошарових основ, плит, пластин, з урахуванням дії теплових навантажень, присвячена значна кількість робіт вітчизняних та зарубіжних учених [1–10]. У вказаних статтях автори вважають, що контакт між шарами ідеальний, це не завжди відповідає реальній фізичній картині, оскільки між ними може бути присутній деякий проміжний шар. Моделювати його наявність можна, наприклад, за допомогою пружних зв'язків, методом запропонованим у [11]. У праці [12] асимптотичним методом знайдено розв'язок плоскої задачі термопружності для тришарової смуги скінченої довжини при різних типах контакту між смугами. Цим же методом розв'язано задачі теплопровідності та термопружності для двошарової пластини у [13]. В рамках моделі [11] розв'язано задачі про дію нестационарного навантаження на двошарову циліндричну оболонку [14] та двошарову пластину кінцевих розмірів [15]. У [16] та [17] метод функцій податливості розповсюджено на задачу про плоску деформацію багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами без урахування дії теплових навантажень та задачу про плоску термопружну деформацію багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами, яка пружно зчеплена з абсолютно жорсткою півплощиною.

У даній статті, з використанням одномірного інтегрального перетворення Фур'є та модифікації методу функцій податливості, пропонується спосіб розв'язання плоскої задачі термопружності для багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами. Вважатимемо, що між двома сусідніми шарами є дотичні (нормальні) пружні зв'язки, якщо різниці горизонтальних

(вертикальних) переміщень точок верхньої межі нижнього шару та відповідних точок нижньої межі верхнього шару пропорційні дотичним (нормальним) напруженням на їх спільній межі.

2 Постановка задачі

Розглянемо багатошарову плиту, яка знаходиться в умовах плоскої термопружної деформації. Пливу моделюватимемо пакетом, який складається з n пружних невагомих шарів. Кожен шар характеризуватимемо товщиною h_k та двома пружними характеристиками μ_k , λ_k (коефіцієнти Ламе), коефіцієнтом теплопровідності k_{Tk} та приведеним коефіцієнтом теплового розширення

$$\alpha_{Tk} = \frac{\tilde{\alpha}_{Tk}(3\lambda_k + 2\mu_k)}{\lambda_k + 2\mu_k}, \text{ де } \tilde{\alpha}_{Tk} - \text{коефіцієнт теплового розширення матеріалу, } k = \overline{1, n}. \text{ Між}$$

шарами плити є пружні зв'язки. Вважатимемо, що на спільних межах шарів виконуються умови ідеального теплового контакту. На верхній та нижній межах плити відомі напруження та температура. Необхідно знайти напруження, переміщення та температуру для всіх точок плити.

Нумерацію шарів будемо проводити зверху вниз, починаючи з одиниці. Усі величини, які відносяться до k -го шару, будемо позначати нижнім індексом k (якщо це не призводитимемо до неоднозначності, то індекси опускатимемо). У кожному шарі введемо локальну декартову систему координат $O_k x_k z_k$ з початком на верхній межі шару: осі $O_k z_k$ всіх систем координат співпадають та направлені вглиб відповідного шару, всі осі $O_k x_k$ паралельні осі $O_1 x_1$ та співпадають з межами відповідних шарів (рис. 2.1).

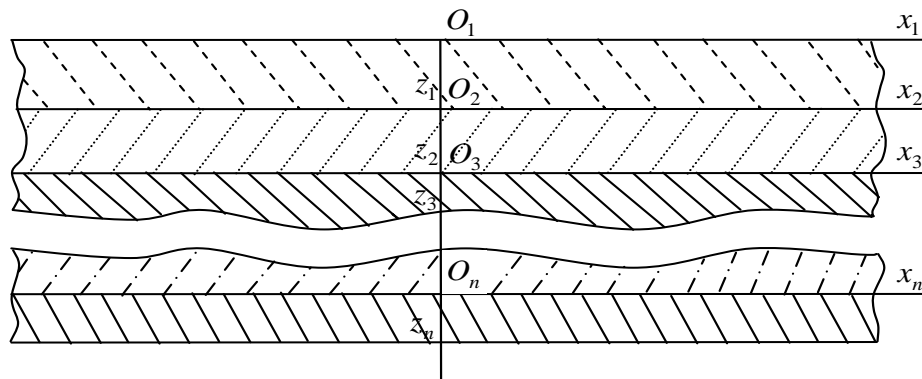


Рис.2.1 Багатошарова плита

Крайові умови задачі:

$$\sigma_{z1}(x,0) = \sigma(x), \tau_{xz1}(x,0) = \tau(x), T_1(x,0) = f(x), \quad (2.1)$$

$$\sigma_{zn}(x, h_n) = \tilde{\sigma}(x), \tau_{xzn}(x, h_n) = \tilde{\tau}(x), T_n(x, h_n) = \tilde{f}(x), \quad (2.2)$$

де $\sigma(x)$, $\tilde{\sigma}(x)$, $\tau(x)$, $\tilde{\tau}(x)$, $f(x)$, $\tilde{f}(x)$ – відомі функції.

Умови на спільних межах шарів:

$$\sigma_{zk+1}(x,0) = \sigma_{zk}(x, h_k), w_{k+1}(x,0) = w_k(x, h_k) + r_k \sigma_{zk}(x, h_k), \quad (2.3)$$

$$u_{k+1}(x,0) = u_k(x, h_k) + m_k \tau_{xzk}(x, h_k), \tau_{xzk+1}(x,0) = \tau_{xzk}(x, h_k), \quad (2.4)$$

$$T_{k+1}(x,0) = T_k(x, h_k), k_{Tk+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}(x,0) = k_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial z}(x, h_k), \quad (2.5)$$

де $m_k \geq 0$, $r_k \geq 0$ – дотичні та нормальні коефіцієнти пружних зв'язків відповідно, $T_k(x, z)$ – температура, $u_k(x, z)$, $w_k(x, z)$ – переміщення в напрямках осей $O_k x_k$ та $O_k z_k$ відповідно.

3 Метод розв'язання

Задача зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь для кожного з шарів плити [18]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + (1-\omega) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \omega \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (1-\omega) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \alpha_T \frac{\partial T}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

де $\omega = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$.

Закон Дюамеля-Неймана, який пов'язує між собою напруження, деформації та температуру [18]:

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_z - (3\lambda + 2\mu)\tilde{\alpha}_T T, \quad \tau_{xz} = \mu\gamma_{xz}, \quad \sigma_z = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_x - (3\lambda + 2\mu)\tilde{\alpha}_T T.$$

Вважатимемо, що всі напруження та переміщення задовольняють умовам існування одномірного інтегрального перетворення Фур'є по змінній x (для будь-якого z):

$$\bar{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\xi x} dx, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (3.1)$$

Для кожного шару введемо шість допоміжних функцій, які пов'язані з трансформантами напружень і переміщень на верхній межі шару та трансформантами функцій, які описують температуру та потік на цій межі:

$$\alpha = \bar{\sigma}_z(\xi, 0), \quad \beta = \mu W(\xi, 0), \quad \gamma = \mu S(\xi, 0), \quad \delta = \frac{-i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi, 0), \quad (3.2)$$

$$\eta = \bar{T}(\xi, 0), \quad \varepsilon = \frac{1}{p} \frac{d\bar{T}}{dz}(\xi, 0), \quad (3.3)$$

де $S(\xi, z) = -i\xi \bar{u}(\xi, z)$, $W(\xi, z) = p \bar{w}(\xi, z)$, $p = |\xi|$.

У просторі трансформант переміщення, напруження та функції, які описують температуру та потік у точках шару, можна представити у вигляді лінійних комбінацій його допоміжних функцій [10]:

$$\bar{\sigma}_z(\xi, z) = [-\omega p z \operatorname{sh} p z + \operatorname{ch} p z] \alpha + 2\omega [\operatorname{sh} p z - p z \operatorname{ch} p z] \beta - 2\omega p z \operatorname{sh} p z \gamma -$$

$$- [(1-\omega) \operatorname{sh} p z + \omega p z \operatorname{ch} p z] \delta + \alpha_T \mu p z \operatorname{sh} p z \eta + \alpha_T \mu [-\operatorname{sh} p z + p z \operatorname{ch} p z] \varepsilon, \quad (3.4)$$

$$-\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi, z) = [-(1-\omega) \operatorname{sh} p z + \omega p z \operatorname{ch} p z] \alpha + 2\omega p z \operatorname{sh} p z \beta + 2\omega [\operatorname{sh} p z + p z \operatorname{ch} p z] \gamma +$$

$$+ [\omega p z \operatorname{sh} p z + \operatorname{ch} p z] \delta - \alpha_T \mu [\operatorname{sh} p z + p z \operatorname{ch} p z] \eta - \alpha_T \mu p z \operatorname{sh} p z \varepsilon, \quad (3.5)$$

$$2\mu S(\xi, z) = p z \omega \operatorname{sh} p z \alpha + 2[(1-\omega) \operatorname{sh} p z + p z \omega \operatorname{ch} p z] \beta + 2[\omega p z \operatorname{sh} p z + \operatorname{ch} p z] \gamma +$$

$$+ [(2-\omega) \operatorname{sh} p z + \omega p z \operatorname{ch} p z] \delta - \alpha_T \mu p z \operatorname{sh} p z \eta + \alpha_T \mu [\operatorname{sh} p z - p z \operatorname{ch} p z] \varepsilon, \quad (3.6)$$

$$2\mu W(\xi, z) = [(2-\omega) \operatorname{sh} p z - \omega p z \operatorname{ch} p z] \alpha + 2[-\omega p z \operatorname{sh} p z + \operatorname{ch} p z] \beta + 2[(1-\omega) \operatorname{sh} p z -$$

$$-\omega p z \operatorname{ch} p z] \gamma - \omega p z \operatorname{sh} p z \delta + \alpha_T \mu [\operatorname{sh} p z + p z \operatorname{ch} p z] \eta + \alpha_T \mu p z \operatorname{sh} p z \varepsilon, \quad (3.7)$$

$$\bar{\sigma}_x(\xi, z) = [\omega p z \operatorname{sh} p z + (2\omega - 1) \operatorname{ch} p z] \alpha + 2\omega [\operatorname{sh} p z + p z \operatorname{ch} p z] \beta + 2\omega [p z \operatorname{sh} p z + 2 \operatorname{ch} p z] \gamma +$$

$$+ [(1+\omega) \operatorname{sh} p z + \omega p z \operatorname{ch} p z] \delta - \alpha_T \mu [p z \operatorname{sh} p z + 2 \operatorname{ch} p z] \eta - \alpha_T \mu [\operatorname{sh} p z + p z \operatorname{ch} p z] \varepsilon. \quad (3.8)$$

$$\bar{T}(\xi, z) = \eta(\xi) \operatorname{ch} p z + \varepsilon(\xi) \operatorname{sh} p z. \quad (3.9)$$

Розв'язання сформульованої задачі зводиться до знаходження шести допоміжних функцій (3.2), (3.3) для кожного шару плити.

Спочатку побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують допоміжні функції η_k , ε_k сусідніх шарів плити. Застосуємо до співвідношень (2.5) пряме інтегральне перетворення Фур'є та формули (3.3), (3.9), отримаємо:

$$\eta_{k+1} = C_k \eta_k + S_k \varepsilon_k, \quad \varepsilon_{k+1} = \Delta_k (S_k \eta_k + C_k \varepsilon_k), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (3.10)$$

де $S_k = \text{sh} p_k$, $C_k = \text{ch} p_k$, $p_k = p h_k$, $\Delta_k = \frac{k_T k}{k_T k_{k+1}}$.

Покажемо, що функції η_k та ε_k лінійно залежні. Уведемо фіктивний шар з номером $n+1$, вважаючи, що на спільній межі n -го та $(n+1)$ -го шарів виконуються умови ідеального теплового контакту, тобто $T_{n+1}(x, 0) = T_n(x, h_n)$. Запишемо ці умови в просторі трансформант Фур'є та застосуємо до них формули (3.3) та (3.9):

$$\bar{T}_{n+1}(\xi, 0) = \bar{T}_n(\xi, h_n),$$

$$\eta_{n+1} = C_n \eta_n + S_n \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = -\text{cth} p_n \eta_n + \frac{1}{S_n} \eta_{n+1}, \quad (3.11)$$

де $\eta_{n+1} = \bar{f}(\xi)$.

Виразимо функції η_n та ε_n через функції η_{n-1} та ε_{n-1} за формулами (3.10) і підставимо отримані вирази в останню формулу:

$$\varepsilon_{n-1} = -\frac{\Delta_{n-1} S_{n-1} + \text{cth} p_n C_{n-1}}{\Delta_{n-1} C_{n-1} + \text{cth} p_n S_{n-1}} \eta_{n-1} + \frac{1}{S_n (\Delta_{n-1} C_{n-1} + \text{cth} p_n S_{n-1})} \eta_{n+1}.$$

Аналогічно можна виразити η_{n-1} , ε_{n-1} через η_{n-2} , ε_{n-2} та отримати формулу, яка пов'язує ε_{n-2} та η_{n-2} . Виконуючи аналогічні перетворення можна отримати залежність між ε_k та η_k . Вона має вигляд

$$\varepsilon_k = -D_k \eta_k + F_k \eta_{k+1}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3.12)$$

де функції D_k , F_k – функції податливості термопружної плити за термінологією [10].

Поклавши в (3.12) $k = n$ та прирівнявши коефіцієнти при η_n та η_{n+1} в отриманій рівності та в рівності (3.11), отримаємо:

$$D_n = \text{cth} p_n, \quad F_n = \frac{1}{S_n}. \quad (3.13)$$

Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують між собою функції D_k , F_k ($k = \overline{1, n-1}$) сусідніх шарів плити. З одного боку, зі співвідношень (3.12) отримуємо:

$$\varepsilon_{k+1} = (-D_{k+1} C_k + D_{k+1} S_k D_k) \eta_k + (F_{k+1} - D_{k+1} S_k F_k) \eta_{k+1}.$$

З іншого боку, застосувавши до другого співвідношення (3.10) формулу (3.12), маємо:

$$\varepsilon_{k+1} = \Delta_k (S_k - C_k D_k) \eta_k + \Delta_k C_k F_k \eta_{k+1}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при η_k та η_{k+1} в двох останніх рівностях та виражаємо D_k , F_k через D_{k+1} , F_{k+1} , отримуємо:

$$D_k = \frac{\Delta_k S_k + D_{k+1} C_k}{\Delta_k C_k + D_{k+1} S_k}, \quad F_k = \frac{F_{k+1}}{\Delta_k C_k + D_{k+1} S_k}, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (3.14)$$

Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують між собою допоміжні функції α_k , β_k , γ_k , δ_k сусідніх шарів плити. Запишемо умови (2.3), (2.4) у просторі трансформант Фур'є та застосуємо до них формули (3.2), (3.4)–(3.7) та (3.12):

$$\bar{\alpha}_{k+1} = M_{11k}\bar{\alpha}_k + M_{12k}\bar{\beta}_k + M_{13k}\eta_k + M_{14k}\eta_{n+1}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{k+1} = & (M_{21k} + NM_{11k})\bar{\alpha}_k + (M_{22k} + NM_{12k})\bar{\beta}_k + \\ & + (M_{23k} + NM_{13k})\eta_k + (M_{24k} + NM_{14k})\eta_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

де $\bar{\mu}_k = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}$, $S_k = \text{sh } p_k$, $C_k = \text{ch } p_k$, $p_k = ph_k$, $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k, \delta_k)^t$, $\bar{\beta}_k = (\beta_k, \gamma_k)^t$,

$$N = \begin{pmatrix} r_k p \mu_{k+1} & 0 \\ 0 & m_k p \mu_{k+1} \end{pmatrix}, \quad M_{11k} = \begin{pmatrix} C_k - \omega_k p_k S_k & -(1 - \omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k \\ -(1 - \omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k & C_k + \omega_k p_k S_k \end{pmatrix},$$

$$M_{12k} = \begin{pmatrix} 2\omega_k(S_k - p_k C_k) & -2\omega_k p_k S_k \\ 2\omega_k p_k S_k & 2\omega_k(S_k + p_k C_k) \end{pmatrix}, \quad M_{13k} = \alpha_{Tk} \mu_k \begin{pmatrix} p_k S_k + D_k[S_k - p_k C_k] \\ -(S_k + p_k C_k) + D_k p_k S_k \end{pmatrix},$$

$$M_{14k} = \alpha_{Tk} \mu_k \begin{pmatrix} (p_k C_k - S_k) F_k \\ -p_k S_k F_k \end{pmatrix}, \quad M_{21k} = \frac{1}{2\bar{\mu}_k} \begin{pmatrix} (2 - \omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k & -\omega_k p_k S_k \\ \omega_k p_k S_k & (2 - \omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k \end{pmatrix},$$

$$M_{22k} = \frac{1}{\bar{\mu}_k} \begin{pmatrix} -\omega_k p_k S_k + C_k & (1 - \omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k \\ (1 - \omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k & \omega_k p_k S_k + C_k \end{pmatrix},$$

$$M_{23k} = \frac{\mu_{k+1} \alpha_{Tk}}{2} \begin{pmatrix} S_k + p_k C_k - D_k p_k S_k \\ -p_k S_k - D_k[S_k - p_k C_k] \end{pmatrix}, \quad M_{24k} = \frac{\mu_{k+1} \alpha_{Tk}}{2} \begin{pmatrix} p_k S_k F_k \\ (S_k - p_k C_k) F_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Уведемо фіктивний шар з номером $n+1$. Запишемо умови на спільній межі n -го та $n+1$ -го шарів, вважаючи, що контакт між цими шарами ідеальний:

$$\sigma_{zn+1}(x, 0) = \sigma_{zn}(x, h_n), \quad \tau_{xz n+1}(x, 0) = \tau_{xz n}(x, h_n).$$

Застосуємо до останніх співвідношень пряме інтегральне перетворення Фур'є та співвідношення (3.2), (3.4), (3.5), отримаємо:

$$\bar{\alpha}_{n+1} = M_{11n}\bar{\alpha}_n + M_{12n}\bar{\beta}_n + M_{13n}\eta_n + M_{14n}\eta_{n+1},$$

де $\bar{\alpha}_{n+1} = \left(\bar{\sigma}(\xi), -\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}(\xi) \right)^t$.

Використовуючи формули (3.15), (3.16) та (3.12), виразимо вектор $\bar{\alpha}_{n+1}$ через вектори $\bar{\alpha}_{n-1}$, $\bar{\beta}_{n-1}$ та функції η_{n-1} , η_{n+1} :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{n+1} = & M_{11n}\bar{\alpha}_n + M_{12n}\bar{\beta}_n + M_{13n}\eta_n + M_{14n}\eta_{n+1} = \\ = & [M_{11n}M_{11n-1} + M_{12n}(M_{21n-1} + NM_{11n-1})]\bar{\alpha}_{n-1} + \\ & + [M_{11n}M_{12n-1} + M_{12n}(M_{22n-1} + NM_{12n-1})]\bar{\beta}_{n-1} + \\ & + [M_{11n}M_{13n-1} + M_{12n}(M_{23n-1} + NM_{13n-1}) + M_{13n}(C_{n-1} - D_{n-1}S_{n-1})]\eta_{n-1} + \\ & + (M_{13n}S_{n-1}F_{n-1} + M_{14n})\eta_{n+1}. \end{aligned}$$

Виконуючи аналогічні перетворення з останнім виразом, можна виразити вектор $\bar{\alpha}_{n+1}$ через вектори $\bar{\alpha}_k$ і $\bar{\beta}_k$ та функції η_k , η_{n+1} . Із вище наведеного випливає, що вектор $\bar{\alpha}_{n+1}$ є лінійною комбінацією векторів $\bar{\alpha}_k$ та $\bar{\beta}_k$ та функцій η_k , η_{n+1} . Отже, вектор $\bar{\beta}_k$ можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів $\bar{\alpha}_k$, $\bar{\alpha}_{n+1}$ та функцій η_k , η_{n+1} :

$$\bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k + B_k \bar{\alpha}_{n+1} + K_k \eta_k + L_k \eta_{n+1}. \quad (3.17)$$

Матриці A_k , B_k , K_k та L_k називатимемо матрицями податливості багатошарової плити.

Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують матриці податливості сусідніх плит. Спочатку знайдемо матриці податливості для n -го шару плити. Запишемо співвідношення (3.17) для шару з номером n :

$$\bar{\beta}_n = A_n \bar{\alpha}_n + B_n \bar{\alpha}_{n+1} + K_n \eta_n + L_n \eta_{n+1}.$$

Покладемо у формулі (3.15) $k = n$ та виразимо $\bar{\beta}_n$:

$$\bar{\beta}_n = -M_{12n}^{-1} M_{11n} \bar{\alpha}_n + M_{12n}^{-1} \bar{\alpha}_{n+1} - M_{12n}^{-1} M_{13n} \eta_n - M_{12n}^{-1} M_{14n} \eta_{n+1}.$$

Прирівнявши коефіцієнти при $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\alpha}_{n+1}$, η_n та η_{n+1} в двох останніх співвідношеннях, отримаємо:

$$A_n = -M_{12n}^{-1} M_{11n}, \quad B_n = M_{12n}^{-1}, \quad K_n = -M_{12n}^{-1} M_{13n}, \quad L_n = -M_{12n}^{-1} M_{14n}. \quad (3.18)$$

Побудуємо рекурентні формули, які пов'язують матриці A_k , B_k , K_k та L_k сусідніх шарів плити при $k = \overline{1, n-1}$. Обчислимо $\bar{\beta}_{k+1}$ двома способами. З одного боку, з формул (3.17), (3.10), (3.12) та (3.15):

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{k+1} = & A_{k+1} (M_{11k} + M_{12k} A_k) \bar{\alpha}_k + (A_{k+1} M_{12k} B_k + B_{k+1}) \bar{\alpha}_{n+1} + \\ & + (A_{k+1} M_{12k} K_k + A_{k+1} M_{13k} + K_{k+1} (C_k - S_k D_k)) \eta_k +. \end{aligned}$$

З іншого боку, з формул (3.16) та (3.17):

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{k+1} = & [M_{21k} + N M_{11k} + (M_{22k} + N M_{12k}) A_k] \bar{\alpha}_k + (M_{22k} + N M_{12k}) B_k \bar{\alpha}_{n+1} + \\ & + (A_{k+1} M_{12k} L_k + A_{k+1} M_{14k} + K_{k+1} S_k F_k + L_{k+1}) \eta_{n+1}, \\ & + [(M_{22k} + N M_{12k}) K_k + M_{23k} + N M_{13k}] \eta_k + \\ & + [(M_{22k} + N M_{12k}) L_k + M_{24k} + N M_{14k}] \eta_{n+1}. \end{aligned}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\bar{\alpha}_k$, $\bar{\alpha}_{n+1}$, η_k , η_{n+1} в двох останніх виразах та виражаємо з отриманих рівностей A_k , B_k , K_k та L_k :

$$A_k = (A_{k+1} M_{12k} - M_{22k} - N M_{12k})^{-1} (M_{21k} + N M_{11k} - A_{k+1} M_{11k}), \quad (3.19)$$

$$B_k = -(A_{k+1} M_{12k} - M_{22k} - N M_{12k})^{-1} B_{k+1}, \quad (3.20)$$

$$K_k = (A_{k+1} M_{12k} - M_{22k} - N M_{12k})^{-1} (M_{23k} + N M_{13k} - A_{k+1} M_{13k} - K_{k+1} (C_k - D_k S_k)), \quad (3.21)$$

$$L_k = (A_{k+1} M_{12k} - M_{22k} - N M_{12k})^{-1} (M_{24k} + N M_{14k} - A_{k+1} M_{14k} - K_{k+1} S_k F_k - L_{k+1}). \quad (3.22)$$

Користуючись співвідношеннями (3.14), (3.19)–(3.22), можна послідовно знайти функції податливості всіх шарів плити, починаючи з функцій податливості n -го шару, які обчислюються за формулами (3.13), (3.18).

Із крайових умов знаходимо допоміжні функції α_1 , δ_1 , η_1 та α_{n+1} , δ_{n+1} , η_{n+1} . Решту допоміжних функцій знаходимо за формулами (3.12), (3.15) та (3.16). Підставляємо отримані допоміжні функції для k -го шару плити в формули (3.4)–(3.9) та застосовуємо до них обернене перетворення Фур'є, отримуємо шукані компоненти напружено-деформованого стану цього шару.

Зазначимо, що при відсутності теплових навантажень отримані формули з точністю до позначень співпадають з формулами побудованими в [16].

4 Чисельні результати

Чисельні розрахунки проведено для двошарової плити з такими характеристиками шарів:

$$h_1 = h_2 = h, \quad \mu_1/\mu_2 = 0,5, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0.8. \quad \text{За крайових умов } T_1(x,0) = T_2(x,h_2) = \begin{cases} T_0, & |x| < h, \\ 0, & |x| \geq h, \end{cases}$$

$\sigma_{z1}(x,0) = \sigma_{z2}(x,h_2) = 0, \quad \tau_{xz1}(x,0) = \tau_{xz2}(x,h_2) = 0$ знайдено нормальні (рис. 4.1а) та дотичні (рис. 4.1б) напруження вздовж спільної межі двошарової плити для різних відношень коефіцієнтів теплового розширення шарів $\tilde{\Delta} = \alpha_{T1}/\alpha_{T2}$ при $\Delta = 1$. За крайових умов:

$$T_1(x,0) = \begin{cases} T_0, & |x| < h, \\ 0, & |x| \geq h, \end{cases} \quad T_2(x,h_2) = \begin{cases} 0.1T_0, & |x| < h, \\ 0, & |x| \geq h, \end{cases} \quad \sigma_{z1}(x,0) = \sigma_{z2}(x,h_2) = 0, \quad \tau_{xz1}(x,0) = \tau_{xz2}(x,h_2) = 0$$

знайдено нормальні (рис. 4.2а) та дотичні (рис. 4.2б) напруження вздовж спільної межі двошарової плити для різних відношень коефіцієнтів теплового розширення шарів $\tilde{\Delta} = \alpha_{T1}/\alpha_{T2}, \Delta = 1$. На рис. 4.3 наведено аналогічні графіки для різних відношень коефіцієнтів теплопровідності шарів $\Delta = k_{T1}/k_{T2}$ при $\tilde{\Delta} = \alpha_{T1}/\alpha_{T2} = 1$. На рис. 4.1–4.3 крива 1 відповідає значенням коефіцієнтів пружних зв'язків $m = r = 0$ (ідеальний контакт), крива 2 – $m = 0$ і $r = 1$, крива 3 – $m = 1$ і $r = 0$; крива 4 – $m = r = 1$.

Аналіз графіків розподілу нормальних та дотичних напружень дозволяє зробити такі висновки:

- 1) наявність пружних зв'язків між шарами плити призводить до зменшення напружень на стику шарів плити у порівнянні з ідеальним контактом;
- 2) для плити, на верхній межі якої температурні навантаження більші ніж на нижній, наявність нормальних пружних зв'язків більш суттєво впливає на розподіл нормальних напружень на спільній межі шарів, а наявність дотичних пружних зв'язків – на розподіл дотичних напружень;
- 3) збільшення коефіцієнта теплового розширення нижнього шару більш суттєво впливає на розподіл напружень $\sigma_{z1}(x,h)$ та $\tau_{xz1}(x,h)$, у порівнянні зі збільшенням цього коефіцієнта для верхнього шару;
- 4) температурне навантаження не викликає напружень у точках плити, шари якої мають однакові коефіцієнти теплового розширення та теплопровідності.

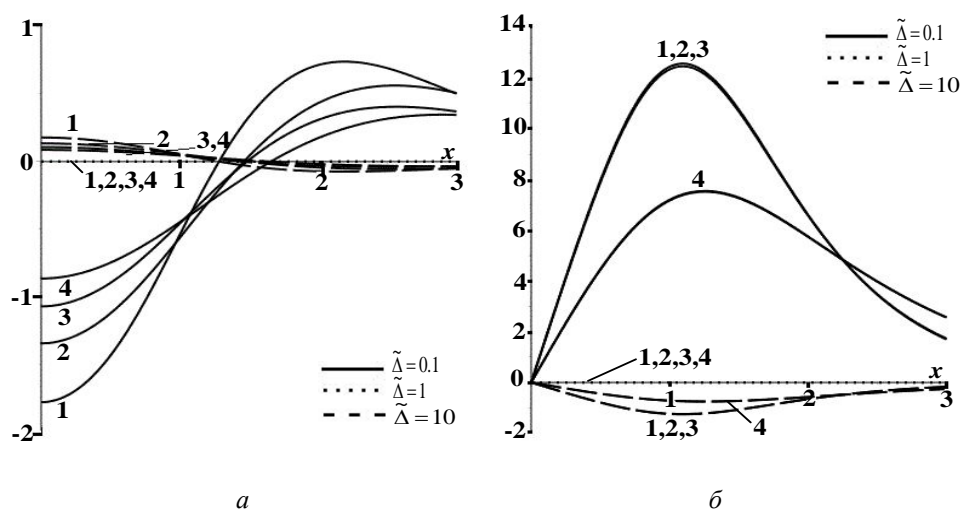


Рис. 4.1 Нормальні $10\sigma_{z1}(x,h)/(\alpha_{T1}T_0\mu_1)$ та дотичні $10\tau_{xz1}(x,h)/(\alpha_{T1}T_0\mu_1)$ напруження на спільній межі шарів двошарової плити

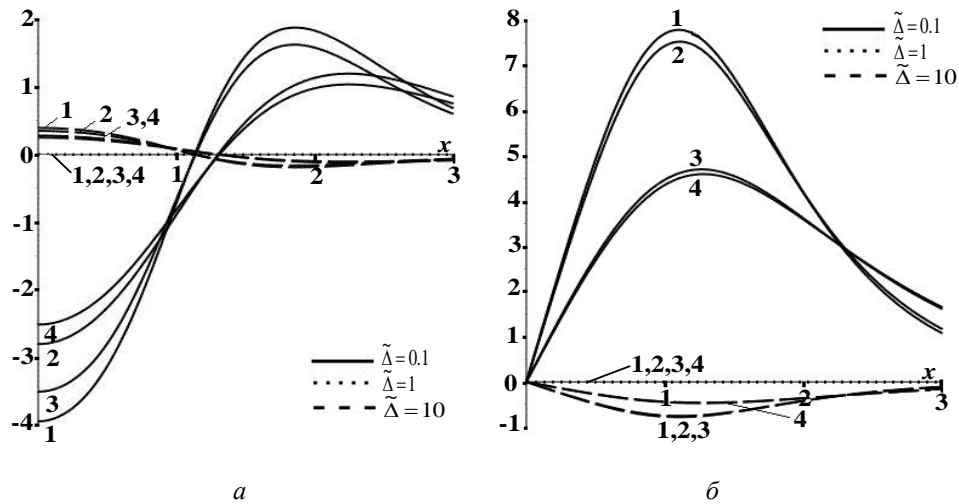


Рис.4.2 Нормальні $10\sigma_{z1}(x,h)/(\alpha_{T1}T_0\mu_1)$ та дотичні $10\tau_{xz1}(x,h)/(\alpha_{T1}T_0\mu_1)$ напруження на спільній межі шарів двошарової плити

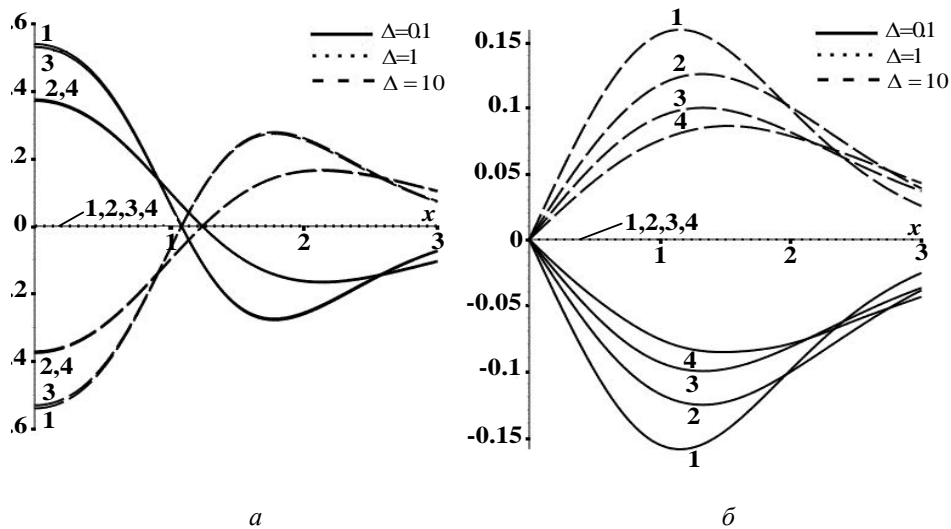


Рис.4.3 Нормальні $10\sigma_{z1}(x,h)/(\alpha_{T1}T_0\mu_1)$ та дотичні $10\tau_{xz1}(x,h)/(\alpha_{T1}T_0\mu_1)$ напруження на спільній межі шарів двошарової плити

5 Висновки

Запропоновано спосіб визначення напружено-деформованого стану багатошарової плити з пружними зв'язками, що перебуває під дією теплових та силових навантажень. У просторі трансформант Фур'є в матричній формі побудовано рекурентні співвідношення, які пов'язують допоміжні функції сусідніх шарів, через які виражаються трансформанти напружень та переміщень шарів, та рекурентні співвідношення між функціями податливості сусідніх шарів плити. Проведено чисельні розрахунки для двошарової плити при різних видах теплових навантажень на верхній та нижній межах плити.

Запропонований спосіб визначення напружено-деформованого стану багатошарових плит з пружними зв'язками між шарами дозволяє провести детальний аналіз впливу механічних та температурних характеристик шарів на розподіл напружень і переміщень у шарах плити з пружними зв'язками між ними з будь-якою скінченною кількістю шарів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Vel S. S., Batra R. C. Generalized Plane Strain Thermoelastic Deformation of Laminated Anisotropic Thick Plates. International Journal of Solids and Structures. 2001. Vol. 38, № 8. P. 1395–1414.

2. Kushnir R.M., Protsyuk B.V., Synyuta V.M. Temperature Stresses and Displacements in a Multilayer Plate with Nonlinear Conditions of Heat Exchange. *Materials Science*. 2002. Vol. 38, № 6. P. 798 – 808.
3. Chien-Ching Ma, Shin-Wen Chang Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2004. Vol. 47, № 8-9. P. 1643–1655.
4. Brischetto S., Carrera E. Coupled thermo-mechanical analysis of one-layered and multilayered plates. *Composite Structures*. 2010. Vol. 92, № 8. P. 1793–1812.
5. Аттеков А. В., Волков И. К., Тверская Е. С. Температурное поле многослойного полупространства при неидеальном тепловом контакте между слоями. *Известия Российской академии наук. Энергетика*. 2010. № 3. С. 83–91.
6. Chien-Ching Ma, Yi-Tzu Chen Theoretical analysis of heat conduction problems of nonhomogeneous functionally graded materials for a layer sandwiched between two half-planes. *Acta Mechanica*. 2011. Vol. 221, № 3. P. 223–237.
7. Cetkovic M. Thermo-mechanical bending of laminated composite and sandwich plates using layerwise displacement model. *Composite Structures*. 2015. Vol. 125. P. 388–399.
8. Zenkour A. M., Maturi D. A. Thermoelastic bending response of laminated plate resting on elastic foundations. *Scientia Iranica*. 2015. Vol. 22, № 2. P. 287–298.
9. Бойко С. Б., Величко О. В. Аналітичний метод визначення теплових стаціонарних полів у шаруватих конструкціях. *Вісник Тернопільського національного технічного університету*. 2015. № 1, т. 77. С. 257–266.
10. Величко І. Г., Ткаченко І. Г. Плоска термопружна деформація багатшарової основи. *Вісник Дніпропетровського університету. Сер. Механіка*. 2004. Вип. 8, т. 1. С. 154–161.
11. Jones J. P., Whitter J. S. Waves at a flexibly bonded interface. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1967. Vol. 34, № 4. P. 178–183.
12. Барсегян В. М., Хачатрян А. М. Об асимптотическом решении смешанной краевой задачи для трехслойной полосы при различных условиях контакта слоев. *Изв. НАН Армении. Механика*. 2001. № 1, т. 54. С. 17–25.
13. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Асимптотические решения несвязных задач стационарной теплопроводности и термоупругости для двухслойных пластин с неклассическими граничными условиями. *Изв. НАН Армении. Механика*. 2017. № 2, т. 70. С. 3–14.
14. Пожуев А. В., Михайлуца Е. Н. Действие нестационарной нагрузки на двухслойную цилиндрическую оболочку с упругой прослойкой. *Вісник СевДТУ. Механіка, енергетика, екологія : зб. наук. пр.* 2008. Вип. 88. С. 5–12.
15. Пожуев А. В., Михайлуца Е. Н. Нестационарная пространственная деформация двухслойной пластины конечных размеров с неидеальной связью. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2011. № 1. С. 139–143.
16. Антоненко Н. М. Плоска деформація багатшарової плити з пружними зв'язками між шарами. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Сер. : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2013. Вип. 23, № 1089. С. 15–21.
17. Antonenko N. M. Plane Thermoelastic Deformation of a Multilayer Plate Elastically Coupled with a Rigid Half Plane. *Materials Science*. 2017. Vol. 53, № 3. P. 407–416.
18. Коваленко А. Д. Термоупругость. Київ : Вища школа, 1975. 216 с.

REFERENCES

1. S. S. Vel, and R. C. Batra, "Generalized Plane Strain Thermoelastic Deformation of Laminated Anisotropic Thick Plates." *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, no. 8, pp. 1395–1414. 2001.
2. R. M. Kushnir, B. V. Protsyuk, and V. M. Synyuta, "Temperature Stresses and Displacements in a Multilayer Plate with Nonlinear Conditions of Heat Exchange," *Materials Science*, vol. 38, no. 6, pp. 798–808, 2002.
3. Ch.-Ch. Ma, and Sh.-W. Chang, "Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, no. 8-9, pp. 1643–1655, 2004.

4. S. Brischetto, and E. Carrera, "Coupled thermo-mechanical analysis of one-layered and multilayered plates." *Composite Structures*, vol. 92, no. 8, pp. 1793–1812, 2010.
5. A.V. Attekov, I.K. Volkov, and E.S. Tverskaya, "Temperature field in a multilayer half space for the imperfect thermal contact of layers." *Izv. Ross. Acad. Nauk, Energet*, no. 3, pp. 83–91, 2010.
6. Ch.-Ch. Ma, and Y.-T. Chen, "Theoretical analysis of heat conduction problems of nonhomogeneous functionally graded materials for a layer sandwiched between two half-planes." *Acta Mechanica*, vol. 221, no. 3, pp. 223–237, 2011.
7. M. Cetkovic, "Thermo-mechanical bending of laminated composite and sandwich plates using layerwise displacement model." *Composite Structures*, vol. 125, pp. 388–399, 2015.
8. A. M. Zenkour, and D. A. Maturi, "Thermoelastic bending response of laminated plate resting on elastic foundations," *Scientia Iranica*, vol. 22, no. 2, pp. 287–298, 2015.
9. S. Boyko, and H. Velichko, "Analytical method for determining the stationary thermal fields in layered structures," *Bulletin of TNTU*, vol. 77, no. 1, pp. 257–266, 2015.
10. I. G. Velychko, and I. G. Tkachenko, "Plane thermoelastic deformation of multilayer foundation," *Visn. Dnibr. Univ. Mekh.*, vol. 1, no. 8, pp. 154–161, 2004.
11. J. P. Jones, and J. S. Whitter, "Waves at a flexibly bonded interface," *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, vol. 34, no. 4, pp. 178–183, 1967.
12. V. M. Barsegyan, and A. M. Khachatryan, "On Asymptotic solution of a mixed boundary problem for a three-layered stripe under different conditions of the contact between the stripes," *The Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics*, vol. 54, no. 1, pp. 17–25, 2001
13. L. A. Aghalovyan, and R. S. Gevorgyan, "Asymptotic solutions of stationary problems of thermal conductivity and thermoelasticity with nonclassical boundary conditions for the two-layer plates with full and incomplete contact layers," *The Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics*, vol. 70, no. 2, pp. 3–14, 2017.
14. A. V. Pozhuev, and E. N. Mihaylutsa, "Action non-stationary load on a two-layer cylindrical shell with an elastic interlayer," *Journal of the Sevastopol National Technical University. Series: Mechanics, Power Engineering, Ecology*, vol. 88, pp. 5–12. 2008.
15. A. Pozhuev, and E. Mihaylutsa, "Non-stationary spatial deformation of the final sizes two-layer plate with nonideal communication," *Innovative materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering*, no.1, pp. 139–143, 2011.
16. N. M. Antonenko, "The plane deformation of the multilayer plates with elastic connections between the layers," *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems»*, vol. 23, no. 1089, pp. 15–21, 2013
17. N. M. Antonenko, "Plane Thermoelastic Deformation of a Multilayer Plate Elastically Coupled with a Rigid Half Plane," *Materials Science*, vol. 53, no. 3, pp. 407–416, 2017.
18. A. D. Kovalenko, *Thermoelasticity*. Kiev: Vyscha Shcola, 1975.

Антоненко Ніна Миколаївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент; Запорізький національний технічний університет, м. Запоріжжя, вул Жуковського, 64, 69063; e-mail: antonenkonina.ua@gmail.com; ORCID: 0000000204276499.

УДК 519.856:519.6

Метод синтеза решений многокритериальных задач стохастической оптимизации со смешанными условиями

А.В. Безлюбченко¹, Е.С. Меньяйлов¹, М.Л. Угрюмов², К.М. Угрюмова¹, С.В. Черныш¹¹Харьковский национальный аэрокосмический университет имени Н. Е. Жуковского «ХАИ», Чкалова 27, г. Харьков, 61070, Украина²Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы 4, г. Харьков, 61022, Украина

e-mail: j.menyailov@khai.edu

Розглядається постановка задачі оцінювання критеріїв вибору рішень (цільових функцій) і шуканих величин в багатокритеріальних задачах при апріорній невизначеності даних. Представлено види скалярних згорток цільових функцій для багатокритеріальних задач ідентифікації математичних моделей, оптимізації та прийняття рішень (на основі статистик Стьюдента і В.І. Романовського). Розглядаються модель і метод синтезу рішень багатокритеріальних задач стохастичною оптимізації зі змішаними умовами (MV-задач). У якості обчислювального методу синтезу квазірішень некоректних задач застосування отримав метод регуляризації рішення некоректних задач А.Н. Тихонова, в якому в якості скалярної згортки цільових функцій використовується згладжуючий функціонал. Як додаток до складу згладжуючого функціоналу включається стабілізуючий функціонал (функція приналежності), що дозволяє, з одного боку, врахувати систему переваг особи, що приймає рішення, а, з іншого боку, забезпечити коректність методу синтезу квазірішення. При цьому вибір стабілізуючого функціоналу слід здійснювати згідно з рядом умов, зокрема, він повинен бути безперервним та невід'ємно опуклим. Розроблений авторами обчислювальний метод синтезу рішень задач цього класу, базується на меметичному алгоритмі, в якому реалізовано спільне використання еволюційного методу, з мінливими від епохи до епохи параметрами, а також методу звужуючих околиць і рандомізованого методу прокладки шляхів. Представлені результати аналізу збіжності запропонованих обчислювальних методів при вирішенні задачі знаходження екстремуму багатовимірних функцій Растригина і Розенброка в детермінованому і стохастичному формулюваннях. Застосування запропонованих розробок забезпечує ефективне робастне оцінювання шуканих величин при параметричній невизначеності вхідних даних і зниження інформаційної складності методу синтезу квазірішення.

Ключові слова: стохастичне програмування; обчислювальна математика, чисельний аналіз і програмування (машинна математика), меметичний алгоритм.

Рассматривается постановка задачи оценивания критериев выбора решений (целевых функций) и искоемых величин в многокритериальных задачах при априорной неопределенности данных. Представлены виды скалярных сверток целевых функций для многокритериальных задач идентификации математических моделей, оптимизации и принятия решений (на основе статистик Стьюдента и В.И. Романовского). Рассматриваются модель и метод синтеза решений многокритериальных задач стохастической оптимизации со смешанными условиями (MV-задач). В качестве вычислительного метода синтеза квазирешений некорректных задач применение получил метод регуляризации решения некорректных задач А.Н. Тихонова, в котором в качестве скалярной свертки целевых функций используется сглаживающий функционал. В качестве дополнительного слагаемого в состав сглаживающего функционала включается стабилизирующий функционал (функция принадлежности), что позволяет, с одной стороны, учесть систему предпочтений лица принимающего решения, а, с другой стороны, обеспечить корректность метода синтеза квазирешений. При этом выбор стабилизирующего функционала следует осуществлять согласно ряду условий, в частности, он должен быть непрерывным неотрицательным выпуклым. Разработан вычислительный метод синтеза решений задач этого класса, основанный на меметическом алгоритме, в котором реализовано совместное использование эволюционного метода с изменяющимися от эпохи к эпохе параметрами: операторов вещественного кодирования, функции приспособленности и релаксации, а также метод в котором реализовано совместное использование эволюционного метода с изменяющимися от эпохи к эпохе параметрами: операторов, а также метода сужающихся окрестностей и рандомизированного метода прокладки путей. Представлены результаты анализа сходимости предложенных вычислительных методов при решении задачи нахождения экстремума многомерных функций Растригина и Розенброка в детерминированной и стохастической формулировках. Применение предлагаемых разработок обеспечивает эффективное робастное оценивание искоемых величин при параметрической неопределенности входных данных и снижение информационной сложности метода синтеза квазирешений.

Ключевые слова: стохастическое программирование; вычислительная математика, численный анализ и программирование (машинная математика), меметический алгоритм.

The definition of decision selection criteria (objective functions) and desired quantities estimation are considered for the multi-objective problems with a priori uncertain data. The presented types of scalar convolution of decision selection criteria are obtained for the multi-criteria problems of the development of robust meta-models, mathematical models identification, optimization and decision making. A model and a method for the synthesis of the solutions of multi-criteria problems of stochastic optimization with mixed conditions (MV-problems) are considered. As a computational method for the synthesis of quasi-solutions of ill-posed problems, the method of regularization of the solution of ill-posed problems by Tikhonov, where the smoothing functional is used as a scalar convolution of the objective functions, has been applied. As an additional component, the stabilizing functional (membership function) is included in the smoothing functional, which allows to take into account the system of preferences of the decision maker and to ensure the correctness of the quasi-solution synthesis method as well. In this case, the choice of the stabilizing functional should be carried out according to a number of conditions; it should

be a continuous non-negative convex, in particular. A computational method based on a memetic algorithm for the synthesis of solutions for this class of the problems is developed. The results of the analysis of the convergence of the proposed computational methods for solving the problem of finding the extremum of multidimensional functions in deterministic and stochastic formulations are presented. Application of the proposed developments provides an effective robust estimation of the sought values for the parametric uncertainty of the input data and a reduction in the information complexity of the method of synthesizing quasi-solutions.

Keywords: *stochastic programming; computational mathematics, numerical analysis and programming (computer mathematics), memetic algorithm.*

1 Введение

Одной из актуальных проблем при создании объектов новой техники является проблема снижения затрат на доводку и при эксплуатации систем и процессов. Решение этой технической проблемы возможно за счет внедрения в практику методов робастного оптимального проектирования и интеллектуального диагностирования систем и процессов.

При разработке последних возникают математические проблемы: оценивание неопределенностей, структуризация регуляризирующих алгоритмов и высокая вычислительная сложность методов синтеза квазирешений практических задач в условиях неопределенности.

К настоящему времени опубликовано множество работ, посвященных описанию моделей синтеза решений, методов оценивания целевых функций и искомых величин в многокритериальных задачах идентификации математических моделей, оптимизации и принятия решений при проектировании, совершенствовании и диагностировании технических, а также медико-биологических систем – при параметрической неопределенности данных [1-15].

В качестве вычислительных методов синтеза решений задач стохастической оптимизации используются локально-стохастические методы (в том числе на основе самоорганизации):

- стохастические квазиградиентные алгоритмы [16-19];
- эволюционные (генетические алгоритмы, иммунные) [20-25, 14, 15];
- популяционные (имитации движения: стаи перелетных птиц; муравьиных, пчелиных колоний) [26-31].

Результатом исследований стали разработанные методы синтеза решений М-, V-, P-задач, задач стохастической оптимизации со смешанными условиями и реализующие их программные средства, которые в настоящее время применяются для решения практических задач.

Следует отметить, в большинстве работ, посвященных оцениванию целевых функций и искомых величин в вышеперечисленных задачах отсутствует анализ значимости переменных нелинейных моделей с учетом их коррелируемости и точности измерения.

К недостаткам рассмотренных вычислительных методов следует отнести следующие: отсутствие самоадаптации в процессе работы, низкая их эффективность на заключительном этапе оптимизации. Большое влияние на эффективность алгоритмов, реализующих эти методы, оказывает выбор используемых свободных параметров при настройке алгоритмов.

В связи с этим, необходимо совершенствовать существующие и разрабатывать новые математические методы оценивания целевых функций и искомых величин в многокритериальных задачах идентификации математических моделей, оптимизации и принятия решений при априорной неопределенности данных.

Целью данного исследования является разработка модели и метода синтеза решений многокритериальных задач стохастической оптимизации со смешанными условиями (MV-задач).

В процессе исследования авторами структурирован вычислительный метод синтеза решений задач этого класса, основанный на меметическом алгоритме, в котором реализовано совместное использование эволюционного метода с изменяющимися от эпохи к эпохе параметрами: операторов вещественного кодирования, функции приспособленности и релаксации, а также метода сужающихся окрестностей и рандомизированного метода прокладки путей.

Представлены примеры реализации предложенного метода при решении тестовых задач в детерминированной и стохастической формулировках.

2 Постановки задач стохастической оптимизации со смешанными условиями

Пусть X^0 – вектор случайных величин размерности M (параметры модели, управляющие переменные, переменные состояния), F^0 – вектор случайных величин размерности I (данные измерений, целевых функции). Величины F^0 можно найти с использованием исходной математической модели (ИММ) объекта исследования, представленном в виде $F^0 = F(X^0)$, где F – вектор-функция.

Определим проекции X^0 и F^0 как случайные величины с нормальным законом распределения, задав их математические ожидания, средние квадратические отклонения и корреляционные матрицы. Приведенные входные данные позволяют перейти к представлению X^0 и F^0 как систем нескольких случайных величин с многомерным нормальным законом распределения.

В соответствии с концепцией степенных средних А.Н. Колмогорова, будем использовать в качестве критериев проверки гипотезы о равенстве центров распределений для репрезентативных выборок из двух многомерных генеральных совокупностей t – статистику Стьюдента, а гипотезы о равенстве ковариационных матриц – многомерный аналог критерия В.И. Романовского Ro :

$$t = \sqrt{\frac{n_\alpha}{2}} MD^2, \quad (1)$$

где n_α – размерность выборок из генеральных совокупностей;

MD – расстояние Махаланобиса;

$$Ro = \frac{|\chi^2 - k|}{\sqrt{2k}}, \quad k = n_\alpha - 3, \quad (2)$$

где $\chi^2 = \frac{n_\alpha}{N} (\sigma^0)^T R \sigma^0$ – многомерный аналог критерия согласия Пирсона;

N – размерность X^0 (или F^0);

$$\sigma^0 = \begin{cases} \sigma_n \\ \sigma_n^* \end{cases}, \quad n = 1..N;$$

σ_n, σ_n^* – средние квадратические отклонения переменных $x_n \in X^0$ (индекс * – желаемые значения);

R – корреляционная матрица.

Определим логарифмическую функцию правдоподобия. Окончательный вид скалярной свертки целевых функций для задач принятия решений с использованием (1-2) имеет вид [15]:

$$L(\hat{X} / t_F, Ro_F) = \frac{1}{2} (t_F^2 + Ro_F + t_X^2 + Ro_X) + C_L.$$

В дальнейшем в качестве скалярной свертки целевых функций в MV-задачах, полагая, что $R_X = R_F = E$, где R_X и R_F – корреляционные матрицы, использовалась свертка [15]:

$$E = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \left\{ f_{fit} \left[\left(\mu_i(f_i^*) \frac{\Delta_{f_i}}{f_i^*} \right)^2 (1 + \sigma_{f_i}^0)^{-2} \right] + \beta_f \cdot f_{fit} \left(\frac{|\chi_{f_i}^2 - k|}{\sqrt{2k}} \right) \right\} + \\ + \gamma \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M \left\{ f_{fit} \left[\left(\mu_m(x_m^*) \frac{\Delta_{x_m}}{x_m^*} \right)^2 (1 + \sigma_{x_m}^0)^{-2} \right] + \beta_x \cdot f_{fit} \left(\frac{|\chi_{x_m}^2 - k|}{\sqrt{2k}} \right) \right\}, \quad (3)$$

где $\Delta_{f_i} = M_\alpha[f_i] - f_i^*$, $\chi_{f_i}^2 = n_\alpha \frac{M_\alpha[(f_i - M_\alpha[f_i])^2]}{(\sigma_{f_i}^*)^2}$; $\sigma_{f_i}^0 = \begin{cases} \sigma_{f_i} \\ \sigma_{f_i}^* \end{cases}$;

$$\frac{|\chi_{f_i}^2 - k|}{\sqrt{2k}} = \frac{n_\alpha}{\sqrt{2(n_\alpha - 3)}} \left| (\sigma_{f_i}^\circ)^2 - 1 + \frac{3}{n_\alpha} \right|;$$

$$\Delta_{x_m} = M_\alpha[x_m] - x_m^*, \quad \chi_{x_m}^2 = n_\alpha \frac{M_\alpha[(x_m - M_\alpha[x_m])^2]}{(\sigma_m^*)^2}; \quad \sigma_{x_m}^\circ = \left\{ \frac{\sigma_{x_m}}{\sigma_{x_m}^*} \right\};$$

$$\frac{|\chi_{x_m}^2 - k|}{\sqrt{2k}} = \frac{n_\alpha}{\sqrt{2(n_\alpha - 3)}} \left| (\sigma_{x_m}^\circ)^2 - 1 + \frac{3}{n_\alpha} \right|,$$

x_m^* , σ_m^* – значения математического ожидания и среднего квадратического отклонения переменной x_m для прототипа;

σ_{x_m} – среднее квадратическое отклонение переменной $x_m \in X^0$.

f_i^* , $\sigma_{f_i}^*$ – значения математического ожидания и среднего квадратического отклонения критериев выбора решений f_i для прототипа;

σ_{f_i} – среднее квадратическое отклонение критериев выбора решений $f_i \in F^0$.

f_{fit} – функция приспособленности (ФПр),

$f_{fit}(d) = 1 - \exp(-C \cdot d)$, $C > 0$ (выбирается из условия, что начальное значение $E_{av}^{(1)}$ было: $E_{av}^{(1)} < 1$), d – аргумент ФПр ($d > 0$);

$\mu_i(f_i^*)$, $\mu_m(x_m^*)$ – функции принадлежности;

γ – параметр регуляризации ($\gamma = 0$ – идентификация, $\gamma = 1$ – оптимизация);

β_f, β_x – параметры робастности.

Таким образом, задача оценивания $\hat{X} = (M[X^0], \sigma_X^0)$ (в частности, ЗРКРЦ) может быть сведена к МЗСО со смешанными условиями (в нашем случае MV-задачи), квазирешением которой, согласно принципу максимума правдоподобия (М-оценка), является [14, 15]:

$$\hat{X} = \arg \inf_{\hat{X} \in D_X} E(\hat{X} / t_F, R_{OF}), \quad (4)$$

где D_X – множество корректности, определяющееся в общем случае системой предпочтений ЛПР. В данном случае предполагалось, что D_X является выпуклым множеством.

3 Эволюционный метод решения задачи стохастической оптимизации со смешанными условиями

Квазирешение поставленной задачи (нормальное решение) может быть найдено методом регуляризации [15, 32]. Синтез квазирешений многокритериальных задач системной модификации в детерминированной и стохастической (MV-задача) формулировках осуществляется с помощью вычислительного метода, основанного на меметическом алгоритме.

Определим эволюционный метод (ЭМ) как модификацию генетического алгоритма (ГА), с изменяющимися от эпохи к эпохе параметрами. В данной работе представлены описание предложенного метода и элементы новизны, отличающие предлагаемый метод от классического ГА.

На первом этапе задаются ограничения на управляющие переменные, которыми манипулирует ГА. Обычно такие условия задаются системой неравенств, ограничивающих каждую управляющую переменную с двух сторон: $x_m' \leq x_m \leq x_m''$, $m = 1 \dots M_d$, где x_m – набор из M_d управляющих переменных; x_m' и x_m'' – их нижние и верхние границы, соответственно. В предложенном подходе ограничения задавались в виде $X^\circ \in O(P, R^\circ)$, где $O(P, R^\circ)$ – эллипсоид с центром в точке P и радиусом R° . Таким образом, в области поиска, ограниченной случайным образом с равномерным или нормальным распределением формируется начальный

набор переменных. Набор переменных x_m , соответствующий какому-либо решению, будем называть особью, а общий набор особей – популяцией.

После формирования начальной популяции и ее кодирования начинается работа самого ГА. В качестве эвристики при отборе родительских особей был выбран метод рулетки, что позволяет отбирать особи с лучшими значениями скалярной свертки критериев выбора решений (целевых функций) с большей вероятностью, чем при равномерной выборке.

В данной работе использован вещественный оператор кроссовера, имитирующий бинарный [31], он формирует две новых хромосомы $x_{1,m}^{(t+1)}$, $x_{2,m}^{(t+1)}$ по принципу:

$$\begin{aligned}x_{1,m}^{(t+1)} &= 0.5((1-u_1)x_{1,m}^{(t)} + (1+u_1)x_{2,m}^{(t)}), \\x_{2,m}^{(t+1)} &= 0.5((1-u_1)x_{2,m}^{(t)} + (1+u_1)x_{1,m}^{(t)}),\end{aligned}$$

где u_1, u_2 – случайные величины, плотность распределения вероятности которых подчинена закону:

$$\xi(u) = \begin{cases} (2u)^{\frac{1}{1+b}}, & u \geq 0,5 \\ \left(\frac{1}{2(1-u)}\right)^{\frac{1}{1+b}}, & u < 0,5 \end{cases},$$

где $b \in [2,5]$ – натуральное число (свободный параметр оператора кроссовера), увеличение которого влечет за собой увеличение вероятности появления особи потомка в окрестности особи родителя и наоборот. В дальнейшем использовался закон изменения параметра вещественного оператора кроссовера от номера эпохи:

$$b = 2 + 3\left(\frac{t}{T}\right)^n, \quad n \in [0,5].$$

В качестве вещественного оператора мутации, использован оператор неравномерной мутации Михалевича [31], относящийся к классу нестационарных мутаторов. Новое значение гена $x_m^{(t+1)}$, подлежащего изменению, вычисляется по формуле:

$$x_m^{(t+1)} = \begin{cases} x_m^{(t)} + \delta(t, x_m'' - x_m^{(t)}), & u_1 = 0 \\ x_m^{(t)} + \delta(t, x_m^{(t)} - x_m'), & u_1 = 1 \end{cases},$$

где $u_1 = u_{sign}^{\pm}$ – целое случайное число, с равномерной вероятностью принимающее значение 0 или 1, функцию $\delta(t, y)$, можно определить как

$$\delta(t, y) = y \left(1 - u_2^{\left(1 - \frac{t}{T}\right)^b} \right),$$

где $u_2 = U(0,1)$ – случайное число,

b – свободный параметр оператора, определяющий степень зависимости значений функции от номера эпохи (рекомендуемое значение $b = 5$). Легко видно, что $\delta(t, y)$ принимает значения в интервале $[0, y]$ и с ростом номера эпохи t этот интервал сужается. В результате на начальных эпохах ГА, оказывается близким к оператору случайной мутации, а на завершающих эпохах, производит мутации, обеспечивающие близость значений величин $x_m^{(t)}$ и $x_m^{(t+1)}$.

После осуществления операций кроссовера и мутации происходит выбор наиболее приспособленной особи (в случае поиска решений многокритериальных задач стохастической оптимизации со смешанными условиями (многокритериального принятия решений) – особь с наиболее подходящей скалярной сверткой критериев выбора решений), которая и помещается в набор особей для следующей эпохи алгоритма.

При создании новой популяции дополнительно использовался также элитный отбор. Для каждой новой популяции из предыдущей популяции, отбирались особи, у которых скалярная свертка критериев выбора решений E была меньше некоторого порогового значения $E < E_c$,

где E_c – среднее значение скалярной свертки критериев выбора решений популяции для текущей эпохи.

Повторение, вышперечисленных действий (эпох), происходит до тех пор, пока не выполнится условие остановки. Таким условием может быть выполнение максимально допустимого количества эпох T , либо отсутствие изменений скалярной свертки критериев выбора решений (с заданной погрешностью) в популяции на протяжении определенного количества эпох. В качестве рационального решения задачи, на последней эпохе выбиралась особь, для которой скалярная свертка критериев выбора решений минимальна.

В качестве особенности, можно отметить, что классический ГА позволяет получить быструю сходимость на первых нескольких эпохах, В тоже время, недостатком является невысокая точность нахождения экстремума для сложных критериев выбора решений.

Одним из средств повышения скорости сходимости ГА является, как известно, кластеризация. Для повышения скорости сходимости и точности нахождения экстремума была разработан метод сужающихся окрестностей (Decremental Neighborhood Method), реализующий идеи кластеризации [14]. Суть этого метода заключается в следующем. Вначале происходит запуск ГА с равномерным распределением начальной популяции по всей области поиска $[x_m', x_m'']$. В результате отбирается особь с наилучшей для данных настроек ГА скалярной сверткой критериев выбора решений. Найденный экстремум \hat{X}° используется далее как центр новой области определения управляющих переменных метода. Область определения следующей эпохи ГА задаем в виде:

$$D_x = [k_x x_m' + (1 - k_x) \hat{x}_m, k_x x_m'' + (1 - k_x) \hat{x}_m],$$

где k_x – параметр релаксации. Число особей (в дальнейшем – число мини-популяций) для следующей эпохи и параметр релаксации выбираются по формулам: $k_x = \exp(-\alpha \frac{t}{T})$, $\alpha \leq 1$,

соответственно. Таким образом, последовательно производится запуск ЭМ с уменьшающейся областью определения управляющих переменных, числом особей (мини-популяций), параметром релаксации; увеличивающимся параметром функции приспособленности до тех пор, пока не будет выполнено условие остановки.

Для решения задач оптимизации или модификации в стохастической постановке необходимо вычислять математическое ожидание и средне квадратическое отклонение критериев выбора решений (КВР). В связи с тем, что заранее отсутствует информация о параметрах распределения случайной величины КВР, то для их определения предлагается для каждого набора управляющих переменных x_m формировать выборку, в соответствии с нормальном законом распределения (мини-популяцию), с заданными математическим ожиданием x_{mc} и средним квадратическим отклонением σ_m . Далее, на основе сформированной выборки рассчитывается множество значений КВР, по которому, в свою очередь, рассчитываются математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение КВР. Причем, чем больший объем выборки, тем более точно будут рассчитаны эти величины. В тоже время необходимо минимизировать размер такой выборки, поскольку даже единичный расчет КВР может требовать значительных вычислительных ресурсов. Проведен анализ зависимости точности расчета КВР от объема выборки. Рациональной является выборка (мини-популяция) объемом в 30-150 особей, поскольку дальнейшее увеличение выборки не приводит к повышению точности расчета параметров выборки.

4 Меметический алгоритм синтеза решений задач стохастической оптимизации со смешанными условиями

Пусть $M = \{m_k\}, k = 1 \dots K$ – множество мемов (стратегий), K – число стратегий (гиперэвристик). Определим меметический алгоритм (МА) как гибридный популяционный алгоритм, основанный на использовании гиперэвристик. В нашем случае будем использовать: m_1 – ЭМ, m_2 – рандомизированный метод прокладки путей (Randomized Path Relinking Method) [15, 31].

Рассмотрим особенности реализации рандомизированного метода прокладки путей (РМПП). Для текущей эпохи определим $p(p = 1 \dots P)$. Для каждой мини-популяции $l(l = 1 \dots L)$, где L – число мини-популяций с заданными параметрами: математическим ожиданием $M[X_l^0]$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_{X_l}^0$, значения скалярной свертки критериев выбора решений E_l .

Далее на множестве $\{E_l\}$ выполним отбор отсечением по правилу:

$$(\forall l = 1 \dots L) E_l \rightarrow \{E'_j\}, j = 1 \dots J : E'_j < E_l.$$

Следующее за $X_l = (M[X_l^0], \sigma_{X_l}^0)$ решение, согласно предложенному подходу, будем определять путем перемещения мини-популяции l в сторону случайного решения X_j . Отбор X_j осуществляется методом рулетки с учетом вероятности отбора, определяемой по формуле:

$$P(X_j) = 1 - \frac{E'_j}{\sum_{j=1}^J E'_j}.$$

Движение мини-популяции с параметрами X_l в сторону более привлекательной с параметрами X_j , выбранной случайным образом с учетом вероятности отбора $P(X_j)$, осуществляется из условия, что расстояния между мини-популяциями значимы. Последнее обеспечивается превышением значений статистик Стьюдента и В.И. Романовского выше критических.

5 Результаты решения тестовых задач

Рассмотрим примеры реализации предложенного метода при решении тестовых задач в детерминированной и стохастической формулировках. Были выбраны функции, на базе которых были проведены расчетные исследования. Например, функция Розенброка имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2],$$

где n – количество переменных.

Функция унимодальная и имеет глобальный минимум, который лежит в узкой параболической долине. Выбранная функция при $n = 2$ имеет минимум в точке $\hat{x} = (1, 1)$:

$f(\hat{x}) = 0$. Была выбрана область определения переменных:

$$D_x = [-2.048, 2.048] \times [-2.048, 2.048].$$

Функция Растригина имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 10n + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)).$$

Данная функция одержит 4 глобальных и 96 локальных минимумов. Эта функция при $n = 2$ имеет минимум в точке $\hat{x} = (0, 0)$: $f(\hat{x}) = 0$. Была выбрана область определения переменных:

$$D_x = [-5.12, 5.12] \times [-5.12, 5.12].$$

Определение. Сложностью (информационной) $O_B(k, \varepsilon)$ класса задач (A, D_x) , где $D_x \subset R^k$ – конечное множество допустимых решений (подмножество корректности) для всех задач A -класса, k – размерность задачи, будем называть минимальное число шагов $l_B(k, \varepsilon)$, при котором существует некоторый метод B , решающий задачу A -класса с трудоемкостью не более $l_B(k, \varepsilon)$ и погрешностью, не превышающей ε [1].

Результаты анализа сходимости (информационная сложность) предложенных вычислительных методов (RCGA – генетический алгоритм с вещественными операторами, EM –

RCGA и метод сужающих окрестностей, МА – ЭМ и РМПП) при решении задач нахождения экстремумов рассмотренных функций в детерминированной и стохастической формулировках в форме $[E^o, t]$ представлены на рис. 1, 2.

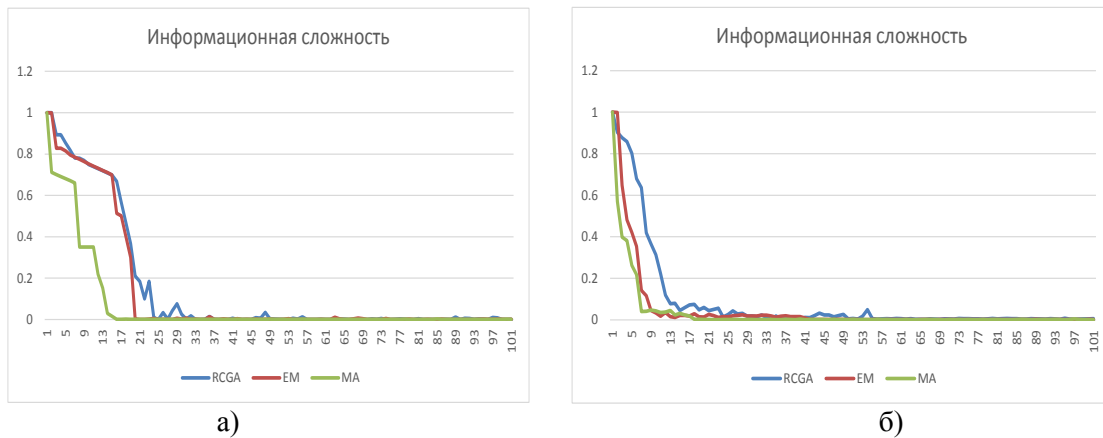


Рис. 1 – Результаты анализа сходимости предложенных вычислительных методов при решении задачи нахождения экстремума функции Розенброка в детерминированной (а) и стохастической (б) формулировках

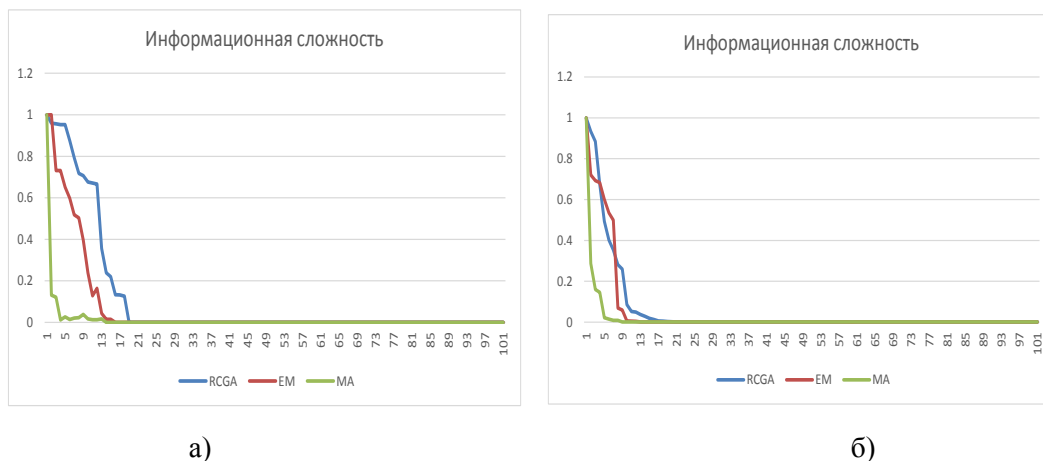


Рис. 2 – Результаты анализа сходимости предложенных вычислительных методов при решении задачи нахождения экстремума функции Растригина в детерминированной (а) и стохастической (б) формулировках

Совместное использование в разработанном методе, основанном на меметическом алгоритме, эволюционного метода с изменяющимися от эпохи к эпохе параметрами: операторов вещественного кодирования, функции приспособленности и релаксации, а также метода сужающихся окрестностей и рандомизированного метода прокладки путей, обеспечивает снижение информационной и временной сложности предлагаемого меметического алгоритма, по сравнению с классическим ГА, не менее чем в несколько раз.

6. Заключение

Рассматривается постановка задачи оценивания критериев выбора решений (целевых функций) и искомых величин в многокритериальных задачах при априорной неопределенности данных. Представлены виды скалярных сверток целевых функций для многокритериальных задач идентификации математических моделей, оптимизации и принятия решений. Предложены модель и метод синтеза решений многокритериальных задач стохастической оптимизации со смешанными условиями (MV-задач). Синтез квазирешений этой задачи осуществляется регуляризацией поиска минимума сглаживающего функционала в форме скалярной свертки целевых функций. В качестве вычислительного метода синтеза квазирешений некорректных задач применение получил метод регуляризации решения некорректных задач А.Н. Тихонова, в

котором в качестве скалярной свертки целевых функций используется сглаживающий функционал. В качестве дополнительного слагаемого в состав сглаживающего функционала включается стабилизирующий функционал (функция принадлежности), что позволяет, с одной стороны, учесть систему предпочтений лица принимающего решения, а, с другой стороны, обеспечить корректность метода синтеза квазирешений. При этом выбор стабилизирующего функционала следует осуществлять согласно ряду условий, в частности, он должен быть непрерывным неотрицательным выпуклым.

Разработан вычислительный метод синтеза решений задач этого класса, основанный на меметическом алгоритме, в котором реализовано совместное использование эволюционного метода с изменяющимися от эпохи к эпохе параметрами: операторов вещественного кодирования, функции приспособленности и релаксации, а также метода сужающихся окрестностей и рандомизированного метода прокладки путей.

Представлены примеры реализации предложенного метода при решении тестовых задач в детерминированной и стохастической формулировках.

Применение предлагаемых разработок обеспечивает эффективное робастное оценивание искомых величин при параметрической неопределенности входных данных и снижение информационной сложности метода синтеза квазирешений, что иллюстрирует актуальность применения представленного метода в инженерной практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б. Вычислительные методы теории принятия решений : монография. Москва : физ.-мат. лит., 1989. 320 с.
2. Egorov I. N. Optimization of Gas Turbine Engine Elements by Probability Criteria. *ASME 1993 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition*, Cincinnati, Ohio, USA, May 24–27, 1993, 8 p.
3. Gelfand A. E. Model choice: A minimum posterior predictive loss approach. *Biometrika*. 1998. Vol. 85, Issue 1. 11p.
4. Giunta A. A. Perspectives on optimization under uncertainty: algorithms and applications. *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, Albany, New York, 30 August -1 September, 2004, 10 p.
5. Gneiting T. Strictly Proper Scoring Rules, Prediction, and Estimation. *American Statistical Association Journal of the American Statistical Association*, Vol. 102, No. 477, March 2007, P. 359 – 378.
6. Волин Ю. М., Островский Г. М. Многокритериальная оптимизация технологических процессов в условиях неопределенности. *Autom. Remote Control*, 3 (68). 2007. С. 523–538
7. Лысенко Э. В., Пономаренко В. П., Пискалова В. П. Системологический анализ проблемы принятия решений в условиях многокритериальности и неопределенности. *АСУ и приборы автоматизи.* 2008. №145. С.104-109.
8. Левин В. И. Моделирование задач оптимизации в условиях интервальной неопределенности. *Известия Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г.Белинского. Физико-математические науки.* 2011. № 26. С.589-595.
9. Erfani T., Utyuzhnikov S. V. Control of robust design in multiobjective optimization under uncertainties. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, February 2012, Vol. 45, Is. 2, PP. 247–256.
10. Вересников Г. С., Панкова Л. А., Пронина В. А. Многокритериальная оптимизация в задачах предварительного аэродинамического проектирования в условиях неопределённости. *Журнал ИПУ РАН.* 2014. №2. С.161-163.
11. Левин В. И. Оптимизация в условиях неопределенности методом детерминизации. *Журнал. Управління у технічних системах.* 2015. №4. С. 104 - 112.
12. Brevault L. Balesdent M., Berend N., Le Riche R. Multi-level hierarchical MDO formulation with functional coupling satisfaction under uncertainty, application to sounding rocket design. *11th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimisation*, Sydney Australia, 7 -12, June 2015, 6 p.
13. Lee S., Rhee D., Yee K. Optimal Arrangement of the Film Cooling Holes Considering the Manufacturing Tolerance for High Pressure Turbine Nozzle. *ASME Turbo Expo 2016: Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, Seoul, South Korea, June 13–17, 2016, 10 p.

14. Трончук А. А., Угрюмова Е. М. Математические модели и эволюционный метод решения задач стохастической оптимизации. Вісник Харківського національного університету. Збірник наукових праць. Серія: «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». 2012. Випуск 19 (№ 1015). С. 292-305.
15. Meniailov Ievgen, Khustochka Olexandr, Ugryumova Kateryna, Chernysh Sergey, Yepifanov Sergiy, Ugryumov Mykhaylo. Mathematical Models and Methods of Effective Estimation in Multi-Objective Optimization Problems under Uncertainties. *Advances in Structural and Multidisciplinary Optimization: Proceedings of the 12th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO12)* / By Axel Schumacher (05th - 09th, June 2017, Braunschweig, Germany). SpringerLink, 2018. 2115 p. (ISBN: 978-331-967-987-7) (Paper No. 0011, P.411-427)
16. Граничин О. Н., Поляк Б. Т. Рандомизированные алгоритмы оптимизации и оценивания при почти произвольных помехах : учебное пособие. / отв ред.А. В. Назин. Москва : Наука, 2003. 291с.
17. Егорова Ю. Е., Язенин А. В. Стохастический квазиградиентный метод решения задач возможно-вероятностной оптимизации одного класса. *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2014. № 4. С. 57–70.
18. Исавнин А. Г., Хамидуллин М. Р. Решение ряда экономических задач алгоритмами метода штрафных функций с неполной минимизацией вспомогательных функций. *Экономический анализ: теория и практика*. 2012. №20. С. 62–66.
19. Улитин Г. М., Царенко С. Н. Метод усреднения в задачах о продольном ударе стержней переменного сечения. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика*. 2016 № 1. С. 43–48.
20. Снитюк В. Е. Аспекты эволюционного моделирования в задачах оптимизации. *Искусственный интеллект*. 2005. № 4. С. 284-291.
21. Курейчик В. М. Модифицированные генетические операторы. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика*. 2009. №1. С. 7–14.
22. Karaboga D. A. Simple and Global Optimization Algorithm for Engineering Problems: Dierential Evolution Algorithm. *Turk J Elec Engin*, VOL.12, NO.1, 2004, P. 53–60.
23. Пантелеев А. В., Дмитраков И. Ф. Применение метода дифференциальной эволюции для оптимизации параметров аэрокосмических систем. *Электронный журнал «Труды МАИ»*. 2010. Выпуск № 37. 10 с.
24. Чивилихин Д. С. Эволюционные стратегии с адаптивным параметром на основе свойств ландшафта функции приспособленности. *Материалы научной конференции по проблемам информатики*. 2013. С. 525–531.
25. Сахаров М. К., Карпенко А. П. Меметические алгоритмы для решения задачи глобальной нелинейной оптимизации. Обзор. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2015. №12. С. 119–142.
26. Баранюк В. В., Смирнова О. С. Детализация онтологической модели по роевым алгоритмам, основанным на поведении насекомых и животных. *International Journal of Open Information Technologies scholar*. 2015. № 12. Том 3. С. 18–27.
27. Ходашинский И. А., Горбунов И. В., Дудин П. А. Алгоритмы муравьиной и пчелиной колонии для обучения нечетких систем. *Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники*. 2009. № 2 (20). С. 157–161.
28. Лебедев Б. К., Лебедев В. Б. Размещение на основе метода пчелиной колонии. *Известия Южного федерального университета. Технические науки*. 2010. № 12(20). С. 12–20.
29. Чернышев Ю. О., Григорьев Г. В., Венцов Н. Н. Искусственные иммунные системы: обзор и современное состояние. *Программные продукты и системы*. 2014. №4 (108). С. 136–142.
30. Пантелеев А. В., Метлицкая Д. В. Применение метода искусственных иммунных систем в задачах поиска условного экстремума функций. *Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации*. 2012. №184. С. 54–61.
31. Карпенко А. П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой : учебное пособие. Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. 446с.
32. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач : учебное пособие. Москва : Наука, физ.-мат. лит., 1986. 288 с.

REFERENCES

1. D. B. Yudin, Computational methods of decision theory: monograph. Moscow : Phys.-Mat. Lit., 1989. 320 p.
2. I. N. Egorov, Optimization of Gas Turbine Engine Elements by Probability Criteria. *ASME 1993 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition*, Cincinnati, Ohio, USA, May 24–27, 1993, 8 p.
3. A. E. Gelfand, Model choice: A minimum posterior predictive loss approach. *Biometrika*. 1998, Vol. 85, Issue 1, 1 March, 11p.
4. A. A. Giunta, Perspectives on optimization under uncertainty: algorithms and applications. *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, Albany, New York, 30 August -1 September, 2004, 10 p.
5. T. Gneiting, Strictly Proper Scoring Rules, Prediction, and Estimation. *American Statistical Association Journal of the American Statistical Association*, Vol. 102, No. 477, March 2007, pp. 359 – 378.
6. Yu. M. Volin and G. M. Ostrovsky, Multi-criteria optimization of technological processes in conditions of uncertainty, *Avtomat. and Telemekh.* 2007. No. 3, pp. 523–538
7. E. V. Lysenko, V. P. Ponomarenko and V. P. Pisklakova, A systemological analysis of the problem of decision making under conditions of multicriteriality and uncertainty. ACS and automation devices. 2008. №145. pp.104-109.
8. V. I. Levin., Modeling of optimization problems in the conditions of interval uncertainty. *Izvestiya Penza State Pedagogical University named after V.G. Belinsky. Physics and Mathematics*. 2011. No. 26. pp.589-595.
9. T. Erfani and S. V. Utyuzhnikov, Control of robust design in multiobjective optimization under uncertainties. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, February 2012, Vol. 45, Is. 2, pp. 247–256.
10. G. S. Veresnikov, L. A. Pankova and V. A. Pronina, Multi-criteria optimization in problems of preliminary aerodynamic projection under uncertainty. *Journal IPU RAS*. 2014. №2. p.161-163.
11. V.I. Levin, Optimization under uncertainty by the method of determinism. *Journal. Manage technical systems*. 2015. №4. pp. 104 - 112.
12. L. Brevault, M. Balesdent, Berend N. and R. Le Riche, Multi-level hierarchical MDO formulation with functional coupling satisfaction under uncertainty, application to sounding rocket design. *11th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimisation*, Sydney Australia, 7 -12, June 2015, 6 p.
13. S. Lee, D. Rhee and K. Yee, Optimal Arrangement of the Film Cooling Holes Considering the Manufacturing Tolerance for High Pressure Turbine Nozzle. *ASME Turbo Expo 2016: Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, Seoul, South Korea, June 13–17, 2016, 10 p.
14. A. A. Tronchuk and E. M. Ugryumova, *Mathematical models and an evolutionary method for solving stochastic optimization problems*. *Bulletin of Kharkiv National University. Zbirnik naukovih Prats. Seriya: "Mathematical modelivania. Informacion technology. Automation system management*. 2012. Vipusk 19 (No. 1015). pp. 292-305.
15. Ievgen Meniailov, Olexandr Khustochka, Kateryna Ugryumova, Sergey Chernysh, Sergiy Yepifanov and Mykhaylo Ugryumov, Mathematical Models and Methods of Effective Estimation in Multi-Objective Optimization Problems under Uncertainties. *Advances in Structural and Multidisciplinary Optimization: Proceedings of the 12th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO12) / By Axel Schumacher (05th - 09th, June 2017, Braunschweig, Germany)*. SpringerLink, 2018. 2115 p. (ISBN: 978-331-967-987-7) (Paper No. 0011, P.411-427)
16. O. N. Granichin and B. T. Polyak. Randomized Optimization and Estimation Algorithms with Almost Random Interference: study guide. A. V. Nazin Ed. Moscow : Science, 2003. 291 p.
17. Yu. E. Egorova and A.V. Yazenin, A stochastic quasigradient method for solving problems of probabilistic-probabilistic optimization of one class. *Bulletin of Tver State University. Series: Applied Mathematics*. 2014. No. 4. pp. 57–70.
18. A. G. Isavnin and M. R. Khamidullin, The solution of a number of economic problems by the algorithms of the method of penalty functions with incomplete minimization of auxiliary functions. *Economic analysis: theory and practice*. 2012. №20. pp. 62–66.

19. G. M. Ulitin and S. N. Tsarenko, The averaging method in problems of longitudinal impact of rods of variable cross section. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics.* 2016 № 1. pp. 43–48.
20. V. E. Cnityuk, Aspects of evolutionary modeling in optimization problems. *Artificial Intelligence.* 2005. No. 4. pp. 284-291.
21. V. M. Kureichik, Modified genetic operators. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics.* 2009. №1. pp. 7–14.
22. D. A. Karaboga, Simple and Global Optimization Algorithm for Engineering Problems: Differential Evolution Algorithm. *Turk J Elec Engin*, VOL.12, NO.1, 2004, pp. 53–60.
23. A. V. Panteleev and I. F. Dmitrakov, Application of the method of differential evolution for optimization of parameters of aerospace systems. *Electronic journal "Proceedings of the MAI".* 2010. Issue number 37. 10 p.
24. D. S. Chivilikhin, Evolutionary strategies with an adaptive parameter based on the properties of the landscape of the fitness function. *Proceedings of the scientific conference on computer science.* 2013. pp. 525–531.
25. M. K. Sakharov and A. P. Karpenko, Memetic algorithms for solving the global nonlinear optimization problem. Overview. *Science and education: a scientific publication MSTU. N.E. Bauman.* 2015. №12. pp. 119–142.
26. V. V. Baranyuk and O. S. Smirnova, Detailing the ontological model using swarm algorithms based on the behavior of insects and animals. *International Journal of Open Information Technologies scholar.* 2015. № 12. Volume 3. pp. 18–27.
27. I. A. Khodashinsky, I. V. Gorbunov and P. A. Dudin, Algorithms of the ant and bee colony for training fuzzy systems. *Reports of Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics.* 2009. № 2 (20). pp. 157–161.
28. B. K. Lebedev and V. B Lebedev, Placement on the basis of the bee colony method. *Proceedings of the Southern Federal University. Technical science.* 2010. No. 12 (20). pp. 12–20.
29. Yu. O. Chernyshev, G. V. Grigoriev and N. N. Ventsov, Artificial immune systems: an overview and current state. *Software products and systems.* 2014. №4 (108). pp. 136–142.
30. A. V Panteleev. and D. V. Metlitskaya, Application of the method of artificial immune systems in the search for conditional extremum of functions. *Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation.* 2012. № 184. Pp. 54–61.
31. A. P. Karpenko. Modern algorithms of search optimization. Algorithms inspired by nature: study guide. Moscow: Moscow. State Technical University Publishing House N.E. Bauman, 2014. 446s.
32. A. N. Tikhonov and V. Ya Arsenin. Methods for solving incorrect tasks: a tutorial. Moscow : Science, phys.-mat. lit., 1986. 288 p.

Меняйлов Евгений Сергеевич – старший преподаватель кафедры 304 «Информатики», Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», ул. Чкалова 17, Харьков, 61070, Украина, e-mail: j.menyailov@khai.edu; ORCID: 0000-0002-9440-8378.

Черныш Сергей Викторович – аспирант кафедры 304 «Информатики», Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», ул. Чкалова 17, Харьков, 61070, Украина, e-mail: 91sergey@gmail.com; ORCID: 0000-0002-1750-5158.

Безлюбченко Артем Вячеславович – аспирант кафедры 304 «Информатики», Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», ул. Чкалова 17, Харьков, 61070, Украина, e-mail: artem.wide@gmail.com.

Угрюмов Михаил Леонидович – д.т.н., проф. кафедры «Системотехники», Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы 4, г. Харьков, 61022, Украина, e-mail: m.ugrymov@khai.edu; ORCID: 0000-0003-0902-2735.

Угрюмова Катерина Михайловна – к.т.н., с.н.с., Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», ул. Чкалова 17, Харьков, 61070, Украина, e-mail: m.ugrymov@khai.edu; ORCID: 0000-0003-0043-2121.

УДК 004.31 : 004.424

Модернизация канала компьютерного управления учебной моделью цифрового процессора

Ю.Л. Грабовская, С.Н. Рева

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина
e-mail: julia070796@gmail.com

На примере компьютеризации учебной модели цифрового процессора описаны проблемы организации обмена в системах контроля и управления, построенных с использованием современных версий операционных систем семейства Windows. Изучена проблема взаимодействия новых операционных систем с аппаратными ресурсами компьютера. Предложен вариант построения канала обмена, принцип формирования протокола взаимодействия и структура управляющего программного обеспечения, которые могут обеспечить кроссплатформенность, аппаратную и программную совместимость с современными персональными компьютерами. Описаны примеры программной реализации и результаты их тестирования. Даны рекомендации о возможности применения предложенных методов для построения промышленных и научных установок с компьютерным управлением.

Ключевые слова: цифровой процессор, учебная модель, компьютерное управление, кроссплатформенность, протокол обмена.

Робота присвячена модернізації каналу зв'язку між комп'ютером та створеною раніше навчальною моделлю цифрового процесора. На прикладі комп'ютеризації навчальної моделі описані проблеми управління та програмного контролю обладнання, які можуть виникати при заміні комп'ютерів та операційних систем сучасними версіями. Акцентовано увагу на зміні зовнішніх портів комп'ютерів та суттєвому обмеженні доступу до їх апаратних реєстрів. На основі проведеного аналізу запропоновано методи вирішення проблеми, серед яких слід відмітити заміну апаратних засобів та протоколів зв'язку між комп'ютером та обладнанням, впровадження мікропроцесорних інтерфейсних модулів для узгодження сигналів управління, а також розробку нового програмного забезпечення, побудованого на засадах кроссплатформності. Наведено конкретні приклади створення послідовних каналів зв'язку з використанням мікроконтролерних інтерфейсів, які призначені для зміни формату сигналів управління, описано структурну схему інтерфейсного модуля. Запропоновано структуру програмного забезпечення, що здатне працювати під різними операційними системами. Пакет програмних засобів створено з використанням мов програмування Java та JavaScript, для взаємодії з послідовним портом використано бібліотеку Java Simple Serial Connector. В роботі звернено увагу на особливості використання цієї бібліотеки, наведено уривок програмного коду. Під час досліджень проведено тестування створеної програмної структури з використанням апаратного емулятора для здійснення обміну даними в рамках розробленого протоколу, наведено результати тестування. Зроблено висновок про можливість використання запропонованих рішень для побудови промислових та наукових установок з комп'ютерним управлінням.

Ключові слова: цифровий процесор, учбова модель, комп'ютерне управління, кроссплатформність, протокол обміну.

The article describes the modernization of a communication channel between a computer and an educational model of the digital processor created a few years ago. An example of the computerization of a learning model describes the management and software control problems of an equipment that may occur when replacing computers and operating systems with modern versions. The focus is on changing external ports of computers and severely restricting access to their hardware registers. On the basis of the conducted analysis, the methods of solving the problem are proposed. They are the replacement of hardware and communication protocols between the computer and equipment, the introduction of microprocessor interface modules for the coordination of control signals, as well as the development of new cross-platform software. The examples of serial communication channels using microcontroller interfaces, which are intended to change the format of control signals, are given. The block diagram of the interface module is presented. The structure of software that can work with different operating systems has been offered. By using Java and JavaScript programming languages, the software package has been created. For interaction with the serial port the Java Simple Serial Connector library has been used. The paper focuses on the peculiarities of using this library. A piece of software code is given. A hardware emulator for data exchange based on the developed protocol has been used for testing. The results of testing are presented as well. The proposed solutions can be used for creating industrial and scientific devices with computer control.

Key words: digital processor, educational model, computer control, cross-platform, protocol of exchanging.

1 Введение

С целью повышения уровня подготовки программистов в области электроники, ознакомления с принципами построения и функционирования процессоров на аппаратном уровне, а также для формирования представления о классической архитектуре микропроцессоров и языках программирования низкого уровня кафедрой электроники и управляющих систем Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина при участии студентов старших курсов была разработана учебная модель цифрового процессора. Она построена на микросхемах малой степени интеграции, позволяет продемонстрировать процесс выполнения программы на уровне

отдельных логических элементов и обрабатываемых ими сигналов [1].

Чуть позже на кафедре был создан интерфейсный модуль, который позволил подключать макет процессора к персональному компьютеру для мониторинга его состояния и управления работой в реальном времени. Благодаря разработке этого интерфейса и сопутствующего программного обеспечения появилась возможность:

- загружать в оперативную память более объемные программы, полученные путем трансляции с языка ассемблер;
- отображать на экране монитора текущее состояние модели процессора, содержимое регистров, памяти, состояние шин;
- показывать ход выполнения отдельных команд;
- управлять работой процессора как на уровне выполнения отдельных машинных циклов, так и на уровне выполнения подпрограмм.

Все эти возможности существенно улучшают наглядность макета и позволяют более эффективно использовать его в учебном процессе.

Взаимодействие модели процессора с компьютером через созданный интерфейс осуществляется через параллельный восьмиразрядный LPT-порт [2]. Передача данных из компьютера в макет выполняется по параллельной восьмиразрядной шине, а чтение состояния функциональных узлов модели производится полубайтами с помощью системы мультиплексоров и с использованием служебных регистров LPT-порта. При организации обмена, программа, непосредственно, управляет работой как регистров данных, так и входных и выходных служебных регистров в составе порта. Параллельная передача данных обеспечивает высокое быстродействие системы в целом.

2 Проблематика

На протяжении последних лет модель процессора успешно применялась в учебной практике факультета компьютерных наук. Работа с моделью осуществлялась при использовании операционных систем, предоставляющих возможность доступа к аппаратным ресурсам компьютера (из серии операционных систем Windows работа была возможна с версиями Windows 98, Windows Vista, Windows XP).

Но на сегодняшний день все перечисленные выше операционные системы не поддерживаются компанией Майкрософт и постепенно вытесняются из использования. На смену им приходят более новые версии, такие как Windows 7, Windows 8, Windows 10. Во всех этих системах с целью обеспечения безопасности и их устойчивости к вредоносным программам максимально ограничен доступ к аппаратным ресурсам компьютера. Это делает невозможным использование ранее созданной программы по управлению моделью процессора, так как в существующей версии передача данных осуществляется через служебные регистры внешнего порта компьютера. Вероятней всего, последующие операционные системы будут еще больше ограничивать возможности прямого управления портами без использования специально разрабатываемых драйверов, предусматривающих соответствующие правила доступа и ограничения полномочий.

Современная тенденция развития персональных компьютеров определена в первую очередь коммерческими интересами производителей и ориентирована на удовлетворение потребностей наиболее широкого контингента пользователей. Это, в первую очередь, — реализация коммуникативных, мультимедийных и игровых функций. По этой причине в современных компьютерах «исчезли» параллельные порты ввода-вывода. Передача данных в основном осуществляется через USB-порты, а также через порты, в основу работы которых положен радиочастотный принцип передачи информации (технологии Bluetooth и Wi-Fi). В результате созданное ранее оборудование невозможно подключить к современным ноутбукам и стационарным персональным компьютерам.

В связи с этим возникла необходимость для дальнейшего успешного использования модели процессора разработать новый модуль аппаратного интерфейса и новое программное обеспечение, которое позволило бы управлять аппаратурой при работе с современными компьютерами в операционных системах Windows 7 ... Windows 10.

3 Методы решения

С целью поиска приемлемого решения был проведен системный анализ задачи, в результате которого определены методы построения аппаратно-программного комплекса, позволяющие успешно использовать современные компьютеры и операционные системы для управления внешним оборудованием.

Во-первых, для организации связи с аппаратурой необходимо ориентироваться на применение наиболее используемых на сегодняшний день в компьютерах и защищенных от воздействия электромагнитных помех USB-портов. Но у них есть недостатки:

короткое расстояние передачи данных;

передача через USB-порт осуществляется в последовательном коде, следовательно, для управления макетом необходимо устройство декодирования, обеспечивающее запись данных в параллельные регистры и осуществляющее обратное преобразование данных.

Для устранения первого недостатка в качестве наиболее удобной технологии выбрано использование виртуального COM-порта [3], который организуется при подключении адаптера COM-USB. Это дает нам возможность удалить устройство на расстояние до нескольких десятков, а то и сотен метров, хотя это приведет к определенному снижению скорости обмена информацией. А в будущем, при соответствующей доработке аппаратного интерфейса, можно перейти на протокол беспроводной связи и использовать один из радиоканалов, например, Bluetooth или Wi-Fi.

В качестве устройства для преобразования данных из последовательного формата в параллельный и обратно можно применить микроконтроллер или же разработать микропрограммный автомат на основе программируемой логической матрицы.

Во-вторых, необходимо разработать протокол взаимодействия компьютера с управляемым устройством и систему команд, которые бы не требовали непосредственного доступа к аппаратным регистрам порта, а основывались на передаче данных с использованием унифицированных протоколов обмена, поддерживаемых операционными системами и встроенными системными драйверами.

В-третьих, при выборе технологии разработки программного обеспечения следует ориентироваться на внедрение принципов кроссплатформенности, чтобы обеспечить работоспособность управляющей программы под различными операционными системами.

4. Структура интерфейсного модуля

Принцип построения двунаправленного канала передачи данных, который связывает компьютер с моделью цифрового процессора, показан на рис. 1.

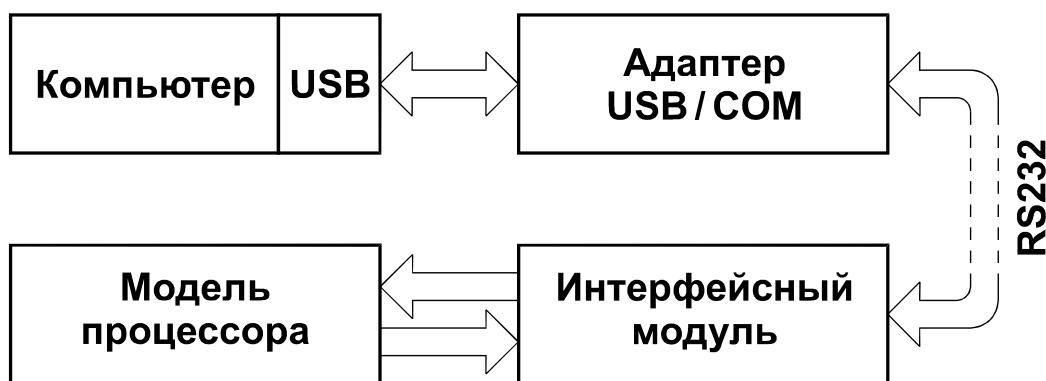


Рис.1. Структура канала передачи данных

Компьютер выполняет обмен информацией с внешним устройством посредством одного из встроенных USB-портов, к которому подсоединен адаптер USB/COM. Последовательная линия передачи данных, связывающая адаптер с интерфейсным модулем, выполнена в стандарте RS232. Сам интерфейсный модуль непосредственно присоединяется к модели процессора через предусмотренный конструкцией модели разъем.

Взаимодействие модуля с моделью процессора осуществляется параллельными шинами и

отдельными дискретными сигналами. Для управления и контроля состояния модели необходимо обеспечить формирование пяти управляющих сигналов, чтение четырех однобайтных двоичных слов, а также организовать формирование двунаправленных восьмиразрядных шин для чтения/записи адреса и данных при взаимодействии с оперативной памятью. Обобщенная структурная схема интерфейсного модуля показана на рис. 2.

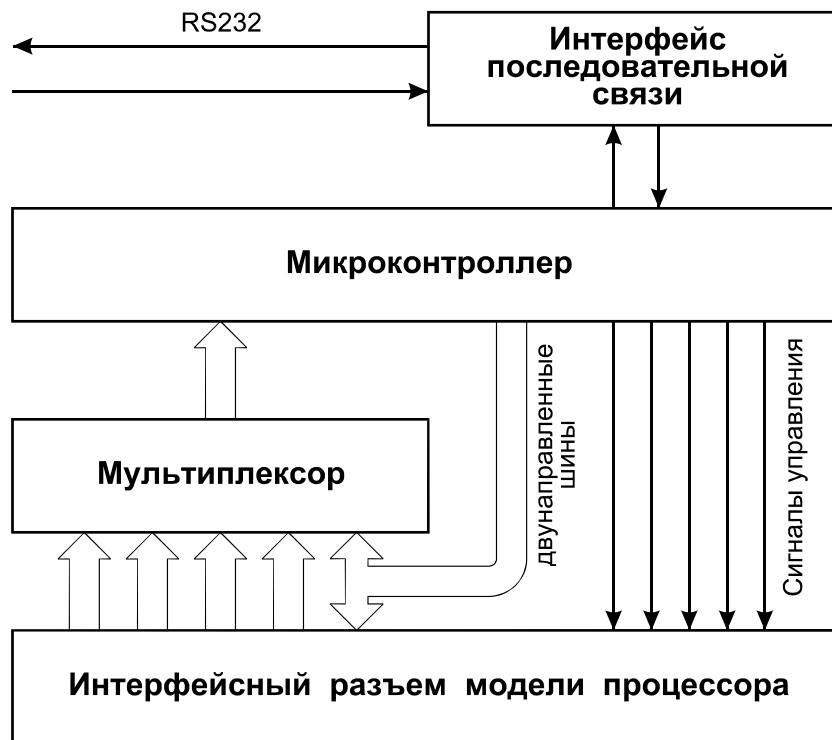


Рис. 2. Структурная схема интерфейсного модуля

Интерфейс позволяет через мультиплексор считывать состояние регистров А и В, состояние регистра команд, а также состояние отдельных сигналов управления, которые вырабатываются генератором сигналов машинного цикла. Мультиплексор также обеспечивает доступ по чтению шины адреса и шины данных.

При работе с модулем памяти контроль шины адреса и шины данных осуществляется непосредственно с портов микроконтроллера. Отдельными дискретными сигналами обеспечено формирование сигналов чтения и записи, а также сигнала Reset и импульсов тактовой частоты. Часть сигналов микроконтроллера используется для управления мультиплексором.

5. Протокол взаимодействия компьютера с моделью цифрового процессора

Для передачи информации с компьютера на модель процессора используется текстовый формат команд. Это исключает появление в передаваемых пакетах специальных символов, которые могут вызвать непредвиденную работу драйверов и системных служб Windows при попытке передачи бинарных значений. Примером такого взаимодействия является передача данных на принтер в виде ASCII кодов при использовании встроенных шрифтов (символьно-ориентированный или, так называемый, телетайпный протокол обмена).

Таким образом, при переходе к передаче текстовых файлов исчезает необходимость в доступе к управляющим регистрам, а передача данных может осуществляться по последовательному каналу с использованием только двух сигнальных проводов TXD и RXD — с использованием Z-модемного соединения. Прием и передачу информации осуществляет микроконтроллер интерфейсного модуля, он же выполняет преобразование команд в параллельный код для непосредственного взаимодействия с регистрами модели процессора.

В соответствии с принятой тенденцией решения задачи был разработан подробный протокол взаимодействия между компьютером и микропроцессорным устройством, на базе которого и спроектирован интерфейсный модуль.

6. Структура программы

Для обеспечения кроссплатформенности программного пакета при его построении были использованы технологии web-программирования, а в качестве основных языков программирования выбраны Java и JavaScript, — языки, которые поддерживаются всеми распространенными браузерами и вне зависимости от типа операционной системы будут работать на любом компьютере. Но задача является не стандартной, так как данные языки ориентированы в первую очередь для решения задач передачи и обработки информации в рамках интернет-технологий, а использование их для управления аппаратными ресурсами является весьма редким случаем.

Учитывая специфику данных языков программирования, была разработана следующая структурная схема программного пакета (рис. 3).

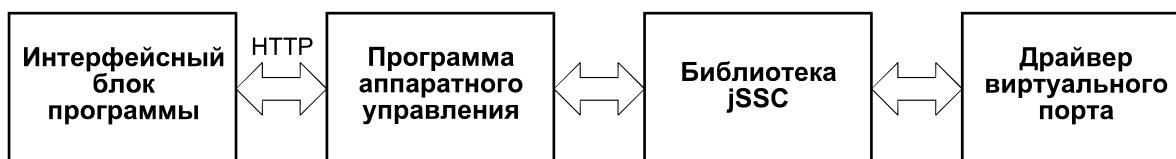


Рис. 3. Схема программного пакета

Интерфейсная часть — программа, написанная на JavaScript, и предназначена для взаимодействия пользователя с системой. Это интерфейс, с помощью которого пользователь имеет возможность отправлять команды в модель цифрового процессора, а также наблюдать результаты визуализации полученных ответов.

Программа аппаратного управления реализована на Java. Она взаимодействует с интерфейсным блоком с использованием протокола HTTP — протокола прикладного уровня передачи данных. Этот программный блок выполняет задачу формирования команд для модели цифрового процессора, а также задачу синтаксического анализа полученных от модели ответов с последующей передачей результатов анализа в интерфейсный блок для визуализации результатов выполнения команды.

Для организации обмена данными между программой аппаратного управления и коммуникационным портом была выбрана библиотека jSSC — Java-библиотека для простой работы с COM-портом (Java Simple Serial Connector) [4]. Своё официальное публичное начало она берёт в 2010 году. Именно тогда было решено поделиться ей с разработчиками на Java (распространяется под лицензией LGPL). К написанию библиотеки привёл факт отсутствия адекватных инструментов для работы с последовательными портами. На то время уже существовали `java.comm` и `gxtx`, но в этих библиотеках есть ряд своих недостатков. Библиотека `java.comm 3.0` не предназначена для работы в операционных системах семейства Windows, кроме того, сложно найти её качественную лицензионную версию. Библиотека `gxtx` не подошла для решения задачи из-за своей нестабильности.

В самой библиотеке jSSC можно выделить несколько основных частей:

- `SerialNativeInterface` — класс, который предоставляет доступ ко всем «нативным» методам библиотеки jSSC;
- `SerialPort` — класс, с помощью которого будет непосредственно производиться работа с выбранным портом;
- `SerialPortEventListener` — интерфейс, который необходимо реализовать, для того чтобы получать данные с порта.

Далее приведен фрагмент кода для команды очистки программной памяти модели процессора. С помощью данной подпрограммы выполняется открытие и настройка порта, передача команды и ожидание приема ответа с его последующей обработкой.

```
public class Test {
    private static SerialPort serialPort;

    public static void main(String[] args) {
        //Передаём в конструктор имя порта
        serialPort = new SerialPort("COM1");
        try {
            //Открываем порт
            serialPort.openPort();

            //Выставляем параметры
            serialPort.setParams(
                SerialPort.BAUDRATE_9600,
                SerialPort.DATABITS_8,    SerialPort.STOPBITS_1,
                SerialPort.PARITY_NONE);

            //Включаем аппаратное управление потоком
            serialPort.setFlowControlMode(
                SerialPort.FLOWCONTROL_RTSCCTS_IN |
                SerialPort.FLOWCONTROL_RTSCCTS_OUT);

            //Устанавливаем слушатель и маску
            serialPort.addEventListener(
                new PortReader(), SerialPort.MASK_RXCHAR);

            //Отправляем запрос устройству
            serialPort.writeString("MCLR;");
        } catch (SerialPortException ex) {
            System.out.println(ex);
        }
    }

    private static class PortReader implements
        SerialPortEventListener {
        public void serialEvent(SerialPortEvent event) {
            if (event.isRXCHAR() && event.getEventValue() > 0) {
                try {
                    //Получаем ответ от устройства, обрабатываем данные и т.д.
                    String data = serialPort.readString(
                        event.getEventValue());
                } catch (SerialPortException ex) {
                    System.out.println(ex);
                }
            }
        }
    }
}
```

7. Результаты тестирования

Созданный программный пакет прошел несколько этапов тестирования с использованием аппаратного эмулятора, который вместо модели процессора выполнял функции обмена в соответствии с разработанным протоколом и системой команд. Эмулятор реализован на микроконтроллере ADuC831 и позволяет поддерживать как режим штатного выполнения протокола, так и режим моделирования ошибок в канале передачи данных.

Многочасовое тестирование программного комплекса на различных компьютерах с операционными системами Windows XP, Windows 7 и Windows 10 подтвердило кроссплатформенные качества созданного программного обеспечения, а также показало

высокую устойчивость программного пакета к возникновению нештатных ситуаций и нарушениям обмена.

8. Заключение

Разработанный метод организации обмена между управляющим компьютером и ведомым аппаратным оборудованием позволил решить проблему взаимодействия модели цифрового процессора с современными компьютерами широкого применения и новыми операционными системами. По мнению разработчиков метод может успешно применяться для построения промышленных компьютеризированных систем автоматического контроля и управления, которые не предъявляют высоких требований к скорости обмена данными.

Предложенная схема обмена предполагает возможность использования беспроводных каналов передачи информации для управления оборудованием в случае замены аппаратного драйвера последовательной связи и при соответствующей адаптации программного обеспечения.

Подтвержденная тестированием мультиплатформенность созданного программного пакета дает основание предполагать сохранение работоспособности аппаратно-программного комплекса в случае перехода на новые (создаваемые) версии операционных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Журавель Модель цифрового процессора [Текст] / Ю. А. Журавель, С. Н. Рева // Вісник Харківського національного університету Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» №987, 2011, с. 5-18.
2. А. А. Белуха Некоторые нюансы разъемов принтеров типа „Centronics» [Текст] / А. А. Белуха РадиоАматор, № 10 2002, с. 22.
3. Последовательный интерфейс RS-232: [Электронный источник] / ООО Рынок микроэлектроники 1998-2016 – URL: <http://www.gaw.ru/html.cgi/txt/interface/rs232/> (Дата обращения 20.09.2018).
4. Работаем с COM-портом из Java при помощи jSSC [Электронный источник] / ТМ 2006-2018 – URL <https://habr.com/post/133766/> (Дата обращения 05.05.2018).

REFERENCIES

1. Y. A. Zhuravel. «The model of the digital processor» *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University*, vol. 987, pp. 5-18, 2011
2. A. A. Belucha. «Some nuances of connectors of printers of the «Centronics» type» *RadioAmator*, vol. 10, p. 22, 2002
3. «Serial interface RS-232.» Internet: <http://www.gaw.ru/html.cgi/txt/interface/rs232/>, 2016 [Sep. 20, 2018]
4. S. Sokolov «We work with COM-port from Java with jSSC.» Internet: <https://habr.com/post/133766/>, Des. 1, 2011 [Apr. 05, 2018].

Грабовская Юлия Леонидовна – студентка факультета компьютерных наук; Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, г. Харьков-22, площадь Свободы, 4, 61022; e-mail: julia070796@gmail.com; ORCID: 0000-0001-7117-0806.

Рева Сергей Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры ЭУС; Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, г. Харьков-22, площадь Свободы, 4, 61022; e-mail: ieclab@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-2615-9226.

УДК 517.95 : 517.988

Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи

О.С. Кончаковська, М.В. Сидоров

Харківський національний університет радіоелектроніки, пр. Науки, 14, м. Харків, 61166, Україна
e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua, maxim.sidorov@nure.ua

Розглядається задача чисельного аналізу електростатичної мікроелектромеханічної системи, для математичного опису якої використано нелінійне еліптичне рівняння з оператором Лапласа та заданими крайовими умовами. На основі методу послідовних наближень побудовано алгоритм отримання двобічних наближень до розв'язку задачі. Метод проілюстровано обчислювальними експериментами для задачі, розглядуваної у круговій області, які подано у вигляді числової та графічної інформації.

Ключові слова: електростатична мікроелектромеханічна система, додатний розв'язок, метод двобічних наближень, інваріантний конусний відрізок, метод функцій Гріна, монотонний оператор.

Рассматривается задача численного анализа электростатической микроэлектромеханической системы, для математического описания которой использовано нелинейное эллиптическое уравнение с оператором Лапласа и заданными краевыми условиями. На основе метода последовательных приближений построен алгоритм получения двусторонних приближений к решению задачи. Метод проиллюстрирован вычислительными экспериментами для задачи, рассматриваемой в круговой области, которые представлены в виде числовой и графической информации.

Ключевые слова: электростатическая микроэлектромеханическая система, положительное решение, метод двусторонних приближений, инвариантный конусный отрезок, метод функций Грина, монотонный оператор.

In this paper, we consider the problem of numerical analysis of an electrostatic microelectromechanical system. Microelectromechanical systems are devices of microsystem technology that combine electronic and mechanical components of micron sizes. Electrostatic activation is one of the most common types of activation of microelectromechanical systems used in accelerometers, optical switches, micropumps, etc. The disadvantages of such devices consist in their pull-instability. This effect occurs when the voltage applied to the moving electrode exceeds the critical value. As a result the system loses its stationary configuration. To ensure the stable operation of the microelectromechanical system, it is proposed to control the dielectric properties of the device components. For a mathematical modeling of the process, we use a nonlinear elliptic equation with the Laplace operator and the given boundary conditions. To construct an approximate solution of the problem under consideration, we propose to use methods of nonlinear analysis in semi-ordered spaces, in particular, the results of the solvability of nonlinear operator equations with a monotone operator obtained by M.A. Krasnosel'skij. The boundary value problem that modes a microelectromechanical system is reduced to the Hammerstein integral equation using the Green's function. The paper substantiates the possibility of constructing two-sided approximations to a positive solution of the problem. The method is illustrated by computational experiments for the problem considered in a unit circular domain. The computational experiments are presented in a numerical and graphical format.

Keywords: electrostatic microelectromechanical system, positive solution, two-sided approach method, invariant cone segment, Green's method of functions, monotone operator.

1. Вступ

Сучасні дослідження мікросистемної техніки (МСТ) в основному присвячені застосуванню різноманітних методів математичного моделювання для опису механічних (деформація), електромагнітних (діелектрична та магнітна проникність), оптичних та інших властивостей. Мікроелектромеханічні системи поєднують електронні та механічні компоненти для проектування багатьох видів мікроскопічних пристроїв, що використовуються в медицині, авіаційній техніці, автомобілебудуванні, робототехніці, системах зв'язку, атомній енергетиці тощо. Застосування МСТ у різних областях фізики зумовило розробку мікроелектромеханічних (МЕМС), мікрооптоелектромеханічних, мікроакустоелектромеханічних та інших систем [4].

Для найбільш точних та складних моделей основними методами знаходження розв'язку є чисельні методи, що потребують проведення великого обсягу обчислень на ЕОМ. Ці методи дають змогу отримати гарний кількісний та навіть якісний результат для опису моделі. Проте вони мають недоліки, оскільки не завжди можна оцінювати похибку отриманих чисельних розв'язків. Вільними від цього недоліку є чисельні методи, які дають ітераційну послідовність, що мають двобічну збіжність. Це дозволяє апостеріорно оцінювати похибку наближеного розв'язку на кожному кроці ітераційного процесу.

Отже, розробка і вдосконалення існуючих засобів математичного моделювання і чисельного аналізу задач, що виникають при проектуванні МСТ, в частині використання методів із зазначеними властивостями, є актуальною науковою задачею.

2. Постановка задачі

Основним елементом МЕМС є актюатор – виконавчий механізм, що дозволяє перетворювати один із видів енергії (електричну, магнітну, теплову, хімічну) на механічну роботу, що призводить до виконання дії, заданої керуючим сигналом. Одним із найпоширеніших типів активації МЕМС є електростатичний актюатор, що використовує для роботи силу притягання між електродами з різними зарядами. Характерною особливістю електростатичних актюаторів є нестабільність відхилення (*pull-in instability*). Цей ефект виникає, коли напруга, що подається на електрод, перевищує критичне значення, внаслідок чого система втрачає стаціонарну конфігурацію, яка забезпечує збереження структури механічних компонентів МЕМС. Для зменшення впливу цієї особливості електростатичних актюаторів пропонується підбирати діелектричні властивості МЕМС пристроїв [6, 8 – 10]. У статті [12] вперше була розглянута математична модель найпростішої електростатичної МЕМС для дослідження цієї можливості.

Основним елементом електростатичних актюаторних МЕМС є пристрій, що складається із закріпленої вздовж межі еластичної діелектричної мембрани, що розташована над жорсткою нееластичною пластиною, яка добре проводить струм. При цьому поверхня мембрани покрита тонкою металевою плівкою. Внаслідок подачі напруги на плівку мембрана відхиляється до пластини і може відбутися злипання електродів. Зворотній процес називається стійким станом системи. Отже, при проектуванні МЕМС необхідно визначити параметри системи для функціонування її у стійкому стані. Схема роботи найпростішої електростатичної МЕМС зображена на рис. 2.1.

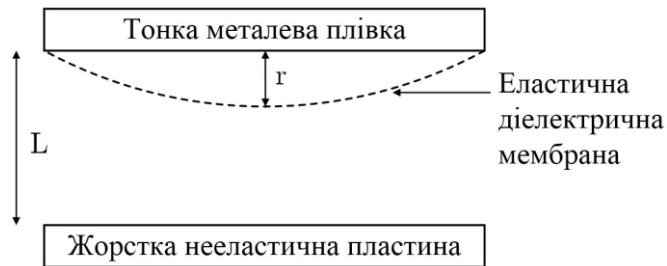


Рис. 2.1 Схема роботи найпростішої електростатичної МЕМС

Розглянемо механічну систему, що складається з пружного тіла та доданих до нього зовнішніх «мертвих» сил, тобто таких сил, що зберігають величину і напрямок при деформаціях системи; тіло вважаємо закріпленим так, що його переміщення як жорсткого цілого виключені [1].

У [11] показано, що повна потенційна енергія такої консервативної системи в навантаженому стані визначається сумою потенційної енергії деформації тіла та потенціалу зовнішніх сил.

Потенціал зовнішніх сил визначається за формулою

$$W = - \int_{\Omega} \frac{f(\mathbf{x})V^2}{L + r(\mathbf{x})} d\mathbf{x},$$

де $f(\mathbf{x})$ – співвідношення відносної діелектричної проникності середовища до діелектричної проникності мембрани, L – відстань між двома електродами за відсутності деформації мембрани, V – фіксована електрична напруга, r – величина деформації мембрани, Ω – обмежена область у \mathbf{R}^2 .

Якщо в системі наявні пружні деформації, то $r \neq 0$.

Потенціальна енергія деформації тіла визначається сумою потенціальних енергій зміни об'єму та форми і має вигляд

$$R = \int_{\Omega} \left(\frac{T}{2} |\nabla r|^2 + \frac{D}{2} |\Delta r|^2 \right) d\mathbf{x},$$

де $T > 0$ – стала напруги, $D = \frac{2h^3Y}{3(1-\nu^2)}$, h – товщина пластини, Y – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона.

Отже, повна потенціальна енергія системи дорівнює

$$E = R + W = \int_{\Omega} \left(\frac{T}{2} |\nabla r|^2 + \frac{D}{2} |\Delta r|^2 - \int_{\Omega} \frac{f(\mathbf{x}) V^2}{L+r} \right) d\mathbf{x}.$$

Необхідна умова мінімуму функціонала E (рівняння Ейлера-Остроградського) має вигляд

$$T\Delta r - D\Delta^2 r = \frac{f(\mathbf{x})V^2}{(L+r)^2} \text{ у } \Omega,$$

$$r|_{\partial\Omega} = 0.$$

Оскільки нижній електрод тонкий, то його товщиною можна знехтувати щодо його розмірів ($D=0$). Введемо заміну $r = -u$ та покладемо $L=1$, $T=1$, $\lambda = V^2$, тоді отримуємо нелінійну крайову задачу, яка є математичною моделлю МЕМС [7]:

$$-\Delta u = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u)^2} \text{ у } \Omega \subset \mathbf{R}^2, \quad (2.1)$$

$$0 < u < 1 \text{ у } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.2)$$

де $\lambda > 0$, $0 < f(\mathbf{x}) \leq 1$.

Один із способів досягнення великих значень напруги при одночасному збільшенні відстані відхилення (pull-in distance) полягає у введенні просторово-змінної діелектричної проникності мембрани. Це дозволить врахувати взаємодію молекул в матеріалі мембрани, що виникають внаслідок деформації.

Оберемо $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\alpha = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\alpha}{2}}$. У роботі [8] досліджено питання розв'язуваності задачі (2.1), (2.2) в залежності від параметра λ , а саме, отримано оцінки інтервалів зміни параметра λ , для яких існує єдиний додатний розв'язок, декілька додатних розв'язків

або не існує жодного розв'язку. Зокрема, отримано, що при $\lambda \in (0, \lambda_c(\alpha))$, де $\lambda_c(\alpha) = \frac{4(2+\alpha)^2}{27}$, задача (2.1), (2.2) у одиничному колі має єдиний додатний розв'язок.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [2], де було обрано $f(\mathbf{x}) = 1$.

3. Метод чисельного аналізу

Побудуємо двобічний процес послідовних наближень до розв'язку задачі (2.1), (2.2), застосовуючи методи нелінійного аналізу в напівупорядкованих просторах [3, 5].

У банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ неперервних у $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ функцій виділимо конус K_+ невід'ємних функцій. За допомогою конуса K_+ введемо у $C(\bar{\Omega})$ напівупорядкованість за правилом: u, w , якщо $w - u \in K_+$. Зазначимо, що конус K_+ у $C(\bar{\Omega})$ є нормальним (і навіть гострим) [3, 5]. Розглянемо еквівалентне задачі (2.1), (2.2) нелінійне операторне рівняння $u = Tu$ з

$$Tu = \lambda \int_{\Omega} \frac{|s|^\alpha G(\mathbf{x}, s)}{(1-u(s))^2} ds,$$

де $G(\mathbf{x}, s)$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta$.

Розв'язком (узагальненим) задачі (2.1), (2.2) називатимемо функцію $u^* \in C(\bar{\Omega})$, яка є розв'язком рівняння $u = Tu$.

Оператор T є неперервним і монотонним на конусі K_+ , оскільки для будь-яких елементів конуса u_1, u_2 , таких, що $u_1, u_2 < 1$, справджується нерівність

$$Tu_1 \leq Tu_2.$$

З огляду на монотонність оператора T побудуємо інваріантний конусний відрізок

$$\langle v_0, w_0 \rangle = \{u | v_0 \leq u \leq w_0\},$$

$$T \langle v_0, w_0 \rangle \subset \langle v_0, w_0 \rangle.$$

Для цього при $\lambda \in (0, \lambda_c(\alpha))$ розглянемо схему послідовних наближень

$$u_{n+1}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{s}|^{\alpha} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - u_n(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

За допомогою (3.1) сформуємо два ітераційні процеси, які починаються з функцій $v_0 = 0$ і $w_0 = \beta = \text{const} \in (0, 1)$ відповідно. Тоді для кожного з них маємо перші наближення

$$w_1(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{(1 - \beta)^2} \int_{\Omega} |\mathbf{s}|^{\alpha} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \frac{\lambda u_0(\mathbf{x})}{(1 - \beta)^2},$$

$$v_1(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} |\mathbf{s}|^{\alpha} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \lambda u_0(\mathbf{x}),$$

де $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} |\mathbf{s}|^{\alpha} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$.

Оскільки оператор T є неперервним і монотонним на конусі K_+ , то завжди виконується нерівність $v_0 \leq v_1$. Нерівність $w_1 \leq w_0$ буде виконано, якщо β визначається з системи нерівностей

$$\lambda \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x}) \leq \beta(1 - \beta)^2, \quad 0 < \beta < 1. \quad (3.2)$$

Продовжуючи ітерації, дістанемо послідовні наближення, які для $\lambda \in (0, \lambda_c(\alpha))$ двобічно збігаються до єдиного додатного розв'язку задачі (2.1), (2.2):

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_k \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_k \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Отже, справджується така теорема.

Теорема. Оператор $Tu = \lambda \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{s}|^{\alpha} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - u(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}$, де Ω – одиничне коло, має при $\lambda \in (0, \lambda_c(\alpha))$ єдину

нерухому точку u^* на конусному відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$, де β визначається нерівностями (3.2). Послідовні наближення, які формуються за правилом (3.1), двобічно збігаються до u^* .

4. Результати чисельного аналізу

Обчислювальний експеримент для задачі (2.1), (2.2) було проведено у області

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbf{R}^2.$$

Нехай $\alpha = 1$, тобто $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Досліджувана задача має єдиний розв'язок при $\lambda \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$ і еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{s}| G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - u(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}.$$

Для обчислюваного експерименту оберемо $\lambda = 1$. Тоді послідовні наближення формуються за ітераційною схемою

$$u^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{s}| G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - u^{(k)}(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}.$$

Тут $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функція Гріна для одиничного кола, яка має вигляд

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}},$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$, точки \mathbf{s} , \mathbf{s}^1 – точки, симетричні відносно одиничного кола, $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}$, $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}$ – відстань між точками \mathbf{x} , \mathbf{s} та \mathbf{x} , \mathbf{s}^1 відповідно.

З нерівностей (3.2) отримаємо, що

$$0,155970 \leq \beta \leq 0,550901.$$

На рис. 4.1 наведені верхні наближення (суцільна лінія) та нижні наближення (штрихована лінія) при n від 0 до 8 в перерізі $x_2 = 0$.

У таблицях 1 та 2 представлено значення $w_n(\mathbf{x})$ та $v_n(\mathbf{x})$ відповідно при n від 0 до 8 в точках області Ω з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,25i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, i від 0 до 2, j від 0 до 5 (значення в інших чвертях симетричні).

Зауважимо, що у будь-якій із обраних точок $w_n(\mathbf{x})$, $v_n(\mathbf{x})$, значення $w_n(\mathbf{x})$ спадають, а значення $v_n(\mathbf{x})$ – зростають.

Таблиця 1. Значення $w_n(\mathbf{x})$ в точках області $\bar{\Omega}$ при n від 0 до 8

φ ρ	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	n
0	0,155970	0,155970	0,155970	0,155970	0,155970	0,155970	0
	0,142902	0,142902	0,142902	0,142902	0,142902	0,142902	2
	0,138345	0,138345	0,138345	0,138345	0,138345	0,138345	4
	0,138122	0,138122	0,138122	0,138122	0,138122	0,138122	6
	0,138112	0,138112	0,138112	0,138112	0,138112	0,138112	8
0,25	0,155970	0,155970	0,155970	0,155970	0,155970	0,155970	0
	0,140111	0,140135	0,140160	0,140178	0,140196	0,140193	2
	0,135677	0,135699	0,135720	0,135734	0,135748	0,135739	4
	0,135461	0,135483	0,135504	0,135518	0,135531	0,135523	6
	0,135451	0,135473	0,135494	0,135508	0,135521	0,135513	8
0,5	0,155970	0,155970	0,155970	0,155970	0,155970	0,155970	0
	0,123436	0,123538	0,123641	0,123699	0,123758	0,123662	2
	0,119648	0,119743	0,119839	0,119887	0,119936	0,119834	4
	0,119468	0,119563	0,119659	0,119707	0,119755	0,119653	6
	0,119460	0,119555	0,119650	0,119698	0,119746	0,119645	8

Таблиця 2. Значення $v_n(\mathbf{x})$ в точках області $\bar{\Omega}$ при n від 0 до 8

φ ρ	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	n
0	0	0	0	0	0	0	0
	0,132365	0,132365	0,132365	0,132365	0,132365	0,132365	2
	0,137845	0,137845	0,137845	0,137845	0,137845	0,137845	4
	0,138099	0,138099	0,138099	0,138099	0,138099	0,138099	6
	0,138111	0,138111	0,138111	0,138111	0,138111	0,138111	8
0,25	0	0	0	0	0	0	0
	0,129864	0,129884	0,129904	0,129916	0,129928	0,129919	2
	0,135192	0,135214	0,135235	0,135249	0,135249	0,135254	4
	0,135438	0,135460	0,135482	0,135495	0,135509	0,135500	6
	0,135450	0,135471	0,135493	0,135507	0,135520	0,135512	8
0,5	0	0	0	0	0	0	0
	0,114781	0,114870	0,114959	0,115002	0,115044	0,114946	2
	0,119244	0,119339	0,119434	0,119482	0,119530	0,119428	4
	0,119449	0,119544	0,119640	0,119688	0,119736	0,119634	6
	0,119459	0,119554	0,119649	0,119697	0,119745	0,119644	8

Оскільки

$$v_8(\mathbf{x}), w^*(\mathbf{x}), w_8(\mathbf{x}),$$

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w_8(\mathbf{x}) - v_8(\mathbf{x})) = 0,1 \cdot 10^{-5},$$

то з точністю $0,5 \cdot 10^{-6}$ маємо

$$u^*(\mathbf{x}) \approx \frac{w_8(\mathbf{x}) + v_8(\mathbf{x})}{2}.$$

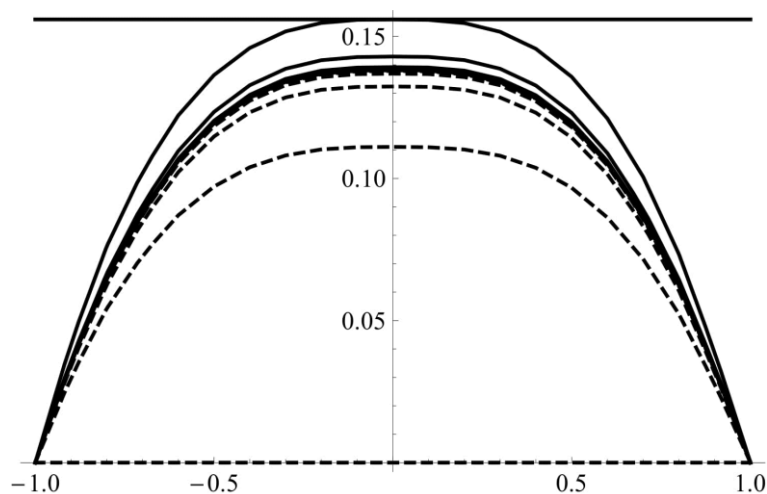


Рис. 4.1 Графіки $w_n(x_1, 0)$ та $v_n(x_1, 0)$ при n від 0 до 8

У таблиці 3 наведено значення наближеного розв'язку з точністю $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-6}$ в точках області $\bar{\Omega}$ з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,25i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, i від 0 до 2, j від 0 до 5. Поверхня наближеного розв'язку $u_8(\mathbf{x})$ та його лінії рівня представлені на рис. 4.2 і 4.3 відповідно.

Зміна норми наближеного розв'язку задачі з точністю $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-6}$ в залежності від параметра λ представлена у таблиці 4 і на рис. 4.4.

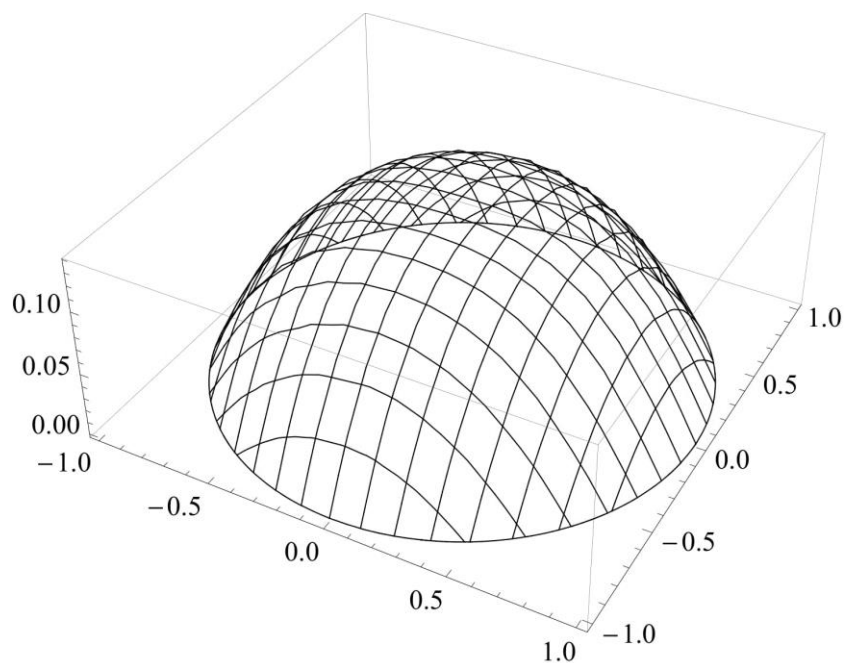


Рис. 4.2 Поверхня наближеного розв'язку $u_8(\mathbf{x})$

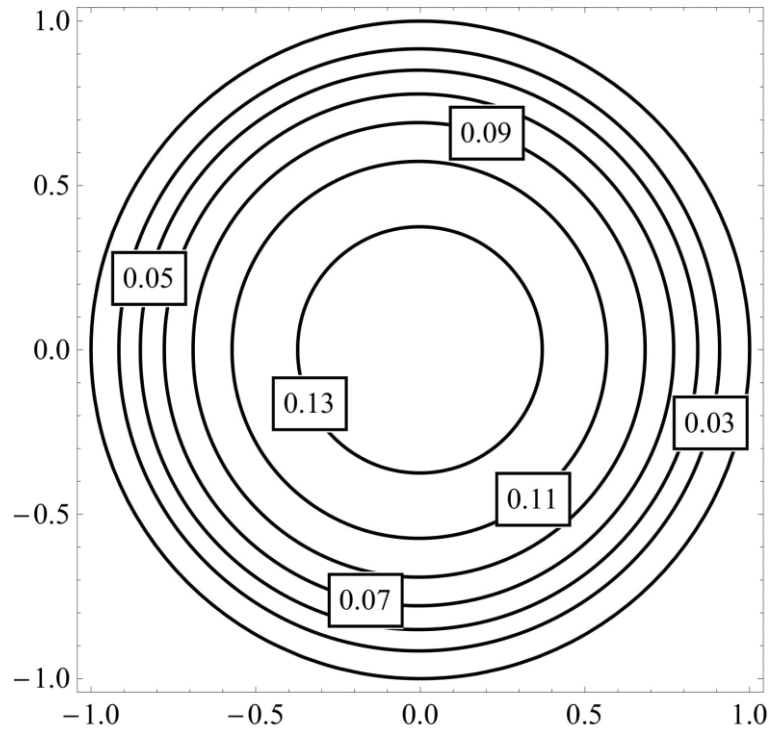


Рис. 4.3 Лінії рівня наближеного розв'язку $u_8(\mathbf{x})$

Таблиця 3. Значення наближеного розв'язку $u_8(\mathbf{x})$ в точках області $\bar{\Omega}$

φ ρ	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	0,138111	0,138111	0,138111	0,138111	0,138111	0,138111
0,25	0,135450	0,135472	0,135494	0,135508	0,135521	0,135513
0,5	0,119460	0,119555	0,119650	0,119698	0,119746	0,119645

Таблиця 4. Значення норми наближеного розв'язку в залежності від параметра λ

λ	$\ u\ _C$	λ	$\ u\ _C$	λ	$\ u\ _C$	λ	$\ u\ _C$
0,05	0,005602	0,30	0,035151	0,55	0,067793	0,80	0,104566
0,10	0,011301	0,35	0,041404	0,60	0,074775	0,85	0,112554
0,15	0,017010	0,40	0,047786	0,65	0,081930	0,90	0,120791
0,20	0,023004	0,45	0,054310	0,70	0,089271	0,95	0,129302
0,25	0,029020	0,50	0,060975	0,75	0,096811	1,00	0,138111

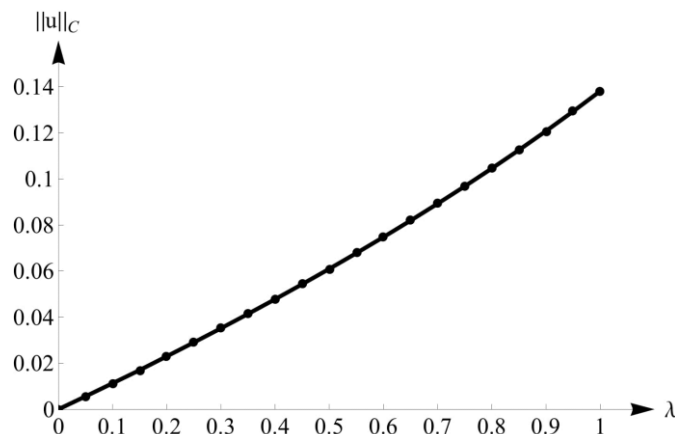


Рис. 4.4 Значення норми наближеного розв'язку в залежності від параметра λ

Також обчислювальний експеримент було проведено для різних значень α . У таблиці 5 представлено значення норм наближеного розв'язку задачі (2.1), (2.2) в залежності від параметрів α та λ .

Таблиця 5. Значення норми наближеного розв'язку в залежності від параметрів задачі

α	$\lambda_c(\alpha)$	λ	$\ u\ _C$	α	$\lambda_c(\alpha)$	λ	$\ u\ _C$
0	0,59259	0,10	0,026001	2	2,37037	1,30	0,093904
		0,25	0,069545			1,65	0,125435
		0,40	0,120867			2,00	0,161459
		0,55	0,185344			2,35	0,204254
1	1,33333	0,50	0,060975	3	3,70370	1,70	0,076398
		0,75	0,096811			2,35	0,111724
		1,00	0,138111			3,00	0,152533
		1,25	0,187902			3,65	0,201951

5. Обговорення результатів

Отже, було розглянуто нелінійну крайову задачу для еліптичного рівняння (2.1), (2.2) при $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ та $\lambda = 1$. За допомогою методу двобічних наближень отримано наближений розв'язок з точністю $0,5 \cdot 10^{-6}$. Згідно з отриманими результатами, наведеними в таблицях 4, 5 і на рис. 4.4, значення норми наближеного розв'язку $\|u\|_C$ збільшується при збільшенні параметрів α та λ . Запропонований у даній роботі метод можна використовувати для мембран різної форми, для яких відома функція Гріна.

ЛІТЕРАТУРА

1. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфутов. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
2. Кончаковська О. С. Чисельний аналіз одного нелінійного еліптичного рівняння, що виникає при моделюванні мікроелектромеханічних систем / О. С. Кончаковська, М. В. Сидоров // Радіоелектроніка та інформатика. – 2016. – 73, № 2. – С.23-29.
3. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
4. Мухуров Н. И. Электромеханические микроустройства / Н. И. Мухуров, Г. И. Ефремов. – Минск: Беларус. навука, 2012. – 257 с.
5. Опойцев В. И. Нелинейные операторы в пространствах с конусом / В. И. Опойцев, Т. А. Хуродзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.
6. Esposito P. Compactness of a nonlinear eigenvalue problem with a singular nonlinearity / P. Esposito // Communications in Contemporary Mathematics. – 2008. – 10, № 01. – P.17-45.
7. Esposito P. Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS / P. Esposito, N. Ghoussoub, Y. Guo. – American Mathematical Soc., 2010.
8. Ghoussoub N. On the partial differential equations of electro-static MEMS devices: stationary case / N. Ghoussoub, Y. Guo // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 2007. – 38, № 5. – P.1423-1449.
9. Guo Y. Touchdown and pull-in voltage behavior of a MEMS device with varying dielectric properties / Y. Guo, Z. Pan, M. J. Ward // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2005. – 66, № 1. – P.309-338.
10. Guo Z. Infinitely many turning points for an elliptic problem with a singular non-linearity / Z. Guo, J. Wei // Journal of the London Mathematical Society. – 2008. – 78, № 1. – P.21-35.
11. Lin F. Nonlinear non-local elliptic equation modeling electrostatic actuation / F. Lin, Y. Yang // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society, 2007. – 463, №. 2081. – P.1323-1337.
12. Pelesko J. A. Mathematical modeling of electrostatic MEMS with tailored dielectric properties / J. A. Pelesko // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2002. – 62, № 3. – P.888-908.

REFERENCES

1. N. A. Alfutov *Fundamentals of calculation for the stability of elastic systems*, M.: Mashinostroenie, 1978 (in Russian).
2. O. S. Konchakovska, M. V. Sidorov “Numerical analysis of one nonlinear elliptic equation that modelling microelectromechanical system”, *Radioelektronika i informatika*, vol. 73, no. 2, pp. 23-29, 2016 (in Ukrainian).
3. M. A. Krasnosel'skij, *Positive Solutions of Operator Equations*. Moscow: Fizmatgiz, 1962 (in Russian).
4. N. I. Muhurov, G. I. Efremov *Electromechanical microdevices*, Minsk: Belarus. navuka, 2012 (in Russian).
5. V. I. Opojtsjev and T. A. Khurodze, *Nonlinear Operators in Spaces with a Cone*, Tbilisi, USSR: Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta, 1984 (in Russian).
6. P. Esposito “Compactness of a nonlinear eigenvalue problem with a singular nonlinearity”, *Communications in Contemporary Mathematics*, vol. 10, no. 1, pp. 17-45, 2008.
7. P. Esposito, N. Ghoussoub and Y. Guo *Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS*, American Mathematical Soc., 2010.
8. N. Ghoussoub, Y. Guo “On the partial differential equations of electro-static MEMS devices: stationary case”, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 38, no. 5, pp. 1423-1449, 2007.
9. Y. Guo, Z. Pan and M. J. Ward “Touchdown and pull-in voltage behavior of a MEMS device with varying dielectric properties”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 66, no. 1, pp. 309-338, 2005.
10. Z. Guo and J. Wei “Infinitely many turning points for an elliptic problem with a singular nonlinearity” *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 78, no. 1, pp. 21-35, 2008.
11. F. Lin and Y. Yang “Nonlinear non-local elliptic equation modeling electrostatic actuation”, *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 463, no. 2081, pp. 1323-1337, 2007.
12. J. A. Pelesko “Mathematical modeling of electrostatic MEMS with tailored dielectric properties”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 62, no. 3, pp. 888-908, 2002.

Кончаківська Оксана Сергіївна – аспірант каф. прикладної математики; Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків-166, пр. Науки, 14, 61166; e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua; ORCID: 0000-0002-0836-6045.

Сидоров Максим Вікторович – кандидат фізико-математичних наук, доцент; Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків-166, пр. Науки, 14, 61166; e-mail: maxim.sidorov@nure.ua; ORCID: 0000-0001-8022-866X.

УДК 539.3

Компьютерное моделирование вынужденных колебаний жидкости в призматическом резервуаре

Д.В. Крютченко

*Институт проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046, Україна
e-mail: wollydenis@gmail.com*

Разработан метод исследования свободных и вынужденных колебаний жидкости в жестком призматическом резервуаре. Предполагается, что жидкость в резервуаре идеальная, несжимаемая, а её течение, вызванное действием приложенной нагрузки, безвихревое. Давление жидкости на стенки резервуара определяется из интеграла Бернулли. Определены собственные значения и формы колебаний жидкости в призматическом резервуаре. Полученные собственные формы и частоты колебаний жидкости образуют базисную систему функций для задачи о вынужденных колебаниях жидкости под действием приложенной нагрузки. Рассмотрен случай периодического внешнего воздействия в горизонтальном направлении. Определена функция, описывающая положение и форму свободной поверхности в зависимости от времени. Исследована зависимость изменения уровня свободной поверхности в зависимости от частоты вынуждающей силы.

Ключевые слова: *призматический резервуар с жидкостью, свободные и вынужденные колебания, периодическое внешнее воздействие, идеальная несжимаемая жидкость*

Дослідження коливань рідини в резервуарах під дією зовнішніх навантажень є актуальною задачею, оскільки інтенсивний рух рідини може призвести до суттєвого підвищення тиску рідини на стінки оболонки та її руйнування. В роботі запропоновано метод для дослідження вільних та вимушених коливань рідини у жорсткому призматичному резервуарі при його частковому заповненні. Це дає змогу оцінити рівень підйому вільної поверхні та тиск рідини на стінки оболонки. Вважається, що рідина, яка міститься в резервуарі, є ідеальною, нестисливою, а її рух, викликаний дією прикладеного навантаження, є безвихровим. Тиск рідини на стінки резервуара визначається з лінеаризованого інтегралу Бернулі за наявності сили тяжіння. Сформульовано мішану крайову задачу для рівняння Лапласа відносно потенціалу швидкостей. Визначені власні значення та форми коливань рідини в призматичному резервуарі. Отримані власні форми створюють базисну систему функцій для дослідження вимушених коливань рідини під дією навантаження, якому піддана оболонка. Розглянуто випадок періодичного зовнішнього впливу в горизонтальному напрямку. Визначено функцію, яка описує локацію та форму вільної поверхні в залежності від часу. Отримано систему незв'язаних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яку розв'язано при нульових початкових умовах. Ці умови відповідають стану спокою до початку дії зовнішнього навантаження. Проведено дослідження збіжності ряду функцій, що описує вільну поверхню. Базисними функціями для цього ряду слугують нормальні похідні від базисних функцій для потенціалу швидкостей. Досліджено залежність зміни рівня вільної поверхні в залежності від частоти зовнішнього навантаження. Встановлено, що коли частота зовнішнього навантаження близька до частоти вільних коливань, відбувається значне зростання амплітуди коливань. Поведінка тиску в залежності від частоти зовнішнього навантаження має аналогічний характер. Це свідчить про те, що градієнт потенціалу швидкостей є досить великим, тому при таких умовах слід враховувати нелінійну складову в рівнянні Бернулі.

Ключові слова: *призматичний резервуар з рідиною, вільні та вимушені коливання, періодичний зовнішній вплив, ідеальна нестислива рідина*

The method for simulating free and forced liquid vibrations in a prismatic tank is proposed. The liquid is supposed to be ideal, incompressible, and its current caused by applied loading is irrotational. The problem of force vibrations is solved by using the eigenmodes as basic functions. The resonance frequencies are defined. Thin-walled structure elements are widely used in different engineering areas: chemical and aerospace industries, transportation, oil and gas producing. Usually these structures operate under intensive thermal and stress loadings and interact with the fluids located in their containers. These loadings can cause the destruction of thin shells containing dangerous liquids and can cause an ecological catastrophe. So the topical issue is estimating stress-strain characteristics, frequencies and modes of vibrations of such facilities. Liquid sloshing often occurs when the extreme loads are applied to the structure elements with compartments partially filled with different liquids. Vibration modes usually affect liquid sloshing modes, so the joint problem of fluid-structure interaction is crucial. Since there are no analytical solutions for tanks and reservoirs with complicated geometrical shapes, numerical methods have been employed for solving the linear boundary value problems of liquid sloshing in addition to the analytical ones. The presence of baffles can drastically change the dynamical behavior of fluid-filled structures as well. This paper is devoted to free and forced vibrations of cylindrical tanks filled with an incompressible ideal liquid. The dynamic analysis of shell structures is often performed by using finite and boundary element programs. The liquid pressure on the walls of the reservoir is defined by Cauchy-Lagrange integral. The external horizontal periodic loading is considered. The eigenvalues and the modes of free liquid vibrations in a prismatic tank have been obtained.

Key words: *fuel tank, free and forced vibrations, baffle, periodic external loading, basic functions, ideal liquid, Cauchy-Lagrange.*

1. Актуальность работы

Оболочечные конструкции широко используются в аэрокосмической, нефтехимической промышленности и на транспорте как топливные баки, резервуары для хранения жидкости.

Динамика оболочечных конструкций, частично заполненных жидкостью, изучается в работах многих авторов. Первые работы в этой области появились в 60-е годы прошлого столетия и были вызваны необходимостью изучения устойчивости движения космических аппаратов [1]. Уточненный анализ динамических явлений требует учета плесканий жидкости, упругости стенок резервуаров, наличия демпфирующих перегородок. Фундаментальная монография [2], посвященная анализу плесканий, опубликована Р.А. Ibrahim в 2005 году. В этой монографии не рассматриваются упругие резервуары, изучаются только свободные колебания. Локальные максимумы давления могут вдвое превышать значения соответствующих величин в незаполненных резервуарах [3]. Свободные и вынужденные колебания цилиндрических и конических резервуаров с жидкостью рассмотрены в работах [4-6]. В работе [7] метод конечных элементов использован для определения частот и форм свободных колебаний жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре. Плескания оказывают наиболее существенное влияние на прочность резервуаров, которые частично заполнены жидкостью, поскольку интенсивное движение жидкости приводит к существенному повышению давления на стенки и крышки резервуаров, что в свою очередь может привести к разрушению резервуара или потери устойчивости в процессе транспортировки. Поэтому актуальным является изучение именно вынужденных колебаний оболочек и оболочечных конструкций с жидкостью. Этот вопрос недостаточно исследован в литературе.

2. Постановка задачи

В данной статье рассмотрены задачи о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в призматических резервуарах, рис 1.

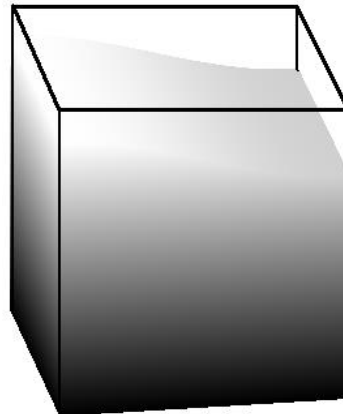


Рис. 1. Призматический резервуар, частично заполненный жидкостью

Пусть S_i $i = 1, 2, 3, 4$ - боковые поверхности призматического резервуара, S_b - поверхность дна, а S_0 - свободная поверхность. Обозначим $S_w = S_b \cup S_{s1} \cup S_{s2} \cup S_{s3} \cup S_{s4}$

Предположим, что жидкость, заполняющая резервуар является идеальной и несжимаемой, а ее движение - безвихревое. В этих условиях существует потенциал скоростей Φ , удовлетворяющий уравнению Лапласа.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Величину давления p на стенки оболочки определяем из линейризованного интеграла Бернулли по формуле

$$p = -\rho_l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) + p_0$$

где g - ускорение свободного падения, z - вертикальная координата точки жидкости, ρ_l - плотность жидкости, p_0 - атмосферное давление.

Краевая задача для определения потенциала скоростей формулируется следующим образом [8]

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_w} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta \right|_{S_0} = 0 \quad (1)$$

где функция ζ описывает форму и положение свободной поверхности.

Для выполнения условий разрешимости краевой задачи (1) необходимо также удовлетворить условию Неймана

$$\iint_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0.$$

Рассмотрим потенциал Φ в виде следующего разложения:

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k \varphi_k$$

Продифференцируем последнее равенство в (1) по t и подставим в полученное выражение значение производной ζ' из второго равенства в (1).

Представим базисные функции φ_k в виде $\varphi_k(t, x, y, z) = e^{i\lambda_k t} \varphi_k(x, y, z)$.

Получим для определения функций φ_k задачи на собственные значения

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\lambda_k^2}{g} \varphi_k \right|_{S_0}, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0.$$

Требуется определить гармоническую функцию Φ , удовлетворяющую уравнению Лапласа, и функцию $\zeta(x, y, t)$ из условий (1).

2. Определение собственных форм колебаний жидкости в жестком резервуаре

Для определения собственных частот и форм колебаний жидкости используем метод разделения переменных Фурье. Находим решение краевой задачи (1) в виде

$$\Psi_{kl} = A_{kl} ch \sqrt{\left(\frac{\pi k}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{2b}\right)^2} z * \cos \frac{\pi k}{2a} x \cos \frac{\pi l}{2b} y$$

Используя условия на свободной поверхности определим

$$\omega_{kl} = \sqrt{g\lambda_{kl} \tanh(\lambda_{kl} H)}$$

Здесь частотный параметр λ_{kl} вычисляется по формуле

$$\lambda_{kl} = \sqrt{\left(\frac{\pi k}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{2b}\right)^2}$$

Для построения системы базисных функций для решения задачи о вынужденных колебаниях жидкости в резервуаре, получим собственные формы колебаний в виде

$$\Psi_{01}(x) = C_1 \cos(0 \cdot x) \sin \frac{\pi}{2b} y, \quad \Psi_{10}(x) = C_2 \sin \frac{\pi}{2a} x \cos(0 \cdot y), \quad \Psi_{11}(x) = C_3 \sin \frac{\pi}{2a} x \sin \frac{\pi}{2b} y,$$

$$\Psi_{20}(x) = C_4 \cos \frac{\pi}{a} x \cos(0y) \dots$$

В табл. 1 приведены численные значения частот ω_{ij} и частотного параметра λ_{ij} для призматического резервуара в форме куба $a=b=H=1$ м.

Таблица 1. Собственные частоты колебаний жидкости в призматическом резервуаре

n	i	j	λ_{ij}	ω_{ij}
1	0	1	1.772453851	4.051164194
2	1	0	1.772453851	4.051164194
3	1	1	2.506628275	5.710012556
4	2	0	3.544907703	5.892165855

Определим функцию ζ . Используем уравнения для нахождения потенциала скоростей

$$\Phi = \sum_{n=1}^M \dot{c}_n(t) \Phi_n,$$

где зависимость $n = n(i, j)$ показана в табл. 1, функции Φ_n определяются по формуле

$$\Phi_n = \frac{1}{ab} \frac{\cosh(\lambda_{ij}z)}{\cosh(\lambda_{ij}H)} \Psi_{ij}(x, y), \quad n = n(i, j)$$

Отсюда для функции ζ получим следующее выражение:

$$\zeta = \sum_{n=1}^M c_n(t) \frac{\partial \Phi_n}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0}, \quad (2)$$

где $\frac{\partial \Phi_n}{\partial \mathbf{n}}$, $n = 1..M$ - нормальные производные потенциалов, вычисленные на свободной поверхности.

Собственные формы колебаний свободной поверхности показаны на рис. 2

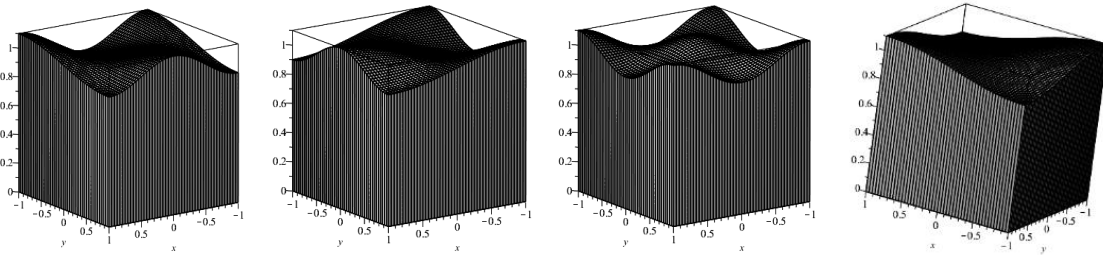


Рис. 2. Формы колебаний свободной поверхности ($n=1, 2, 3, 4$)

Таким образом, построена базисная система функций для исследования вынужденных колебаний жидкости в призматических резервуарах.

3. Вынужденные колебания жидкости в жестком резервуаре

Предположим, что в начальный момент времени жидкость в резервуаре находилась в состоянии покоя. На резервуар действует периодическая нагрузка $\cos \omega t$, приложенная в горизонтальном направлении (параллельно оси Ox).

Составим систему дифференциальных уравнений движения жидкости, исходя из граничного условия на свободной поверхности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta(x, y) + x a_s(t) \Big|_{z=H} = 0, \quad (3)$$

где $a_s(t) = \cos \omega t$. Подставляя ряд (2) в соотношение (3), получим

$$\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \Phi_k(x, y, H) + g \sum_{k=1}^N c_k(t) \frac{\partial \Phi_k(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=H} + x \cos \omega t = 0 \quad (4)$$

Умножим равенство (4) скалярно на Φ_n и воспользуемся ортогональностью собственных форм. Запишем первые три первых дифференциальных уравнения полученной системы.

$$\ddot{c}_1(t) + \omega_1^2 c_1(t) - \frac{8}{9\pi^2} \cos \omega t = 0, \quad (5)$$

$$\ddot{c}_2(t) + \omega_2^2 c_2(t) - \frac{8}{25\pi^2} \cos \omega t = 0, \quad \ddot{c}_3(t) + \omega_3^2 c_3(t) - \frac{8}{121\pi^2} \cos \omega t = 0$$

Система (5) при нулевых начальных условиях имеет следующее решение

$$d_1(t) = -\frac{8}{9\pi^2(\omega_1^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_1 t), \quad d_2(t) = -\frac{8}{25\pi^2(\omega_2^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_2 t),$$

$$d_3(t) = -\frac{8}{121\pi^2(\omega_3^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_3 t) \quad (6)$$

Подставив выражения (6) в формулу (2), получим функцию, описывающую поведение свободной поверхности. Поведение свободной поверхности, описанное функцией ζ , при $M=3$ и $M=4$ показано на рисунке 3. Точками показано решение полученное при $M=3$, сплошной линией при $M=4$. Результаты практически совпадают.

Находим изменение уровня подъема свободной поверхности в зависимости от времени в точке $x=0$, $y=0$, $H=1$ в течение 10 сек. При различных значениях частоты вынужденных колебаний.

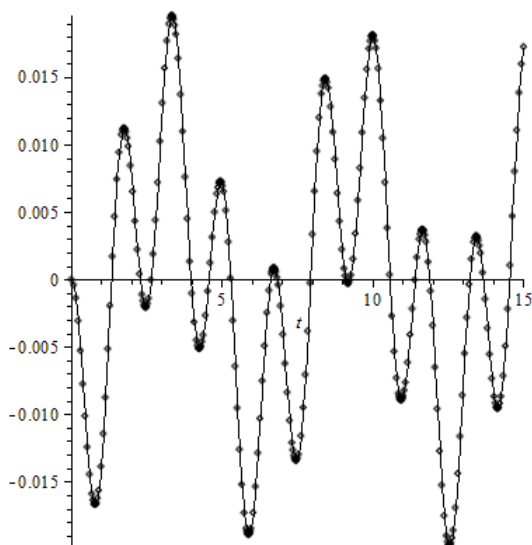


Рис. 3. Изменение уровня подъема свободной поверхности в точке $x=0$, $y=0$, $H=1$ при $\omega=1$

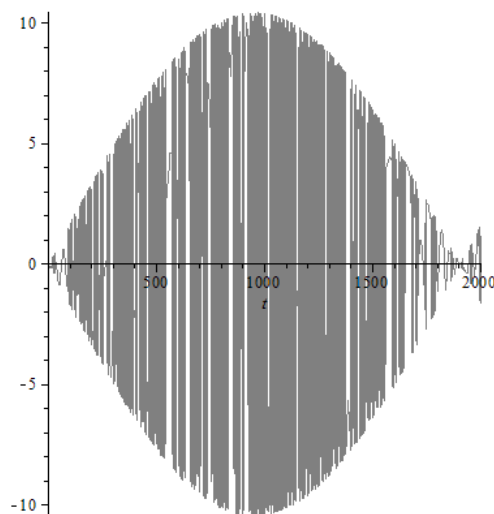


Рис. 4. Изменение уровня подъема свободной поверхности в точке $\omega=3.75$

На рисунке 4 показаны изменения уровня свободной поверхности при частоте, близкой к критической. Для определения динамической составляющей давления служит уравнение

$$p = -\rho \sum_{n=1}^M \ddot{c}_n(t) \Phi_n,$$

де ρ - плотность жидкости. В рассматриваемом случае характер поведения давления такой же, как и характер поведения уровня свободной поверхности.

Если частота вынуждающей силы близка к частоте свободных колебаний, происходит значительный рост амплитуды колебаний. Это свидетельствует о том, что градиент скорости достаточно высок, и при решении таких задач следует учитывать нелинейную составляющую в интеграле Бернулли.

4. Выводы

Разработан метод расчета колебаний жидкости в призматическом резервуаре при действии периодической горизонтальной нагрузки. Определена зависимость уровня подъема жидкости в резервуаре от времени. Установлен характер поведения жидкости в резервуаре в зависимости от частоты вынуждающей силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abramson H.N.; The dynamic behavior of liquids in moving containers; NASA SP-106; 1966
2. Ibrahim R.A.. Liquid Sloshing Dynamics Cambridge University Press, New York, 2005.

3. Khezzar L., Seibi A. C., Goharzadeh A.. Water Sloshing in Rectangular Tanks – An Experimental Investigation & Numerical Simulation. *International Journal of Engineering (IJE)*, Vol. 3, No. 2. pp. P. 174-184, 2010.
4. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*, V1, No1, 2016, pp 14-27.
5. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U., BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 67, 2016: 13-25.
6. Шувалова Ю.С., Крютченко Д.В., Стрельникова Е.А., Интегральные уравнения в задаче о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в жестких резервуарах, *Вісник Херсонського національного технічного університету*, випуск 3, 2016, с. 456-459.
7. Curadelli, O., Ambrosini, D., Mirasso, A., Amani, M. Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement. *Journal of Fluids and Structures* 26, pp. 148–159, 2010.
8. D.V. Krutchenko, E.A. Strelnikova, Yu.S. Shuvalova, Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs, *Вісник Харківського національного університету. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління"*. Т.35.№1, с. 31-37, 2017.

REFERENCES

1. H.N. Abramson; *The dynamic behavior of liquids in moving containers*; NASA SP-106; 1966
2. R.A. Ibrahim. *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2005.
3. L. Khezzar, A. C. Seibi, A. Goharzadeh. Water Sloshing in Rectangular Tanks – An Experimental Investigation & Numerical Simulation. *International Journal of Engineering (IJE)*, Vol. 3, No. 2., 2010, pp. 174-184
4. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*, V1, No1, 2016, pp. 14-27.
5. J. Ravnik, E. Strelnikova, V. Gnitko, K. Degtyarev, U. Ogorodnyk, BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 67, 2016, pp13-25.
6. Ю.С. Шувалова, Д.В. Крютченко, Е.А. Стрельникова, Интегральные уравнения в задаче о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в жестких резервуарах, *Вісник Херсонського національного технічного університету*, випуск 3, 2016, с. 456-459.
7. O. Curadelli, D. Ambrosini, A. Mirasso, Amani, M. *Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement*. *Journal of Fluids and Structures* 26, 2010, pp. 148–159.
8. D.V. Krutchenko, E.A. Strelnikova, Yu.S. Shuvalova, *Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs*, *Вісник Харківського національного університету. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління"*. Т.35.№1, 2017, с. 31-37.

Крютченко Денис Владимирович – аспірант; Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного, ул. Пожарського, 2/10, г. Харків, Україна, 61046.

ORCID: 0000-0002-6804-6991

Научные интересы:

- математическое моделирование колебаний оболочечных конструкций с жидкостью

УДК 517.977.5

Оптимизация надежности сложной системы

Н.С. Подцыкин

*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: nick_p_2018@ukr.net*

В статье предложен метод оптимизации надежности сложной технической системы, рассматриваемой на неограниченном интервале времени. Обновление системы происходит периодически в плановые моменты контроля или в момент отказа системы с помощью профилактических и ремонтных работ, которые называются управлениями. Допускается, что глубина обновления зависит от вида работ и случайна. Сложная система составлена из простых подсистем. Соединения в смысле надежности простых подсистем между собой заданы и могут быть произвольными. Поэтому отказ одной или нескольких подсистем не обязательно приводит к отказу всей сложной системы. В каждой сложной системе существует конечное число наборов определенных подсистем, отказ которых приводит к отказу всей системы. Отказ системы нежелателен, так как восстановление системы часто связано с большими потерями. Важность решения этой задачи отмечалось еще в [2]. В статье предложен вариант ее решения. Для построения математической модели предполагается наличие оценок функций надежности всех простых подсистем или их экспертные оценки. На основе этих оценок и с учетом наблюдаемых информативных параметров подсистем определяется функция надежности сложной системы и ее состояние. Процесс эволюции состояния системы по времени является случайным процессом, который позволяет выбрать вложенную марковскую цепь, выделив моменты времени перед применением управлений. Эта цепь содержит необходимую информацию для применения известного метода оптимизации стратегии применения управлений в моменты контроля. Для реализации этого метода перечислены все возможные управления в плановые моменты контроля и в моменты отказа, их стоимости и вероятностные характеристики. Приведен алгоритм вычисления \mathcal{E} -оптимальной стратегии. Указано, что при необходимости можно найти оптимальную стратегию с помощью более громоздкого алгоритма Ховарда.

Ключевые слова: математическая модель, сложная система, износ технической системы, работоспособность системы, состояние системы, стратегия управления.

У статті запропоновано метод оптимізації надійності складної технічної системи, що розглядається на необмеженому інтервалі часу. Оновлення системи відбувається періодично в планові моменти контролю або в момент відмови системи за допомогою профілактичних і ремонтних робіт, які називаються управліннями. Допускається, що глибина поновлення залежить від виду робіт і випадкова. Складна система складена з простих підсистем. З'єднання в сенсі надійності простих підсистем між собою задані і можуть бути довільними. Тому відмова однієї або декількох підсистем не обов'язково призводить до відмови всієї складної системи. У кожній складній системі існує кінцеве число наборів певних підсистем, відмова яких призводить до відмови всієї системи. Відмова системи небажана, тому, що відновлення системи часто пов'язано з великими втратами.

Важливість вирішення цього завдання зазначалося ще в [2]. У статті запропоновано варіант її вирішення. Для побудови математичної моделі передбачається наявність оцінок функцій надійності всіх простих підсистем або їх експертні оцінки. На основі цих оцінок і з урахуванням спостережуваних інформативних параметрів підсистем визначається функція надійності складної системи і її стан. Процес еволюції стану системи по часу є випадковим процесом, який дозволяє вибрати вкладної марковський ланцюг, виділивши моменти часу перед застосуванням управлінь. Цей ланцюг містить необхідну інформацію для застосування відомого методу оптимізації стратегії застосування управлінь в моменти контролю. Для реалізації цього методу перераховані всі можливі управління в планові моменти контролю і в моменти відмови, їх вартості та ймовірні характеристики. Наведено алгоритм обчислення \mathcal{E} -оптимальної стратегії. Зазначено, що при необхідності можна знайти оптимальну стратегію за допомогою більш громіздкого алгоритму Ховарда.

Ключові слова: математична модель, складна система, знос технічної системи, працездатність системи, стан системи, стратегія управління.

The article proposes a method for optimizing the reliability of a complex technical system considered on an unlimited time interval. The system is updated periodically at scheduled points of control or at the time of system failure with the help of preventive and repair works, which are called controls. It is assumed that the depth of the update depends on the type of work and random. A complex system is composed of simple subsystems. As for the reliability of simple subsystems, their connections are set and can be arbitrary. Therefore, the failure of one or more subsystems does not necessarily lead to the failure of the entire complex system. In each complex system there are a finite number of sets of defined subsystems, the failure of which leads to the failure of the entire system. System failure is undesirable, as system recovery is often associated with large losses.

The importance of solving this problem has been noted before and the article proposes the solution. To build a mathematical model it is assumed that there are estimates of the reliability functions of all simple subsystems or their expert evaluations. Based on these estimates and taking into account the observed informative parameters of the subsystems, the reliability function of the complex system and its state are determined. The process of the evolution of the state of the system over time is a random process that allows you to select an embedded Markov chain, selecting time points before applying controls. This chain contains the necessary information for applying the well-known method of optimizing the strategy of applying controls in moments of control. For the implementation of this method all possible controls are listed for the planned control points and

for the moments of failure, as well as, their costs and probabilistic characteristics. The algorithm for computing the \mathcal{E} -optimal strategy is given. It is indicated that, if necessary, you can find the optimal strategy using the more cumbersome Howard algorithm.

Key words: *mathematical model, complex system, technical system wear, system operability, system state, control strategy.*

1. Введение

Пусть система S составлена из n простых подсистем [1,2]. Каждая простая подсистема в процессе эксплуатации изнашивается, вероятность отказа увеличивается, эффективность ее использования в составе S снижается. Будем допускать, что между простыми подсистемами в смысле надежности могут быть выделены соединения трех видов: простое (последовательное), резервирование (параллельное), смешанное [2]. Очевидно, что надежность системы зависит не только от надежности ее подсистем, но и от их соединений друг с другом.

Положим, что система S эксплуатируется неограниченно долго, оптимальный уровень ее надежности поддерживается за счет периодических ремонтных работ и профилактических обслуживаний подсистем, проводимых в момент контроля. В дальнейшем мероприятия, проводимые в момент контроля, назовем управлением. Контроль системы проводится в планируемые моменты времени через заданный регламентом промежутки времени τ . В момент отказа системы проводится внеочередной контроль и применяется одно из возможных управлений, направленных на восстановление системы и ее обновление. Управления могут различаться по локализации в системе, по глубине обновления подсистем и, следовательно, по стоимости. Естественно предположить, что выбор управления в момент контроля должен зависеть от состояния системы. Ниже будет предложен метод оценки состояния, которое будет учитывать надежность системы на текущий момент контроля. Будем допускать, что процесс изменения состояния является случайным, не марковским. Однако вложенная марковская цепь $X(t)$, определяемая последовательностью состояний в момент контроля перед применением управлений, содержит необходимую информацию для оптимизации процесса выбора управлений.

Последнее замечание определяет выбор метода построения модели на основе марковского процесса принятия решений [3], который задается набором следующих объектов: $\{E, Y, Q, w, \pi\}$, где E - конечное множество состояний, Y - конечное множество управлений, Q - переходная функция, заданная на $E \times E$, w - функция непосредственных доходов, заданная на $E \times Y$, π - стратегия управления, определяющая правило выбора управлений в зависимости от наблюдаемого состояния в момент контроля. Каждой стратегии можно поставить в соответствие величину φ среднего дохода в единицу времени. Целью моделирования является нахождение стратегии π , максимизирующей величину φ .

2. Функция надежности простой и сложной системы.

Примем следующее определение надежности технической системы. Обозначим через ξ время до ее отказа. Функция надежности системы определяется вероятностью $P(t) = P(\xi \geq t)$, где t - время. Рассмотрим i -ю подсистему системы S . С помощью методов распознавания образов выберем набор контролируемых параметров $\{\theta_k^{(i)}, k = 1, \dots, l_i\}$, содержащих информацию о надежности подсистемы, и на их основе составим скалярную функцию $\theta^{(i)}$ так, чтобы ее значения монотонно зависели от уровня надежности подсистемы [4]. Будем предполагать, что для начальных значений $\{\theta^{(i)}(1), \dots, \theta^{(i)}(m_i)\}$ параметра $\theta^{(i)}$ с помощью методов математической статистики получены оценки функции надежности, которые обозначим через $P(t, \theta^{(i)}(j))$, $j = 1, \dots, m_i$. Если для i -ой подсистемы имеется оценка функции надежности новой подсистемы, то обозначим эту функцию так: $P_0(t, \theta^{(i)})$.

Обозначим средние времена до отказа i -ой подсистемы для разных начальных значений параметра $\theta^{(i)}(j)$ через $\bar{t}^{(i)}(j)$, то есть $\bar{t}^{(i)}(j) = \int_0^{\infty} t d(1 - P(t, \theta^{(i)}(j)))$.

Образуем наборы пар $\{\theta^{(i)}(j), \bar{t}^{(i)}(j)\}$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Далее, для каждого i и конечного числа заданных пар с помощью метода интерполяции оценим зависимость среднего времени до отказа подсистемы от параметра θ . Обозначим полученную зависимость $\bar{t}^{(i)} = \varphi^{(i)}(\theta)$, где $\theta \in [\underline{\theta}^{(i)}, \bar{\theta}^{(i)}]$, $\underline{\theta}^{(i)} = \min_j \theta^{(i)}(j)$, $\bar{\theta}^{(i)} = \max_j \theta^{(i)}(j)$. Важное значение при построении модели имеет наличие статистической информации о надежности новой подсистемы. Если она отсутствует, то будем предполагать, что либо технические характеристики новой подсистемы определяют значение параметра θ новой подсистемы, либо она определяется экспертной оценкой. Затем значение функции φ экстраполируется на это значение. Аналогично проведем экстраполяцию на наихудшие состояния подсистемы. Полученный интервал возможных значений параметра θ для i -ой подсистемы обозначим через $\Theta^{(i)}$.

Предлагается правило определения состояния сложной системы, основанной на функции надежности сложной системы. Если известны функции надежности подсистем и схема их соединений в смысле надежности, то функция надежности сложной системы находится без принципиальных трудностей. Ниже будет рассмотрен пример ее нахождения для системы, приведенной на рисунке 1.

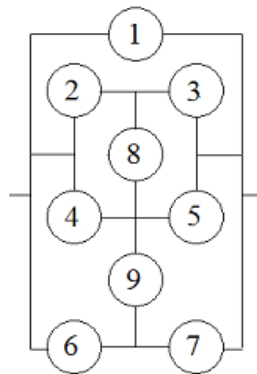


Рис. 1. Система S

Система состоит из девяти простых подсистем, соединенных в смысле надежности так, как показано на рисунке. Пересечение линий означает соединение. Пусть надежности всех девяти простых подсистем заданы: $P^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, 9$. Для удобства анализа системы будем считать, что сложная система и рассматриваемые далее подсистемы имеют один вход и один выход, как показано на рисунке. Чтобы найти функцию надежности сложной системы, выраженной через надежности простых подсистем, проведем ее анализ. Последовательно будем находить подсистемы, состоящие из нескольких простых подсистем, имеющих один вход и один выход, надежность которых легко вычисляется. Если таких подсистем не находится, то выбирается ключевая простая подсистема, обладающая следующим свойством: работающая и неработающая ключевая подсистема определяет две разные сложные системы, доступные дальнейшему анализу. Заметим, что в некоторых случаях удобно выделить несколько ключевых подсистем. Пользуясь этим правилом найдем надежность $P(t)$ системы, приведенной на рисунке 1.

Обозначим для удобства подсистему, рассматриваемую на j -ом шаге анализа и содержащую элементы e_1, \dots, e_k , через $S_j \{e_1, \dots, e_k\}$, а ее надежность через $P_j^{(e_1, \dots, e_k)}(t)$.

Исходную сложную систему S представим в виде резервированной системы $S_1 \{1\}$, $S_1 \{2, \dots, 9\}$. Подсистема $S_1 \{1\}$ состоит из одного элемента с надежностью $P_1^{(1)}(t)$. На рисунке 2 представлена подсистема $S(2) = S_1 \{2, \dots, 9\}$.

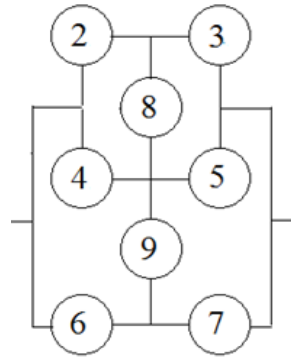


Рис. 2. Система $S(2)$

Тогда надежность системы S , очевидно, равна

$$P(t) = 1 - (1 - P_1^{(1)}(t))(1 - P_1^{(2, \dots, 9)}(t)), \quad (2.1)$$

где $P_1^{(1)}(t) = P^{(1)}(t)$.

В системе $S_1 \{2, \dots, 9\}$ удобно выбрать ключевые элементы 8 и 9. Если элементы 8 и 9 находятся в рабочем состоянии, то эту систему обозначим $S(3) = S_2 \{2, \dots, 7\}$. На рисунке 3 она представлена в исходном виде и в эквивалентном виде, в котором выделены простые и резервированные подсистемы.

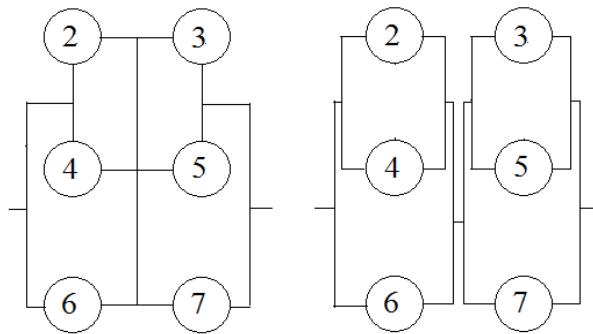


Рис. 3. Подсистема $S(3)$

Если элемент 8 находится в рабочем состоянии, а элемент 9 – в нерабочем состоянии, то получим систему $S(4) = S_3 \{2, \dots, 7\}$, которая представлена на рисунке 4.

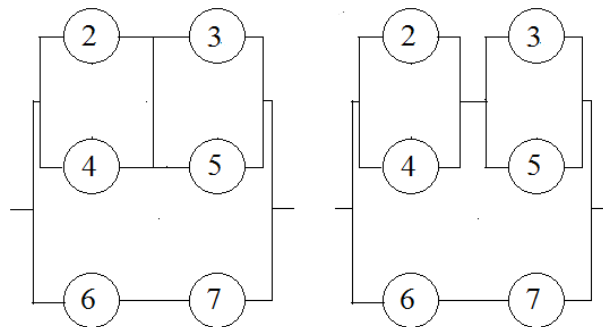
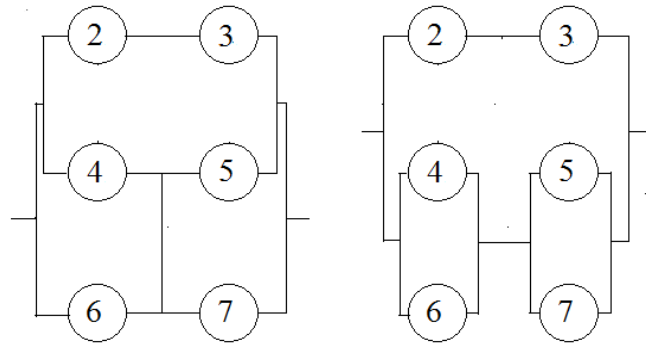
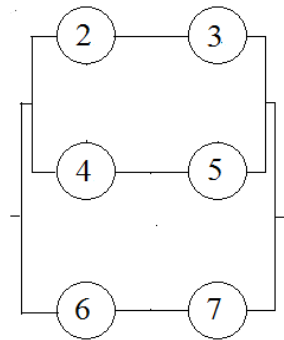


Рис. 4. Подсистема $S(4)$

Если элемент 8 находится в нерабочем состоянии, а элемент 9 – в рабочем состоянии, то получим систему $S(5) = S_4 \{2, \dots, 7\}$, которая представлена на рисунке 5.

Рис. 5. Подсистема $S(5)$

Оба элемента 8 и 9 находятся в нерабочем состоянии. Получим систему $S(6) = S_5\{2, \dots, 7\}$, которая представлена на рисунке 6.

Рис. 6. Подсистема $S(6)$

Надежности ключевых элементов 8 и 9 даны по условию и равны соответственно $P^{(8)}(t)$, $P^{(9)}(t)$. Теперь система $S_1\{2, \dots, 9\}$ представлена через простые и резервированные подсистемы. Это дает возможность записать функцию надежности системы $S_1\{2, \dots, 9\}$.

$$P_1^{(2, \dots, 9)}(t) = P^{(8)}(t)P^{(9)}(t) \left[1 - (1 - P_2(2,4))(1 - P^{(6)}(t)) \right] \left[1 - (1 - P_2(3,5))(1 - P^{(7)}(t)) \right] + \\ + P^{(8)}(t)(1 - P^{(9)}(t)) \left[1 - (1 - P_3(2,4,3,5))(1 - P^{(6)}(t)P^{(7)}(t)) \right] + \\ + (1 - P^{(8)}(t))P^{(9)}(t) \left[1 - (1 - P^{(2)}(t)P^{(3)}(t))(1 - P_4(4,6,5,7)) \right] + \\ + (1 - P^{(8)}(t))(1 - P^{(9)}(t)) \left[1 - (1 - P_5(2,3,4,5))(1 - P^{(6)}(t)P^{(7)}(t)) \right]$$

где: $P_2(2,4) = 1 - (1 - P^{(2)}(t))(1 - P^{(4)}(t))$,

$$P_2(3,5) = 1 - (1 - P^{(3)}(t))(1 - P^{(5)}(t)),$$

$$P_3(2,4,3,5) = \left[1 - (1 - P^{(2)}(t))(1 - P^{(4)}(t)) \right] \left[1 - (1 - P^{(3)}(t))(1 - P^{(5)}(t)) \right],$$

$$P_4(4,6,5,7) = \left[1 - (1 - P^{(4)}(t))(1 - P^{(6)}(t)) \right] \left[1 - (1 - P^{(5)}(t))(1 - P^{(7)}(t)) \right],$$

$$P_5(2,3,4,5) = 1 - (1 - P^{(2)}(t)P^{(3)}(t))(1 - P^{(4)}(t)P^{(5)}(t)).$$

Подставив полученное выражение надежности подсистемы $S_1\{2, \dots, 9\}$ в (2.1), получим функцию надежности сложной системы S , выраженную через функции надежности простых подсистем.

3. Состояние сложной системы.

Определение состояния зависит от цели моделирования, определяется интуицией аналитика и доступной информацией о системе. Далее рассмотрим возможный способ определения состояния сложной изнашивающейся системы для рассматриваемого случая.

Время до отказа является важной характеристикой системы, существенно влияющей на эффективность ее работы. Следует к тому же заметить, что износ системы обычно снижает ее производительность. Поэтому среднее время до отказа выберем в качестве основной характеристики при определении состояния.

Для определения состояния системы в момент контроля важное значение имеет знание функций надежности всех новых подсистем. Рассмотрим способ оценки недостающих функций надежности. Пусть для i -ой подсистемы известен набор функций надежности $P^{(i)}(t, \theta^{(i)}(l))$, $l=1, \dots, L_i$. Выберем ту функцию надежности, у которой наилучшее начальное значение параметра $\theta^{(i)}$. По предположению выбранное значение параметра $\theta^{(i)}(j)$ не соответствует новой подсистеме. Считаем, что эта подсистема проработала некоторый неизвестный интервал времени. С помощью методов экстраполяции можно восстановить длину неизвестного интервала времени и функцию надежности $P^{(i)}(t, \theta^{(i)}(j))$ на этом интервале. Для этого следует учесть, что функция надежности в начальный момент времени равна 1, а также использовать функцию надежности и ее производные на интервале, на котором она известна. Обозначим полученную оценку через $P_0^{(i)}(t)$.

Для дальнейшего построения модели необходимо провести дискретизацию множества состояний E системы S и множеств значений параметров $\Theta^{(k)}$, $k=1, \dots, n$, подсистем. Обозначим через \hat{E}_0 конечное множество состояний $\{x_1, \dots, x_N\}$ после дискретизации E , причем разным x_i соответствуют непересекающиеся полуинтервалы $\left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right)$ множества E .

Аналогично, пусть $\hat{\Theta}^{(k)}$ конечное множество значений параметра k -ой подсистемы: $\hat{\Theta}^{(k)} = \{\theta_1^{(k)}, \dots, \theta_M^{(k)}\}$, $k=1, \dots, n$.

Пусть в момент контроля t_0 наблюдались следующие значения параметров подсистем $I(t_0) = \{\theta^{(1)}(t_0), \dots, \theta^{(n)}(t_0)\}$. Этому набору соответствует набор дискретных значений параметров $\hat{I}(t_0) = \{\theta_{l_1}^{(1)}(t_0), \dots, \theta_{l_n}^{(n)}(t_0)\}$, $1 \leq l_k \leq M$, $k=1, \dots, n$. Для каждой k -ой подсистемы найдем величины $\hat{t}^{(k)} = \varphi^{(k)}(\theta_{l_k}^{(k)})$, $k=1, \dots, n$. Затем из уравнения $\hat{t}^{(k)} = \int_0^{\infty} t d\left(1 - P_0^{(k)}(t + \hat{t}^{(k)})\right)$ находим сдвиги $\hat{t}^{(k)}$, $k=1, \dots, n$. Найденные функции надежности

$$P_0^{(k)}(t + \hat{t}^{(k)}), \quad k=1, \dots, n, \quad (3.1)$$

обозначим через $P_{\hat{t}^{(k)}}^{(k)}(t)$. Они позволяют оценить в момент контроля t_0 функцию надежности $P_{t_0}(t)$ системы S и ее состояние.

Пусть $P_0(t)$ - функция надежности сложной системы, составленной из новых подсистем. Обозначим через μ , $\mu \geq 0$, произвольный момент времени. Определим функцию \bar{t}_μ условного среднего времени до отказа системы, при условии, что до момента времени μ отказа не произошло.

$$\bar{t}_\mu = \int_0^{\infty} t d\left(1 - \frac{P_0(\mu + t)}{P_0(\mu)}\right).$$

Положим, что в момент времени $\mu=0$ состояние системы $x=0$. Для произвольного момента времени $\mu \geq 0$ положим

$$x_{\mu} = \frac{\bar{t}_0 - \bar{t}_{\mu}}{\bar{t}_0}. \quad (3.2)$$

Таким образом, множество состояний сложной системы $E = [0,1)$. Ему соответствует дискретное множество состояний \hat{E}_0 . Заметим, что здесь состояние x_{μ} является прогнозируемым для момента $\mu > 0$, при условии, что в начальный момент времени состояние $x = 0$ и до момента μ отказ системы не произошел. Следует предположить, что в любой момент времени $\mu \neq 0$ из-за наличия случайных факторов состояние может несколько отличаться от прогнозируемого.

Если в момент контроля t_0 системы S была получена оценка функции надежности $P_{t_0}(t)$, то после вычисления функции $\bar{t}_{\mu} = \int_0^{\infty} t d \left(1 - \frac{P_{t_0}(\mu+t)}{P_{t_0}(\mu)} \right)$, прогнозируемые состояния для любого момента времени $\mu > 0$ (начиная с момента контроля t_0), вычисляются по формуле(3.2).

4. Управления, доход и стратегия управления

Предполагается, что система контролируется в плановые моменты времени через промежуток времени τ или в момент отказа системы. Обозначим случайный период контроля через

$$\zeta = \min(\xi, \tau), \quad (4.1)$$

где ξ - случайное время от начала периода до отказа.

Подсистемы, отказавшие на периоде τ , ожидают восстановления до следующего момента контроля, если их отказ не привел к отказу всей системы. Если отказ подсистемы привел к отказу системы S , то в момент ее отказа формально реализуется случайная величина ζ и период заканчивается.

Управления в системе S применяются в каждый момент контроля. Для общности допускаем, что управления, применяемые в плановый момент контроля и в момент отказа, принадлежат разным конечным и непересекающимся множествам, соответственно, Y_1 и Y_2 , $Y = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Каждое управление восстанавливает отказавшие подсистемы и определяет конкретную подсистему, состояние которой следует улучшить. Управления из Y_2 дополнительно еще и восстанавливают систему из состояния отказа. Допускается, что после применения управления состояние выбранной этим управлением подсистемы улучшается на случайную величину. Пусть перед применением управления y значение параметра выбранной подсистемы равно θ , то после его применения значение параметра будет случайным, с распределением, зависящим от значения θ и управления y . Параметры других подсистем управление не изменяет.

Применение управления y в состоянии x определяет средний доход в единицу времени $w(x, y)$ на предстоящем периоде.

Конечное множество состояний E_1 , в которых отказа не произошло, составлено из N элементов (совпадает с множеством \hat{E}_0) и конечное множество состояний E_2 (совпадает с множеством \hat{E}_0), в которых отказ произошел, составлен также из N элементов. Множество всех состояний $\hat{E} = E_1 \cup E_2$. Далее полагаем, что состояния \hat{E} упорядочены от наилучшего к наихудшему в каждой группе: $x_1, \dots, x_N \in E_1$, $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N \in E_2$.

В момент контроля оценивается состояние системы и, в зависимости от состояния, принимается решение о применении одного из возможных управлений из множества Y . Формально это означает, что задано отображение $f : \hat{E} \rightarrow Y$, называемое решающей функцией. Последовательность решающих функций $\pi = (f_1, f_2, \dots)$ называется стратегией управления.

Обозначим вектор средних доходов в единицу времени системы, управляемой стратегией π , через

$$\varphi(\pi) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} M_x^\pi \sum_{l=0}^{L-1} w(x^l, f_l(x^l)),$$

где: M - знак математического ожидания, x - начальное состояние в момент времени $t=0$, x^l - состояние системы в l -ый момент контроля, k -я компонента вектора $\varphi(\pi)$ соответствует началу процесса из состояния $x_k \in \hat{E}$.

Каждой решающей функции f можно поставить в соответствие матрицу переходных вероятностей $Q(f)$ с элементами $Q(x_j|x_i, f(x_i))$, $i, j=1, \dots, 2N$, и вектор-столбец непосредственных доходов $w(f)$ с компонентами $w(x_i, f(x_i))$, $i=1, \dots, 2N$ [3]. Применение управления $f(x) \in Y$ в состоянии $x \in \hat{E}$ обеспечит непосредственный средний доход $w(x, f(x))$ в единицу времени на предстоящем периоде и определяет распределение вероятностей $Q(\cdot|x, f(x))$ на множестве состояний \hat{E} в следующий момент контроля.

Стратегия вида $\pi = f^{(\infty)} = (f, f, \dots)$ называется стационарной. Для стационарной стратегии $f^{(\infty)}$ вектор средних доходов в единицу времени, при некоторых несущественных ограничениях [3], можно записать в виде

$$\varphi(\pi) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} Q^l(f)w(f), \quad (4.2)$$

где вектор $\varphi(\pi)$ составлен из одинаковых компонент.

Оптимальную стратегию можно искать в классе стационарных стратегий [3].

Стратегия π , максимизирующая $\varphi(\pi)$, называется оптимальной. Поиск оптимальной или близкой к оптимальной стратегии управления надежностью сложной системы является задачей, вариант решения которой предложен в данной работе.

Функция непосредственного дохода $w(x, y)$ системы S вычисляется в условиях имеющейся информации. Она определяется с учетом дохода в единицу времени от функционирования системы на текущем периоде до следующего момента контроля с учетом стоимости управления и средней стоимости восстановления отказавших подсистем. Если, например, в момент контроля система S находится в состоянии x , доход в единицу времени равен v , случайное время до отказа имеет плотность распределения вероятностей $p(t)$, стоимость управления y равна r_y , средняя стоимость восстановления подсистем равна R_y , восстановления системы S из состояния отказа равна R , то учитывая, что период ζ случаен (4.1), получаем:

$$w(x, y) = \int_0^\tau \left(v - \frac{r_y + R_y + R}{t} \right) p(t) dt + \left(v - \frac{r_y + R_y}{\tau} \right) \int_\tau^\infty p(t) dt. \quad (4.3)$$

Далее рассмотрим действие управления $y^{(i)} \in Y_1$ на состояние сложной системы S . Пусть в момент контроля t_0 параметры подсистем приняли значения, определяемые вектором $\hat{I}(t_0) = \{\theta_{l_1}^{(1)}(t_0), \dots, \theta_{l_n}^{(n)}(t_0)\}$. По формуле (2.1) получим функции надежности $P_{\hat{I}(t_0)}^{(k)}(t)$ всех подсистем для момента времени t_0 , затем функцию надежности $P_{t_0}(t)$ системы S и, наконец, состояние $x_u \in E_1$ перед применением управления $y^{(i)} \in Y_1$ по формуле (3.2).

Действие управления $y^{(i)} \in Y_1$ в условиях конкретного набора параметров $\hat{I}(t_0)$ приведет к изменению параметра i -ой подсистемы в соответствии с некоторым вероятностным распределением $\rho(\cdot | \theta_{l_i}^{(i)}, y^{(i)})$ на $\hat{\Theta}^{(i)}$ и не влияет на параметры других подсистем. Оценка

распределения ρ на $\hat{\Theta}^{(i)}$ может быть получена статистическими методами по имеющимся наблюдениям.

Если управление $y^{(i)} \in Y_2$ применяется в системе S в момент отказа, то распределение ρ , в зависимости от конкретной системы, может быть либо тем же, что и для $y^{(i)} \in Y_1$, либо оцениваться отдельно.

Распределение ρ после применения управления $y^{(i)}$ определяет вероятность $\rho(\theta_l^{(i)} | \theta_i^{(i)}, y^{(i)})$ каждого значения параметра $\theta_l^{(i)} \in \hat{\Theta}^{(i)}$, $1 \leq l \leq M$. Значение параметра $\theta_l^{(i)}$ i -ой подсистемы вместе с фиксированными в момент t_0 значениями параметров других подсистем определяют функцию надежности $P_{t_0}(t, l)$ системы S . Обозначим через μ интервал времени, отсчитанный от момента контроля t_0 такой, что $0 \leq \mu \leq \tau$. Тогда среднее время до отказа системы, начиная с момента $t_0 + \mu$, при условии, что на интервале времени μ отказ не произошел, равен

$$\bar{t}_{\mu, l} = \int_0^{\infty} t d \left(1 - \frac{P_{t_0}(\mu + t, l)}{P_{t_0}(\mu, l)} \right), \tag{4.4}$$

а состояние системы в этот момент равно $x_{\mu, l} = \frac{\bar{t}_0 - \bar{t}_{\mu, l}}{\bar{t}_0}$. Обозначим $x_{\mu, l} \sim x_\nu$, если состоянию

$x_{\mu, l} \in E$ соответствует состояние $x_\nu \in \hat{E}$. Обозначим, далее, множество индексов $J_\nu(\mu) = \{l : x_{\mu, l} \sim x_\nu\}$, $\nu = 1, \dots, N$. Заметим, что при фиксированном μ для некоторых ν оно может быть пустым.

Далее, с учетом сделанных предположений и полученных результатов, найдем переходные вероятности процесса $X(t)$ на заданном интервале времени. Вероятность перехода процесса $X(t)$ на интервале времени $(t_0, t_0 + \mu)$, $0 \leq \mu \leq \tau$, из состояния $x_u \in \hat{E}$, в котором применено управление $y^{(i)} \in Y$, в состояние $x_\nu \in \hat{E}$, при условии, что на этом интервале отказа системы не произошло, равна

$$p_\mu(x_\nu | x_u, y^{(i)}) = \sum_{l \in J_\nu(\mu)} \rho(\theta_l^{(i)} | \theta_i^{(i)}, y^{(i)}). \tag{4.5}$$

Рассмотрим теперь случай, когда в некоторый момент $t_0 + \mu$ на интервале времени (t_0, τ) произошел отказ системы. Найдем вероятность состояния $x_\nu \in \hat{E}$ системы в момент отказа, при условии, что в момент контроля t_0 в состоянии x_u было применено управление $y^{(i)} \in Y$. Пусть для определенности в момент контроля параметр i -ой подсистемы имел значение $\theta_i^{(i)} \in \hat{\Theta}^{(i)}$. Для заданного l ($l = 1, \dots, M$) из уравнения (4.4) находим вместо значения $\bar{t}_{\mu, l}$ при фиксированном μ функцию $t_l(\mu)$ и затем функцию $x_l(\mu) = 1 - \frac{\bar{t}_l(\mu)}{\bar{t}_0}$, $0 \leq \mu \leq \tau$. Для удобства

введем в рассмотрение функцию Хэвисайда $\chi(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$ и функцию $\delta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t \leq 0 \end{cases}$. В

этом случае индикатор попадания величины x в полуинтервал $[a, b)$ можно сконструировать следующим образом: $\Delta_{[a, b)}(x) = \chi(x - a)\chi(b - x) + \chi(\delta(a - x)\delta(x - a))$. При фиксированном l вероятность состояния x_ν в момент отказа с помощью индикатора Δ можно записать в виде:

$\int_0^\tau \Delta_{\left[\frac{v-1}{N}, \frac{v}{N}\right]}(x_l(\mu)) d(1 - P_{t_0}(\mu))$. Учитывая распределение ρ окончательно получаем, что

вероятность состояния x_v в момент отказа, при условии применения управления $y^{(i)}$ в состоянии x_u , равна

$$p_\xi(x_v | x_u, y^{(i)}) = \sum_{l=1}^M \rho(\theta_l^{(i)} | \theta_{l_i}^{(i)}, y^{(i)}) \int_0^\tau \Delta_{\left[\frac{v-1}{N}, \frac{v}{N}\right]}(x_l(\mu)) d(1 - P_{t_0}(\mu)). \quad (4.6)$$

Заметим, что если отказа до следующего момента контроля не произошло, то при всех остальных перечисленных выше условиях, с учетом (4.3), вероятность перехода $x_u \rightarrow x_v$ за период контроля τ равна

$$p_\tau(x_v | x_u, y^{(i)}) = P_{t_0}(\tau) \sum_{l \in J_v(\tau)} \rho(\theta_l^{(i)} | \theta_{l_i}^{(i)}, y^{(i)}). \quad (4.7)$$

5. Матрица переходных вероятностей.

Пусть f - решающая функция. Ей соответствует матрица Q переходных вероятностей размерности $2N \times 2N$. Разделим ее на 4 квадратные подматрицы размерностью $N \times N$:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}.$$

Элементы $p_\tau(x_v | x_u, y^{(i)})$ матрицы Q_{11} являются вероятностями перехода системы S из рабочего состояния в момент контроля в рабочее состояние в следующий плановый момент контроля и могут быть вычислены по формуле (4.7). Элементы $p_\xi(\tilde{x}_v | x_u, y^{(i)})$ матрицы Q_{12} - вероятности перехода из рабочего состояния в момент контроля в состояние отказа в следующий момент контроля и могут быть вычислены по формуле (4.6). Элементы $p_\tau(x_v | \tilde{x}_u, y^{(i)})$ матрицы Q_{21} - вероятности перехода из состояния отказа в рабочие состояния в следующий плановый момент контроля и могут быть вычислены по формуле (4.7). Элементы $p_\xi(\tilde{x}_v | \tilde{x}_u, y^{(i)})$ матрицы Q_{22} - вероятности перехода из состояния отказа в состояние отказа в следующий момент контроля и могут быть вычислены по формуле (4.6).

6. Функция непосредственных доходов.

Пусть в момент контроля t_0 функция надежности системы S равна $P_{t_0}(t)$. f - решающая функция. Ей соответствует вектор-столбец $w(f)$ непосредственных доходов, причем $f(x) \in Y$, $x \in \hat{E}$. k -я компонента вектора $w(f)$ содержит значение среднего дохода в единицу времени системы S за один период между двумя последовательными моментами контроля при условии, что в начале периода в момент времени в состоянии $x_k \in \hat{E}$ было применено управление $f(x_k) \in Y$, $k = 1, \dots, 2N$.

Обозначим стоимость применения управления $f(x_k) \in Y$ через $r(y^{(i)})$, длительность реализации этого управления через $t(f(x_k))$, стоимость восстановления системы из отказа через R . Средняя длительность восстановления системы из отказа равна T . Заметим, что $r(f(x_k))$ включает среднюю стоимость восстановления отказавших на рассматриваемом периоде подсистем. Будем считать, что работающая система приносит доход v в единицу времени. Тогда формула (4.3) для вычисления k -ой компоненты вектора $w(f)$ примет следующий вид:

$$w(x_k, f(x_k)) = \int_0^\tau \left(\frac{\nu\mu - r(f(x_k)) - R}{\mu + t(f(x_k)) + T} \right) d(1 - P_{t_0}(\mu)) + P_{t_0}(\tau) \frac{\nu\tau - r(f(x_k))}{\tau + t(f(x_k))}, \quad k = 1, \dots, 2N, \quad f(x_k) \in Y.$$

7. Метод и алгоритм оптимизации

Будем считать, что для векторов a и b выполнено неравенство $a \geq b$, если аналогичное неравенство выполнено для всех компонент: $a_i \geq b_i$. Неравенство $a > b$ выполнено, если $a \geq b$ и $a \neq b$.

Стационарная стратегия π^* называется оптимальной, если для любой стационарной стратегии π выполнено неравенство $\varphi(\pi^*) \geq \varphi(\pi)$. Стационарная стратегия π_ε^* называется ε -оптимальной, если для заданного $\varepsilon > 0$ и любой стационарной стратегии π выполнено неравенство $\varphi(\pi) - \varphi(\pi_\varepsilon^*) \leq \varepsilon$.

Для прикладных задач ε -оптимальная стратегия управления по разным причинам имеет наибольшую ценность. Далее рассмотрим метод нахождения ε -оптимальной стратегии управления системой S . Воспользуемся известным методом поиска ε -оптимальной стратегии, основанном на принципе сжатых отображений [3]. Предварительно введем следующие вспомогательные определения.

Пусть на векторном пространстве V с элементами v размерности $2N$ определена полунорма $\tilde{p}(v) = \max_i v_i - \min_i v_i, 1 \leq i \leq 2N$ [5]. Факторизация V по $K = \{v : p(v) = 0\}$ определяет факторпространство $V' = V/K$, на котором \tilde{p} является нормой $\|\cdot\|$ [5].

Определим на V следующие операторы.

$$\begin{aligned} F(f)v &= w(f) + Q(f)v; \\ Uv &= \max_f F(f)v. \end{aligned}$$

В условиях предположения о регулярности переходной матрицы для любой решающей функции f оператор U на V' является сжимающим [3]. Сделанные выше предположения позволяют применить оптимизационный метод, основанный на принципе сжатых отображений [3]. Правило остановки алгоритма будет основано на следующем утверждении.

Утверждение [6]. Пусть $v \in V', \|Uv - v\| = \varepsilon, Uv = F(f)v$. Тогда

1. Стратегия $\pi = f^{(\infty)}$ является ε -оптимальной.
2. $\min_x (Uv - v)(x) \leq \varphi^* \leq \max_x (Uv - v)(x)$.

Здесь φ^* - величина среднего дохода в единицу времени, которая соответствует оптимальной стратегии.

Следствие [6]. Пусть $\pi^* = (f^*, f^*, \dots)$ - оптимальная стратегия, $v_k, v_{k+1} \in V'$ и f_{k+1} удовлетворяют условиям: $v_{k+1} = Uv_k = F(f_{k+1})v_k$. Обозначим $\varepsilon = \|v_{k+1} - v_k\|$. Тогда решающая функция f_{k+1} определяет ε -оптимальную стратегию $\pi_\varepsilon^* = (f_{k+1}, f_{k+1}, \dots)$.

Для нахождения ε -оптимальной стратегии необходимо выполнить следующие действия.

1. Выбрать $\varepsilon > 0$.
2. Выбрать произвольно начальный вектор $v_0 \in V'$.
- k -ый шаг алгоритма.
3. Вычислить $v_k = Uv_{k-1} = F(f_k)v_{k-1}, v_k \in V'$.
4. Проверить неравенство $\|v_k - v_{k-1}\| < \varepsilon$.

Если оно выполнено, то стратегия $\pi = f_k^{(\infty)}$ является ε -оптимальной.

Если не выполнено, то выполнить $(k + 1)$ -ый шаг алгоритма.

За конечное число шагов будет достигнута ε -оптимальная стратегия.

Замечание 1. Для определенности удобно выбирать из класса смежности фактор-пространства V' представителя v_k с нулевой первой компонентой.

Замечание 2. Оптимальную стратегию управления можно найти, применив более громоздкий алгоритм Ховарда [7].

8. Заключение

Данная работа является продолжением [1]. Важность решения задачи в рассмотренной постановке было отмечено еще в [2]. В предлагаемой работе рассмотрен вариант решения задачи поддержания уровня надежности и работоспособности сложной технической системы на оптимальном уровне на неограниченном интервале времени. При построении модели допускалось, что простые подсистемы, составляющие рассматриваемую сложную систему, соединены между собой в смысле надежности достаточно произвольно. Одна или несколько простых подсистем в процессе эксплуатации могут отказаться. Однако их отказ не обязательно приводит к отказу всей системы, и система продолжает функционировать до момента планового контроля. Если же отказ подсистем привел к отказу всей системы, то система останавливается, проводится внеплановый контроль и применяется управление для восстановления системы. Модель строилась в условиях наличия некоторой статистической информации по каждой простой подсистеме. Эта информация позволила получить оценки функций надежности простых подсистем. На основе полученных оценок построена функция надежности сложной системы и определено ее состояние.

Всякая техническая система в процессе эксплуатации подвержена износу. Износ системы снижает ее производительность, повышает вероятность отказа. Отказ системы связан с ее простым, обычно приводит к большим потерям и нежелателен. Поэтому вводимое состояние системы должно оценивать степень ее износа и вероятность возможного отказа. Состояние сложной системы, которое определено в модели с помощью функции надежности, содержит интегральную информацию о надежности и работоспособности системы и может быть доступно в каждый момент контроля после получения информации о текущих значениях заданных информативных параметров.

Следует заметить, что случайный процесс изменения состояния системы во времени не является марковским, но последовательность моментов контроля системы перед применением управлений определяет вложенный марковский процесс. Это позволило применить известный оптимизационный метод для нахождения ε -оптимальной стратегии управления. Предложенный алгоритм легко реализовать, например, с помощью математического пакета MAPLE [8].

Дальнейшее развитие модели может быть направлено на обобщение и изменение действия управления в сложной системе. Например, количество подсистем, которые обновляются в результате реализации управления, может быть фиксированным числом больше одного, или может быть случайным числом, зависящим от состояния системы или подсистем. Необходимым условием при этом является перечисление всех возможных управлений заранее в модели.

Функция надежности сложной системы позволяет найти все наборы подсистем такие, что отказ всех подсистем набора приводит к отказу сложной системы. Адекватность модели можно повысить, если прогнозировать не только сам отказ системы, но и возможный набор подсистем, отказ которых привел к отказу всей системы. В этом случае стоимость восстановления будет не усредненной величиной, а суммой стоимостей восстановления каждой отказавшей подсистемы.

В заключение отметим, что точность моделирования системы зависит от количества информации, которой можно располагать при ее моделировании. Введение состояния системы, определяемого контролируруемыми параметрами, использование статистической информации о функциях надежности подсистем, составляющих сложную систему, обеспечивают построение более адекватной модели для оптимизации надежности и работоспособности, чем часто используемая для этой цели “наработка на отказ”.

ЛІТЕРАТУРА

1. Подцькин Н.С. Математическая модель профилактики сложной технической системы. Вісник ХНУ, Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”, Випуск 31, Харків, 2016., с.82-93.

2. Барзилович Е.Ю., Беляев Ю.К., Каштанов В.А. и др. Под ред. Гнеденко Б.В. Вопросы математической теории надежности. – М.: Радио и связь, 1983. – 376с.
3. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. – М.: Наука, 1977. – 175с.
4. Горелик А.Л., Скрипкин В.А. Методы распознавания, М.: Высшая школа, 2004. – 262с.
5. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. – 443с.
6. Подцыкин Н.С. Оптимизация периода наблюдений в марковском процессе принятия решений. Вісник ХНУ, №629, Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”, Випуск 3, Харків, 2004., с.25-32.
7. Ховард Р.А. Динамическое программирование и марковские процессы.: Сов. Радио, 1964. - 189 с.
8. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 800 с Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1981. – 448 с

REFERENCIAS

1. N.S. Podtscykin. A mathematical model for the prevention of complex technical systems. Visnyk KhNU, Seria “Mathematical modelviku. Informacion technology. Automation systems management”, Vipusk 31, Kharkiv, pp.82-93, 2016.
2. E.Yu. Barzilovich, Yu.K. Belyaev, V.A. Kashtanov and others. Ed. B.V. Gnedenko. Mathematical theory of reliability issues. - M.: Radio and communication, 1983.
3. H. Main, S. Osaki. Markov decision-making processes. - M. : Science, 1977.
4. A.L. Gorelik., V.A. Skripkin. Recognition methods, M.: Higher School, 2004.
5. U. Rudin. Functional analysis. M. : Mir, 1975.
6. N.S. Podtscykin. Optimization of the observation period in the Markov decision-making process. Visnyk KhNU, №629, Seria “Mathematical Modeling. Informacion technology. Automation systems management”, Vipusk 3, Kharkiv, pp. 25-32, 2004.
7. R.A. Howard. Dynamic programming and Markov processes. : Sov. Radio, 1964.
8. V.P. Dyakonov. Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations. - M. : DMK Press, 2011.

Подцикін Микола Серафимович – кандидат технічних наук, доцент; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків-22, майдан Свободи, 4, 61022; e-mail: *nick_p_2018@ukr.net*; ORCID: 0000-0001-5814-9164.

UDC 519.237.5

Constructing the nonlinear regression equations based on multivariate normalizing transformations

N.V. Prykhodko, S.B. Prykhodko

*Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Heroes of Ukraine Ave., 9, Nikolayev, 54025, Ukraine
e-mail: sergiy.prykhodko@nuos.edu.ua*

In the paper we consider the techniques to construct the equations, confidence and prediction intervals of nonlinear regressions on the basis of multivariate normalizing transformations for non-Gaussian data. We demonstrate that the poor normalization of multivariate non-Gaussian data using the univariate transformations leads to an expansion of the confidence and prediction intervals of non-linear regression for a larger number of data rows compared to the multivariate normalizing transformation.

Keywords: *non-linear regression equation, confidence interval, prediction interval, normalizing transformation, multivariate non-Gaussian data.*

В статті розглядаються методи побудови рівнянь, довірчих інтервалів та інтервалів передбачення нелінійних регресій на основі багатовимірних нормалізуючих перетворень для негаусовських даних. У якості прикладу побудовано нелінійне регресійне рівняння для оцінювання розміру програмного забезпечення інформаційних систем з відкритим кодом на РНР із застосуванням багатовимірного нормалізуючого перетворення Джонсона для сімейства S_B . Це рівняння отримано за вибіркою чотиривимірних негаусовських даних: фактичний розмір програмного забезпечення у тисячах рядків коду, загальна кількість класів, загальна кількість зв'язків та середня кількість атрибутів на клас у концептуальній моделі даних з 32 інформаційних систем, розроблених з використанням мови програмування РНР. Попередньо зазначені дані були перевірені на наявність викидів із використанням квадрату відстані Махаланобиса (Mahalanobis): для рівня значимості, що дорівнює 0,005, викиди відсутні. Гіпотезу про багатовимірну нормальність було перевірено за критерієм квадрату відстані Махаланобиса. Побудоване нелінійне рівняння у порівнянні з іншими регресійними рівняннями (як лінійними, так і нелійними, які отримані за допомогою одновимірних нормалізуючих перетворень Джонсона та десяткового логарифму) має більший множинний коефіцієнт детермінації і менше значення середньої величини відносної похибки. Продемонстровано, що погана нормалізація багатовимірних негаусовських даних за допомогою одновимірних перетворень або її відсутність призводить до збільшення ширини довірчих інтервалів та інтервалів передбачення як нелінійної так і лінійної регресії для більшої кількості рядків даних у порівнянні з багатовимірним нормалізуючим перетворенням.

Ключові слова: *нелінійне рівняння регресії, довірчий інтервал, інтервал передбачення, нормалізуюче перетворення, багатовимірні негаусовські дані.*

1 Introduction

A normalizing transformation is a good way to construct equations, confidence and prediction intervals of non-linear regressions [1-5], and it is often used in information technology, software engineering, biometry, ecology, finance, etc. According to [3] the transformations are mainly used for four purposes, two of which are: the first – to obtain approximate normality for the distribution of the residuals, the second – to transform the dependent and independent random variables in such a way that the strength of the linear relationship between new variables (normalized variables) is better than the linear relationship between the response and the predictor (or predictors) without transformation. Well-known techniques to construct the equations, confidence and prediction intervals of nonlinear regressions are based on the univariate normalizing transformations, which do not take into account the correlation between dependent and independent variables when multivariate non-Gaussian data is normalized. Therefore the multivariate normalizing transformations needs to be applied.

2 Unsolved problems and objectives of the paper

Well-known techniques for constructing the non-linear regression equations are based on the univariate normalizing transformations (such as, the decimal logarithm, the Box-Cox transformation), which do not take into account the correlation between the dependent and independent random variables in the case of normalization of multivariate non-Gaussian data. Application of such univariate normalizing transformations for building the nonlinear regression equations does not always lead to good multivariate normality and linear relationship between normalized variables. This demands the usage of the multivariate normalizing transformations. The objective of the paper is to consider techniques for constructing the equations, confidence and prediction intervals of multivariate nonlinear regressions on the basis of multivariate normalizing transformations. The nonlinear regression prediction results obtained by constructing the equations should be better in comparison with other nonlinear regression equations based on univariate normalizing transformations, primarily on such

standard evaluations as the multiple coefficient of determination and mean magnitude of relative error. Application of multivariate normalizing transformations should lead to a narrowing of confidence and prediction intervals of nonlinear regressions for a larger number of data rows compared to the univariate normalizing transformations.

3 Problem statement

Suppose that there are bijective multivariate normalizing transformation of non-Gaussian random vector $\mathbf{P} = \{Y, X_1, X_2, \dots, X_k\}^T$ to Gaussian random vector $\mathbf{T} = \{Z_Y, Z_1, Z_2, \dots, Z_k\}^T$

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{P}) \quad (3.1)$$

and the inverse transformation for (3.1)

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\psi}^{-1}(\mathbf{T}). \quad (3.2)$$

Here $\boldsymbol{\psi}$ is the vector of normalizing transformation, $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_Y, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k\}^T$. It is required to build the nonlinear regression equation in the form $Y = Y(X_1, X_2, \dots, X_k)$ on the basis of the transformations (3.1) and (3.2).

4 The techniques

The techniques to construct the equations, confidence and prediction intervals of nonlinear regressions are based on the nonlinear regression analysis using the multivariate normalizing transformations and they consist of three steps [5]. For the first step, a set of multivariate non-Gaussian data is normalized using a bijective multivariate normalizing transformation (3.1). In the second step, the equation, confidence and prediction intervals of linear regression for the normalized data are built. In the third step, the equations, confidence and prediction intervals of nonlinear regressions for multivariate non-Gaussian data are constructed on the basis of the equation, confidence and prediction intervals of linear regression for the normalized data and transformations (3.1) and (3.2).

The linear regression equation for normalized data will have the form [3]

$$\hat{Z}_Y = \bar{Z}_Y + (\mathbf{Z}_X^+)^T \hat{\mathbf{b}}, \quad (4.1)$$

where \hat{Z}_Y is a prediction result obtained by linear regression equation for values of components of vector $\mathbf{z}_X = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_k\}$; \mathbf{Z}_X^+ is the matrix of centered regressors that contains the values $Z_{1i} - \bar{Z}_1, Z_{2i} - \bar{Z}_2, \dots, Z_{ki} - \bar{Z}_k$; $\hat{\mathbf{b}}$ is estimator for vector of parameters of equation (4.1), $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}^T$.

The nonlinear regression equation will be

$$Y = \psi_Y^{-1}[\bar{Z}_Y + (\mathbf{Z}_X^+)^T \hat{\mathbf{b}}]. \quad (4.2)$$

The technique to construct a confidence interval of nonlinear regression is based on transformations (3.1) and (3.2), linear regression equation (4.1) and a confidence interval for normalized data. The confidence interval of nonlinear regression is

$$\psi_Y^{-1} \left[\hat{Z}_Y \pm t_{\alpha/2, \nu} S_{Z_Y} \left\{ \frac{1}{N} + (\mathbf{z}_X^+)^T \left[(\mathbf{Z}_X^+)^T \mathbf{Z}_X^+ \right]^{-1} (\mathbf{z}_X^+) \right\}^{1/2} \right], \quad (4.3)$$

where $S_{Z_Y}^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^N (Z_{Y_i} - \hat{Z}_{Y_i})^2$, $\nu = N - k - 1$; $t_{\alpha/2, \nu}$ is a quantile of the Student t -distribution with ν

degrees of freedom and $\alpha/2$ significance level; $(\mathbf{Z}_X^+)^T \mathbf{Z}_X^+$ is the $k \times k$ matrix

$$(\mathbf{Z}_X^+)^T \mathbf{Z}_X^+ = \begin{pmatrix} S_{Z_1 Z_1} & S_{Z_1 Z_2} & \dots & S_{Z_1 Z_k} \\ S_{Z_1 Z_2} & S_{Z_2 Z_2} & \dots & S_{Z_2 Z_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{Z_1 Z_k} & S_{Z_2 Z_k} & \dots & S_{Z_k Z_k} \end{pmatrix},$$

where $S_{Z_q Z_r} = \sum_{i=1}^N [Z_{q_i} - \bar{Z}_q][Z_{r_i} - \bar{Z}_r]$, $q, r = 1, 2, \dots, k$.

The technique to construct a prediction interval of nonlinear regression is based on transformations (3.1) and (3.2), linear regression equation (4.1) and a prediction interval for normalized data. The prediction interval of non-linear regression is

$$\psi_Y^{-1} \left(\hat{Z}_Y \pm t_{\alpha/2, \nu} S_{Z_Y} \left\{ \frac{1}{N} + (\mathbf{z}_X^+)^T \left[(\mathbf{Z}_X^+)^T \mathbf{Z}_X^+ \right]^{-1} (\mathbf{z}_X^+) \right\}^{1/2} \right). \tag{4.4}$$

5 Examples

We consider the examples of constructing the equations, confidence and prediction intervals of nonlinear regressions for multivariate non-Gaussian data for two cases: univariate and multivariate normalizing transformations. Table 1 contains the data [6] on metrics of software for open-source PHP-based information systems.

Table 1. The data and prediction results by regression equations.

i	Y in KLOC	X ₁	X ₂	X ₃	prediction results by regressions			
					linear	non-linear regressions		
						decimal logarithm	Johnson univariate	Johnson multivariate
1	3.038	5	2	10.6	3.237	4.707	4.675	4.283
2	22.599	17	7	7	24.142	22.681	19.965	21.048
3	32.243	21	13	4.524	37.524	32.351	32.098	34.906
4	16.164	13	11	7.077	25.916	20.232	23.171	23.191
5	83.862	35	24	6.571	74.624	69.290	80.265	76.393
6	24.22	13	9	8.077	23.224	19.275	20.524	20.495
7	63.929	35	19	8.029	67.215	65.909	65.913	67.297
8	2.543	5	3	9.4	4.127	5.297	5.789	5.029
9	6.697	5	5	7	5.906	6.028	7.353	6.223
10	55.537	25	14	8.64	46.843	43.089	42.098	45.209
11	55.752	39	10	9.077	57.814	60.290	67.070	56.644
12	62.602	30	17	7	56.995	53.494	53.497	56.727
13	67.111	23	22	14.957	61.856	49.720	65.500	63.792
14	2.552	3	1	8.333	-2.395	2.179	2.202	2.324
15	12.17	10	5	3.7	9.959	10.977	9.693	9.659
16	12.757	13	9	5	21.218	18.042	18.682	19.002
17	5.695	7	3	8.429	5.976	7.285	7.083	6.520
18	7.744	9	6	9.222	13.991	11.914	12.911	11.988
19	7.514	4	1	8	-1.371	2.882	2.496	2.820
20	11.054	9	9	3.667	15.385	12.006	13.301	12.884
21	29.77	17	15	3.412	35.179	26.465	27.321	29.362
22	11.653	9	8	8.778	17.045	13.020	15.461	14.338
23	6.847	5	4	3.6	2.017	5.107	5.435	4.850
24	13.389	7	5	11.714	11.462	9.033	10.367	9.102
25	14.45	12	6	16.583	22.513	17.181	20.191	18.741
26	4.414	6	3	3.667	1.630	5.575	5.318	4.966
27	2.102	3	1	3.333	-5.655	1.921	2.142	2.168
28	42.819	20	18	3.5	43.975	33.150	37.967	40.170
29	4.077	4	2	9	0.953	3.688	3.892	3.508
30	57.408	33	14	9.242	57.164	57.273	53.121	55.910
31	7.428	7	3	7	5.044	7.101	6.861	6.359
32	8.947	15	5	4	16.360	16.585	12.934	13.808

Let us remind that Y implies the actual software size in the thousand lines of code (KLOC), X_1 , X_2 and X_3 determine respectively the total number of classes, the total number of relationships and the average number of attributes per class, that is, $X_3 = A/X_1$, where A is the total number of attributes in conceptual data model.

For normalizing the multivariate non-Gaussian data from Table 1, we use the Johnson translation system

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\eta}\mathbf{h}\left[\lambda^{-1}(\mathbf{P} - \boldsymbol{\varphi})\right] \sim N_m(\mathbf{0}_m, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (5.1)$$

where $\mathbf{0}_m$ is the m -dimensional vector of means equal to zero; $\boldsymbol{\Sigma}$ is the $m \times m$ covariance matrix with variances equal to one; $\mathbf{h}[(y_Y, y_1, \dots, y_k)] = \{h_Y(y_Y), h_1(y_1), \dots, h_k(y_k)\}^T$; $h_i(\cdot)$ is one of the translation functions

$$h = \begin{cases} \ln(y), & \text{for } S_L \text{ (lognormal) family;} \\ \ln[y/(1-y)], & \text{for } S_B \text{ (bounded) family;} \\ \text{Arsh}(y), & \text{for } S_U \text{ (unbounded) family;} \\ y & \text{for } S_N \text{ (normal) family.} \end{cases} \quad (5.2)$$

Here $y = (X - \boldsymbol{\varphi})/\lambda$; $\text{Arsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$. In our case X equals Y , X_1 , X_2 or X_3 respectively.

We use the technique [7] based on multivariate normalizing transformations and the squared Mahalanobis distance (MD) to detect the outliers in the data from Table 1. There are no outliers in the data from Table 1 after their normalization by the Johnson multivariate transformation (5.1) for S_B family for 0.005 significance level. The same result has been obtained for the transformation (5.1) for S_U family. In [6] it is also assumed that the data contains no outliers. The values of squared MD for data normalized by the Johnson univariate transformation for S_B family from Table 1 indicate that the data of systems 11 and 19 are multivariate outliers, since for these data rows the values of squared MD equal to 18.29 and 17.16 respectively are greater than the value of the quantile of the Chi-Square distribution, which equals to 14.86 for 0.005 significance level. Without using normalization, the data of system 11 is multivariate outlier, since for this data row the squared MD equals to 15.44. It should be noted that there are no outliers in the data from Table 1 after their normalization by the decimal logarithm transformation.

Estimators for parameters of the multivariate transformation (5.1) for S_B family have been calculated by the maximum likelihood method and are: $\hat{\gamma}_Y = 0.96954$, $\hat{\gamma}_1 = 1.05143$, $\hat{\gamma}_2 = 0.89436$, $\hat{\gamma}_3 = 0.684068$, $\hat{\eta}_Y = 0.52252$, $\hat{\eta}_1 = 0.66953$, $\hat{\eta}_2 = 0.75874$, $\hat{\eta}_3 = 0.50162$, $\hat{\phi}_Y = 1.9227$, $\hat{\phi}_1 = 2.57124$, $\hat{\phi}_2 = 0.219$, $\hat{\phi}_3 = 3.319$, $\hat{\lambda}_Y = 90.756$, $\hat{\lambda}_1 = 47.425$, $\hat{\lambda}_2 = 28.507$ and $\hat{\lambda}_3 = 13.668$.

The sample covariance matrix S_N of the \mathbf{T} is used as the approximate moment-matching estimator of covariance matrix $\boldsymbol{\Sigma}$

$$S_N = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.9328 & 0.9171 & 0.2258 \\ 0.9328 & 1.0000 & 0.8942 & 0.1903 \\ 0.9171 & 0.8942 & 1.0000 & 0.1024 \\ 0.2258 & 0.1903 & 0.1024 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

After normalizing the non-Gaussian data by the multivariate transformation (5.1) for S_B family the linear regression equation is built for normalized data

$$\hat{Z}_Y = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 Z_1 + \hat{b}_2 Z_2 + \hat{b}_3 Z_3. \quad (5.3)$$

Parameters of the equation (5.3) have been estimated by the least square method. The estimators for parameters of the equation (5.3) are: $\hat{b}_0 = 0$, $\hat{b}_1 = 0.522133$, $\hat{b}_2 = 0.441941$ and $\hat{b}_3 = 0.081219$.

After that the non-linear regression equation (4.2) is built

$$\hat{Y} = \hat{\phi}_Y + \hat{\lambda}_Y \left[1 + e^{-(\hat{Z}_Y - \hat{\gamma}_Y)/\hat{\eta}_Y} \right]^{-1}, \quad (5.4)$$

where \hat{Z}_Y is prediction result by the equation (5.3), $Z_j = \gamma_j + \eta_j \ln \frac{X_j - \phi_j}{\phi_j + \lambda_j - X_j}$, $\phi_j < X_j < \phi_j + \lambda_j$, $j=1,2,3$.

The prediction results by nonlinear regression equation (5.4) for values of components of vector $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3\}$ from Table 1 are shown in the Table 1 for two cases: univariate and multivariate normalizing transformations. For univariate the Johnson normalizing transformations of S_B family (5.2) the estimators for parameters are: $\hat{\gamma}_Y = 0.77502$, $\hat{\gamma}_1 = 0.59473$, $\hat{\gamma}_2 = 0.57140$, $\hat{\gamma}_3 = 0.68734$, $\hat{\eta}_Y = 0.44395$, $\hat{\eta}_1 = 0.48171$, $\hat{\eta}_2 = 0.49553$, $\hat{\eta}_3 = 0.51970$, $\hat{\phi}_Y = 2.063$, $\hat{\phi}_1 = 2.900$, $\hat{\phi}_2 = 0.900$, $\hat{\phi}_3 = 3.304$, $\hat{\lambda}_Y = 83.059$, $\hat{\lambda}_1 = 36.695$, $\hat{\lambda}_2 = 23.525$ and $\hat{\lambda}_3 = 13.660$. In the case of univariate normalizing transformations the estimators for parameters of the equation (5.3) are: $\hat{b}_0 = 0$, $\hat{b}_1 = 0.43519$, $\hat{b}_2 = 0.52239$ and $\hat{b}_3 = 0.08546$.

Also the nonlinear regression equation (4.2) is built by the decimal logarithm transformation

$$\hat{Y} = 10^{\hat{b}_0} X_1^{\hat{b}_1} X_2^{\hat{b}_2} X_3^{\hat{b}_3}, \quad (5.5)$$

where the estimators for parameters of the equation (5.5) are: $\hat{b}_0 = -0.26161$, $\hat{b}_1 = 0.99151$, $\hat{b}_2 = 0.33232$ and $\hat{b}_3 = 0.13777$.

Table 1 also contains the prediction results by linear regression equation from [6] for values of components of vector $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3\}$ from Table 1. It should be noted that the prediction results obtained by the linear regression equation from [6] are negative for the three rows of data: 14, 19 and 27. All prediction results obtained by non-linear regression equations (5.4) and (5.5) are positive.

The values of multiple coefficient of determination R^2 , Mean Magnitude of Relative Error (MMRE) and Percentage of Prediction (PRED(0.25)) for the regression equations are shown in the Table 2.

Table 2. Values of R^2 , MMRE and PRED(0.25)

Coefficients	Linear regression equation	Non-linear regression equations		
		univariate transformations		multivariate transform.
		logarithm	Johnson	
R^2	0.9491	0.9375	0.9591	0.9730
MMRE	0.4919	0.2455	0.2535	0.2243
PRED(0.25)	0.5313	0.6250	0.7188	0.6875

The acceptable values of MMRE and PRED(0.25) are not more than 0.25 and not less than 0.75 respectively. The values of MMRE are not more than 0.25 for nonlinear regression equation (5.4) on the basis of multivariate normalizing transformation and for non-linear regression equation (5.5) based on the decimal logarithm transformation. Although all values of PRED(0.25) in the Table 2 are less than 0.75 nevertheless the values are greater for nonlinear regression equation (5.4). All values of R^2 in the Table 2 are greater than 0.75 but the value R^2 is greater for nonlinear regression equation (5.4) on the basis of the Johnson multivariate transformation.

The confidence and prediction intervals of nonlinear regression are defined by (4.3) and (4.4) respectively for the data from Table 1. Table 3 contains the lower (LB) and upper (UB) bounds of the confidence intervals of linear and nonlinear regressions based on univariate and multivariate transformations respectively for 0.05 significance level. The values from Table 3 indicate that the lower bounds of the confidence interval of linear regression from [6] are negative for the seven rows of data: 1, 14, 19, 23, 26, 27 and 29. All the lower bounds of the confidence interval for nonlinear regression equations (5.4) and (5.5) are positive. For the fourteen rows of data the widths of the confidence

interval of linear regression are greater than for nonlinear regressions. The widths of the confidence interval of nonlinear regression on the basis of the Johnson multivariate transformation are less than following the decimal logarithm univariate transformation for the seventeen rows of data: 1, 3, 5, 7-14, 19, 23, 26, 27, 29 and 30. The widths of the confidence interval of nonlinear regression on the basis of the Johnson multivariate transformation are less than following the Johnson univariate transformation for the twenty-four rows of data: 1-4, 6-12, 15-18, 20-26, 28-31. Approximately the same results are obtained for the prediction interval of regressions.

Table 3. Bounds of the confidence intervals of regressions.

i	Bounds for linear regression		Bounds for nonlinear regressions					
			decimal logarithm transformation		Johnson univariate transformation		Johnson multivariate transformation	
	LB	UB	LB	UB	LB	UB	LB	UB
1	-0.402	6.877	3.725	5.947	3.673	6.267	3.532	5.370
2	21.413	26.871	18.933	27.172	15.473	25.455	16.565	26.460
3	34.344	40.704	26.415	39.621	24.791	40.266	28.688	41.670
4	23.172	28.660	16.855	24.285	17.982	29.365	18.876	28.212
5	69.187	80.062	55.076	87.173	74.107	83.078	67.843	82.455
6	21.015	25.433	16.557	22.438	16.129	25.819	17.128	24.385
7	62.690	71.740	52.309	83.045	56.434	72.961	59.139	74.114
8	1.013	7.241	4.288	6.544	4.484	7.748	4.147	6.243
9	3.084	8.728	4.569	7.951	5.456	10.203	4.848	8.199
10	43.863	49.824	35.573	52.195	33.947	50.366	38.167	52.354
11	49.560	66.068	41.448	87.698	42.891	79.359	39.199	71.614
12	53.265	60.725	43.512	65.766	44.275	61.787	48.759	64.130
13	54.146	69.566	35.747	69.156	49.897	75.572	48.637	75.635
14	-5.673	0.883	1.639	2.897	2.125	2.375	2.155	2.614
15	6.609	13.309	8.838	13.632	6.979	13.684	7.416	12.700
16	18.574	23.862	15.339	21.222	14.673	23.576	15.903	22.604
17	3.165	8.787	6.139	8.644	5.548	9.233	5.311	8.130
18	11.381	16.601	10.039	14.139	9.902	16.849	9.865	14.593
19	-4.587	1.845	2.106	3.945	2.253	3.046	2.471	3.389
20	11.684	19.085	9.137	15.776	9.186	19.255	9.685	17.159
21	30.767	39.591	20.246	34.593	16.796	41.072	20.369	40.407
22	14.250	19.840	10.430	16.253	11.581	20.525	11.374	18.048
23	-1.579	5.613	3.900	6.687	4.071	7.662	3.909	6.214
24	7.648	15.276	7.099	11.493	7.462	14.583	7.130	11.736
25	16.199	28.828	13.006	22.695	10.971	34.746	12.089	28.318
26	-1.967	5.227	4.421	7.029	4.083	7.261	4.032	6.293
27	-9.730	-1.580	1.360	2.712	2.092	2.281	2.040	2.436
28	38.873	49.077	25.212	43.588	25.181	51.940	29.184	52.086
29	-2.236	4.142	2.947	4.616	3.177	5.048	2.995	4.262
30	52.335	61.993	44.400	73.879	41.599	63.278	45.867	65.148
31	2.314	7.774	6.042	8.344	5.463	8.784	5.225	7.856
32	12.515	20.205	12.503	22.001	9.080	18.449	9.767	19.490

Following [8], multivariate kurtosis β_2 is estimated for the data from Table 1 and the normalized data on the basis of the Johnson univariate and multivariate transformations for S_B family. It is known that $\beta_2 = m(m+2)$ holds under multivariate normality. In our case $\beta_2 = 24$. The estimators of multivariate kurtosis equal 28.66, 23.87, 37.29 and 23.08 for the data from Table 1, the normalized data on the basis of the decimal logarithm transformation, the Johnson univariate and multivariate transformations respectively. The values of these estimators indicate that the assumption of multivariate

normality for the data from Table 1 and for the data from Table 1 normalized by the Johnson univariate transformation of S_B family is rejected.

Squared MD is used for checking multivariate normality (MVN). According MD MVN test, the assumption of multivariate normality for the data from Table 1 normalized by the Johnson multivariate transformation (5.1) of S_B family and the decimal logarithm transformation is not rejected for 0.005 significance level. The assumption of multivariate normality for the data from Table 1 and for the data from Table 1 normalized by the Johnson univariate transformation of S_B family is rejected for 0.005 significance level.

It should be noted that the poor normalization of multivariate non-Gaussian data using the Johnson univariate transformation leads to an expansion of the confidence and prediction intervals of nonlinear regression for a larger number of data rows compared to both the Johnson multivariate transformation and the decimal logarithm transformation. The values of R^2 and MMRE are better for the equation (5.4) for the Johnson multivariate transformation in comparison with all previous regression equations, both linear and nonlinear, based on univariate transformations. This can be explained best by the multivariate normalization and the fact that there is no reason to reject the hypothesis that the sample of data, which normalized by the Johnson multivariate transformation for S_B family, comes from a multivariate normal distribution.

6 Conclusions

To sum it up, when constructing the equations, confidence and prediction intervals of nonlinear regressions for multivariate non-Gaussian data multivariate normalizing transformations should be used.

From the examples we can make a conclusion that the considered techniques based on multivariate normalizing transformations are promising ones, since they lead to a narrowing of the confidence and prediction intervals of nonlinear regression for a larger number of data rows compared to the univariate normalizing transformations.

As a rule, poor normalization of multivariate non-Gaussian data using univariate transformations instead of multivariate ones can result in an expansion of the confidence and prediction intervals of nonlinear regression.

Prospects for the further research include the application of new multivariate normalizing transformations and data sets for constructing the equations, confidence and prediction intervals of nonlinear regressions for multivariate non-Gaussian data.

REFERENCES

1. D. M. Bates, and D. G. Watts, *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1988. DOI:10.1002/9780470316757
2. G. A. F. Seber, and C. J. Wild, *Nonlinear Regression*. New York: John Wiley & Sons, 1989. DOI: 10.1002/0471725315
3. T. P. Ryan, *Modern regression methods*. New York: John Wiley & Sons, 1997. DOI: 10.1002/9780470382806
4. R. A. Johnson, and D. W. Wichern, *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Pearson Prentice Hall, 2007.
5. S. B. Prykhodko, "Developing the software defect prediction models using regression analysis based on normalizing transformations" in "Modern problems in testing of the applied software" (PTASS-2016), Abstracts of the Research and Practice Seminar, Poltava, Ukraine, May 25-26, 2016, pp. 6-7.
6. Hee Beng Kuan Tan, Yuan Zhao, and Hongyu Zhang, "Estimating LOC for information systems from their conceptual data models", in *Proceedings of the 28th international conference on Software engineering (ICSE '06)*, May 20-28, 2006, Shanghai, China, pp. 321-330. DOI: 10.1145/1134285.1134331
7. S. Prykhodko, N. Prykhodko, L. Makarova, and K. Pugachenko, "Detecting Outliers in Multivariate Non-Gaussian Data on the basis of Normalizing Transformations", in *Proceedings of the 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON) «Celebrating*

25 Years of IEEE Ukraine Section», May 29 – June 2, 2017, Kyiv, Ukraine, 2017, pp. 846-849. DOI: 10.1109/UKRCON.2017.8100366

8. K. V. Mardia, “Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications”, *Biometrika*, 57, 1970, pp. 519-530. DOI: 10.1093/biomet/57.3.519

ЛІТЕРАТУРА

1. Bates D.M. *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications* / D. M. Bates, D. G. Watts. New York: John Wiley & Sons, 1988. 384 p. DOI:10.1002/9780470316757
2. Seber G.A.F. *Nonlinear Regression* / G.A.F. Seber, C.J. Wild. New York: John Wiley & Sons, 1989. 768 p. DOI: 10.1002/0471725315
3. Ryan T.P. *Modern regression methods* / T. P. Ryan. New York: John Wiley & Sons, 1997. 529 p. DOI: 10.1002/9780470382806
4. Johnson R.A. *Applied Multivariate Statistical Analysis* / R. A. Johnson, D. W. Wichern. Pearson Prentice Hall, 2007. 800 p.
5. Prykhodko S.B. Developing the software defect prediction models using regression analysis based on normalizing transformations / S. B. Prykhodko // *Сучасні проблеми тестування прикладного програмного забезпечення: збірник тез доповідей науково-практичного семінару*, Полтава, 25-26 травня 2016 р. Полтава, 2016. С. 6-7.
6. Tan H.B.K. Estimating LOC for information systems from their conceptual data models / H. B. K. Tan, Y. Zhao, H. Zhang // *Software Engineering: the 28th International Conference (ICSE '06)*, Shanghai, China, May 20-28, 2006: proceedings. P. 321-330. DOI: 10.1145/1134285.1134331
7. Prykhodko S. Detecting Outliers in Multivariate Non-Gaussian Data on the basis of Normalizing Transformations / S. Prykhodko, N. Prykhodko, L. Makarova, K. Pugachenko // *Electrical and Computer Engineering: the 2017 IEEE First Ukraine Conference (UKRCON) «Celebrating 25 Years of IEEE Ukraine Section»*, Kyiv, Ukraine, May 29 – June 2, 2017: proceedings. P. 846-849. DOI: 10.1109/UKRCON.2017.8100366
8. Mardia K.V. Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications / K. V. Mardia // *Biometrika*, 57, 1970. P. 519-530. DOI: 10.1093/biomet/57.3.519

Приходько Наталія Василівна – кандидат економічних наук, доцент; Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, м. Миколаїв, проспект Героїв України, 9, 54025; e-mail: natalia.prykhodko@nuos.edu.ua; ORCID: 0000-0002-3554-7183.

Приходько Сергій Борисович – доктор технічних наук, професор; Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, м. Миколаїв, проспект Героїв України, 9, 54025; e-mail: sergiy.prykhodko@nuos.edu.ua; ORCID: 0000-0002-2325-018X.

UDC 519.8::620.9

Wind farm deployment by wind turbines of different power curves under a 2-way routine of energy-and-costs constrained optimization

V. V. Romanuke

*O. S. Popov Odessa National Academy of Telecommunications, Ukraine
romanukevadimv@gmail.com*

The parameters of the efficient wind farm deployment are determined as the estimation of the probability density function for area wind statistics and an appropriate set of wind turbines based either on the desired annual energy output or the given financial resources. The deployment routine is stated in four items. The initial data/conditions and number of wind turbines which might be used for building a wind farm are followed by the estimation. The efficiency is achieved via energy-and-costs optimization. Therefore we can maximize the power output while minimizing the costs or controlling their total sum.

Key words: *wind turbine, wind farm, wind statistics, Weibull law, power curve, efficiency, energy-and-costs optimization.*

Вітрова енергетика та її впровадження інтенсивно розвивається з початком теперішньої декади. Сумарна потужність вітрової енергії, яка виробляється на сьогодні у світі, у 30 разів більша за такий же показник 2000 року. Проте швидке зростання і розповсюдження вітрової енергетики обмежується рядом факторів, пов'язаних зі значними обсягами необхідного фінансування для монтажу й експлуатації вітрових генераторів, транспортуванням виробленої енергії, а також потенційним негативним впливом на навколишнє середовище. Доцільність початкового інвестування та відповідних фінансових витрат залежить від того, наскільки ефективно використовується генерована потужність. Різниця між планованою річною потужністю і тією, що виробляється вітровою електростанцією, має бути якнайменшою. Для цього слід вивчати статистику розподілу вітрів місцевості, на якій будуватиметься електростанція. З іншого боку, може бути поставлена задача максимізації потужності за наданого фінансування. Обидва підходи потребують чіткого переліку параметрів ефективних дій. Відтак визначаються параметри ефективного розгортання вітрової електростанції як оцінка функції щільності імовірності для зональної статистики вітру та прийнятна множина вітрогенераторів на основі даних річної необхідної енергії або початкових фінансових ресурсів. Програма розгортання викладена у чотирьох пунктах. Оцінка слідує за наданням початкових даних/умов та числом вітрогенераторів, що могли би бути використані для будівництва електростанції. Ефективність досягається за оптимізацією енергії і витрат. При цьому вихідна потужність максимізується разом з мінімізацією витрат або контролем їх суми.

Ключові слова: *вітрогенератор, вітрова електростанція, статистика розподілу вітрів, закон Вейбулла, крива потужності, ефективність, оптимізація енергії і витрат.*

Определяются параметры эффективного развёртывания ветровой электростанции как оценка функции плотности вероятности для зональной статистики ветра и соответствующее множество ветрогенераторов на основе данных годовой необходимой энергии или начальных финансовых ресурсов. Программа развёртывания изложена в четырёх пунктах. Оценка следует за заданием начальных данных/условий и числом ветрогенераторов, что могли бы быть использованы для строительства электростанции. Эффективность достигается при оптимизации энергии и расходов. При этом выходная мощность максимизируется вместе с минимизацией расходов или контролем их суммы.

Ключевые слова: *ветрогенератор, ветровая электростанция, статистика распределения ветров, закон Вейбулла, кривая мощности, эффективность, оптимизация энергии и расходов.*

Determining parameters of efficient deployment of wind farms (WFs)

Wind energy deployment has been increased intensively since the 2010s. As of December 2017, the global wind power cumulative capacity is 30 times larger than that of 2000 [1, 2]. The growth would have been faster if there were not a few formidable obstacles. WF consisting of many wind turbines (WTs) is technically hard to build [1, 3]. Joining the power grid requires extra equipment or WF control systems [1] to meet the technical standards set by the operator of a transmission line. Some negative influence of WFs on environment (nature) still exists, e. g. noising, impact on wildlife, affecting weather in WFs' immediate vicinity, fire danger due to lightning strikes [1]. Thus, determining parameters of efficient WF deployment (WFD) remains an open issue.

Existing methods of meeting wind statistics for increasing efficiency of WFD

The troubles mentioned above can be partially solved with additional financial resources. They may be produced owing to building highly efficient WFs. Increasing efficiency of WFD is possible by meeting wind statistics. Otherwise, WTs are mostly useless [1, 3]. In [3], reference to wind speed (WS) is received from a power-speed scheduler for the pitch controller intended to regulate the power. Wind statistics in [3] are met after the event. In [2], aerodynamic interactions (known as the wake effect) among WTs are considered for taking into account the reduction of WS's for the downstream WTs due to the wake effect caused by the upwind ones. WS's in [2] are sectioned by wind directions, each of

which has its own probability density function (PDF) modeled as the Weibull law (that theoretically reflects actual wind statistics [2])

$$p(s) = (b/a) \cdot (s/a)^{b-1} \cdot e^{-(s/a)^b} \quad (1)$$

by WS s in meters per second (m/s), the shape and scale parameters b and a . WTs in [2] have various power curves (PCs), just like in [4] suggesting a diversification in PCs to increase the expected power output (EPO) of a WF. However, neither [2] nor [4] suggests a way to get the estimates of the parameters b and a . Moreover, selection of WTs with appropriate PCs would ensure conforming to the wind statistics.

Goal of determining parameters of the efficient WFD and tasks to be fulfilled

The goal is to determine parameters of the efficient WFD. Eventually, a routine of WFD will be itemed. To achieve the goal, the following three tasks must be fulfilled:

1. To list initial data/conditions. They may be optional, but there is to be the planned EPO.
2. To state rules for meeting wind statistics and finding an appropriate set of WTs.
3. To item the routine of WFD and consider an example of its using.

Initial data/conditions and their interpretation

An EPO r_0 planned/required in megawatts (MW) for a definite area is counted on an annual desired energy (ADE) E_0 given in MWh. Then the planned/required EPO is

$$r_0 = E_0 / (24 \cdot 365.25) = E_0 / 8766.$$

On the other hand, an amount of initial financial resources (IFR) can be given, which may be spent on WFD. Denote that amount by C_0 . Costs of buying and installing WTs are included in that amount, which can be denoted also by $c(r_0)$ to show its issue from r_0 . Obviously, values E_0 and C_0 cannot be given simultaneously, unless magnitudes of E_0 and C_0 are overestimated beforehand. Normally, either E_0 or C_0 is given first. Henceforward, one of two ways is then considered:

1. If E_0 is given first, then a problem is to minimize the costs of WFD. In this case, an optimal combination of WTs is searched for. If all WTs are identical, this is a mono-WF, otherwise — this is a multi-WF consisting of diverse WTs having various PCs [4].

2. If C_0 is given first, then a problem is to maximize an EPO of a WF. It does not matter whether the WF will happen to be a mono-WF or a multi-WF. The only reason is the EPO maximization, with no regards whether the maximized EPO is sufficient for covering energy demands or not. If insufficient, the value C_0 may be increased.

Nevertheless, neither of these ways can guarantee that magnitudes E_0 and C_0 will be reached exactly. Therefore, along with E_0 , a minimal ADE E_{\min} should be given as well, whose EPO is $r_{\min} = E_{\min} / 8766$. This EPO might be called an EPO lower threshold. The corresponding costs are subsequently estimated via r_0 and $c(r_0)$ using a rough supposition about the proportionality between EPOs and their costs, where $c(r_0)$ is taken closer similarly to a maximum of costs for EPOs approximating to r_0 .

Rules for meeting wind statistics based on estimating parameters of PDF (1)

If data about relative frequency of WS have been obtained over a year (or a few years) of observations across the area, then parameters b and a for PDF (1) are found via approximating to the histogram. Let $\{s_i\}_{i=1}^Q$ be a set of WS's in m/s, which are observed and fixed/registered, if any, where difference $\delta_s = s_{i+1} - s_i < 1$ is constant $\forall i = \overline{1, Q-1}$. WS's $s_1 = 0$ or near 0 and $s_Q = 30$ or greater, if the area is offshore. If t_i is a number of times when WS s_i was registered, then the relative frequency is

$$f(s_i) = n_i / \sum_{q=1}^Q n_q.$$

Then linearly and successively connected points $\{s_i, f(s_i)/\delta_s\}_{i=1}^Q$ constitute a polyline $\tilde{p}(s)$, which is an approximation to PDF (1):

$$\tilde{p}(s_i) = f(s_i)/\delta_s \quad \forall i = \overline{1, Q-1} \quad \text{by} \quad \sum_{q=1}^Q \tilde{p}(s_q) \delta_s = \sum_{q=1}^Q f(s_q) = 1. \quad (2)$$

The parameters b and a are found for (2) by solving a nonlinear curve-fitting problem

$$\arg \min_{a>0, b>0} \sum_{i=1}^Q [\tilde{p}(s_i) - p(s_i)]^2 = \arg \min_{a>0, b>0} \sum_{i=1}^Q [\tilde{p}(s_i) - (b/a) \cdot (s_i/a)^{b-1} \cdot e^{-(s_i/a)^b}]^2. \quad (3)$$

If WS data are poorer, then solution of problem (3) is inconsistent. In this case, the average WS (AWS) \tilde{s} is calculated in shorter periods (say, a few days or weeks). Then we set $b = 1.667$ or $b = 2$ as a default (e. g., see [4]). Parameter a is found as

$$\arg \min_{a>0} \left| \tilde{s} - \int_0^{\infty} (b/a) \cdot (s/a)^{b-1} \cdot e^{-(s/a)^b} ds \right|. \quad (4)$$

Surely, solutions of problems (3) and (4) are rather estimates of the parameters b and a , so let us denote them by \tilde{b} (the same for the default value) and \tilde{a} , respectively.

Finding an appropriate set of WTs for increasing efficiency of WFD

Having $b = \tilde{b}$ and $a = \tilde{a}$ in (1), the next step is the calculation of EPO. Considering a series of K WTs having different PCs, denote the PC (in MW) of the k -th WT by $w(k, s)$ for $k = \overline{1, K}$. An EPO of a mono-WF built of N_1 WTs (this number is not constrained from above) labeled by $\#k_0$ is [4]

$$r(k_0, N_1) = N_1 \cdot m(k_0) \quad \text{by} \quad m(k) = \int_0^{\infty} p(s) w(k, s) ds. \quad (5)$$

The selection of $k_0 \in \{1, K\}$ is a separate task, but not the difficult one. For instance, k_0 can correspond to a high or the highest nominal power, which is

$$\bar{w}(k) = \max_{s \in [0; \infty)} w(k, s)$$

for the k -th WT. Mono-WFs appear as not so efficient as they “focus” on a specific range of WS’s tied to the PC of a single WT. A multi-WF may rectify this as it has various PCs and that widens the active range of WS’s. Suppose the k_l -th WT is installed in $n(k_l)$ places,

$$n(k_l) \in \square \quad \text{and} \quad \{k_l\}_{l=1}^L = I \subset \{1, K\} \quad \text{by} \quad L \in \{1, K\}.$$

Thus, a multi-WF is built of

$$N(I) = \sum_{l=1}^L n(k_l)$$

WTs by having L different PCs, where $D(L, I) = \{n(k_l)\}_{l=1}^L$ and $N(I)$ along with N_1 is not constrained. Herein, EPO of the multi-WF is [4]

$$r(L, I, D(L, I)) = \sum_{l=1}^L n(k_l) m(k_l). \quad (6)$$

For further consideration, denote EPO by (5) and (6) just shortly by \tilde{r} .

When E_0 is given first, we should determine a subset $R = \{\tilde{r}_u^*\}_{u=1, \overline{U}}$ of those EPOs by (5) and (6) that $\tilde{r} \in [r_{\min}; r_0]$. If $R = \emptyset$ then E_0 must be re-given as greater or the EPO lower threshold must be set lower (or both of them are corrected). Formally, $U \in \square$, but if $U = 1$ then those EPO values are probably to be corrected as well. If \tilde{r}_u^* -th EPO in R is a mono-WF of $N_1^{(u)}$ WTs labeled by $\#k_0^{(u)}$, then its costs are

$$c(\tilde{r}_u^*) = N_1^{(u)} \left(v_{\text{buy}}(k_0^{(u)}) + v_{\text{ins}}(k_0^{(u)}) \right) \quad (7)$$

by the respective costs $v_{\text{buy}}(k_0^{(u)})$ and $v_{\text{ins}}(k_0^{(u)})$ of buying and installing the $k_0^{(u)}$ -th WT. If \tilde{r}_u^* -th EPO in R is a multi-WF built of

$$N(I_*) = \sum_{l=1}^L n_*(k_l^{(u)})$$

WTs, then its costs are

$$c(\tilde{r}_u^*) = \sum_{l=1}^L n_*(k_l^{(u)}) \left(v_{\text{buy}}(k_l^{(u)}) + v_{\text{ins}}(k_l^{(u)}) \right). \quad (8)$$

Eventually, a two-criterion problem (2CP) is to be solved:

$$\begin{aligned} \min_{u=1, U} \frac{r_0 - \tilde{r}_u^*}{r_0 - r_{\min}} = \min_{u=1, U} \tilde{d}_u, \quad \min_{u=1, U} \frac{c(\tilde{r}_u^*) - c(r_{\min})}{c(r_0) - c(r_{\min})} = \min_{u=1, U} \tilde{c}_u \\ \text{by } c(r_0) = \frac{r_0}{\max_{u=1, U} \tilde{r}_u^*} \max_{u=1, U} c(\tilde{r}_u^*), \quad c(r_{\min}) = \frac{r_{\min}}{\min_{u=1, U} \tilde{r}_u^*} \min_{u=1, U} c(\tilde{r}_u^*). \end{aligned} \quad (9)$$

2CP (9) may not have a solution because as \tilde{r}_u^* approaches r_0 , the costs $c(\tilde{r}_u^*)$ are very likely to increase, and so minima in (9) are not reached at the same $\tilde{r}_{u_*}^*$ by $u_* \in \{1, U\}$. A solution to 2CP (9) is rather searched on a plane of U points $(\tilde{d}_u, \tilde{c}_u)$. A Pareto-efficient point $(\tilde{d}_{u_*}, \tilde{c}_{u_*})$ is chosen so that (the shortest distance to the zeros)

$$\min_{u=1, U} \sqrt{\tilde{d}_u^2 + \tilde{c}_u^2} = \sqrt{\tilde{d}_{u_*}^2 + \tilde{c}_{u_*}^2}. \quad (10)$$

When C_0 is given first, we do not have a financial lower threshold. We just find

$$r_{\max} = \max \left\{ \max_{k_0 \in \{1, K\}} \max_{N_1} r(k_0, N_1), \max_{D(L, I)} \max_{I \in \{1, K\}} \max_L r(L, I, D(L, I)) \right\} \quad (11)$$

which is reachable either at some $k_0^* \in \{1, K\}$ and N_1^* or at sets L_* , I_* , and $D_*(L_*, I_*) = \{n_*(k_l)\}_{l=1}^{L_*}$ by controlling that

$$C_0 \dots N_1^* \left(v_{\text{buy}}(k_0^*) + v_{\text{ins}}(k_0^*) \right), \quad C_0 \dots \sum_{l=1}^{L_*} n_*(k_l) \left(v_{\text{buy}}(k_l) + v_{\text{ins}}(k_l) \right). \quad (12)$$

For further, denote those costs by $c(\tilde{r})$. A combination of those arguments under the first or second group of maxima in (11) might be called shortly a WF. If maximum (11) is reached at a few WFs, then a WF with minimal costs is chosen.

A routine of WFD and examples of the efficient WFD and IFR utilization

The costs of buying and installing WTs being known, such a routine consists of four items:

1. To give a value of either E_0 or C_0 . A minimal ADE is requested along with E_0 .
2. To determine a number K of different WTs to be used for building a WF.
3. To estimate the parameters b and a for obtaining PCs of those K WTs.
4. To solve 2CP (9) for the given r_0 , r_{\min} and assessed $c(r_0)$, or find (11) by (12).

For considering an example of using the routine, we put $a = 5$ (corresponding to AWS 4.43 m/s) and $b = 2$ optionally, without tethering to a region. Let a minimal ADE be 90 % of ADE. We take five known and widespread WTs: Enercon E82 E2 (2.3 MW), Gamesa G128-4.5 MW, Nordex N90/2500 (2.5 MW), REpower MM82 (2 MW), Vestas V112-3.0 MW. Their characteristics and PCs are downloadable from [5], though prices for buying and installing these WTs are still hidden. They can be only roughly estimated via general information about WFD. So, having enumerated the WTs from #1 to #5, respectively, the costs for (7) and (8) are (in million euros):

$$v_{\text{buy}}(1) = 3.1, \quad v_{\text{buy}}(2) = 7.72, \quad v_{\text{buy}}(3) = 3.25, \quad v_{\text{buy}}(4) = 2.68, \quad v_{\text{buy}}(5) = 5.1,$$

where

$$v_{\text{ins}}(k) = (0.17v_{\text{buy}}(k))^2 \text{ for } k = \overline{1, 5}$$

(installation is a few times cheaper, but installing bigger WTs becomes more expensive). Three examples of solutions of 2CP (9) in the sense of efficiency by (10) are shown in Fig. 1 — 3 for $L \in \{\overline{1, 4}\}$. Three examples of the solution for problem (11) by controlling (12) are shown in Fig. 4 — 6.

The examples in Fig. 1 — 6 show that the solutions of both 2CP (9) by (10) and problem (11) by (12) are very effective because they allow either having the closest approach to ADE or utilizing the given IFR almost completely. By this, the efficient WFD does not necessarily imply a multi-WF — apparently, efficient mono-WFs exist (Fig. 6). Building a multi-WF of WTs having a great number of different PCs is unlikely as well.

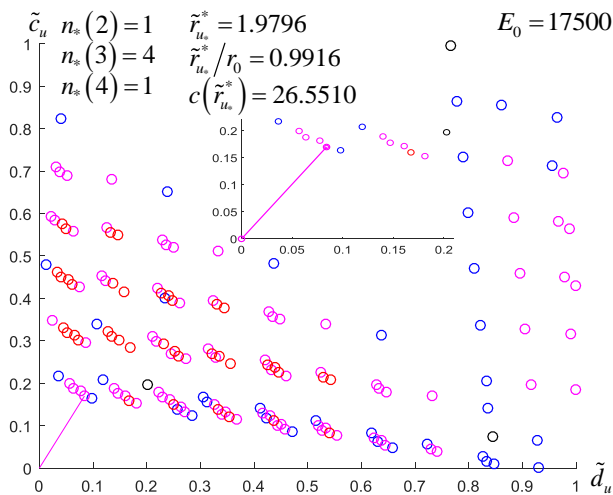


Fig. 1. WF of 6 WTs having 3 different PCs

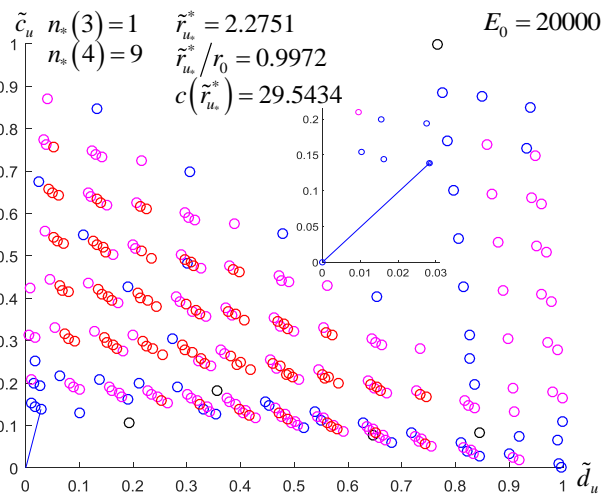


Fig. 2. WF of 10 WTs having 2 different PCs

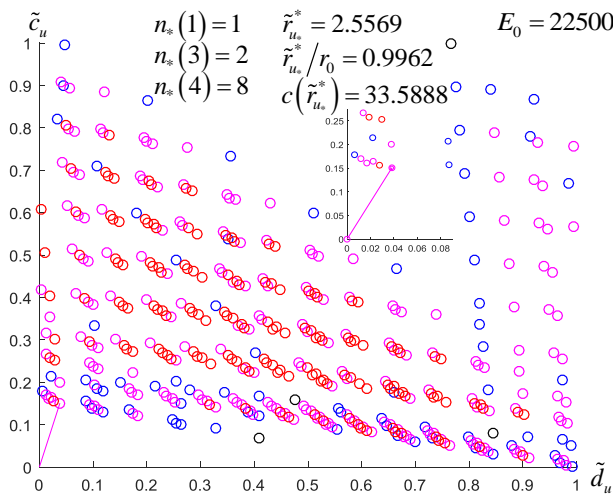


Fig. 3. WF of 11 WTs having 3 different PCs

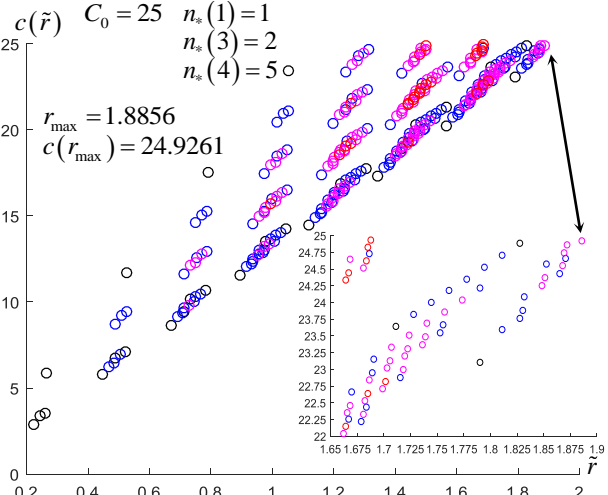


Fig. 4. WF of 8 WTs for up to 25 mln euros

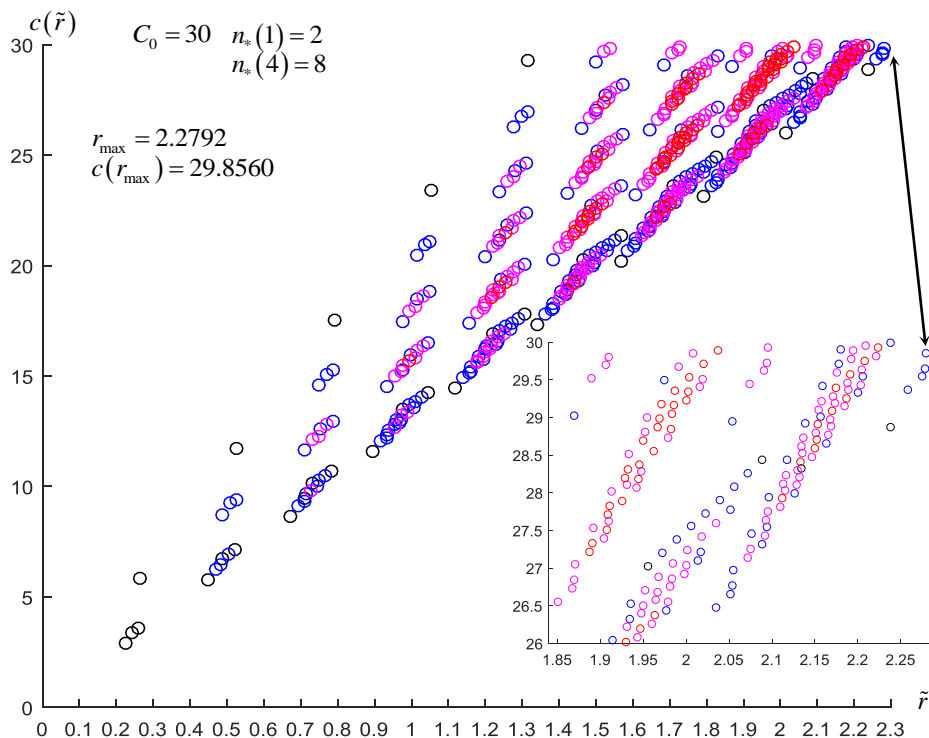


Fig. 5. WF of 10 WT's for up to 30 mln euros

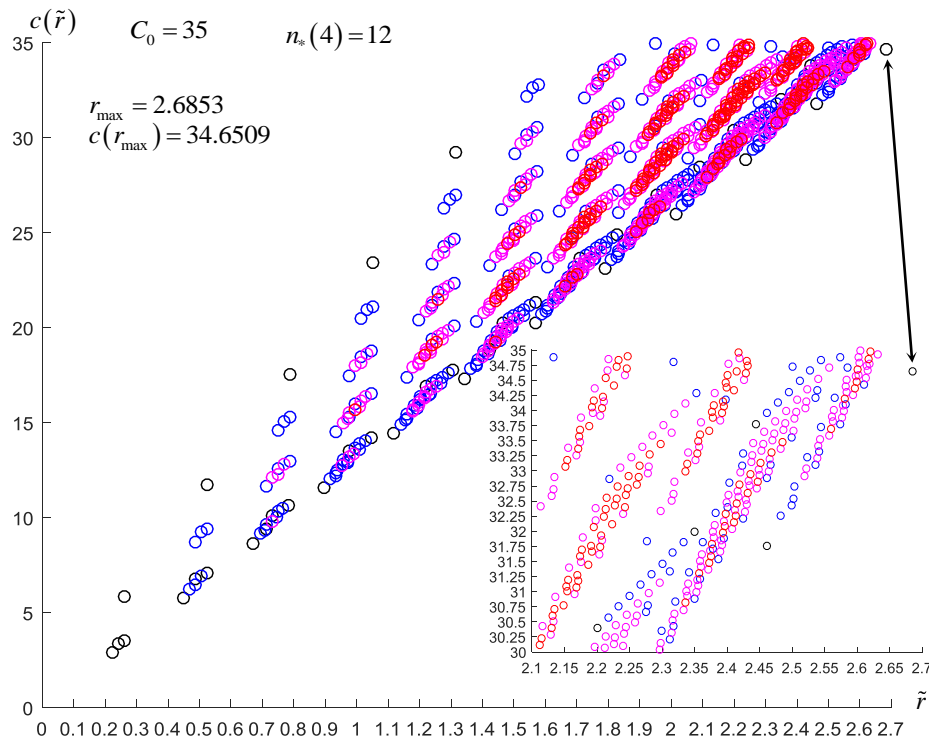


Fig. 6. WF of 12 WT's for up to 35 mln euros

Conclusion and suggestion for the further research in increasing efficiency of WFD

The parameters of the efficient WFD are a PDF (1) estimation for an area and an appropriate set of WT's based on the given either ADE or IFR. The number K of different WT's to be used for building a WF should be taken as big as possible. This is realizable, if those K types of WT's are commercially available. The efficiency can be achieved via energy-and-costs optimization: either 2CP (9) by (10) or

problem (11) by (12) is solved. Service costs for the WTs are not considered as they can be included into the power grid user's charge later. A further research might be focused on trying to turn on/off some WTs in a multi-WF depending on wind seasonality.

REFERENCES

1. P. Breeze, *Wind Power Generation*. Elsevier : Academic Press, 2015.
2. M. Song, Y. Wen, B. Duan, J. Wang, and Q. Gong, "Micro-siting optimization of a wind farm built in multiple phases," *Energy*, vol. 137, pp. 95 — 103, 2017.
3. D. Song, J. Yang, M. Su, A. Liu, Z. Cai, Y. Liu, and Y. H. Joo, "A novel wind speed estimator-integrated pitch control method for wind turbines with global-power regulation," *Energy*, vol. 138, pp. 816 — 830, 2017.
4. V. V. Romanuke, "Increasing an expected power of the wind farm with diversification in non-dominated power curves of the used wind turbines," *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series "Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems"*, iss. 35, pp. 74 — 79, 2017.
5. https://www.thewindpower.net/data/samples/Sample_Power_curves.xls

ЛІТЕРАТУРА

1. Breeze P. *Wind Power Generation*. — Elsevier : Academic Press, 2015. — 104 p.
2. Song M. Micro-siting optimization of a wind farm built in multiple phases / M. Song, Y. Wen, B. Duan, J. Wang, Q. Gong // *Energy*. — 2017. — Vol. 137. — P. 95 — 103.
3. Song D. A novel wind speed estimator-integrated pitch control method for wind turbines with global-power regulation / D. Song, J. Yang, M. Su, A. Liu, Z. Cai, Y. Liu, Y. H. Joo // *Energy*. — 2017. — Vol. 138. — P. 816 — 830.
4. Romanuke V. V. Increasing an expected power of the wind farm with diversification in non-dominated power curves of the used wind turbines / V. V. Romanuke // *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series "Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems"*. — 2017. — Issue 35. — P. 74 — 79.
5. https://www.thewindpower.net/data/samples/Sample_Power_curves.xls

Romanuke Vadim Vasylyovych – doctor of technical sciences, professor; O. S. Popov Odessa National Academy of Telecommunications, Ukraine, 65029, Odessa, Kuznecznaya str., 1; e-mail: romanukevadimv@gmail.com; ORCID: 0000-0003-3543-3087.

CONTENTS

▪ N.M. Antonenko	4
Plane thermoelastic deformation of a multilayer plate with elastic links between its layers	
▪ A.V. Bezlyubchenko, Ie.S. Meniailov, M.L. Ugryumov, K.M. Ugryumova, S.V. Chernysh	14
The method of synthesizing scalar functions of functions for vibor for bagatocriterial tasks, priinyattya rishen, in the case of unaccounted	
▪ Y.L. Hrabovska, S.M. Reva	26
The computer control channel modernization of the digital processor educational model	
▪ O.S. Konchakovska, M.V. Sidorov	33
The two-sided method in numerical analysis of one microelectromechanical system	
▪ D.V. Kriutchenko	42
Computer simulation of forced oscillations of liquid in prismatic tank	
▪ N.S. Podtcikin	48
Optimization of reliability of complex systems	
▪ N.V. Prykhodko, S.B. Prykhodko	61
Constructing the nonlinear regression equations based on multivariate normalizing transformations	
▪ V.V. Romanuke	69
Wind farm deployment by wind turbines of different power curves under a 2-way routine of energy-and-costs constrained optimization	
▪ CONTENTS	76

ВІСНИК ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

імені В.Н. Каразіна

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»

Випуски даної серії розповсюджуються у академічних та наукових колах України та за її межами з метою оперативного висвітлення досліджень у таких актуальних галузях: математичне та комп'ютерне моделювання, обчислювальний експеримент, теорія і прикладні методи обробки інформації, захист інформації, програмно-апаратні системи інформаційного або управляючого призначення, застосування математичного моделювання та системного аналізу у високих, наукоємних технологіях, враховуючи технології створення програмної продукції. Приймаються роботи, що відносяться до напрямів фізико-математичних і технічних наук (бажаний об'єм 6-18 сторінок). Усі рукописи рецензуються.

Примітка. Протягом 2019-20 рр. редакційна колегія при інших рівних умовах надаватиме перевагу роботам, що представлені англійською мовою, якщо мова статті отримала схвалення при рецензуванні.

Офіційний сайт <http://mia.univer.kharkov.ua>

Сайт редколегії <http://www.dsmmph.org.ua/bulletin.html>

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

имени В.Н. Каразина

Серія «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления»

Випуски данной серии распространяются в академических и научных кругах Украины и за ее пределами с целью оперативного освещения исследований в следующих актуальных областях: математическое и компьютерное моделирование, вычислительный эксперимент, теория и прикладные методы обработки информации, защита информации, программно-аппаратные системы информационного или управляющего назначения, приложения математического моделирования и системного анализа в высоких, наукоёмких технологиях, включая технологии создания программной продукции. Принимаются работы, относящиеся к направлениям физико-математических и технических наук (желательный объем 6-18 страниц). Все рукописи рецензируются.

Примечание. На протяжении 2019-20 гг. редакционная коллегия при прочих равных условиях будет отдавать предпочтение работам, представленным на английском языке, если язык статьи получил одобрение при рецензировании.

Официальный сайт <http://mia.univer.kharkov.ua>

Сайт редколлегии <http://www.dsmmph.org.ua/bulletin.html>

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 39

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О. О. Афанасьєва

Підписано до друку 29.10.2018 р.
Формат 70×108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. – 9,7.
Обл.– вид. арк. – 8,4.
Наклад 100 пр. Зам. №

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна.
Видавництво

Надруковано: ХНУ імені В. Н. Каразіна
61022 м. Харків, майдан Свободи, 4,
тел.: 362-01-52
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09