

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Серія
«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 38

Серія заснована 2003 р.

Харків
2018

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних та технічних наук (наказ МОН України № 1328 від 21.12.2015 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 5 від 27.04.2018 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),
д.ф.-м.н., академік НАН України, проф.,
ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора),
д.т.н., проф. ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т. (заст. гол. редактора), д.ф.-
м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені
В.Н. Каразіна

Споров О.Є. (відповідальний секретар),
к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ
імені Б.І. Веркіна НАН України

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН
України, проф., фізико-енергетичний ф-т
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ
імені В. Н. Каразіна

Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-
енергетичний ф-т ХНУ імені
В.Н. Каразіна

Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний
технічний університет "ХПІ"

Стрельникова О.О., д.т.н., проф. Ін-т
проблем машинобудування НАН України

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра
прикладної інформатики, університет
імені Миколая Коперника, м. Торунь
(Польща)

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat.
habil. Professor of Technical Informatics
and Computer Systems, Institute of
Informatics, Technical University of
Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor
of computer science, Dep. of C. S.,
University of Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна,
к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

ЗМІСТ

▪ Д.Г. Богуто, В.Ф. Комаров, П.К. Ніколюк, П.П. Ніколюк	4
Інтелектуальний алгоритм управління міським трафіком транспортних засобів	
▪ І.П. Боков, Н.С. Бондаренко, О.О. Стрельнікова	14
Дослідження поведінки узагальнених переміщень, отриманих із використанням теорії {m,n}-апроксимації	
▪ N.V. Varlamova, N.G. Styervoyedov	25
Hardware-software complex for psychological and professional diagnostics with function of remote control	
▪ K.G. Degtyarev, V.I.Gnitko, Yu.V. Naumenko, E.A. Strelnikova	33
A comparative analysis of axisymmetric vibrations of conical and cylindrical fluid-filled elastic shells	
▪ А.О. Караєв, О.О. Стрельнікова	42
Відновлення вершин многокутника за серединами його сторін	
▪ А. И. Косолап, А. А. Романчук	49
Преобразование координат в задачах глобальной оптимизации	
▪ М.В. Сидоров	55
Метод Рунге та метод двобічних наближень у чисельному аналізі задач для одновимірних квазілінійних параболічних рівнянь	
▪ Н.В. Сметанкіна, С.В. Угрімов, О.М. Шупіков	64
Моделювання динамічного відгуку шаруватих конструкцій на імпульсне навантаження	
▪ CONTENTS	71

УДК 004.942+656.052.1

Інтелектуальний алгоритм управління міським трафіком транспортних засобів

Д.Г. Богуто¹, В.Ф. Комаров¹, П.К. Ніколюк¹, П.П. Ніколюк²¹Донецький національний університет імені Василя Стуса, вул. 600-річчя, 21, м. Вінниця, 21021, Україна²Вінницький національний технічний університет, вул. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021, Україна
e-mail: nikolyuk54@gmail.com

Дослідження представляє собою алгоритм побудови оптимального маршруту для кожного транспортного засобу (ТЗ) у великому місті з корекцією маршруту при зміні дорожньої обстановки. Технічно процедура регулювання потоків ТЗ здійснюється за рахунок динамічної взаємодії в режимі реального часу між центральним пунктом керування трафіком (ЦПКТ) та кожним ТЗ, що задав свої початкові та кінцеві координати. ЦПКТ передає кожному водієві голосові команди щодо маршруту руху до заявленого водієм кінцевого пункту як при звичайній GPS-навігації. Особливість полягає у тому, що програма аналізує динамічну ситуацію на кожному перехресті і по всьому місту і відповідно прокладає маршрут з урахуванням трафік-ситуації на кожен конкретний момент часу. Остаточною метою даного дослідження є синхронізація транспортних потоків, оптимальне використання транспортних артерій всього міста, запобігання утворенню заторів, а також супровід кожного ТЗ до місця призначення з таким розрахунком, щоб затрачений на поїздку час був мінімальним.

Ключові слова: орієнтований навантажений граф, GPS-навігатор, алгоритм Дейкстри, оптимальний маршрут, Java-програма.

The research is an algorithm for constructing an optimal route for each vehicle in a large city with a correction of the route under changing the road situation. Technically, the procedure for regulating of flows of vehicles is carried out through the dynamic interaction in real time between the central management traffic system (CMTS) and each vehicle that has set its initial and final coordinates. The CMTS sends to each driver voice commands along the route with the declared endpoint driver as with normal GPS navigation. The peculiarity is that the program analyzes the dynamic situation at each junction and throughout the city and, accordingly, sets the route taking into account the traffic situation for each particular moment of time. The ultimate goal of this study is to synchronize traffic flows, optimally use the transport arteries throughout the city, prevent congestion, and also track each vehicle to its destination in such a way that the time spent on the trip is minimal. To lay the optimal route, a Java program that implements the Dijkstra algorithm is used. An important condition for implementing this algorithm is the dynamism of the edges of the graph, which corresponds to the dynamic situation associated with urban traffic. In this regard, the weight of the edges of the graph modeling the transport network of the city varies according to the change in the traffic load between the adjacent intersections. Therefore, the database that stores traffic information for urban streets needs to be constantly updated. In our case, this update occurs every 10 seconds. This allows the program that manages traffic to quickly change the routes of vehicles, choosing the optimal.

Keywords: oriented loaded graph, GPS-navigator, Dijkstra algorithm, optimal route, Java program.

1 Постановка проблеми

Дана стаття є логічним продовженням роботи [1]. Кінцевою метою дослідження є вирішення проблеми трафіку для всіх транспортних засобів (ТЗ), що знаходяться на вулицях великого міста – мегаполісу. А найголовнішою проблемою в цьому відношенні є затори. Як уникнути цього негативного явища? Як організувати проїзд кожного окремого ТЗ (а таких об'єктів у великому місті може бути понад мільйон) до заявленого водієм пункту призначення з таким розрахунком, щоб поїздка зайняла найменший час? Технологія, що пропонується, дозволяє ефективно вирішувати поставлені проблеми.

2 Аналіз останніх досліджень і публікацій

Заявлена проблема «стоїть на порядку денному» багатьох крупних міжнародних компаній, що розробляють технічні засоби організації дорожнього руху [2]. Найбільш близькою системою до розглядуваної нами технології навігації є система навігації типу GPS/GLONASS [3]. Кожного року GPS-навігація модифікується. Деяке автомобільне навігаційне обладнання може повідомляти про затори на вулицях міста та пропонувати альтернативний маршрут об'їзду таких місць. Інтеграція с автомобілем стає глибшою, і це дозволяє задавати кожному конкретному водієві голосові маршрут-команди. Особливий вид взаємодії між автомобілем та дорожньою інфраструктурою описаний у роботі [4]. Тут описана технологія взаємодії між автомобілем та дорожньою інфраструктурою з допомогою так званих точок доступу (access points), розташованих вздовж автомобільної дороги та на перехрестях. Близькою до нашого дослідження є робота [5]. В основі технології лежать чотири складових: світлофори, детектори

черги (queue detectors), дорожні відеокамери і центральна контрольна система (central control system). Кожні дві секунди система моніторить ситуацію щодо зміни фаз горіння світлофорів і завдяки цьому досягається оптимізація трафіку.

Автори роботи [6] аналізують проблему розташування датчиків, оскільки їх розташування суттєвим чином впливає на те, які транспортні потоки реєструються і тому можуть бути керованими. В дослідженні [7] застосовується модифікована модель стільникових автоматів (modified cellular automata model) для вивчення процесів взаємодії між автомобілями завдяки дослідженню процесів обгону шляхом вивчення даних про трафік ТЗ. Проведено моделювання потоків ТЗ. Дослідження [8] застосовує «розумну» мережеву імітаційну модель, використовуючи в якості об'єкта дослідження центральну та західну частину міста Сінгапур. На карті міста показані автомагістралі, звичайні дороги, автобусні зупинки, комерційні зони, перехрестя та автомобільні розв'язки. Для проведення імітаційних досліджень застосовувалась імітаційна модель PARAMICS. Для реєстрації потоків ТЗ використовувались петлеві детектори (loop detectors) та камери спостереження (surveillance cameras). Можливим варіантом покращення трафіка є координоване регулювання автомобільних потоків за допомогою бездротового зв'язку між автомобілями [9]. З розвитком автотранспорту все більшого поширення набуває теорія стільникових автоматів. У цитованій вище роботі моделювання рухом через перехрестя ведеться на платформі NetLogo, що є багатоагентним програмним середовищем для моделювання різних динамічних процесів.

Винахід [10] відноситься до інтелектуальної системи керування режимом роботи світлофорів через двосторонній обмін інформацією з ЦПКТ. Перехрестя використовується переважно для перетворення інформації світлофорів на бездротові сигнали та реалізації інтелектуального управління світлофорною системою. ЦПКТ здійснює управління міськими дорогами та надає інформацію водіям автомобілів а також передає електронні карти маршрутів. Інтелектуальна система управління роботою світлофорів на базі інтелектуального терміналу дозволяє водіям своєчасно отримувати інформацію про перемикання світлофорів. Система світлофорів автоматично визначає кількість автомобілів на дорогах, щоб миттєво змінювати час проїзду для автомобілів різних напрямків. Система та спосіб, передбачені цим винаходом, допомагають водіям оптимізувати маршрути руху. Дослідження [11] розглядає проблему трафіку під кутом зору проблеми паркінгу у великому місті. Технологія запропонована компанією Siemens. Система контролює завантаженість вулиць і передає інформацію автомобілістам, використовуючи для кожної окремої стоянки інформацію, зчитувану за допомогою наземних датчиків або на основі кількості проданих паркувальних дозволів. В обох випадках система направляє водіїв безпосередньо на наявні місця для паркування, що запобігає переповненню вулиць та зменшує навантаження на трафік. Має місце інтеграція в загальну систему керування трафіком. Це дає змогу використовувати бази даних паркування для надання автомобілістам рекомендацій щодо маршрутизації вже при в'їзді в межі міста.

В роботі [12] приведені результати досліджень трафіку, проведені в штаті Юта (США). У розгляд введена система показників ефективності регулювання руху потоків ТЗ на основі аналізу даних, отриманих із спеціальних мікрохвильових датчиків. Автори [13] використовують динаміку рідини для вирішення проблем, пов'язаних із дорожнім рухом. Це дослідження представляє методологію для моделювання проблем, пов'язаних із дорожнім трафіком. Розроблена теорія може полегшити розв'язання проблеми заторів. Приблизно такого ж типу є робота [14]. Дуже цікавим є дослідження [15], присвячене взаємодії приватних автомобілів та громадського транспорту. Для розв'язання проблем такої взаємодії автори вводять поняття двотипних (бімодальних) міських мереж (bi-modal urban networks). Для організації ефективної взаємодії вказаних типів ТЗ вводяться у розгляд бімодальна Макроскопічна Фундаментальна Діаграма (МФД), що моделює змішаний трафік ТЗ згаданих видів. Результати показують, що запропонована технологія може значно: (i) зменшити затори в мережі; (ii) поліпшити показники трафіку автобусів з точки зору часу проїзду маршруту руху; (iii) знизити рівень скупченості ТЗ на критичних ділянках транспортної мережі. В якості об'єкта досліджень вибрана транспортна мережа Сан-Франціско.

3 Формулювання мети статті

Стратегічна мета заключається в побудові оптимальних маршрутів для кожного ТЗ та синхронізації потоків ТЗ. Ставиться задача провести кожен ТЗ по місту по оптимальному

маршруту з урахуванням можливої зміни такого маршруту, що коригується кожні 10 секунд. Тобто система регулювання трафіка всієї сукупності автомобілів на трасах міста повинна прокладати динамічний – в режимі реального часу – і оптимальний маршрут кожному ТЗ, що замовляє лише кінцеву позицію маршруту ЦПКТ (стартова позиція фіксується автоматично при підключенні до ЦПКТ). Центральний комп'ютер на ЦПКТ, використовуючи комп'ютерну програму, записану знизу, співпрацює з кожним водієм та передає йому голосові команди щодо маршруту руху до заявленого водієм пункту призначення як при звичайній GPS-навігації. Особливість полягає у тому, що програма аналізує динамічну ситуацію на кожному перехресті і по всьому місту і відповідно прокладає маршрут з урахуванням ситуації на кожен конкретний момент часу; при цьому використовується комп'ютерна програма, що реалізує алгоритм Дейкстри щодо знаходження оптимального шляху. Остаточною метою даного дослідження є синхронізація транспортних потоків, оптимальне використання транспортних артерій всього міста, запобігання утворенню заторів а також супровід кожного ТЗ до місця призначення з таким розрахунком, щоб затрачений на поїздку час був мінімальним.

4 Виклад основного матеріалу

Технологія являє собою автоматизовану інтелектуальну систему регуляції дорожнього руху у великих містах, яку умовно можна розділити на два етапи. Перший етап викладений в роботі [1]. На цьому етапі здійснюється регулювання трафіку через одне окреме перехрестя, що взаємодіє із сусіднім, а на другому – через все місто. Розглянемо тепер детально другий етап регулювання трафіку. Оскільки всі перехрестя міста знаходяться під контролем ЦПКТ, то в даному разі є можливість застосування «розумної» технології регулювання проїзду ТЗ із стартової позиції S до фінісної F (останню позицію кожен водій задає ЦПКТ). При цьому важливо знайти оптимальний маршрут руху для кожного ТЗ (у великих містах таких об'єктів може бути понад мільйон) на основі використання отриманих з кожного перехрестя даних, що дуже швидко змінюються. Останнє означає, що потрібно використовувати динамічну базу даних, спроможну оновлюватись, скажімо, кожні 10 с. Іншими словами, канали «Перехрестя ↔ ЦПКТ» працюють в режимі реального часу, постійно оновлюючи дані про завантаженість ділянок дороги між перехрестями.

Отже, завдання полягає у прокладанні оптимального маршруту руху для кожного ТЗ з урахуванням ситуації на транспортній мережі міста в кожен конкретний момент. Пакети даних поступають з кожного перехрестя на ЦПКТ, який працює на основі спеціальної комп'ютерної програми. У відповідь на вхідну інформацію ЦПКТ видає керуючі сигнали на світлофори кожного перехрестя. Оскільки всі перехрестя міста перебувають під контролем вказаного типу, ЦПКТ постійно володіє ситуацією щодо завантаженості перехресть та ділянок дороги між ними. Така ситуація дозволяє не тільки покращити проїзд через окреме перехрестя, а і дає можливість прокладати маршрут кожному i -му ТЗ ($i = 1 \dots N$, де N - число автомобілів, що замовили маршрут ЦПКТ, тобто заявили свою пару (S_i, F_i)). Крім того водій – при необхідності – заявляє також мову супроводу. Наприклад, водій-українець у Сакраменто (США) заявляє в якості звукового гіда українську мову.

Технічно ситуація виглядає наступним чином: програма на ЦПКТ працює з кожним ТЗ і для кожного такого об'єкта розраховує оптимальний маршрут руху і передає дані водієві на GPS-навігатор чи на мобільний телефон із спеціальним додатком. «Знаючи» розрахований оптимальніший маршрут – на даний момент часу – ЦПКТ «веде» водія по цьому маршруту, тобто постійно передає інформацію про те, де водій має повернути і в який бік, розвернутись чи перелаштуватись на іншу смугу руху і т.п. Але дорожня ситуація у сучасному місті змінюється щосекундно. І тому по мірі руху програма контролює маршрут кожного ТЗ та знаходиться в постійному пошуку найефективнішого маршруту. Якщо для даного водія був прокладений певний маршрут на момент часу $t = 0$ і в момент часу $t > 0$ ситуація на цьому конкретному маршруті погіршилась (затор, ДТП тощо), тобто з'явився новий оптимальний маршрут, то програма «поведе» водія по цьому новому маршруту. І так далі, поки ТЗ із номером i не досягне кінцевого пункту F_i .

Технічно проїзд ТЗ через все місто, в якому кожен світлофор оснащений описаною в [1] системою регулювання трафіком, здійснюється з допомогою алгоритму, який із всіх можливих

варіантів маршруту між точками S_i і F_i обирає оптимальний. Тут оптимальність визначається з допомогою виконання наступної умови [1]:

$$\sum_{h=1}^f (N_{A_h B_h} / n_{A_h B_h}) \text{ ® } \min, \quad (1)$$

де $N_{A_h B_h}$ – число ТЗ, що в'їжджають на ділянку дороги $A_h B_h$ одного напрямку; $n_{A_h B_h}$ – число ТЗ, що виїжджають із ділянки дороги $A_h B_h$ одного напрямку; h - індекс, що нумерує проїзну частину дороги одного напрямку руху вздовж маршруту; іншими словами, ребро графа між інцидентними (сусідніми) вузлами (перехрестями), що зчеплені між собою та утворюють простий ланцюг, з'єднуючи початкову S_i та кінцеву F_i координати, заявлені водієм автомобіля i . Символ f означає число смуг виду $A_h B_h$, які формують прокладений маршрут із мультиплікат типу (1).

Співставимо транспортну мережу міста (рис.1) з орієнтованим навантаженим графом (рис.2). Процедура прокладання маршруту здійснюється з допомогою програми MiniWay, яка використовує алгоритм Дейкстри [16]. Для складання такої програми в нашій роботі використовується мова програмування Java. Програма використовує в якості даних, які вводять в консолі, набір всіх значень виду (1), величини яких (для деякого моменту часу!) представлені на рис.2 біля ребер графа.

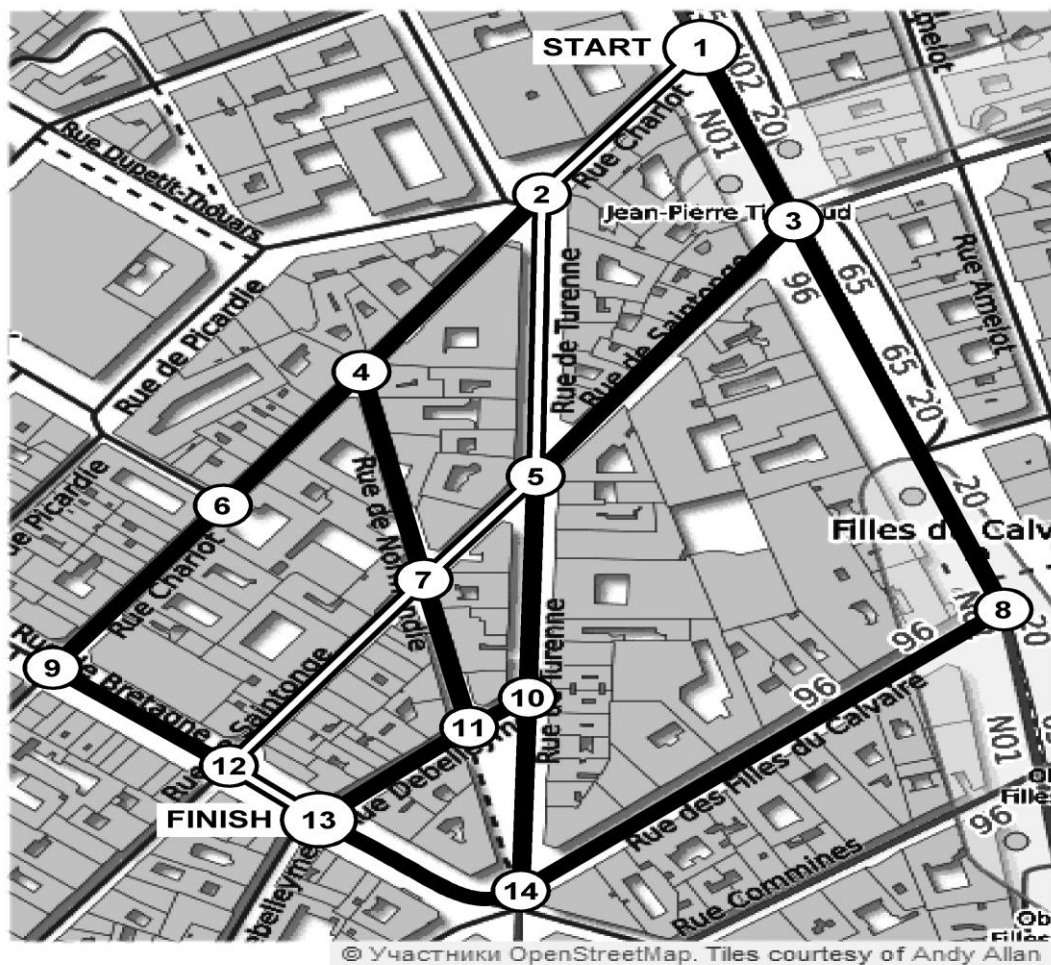


Рис.1 Транспортна мережа центрального району Парижа. Тут зроблені позначення перехресть (цифри від 1 до 14). Перехрестя 1 відмічене надписом START, а перехрестя 13 визначено як кінцевий пункт маршруту – (FINISH).

Перед технічним впровадженням пропонованого проекту необхідно здійснити імітаційне моделювання, тобто провести електронну апробацію даної технології. Дуже перспективним методом апробації є програма візуального імітаційного моделювання AnyLogic Professional 7.3.7 [17], в якій представлено ряд імітаційних моделей, зокрема чотири імітаційні моделі, що регулюють дорожній трафік. Найбільш ілюстративною є імітаційна модель Traffic Light Phases Optimization, що візуально імітує проїзд ТЗ через три сусідні перехрестя – два Т-подібні перехрестя та одне хрестоподібне. Програма дозволяє максимізувати інтенсивність проїзду ТЗ через кожне із названих перехресть за рахунок зміни вручну з допомогою слайдерів протяжності фаз горіння зеленого світла у взаємно перпендикулярних напрямках проїзних частин дороги.

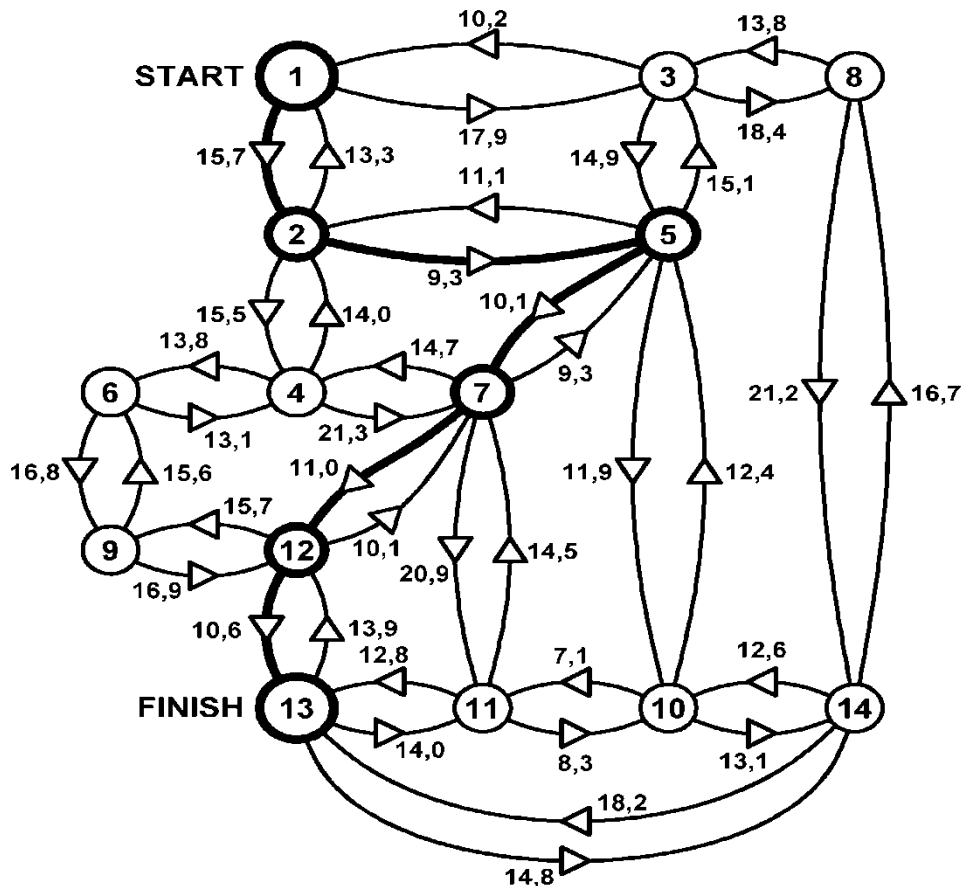


Рис.1.Орієнтований зв'язний навантажений граф. Напрямки ребер задаються трикутниками, біля яких приведені ваги ребер. Написи «START» та «FINISH» відповідають вершинам графа відповідно 1 та 13 і символізують собою початок та кінець маршруту конкретного ТЗ. Один із можливих маршрутів між пунктами 1 і 13 для певного моменту часу зображений жирною лінією.

```
package MiniWay;
import java.io.BufferedReader;
import java.io.IOException;
import java.io.InputStreamReader;
import java.io.PrintWriter;
import java.util.ArrayList;
import java.util.Arrays;
import java.util.StringTokenizer;
public class MiniWay {
private static int INF = Integer.MAX_VALUE/2;
double weightU;
```



```
int u;
private int n; //кількість вершин у графі
private int m; //кількість дуг у графі
private ArrayList adj[]; //список суміжності
private ArrayList weight[]; //вага ребра в орграфі
private boolean used[]; //масив для зберігання інформації про пройдені та не //пройдені вершини
private double dist[]; //масив для зберігання відстані від стартової вершини
private int[] pred; //масив предків, необхідних для відновлення найкоротшого //шляху від
стартової вершини
int start; //стартова вершина, від якої знаходимо відстань до всіх інших
private BufferedReader cin;
private PrintWriter cout;
private StringTokenizer tokenizer;
private void dejkstra(int s) //процедура запуску алгоритму Дейкстри із стартової вершини
ist[s] = 0; //найкоротша відстань від стартової вершини рівна 0
for (int k = 0; k < n; ++k) {
int v = -1;
double distV = INF;
for (int i = 0; i < n; ++i) {
if (used[i]) {
continue;
}
if (distV < dist[i]) {
continue;
}
v = i;
distV = dist[i];
}
for (int i = 0; i < adj[v].size(); ++i) {
int u = (int) adj[v].get(i);
double weightU = (double) weight[v].get(i);
if (dist[v] + weightU < dist[u]) {
dist[u] = dist[v] + weightU;
pred[u] = (int) v;
}
}
used[v] = true;
}
private void readData() throws IOException {
cin = new BufferedReader(new InputStreamReader(System.in));
cout = new PrintWriter(System.out);
tokenizer = new StringTokenizer(cin.readLine());
n = Integer.parseInt(tokenizer.nextToken());
m = Integer.parseInt(tokenizer.nextToken());
start = Integer.parseInt(tokenizer.nextToken()) - 1;
adj = new ArrayList[n];
for (int i = 0; i < n; ++i) {
adj[i] = new ArrayList();
}
//ініціалізація списку, в якому зберігаються ваги ребер
weight = new ArrayList[n];
for (int i = 0; i < n; ++i) {
weight[i] = new ArrayList();
}
//зчитуємо файл, заданий списком ребер
for (int i = 0; i < m; ++i) {
tokenizer = new StringTokenizer(cin.readLine());
```

```

int u = Integer.parseInt(tokenizer.nextToken());
int v = Integer.parseInt(tokenizer.nextToken());
double w = Double.parseDouble(tokenizer.nextToken());
u--;
v--;
adj[u].add(v);
weight[u].add(w);
}
used = new boolean[n];
Arrays.fill(used, false);
pred = new int[n];
Arrays.fill(pred, -1);
dist = new double[n];
Arrays.fill(dist, INF);
}
void printWay(int v) {
if (v == -1) {
return;
}
printWay(pred[v]);
cout.print((v + 1) + " ");
}
private void printData() throws IOException {
for (int v = 0; v < n; ++v) {
if (dist[v] != INF) {
cout.print(dist[v] + " ");
} else {
cout.print("-1 ");
} }
cout.println();
for (int v = 0; v < n; ++v) {
cout.print((v + 1) + ": ");
if (dist[v] != INF) {
printWay(v);
}
cout.println();
}
cin.close();
cout.close();
}
private void run() throws IOException {
readData();
dejkstra(start);
printData();
cin.close();
cout.close();
}
public static void main(String[] args) throws IOException {
MiniWay solution = new MiniWay();
solution.run();
}}

```

Для кожного заданого маршруту програма, що керує трафіком, повинна вибрати оптимальніший маршрут, тобто для кожної пари (S_i, F_i) підібрати такий комплект із (1), який є нерозривним маршрутом та відповідає мінімуму величини.

Застосуємо приведену вище програму, написану мовою програмування JAVA, для знаходження оптимального маршруту, застосувавши цю програму до графа, приведеного на рис.1, вважаючи, що шуканий маршрут пролягає від вузла (перехрестя) 1 (START) до вузла (перехрестя) 13 (FINISH). Приведений знизу спектр даних означає наступне: **14** – число вершин графа; **40** – число ребер графа; **1** – номер вершини, від якої стартує маршрут. Далі приведено 40 триад чисел, перше з яких означає номер вихідної вершини, друге – номер вершини, до якої прокладається маршрут, третє – це дійсне число, що являє собою вагу ребра графа. Ці дані ми вводим в консолі. Особливо наголосимо, що приведенний спектр дійсних чисел (третья колонка) оновлюється кожні 10 секунд – у відповідності із зміною дорожнього трафіка. Приведені величини розраховуються на основі мультиплікати виду (1). Дані для відповідних розрахунків отримуються в результаті аналізу даних із вхідних та вихідних датчиків.

14	40	1	13	14	14.8			
1	2	15.7	7	5	9.3	7	11	20.9
2	1	13.3	7	4	14.7	11	7	14.5
1	3	17.9	4	7	21.3	10	5	12.4
3	1	10.2	4	6	13.8	5	10	11.9
3	8	18.4	6	4	13.1	8	14	21.2
8	3	13.8	6	9	16.8	14	8	16.7
3	5	14.9	9	6	15.6	13	11	14.0
5	3	15.1	9	12	16.9	11	13	12.8
2	5	9.3	12	9	15.7	11	10	8.3
5	2	11.1	12	7	10.1	10	11	7.1
2	4	15.5	7	12	11.0	10	14	13.1
4	2	14.0	12	13	10.6	14	10	12.6
5	7	10.1	13	12	13.9	14	13	18.2

Результат роботи програми – спектр чисел (виділених жирним шрифтом), що представляють собою відстані від вершини 1 до інших 14 вершин. Потім ідуть 14 рядків, що являють собою оптимальні маршрути від вершини 1 до інших вершин графа. Власне нас цікавить маршрут виду «1® 13», що показує конкретний шлях від вершини (перехрестя) 1 до вершини 13 – кінцевої позиції маршруту. Саме цей маршрут буде передавати водієві (на певний момент часу!) GPS-навігатор.

0.0	15.7	17.9	31.2	25.0	45.0	35.1	36.3	61.8	36.9	44.0	46.1	56.7	50.0	
1:	1							8:	1®	3®	8			
2:	1®	2						9:	1®	2®	4®	6®	9	
3:	1®	3						10:	1®	2®	5®	10		
4:	1®	2®	4					11:	1®	2®	5®	10®	11	
5:	1®	2®	5					12:	1®	2®	5®	7®	12	
6:	1®	2®	4®	6				13:	1®	2®	5®	7®	12®	13
7:	1®	2®	5®	7				14:	1®	2®	5®	10®	14	

Маршрут до пункту призначення 13 виглядає наступним чином: 1® 2® 5® 7® 12® 13. Програма передає дані про цей маршрут водієві, що його замовив, через GPS-навігатор або спеціальний додаток на мобільному телефоні. Цей маршрут, як і кожне ребро графа на рис.2, оновлюється кожні 10 секунд завдяки автоматизації кожного перехрестя в місті; іншими словами це означає, що ваги ребер постійно оновлюються у відповідності із даними, отримуваними із кожного перехрестя. В цьому, зокрема, є перевага нашої програми над дорожніми картами Google, які працюють із запізненням і тому констатують дорожню ситуацію постфактум, що власне і знецінює такі дані, оскільки вони не дають можливості водієві своєчасно реагувати на зміну дорожньої обстановки по його маршруту. Впровадження запропонованої системи дозволить здійснити синхронізацію руху величезної маси автомобілів (наприклад, у місті Пекін на вулиці курсує понад 1 млн. ТЗ).

Кожен водій, що під'єднався до ЦПКТ, отримує вказівки щодо руху по маршруту. Більше водію немає про що турбуватись – програма ЦПКТ буде передавати голосові команди водієві, як це робить звичайний GPS-навігатор. При зміні дорожньої обстановки (заблоковане перехрестя, ДТП по маршруту і т.д.) програма миттєво передає водієві новий розрахований, але оптимальний маршрут.

ЛІТЕРАТУРА

1. Богуто Д.Г., Волинець В.І, Ніколюк П.К., Ніколюк П.П. Автоматизована система керування рухом транспортних засобів в межах міста / Д.Г. Богуто, В.І. Волинець, П.К. Ніколюк, П.П. Ніколюк // Вісник Харківського університету, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – №5. – 2017. – С. 3-9.
2. A to Z List of Road Traffic Contractors - Road Traffic Technology [Електронний ресурс]. – Режим доступу: www.roadtraffic-technology.com/contractors/.
3. Как избавиться от пробок на дороге? - 1Gai [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.1gai.ru/publ/512991-kak-izbavitsya-ot-probok-na-doroge.html>.
4. Nyuk Lim, In Shick Kim, Ryangsoo Kim, “Vehicle, vehicle cloud system, and data dissemination system” U.S. Patent 20150153176, June 4, 2015.
5. Smart Traffic Management - Smarter Cambridge Transport [Електронний ресурс]. – Режим доступу: www.smartertransport.uk.
6. Marco Rinaldi, Francesco Viti, “Exact and approximate route set generation for resilient partial observability in sensor location problems”, *Transportation Research Part B: Methodological*, vol.105, № 11, pp. 86 – 119, 2017.
7. Gaurav Pandey, K. Ramachandra Rao, Dinesh Mohan, “Modelling vehicular interactions for heterogeneous traffic flow using cellular automata with position preference”, *J. Mod. Transport.*, vol. 25, №3, pp.163–177, 2017.
8. A. A. Memon, M. Meng, Y. D. Wong , S. H. Lam, “Calibration of a rule-based intelligent network simulation model”, *J. Mod. Transport*, vol. 24, №1, pp.48–61, 2016.
9. Wei Wu, Yang Liu, Yue Xu, Quanlun Wei, Yi Zhang, “Traffic Control Models Based on Cellular Automata for At-Grade Intersections in Autonomous Vehicle Environment” *Journal of Sensors*, vol. 2017, Article ID 9436054, 6 pages, <https://doi.org/10.1155/2017/9436054>.
10. Xu Chunmao, Xu Jin, “Intelligent terminal based intelligent traffic light system and method”, China Patent CN104575066, April 29, 2015.
11. Case studies for traffic solutions - Siemens [Електронний ресурс] – Режим доступу: www.mobility.siemens.com/...solutions/.../case-studies-for-tr.
12. David K. Chang, Mitsuru Saito, Grant G. Schultz, Dennis L. Eggett, “Use of Hi-resolution data for evaluating accuracy of traffic volume counts collected by microwave sensors”, *Journal of traffic and transportation engineering*, vol.4, Is. 5, pp. 423-435, 2017.
13. Dazhi Sun, Jinpeng Lv, S. Travis Waller, “In-depth analysis of traffic congestion using computational fluid dynamics (CFD) modeling meth”, *Journal of Modern Transportation*, vol.1, № 1, pp. 58-67, 2011.
14. T.R. Gopalakrishnan Nair, Kavitha Sooda, “Comparison of Genetic Algorithm and Simulated Annealing Technique for Optimal Path Selection in Network Routing”, arXiv: 1001.3920. Available at: <http://arxiv.org/abs/1001.3920> (2010).
15. Konstantinos Ampountolas, Nan Zheng, Nikolas Geroliminis, “Macroscopic modelling and robust control of bi-modal multi-region urban road networks”, *Transportation Research Part B: Methodological*, vol.104, pp.616–637, 2017.
16. Cybern.ru » Алгоритм Дейкстры (реализация на Java) [Електронний ресурс]. – Режим доступу: cybern.ru/algoritm-dejkstry-realizaciya-na-java.html.

REFERENCIES

1. D.G. Boguto, V.I. Volynets, P.K. Nikoljuk, P.P. Nikoljuk, “Automated control system of motor vehicles within the city”, *Bulletin of Kharkiv University, series “Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems”*, Is.35, pp. 3-9, 2017.

2. “A to Z List of Road Traffic Contractors - Road Traffic Technology”. Available: www.roadtraffic-technology.com/contractors/.
3. “How to get rid of traffic jams on the road? - 1Gai”. Available: <http://www.1gai.ru/publ/512991-kak-izbavitsya-ot-probok-na-doroge.html>.
4. Hyuk Lim, In Shick Kim, Ryangsoo Kim, “Vehicle, vehicle cloud system, and data dissemination system “ U.S. Patent US20150153176, June 4, 2015.
5. “Smart Traffic Management - Smarter Cambridge Transport”, Available: www.smartertransport.uk.
6. Marco Rinaldi, Francesco Viti, “Exact and approximate route set generation for resilient partial observability in sensor location problems”, *Transportation Research Part B: Methodological*, vol.105, № 11, pp. 86 – 119, 2017.
7. Gaurav Pandey, K. Ramachandra Rao, Dinesh Mohan, “Modelling vehicular interactions for heterogeneous traffic flow using cellular automata with position preference”, *J. Mod. Transport*, vol. 25, №3, pp.163–177, 2017.
8. A. A. Memon, M. Meng, Y. D. Wong , S. H. Lam, “Calibration of a rule-based intelligent network simulation model”, *J. Mod. Transport*, vol. 24, №1, pp.48–61, 2016.
9. Wei Wu, Yang Liu, Yue Xu, Quanlun Wei, Yi Zhang, “Traffic Control Models Based on Cellular Automata for At-Grade Intersections in Autonomous Vehicle Environment” *Journal of Sensors*, vol. 2017, Article ID 9436054, 6 pages, <https://doi.org/10.1155/2017/9436054>.
10. Xu Chunmao, Xu Jin, “Intelligent terminal based intelligent traffic light system and method”, *China Patent CN104575066*, April 29, 2015.
11. “Case studies for traffic solutions - Siemens”, Available: [www.mobility.siemens.com /...solutions/.../case-studies-for-tr](http://www.mobility.siemens.com/...solutions/.../case-studies-for-tr).
12. David K. Chang, Mitsuru Saito, Grant G. Schultz, Dennis L. Eggett, “Use of Hi-resolution data for evaluating accuracy of traffic volume counts collected by microwave sensors”, *Journal of traffic and transportation engineering*, vol.4, Is. 5, pp. 423-435, 2017.
13. Dazhi Sun, Jinpeng Lv, S. Travis Waller, “In-depth analysis of traffic congestion using computational fluid dynamics (CFD) modeling meth”, *Journal of Modern Transportation*, vol.1, № 1, pp. 58-67, 2011.
14. T.R. Gopalakrishnan Nair, Kavitha Sooda, “Comparison of Genetic Algorithm and Simulated Annealing Technique for Optimal Path Selection in Network Routing”, arXiv: 1001.3920. Available at: <http://arxiv.org/abs/1001.3920> (2010).
15. Konstantinos Ampountolas, Nan Zheng, Nikolas Geroliminis, “Macroscopic modelling and robust control of bi-modal multi-region urban road networks”, *Transportation Research Part B: Methodological*, vol.104, P.616–637, 2017.
16. “Cybern.ru » Dijkstra's algorithm (implementation in Java)”, Available: www.cybern.ru/algorithm-dejkstry-realizaciya-na-java.html.

Богута Денис Геннадійович – аспірант кафедри комп’ютерних технологій; Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця-21, вул. 600-річчя, 21, 21021; e-mail: d.boguto@donnu.edu.ua; ORCID: 0000-0003-0367-0788.

Комаров Василь Федорович – старший науковий співробітник кафедри радіофізики та кібербезпеки; Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця-21, вул. 600-річчя, 21, 21021; e-mail: v.komarov@donnu.edu.ua; ORCID:0000-0002-8797.

Ніколюк Петро Карпович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри комп’ютерних технологій; Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця-21, вул. 600-річчя, 21, 21021; e-mail: nikolyuk54@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0286-297X.

Ніколюк Павло Петрович – аспірант кафедри інформаційних систем та технологій; Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця-21, вул. Хмельницьке шосе,95, 21021; e-mail: pashanikoluk@gmail.com; ORCID:0000-0003-0490-0420.

УДК 539.3

Дослідження поведінки узагальнених переміщень, отриманих із використанням теорії $\{m,n\}$ -апроксимації

І.П. Боков, Н.С. Бондаренко, О.О. Стрельнікова

*Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків,**61046, Україна**e-mail: estrel@ipmach.kharkov.ua*

Розглядається зосереджений силовий вплив на трансверсально-ізотропну пластину. Тривимірні рівняння теорії пружності зведені до двовимірних рівнянь за допомогою розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра. Обрана теорія $\{m,n\}$ -апроксимації є найбільш придатною для отримання двовимірних рівнянь теорії пружності, оскільки вона не базується на жодних гіпотезах. Для розв'язання поставленої задачі використаний метод фундаментальних розв'язків. Досліджено поведінку переміщень, отриманих на базі узагальненої теорії $\{m,n\}$ -апроксимації, в залежності від пружних сталих трансверсально-ізотропного матеріалу.

Ключові слова: теорія $\{m,n\}$ -апроксимації, трансверсально-ізотропна пластина, зосереджений силовий вплив, узагальнені переміщення.

A concentrated force action on a transversely-isotropic plate is considered. Three-dimensional equations of the elasticity theory are reduced to the two-dimensional ones by expanding unknown functions into Fourier series of Legendre polynomials. The chosen $\{m,n\}$ -approximation theory is the most suitable for obtaining two-dimensional equations of the elasticity theory, because it is not based on any hypotheses. Also, this approach allows us to consider not only thin plates, but plates of medium and large thickness. The accuracy of the solutions obtained depends on the number of terms that are retained in the expansions of the given and unknown functions. Obtained equations using this approach take into account all the components of the stress tensor, including the transverse shear and normal stresses. Since the classical theory of Kirchhoff-Love doesn't take account of these stresses, the study on the basis of refined theories of stress-strain state of transversely isotropic plates under the action of concentrated force effects is an important scientific and technical problem. The fundamental solution of obtained equations results using a two-dimensional Fourier integral transform and inverse treatment techniques, built with the help of a special G-function. This method allows reducing the system of resolving differential equations for statics of flat plates and shells to a system of algebraic equations. After that, the inverse Fourier transform restores the fundamental solution. The work was carried out numerical studies that demonstrate behavior of displacements based on the refined $\{m,n\}$ -approximation theory, depending on the elastic constants of transversely isotropic material. Further analysis of the stress-strain state of plates on the basis of the generalized theory of $\{m,n\}$ -approximation is analyzed. The results play a decisive role in the study of boundary value problems in the mechanics of thin-walled elements of constructions, including under the influence of concentrated and local diverse forces.

Keywords: theory of $\{m,n\}$ -approximation, transversely-isotropic plate, concentrated force action, generalized displacements.

1 Вступ

В машинобудуванні, аерокосмічній техніці, суднобудуванні тощо широко використовуються тонкостінні елементи конструкцій. Удосконалення існуючих конструкцій, зростає використання нових матеріалів, які мають різку анізотропію пружних властивостей, вимагає застосування уточнених теорій для описання процесу їх деформування в умовах як статичного, так і динамічного навантаження. Особливого значення набувають дослідження пружно-деформованого стану конструкцій за дії зосередженого силового навантаження. Основна особливість сучасного етапу розвитку механіки пластинкових та оболонкових конструкцій полягає в переході від класичних теорій до узагальнених, які мають високу точність і універсальність.

Таким чином дослідження поведінки переміщень, отриманих за допомогою узагальненої теорії $\{m,n\}$ -апроксимації, має велике наукове і практичне значення.

Одним із способів отримання двовимірних рівнянь є застосування розвинених шуканих функцій у ряди за поперечною координатою [1-4]. Це, зокрема, степеневі ряди і розвинення за системами ортогональних поліномів. Виведення двовимірних рівнянь на основі розвинення шуканих функцій у степеневі ряди дає можливість одержати більш точні результати, однак розв'язання в цьому випадку стає складнішим. Це призводить до того, що в цих розвиненнях можливе врахування тільки кількох перших членів.

Використання узагальнених теорій наведено у роботах [5-10]. У публікаціях [5-7] на базі двовимірних узагальнених теорій авторами запропоновані постановки і методи розв'язання задач, проведені чисельні дослідження і подальший аналіз отриманих результатів.

Публікації [8-10] присвячені побудові і дослідженню фундаментальних розв'язків, отриманих за допомогою узагальненої теорії $\{m,n\}$ -апроксимації.

2 Постановка задачі

Розглянемо трансверсально-ізотропну пластину товщини $2h$ у прямокутній декартовій системі координат x, y, z . На пластину діє зосереджена сила, прикладена на початку координат.

У випадку $\{1,0\}$ -апроксимації компоненти вектора переміщень і тензора напружень мають таке подання [1]:

$$\begin{aligned} u_x &= uP_0(z) + \gamma_x h P_1(z), & u_y &= vP_0(z) + \gamma_y h P_1(z), & u_z &= w_0 P_0(z), \\ \sigma_x &= \frac{N_x}{2h} P_0(z) + \frac{3M_x}{2h^2} P_1(z) \quad (x \rightarrow y), & \tau_{xy} &= \frac{S}{2h} P_0(z) + \frac{3H}{2h^2} P_1(z), \\ \tau_{xz} &= \frac{Q_x}{2h} \{P_0(z) - P_2(z)\} \quad (x \rightarrow y), & \sigma_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

де u, v, w_0 – аналоги переміщень точок серединної поверхні пластини; γ_x, γ_y – аналоги кутів повороту нормалі; N_x, N_y, S – аналоги мембранних зусиль; M_x, M_y, H – аналоги згинного і крутного моментів; Q_x, Q_y – аналоги перерізуючих сил; $P_k(z)$ – поліноми Лежандра.

Компоненти вектора об'ємної сили представляються таким чином [1]

$$F_x = \frac{q_x}{2h} P_0(z) + \frac{3m_x}{2h^2} P_1(z) \quad (x \rightarrow y), \quad F_z = \frac{q_z}{2h} P_0(z). \quad (2.2)$$

Рівняння статки у випадку $\{1,0\}$ -апроксимації для трансверсально-ізотропних пластин, записані у безрозмірній системі координат ($x_1 = x/h, x_2 = y/h, x_3 = z/h$), містять [1]:

– рівняння закону Гука

$$\begin{aligned} N_1 &= B_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} \right), & N_2 &= B_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), & S &= \frac{1-\nu}{2} B_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right), \\ H &= \frac{1-\nu}{2} D_0 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right), & M_1 &= D_0 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right), & M_2 &= D_0 \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right), \\ Q_j &= \Lambda_0 \left(\gamma_j + \frac{\partial w_0}{\partial x_j} \right) \quad (j=1,2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

де

$$B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1-\nu^2}, \quad \Lambda_0 = \frac{5}{3} \frac{1}{E/G'},$$

E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона у площині ізотропії; G' – модуль зсуву у площинах, перпендикулярних до площини ізотропії; E/G' – параметр зсувної піддатливості;

– рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} + q_1 &= 0, & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S}{\partial x_1} + q_2 &= 0, & \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_1 + m_1 &= 0, \\ \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_1} - Q_2 + m_2 &= 0, & \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де $m_i = m_i^* \delta(x_1, x_2)$, $q_j = q_j^* \delta(x_1, x_2)$ ($i=1,2; j=1,3$); m_i^*, q_j^* – сталі; $\delta(x_1, x_2)$ – двовимірний дельта-функція Дірака [11].

Зауважимо, що система рівнянь, що описує безмоментний пружний стан у випадку $\{1,0\}$ -апроксимації (перші три рівняння (2.3), перші два рівняння (2.4)), аналогічна системі рівнянь, яка описує плоский пружний стан ізотропних пластин на базі класичної теорії [12].

У випадку $\{1,2\}$ -апроксимації подання компонент вектора переміщень u_x , u_y , тензора напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} і компонент вектора об'ємної сили F_x , F_y має такий же вигляд, як і у випадку $\{1,0\}$ -апроксимації (формули (2.1), (2.2)), а інші компоненти визначаються так [1]:

$$u_z = w_0 P_0(z) + w_1 P_1(z) + w_2 P_2(z), \quad F_z = \frac{q_{z0}}{2h} P_0(z) + \frac{3q_{z1}}{2h} P_1(z) + \frac{5q_{z2}}{2h} P_2(z),$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_{x0}}{2h} \{P_0(z) - P_4(z)\} + \frac{3Q_{x1}}{2h} \{P_1(z) - P_3(z)\} + \frac{5Q_{x2}}{2h} \{P_2(z) - P_4(z)\} \quad (x \rightarrow y),$$

$$\sigma_z = \frac{R_0}{2h} \{P_0(z) - P_2(z)\} + \frac{3R_1}{2h} \{P_1(z) - P_3(z)\},$$

де w_i ($i = \overline{0,2}$) – узагальнені переміщення пластини, з яких w_0 – аналог переміщення точок серединної поверхні; Q_{ij} ($i = x, y; j = \overline{0,2}$), R_j ($j = 0,1$) – узагальнені зусилля, з яких Q_{x0} , Q_{y0} – аналоги перерізуючих сил.

Система рівнянь для трансверсально-ізотропних пластин на базі теорії $\{1,2\}$ -апроксимації, записана у безрозмірній системі координат, містить [1]

– рівняння закону Гука

$$N_1 = B_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + \lambda_0 R_0, \quad N_2 = B_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \lambda_0 R_0,$$

$$S = \frac{1-\nu}{2} B_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right), \quad H = \frac{1-\nu}{2} D_0 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right),$$

$$M_1 = D_0 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right) + \lambda_0 R_1, \quad M_2 = D_0 \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right) + \lambda_0 R_1,$$

$$Q_{j0} = \Lambda_0 \left[\gamma_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(w_0 - \frac{w_2}{14} \right) \right], \quad Q_{j1} = \Lambda'_0 \frac{\partial w_1}{\partial x_j},$$

$$Q_{j2} = -\frac{\Lambda_0}{14} \left[\gamma_j + \frac{\partial}{\partial x_j} (w_0 - 2w_2) \right] \quad (j = 1, 2),$$

$$R_0 = \Omega'_0 \left[w_1 + \lambda_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right], \quad R_1 = \Omega_0 \left[w_2 + \frac{\lambda_0}{3} \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right) \right], \quad (2.5)$$

де

$$\Lambda'_0 = \frac{3}{4} \Lambda_0 = \frac{7}{5} \frac{1}{E/G'}, \quad \lambda_0 = \frac{\nu'}{1-\nu} E^*,$$

$$\Omega'_0 = \frac{25}{21} \Omega_0 = \frac{5}{3} \frac{(1-\nu)/E^*}{1-\nu-2(\nu')^2 E^*}, \quad E^* = \frac{E}{E'}$$

E' , ν' – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона для напрямку, перпендикулярного до площини ізоотропії;

– рівняння рівноваги

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} + q_1 = 0, \quad \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S}{\partial x_1} + q_2 = 0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_{10} + m_1 = 0,$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_1} - Q_{20} + m_2 = 0, \quad \frac{\partial Q_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{20}}{\partial x_2} + q_4 = 0,$$

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{21}}{\partial x_2} - R_0 + q_3 = 0, \quad \frac{\partial Q_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} - 3R_1 + q_5 = 0, \quad (2.6)$$

де $m_i = m_i^* \delta(x_1, x_2)$, $q_j = q_j^* \delta(x_1, x_2)$ ($i = 1, 2; j = \overline{1,5}$); m_i^* , q_j^* – сталі.

Моменти у співвідношеннях (2.3)-(2.6) визначені з точністю до величини Eh^2 , а узагальнені зусилля – до Eh .

3 Узагальнені переміщення для трансверсально-ізотропної пластини

Отримаємо узагальнені переміщення для кожної апроксимації. Розв'язання будемо проводити за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є [13] та методики обертання, що ґрунтується на використанні спеціальної G -функції [14].

3.1 {1,0}-апроксимація

Підставимо співвідношення закону Гука (2.3) в рівняння рівноваги (2.4) і застосуємо перетворення Фур'є до отриманої системи:

$$\begin{aligned} \left(D_0 \xi_1^2 + \frac{1-\nu}{2} D_0 \xi_2^2 + \Lambda_0 \right) \tilde{\gamma}_1 + \frac{1+\nu}{2} D_0 \xi_1 \xi_2 \tilde{\gamma}_2 - \Lambda_0 i \xi_1 \tilde{w}_0 &= \frac{m_1^*}{2\pi}, \\ \frac{1+\nu}{2} D_0 \xi_1 \xi_2 \tilde{\gamma}_1 + \left(D_0 \xi_2^2 + \frac{1-\nu}{2} D_0 \xi_1^2 + \Lambda_0 \right) \tilde{\gamma}_2 - \Lambda_0 i \xi_2 \tilde{w}_0 &= \frac{m_2^*}{2\pi}, \\ \Lambda_0 i \xi_1 \tilde{\gamma}_1 + \Lambda_0 i \xi_2 \tilde{\gamma}_2 + \Lambda_0 p^2 \tilde{w}_0 &= \frac{q_3^*}{2\pi}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

де $p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$; (ξ_1, ξ_2) – координати точки у просторі трансформант.

Після розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.1) отримаємо трансформанти узагальнених переміщень

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{m_1^*}{D_0} \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) + 3(1+\nu)m_1^* \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1, a) + \frac{q_3^*}{D_0} \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_2^*}{D_0} \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) - 3(1+\nu)m_2^* \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, a) \right], \\ \tilde{\gamma}_2 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{m_2^*}{D_0} \tilde{\Phi}_1(\xi_2, \xi_1) + 3(1+\nu)m_2^* \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2, a) + \frac{q_3^*}{D_0} \tilde{\Phi}_3(\xi_2, \xi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_1^*}{D_0} \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) - 3(1+\nu)m_1^* \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, a) \right], \\ \tilde{w}_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{m_1^*}{D_0} \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) - \frac{m_2^*}{D_0} \tilde{\Phi}_3(\xi_2, \xi_1) + \frac{q_3^*}{D_0} \tilde{\Phi}_6(\xi_1, \xi_2) + \frac{q_3^*}{\Lambda_0} \tilde{\Phi}_7(\xi_1, \xi_2) \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1^2}{p^4}, & \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2, c) &= \frac{\xi_1^2}{p^2(p^2 + c^2)}, & \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{i\xi_1}{p^4}, \\ \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1 \xi_2}{p^4}, & \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, c) &= \frac{\xi_1 \xi_2}{p^2(p^2 + c^2)}, & \tilde{\Phi}_6(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{p^4}, \\ \tilde{\Phi}_7(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{p^2}; & a^2 &= 3(1+\nu)\Lambda_0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Застосовуючи зворотне перетворення Фур'є до співвідношень (3.2) та (3.3) отримаємо оригінали узагальнених переміщень

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{m_1^*}{D_0} \Phi_1(x_1, x_2) + 3(1+\nu)m_1^* \Phi_2(x_2, x_1, a) + \frac{q_3^*}{D_0} \Phi_3(x_1, x_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_2^*}{D_0} \Phi_4(x_1, x_2) - 3(1+\nu)m_2^* \Phi_5(x_1, x_2, a) \right], \end{aligned}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{m_2^*}{D_0} \Phi_1(x_2, x_1) + 3(1+\nu)m_2^* \Phi_2(x_1, x_2, a) + \frac{q_3^*}{D_0} \Phi_3(x_2, x_1) + \frac{m_1^*}{D_0} \Phi_4(x_1, x_2) - 3(1+\nu)m_1^* \Phi_5(x_1, x_2, a) \right],$$

$$w_0 = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{m_1^*}{D_0} \Phi_3(x_1, x_2) - \frac{m_2^*}{D_0} \Phi_3(x_2, x_1) + \frac{q_3^*}{D_0} \Phi_6(x_1, x_2) + \frac{q_3^*}{\Lambda_0} \Phi_7(x_1, x_2) \right], \quad (3.4)$$

де

$$\Phi_1(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} - \frac{1}{4} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\Phi_2(x_1, x_2, c) = \frac{1}{2} \left[G_{0,0} \left(c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) + \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1} \left(c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \right],$$

$$\Phi_3(x_1, x_2) = \frac{x_1}{4} \left(1 - 2 \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} \right), \quad \Phi_4(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\Phi_5(x_1, x_2, c) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1} \left(c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right), \quad \Phi_6(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} \left(\ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} - 1 \right),$$

$$\Phi_7(x_1, x_2) = -\ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2}.$$

3.2 {1,2}-апроксимація

При підстановці виразів (2.5) у (2.6) із застосуванням перетворення Фур'є отримаємо

$$\left(A_1 \xi_1^2 + \frac{1-\nu}{2} D_0 \xi_2^2 + \Lambda_0 \right) \tilde{\gamma}_1 + A_2 \xi_1 \xi_2 \tilde{\gamma}_2 - \Lambda_0 i \xi_1 \tilde{w}_0 + A_3 i \xi_1 \tilde{w}_2 = \frac{m_1^*}{2\pi},$$

$$A_2 \xi_1 \xi_2 \tilde{\gamma}_1 + \left(\frac{1-\nu}{2} D_0 \xi_1^2 + A_1 \xi_2^2 + \Lambda_0 \right) \tilde{\gamma}_2 - \Lambda_0 i \xi_2 \tilde{w}_0 + A_3 i \xi_2 \tilde{w}_2 = \frac{m_2^*}{2\pi},$$

$$\left(A \xi_1^2 + \frac{1-\nu}{2} B_0 \xi_2^2 \right) \tilde{u} + A_0 \xi_1 \xi_2 \tilde{v} + \lambda_0 \Omega'_0 i \xi_1 \tilde{w}_1 = \frac{q_1^*}{2\pi},$$

$$A_0 \xi_1 \xi_2 \tilde{u} + \left(\frac{1-\nu}{2} B_0 \xi_1^2 + A \xi_2^2 \right) \tilde{v} + \lambda_0 \Omega'_0 i \xi_2 \tilde{w}_1 = \frac{q_2^*}{2\pi},$$

$$-\lambda_0 \Omega'_0 i (\xi_1 \tilde{u} + \xi_2 \tilde{v}) + (\Omega'_0 + \Lambda'_0 p^2) \tilde{w}_1 = \frac{q_3^*}{2\pi},$$

$$\Lambda_0 i (\xi_1 \tilde{\gamma}_1 + \xi_2 \tilde{\gamma}_2) + \Lambda_0 p^2 \tilde{w}_0 - \frac{1}{14} \Lambda_0 p^2 \tilde{w}_2 = \frac{q_4^*}{2\pi},$$

$$-A_3 i (\xi_1 \tilde{\gamma}_1 + \xi_2 \tilde{\gamma}_2) - \frac{1}{14} \Lambda_0 p^2 \tilde{w}_0 + \left(3\Omega_0 + \frac{1}{7} \Lambda_0 p^2 \right) \tilde{w}_2 = \frac{q_5^*}{2\pi}, \quad (3.5)$$

де $A = B_0 + \lambda_0^2 \Omega'_0$, $A_0 = A + \frac{\nu-1}{2} B_0$, $A_1 = D_0 + \frac{1}{3} \lambda_0^2 \Omega_0$, $A_2 = A_1 + \frac{\nu-1}{2} D_0$, $A_3 = \lambda_0 \Omega_0 + \frac{1}{14} \Lambda_0$.

Система (3.5) розпадається на дві незалежні системи, перша з яких описує безмоментний пружний стан, а друга – стан згину. Розв'язки цих систем мають такий вигляд:

а) для безмоментного пружного стану

$$\begin{aligned}
 \tilde{u} &= \frac{1}{2\pi} \left[q_1^* \frac{1}{A} \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2, a_0) + q_2^* \frac{1}{A} \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, a_0) + q_1^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_8(\xi_1, \xi_2, a_0) + \right. \\
 &+ q_2^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2, a_0) - q_3^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, a_0) + q_1^* (1+\nu) \tilde{\Phi}_1(\xi_2, \xi_1) - \\
 &\quad \left. - q_2^* (1+\nu) \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) \right], \\
 \tilde{v} &= \frac{1}{2\pi} \left[q_1^* \frac{1}{A} \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, a_0) + q_2^* \frac{1}{A} \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1, a_0) + q_1^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2, a_0) + \right. \\
 &+ q_2^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_8(\xi_2, \xi_1, a_0) - q_3^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_2, \xi_1, a_0) - q_1^* (1+\nu) \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) + \\
 &\quad \left. + q_2^* (1+\nu) \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) \right], \\
 \tilde{w}_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[q_1^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, a_0) + q_2^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_2, \xi_1, a_0) + \right. \\
 &\quad \left. + q_3^* \frac{1}{\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_{11}(\xi_1, \xi_2, a_0) \right], \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}_8(\xi_1, \xi_2, c) &= \frac{\xi_1^2}{p^4(p^2 + c^2)}, \quad \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2, c) = \frac{\xi_1 \xi_2}{p^4(p^2 + c^2)}, \\
 \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, c) &= \frac{i \xi_1}{p^2(p^2 + c^2)}, \quad \tilde{\Phi}_{11}(\xi_1, \xi_2, c) = \frac{1}{p^2 + c^2}; \quad a_0^2 = \frac{B_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0}; \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

б) для стану згину

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_1 &= \frac{1}{2\pi D_0} \left[m_1^* a_1^2 \tilde{\Phi}_8(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_2^* a_1^2 \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2, a_1) - q_5^* \frac{\lambda_0 a_1^2}{3} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, a_1) + \right. \\
 &+ q_4^* \frac{D_0}{A_1} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_1^* \frac{D_0}{A_1} \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_2^* \frac{D_0}{A_1} \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, a_1) + \\
 &\quad \left. + q_4^* a_1^2 \tilde{\Phi}_{12}(\xi_1, \xi_2) - m_1^* \frac{2}{\nu-1} \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1, b_1) + m_2^* \frac{2}{\nu-1} \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, b_1) \right], \\
 \tilde{\gamma}_2 &= \frac{1}{2\pi D_0} \left[m_1^* a_1^2 \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_2^* a_1^2 \tilde{\Phi}_8(\xi_2, \xi_1, a_1) - q_5^* \frac{\lambda_0 a_1^2}{3} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_2, \xi_1, a_1) + \right. \\
 &+ q_4^* \frac{D_0}{A_1} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_2, \xi_1, a_1) + m_1^* \frac{D_0}{A_1} \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_2^* \frac{D_0}{A_1} \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1, a_1) + \\
 &\quad \left. + q_4^* a_1^2 \tilde{\Phi}_{12}(\xi_2, \xi_1) + m_1^* \frac{2}{\nu-1} \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, b_1) - m_2^* \frac{2}{\nu-1} \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2, b_1) \right], \\
 \tilde{w}_0 &= \frac{1}{2\pi D_0} \left[m_1^* \left(\frac{\lambda_0 a_1^2}{42} - \frac{D_0}{A_1} \right) \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_2^* \left(\frac{\lambda_0 a_1^2}{42} - \frac{D_0}{A_1} \right) \tilde{\Phi}_{10}(\xi_2, \xi_1, a_1) - \right. \\
 &\quad - m_1^* a_1^2 \tilde{\Phi}_{12}(\xi_1, \xi_2) - m_2^* a_1^2 \tilde{\Phi}_{12}(\xi_2, \xi_1) + q_4^* \frac{D_0}{\Lambda_0} \tilde{\Phi}_{11}(\xi_1, \xi_2, a_1) + \\
 &\quad \left. + q_4^* \left(\frac{D_0}{A_1} + \frac{D_0 a_1^2}{\Lambda_0} - \frac{\lambda_0 a_1^2}{42} \right) \tilde{\Phi}_{13}(\xi_1, \xi_2) + q_4^* a_1^2 \tilde{\Phi}_{14}(\xi_1, \xi_2) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_5^* \frac{a_1^2}{42} \left(\frac{\lambda_0^2}{3} + \frac{D_0}{\Omega_0} \right) \tilde{\Phi}_{11}(\xi_1, \xi_2, a_1) - q_5^* \frac{\lambda_0 a_1^2}{3} \tilde{\Phi}_{13}(\xi_1, \xi_2) \Big], \\
\tilde{w}_2 = & \frac{\lambda_0 a_1^2}{6\pi D_0} \left[m_1^* \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_2^* \tilde{\Phi}_{10}(\xi_2, \xi_1, a_1) - q_4^* \tilde{\Phi}_{13}(\xi_1, \xi_2) + \right. \\
& \left. + q_5^* \frac{A_1}{\lambda_0 \Omega_0} \tilde{\Phi}_{11}(\xi_1, \xi_2, a_1) \right], \tag{3.8}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_{12}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{i\xi_1}{p^4(p^2 + a_1^2)}, \quad \tilde{\Phi}_{13}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{p^2(p^2 + a_1^2)}, \\
\tilde{\Phi}_{14}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{p^4(p^2 + a_1^2)}; \quad a_1^2 = \frac{196D_0\Omega_0}{9A_1\Lambda_0}, \quad b_1^2 = \frac{2\Lambda_0}{D_0(1-\nu)}. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Для знаходження оригіналів узагальнених переміщень застосуємо зворотнє перетворення Фур'є до виразів (3.6) – (3.9), отримаємо

а) безмоментний пружний стан

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2\pi} \left[q_1^* \frac{1}{A} \Phi_2(x_1, x_2, a_0) + q_2^* \frac{1}{A} \Phi_5(x_1, x_2, a_0) + q_1^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_8(x_1, x_2, a_0) + \right. \\
& + q_2^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_9(x_1, x_2, a_0) - q_3^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_{10}(x_1, x_2, a_0) + q_1^*(1+\nu) \Phi_1(x_2, x_1) - \\
& \left. - q_2^*(1+\nu) \Phi_4(x_1, x_2) \right], \\
v &= \frac{1}{2\pi} \left[q_1^* \frac{1}{A} \Phi_5(x_1, x_2, a_0) + q_2^* \frac{1}{A} \Phi_2(x_2, x_1, a_0) + q_1^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_9(x_1, x_2, a_0) + \right. \\
& + q_2^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_8(x_2, x_1, a_0) - q_3^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_{10}(x_2, x_1, a_0) - q_1^*(1+\nu) \Phi_4(x_1, x_2) + \\
& \left. + q_2^*(1+\nu) \Phi_1(x_1, x_2) \right], \\
w_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[q_1^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_{10}(x_1, x_2, a_0) + q_2^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_{10}(x_2, x_1, a_0) + \right. \\
& \left. + q_3^* \frac{1}{\Lambda'_0} \Phi_{11}(x_1, x_2, a_0) \right], \tag{3.10}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\Phi_8(x_1, x_2, c) &= -\frac{1}{2c^2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} - \frac{1}{2c^2} G_{0,0} \left(c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) - \\
& - \frac{x_1^2 - x_2^2}{8} G_{2,0} \left(c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right), \\
\Phi_9(x_1, x_2, c) &= -\frac{x_1 x_2}{4} G_{2,0} \left(c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right), \quad \Phi_{10}(x_1, x_2, c) = -\frac{x_1}{2} G_{1,0} \left(c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right), \\
\Phi_{11}(x_1, x_2, c) &= G_{0,0} \left(c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right);
\end{aligned}$$

б) стан згину

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{2\pi D_0} \left[m_1^* a_1^2 \Phi_8(x_1, x_2, a_1) + m_2^* a_1^2 \Phi_9(x_1, x_2, a_1) - q_5^* \frac{\lambda_0 a_1^2}{3} \Phi_{10}(x_1, x_2, a_1) + \right. \\
& \left. + q_4^* \frac{D_0}{A_1} \Phi_{10}(x_1, x_2, a_1) + m_1^* \frac{D_0}{A_1} \Phi_2(x_1, x_2, a_1) + m_2^* \frac{D_0}{A_1} \Phi_5(x_1, x_2, a_1) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_4^* a_1^2 \Phi_{12}(x_1, x_2) - m_1^* \frac{2}{\nu-1} \Phi_2(x_2, x_1, b_1) + m_2^* \frac{2}{\nu-1} \Phi_5(x_1, x_2, b_1) \Big], \\
\gamma_2 = & \frac{1}{2\pi D_0} \left[m_1^* a_1^2 \Phi_9(x_1, x_2, a_1) + m_2^* a_1^2 \Phi_8(x_2, x_1, a_1) - q_5^* \frac{\lambda_0 a_1^2}{3} \Phi_{10}(x_2, x_1, a_1) + \right. \\
& + q_4^* \frac{D_0}{A_1} \Phi_{10}(x_2, x_1, a_1) + m_1^* \frac{D_0}{A_1} \Phi_5(x_1, x_2, a_1) + m_2^* \frac{D_0}{A_1} \Phi_2(x_2, x_1, a_1) + \\
& \left. + q_4^* a_1^2 \Phi_{12}(x_2, x_1) + m_1^* \frac{2}{\nu-1} \Phi_5(x_1, x_2, b_1) - m_2^* \frac{2}{\nu-1} \Phi_2(x_1, x_2, b_1) \right], \\
w_0 = & \frac{1}{2\pi D_0} \left[m_1^* \left(\frac{\lambda_0 a_1^2}{42} - \frac{D_0}{A_1} \right) \Phi_{10}(x_1, x_2, a_1) + m_2^* \left(\frac{\lambda_0 a_1^2}{42} - \frac{D_0}{A_1} \right) \Phi_{10}(x_2, x_1, a_1) - \right. \\
& - m_1^* a_1^2 \Phi_{12}(x_1, x_2) - m_2^* a_1^2 \Phi_{12}(x_2, x_1) + q_4^* \frac{D_0}{\Lambda_0} \Phi_{11}(x_1, x_2, a_1) + \\
& + q_4^* \left(\frac{D_0}{A_1} + \frac{D_0 a_1^2}{\Lambda_0} - \frac{\lambda_0 a_1^2}{42} \right) \Phi_{13}(x_1, x_2) + q_4^* a_1^2 \Phi_{14}(x_1, x_2) + \\
& \left. + q_5^* \frac{a_1^2}{42} \left(\frac{\lambda_0^2}{3} + \frac{D_0}{\Omega_0} \right) \Phi_{11}(x_1, x_2, a_1) - q_5^* \frac{\lambda_0 a_1^2}{3} \Phi_{13}(x_1, x_2) \right], \\
w_2 = & \frac{\lambda_0 a_1^2}{6\pi D_0} \left[m_1^* \Phi_{10}(x_1, x_2, a_1) + m_2^* \Phi_{10}(x_2, x_1, a_1) - q_4^* \Phi_{13}(x_1, x_2) + \right. \\
& \left. + q_5^* \frac{A_1}{\lambda_0 \Omega_0} \Phi_{11}(x_1, x_2, a_1) \right], \tag{3.11}
\end{aligned}$$

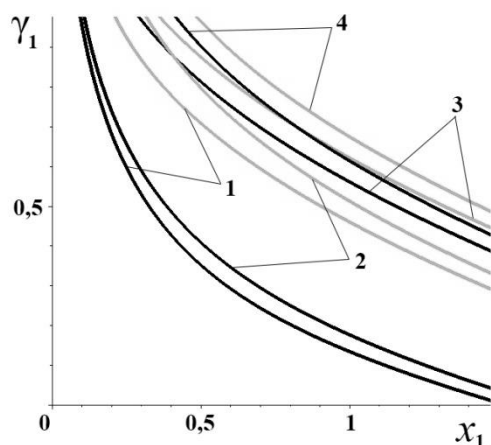
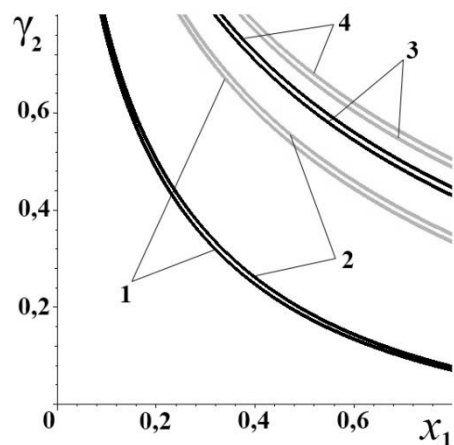
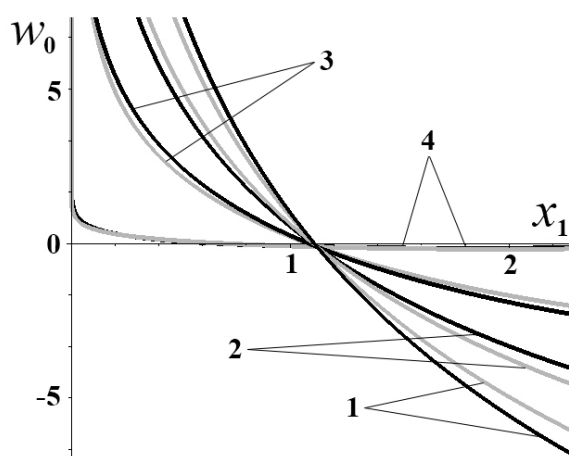
де

$$\begin{aligned}
\Phi_{12}(x_1, x_2) &= \frac{x_1}{4a_1^2} \left[1 - 2 \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} + 2G_{1,0} \left(a_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \right], \\
\Phi_{13}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{a_1^2} \left[\ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} + G_{0,0} \left(a_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \right], \\
\Phi_{14}(x_1, x_2) &= \frac{1}{a_1^4} \left[\ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} + \frac{a_1^2 (x_1^2 + x_2^2)}{4} \left(\ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} - 1 \right) + G_{0,0} \left(a_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

4 Аналіз отриманих результатів

Для дослідження поведінки узагальнених переміщень зафіксовано такі значення коефіцієнтів: $m_1^* = m_2^* = q_1^* = q_2^* = q_3^* = q_4^* = q_5^* = 1$.

Чисельні дослідження проведені для трансверсально-ізотропної пластини ($E^* = 5$; $\nu = 0,3$; $\nu' = 0,07$). Графіки демонструють поведінку узагальнених переміщень для таких значень параметра зсувної піддатливості E/G' : 2,6; 40; 80; 120. Крива 1 відповідає значенню 2,6, а криві 2, 3 і 4 – значенням 40, 80 і 120 відповідно. На всіх рисунках чорні криві відображають узагальнені переміщення, отримані із використанням теорії {1,0}-апроксимації, а сірі – із використанням теорії {1,2}-апроксимації.

Рис.1. Узагальнене переміщення γ_1 Рис.2. Узагальнене переміщення γ_2 Рис.3. Узагальнене переміщення w_0

Дані, представлені на рис. 1–3, свідчать про те, що узагальнені переміщення γ_1 , γ_2 та w_0 при збільшенні значення параметра зсувної піддатливості E/G' зростають. Також графіки дозволили оцінити характер уточнення, внесеного утриманням більшої кількості членів рядів Фур'є за поліномами Лежандра. Значення узагальнених переміщень γ_1 та γ_2 , отриманих із використанням теорії $\{1,2\}$ -апроксимації, на 62 % більше ніж значення переміщень, отриманих за допомогою рівнянь $\{1,0\}$ -апроксимації, при значеннях параметра зсувної піддатливості E/G' , що дорівнюють 2,6; 40. Але при $E/G' = 80$ і $E/G' = 120$ γ_1 та γ_2 відрізняються незначно. Узагальнене переміщення w_0 , отримане на базі $\{1,0\}$ - та $\{1,2\}$ -апроксимації, не має значної відмінності при всіх розглянутих значеннях параметра зсувної піддатливості E/G' .

5 Висновки

Розглянуто задачу про дію на трансверсально-ізотропну пластину зосередженого силового навантаження. Для розв'язання даної задачі використано теорію $\{m,n\}$ -апроксимації, яка для отримання двовимірних рівнянь теорії пружності використовує метод розвинення функцій у ряди Фур'є за поліномами Лежандра, а також метод фундаментальних розв'язків.

Оригінали узагальнених переміщень знайдено за допомогою перетворення Фур'є та методики обертання спеціальної G -функції. Проаналізовано вплив пружних сталей трансверсально-ізотропного матеріалу на узагальнені переміщення.

У перспективі можливо вивчати пружно-деформований стан пластин на базі узагальненої теорії $\{m,n\}$ -апроксимації для випадків утримання більшої кількості членів розвинень шуканих функцій у напрямках, нормальних до площини ізотропії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – К. : Наук. думка, 1982. – 296 с.
2. Smetankina N. V. A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment / N. V. Smetankina, A. N. Shupikov, S. Yu. Sotrikhin, V. G. Yareschenko // *J. of Applied Mechanics*. – 2008. – P. 051004-1–051004-9.
3. Chen W. A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories / W. Chen, Z. Wu. // *Recent patents on mechanical engineering*. – 2008. – P. 29–44.
4. Максимчук О. В. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. / О. В. Максимчук, Р. М. Махніцький, Н. М. Щербина. – Львів : Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, 2005. – 352 с.
5. Ugrimov S. V. Layered orthotropic plates. Generalized theory / S. V. Ugrimov, A. N. Shupikov // *Composite structures*. – 2015. – P. 224–235.
6. Угримов С. В. Моделювання напружено-деформованого стану шаруватих ортотропних пластин на пружній основі / С. В. Угримов, Ю. М. Тормосов, В. А. Куценко, І. В. Лебединец // *Восточно-европейский журнал передовых технологий*. – 2014. – Вып. 71, № 5/7. – С. 4–9.
7. Сметанкіна Н. В. Математичне моделювання процесу нестационарного деформування багатшарового оскління при розподілених та локалізованих силових навантаженнях / Н. В. Сметанкіна, О. М. Шупіков, С. В. Угримов. // *Вестник Херсонского национального технического университета*. – 2016. – С. 408–413.
8. Vokov I. Analysis of fundamental solutions to the equations of statics constructed for transversal-isotropic plates / I. Vokov, N. Bondarenko, E. Strelnikova // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2017. – 2/7 (86). – P. 4–12.
9. Боков И. П. Построение фундаментального решения уравнений статики $\{1,2\}$ -аппроксимации безмоментного напряженного состояния для трансверсально-изотропных пластин / И. П. Боков, Н. С. Бондаренко, Е. А. Стрельникова // *Scientific Journal «ScienceRise»*. – 2016. – № 7/2 (24). – С. 41–48.
10. Vokov I. P. Investigation of stress-strain state of transversely isotropic plates under bending using equation of statics $\{1,2\}$ -approximation / I. P. Vokov, N. S. Bondarenko, E. A. Strelnikova // *Scientific Journal «EUREKA: Physics and Engineering»*. – 2016. – Vol. 5 (5). – P. 58–66.
11. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 280 с.
12. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории тонких упругих оболочек: дис. доктора физ.-мат. наук: 01.02.04 / Шевченко Владимир Павлович. – Казань, 1982. – 332 с.
13. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М. : Издательство иностранной литературы, 1955. – 668 с.
14. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебн. пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк : ДонГУ, 1980. – 128 с.

REFERENCES

1. B. L. Pelekh and V. A. Lazko, *Laminated anisotropic plates and shells with stress concentrators*. Kyiv, K.: Science thought, 1982.
2. N. V. Smetankina, A. N. Shupikov, S. Yu. Sotrikhin, and V. G. Yareschenko, “A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment,” *J. of Applied Mechanics*, pp. 1-9, Jul. 2008.
3. W. Chen and Z. Wu, “A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories,” *Recent patents on mechanical engineering*, pp. 29-44, Aug. 2008.
4. O. V. Maksymchuk, R. M. Mazhitsky, and N. M. Shcherbyna, *Mathematical modeling and methods of calculation of thin-walled composite structures*. Lviv, L.: Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics them. Y. S. Pidstryhach, 2005.
5. S. V. Ugrimov and A. N. Shupikov, “Layered orthotropic plates. Generalized theory,” *Composite structures*, pp. 224-235, Oct. 2015.

6. S. V. Ugrimov, Yu. M. Tormosov, V. A. Kutsenko, and I. V. Lebedinets, "Modeling of the stress-strain state of layered orthotropic plates on an elastic basis," *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 71, № 5/7, pp. 4-9, Jul. 2014.
7. N. V. Smetankina, O. M. Shupikov, and S. V. Ugrimov, "Mathematical modeling of the process of non-stationary deformation of multilayer oscillations in distributed and localized power loads," *Bulletin of the Kherson National Technical University*, pp. 408-413, Sep. 2016.
8. I. P. Bokov, N. S. Bondarenko, and E. A. Strelnikova, "Analysis of fundamental solutions to the equations of statics constructed for transversal-isotropic plates," *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 2/7 (86), pp. 4-12, Apr. 2017.
9. I. P. Bokov, N. S. Bondarenko, and E. A. Strelnikova, "Construction of the fundamental solution of statics equations {1,2} -approximation of the momentless stress state for transversally isotropic plates," *Scientific Journal «ScienceRise»*, № 7/2 (24), pp. 41-48, Aug. 2016.
10. I. P. Bokov, N. S. Bondarenko, and E. A. Strelnikova, "Investigation of stress-strain state of transversely isotropic plates under bending using equation of statics {1,2}-approximation," *Scientific Journal «EUREKA: Physics and Engineering»*, vol. 5 (5), pp. 58-66, Sep. 2016.
11. V. S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*. Moscow, M.: Science, 1976.
12. V. P. Shevchenko, "Methods of Fundamental Solutions in the Theory of Thin Elastic Shells," Phys.-Mat.D. dissertation, Mech. Deform. Sol., Kazan, 1982.
13. I. Sneddon, *Fourier Transformations*. Moscow, M.: Foreign Literature Publishing House, 1955.
14. V. K. Khizhnyak and V. P. Shevchenko, *Mixed problems in the theory of plates and shells: textbook. manual*. Donetsk, D.: DonSU, 1980.

Боків Ігор Петрович – аспірант; Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046; e-mail: igr.bokov@gmail.com; ORCID: 0000000291384120.

Бондаренко Наталія Сергіївна – кандидат фізико-математичних наук; e-mail: bondarenko.natalya.sergeevna@gmail.com; ORCID: 0000000152545545.

Стрельнікова Олена Олександрівна – доктор технічних наук; Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046; e-mail: estrel@ipmach.kharkov.ua; ORCID: 0000000307077214.

УДК 004.35: 004.9

Hardware-software complex for psychological and professional diagnostics with the remote control function

N.V. Varlamova, N.G. Styervoyedov

¹V. N. Karazin Kharkiv National University, 6 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

²V. N. Karazin Kharkiv National University, 6 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

e-mail: natess123@gmail.com

Розроблено апаратно-програмний комплекс для вивчення швидкості реакції людини на світлові, кольорні, звукові і тактильні подразники, що є складовою частиною єдиної інформаційно-вимірювальної і керуючої системи прийняття рішень в предметній області, що досліджує професійну придатність і психофізіологічний стан людини. Представлена UML діаграма, що описує поведінку і функціональні можливості користувачів апаратно-програмного комплексу, їх ролі в системі. Описаний набір методик психофізіологічного тестування з принципами реалізації кожної з них. Визначені функціональні можливості комплексу відносно якісної і кількісної діагностики психофізіологічних показників психічного стану, емоційної регуляції або наявності розладів центральної нервової системи. Представлена структурна схема комплексу, в якій детально описані її складові: мікроконтролер, Wi-Fi модуль, програмне забезпечення, виконавчі пристрої та інші. Наведена спрощена архітектура комплексу при роботі з IoT сервісом ThingSpeak з описанням основних компонентів. Розроблене програмне забезпечення дозволяє вимірювати час простої сенсомоторної реакції на світло і звук, час складної сенсомоторної реакції на світло, критичну частоту злиття світлових мигтіння, реакцію вибору, розрізнення, теплінгометрію в різних модифікаціях. Розроблено базу даних експериментів для зберігання і обробки інформації, яка забезпечує зручність вибірки і порівняння отриманих результатів. Для збільшення функціональних можливостей комплексу в його склад введені компоненти, що забезпечують можливість віддаленої автономної роботи з використанням хмарних серверів. Наведена лабораторна модель апаратної частини комплексу. Сформульовані основні переваги реалізації даного комплексу: якісна дистанційна психодіагностика, можливість дистанційного керування пристроями комплексу, зберігання даних на хмарному сервері.

Ключові слова: психофізіологічний стан, професійна придатність, час реакції на подразники, апаратно-програмний комплекс, мікроконтролер, IoT, хмарний сервер.

The software-hardware complex for studying the speed of human response to light, color, sound and tactile stimuli, which is an integral part of a unified information-measuring and control system of decision-making in the area of diagnosing the professional fitness and psychophysiological state of a person has been developed. The simplified system architecture for working with IoT service ThingSpeak is provided. The developed software allows measuring the time of a simple sensorimotor reaction to light and sound, the time of a complex sensorimotor reaction to light, the critical frequency of fusion of light flashing, the choice of reaction, differentiation, teppingmetry in various modifications. The structural scheme of the system, namely, microcontroller, Wi-Fi module, software, executive devices and others has been presented. The database for storing and processing experimental information has been developed. To increase the functionality of the complex the additional components that provide the possibility of remote autonomous work using the cloud server services have been introduced.

Key words: psychophysiological state, professional availability, response time to stimuli, hardware-software complex, microcontroller, IoT, cloud server.

The widespread introduction of robotics and digital technology management is the current mainstream of the society development. But there are the areas where modern IT technologies are not used efficiently: the professional selection, the re-certification of employees, the psycho-diagnostics of employees, as well as, the formation of psychological portraits of athletes, operators of complex machinery and military personnel, including those serving in combat areas.

The usage of a modern computer and a microprocessor technology provides the new opportunities in conducting psychological diagnostics of a person or a group of people on all stages. Thanks to computerizing the process of storing and analyzing the observations, the likelihood of errors is reduced significantly.

The obvious advantage of using the computer tools for psychological and professional diagnostics is the speed of receiving, analyzing and interpreting primary received data, that in turn, positively affects the employment of experts - relieves them from the labor-intensive routine operations and allows them to focus on solving much more important professional tasks. The operational change and the modification of applied psychophysiological and personality tests allows us to build more adequate models of the subject's state with physiological, psychological and behavioral characteristics necessary

for the task implementation: professional selection, re-certification, psycho-diagnostics, rehabilitation, etc.

The usage of modern hardware and software provides extensive opportunities for remote diagnostic systems. This function, added to a device or a system, increases their professional and commercial attractiveness.

The purpose of this work is to create the hardware-software complex (HSC) for conducting psychodiagnostic and social studies, in particular to study the rate of human response to light, color, sound and tactile stimuli. HSC is an integral part of a unified information-measuring and control system of decision-making in the area of diagnosing professional competence, psychophysiological state of a person and psychological compatibility of people in a group.

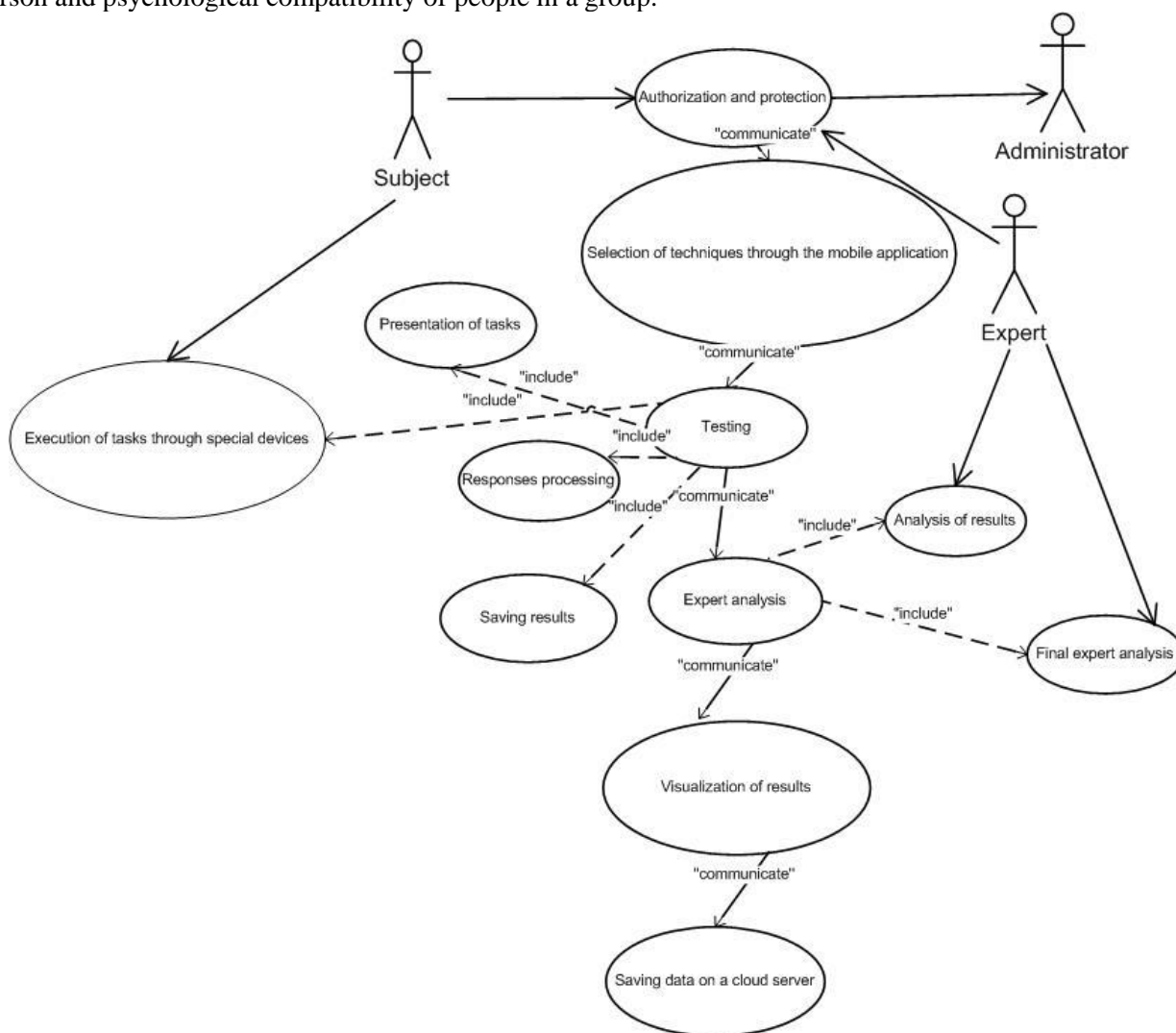


Fig. 1 Use Case Diagram of HSC

The UML diagram (use case diagram) describes the functionality and the behavior of the HSC at the conceptual level. (Fig.1)

1. The expert registered in the system is responsible for selecting, for each subject, the methods which are necessary and relevant to the purpose of the research, as well, as for analyzing of the results obtained during the study (primary expert analysis), producing the comprehensive conclusions using the results obtained through other methods (final expert analysis). Also, the expert has an access to all expert’s analyzes stored in the system. The expert works through a mobile application developed by MIT AppInventor.

2. The subject registered in the system, applies selected methods by using the corresponding devices.

3. The administrator, which is responsible for authorization and protection of the network, has an access to all expert’s analyzes stored in the system.

By using the system it is possible to measure the time of a simple sensorimotor reaction to light and sound, the time of complex sensorimotor reaction to light, critical flicker-fusion frequency, choice reaction time, differentiation, typingometry in various modifications.

The system allows:

- to determine the characteristics of the nervous system, stable characteristics of the mental state, individual style of activity, functional preparedness;
- to register the dynamics of changes in the mental state and efficiency in the process of performing functional loads;
- to establish the features of the mental state at a specific time: before the execution of the responsible task - the state of "combat readiness", premature "fever" or "apathy"; in the process of performing the task - adequate or excessive mobilization, manifestations of fatigue, mental suppression;
- to quantitatively measure the psychomotor parameters of the processes of mental regulation, and based on that, to make a conclusion on the features of attention, volitional and emotional regulation;
- to qualitatively determine the presence of functional state disorder of the central nervous system.

The system is intended to use for scientific and practical research in such establishments as employment centers; educational establishments (including preschool); psychological centers; security, defence and law enforcement agencies; sport medicine.

The greatest diagnostic effect can be achieved with the dynamic monitoring of the same person for a long time. In this case, it is possible to compare the subject's current characteristics with their profile and timely identify the deviations. This is extremely important for testing employees of security, defence and law enforcement agencies and operators with a high degree of responsibility (dispatchers, drivers, etc.).

The working algorithms of the system are based on the following methods of psychophysiological testing [1, 2, 9]:

Simple visual reaction time

The method allows evaluating the functional state of the central nervous system. The functional level of the system, the stability of the reaction and the level of functionality reflect the excitability, lability and reactivity of the nervous system. The analysis of indexes makes possible to assess the stability of the central nervous system, the probability of errors, failures. Increase of the dispersion of physiological parameters, "instability" of physiological parameters in time is the earliest and most universal criterion of functional state disorder of the central nervous system.

Implementation of the method: The light signal is displayed at random intervals of the time. Subject is asked to respond as quickly as possible to its appearance by pressing the button. The interval of the time between the signal and the start of the response is the reaction time. The ratio of the reaction time to the signals of the excitatory (red) and the inhibitory (green) light reveals the balance of the nerve processes.

Choice Reaction Time.

An arbitrary sensorimotor choice reaction (or disjunctive reaction) is more complicated than a simple sensorimotor reaction and therefore is characterized by higher values of time. The complication of the reaction is connected, first of all, with the logical component - the decision making.

Implementation of the method: The subject is presented with several signals of different colors (it should be borne in mind that a potentially high concentration of attention models the psycho-emotional stress). The signal of each color needs to be reacted by pressing the corresponding color button. The time and accuracy of the performance of the sensorimotor selection reaction characterize stress tolerance and adaptation to changing environmental conditions.

Distinction Reaction Time

The method is intended for measuring of mobility of nervous processes in the central nervous system. A complex sensorimotor reaction, based on the differentiation of signals that are similar to the wave structure (for example, red and yellow). Increased mobilization of subject for rapid and accurate execution of the task provokes emotional tension. Therefore, good test results can serve as an indicator of tolerance to stress, indicating the balance of the processes of excitation and inhibition in the nervous system.

Implementation of the method: Two signals are presented to the subjects in random order in a short interval of time. In response to one signal, it is necessary to press the button quickly, and no action is necessary for the other signal. The dispersion, or variation, of the reaction time reflects the stability of the sensory-motor response.

Simple sound reaction time

This method is similar to the method of simple visual reaction time described above. The method also allows evaluating the functional state of the central nervous system.

Implementation of the technique: An audible signal is displayed at random intervals of time. It is suggested to respond as quickly as possible to its appearance by pressing the button. The interval between the signal and the start of the response is the reaction time.

The Finger-Tapping Test

It is used to evaluate the properties of the lability of the nervous system (the ability of the nerve cells to quickly move from the state of inhibition to breaking) and vice versa (to determine the speed capabilities of the motor analyzer). Test results can be used in assessing the strength of the nervous system, which is responsible for the working capacity of a person (according to E. I. Ilyin).

Implementation of the method: Subject is encouraged to press as many of the sensor key as possible during a given time interval.

Noise stability

It is the method of simple visual reaction time in the presence of dynamic obstacles. The level of noise stability testifies to the strength and balance of the nervous processes and serves as an integral indicator of the adaptive capacity of a person and his ability to resist the action of stimuli.

Implementation of the technique: The signal is presented to the subject on the computer monitor, against the background of signals of a different color, shape and size, which makes it difficult to quickly and accurately react to the given stimulus. Increasing the reaction time and the number of errors indicates the noise stability level.

Attention test

On the basis of the visual-motor reaction to the signal in the presence of the static obstacle, the concentration and stability of attention are determined. Human's attention is very sensitive to functional fatiguability and overwork. Using the bimanual version of the response to the light stimulus (by pressing two buttons with both hands simultaneously), we can obtain data on the predominance and working capacity of the right and left hemisphere.

Implementation of the technique: The signal is presented to subject on the computer monitor, against the background of external light stimuli. It is proposed to respond as quickly as possible to the appearance of a signal by pressing the buttons of the visual-motor analyzer.

Evaluation of Critical Flicker-Fusion Frequency

The method is widely used for diagnostics of pathological processes of the visual system, for determining the degree of fatiguability of the eyes, as well as for conducting a medical and social examination of the visually impaired. This technique describes the functional state of the cortical department of the visual analyzer and the central nervous system (CNS), as well as the degree of inertness of mental processes. This is a very important integral indicator in the assessment of psycho-emotional stress, which, in turn, is a factor in psycho-physiological disadaptation.

Implementation of the method: Depending on the objectives and tasks of the diagnosis, a flashing light signal is presented to subject, differentiated on the right and left eye, using a tube, or simultaneously on both eyes, using a visual-motor analyzer. Stimulus may be red, green or other colors. The flicker frequency increases and decreases. The moments of continuous luminescence and the appearance of flickering are fixed by the subject by pressing on the corresponding button.

Dynamometer test

The test is used to assess static muscular endurance, which is a vital part of any muscular activity. Depending on the purpose it can determine the maximum muscle strength of the hands, motor asymmetry, muscular endurance with the estimation of vegetative changes.

Implementation of the method: The subject is supposed to squeeze the spring of the dynamometer as strong as possible and to hold a given muscular effort within a certain time interval, which is calculated as a percentage of the maximum. The quality of the test task and the feedback results are precisely determined by the method. The implementation of the method includes the visual and acoustic control of the task execution.

There are some other methods of psychophysiological testing which are to be implemented further.

Fig. 2 shows the structural scheme of the system. The central part of the system is the powerful 32-bit microcontroller of the STM32F4 series with ARM Cortex-M4F core from STMicroelectronics, which controls the hardware part of the system - the wide range of sensors and actuating devices. To the controller are connected a keyboard, alphanumeric or graphic indicator and actuating electronic devices,

namely LEDs of different colors, speakers, relay tactile stimuli. Other devices are planned to be included in the future. The software consists of a microcontroller program, a data exchange driver, a database, a user interface. The expert system and other software solutions are expected to be developed later.

Reaction time data are fed to the computer complex (PC) through one of the interfaces, USB or WiFi, where they are processed by general and special software (Software).

The structure of the HSC includes a miniature WiFi module based on ESP8266 chipset with built-in TCP / IP protocol stack and AT command control. The ESP8266 chip is a versatile and costly solution for organizing a Wi-Fi network node that is responsible for handling all of the network's data exchange functions in embedded applications. ESP8266 has good built-in capabilities for pre-processing data and I / O ports connecting it to APCs that require network data sharing.

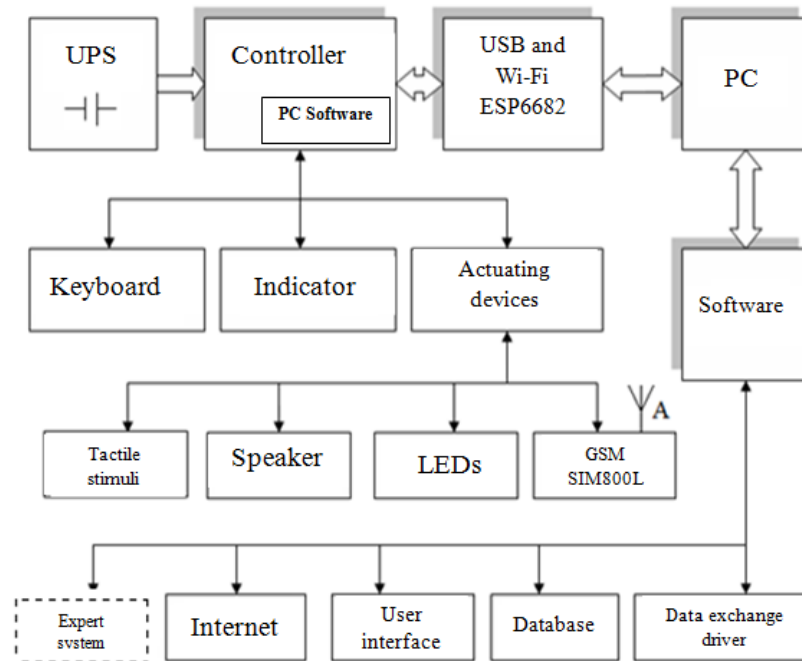


Fig.2 The block diagram of the system.

For stand-alone work, including remote operation of the equipment, the scheme includes the GSM module on the chip SIM800L, which allows conducting field studies where the only mobile communication is present. Data transfer, (to the cloud service ThingSpeak, for example) is carried out through the GSM module in the packet data mode.

Fig. 3 shows simplified architecture of the system, when working with the IoT ThingSpeak service, the main components of which are following:

- The Data and Local Control Controller, which pre-processes data from sensors and actuators, sends them to the Internet-server ThingSpeak.com Status Channel and accepts command-line commands for the ThingSpeak.com Actuator Channels;

- ThingSpeak services available on thingspeak.com include paid and free channels [8, 12]. The difference of free channels from paid ones is in the frequency of recording in the site database. For free channels, the recording period is limited to 15 seconds. Data collection is accompanied by a timestamp and coordinates. Visualization of data can be obtained using a variety of plug-ins and graphic resources provided by the embedded MatLab system;

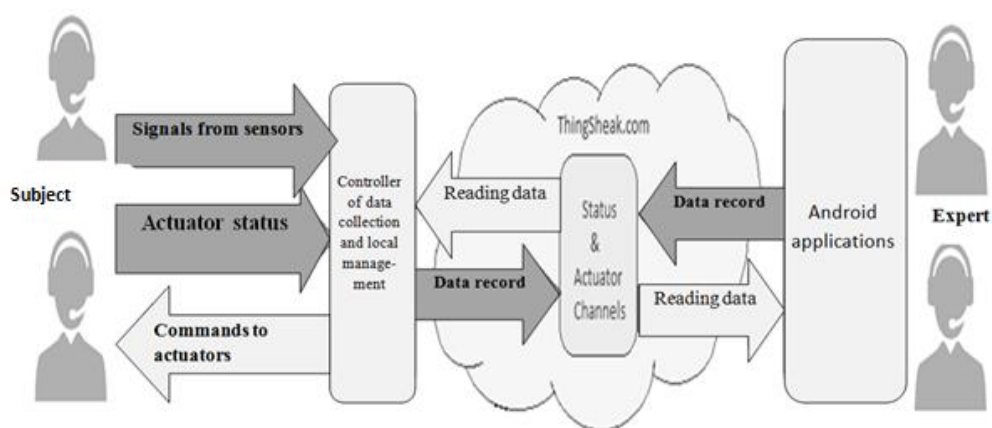


Fig.3 The architecture of the software platform of the system.

- The Android application or any other remote application requests data from the web server and displays them on the smartphone screen.

To create a local database, Microsoft Office Access product is used. It has been chosen because this database management system holds a strong position in the modern world of information technology and widely recognized as a simple and effective software solution. The version used (MS Access 2003) supports a variety of programming tools from traditional ODBC and SQL to the latest ActiveX Data Objects object protocols.

Based on the task, the database tables have been designed to provide for convenient sampling and comparing the obtained results. Moreover it provides for the possible increase in the amount of saved data, as well as, scaling the database itself.

The main menu has a simple and clear set of control elements. At the top, there is a list that prompts choosing the study to view or add data. In order to begin filling data, you must select the study to which these data will belong to. The user will be presented with the window to add the results of the experiment.



Fig.4 The hardware part of the laboratory model of the system

CONCLUSIONS

Modern information technologies and the elemental basis of programmable electronics provide new opportunities for the creation of hardware and software systems for psychophysical research. In this work, a structural model has been developed and an active laboratory model of HSC has been built. The distinctive feature of this model is that it gives the subjects and the experts the possibility of the remote and autonomous work. The new architecture of the complex corresponds to the concept of "Internet of Things". The UML usage diagram describes the business tasks and user interactions.

The structural scheme of the system presents the principles of interaction and operation of such components as the controller microcontroller STM32F4, the WiFi module based on the chip of the ESP8266, GSM module SIM800L, general and special software, database and other hardware-software components.

The advantages of this system are not only high-quality remote psychodiagnosis, but also the ability to control the external devices of the system remotely, as well as, cloud data storage by using one of the Web services.

Realized basic functions of the system allow making a qualitative and quantitative assessment of the subject's psychophysical parameters. For a better diagnostic effect, we have carefully selected and embedded the techniques of psychodiagnostics which allow determining the nervous system properties to study the features of the mental state and to detect disturbances of the functional state of the central nervous system.

REFERENCES

1. M.A. Popova, I. V. Myl'chenko, A.E. Shcherbakova, R.M.Safin. (2013). Funktsional'noye sostoyaniye vegetativnoy i tsentral'noy nervnoy sistemy u lits, zanimayushchikhsya ekstremal'nymi vidami sporta [The functional state of the autonomic and central nervous system in persons engaged in extreme sports]. *Modern problems of science and education*. No. 3. (Online article). <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=9240>
2. V. D. Balin, V. K. Gaida, V. K. Gerbachevsky, et al. (2003). *Praktikum po obshchey, eksperimental'noy i prikladnoy psikhologii* [Practical work on general, experimental, and applied psychology]. St. Petersburg: Piter. (Print book). p. 560. (In Russian).
3. V. V. Kal'nish, A. I. Yena. (2001). "Pryntsypy profesiyonoho psikhofiziologicheskoho vidboru [Principles of professional psychophysiological selection]". *Journal of Hygiene of Labor*. (Print book). Vol. 32. pp.131–144. (In Ukrainian).
4. M. L.Kochina, A. G. Firsov. (2010). "Mnogofunktsional'nyy pribor dlya provedeniya psikhofiziologicheskikh issledovaniy [Multifunctional device for psychophysiological research]". *Applied radio electronics*. Vol. 9, No 2. pp. 260–265. (In Russian).
5. P.V. Belichenko, N.V. Blaginya, A.V. Mal'tsev, M.M . Khruslov. (2014). "Apparatno-programmnoye obespecheniye v psikhologii [Hardware and software in psychology]". *Computer modeling in high-tech technologies*. pp. 22-25. (In Russian).
6. A.V. Roslyakov, S.V. Vanyashin, A.Yu. Grebeshkov. (2015). "Internet veshchey: uchebnoye posobiye [Internet of Things: study guide]". *Samara: Volga State University of Telecommunications and Informatics*. (Print book). p. 136. (In Russian).
7. P. L. Nikolaev. (2014). "Primeneniye oblachnykh tekhnologiy v sistemakh umnogo doma [The use of cloud technologies in smart home systems]". *Scientific journal "Young Scientist*. No. 13. pp. 37-39. (In Russian).
8. ThingSpeak. (2017). [Official website]. <https://thingspeak.com>
9. Wi-Fi modul' ESP8266. (2017). *Amperka..* (Official website). <http://amperka.ru/product/esp8266-wifi-module>
10. STM32 32-bit ARM Cortex MCUs. (2017). *STMicroelectronics*. (Official website). <https://www.st.com/en/microcontrollers/stm32-32-bit-arm-cortex-mcus.html>

ЛІТЕРАТУРА

1. Попова М.А., Мыльченко И. В., Щербакова А.Э., Сафин Р.М. Функциональное состояние вегетативной и центральной нервной системы у лиц, занимающихся экстремальными видами

- спорта // Современные проблемы науки и образования: электр. научный журнал. 2013. – № 3. URL: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=9240> (дата звернення: 28.08.2017).
2. В. Д. Балин, В. К. Гайда, В. К. Гербачевский и др.. Практикум по общей, экспериментальной и прикладной психологии / Под общей ред. А. А. Крылова, С. А. Маничева. — 2-е изд., доп. и перераб. — СПб.: Питер. — 560 с.: ил. — (Серия «Практикум по психологии»). 2003
 3. Кальніш В. В., А. І. Єна Принципи професійного психофізіологічного відбору // Гігієна праці. – Вип. 32. – К., 2001. – С.131–144.
 4. Кочина М. Л. Многофункциональный прибор для проведения психофизиологических исследований / М. Л.Кочина, А. Г. Фирсов. // Прикладная радиоэлектроника. – 2010. – Т.9.– №2. – С.260–265.
 5. Беличенко П.В., Благиня Н.В., Мальцев А.В., Хруслов М.М. Аппаратно-программное обеспечение в психологии. Труды международной науч.-техн. конф.. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2014.- С. 22-25.
 6. Росляков А.В., Ваняшин С.В., Гребешков А.Ю. Интернет вещей: учебное пособие. – Самара: ПГУТИ, 2015. – 136 с.
 7. Николаев, П. Л. Применение облачных технологий в системах умного дома // Научный журнал «Молодой ученый». — 2014. — №13. — С. 37-39.
 8. Офіційний сайт сервису ThingSpeak. URL: <https://thingspeak.com> (Дата звернення: 09.05.2016).
 9. Wi-Fi модуль ESP8266//Веб-сайт Амперка. URL: <http://amperka.ru/product/esp8266-wifi-module> (Дата звернення: 28.08.2017).
 10. STM32 32-bit ARM Cortex MCUs// Офіційний веб-сайт STMicroelectronics. URL: <https://www.st.com/en/microcontrollers/stm32-32-bit-arm-cortex-mcus.html> (Дата звернення: 28.08.2017).

Варламова Наталя Володимирівна – аспірант; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків-22, майдан Свободи, 6, 61022; e-mail: natess123@gmail.com; ORCID: [0000-0001-5117-7293](https://orcid.org/0000-0001-5117-7293)

Стервоєдов Микола Григорович – завідуючий кафедрою електроніки та управляючих систем, доцент, к.т.н.; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків-22, майдан Свободи, 6, 61022; e-mail: natess123@gmail.com; ORCID: [0000-0003-0136-6437](https://orcid.org/0000-0003-0136-6437)

UDC 539.3

A comparative analysis of axisymmetric vibrations of conical and cylindrical fluid-filled elastic shells

K.G. Degtyarev¹, V.I.Gnitko¹, Yu.V.Naumenko¹, E.A. Strelnikova^{1,2}¹A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences,
2/10, Pozharsky Str., Kharkiv, 61046, Ukraine²V.N. Karazin Kharkiv National University, Freedom Square 4, Kharkiv, 61022, Ukraine
e-mail: strelea@ukr.net

This paper presents the comparison of low-frequency vibrations in liquid-filled cylindrical and truncated conical elastic shells. The liquid is supposed to be an ideal and incompressible one and its flow is irrotational. To evaluate a velocity potential the system of singular boundary integral equations has been obtained. The boundary element method is used for their numerical simulation. The vibration modes of the shells with liquids are determined as linear combinations of their natural vibration modes without liquids. Sloshing frequencies and modes of fluid-filled cylindrical and truncated conical shells are estimated. The solution of the hydro-elasticity problem is obtained using a combination of boundary and finite element methods. Shells with both rigid and elastic bottoms are considered. The illustrative examples are provided to demonstrate the accuracy and efficiency of the method.

Key words: vibrations, ideal incompressible liquid, sloshing, cylindrical and conical shells, singular integral equations, boundary and finite element methods

Розглянуто процеси коливання пружних оболонок обертання, частково заповнених рідиною. Припускається, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух є безвихровим. В цих умовах існує потенціал швидкостей рідини. Для його обчислення із застосуванням методів теорії потенціалу та другої тотожності Гріна отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь. Вважається, що форми коливань заповненої оболонки можна зобразити в вигляді ряду за формами коливань незаповненої оболонки. Для визначення цих базисних функцій застосовано одновимірний метод скінченних елементів. Форми коливань оболонки з рідиною без урахування плескань рідини складають другу систему базисних функцій. Для врахування впливу плескань знайдені форми коливань рідини у відповідному жорсткому резервуарі. Ці форми складають третю систему базисних функцій для знаходження шуканого потенціалу швидкостей. Для знаходження базисних функцій другої та третьої систем сформульовані мішані крайові задачі для рівняння Лапласа. Отримані при цьому системи граничних інтегральних рівнянь зводяться до одновимірних з невідомими густинами, що задані вздовж меридіану оболонки обертання. Числовий розв'язок отриманих систем здійснено за допомогою редукованого одновимірного методу граничних елементів. В роботі надано порівняння низькочастотних коливань циліндричних та конічних заповнених рідиною пружних оболонок. Розглянуті коливання заповнених та незаповнених рідиною оболонок з жорсткими та пружними стінками та днищами. Визначено частоти плескань рідини в жорстких заповнених циліндричних та усічених конічних оболонках. Розв'язок задачі гідро-пружності здійснено за допомогою підходу, заснованого на поєднанні методів скінченних та граничних елементів. Наведено ілюстративні приклади, що демонструють точність та ефективність методу. Отримані дані відносно найнижчих частот коливань системи «оболонка-рідина», що дозволяють провести ефективне відстроювання від небажаних резонансних частот.

Ключові слова: коливання, ідеальна нестислива рідина, плескання, циліндричні та конічні оболонки, сингулярні інтегральні рівняння, методи граничних та скінченних елементів

1 Introduction

Various fuel and liquid storage tanks, oil and propellant storage containers are widely used in different engineering areas. If such storages are subjected to surface shots caused by a terrorist act, an airplane crash or a seismic shockwave, this will lead to a dangerous ecological catastrophe. So defining the strength characteristics of such elements is a topical engineering problem. These data allow evaluating the ultimate strength of a structure under shock or seismic actions, isolate spurious resonance frequencies, and identify the most hazardous zones from the viewpoint of stress concentration. However, studying the frequencies and natural vibration modes for structures interacting with a fluid is a challenging design problem. Complex experimental investigation of loading processes is difficult and sometimes impossible due to the various reasons. Hence mathematical modeling of physical processes with the help of advanced numerical procedures is a basic approach for these problems.

A lot of analytical and experimental research has been performed in the field of shells interacting with a fluid in last decade [1-6]. Most of these works have been devoted to the problem of flat plates, curved plates and circular cylindrical shells [1-3]. The dynamic behaviour of cylindrical shells without liquids has been studied in a considerable number of numerical, analytical and experimental investigations [4-6]. The case of a conical shell filled with a liquid has been successfully developed by Lakis et al. [7]. A free surface effect was neglected in [7], but in [8] it was shown that the supposition

about the spectrum separation of frequencies of the elastic shell filled with the liquid and sloshing frequencies of the rigid shell with the same geometrical characteristics and filling level as for the elastic one is not always valid.

The main purpose of this paper is to study the influence of both sloshing and elasticity effects on vibrations of the fluid-filled tanks in the form of shells of revolution with an arbitrary meridian.

In this paper we demonstrate that dynamic characteristics of cylindrical and conical shells of equal heights and equal radii of free surfaces are differed drastically. The proposed method is based on representation of the velocity potential as a sum of two potentials. One of them corresponds to the problem of fluid free vibrations in the rigid shell and another one corresponds to the similar problem for an elastic shell with a fluid without including the gravitational component. The method allows us to obtain the natural frequencies and vibration modes for fuel tanks of different shapes.

2 Problem statement and mode superposition method for coupled dynamic problems

Free harmonic vibrations of fluid-filled elastic shells of revolution having arbitrary meridians are investigated. The shell is of uniform thickness h , and height H , made of homogeneous, isotropic material with elasticity modulus E , Poisson's ratio ν and mass density ρ_s . As the examples, fluid-filled cylindrical and truncated conical shells are considered, as shown in Fig. 1.

Denote the wetted part of the shell surface as σ and the free surface of a liquid as S_0 . Let S_{bot} be the surface of the tank bottom. Let us denote the vector-function of shell displacements as $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$. At first let us consider the free vibrations of the elastic shell without a liquid. The finite element method is applied by Ravnik *et al.* in [8] to evaluate natural frequencies Ω_k and modes $\mathbf{u}_k, k = \overline{1, N}$ of the shell of revolution without a liquid. After forming the global stiffness \mathbf{L} and mass \mathbf{M} matrices, the following equation of motion for the shell containing fluid has been obtained:

$$\mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} = p\mathbf{n},$$

where \mathbf{n} is an external unit normal to the shell wetted surface, the $p\mathbf{n}$ is the fluid dynamical pressure upon the shell, normal to its surface.

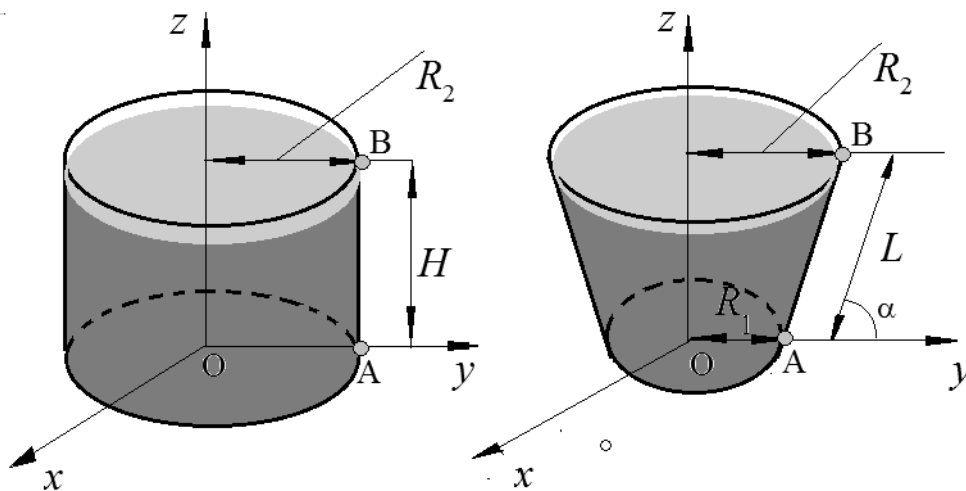


Fig. 1. Cylindrical and conical fluid-filled shells.

Consider the modes of fluid-filled shell vibrations in the form

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^N c_k(t)\mathbf{u}_k, \tag{2.1}$$

where $c_k(t)$ are unknown coefficients, and \mathbf{u}_k are the eigenmodes of the empty shell vibrations.

It is assumed here that a liquid is an ideal and incompressible one, and its motion, beginning from a state of rest, is irrotational. In these conditions, there exist a fluid velocity potential Φ

$$V_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

that satisfies the Laplace equation. The liquid pressure p upon the shell walls is determined from the linearized Cauchy-Lagrange integral by the formula

$$p = -\rho_l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) + p_0,$$

where Φ is the velocity potential, g is the acceleration of gravity, z is the vertical fluid point coordinate, ρ_l is a fluid density, p_0 is an atmospheric pressure. On the wetted surfaces of the shell the non-penetration boundary condition is set [9]. On the free surface, the following dynamic and kinematic boundary conditions must be satisfied

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0,$$

where the function ζ describes the shape and position of the free surface. Thus, for the velocity potential we have the following boundary-value problem [8]

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_w} = \frac{\partial w}{\partial t}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta \Big|_{S_0} = 0. \quad (2.2)$$

Consider the potential Φ as $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, as it is done in [10]. The series for potential Φ_1 can be written as

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \varphi_{1k}.$$

Here time-dependant coefficients $c_k(t)$ are defined in equation (2.1). To determine functions φ_{1k} the following boundary value problems are formulated:

$$\Delta \varphi_{1k} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\sigma} = w_k, \quad \varphi_{1k} \Big|_{S_0} = 0, \quad w_k = (\mathbf{u}_k, \mathbf{n}), \quad k = \overline{1, N} \quad (2.3)$$

The solution of boundary value problems (2.3) is presented in [11].

To determine the potential Φ_2 we have the problem of fluid vibrations in the rigid shell including gravity effects.

Use the expansion

$$\Phi_2 = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_{2k},$$

where $d_k(t)$ are unknown coefficients, and functions φ_{2k} are natural modes of the liquid sloshing in a rigid tank. To obtain these modes the following boundary value problems are considered:

$$\Delta \varphi_{2k} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\sigma} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial t} + g\zeta \Big|_{S_0} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0, \quad k = \overline{1, N} \quad (2.4)$$

Finally, for the sum of potentials $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ the following expression is valid:

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_{2k}. \quad (2.5)$$

The unknown function ζ takes the form

$$\zeta = \sum_{k=1}^N c_k(t) \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}} + \sum_{k=1}^M d_k(t) \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}}. \quad (2.6)$$

To define coupled modes of harmonic vibrations, suppose that $c_k(t) = C_k \exp(i\omega t)$; $d_l(t) = D_k \exp(i\omega t)$. Substituting these expressions into equations (5)-(6) and then into equations

$$\mathbf{LU} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} = p_d \mathbf{n} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta \right|_{S_0} = 0$$

results in the generalized eigenvalue problem where both elasticity and gravity effects are taken into account.

Both boundary value problems (2.3) and (2.4) are reduced to systems of singular integral equations by using boundary element method in its direct formulation, Brebbia *et al.* [12].

As it was shown in [3], the integral operators obtained in singular integral equations are of logarithmic singularities, and thus the numerical treatment of these integrals will also have to take into account the presence of this integrable singularity. The integrands are distributed strongly non-uniformly over the element, and standard integration quadratures fail in accuracy. So we treat these integrals numerically by the special Gauss quadratures [12] and apply the technique proposed by Naumenko *et al.* in [13].

3. Numerical simulation and discussion

Empty and fluid-filled isotropic cylindrical and truncated conical shells are considered. These shells are shown in Fig. 1. R_1 and R_2 are radii of the cone at its small and large edges, R_2 is also for cylinder radius, α is a semivertex angle of the cone, and H is the height of both cone and cylinder, L is the length of cone generatrix. Both conical and cylindrical shells are referred to the cylindrical coordinate system (x, θ, z) . For all following numerical simulation, the thickness of the shell and the Poisson's ratio are taken as $h/R_1=0.01$ and $\nu=0.3$, semivertex angle $\alpha=45^\circ$, $H/R_2=0.5$, Young's modulus $E = 2,11 \cdot 10^6$ MPa, $\rho_s=8000 \text{ kg/m}^3$ [6] $\rho_f=1000 \text{ kg/m}^3$. The following boundary conditions for both shells are presented: clamped – free, i.e. shells of revolution are clamped at the ends A, and free at the ends B, Fig. 1.

For both shells we estimate sloshing frequencies, the frequencies of empty shells with rigid and elastic bottoms, and coupled hydro-elastic vibrations of fluid-filled conical and cylindrical shells.

3.1. Oscillations of empty shells with rigid and elastic bottoms.

First, we determine the requisite number of finite elements for a precise determination of the natural frequencies. The convergence is established when numbers of finite elements along the shell wall is equal to 60, along the bottom is 100 elements, the same numbers are used for boundary elements simulations in elastic tanks, the number of boundary elements along the free surface radius is 100 as well.

Then the numerical simulation of dynamic characteristics for both conical and cylindrical shells is provided.

In Table 1 the frequencies of empty cylindrical shells with rigid and elastic bottoms are presented, where n is the number of the mode.

Table 1: Frequency of axisymmetric oscillations of empty cylindrical shells, Hz

n	1	2	3	4	5	6(1)	7(2)	8	9(3)	10	11(4)	12(5)
rigid						817.07	844.14		1019.2		1448.0	1563
elastic	25.26	98.37	220.39	391.26	610.96	817.07	844.14	879.49	1019.2	1196.8	1448.0	1563

The lowest frequencies correspond to the shell with elastic bottom. The frequencies of the shell with rigid bottom are coincided with ones of the shell with the elastic bottom when the wall vibrations are dominant. It can be concluded that accounting for the bottom deformations leads to appearance of lowest frequencies.

Fig. 2 demonstrates the first four axisymmetric vibration modes denoted by numbers 1,2,3,4 of the cylindrical shell with the elastic bottom. There are any wall deformations for these modes, i.e. the bottom vibrations are dominant.

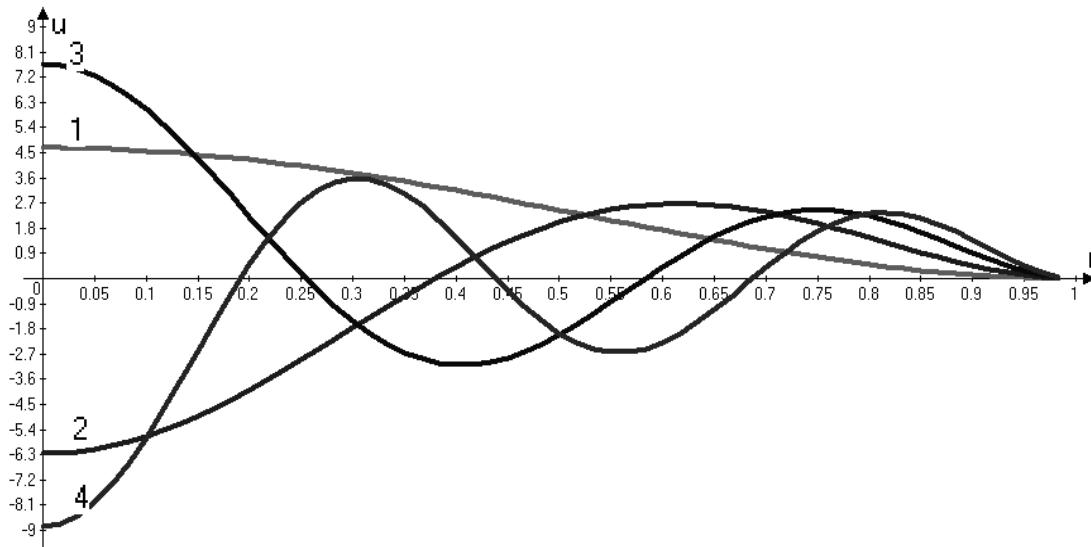


Fig. 2. Axisymmetric modes $m=1,2,3,4$ of cylindrical shell with elastic bottom

Fig. 3 demonstrates the first four axisymmetric vibration modes of the cylindrical shell with rigid bottom. These modes are coincided with axisymmetric modes for shells with elastic bottoms with numbers $m = 6,7,9,11$. So the wall vibration modes are not dominant for shells with elastic bottoms.

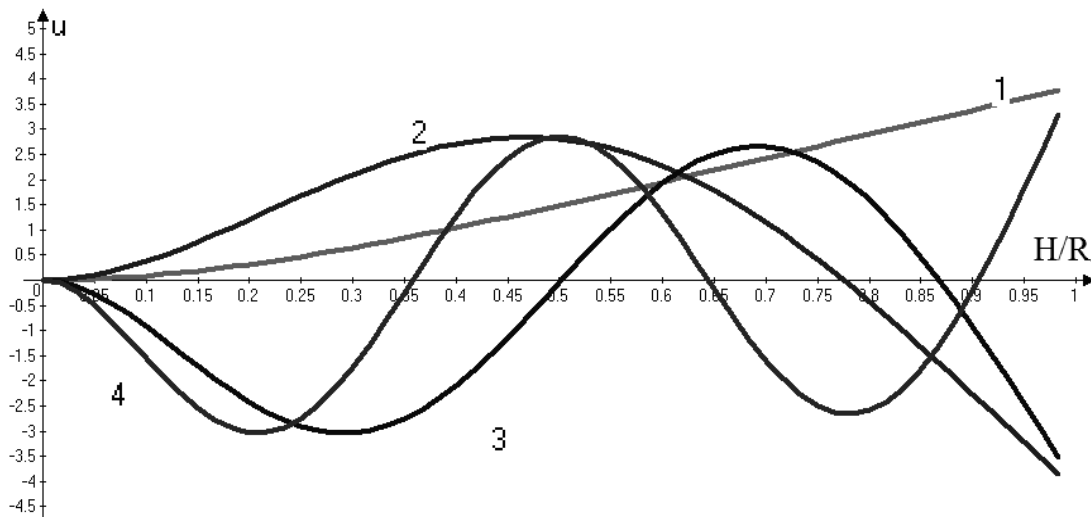


Fig. 3. Axisymmetric modes $m=6,7,9,11$ of cylindrical shell with rigid bottom.

In Table 2 the frequencies of empty truncated conical shells with rigid and elastic bottoms are presented, where m is the number of the mode.

Table 2: Frequency of axisymmetric oscillations of empty conical shells, Hz

m	1	2	3(1)	4(2)	5(3)	6(4)	7	8(5)	9(6)	10	11(7)	12(8)
rigid			559.4	675.8	707.28	824.91		1001.1	1274.7		1679.0	1994.0
elastic	101.0	393.4	559.5	675.8	708.68	824.94	881.58	1001.1	1274.7	1565.0	1679.0	1995.3

Comparing results of Tables 1-2 we can conclude that frequencies of empty truncated cones differ essentially from cylinder ones. The lowest frequency of the cylindrical shell is nearly four times less than that of the truncated conical shell. The lowest frequencies of both shells correspond to dominant bottom vibrations.

Fig. 4 demonstrates the first axisymmetric vibration modes ($m=1,2,3,4$) of the cylindrical shell with the elastic bottom. For the first two modes there is no any wall deformation, i.e. the bottom vibrations are also dominant.

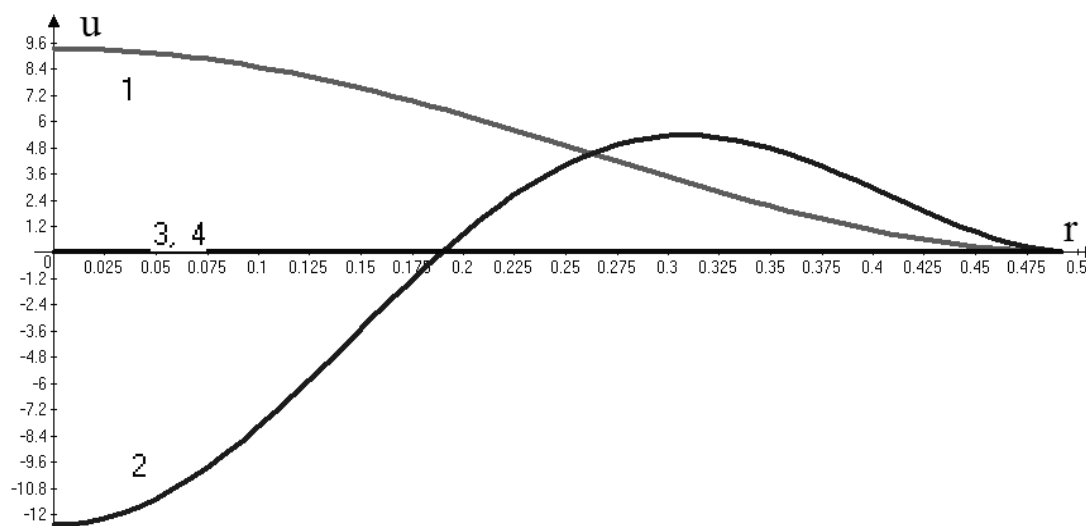


Fig. 4. Axisymmetric modes $m=1,2,3,4$ of conical shell with elastic bottom

Unlike cylindrical shells the only two first modes are bottom dominant.

Fig. 5 demonstrates the first four axisymmetric vibration modes of the truncated conical shell with rigid bottom. These modes are coincided with axisymmetric modes of the shell with the elastic bottom with numbers $m = 3,4,5,6$.

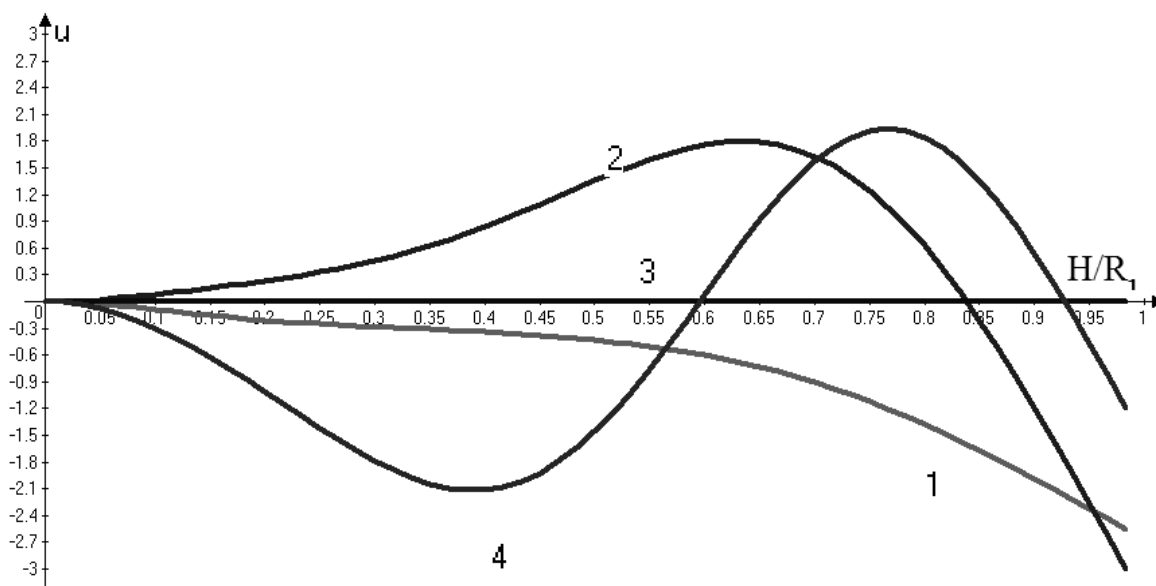


Fig. 5. Axisymmetric modes $m=3,4,5,6$ of conical shell with rigid bottom

It should be noted that the third mode is the torsion one, and it does not affect the fluid-structure interaction because an ideal fluid produces only a normal pressure on a moistened body.

3.2. Low frequency sloshing modes for fluid-filled cylindrical and conical shells.

Linear sloshing in the rigid Λ -shape conical shell with $R_1 = 0.5\text{m}$ and $R_2 = 1.0\text{m}$, $H=0.5\text{m}$ and $\alpha=\pi/4$ is considered. The cylindrical shell is of $R_2 = 1.0\text{m}$ and $H=0.5\text{m}$. The sloshing frequencies are calculated accordingly to Degtyarev *et al.* [14]. The total number of boundary elements along the shell meridians, as well as, the radii of free surfaces is 240 for both cylindrical and truncated conical shells. Below we demonstrate that sloshing frequencies of rigid cylindrical and conical shells differ. Both shells are of equal height ($H=0.5\text{m}$), and the radius of cone $R_2 = 1\text{m}$ is equal to the cylinder radius. The comparison of the results for $n=0$ (axisymmetric modes) is shown in Table 3.

Table 3: Axisymmetric sloshing frequencies, Hz

m	Conical shell	Cylindrical shell	
	Numerical solution	Numerical solution	Analytical solution
1	5.3534	5.9989	5.9965
2	7.8068	8.2898	8.2842
3	9.6034	9.9922	9.9932
4	11.1044	11.438	11.426
5	12.4246	12.710	12.705
6	13.6180	13.872	13.865

Obtained results testify the accuracy of the proposed method. The lowest frequencies of cone and cylinder differ drastically, but with increasing the number m difference become smaller.

Fig. 6 demonstrates the first sloshing modes of the cylindrical and conical shells.

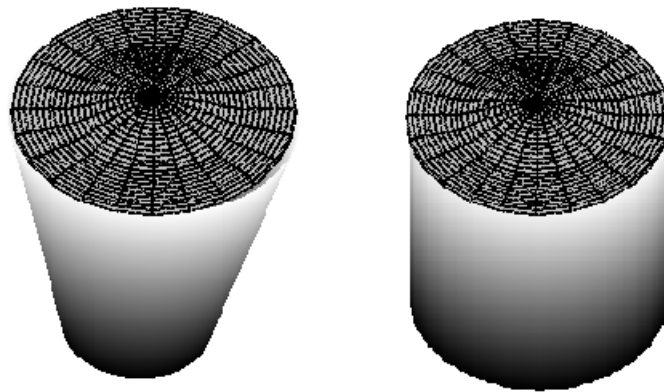


Fig.6. Axisymmetric sloshing modes of conical and cylindrical shells

It should be noted that the sloshing modes are the same for conical and cylindrical shells.

3.3. Vibrations of elastic fluid-filled truncated conical shells

Free vibrations of elastic cylindrical and conical shells coupled with liquid sloshing are under consideration. The results have been obtained for axisymmetric modes ($n=0$) and $m = \overline{1,12}$. The frequencies of empty and fluid-filled cylindrical and truncated conical shells have been considered. The results of numerical simulation are shown in Table 4.

Table 4: Comparison of axisymmetric frequencies for conical and cylindrical shells, Hz

m	Cylindrical shell		Conical shell	
	empty	fluid-filled	empty	fluid-filled
1	25.268	10.382	101.07	48.62
2	98.372	50.701	393.49	252.68
3	220.39	133.15	559.52	471.10
4	391.26	260.56	675.88	571.08
5	610.96	412.38	708.68	637.51
6	817.07	472.56	824.94	680.67
7	844.14	623.22	881.58	708.68
8	879.49	681.49	1001.1	859.20
9	1019.2	792.71	1274.7	1142.87
10	1196.8	956.08	1565.0	1250.17
11	1448.0	1163.75	1679.0	1519.97
12	1563.0	1289.83	1995.3	1565.55

From the results obtained we can conclude that the frequencies of fluid-filled shell vibrations differ drastically from the frequencies of empty ones for both cylindrical and truncated conical shells.

But when the circumferential wave number increases the difference becomes smaller gradually. The frequencies of the cylindrical shell are smaller than those of the conical shell. The frequencies ω near 10Hz may be considered as the most dangerous for the cylindrical shell. The results of tables 3 and 4 testify it. For example, $\omega=10.382\text{Hz}$ corresponds to $n=0$ and $m=1$ for the elastic shell; $\omega=9.9922\text{ Hz}$ corresponds to $n=0$ and $m=3$ for sloshing in the rigid shell. It can be the reason for the stability loss in shell structures.

Conclusion

The free vibration analysis of the elastic cylindrical and truncated conical elastic shell coupled with the liquid sloshing has been carried out. The combination of reduced finite and boundary element methods has been used. The analysis consists of several stages and each represents the separate task. The frequencies and modes of the empty shell vibrations have been defined at the first stage. The displacement vector, that is the solution of the coupled problem, is sought as the linear combination of natural modes of the empty shells. So the frequencies and free vibrations modes of the fluid-filled elastic shell without accounting for the gravity force have been defined. The frequencies and free vibrations modes of the liquid in the rigid shell under the gravity force have been estimated. These two problems have been solved by using the reduced boundary element method. This method substantially reduces the computing time for the analysis and reveals the new qualitative possibilities in modeling the dynamic behavior of shells. The difference in the dynamical characteristics between elastic truncated conical and cylindrical shells has been established. The frequencies of fluid-filled shell vibrations differ drastically from frequencies of empty ones for both cylindrical and truncated conical shells. The obtained results can be used as the basis for the further research of non-axisymmetrical vibrations of shells, as well as, dynamical characteristics of structures subjected to an intensive loading in case of interaction with a fluid.

Acknowledgement

The authors gratefully acknowledge Professor [Carlos Brebbia](#), Wessex Institute of Technology, for his constant support and interest in our research.

REFERENCES

1. Y.L. Zhang, D.G. Gorman & J.M Reese, "Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid," *Thin-Walled Structures*, vol. 41, pp. 1103–1127, 2003.
2. Аврамов К.В., Стрельникова Е.А. Хаотические колебания пластинок при их двустороннем взаимодействии с потоком движущейся жидкости/ К.В.Аврамов, Е.А. Стрельникова // Прикладная механика. – 2014. – т. 50, №3. – С. 86-93.
3. Gnitko V, Marchenko U, Naumenko V, Strelnikova E., "Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load," in *Proc. of XXXIII Conference "Boundary elements and other mesh reduction methods" WITPress, Transaction on Modeling and Simulation International Journal of Modern Physics and Applications*, vol. 52, pp. 285-296, 2011.
4. K.M. Liew, T.Y. Ng, X. Zhao, "Free vibration analysis of conical shells via the element-free in Ritz method," *J. Sound Vib.*, vol. 281, pp. 627-645, 2005.
5. T.C. Ramesh, N. Ganesan, "A finite element based on a discrete layer theory for the free vibration analysis of conical shells," *J. Sound Vib.*, vol.166, no. 3, pp. 531-538, 1993.
6. Shu C., "An efficient approach for free vibration analysis of conical shells," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 38, no. 8-9, pp. 935-949, 1996.
7. Y.Kerboua, A.A. Lakis, M.Hmila, "Vibration analysis of truncated conical shells subjected to flowing fluid," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, no. 3, pp.791-809, 2010.
8. J. Ravnik, E. Strelnikova, V. Gnitko, K. Degtyarev, U. Ogorodnyk, "BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank" *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 67, pp.13-25, 2016,

9. K.V. Avramov, E.A. Strel'nikova, C. Pierre, "Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow," *Nonlinear Dynamics*, vol. 70, pp. 1335 - 1354, 2012.
10. V. Gnitko, K. Degtyarev, V. Naumenko, E. Strelnikova, "BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles," *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, vol.5, no.3, pp. 317-328, 2017.
11. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью / Е.В. Еселева, В.И. Гнитько, Е.А. Стрельникова // Пробл. машиностроения. –2006. – №1, – С.105 - 118.
12. C.A.Brebbia, J.C.F. Telles&L.C. Wrobel, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
13. V.V. Naumenko, H.A. Strelnikova, "Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods," *Engineering analysis with boundary elements*, vol. 26, pp. 95-98, 2002.
14. K. Degtyarev, V. Gnitko, V. Naumenko, E. Strelnikova, "Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles," *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*, vol.1, no. 1, pp.14-27, 2016.

Kirill Degtyarev, leading engineer, A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences, 2/10,Pozharsky Str., Kharkiv, 61046,
email: kdeg89@gmail.com

Vasyl Gnitko, PhD, senior researcher, A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences, 2/10,Pozharsky Str., Kharkiv, 61046,
email: gnitkovi@gmail.com

Yury Naumenko, post-graduate, A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences, 2/10,Pozharsky Str., Kharkiv, 61046,
email: strelea@ukr.net, ORCID 0000-0001-9058-6727

Elena Strelnikova, DSc, Prof., leading researcher, A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences, 2/10,Pozharsky Str., Kharkiv, 61046,
email: elena15@gmx.com, ORCID 0000-0003-0707-7214

УДК 004.02

Відновлення вершин багатокутника за серединами його сторін

А.О. Караєв¹, О.О. Стрельнікова^{1,2}¹Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна²Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046, Україна

e-mail: a.karaiev@karazin.ua

В статті розглядається задача побудови плоского багатокутника за заданими координатами середин його сторін. Такі задачі виникають при чисельному розв'язанні сингулярних і гіперсингулярних інтегральних рівнянь методом дискретних особливостей. Введені спеціальні матриці зсуву, проаналізовані їх властивості, що дозволило отримати в аналітичній формі координати вершин багатокутника. Задача має єдине розв'язання при непарній кількості сторін. Наведено приклад відновлення вершин квадрата за сімома заданими вузловими значеннями. Це дозволяє побудувати границю розрахункової області при неповній інформації щодо неї.

Ключові слова: побудова розрахункової області, матриці зсуву, відновлення вершин багатокутника, точки колокації, кутові коефіцієнти.

Many important technical problems lead to the solution of boundary value problems of differential equations with partial derivatives. With the help of boundary value problems, it is possible to describe such processes as heat and mass transfer, diffusion, fluid flow, propagation of acoustic waves, electromagnetism, deformation of a solid. Some boundary-related problems can be solved analytically. Usually in these cases the geometry of the region and boundary conditions are relatively simple, and the equations with partial derivatives are linear. In practical problems arising in engineering and applied sciences, it is difficult to rely on obtaining analytical solutions, even if the differential equations are linear, since these problems are characterized by extreme irregularity of the boundaries of the regions and (or) heterogeneity of the material; since the solution of problems can not be constructed with the help of simple mathematical functions. In such cases, looking for approximate numerical solutions. Let the coordinates of the points, which are the middle of the sides of the N-corner, are known. Need to find the coordinates of the vertices of the polygon. Such problems arise in the numerical solution of singular and hypersingular integral equations using the method of collocation. Note that the problem has a unique solution for an odd number of sides. With a pair of sides, the matrix of the system is degenerate, which leads to the need to impose additional conditions for the solution. In the paper we consider a problem of flat polygon construction using the coordinates of its side's centers. These problems arise in numerical solution of singular and hypersingular integral equations using the discrete singularities methods. The special shift matrixes were introduces to get the analytical solution of coordinates of polygon vertices. The problem has the only decision if the number of sides is odd. There was given the example of recovering the square vertices by the seven node's values. These results can help in construction of the calculation area if we haven't full information about it.

Keywords: construction of calculation area, shift matrixes, flat polygon construction, collocation points, angular coefficients.

1 Загальна актуальність задачі та метод дискретних особливостей

Багато важливих технічних проблем приводять до розв'язання крайових задач диференціальних рівнянь з частинними похідними. За допомогою крайових задач можна описати такі процеси як тепло- та масоперенос, дифузія, потік рідини, розповсюдження акустичних хвиль, електромагнетизм, деформування твердого тіла. Деякі крайові задачі вдається розв'язати аналітично. Зазвичай в цих випадках геометрія області та граничні умови достатньо прості, а рівняння з частинними похідними – лінійні. В практичних задачах, що виникають в інженерній справі та прикладних науках, важко розраховувати на отримання аналітичних розв'язків, навіть якщо диференціальні рівняння лінійні, оскільки для цих задач характерна надзвичайна нерегулярність границь областей та (або) неоднорідність матеріалу; оскільки розв'язок задач не може бути побудований за допомогою простих математичних функцій. В таких випадках шукають наближені чисельні рішення.

Наближені методи, що приводять до появи сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь при розв'язанні задач математичної фізики, останнім часом достатньо часто використовуються, оскільки клас прикладних задач, що приводять до сингулярних інтегральних рівнянь, досить широкий. Зокрема, до таких рівнянь можна звести контактні задачі теорії пружності, задачі визначення стаціонарних температурних полів в тілах з однорідними включеннями та тріщинами (розрізами), задачі визначення концентрації напружень в тілах, що містять тріщини, задачі визначення аеродинамічних навантажень на тонкі несучі поверхні, деякі задачі дифракції та акустики, задачі коливань рідини у пружних резервуарах та інші. [1-5].

Теорія та методи чисельного розв'язку одновимірних гіперсингулярних рівнянь на відрізьку отримали закономірний розвиток у роботі Ю.В. Ганделя [6]. Основам методу дискретних особливостей та його обґрунтуванню присвячена монографія С.М. Білоцерковського та І.К.

Ліфанова [7]. Як свідчить огляд літературних джерел, важливим питанням при числовому розв'язанні сингулярних інтегральних рівнянь є відповідний вибір точок колокації. Ці точки обираються наступним чином.

Нехай x_i $i = 1, 2, \dots, n$ відповідають границям елементів області, де розшукується розв'язок інтегрального рівняння. Тоді точки колокації обчислюються за формулою

$$\xi_i = x_i + \alpha_i(x_{i+1} - x_i), \quad i = 1, 3, \dots, n-1$$

При цьому вибір значень α_i першорядне значення. Питанням вибору точок колокації присвячено велику кількість досліджень. Серед них відзначимо роботи [2, 7-12]. Зазначається, що невдалий засіб вибору точок колокації може призвести до значних похибок і навіть до нестійкості при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких зводяться сингулярні інтегральні рівняння внаслідок дискретизації. В роботах [1, 7, 12] на основі числового аналізу розв'язків сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь зроблено висновок про те, що при $\alpha_i = 0.5 \quad \forall i$ будуть отримані системи лінійних алгебраїчних рівнянь з суттєво домінуючими діагональними елементами, що дає змогу побудувати стійкі обчислювальні схеми. Тому надалі обмежимося саме цим випадком.

2 Постановка задачі

Нехай відомі координати $N = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$ точок, що є серединами сторін N -кутника. Необхідно знайти координати вершин многокутника. Такі задачі виникають при числовому розв'язанні сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь при використанні методу колокації. Зауважимо, що задача має однозначний розв'язок при непарній кількості сторін. При парній кількості сторін матриця системи є виродженою, що приводить до необхідності накладати додаткові умови для розв'язання.

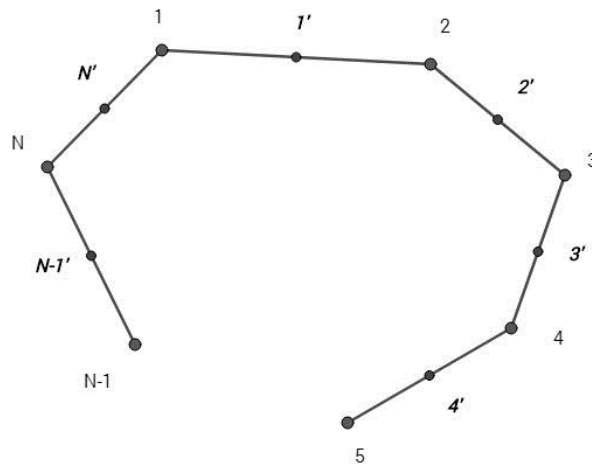


Рис. 1. Многокутник з відомими серединами сторін

3 Розв'язання задачі

Введемо позначення. Нехай $\{\vec{r}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ – множина середин сторін многокутника, $\{\vec{r}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ – множина вершин многокутника.

Тоді зв'язок між радіус-векторами середин сторін та вершин задається системою співвідношень:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1' = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \\ \vec{r}_2' = \frac{1}{2}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3) \\ \dots \\ \vec{r}_{N-1}' = \frac{1}{2}(\vec{r}_{N-1} + \vec{r}_N) \\ \vec{r}_N' = \frac{1}{2}(\vec{r}_N + \vec{r}_1) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Матриця цієї системи має наступний вигляд:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \vec{r}_1' \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 & \vec{r}_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \vec{r}_{N-1}' \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & \vec{r}_N' \end{array} \right) \quad (3.2)$$

Для того, щоб система була невирдженою, необхідно, щоб визначник матриці (3.2) не дорівнював нулю. Маємо

$$\left| \begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^N \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^N \cdot 2 = \left(\frac{1}{2} \right)^{N-1}$$

У цьому випадку обернена до заданої матриці (3.2) існує і має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Для подальшої побудови необхідно ввести допоміжні матриці, а саме матриці зсуву.

4 Матриці зсуву

Введемо наступні позначення для матриці верхнього зсуву та матриці нижнього зсуву:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Результатом матричного добутку UA , де A – будь-яка довільна матриця дозвільної розмірності, є зсув елементів матриці A на один рядок вгору, при цьому останній рядок заповнюється нулями. Аналогічним чином визначається добуток LA матриці нижнього зсуву з будь-якою довільною матрицею.

Подвійна дія U^2A матриці верхнього зсуву на будь-яку матрицю зсуває елементи матриці на два рядки вгору. Враховуючи це факт, можна зробити висновок, що операція $U^k A$ підіймає матрицю на k рядків вгору. Аналогічно визначається дія матриці $L^k A$ на довільну.

Використовуючи властивості матриць зсуву, можна записати обернену матрицю у наступному вигляді:

$$A^{-1}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k (U^k_{\alpha\beta} - L^k_{\alpha\beta}) \quad (4.2)$$

Тоді розв'язок системи рівнянь у координатному вигляді може бути представлений наступним чином:

$$\vec{r}_\alpha = \left[\delta_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k (U^k_{\alpha\beta} - L^k_{\alpha\beta}) \right] \vec{r}_\beta \quad (4.3)$$

Таким чином, отримані вирази для радіусів-векторів вершин многокутника.

5 Рівняння сторін

Для подальшого використання в моделюванні важливо отримати вирази для рівнянь сторін многокутника.

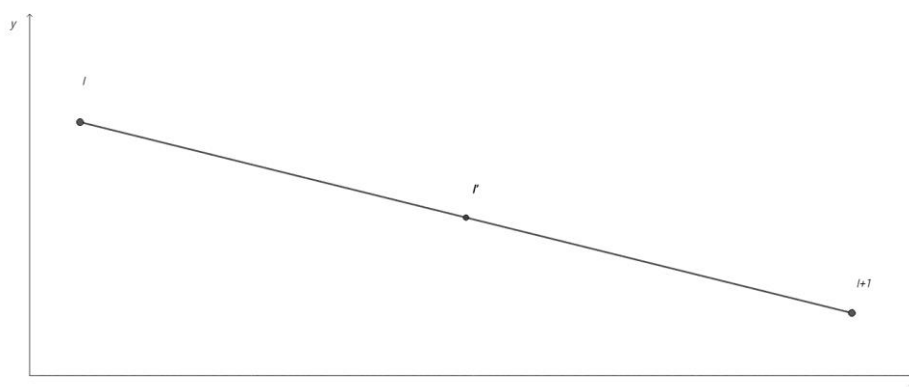


Рис.2. Сторона многокутника

Користуючись рівнянням прямої, що проходить через дві точки, можна легко знайти вираз для рівняння сторони многокутника, оскільки ми знаємо, що сторона l проходить через середину сторони \vec{r}_{l+1} та вершину \vec{r}_l , а саме:

$$y = \frac{y_l - y_{l+1}}{x_l - x_{l+1}} x + y_l \quad (5.1)$$

Тоді кутові коефіцієнти будуть визначатися наступною формулою:

$$k_k = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i y_i + \sum_{i=k+1}^N (-1)^{i+1} y_i}{\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i x_i + \sum_{i=k+1}^N (-1)^{i+1} x_i} \quad (5.2)$$

Ці співвідношення дають змогу будувати рівняння відповідних сторін многокутника.

6 Приклад відновлення многокутника

Нехай границею тіла є квадрат зі стороною a . Розіб'ємо квадрат на 7 проміжків так, що вузли розташовані всередині кожного відрізка, на трьох сторонах по дві, на останній – одну. Введемо систему координат так, як показано на рис.3.

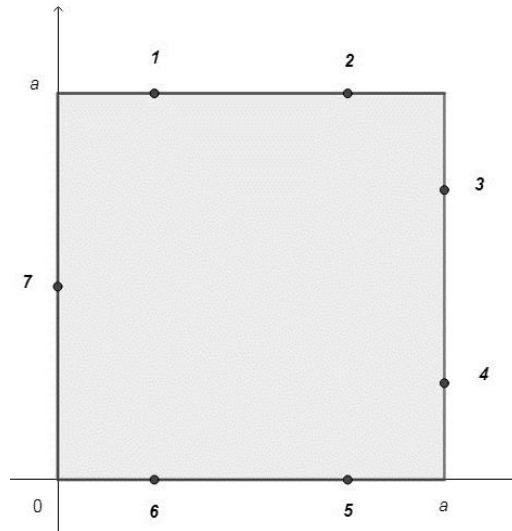


Рис.3. Задані вузли на границі

Координати вузлів в цьому випадку мають наступні значення:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1' = \left(\frac{a}{4}, a \right) \\ \vec{r}_2' = \left(\frac{3a}{4}, a \right) \\ \vec{r}_3' = \left(a, \frac{3a}{4} \right) \\ \vec{r}_4' = \left(a, \frac{a}{4} \right) \\ \vec{r}_5' = \left(\frac{3a}{4}, 0 \right) \\ \vec{r}_6' = \left(\frac{a}{4}, 0 \right) \\ \vec{r}_7' = \left(0, \frac{a}{2} \right) \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Використовуючи отримані вище співвідношення (4.3), знайдемо координати вершин многокутника за такими формулами:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{4} & a \\ \frac{3a}{4} & a \\ a & \frac{3a}{4} \\ a & \frac{a}{4} \\ \frac{3a}{4} & 0 \\ \frac{a}{4} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ \frac{a}{2} & a \\ a & a \\ a & \frac{a}{2} \\ a & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

На рис.4 відображено вершини отриманого багатокутника.

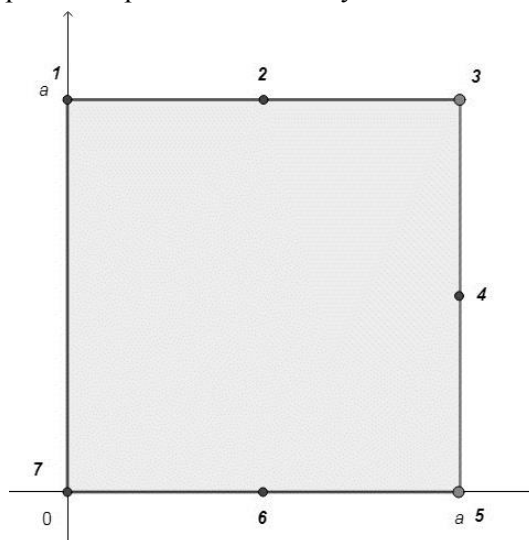


Рис.4. Вершини багатокутника

Має місце повна узгодженість з рис.3, що свідчить про ефективність та точність методу.

Тобто, таким чином може бути відновлена область для чисельного інтегрування в умовах неповної інформації.

7 Висновки і напрямок подальших досліджень

Отримані аналітичні формули для побудови вершин багатокутника при наявності інформації про координати середин граничних елементів при застосуванні числових методів розв'язання сингулярних та гіперсингулярних рівнянь. У подальшому передбачається розвинути методу на випадок довільного розташування точок колокації в межах граничного елемента.

ЛІТЕРАТУРА

1. I.K. Lifanov, L.N. Poltavskii, M.G.M. Vainikko. Hypersingular Integral Equations and Their Applications, CRC Press, 2003. – 416p.
2. F.J. Rizzo. A weakly singular form of the hypersingular integral equations applied to 3-D acoustic wave problems, Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering, № 96, 1992.– P. 271-287.
3. О.Л. Зайденварг, Е.А. Стрельникова. Гиперсингулярные уравнения в задачах прочности элементов конструкций с трещинами при температурном нагружении. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», № 11, 2009. – С. 191-196.
4. Р.П. Москаленко, В.В. Науменко, Е.А. Стрельникова. Метод дискретних особливостей у задачі визначення частот і форм коливань лопатей гідротурбін Вісник Харківського національного університету, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» № 34, 2017. – С. 40-47.
5. V.I. Gnitko, K.G. Degtyariv, V.V. Naumenko, E.A. Strelnikova. Coupled BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks, International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements, Vol. 6, № 6, 2018.– P. 976-988.
6. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов, – Харьков: Изд. Харьк. национального ун-та им. В.Н.Каразіна, 2000. –92 с.
7. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, - М.: Наука, 1985. – 256с.
8. F. Erdogan, G.D. Gupta. On the numerical solution of singular integral equations, Quart. Appl. Math..–1972.–Vol.29, №4.–P.525-534.

9. S. Krenk. On quadrature formulas for singular integral equations, *Quart. Appl. Math.*–1975.– Vol. 32, №3.–P.225-233
10. Б.Я. Кантор, В.В. Науменко, Е.А. Стрельникова. О возможности выбора контрольных точек на границах элементов при численном решении сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Адамара, *Докл. НАН Украины* № 1, 1996. – С.20-27.
11. D. Rostami Varnos Fardami. A new aspect for choosing collocation points for solving bi-harmonic equations, *Applied Math. And Applications*, Vol. 181 (2), 2006. – P. 1112-1119.
12. L.E. Lindgran. *From Weighted Residual Methods to Finite Element Method*, – Cambridge, England, 2009. –231p.

REFERENCES

- [1] I. Lifanov, L. Poltavskii, and M. Vainikko, *Hypersingular Integral Equations and Their Applications*. CRC Press, 2003.
- [2] F.J. Rizzo, "A weakly singular form of the hypersingular integral equations applied to 3-D acoustic wave problems", *Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 96, pp. 271-287, 1992.
- [3] O. Zaydenvarg and E. Strelnikova, "Hypersingular equations in strength problems of structural elements with cracks under temperature loading", *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University*, – Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems», Issue 11, pp. 191-196, 2009.
- [4] R. Moskalenko, V. Naumenko, and E. Strelnokova, "Diskrete singularities methods in in the task of determining the frequencies and forms of oscillation of hydro turbine blades", *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University*, – Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems», Issue 34, pp. 40-47, 2017
- [5] V.I. Gnitko, K.G. Degtyariov, V.V. Naumenko, E.A. Strelnikova. "Coupled BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks", *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, vol.6, №6. pp. 976-988, 2018.
- [6] Y. Handel, *Introduction to the methods of calculation singular and hypersingular integrals*. Kharkiv, Publishing house of V.N. Karazin Kharkiv National University, 2000.
- [7] S. Belotserkovskyy and I. Lifanov, *Numerical methods in singular integral equations*. Moscow, Nauka, 1985.
- [8] F. Erdogan, G.D. Gupta. "On the numerical solution of singular integral equations", *Quart. Appl. Math.* vol.29, №4. pp.525-534, 1972.
- [10] B. Kantor, V. Naumenko, and E. Strelnikova, "Possibility of choosing control points on the elements' boundary in numerical solution of the singular integral equations with the Hadamard kernel", *Reports of NAS of Ukraine*, vol.1, pp.20-27, 1996.
- [11] D. Rostami Varnos Fardami. "A new aspect for choosing collocation points for solving bi-harmonic equations", *Applied Math. And Applications*, vol. 181 (2), pp. 1112-1119, 2006.
- [12] L.E. Lindgran. "From Weighted Residual Methods to Finite Element Method", – Cambridge, England, 2009.

Караєв Артем Олександрович – аспірант; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків-22, майдан Свободи, 4, 61022; e-mail: a.karaiev@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3176-8496.

Стрельникова Олена Олексадрівна – доктор технічних наук, професор; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків-22, майдан Свободи, 4, 61022; e-mail: elena15@gmx.com; ORCID: 0000-0003-0707-7214.

УДК 519.85

Преобразование координат в задачах глобальной оптимизации

А. И. Косолап, А. А. Романчук

Украинский государственный химико-технологический университет, проспект Гагарина, 8, г. Днепр,
49005, Україна
e-mail: anivkos@ua.fm

Актуальность. Рассматривается задача глобальной оптимизации в евклидовом конечномерном пространстве. Такие задачи возникают при математическом моделировании сложных систем в технике, управлении, экономике, технологических процессах, проектировании, искусственном интеллекте, информатике и других областях знаний. Они относятся к классу NP-сложных. Для таких задач еще не разработаны эффективные численные методы. **Цель.** Использовать преобразование пространства и точную квадратичную регуляризацию для численного решения задач глобальной оптимизации. **Методы исследования.** Мы используем метод точной квадратичной регуляризации для решения многоэкстремальных задач. Это метод сводит решение задачи к максимуму нормы вектора на выпуклом множестве. Для численной эффективности метода точной квадратичной регуляризации в задачах глобальной оптимизации предлагается преобразование координат, которое заключается в смещении допустимой области в направлении биссектрисы положительного ортанта. **Результаты.** Смещение координат часто приводит исходную многоэкстремальную задачу к одноэкстремальной. Для решения полученной задачи используется эффективный прямо-двойственный метод внутренней точки. В общем случае, необходимо использовать также метод дихотомии. **Выводы.** Разработана новая методика для решения многоэкстремальных задач. Сравнительные численные эксперименты подтверждают эффективность данного преобразования при решении множества тестовых задач глобальной оптимизации. Практически для всех известных тестовых задач глобальной оптимизации данная методика показала лучшие численные результаты в сравнении с численными результатами, полученными существующими методами. Эта методика может быть использована для решения сложных прикладных задач.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, преобразование координат, метод точной квадратичной регуляризации, метод дихотомии, прямо-двойственный метод внутренней точки.

Актуальність. Розглядається задача глобальної оптимізації в евклідовому скінченномірному просторі. Такі задачі виникають при математичному моделюванні складних систем в техніці, управлінні, економіці, технологічних процесах, проектуванні, штучному інтелекті, інформатиці та інших областях знань. Вони відносяться до класу NP-складних. Для таких задач ще не розроблені ефективні чисельні методи. **Мета.** Використовувати перетворення простору і точну квадратичну регуляризацию для чисельного розв'язування задач глобальної оптимізації. **Методи дослідження.** Ми використовуємо метод точної квадратичної регуляризації для розв'язування багатоекстремальних задач. Цей метод зводить розв'язування задачі до максимуму норми вектора на опуклому множині. Для чисельної ефективності методу точної квадратичної регуляризації в задачах глобальної оптимізації пропонується перетворення координат, яке полягає в зміщенні допустимої області в напрямку бісектриси позитивного ортанта. **Результати.** Зсув координат часто призводить вихідну багатоекстремальну задачу до одноекстремальної. Для розв'язування отриманої задачі використовується ефективний прямо-двоїстий метод внутрішньої точки. У загальному випадку, необхідно використовувати також метод дихотомії. **Висновки.** Розроблено нову методику для розв'язування багатоекстремальних задач. Порівняльні чисельні експерименти підтверджують ефективність даного перетворення при розв'язуванні безлічі тестових задач глобальної оптимізації. Практично для всіх відомих тестових задач глобальної оптимізації дана методика показала кращі чисельні результати в порівнянні з чисельними результатами, отриманими існуючими методами. Ця методика може бути використана для розв'язування складних прикладних задач.

Ключові слова: глобальна оптимізація, перетворення координат, метод точної квадратичної регуляризації, метод дихотомії, прямо-двоїстий метод внутрішньої точки.

Actuality. We consider a problem of global optimization in Euclidian finite-dimensional space. Such problems arise at mathematical modelling of difficult systems in the technician, management, economy, technological processes, designing, an artificial intellect, computer science and other fields of knowledge. These problems belong to the class NP-difficult. Effective numerical methods are not developed for such problems yet. **Purpose.** We use transformation of space and exact quadratic regularization for the numerical solution of problems of global optimization. **Research methods.** We use a method exact quadratic regularization for the solution of multiextreme problems. It is a method reduces the problem solution to a maximum of norm of a vector on convex set. We offer transformation of co-ordinates which consists in displacement of admissible area in a direction of a bisector positive orthant. It raises numerical efficiency of a method exact quadratic regularization in problems of global optimization. **Results.** Displacement of co-ordinates often leads an initial multiextreme problem of the one-extreme. We use an effective is primer-dual interior point method for the solution of the received problem. Generally, it is necessary to use also a dichotomy method. **Conclusions.** The new technique is developed for the solution of multiextreme problems. Comparative numerical experiments confirm efficiency of the given transformation at the solution of set of test problems of global optimization. The given technique has shown the best numerical results in comparison with the numerical results received by the best existing methods. We have received the best results practically for all known test problems of global optimization. This technique can be used for the solution of difficult applied problems.

Key words: *global optimization, coordinate transformation, exact quadratic regularization method, dichotomy method, primer-dual interior point method.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Математическое моделирование сложных систем часто приводит к необходимости решения задач оптимизации. Такие задачи возникают в экономике, финансах, управлении, технологических процессах, информатике и других областях. Математические модели этих сложных систем являются многоэкстремальными задачами. Численное их решение представляет сложную проблему. В тоже время, выбор не оптимальных решений приводит к чрезмерному расходованию ограниченных ресурсов при построении сложных систем. Поэтому запросы практики стимулируют разработку новых методов решения сложных оптимизационных задач. Для задач глобальной оптимизации в настоящее время разработаны методы ветвей и границ [1]. Эти методы могут использоваться для решения задач малой размерности, так как с увеличением размерности задачи количество итераций в этих методах растет экспоненциально. Новым направлением в глобальной оптимизации является полуопределенное программирование [2]. Оно используется для решения общих квадратичных и полиномиальных задач. Однако в общем случае, полуопределенная оптимизация позволяет находить только оценки решений в многоэкстремальных задачах. К таким же результатам приводят и двойственные методы. Разработаны многочисленные методы, использующие случайный поиск. Это, прежде всего, генетические и эволюционные методы [3]. Эти методы иногда позволяют находить глобальный экстремум при решении тестовых задач, однако, очень часто решения, полученные этими методами далеки от оптимальных. В настоящее время разработан метод точной квадратичной регуляризации, который при решении множества тестовых задач показал лучшие результаты по сравнению с существующими методами [4]. Исследования показывают, что эффективность метода точной квадратичной регуляризации значительно возрастает при преобразовании пространства, при котором допустимая область задачи смещается в направлении биссектрисы положительного ортанга. Использование этого преобразование является предметом настоящей работы.

2. Постановка задачи и метод ее решения

Рассмотрим задачу оптимизации

$$\min \{f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, x \in E^n\} \quad (1)$$

где предполагается, что все функции $f_i(x)$ – выпуклые и непрерывные, x – n -мерный вектор, а E^n – евклидово пространство. Для эффективного решения задачи (1) предполагается, что все функции $f_i(x)$ дважды дифференцируемые. Это достаточно большой класс задач, так как он включает все квадратичные и полиномиальные задачи. При данных предположениях задача имеет решение, если ее допустимое множество компактно.

Если все функции $f_i(x)$ – выпуклые, то задача (1) будет иметь единственное решение и для ее решения эффективным является прямо-двойственный метод внутренней точки [5]. Этот метод позволяет решать задачи (1) с числом переменных до 10 миллионов. К сожалению, выпуклость функций в задачах оптимизации является исключением, а большинство сложных систем приводят к невыпуклым функциям. В таком случае, задача (1) может иметь множество локальных экстремумов. Некоторые практические задачи в информатике и других областях имеют 2^n или $n!$ локальных экстремумов. Для таких задач разбиение допустимой области на части (сеточные методы) является неэффективным.

В методе точной квадратичной регуляризации задача (1) преобразуется к виду

$$\max \{\|x\|^2 \mid f_0(x) + s + (r-1)\|x\|^2 \leq d, f_i(x) + r\|x\|^2 \leq d, i = 1, \dots, m\}, \quad (2)$$

где $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2$, а параметр s выбирается таким, чтобы выполнялось условие

$$s \geq \|x^*\|^2 - f_0(x^*),$$

где точка x^* – решение задачи (1). Так как точка x^* неизвестна, то для оценки параметра s используем верхние границы изменения переменных, которые легко найти. При заданном значении s и фиксированном значении переменной d первое ограничение задачи (2) будет

активным. Тогда при фиксированном значении d решение задачи (2) будет приводить к убыванию значения целевой функции $f_0(x)$. Действительно, из равенств

$$f_0(x^0) + s + (r-1) \|x^0\|^2 = d,$$

$$f_0(x^1) + s + (r-1) \|x^1\|^2 = d$$

и условия $\|x^1\|^2 > \|x^0\|^2$ следует неравенство $f_0(x^1) < f_0(x^0)$.

При увеличении значения $d_1 > d$ и выполнении условий $r\|x^0\|^2 = d$ и $r\|x^1\|^2 = d_1$ получаем равенства

$$f_0(x^0) + s + (r-1) \|x^0\|^2 = d,$$

$$f_0(x^1) + s + (r-1) \|x^1\|^2 = d_1,$$

откуда следует неравенство $f_0(x^0) < f_0(x^1)$. Таким образом, решение задачи (2) достигается при минимальном значении d .

Параметр $r > 0$ в задаче (2) выбираем таким, чтобы ее ограничения были выпуклыми. Для общих квадратичных функций достаточно, чтобы их матрицы были с преобладающими диагоналями. Это условие легко выполнить. Таким образом, задачу (2) можно записать в виде

$$\max \{ \|x\|^2 \mid x \in S(x, d) \}, \quad (3)$$

где $S(x, d)$ – выпуклое множество. Необходимо определить минимальное значение d для которого решение задачи (3) удовлетворяет условию $r \|x\|^2 = d$. Минимальное значение d находим, решая задачу выпуклой оптимизации

$$\min \{ d \mid x \in S(x, d), r \|x\|^2 \leq d \}. \quad (4)$$

Если второе ограничение будет активным, то решение задачи (4) совпадает с решением задачи (1). Это означает, что многоэкстремальная задача (1) точной квадратичной регуляризацией преобразуется к одноэкстремальной.

Для поиска минимального значения d в задаче (3), для которого выполняется условие $r \|x\|^2 = d$, используем метод дихотомии. Этот метод заключается в последовательном увеличении d и решении для каждого значения d задачи (3) до достижения требуемого равенства. Если минимальное значение d найдено и для этого значения решение задачи (3) удовлетворяет условию $r \|x\|^2 = d$ с заданной точностью, то задача (1) решена.

3. Преобразование пространства в задачах глобальной оптимизации. Решение задачи (3) будет достигаться на границе допустимой области. Поэтому важное значение, для нахождения решения задачи (3), имеет кривизна выпуклой поверхности $\partial S(x, d)$.

Кривизной поверхности $\partial S(x, d)$ в точке x^0 будем называть минимальную кривизну дуг $(x^0, x^i) \subseteq \partial S(x, d)$, где x^i – точки ε -окрестности точки x^0 , при условии, что $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лемма 1. Пусть x^1 и x^2 два локальных максимума в задаче (3), где выпуклое множество $S(d) \subseteq E^n_+$, тогда функция $\|x\|^2$ достигает минимума на любой выпуклой дуге $G(x^1, x^2)$ выпуклой поверхности $\partial S(x, d)$, соединяющей точки x^1 и x^2 .

Доказательство. Из определения локального максимума следует, что функция $\|x\|^2$ убывает в любом направлении от точек x^1 и x^2 в их окрестности. Если, начиная с точки x^0 дуги $G(x^1, x^2)$ в направлении от x^1 к x^2 функция $\|x\|^2$ начнет возрастать, то x^0 – точка минимума функции $\|x\|^2$. Если же вдоль дуги $G(x^1, x^2)$ в направлении от x^1 к x^2 функция $\|x\|^2$ монотонно убывает, то в окрестности точки x^2 вдоль дуги $G(x^1, x^2)$ (от точки x^2 к x^1) функция $\|x\|^2$ будет возрастать. Но это противоречит тому, что x^2 – точка локального максимума. Противоречие доказывает лемму.

Минимум на дуге, соединяющих два локальных максимума в задаче (3) будем называть *внутренним минимумом*, если множители соответствующей функции Лагранжа отрицательны. Очевидно, что если поверхность $\partial S(x, d)$ не содержит внутренних минимумов, то задача (3) будет одноэкстремальной.

Лемма 2. Пусть в каждой точке x^i выпуклой поверхности $S(x, d)$ ее минимальная кривизна больше кривизны шара $\{x \mid \|x\|^2 \leq \|x^i\|^2\}$, тогда задача (2) является одноэкстремальной.

Доказательство. Допустим противное, что задача (2) имеет два локальных максимума в точках x^1 и x^2 . Соединим эти дуги кривой минимальной длины на поверхности $S(x, d)$. Тогда из

леммы 1 следует, что на этой кривой должна быть точка минимума функции $\|x\|^2$. Но в точке минимума кривизна кривой будет меньше кривизны шара. Это противоречие доказывает лемму.

Задача (2) будет одноэкстремальной и в том случае, когда условия леммы 2 будут выполняться только в экстремальных точках.

Будем обозначать через $S(x - h, d)$ сдвиг выпуклого множества S вдоль биссектрисы положительного ортанта на величину $h > 0$, а через

$$S_0 = \{x \mid \|x - h\|^2 + s + 2\|x\|^2 = d\}.$$

Теорема 1. *Существует такое $h > 0$, что задача*

$$\max\{\|x\|^2 \mid x \in S(x - h, d), x \geq h\} \quad (5)$$

будет одноэкстремальной.

Доказательство. При увеличении значения h минимальная кривизна поверхности S не меняется, а поверхности шара будет убывать при увеличении его радиуса. Следовательно, существует такое $h > 0$, для которого кривизна шара будет меньше кривизны S в ее экстремальных точках. Тогда в соответствии с леммой 2 задача (5) будет одноэкстремальной.

Из данной теоремы следует, что при смещении допустимого множества задачи (3) в направлении биссектрисы положительного ортанта число его экстремальных точек убывает.

Теорема 2. *Пусть задача (3) одноэкстремальная, тогда множество $S(x - h, d)$ связано на выпуклой поверхности S_0 .*

Доказательство. Если задача (3) одноэкстремальная, то и задача

$$\max\{\|x + h\|^2 \mid x \in S\} \quad (6)$$

одноэкстремальная. Это следует из того, что после замены $x = x + h$ задача (6) принимает вид

$$\max\{\|x\|^2 \mid x \in S(x - h, d)\},$$

которая является одноэкстремальной для $h > 0$. Одноэкстремальность в задаче (6) означает, что линии уровня ее целевой функции делят допустимую область на две части. Так как поверхность S_0 совпадает с линиями уровня функции $\|x + h\|^2$ при любом фиксированном значении x_{n+1} , то эта поверхность также будет делить допустимую область на две части (допустимая область не зависит от переменной x_{n+1}). Таким образом, множество $S(x - h, d)$ связано на поверхности выпуклого множества S_0 .

Задача (3) преобразуется точной квадратичной регуляризацией к эквивалентной задаче

$$\max\{\|x\|^2 \mid x \in S_0 \cap S(x - h, d)\} \quad (7)$$

при смещении допустимой области.

Теорема 3. *Пусть x^* – решение задачи (2), задача (5) одноэкстремальна и $x^* + h$ ее решение, тогда и задача (7) также одноэкстремальна.*

Доказательство. Достаточно показать, что точка $x^* + h$ удовлетворяет ограничениям задачи (7). Учитывая, что

$$s \geq 2\|x^*\|^2 + 2\|h\|^2$$

и

$$d = 3(\|x^* + h\|^2 + x_{n+1}^2)$$

получаем для второго ограничения задачи (7)

$$\|x^* + h\|^2 + x_{n+1}^2 - 2\|h\|^2 + 2\|x^*\|^2 + 2\|h\|^2 + x_{n+1}^2 \leq 3(\|x^* + h\|^2 + x_{n+1}^2).$$

Откуда

$$-\|x^* + h\|^2 + 2\|x^*\|^2 \leq 0.$$

Таким образом, точка $x^* + h$ удовлетворяет ограничениям задачи (7). Теорема доказана.

Если условия теоремы 3 не выполняются, то задача (7) будет многоэкстремальной. Линии уровня целевой функции задачи (7) на S_0 будут совпадать с линиями уровня функции $e^T x$ на S_0 . Поэтому задача (7) эквивалентна задаче

$$\min\{e^T x \mid x \in S_0 \cap S(x - h, d)\}, \quad (8)$$

где $e = (1, \dots, 1)$. Если решение задачи (8) достигается в точке x^1 и $r\|x^1\|^2 > d$, то методом дихотомии значение d будет уменьшено.

Полученные результаты позволяют построить следующий алгоритм для решения задачи (7).

Шаг 1. Решаем задачу (2) методом дихотомии и прямо-двойственным методом внутренней точки, начиная с начальной точки x^0 . Пусть x^1 – ее решение, для которого выполняется условие $r\|x^1\|^2 = d$.

Шаг 2. Выберем h – величину смещения пространства и решим задачу (8). Если x^2 – ее решение, для которого выполняется условие $r\|x^2\|^2 > d$, то полагаем $x^0 = x^2$ и переходим к шагу 1.

Шаг 3. Если увеличение h не приводит к уменьшению значения целевой функции задачи (1), то текущее решение является оптимальным. В противном случае, увеличиваем значение h и переходим к шагу 1.

4. Численные эксперименты

Для проверки численной эффективности метода точной квадратичной регуляризации со смещением пространства были решены известные тестовые задачи для глобальной оптимизации. Многие из таких задач можно найти на веб-сайте GLOBAL Library: <http://www.gamsworld.org/global/globallib.htm>. Так, была решена сложная задача минимизации функции Egg Holder

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} [-x_i \sin(\sqrt{|x_i - x_{i+1} - 47|}) - (x_{i+1} + 47) \sin(\sqrt{|x_{i+1} + x_i / 2 + 47|})], -512 \leq x \leq 512 \right\}.$$

В работе [6] приведено лучшее на сегодняшний день решение этой задачи $f_0(x^*) = -74103,26$ для $n = 100$. Метод точной квадратичной регуляризации со сдвигом пространства показал лучший результат $f_0(x^*) = -89948,521$. В этой же работе приведено лучшее решение для другой сложной функции Rana

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} [(x_{i+1} + 1) \cos(\sqrt{|x_{i+1} - x_i + 1|}) \sin(\sqrt{|x_{i+1} + x_i + 1|}) + x_i \cos(\sqrt{|x_{i+1} + x_i + 1|}) \sin(\sqrt{|x_{i+1} - x_i + 1|})], -500 \leq x \leq 500 \right\}$$

при $n = 100$. Найденный глобальный минимум этой задачи на сегодняшний день равен $f_0(x^*) = -41047.18$, а методом точной квадратичной регуляризации со сдвигом пространства был снова получен лучший результат $f_0(x^*) = -50855.784$. Можно привести также задачу Ex8_4_7 с ограничениями из веб-сайта (см. выше). В этой задаче 62 переменные и 40 ограничений. Лучший известный результат $f_0(x^*) = 29.0473$. Метод точной квадратичной регуляризации со сдвигом пространства показал лучший результат $f_0(x^*) = 26.99430909$. Еще несколько результатов расчетов тестовых задач из указанного сайта приведены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты решений тестовых задач

№ п/п	Задача	n	m	Метод EQR	Лучшее известное решение
1	Ex2_1_8	24	10	15639	15990
2	Ex7_3_5	13	15	7.684E-06	1.2069
3	Ex8_4_3	52	25	-12,018963	-3,25611
4	Ex8_5_6	6	7	-2.264901975	-0.998832628
5	Ex8_5_6	20	7	-1020.242976	-986.513
6	Harker	12	9	-3.27297594	900
7	Haverly	24	10	15639	15990

4. Выводы и направления дальнейших исследований

Предложен новый метод точной квадратичной регуляризации со сдвигом пространства. Численные эксперименты показали его преимущество над существующими методами глобальной оптимизации при решении множества тестовых задач. В настоящее время этот метод используется для решения прикладных задач теории расписаний, оптимизации надежности сложных систем, раскрытия материалов, упаковки шаров и прямоугольников и других задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Horst R., Tuy H. *Global Optimization: Deterministic Approaches*. 3rd ed./ R. Horst, H. Tuy. – Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 727 p.
2. Ye Y. *Semidefinite programming* /Y. Ye. – Stanford University, 2003. – 161 p.
3. Kenneth V. P., Storn R. M., Lampinen J. A. *Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization* / V. P. Kenneth, R. M. Storn, J. A. Lampinen. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 542 p.
4. Косолап А. И. *Глобальная оптимизация. Численные эксперименты* / А. И. Косолап. – Днепр, ПГАСА, 2017. – 112 с.
5. Nocedal J., Wright S. J. *Numerical optimization* / J. Nocedal, S. J. Wright. – Springer, 2006. – 685 p.
6. Wu S. and Chow T. W. S. *Self-Organizing and Self-Evolving Neurons: A New Neural Network for Optimization* / S. Wu and T. W. S. Chow // *IEEE transactions on neural networks*, 2007, Vol.18, No.2. – P.385-396.

REFERENCES

1. . R. Horst and H. Tuy, *Global Optimization: Deterministic Approaches*. 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
2. Y. Ye, *Semidefinite programming*. Stanford University, 2003.
3. V. P. Kenneth, R. M. Storn, J. A. Lampinen, *Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
4. А. И. Косолап, *Глобальная оптимизация. Численные эксперименты*. Днепр: ПГАСА, 2017.
5. J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical optimization*. Springer, 2006.
6. S. Wu and T. W. S. Chow, *Self-Organizing and Self-Evolving Neurons: A New Neural Network for Optimization* // *IEEE transactions on neural networks*, vol.18, no.2, pp.385-396, 2007.

Косолап Анатолий Иванович – доктор физико-математических наук, профессор; Украинский государственный химико-технологический университет, г. Днепр, проспект Гагарина, 8, 49005; e-mail: anivkos@ua.fm; ORCID: 0000-0001-73386707.

Романчук Александр Александрович - аспирант; Украинский государственный химико-технологический университет, г. Днепр, проспект Гагарина, 8, 49005; e-mail: aaromanchuk1991@gmail.com; ORCID: [0000-0003-2623-350X](https://orcid.org/0000-0003-2623-350X).

УДК 517.988 : 519.633

Метод Роте та метод двобічних наближень у чисельному аналізі задач для одновимірних квазілінійних параболічних рівнянь

М.В. Сидоров

Харківський національний університет радіоелектроніки, пр. Науки, 14, м. Харків, 61166, Україна
e-mail: maxim.sidorov@nure.ua

Розглядається квазілінійне рівняння теплопровідності з першими та другими крайовими умовами. Для його чисельного аналізу пропонується використати модифікований метод Роте у комбінації з методом двобічних наближень. Для побудови двобічних наближень до додатного розв'язку задачі на кожному часовому шарі використовуються методи теорії напівупорядкованих просторів, зокрема, результати В.І. Опоїцева про розв'язність операторних рівнянь з гетеротонним оператором. Робота і ефективність розробленого метода продемонстрована обчислювальним експериментом для задачі зі степенною нелінійністю.

Ключові слова: квазілінійне рівняння теплопровідності, додатний розв'язок, метод Роте, гетеротонний оператор, двобічні наближення.

Рассматривается квазилинейное уравнение теплопроводности с первыми и вторыми краевыми условиями. Для его численного анализа предлагается использовать модифицированный метод Роте в комбинации с методом двусторонних приближений. Для построения двусторонних приближений к положительному решению задачи на каждом временном слое используются методы теории полуупорядоченных пространств, в частности, результаты В.И. Опоицева о разрешимости операторных уравнений с гетеротонным оператором. Работа и эффективность разработанного метода продемонстрирована вычислительным экспериментом для задачи со степенной нелинейностью.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение теплопроводности, положительное решение, метод Роте, гетеротонный оператор, двусторонние приближения.

In this paper, we consider the first and the second initial-boundary problem for the one-dimensional semi-linear heat equation. Problems of this type (with the search for a positive solution) often arise in the mathematical modeling of processes in chemical kinetics, combustion theory, biology, and others. Based on the modified Rothe method, the original non-stationary problem is replaced at each time layer by a nonlinear boundary-value problem for an ordinary differential equation. Next, for finding a positive solution of this nonlinear boundary value problem, a method of successive approximations with a two-sided character of convergence is constructed. To construct two-sided approximations to the positive solution of the problem, methods of the theory of semi-ordered spaces are used on each time layer, in particular, the results of V.I. Opoicev on the solvability of operator equations with a heterotone operator are used. Using the Green's functions method of nonlinear boundary value problems for an ordinary differential equation, a transition to an equivalent Hammerstein integral equation is considered, which is investigated as a nonlinear operator equation with a heterotone operator in the space of continuous functions that is semi-ordered by a cone of non-negative functions. Next, a strongly invariant cone segment and two iterative sequences are constructed which start from the corresponding ends of a strongly invariant cone segment. The first of these sequences is monotonically increasing and approximates the desired solution from below, and the second is monotonically decreasing and brings the desired solution from above. Conditions for the existence of a common limit of these sequences are given, that is, the conditions for uniqueness of the solution of nonlinear boundary value problems of the Rothe method on each time layer. A posteriori estimation of the error of the approximate solution of the problem was obtained. A computational experiment was carried out for a heterotone power nonlinearity problem.

Keywords: quasi-linear heat equation, positive solution, Rothe method, heterotone operator, two-sided approach.

1. Постановка задачі

Задачі математичного моделювання різноманітних фізико-хімічних явищ та процесів призводять до необхідності розв'язання початкових або початково-крайових задач для нелінійного рівняння вигляду

$$\rho(u)c(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k(u)\operatorname{grad}u) + f(\mathbf{x}, t, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^m, \quad t > 0. \quad (1)$$

Наприклад, якщо рівняння (1) описує нелінійні процеси теплопровідності, то $u(\mathbf{x}, t)$ – температура в точці \mathbf{x} у момент часу t , ρ – щільність, c – питома теплоємність, k – коефіцієнт теплопровідності середовища, $f(\mathbf{x}, t, u)$ – функція потужності внутрішніх теплових джерел.

Дослідженню різних задач для рівняння вигляду (1) присвячено багато праць, зокрема, роботи [1 – 6]. Серед чисельних методів дослідження задач для рівняння (1) можна виділити скінченно-різницеві методи (метод сіток) та напівдискретні методи (метод прямих, або метод

Роте) [7 – 9].

Розглянемо одновимірне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u), \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \quad (2)$$

з початковою умовою

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (3)$$

і одними з двох типів крайових умов

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (4)$$

або

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (5)$$

Рівняння (2) є частинним випадком рівняння (1) для випадку, коли нелінійність рівняння обумовлена лише функцією потужності внутрішніх джерел. За формою рівняння (2) є рівнянням типу Колмогорова-Петровського-Піскунова і зустрічається у задачах моделювання хвильових процесів у біології, теорії горіння, хімічній кінетиці тощо [6, 7, 10].

Вважатимемо, що функція $f(x, t, u)$ у (2) невід'ємна та неперервна за сукупністю змінних x , t , u , якщо $x \in (0, l)$, $t > 0$, $u > 0$, функція $\varphi(x)$ у (3) невід'ємна та неперервна за змінною x , якщо $x \in (0, l)$, і ставиться задача відшукування додатного при $x \in (0, l)$, $t > 0$ розв'язку $u(x, t)$ відповідної задачі. У випадку крайових умов (4) вважатимемо, що $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, а для крайових умов (5) вважатимемо, що $\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$.

Метою даної роботи є розробка для розв'язання початково-крайових задач (2) – (4) та (2), (3), (5) нових чисельних методів, які є модифікацією методу Роте і на кожному часовому шарі є ітераційними з двобічним характером збіжності до шуканого розв'язку. Двобічні наближені методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь, засновані на використанні теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах, розроблялись у роботах [11 – 15]. Побудова двобічних наближень до розв'язків задач для нестационарних рівнянь не розглядалася. Отже, тема роботи є актуальною.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті в [11, 15], і розповсюджує їх на нестационарні рівняння.

2. Побудова дискретизації задачі модифікованим методом Роте

Задачі (2) – (4) та (2), (3), (5) розглядатимемо при $t \in [0, T]$. На відрізку $[0, T]$ введемо сітку з кроком τ , яка складається з точок $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, 2, \dots, M$, $M\tau = T$, і позначимо

$$u_j = u_j(x) = u(x, t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Відповідно до методу прямих (методу Роте) в рівнянні (2) диференціальний оператор $\frac{\partial u}{\partial t}$ апроксимується відношенням скінченних різниць і розв'язок задачі шукається вздовж прямих $t = \text{const}$.

Рівняння (2) з похибкою $O(\tau)$ замінимо на прямій $t = t_j$, $j = 1, 2, \dots, M$, звичайним диференціальним рівнянням

$$\frac{u_j - u_{j-1}}{\tau} = a^2 \frac{d^2 u_j}{dx^2} + f(x, t_j, u_j). \quad (6)$$

Зауважимо, що на відміну від оригінального методу Роте [9] у модифікованій схемі (6) нелінійність апроксимується на поточному, а не на попередньому часовому шарі.

На нульовому часовому шарі відповідно початковій умові (3) покладемо

$$u_0(x) = \varphi(x). \quad (7)$$

Рівняння (6) розглядаються при $x \in (0, l)$. Використовуючи крайові умови (4) або (5) вихідної задачі поставимо для кожного з рівнянь (6) першу або другу крайову задачу відповідно, доповнивши крайовими умовами

$$u_j(0) = 0, u_j(l) = 0,$$

або

$$u'_j(0) = 0, u'_j(l) = 0,$$

Тоді розв'язання початково-крайових задач (2) – (4) та (2), (3), (5) зводиться до розв'язання послідовності нелінійних крайових задач

$$-\frac{d^2 u_j}{dx^2} + \frac{1}{a^2 \tau} u_j = \frac{1}{a^2 \tau} u_{j-1} + \frac{1}{a^2} f(x, t_j, u_j), \quad x \in (0, l), \quad (8)$$

$$u_j(0) = 0, u_j(l) = 0, \quad (9)$$

або

$$u'_j(0) = 0, u'_j(l) = 0. \quad (10)$$

Збіжність метода Роте при $\tau \rightarrow 0$ доведена у різних класах гладких та узагальнених розв'язків для широкого класу нелінійностей у рівнянні (2) [4, 9].

3. Побудова двобічних наближень для функцій $u_j(x)$

Для аналізу задач (8), (9) і (8), (10) та побудови двобічних наближень до їх додатних розв'язків використаємо методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [12, 14].

Нехай $C[0, l]$ – банахів простір неперервних на $[0, l]$ функцій з нормою $\|u\| = \max_{x \in [0, l]} |u(x)|$.

Виділимо у $C[0, l]$ конус

$$K_+ = \{u \in C[0, l] : u(x) \geq 0, x \in [0, l]\}$$

невід'ємних функцій. Конус K_+ у $C[0, l]$ є нормальним (і навіть гострим) [12, 14].

За допомогою конуса K_+ у просторі $C[0, l]$ введемо напівупорядкованість за правилом: для $u, v \in C[0, l]$ $u \leq v$, якщо $v - u \in K_+$, тобто

$$u \leq v, \text{ якщо } u(x) \leq v(x) \text{ для всіх } x \in [0, l].$$

Від задач (8), (9) і (8), (10) перейдемо до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна

$$u_j(x) = \int_0^l G(x, s) \left[\frac{1}{a^2 \tau} u_{j-1}(s) + \frac{1}{a^2} f(s, t_j, u_j(s)) \right] ds,$$

або

$$u_j(x) = \varphi_j(x) + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, s) f(s, t_j, u_j(s)) ds \quad (11)$$

де $\varphi_j(x) = \frac{1}{a^2 \tau} \int_0^l G(x, s) u_{j-1}(s) ds$, $G(x, s)$ – функція Гріна відповідної крайової задачі для

оператора $-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{a^2 \tau}$ на відрізку $[0, l]$. Зауважимо, що $\varphi_j(x) \geq 0$, якщо $x \in [0, l]$, оскільки $u_{j-1}(x) \geq 0$, якщо $x \in [0, l]$.

Для перших крайових умов (9) функція Гріна має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} a\sqrt{\tau} \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{a\sqrt{\tau}} \operatorname{sh} \frac{l-s}{a\sqrt{\tau}}}{\operatorname{sh} \frac{l}{a\sqrt{\tau}}}, & 0 \leq x \leq s, \\ a\sqrt{\tau} \frac{\operatorname{sh} \frac{s}{a\sqrt{\tau}} \operatorname{sh} \frac{l-x}{a\sqrt{\tau}}}{\operatorname{sh} \frac{l}{a\sqrt{\tau}}}, & s < x \leq l, \end{cases} \quad (12)$$

а для других крайових умов (10) – вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} a\sqrt{\tau} \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a\sqrt{\tau}} \operatorname{ch} \frac{l-s}{a\sqrt{\tau}}}{\operatorname{sh} \frac{l}{a\sqrt{\tau}}}, & 0 \leq x \leq s, \\ a\sqrt{\tau} \frac{\operatorname{ch} \frac{s}{a\sqrt{\tau}} \operatorname{ch} \frac{l-x}{a\sqrt{\tau}}}{\operatorname{sh} \frac{l}{a\sqrt{\tau}}}, & s < x \leq l. \end{cases} \quad (13)$$

Розв’язком (узагальненим) задачі (8), (9) чи (8), (10) називатимемо функцію $u_j^* \in C[0, l]$, яка є неперервним додатним розв’язком інтегрального рівняння (11).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор T , який діє у $C[0, l]$ за правилом, що визначається правою частиною рівняння (11):

$$T(u) = \varphi_j(x) + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, s) f(s, t_j, u(s)) ds. \quad (14)$$

Оскільки $f(x, t, u) \geq 0$, якщо $x \in (0, l)$, $t > 0$, $u > 0$, $\varphi_j(x) \geq 0$, якщо $x \in [0, l]$, та $G(x, s) \geq 0$, $x, s \in [0, l]$, то оператор T є додатним, тобто залишає інваріантним конус K_+ : $T(K_+) \subset K_+$.

Припустимо, що функція $f(x, t, u)$ дозволяє діагональне подання $f(x, t, u) = \hat{f}(x, t, u, u)$, де неперервна за сукупністю змінних x, t, v, w функція $\hat{f}(x, t, v, w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $x \in [0, l]$. Тоді оператор T вигляду (14) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w) = \varphi_j(x) + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, s) \hat{f}(s, t_j, v(s), w(s)) ds. \quad (15)$$

Оператори T і \hat{T} , очевидно, є цілком неперервними.

Позначимо $u_0(x) = \int_0^l G(x, s) ds$. Для перших крайових умов (9)

$$u_0(x) = \frac{2a^2\tau}{\operatorname{ch} \frac{l}{2a\sqrt{\tau}}} \operatorname{sh} \frac{x}{2a\sqrt{\tau}} \operatorname{sh} \frac{l-x}{2a\sqrt{\tau}},$$

а для других крайових умов (10)

$$u_0(x) = a^2\tau.$$

Оскільки кожна з функцій Гріна (13), (14) задовольняє нерівності

$$u_0(x)\psi_1(s) \leq G(x, s) \leq u_0(x)\psi_2(s),$$

де невід’ємні функції $\psi_1, \psi_2 \in C[0, l]$ відмінні від тотожного нуля, то

$$\gamma_1 u_0 \leq T(u) \leq \gamma_2 u_0,$$

де

$$\gamma_1 = \int_0^l \psi_1(s) \left[\frac{1}{a^2\tau} u_{j-1}(s) + \frac{1}{a^2} f(s, t_j, u(s)) \right] ds,$$

$$\gamma_2 = \int_0^l \psi_2(s) \left[\frac{1}{a^2\tau} u_{j-1}(s) + \frac{1}{a^2} f(s, t_j, u(s)) \right] ds,$$

а отже, оператор (14) є u_0 -додатним.

У конусі K_+ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ умовами

$$\hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0, \hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0,$$

тобто

$$\varphi_j(x) + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, s) \hat{f}(s, t_j, v_0(s), w_0(s)) ds \geq v_0(x) \text{ для всіх } x \in [0, l],$$

$$\varphi_j(x) + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, s) \hat{f}(s, t_j, w_0(s), v_0(s)) ds \leq w_0(x) \text{ для всіх } x \in [0, l].$$

З огляду на u_0 -додатність оператора T кінці сильно інваріантного конусного відрізка можна шукати у вигляді $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle \alpha u_0(x), \beta u_0(x) \rangle$, $0 \leq \alpha < \beta$. Тоді для визначення α і β ми отримуємо систему нерівностей

$$\varphi_j(x) + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, s) \hat{f}(s, t_j, \alpha u_0(s), \beta u_0(s)) ds \geq \alpha u_0(x) \text{ для всіх } x \in [0, l], \quad (16)$$

$$\varphi_j(x) + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, s) \hat{f}(s, t_j, \beta u_0(s), \alpha u_0(s)) ds \leq \beta u_0(x) \text{ для всіх } x \in [0, l]. \quad (17)$$

Сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}), \quad w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)} = v_0, \quad w^{(0)} = w_0,$$

тобто

$$v^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, s) \hat{f}(s, t_j, v^{(k)}(s), w^{(k)}(s)) ds, \quad (18)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, s) \hat{f}(s, t_j, w^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds, \quad (19)$$

$$v^{(0)}(x) = v_0(x), \quad (20)$$

$$w^{(0)}(x) = w_0(x). \quad (21)$$

Оскільки конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ є сильно інваріантним, оператор T , для якого оператор \hat{T} супровідний, є гетеротонним, то послідовність $\{v^{(k)}(x)\}$ не спадає за конусом K_+ , а послідовність $\{w^{(k)}(x)\}$ не зростає за конусом K_+ . Крім того, з нормальності конуса K_+ і повної неперервності оператора \hat{T} впливає існування границь $v^*(x)$ і $w^*(x)$ цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

Функції v^* і w^* є розв'язком системи рівнянь $v^* = \hat{T}(v^*, w^*)$, $w^* = \hat{T}(w^*, v^*)$, тобто системи

$$v^*(x) = \varphi_j(x) + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, s) \hat{f}(s, t_j, v^*(s), w^*(s)) ds,$$

$$w^*(x) = \varphi_j(x) + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, s) \hat{f}(s, t_j, w^*(s), v^*(s)) ds.$$

Якщо ж отримали, що $v^* = w^* = u_j^*$, то u_j^* – єдина на конусному відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle$ нерухома точка оператора T , а отже, u_j^* – єдиний на $\langle v_0, w_0 \rangle$ розв'язок відповідної крайової задачі.

Умовою, яка забезпечить єдиність додатного розв'язку є u_0 -псевдоувігнутість оператора T вигляду (14) [14], яка матиме місце, якщо для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\sigma \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(x, t, \sigma v, \frac{1}{\sigma} w\right) > \sigma \hat{f}(x, t, v, w), \quad x \in (0, L). \quad (22)$$

Отже, справджується така теорема.

Теорема. Нехай система нерівностей (16), (17) має розв'язок (α, β) такий, що $0 \leq \alpha < \beta$, і виконується умова (22). Тоді ітераційний процес (18) – (21) на кожному часовому шарі дискретизації метода прямих збігається до єдиного неперервного додатного розв'язку $u_j^* \in \langle \alpha u_0, \beta u_0 \rangle$ крайової задачі (8), (9) чи (8), (10), причому мають місце нерівності

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u_j^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

За наближений розв'язок вихідної нестационарної задачі на j -му часовому шарі на k -й ітерації приймаємо функцію

$$u_j^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2}. \quad (23)$$

Зауважимо, що перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу є те, що на кожній k -й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (23):

$$\max_{x \in [0, L]} |u_j^*(x) - u_j^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0, L]} |w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)|.$$

Тоді для заданої точності $\varepsilon > 0$ ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності $\max_{x \in [0, L]} |w^{(k_j)}(x) - v^{(k_j)}(x)| < 2\varepsilon$ і з точністю ε можна вважати, що $u^*(x, t_j) = u_j^*(x) \approx u_j^{(k_j)}(x)$.

Отже, застосовуючи запропонований метод двобічних наближень до крайових задач методу прямих на кожному часовому шарі, ми отримаємо набір функцій

$$u_0(x) = \varphi(x), u_1^{(k_1)}(x), u_2^{(k_2)}(x), \dots, u_M^{(k_M)}(x). \quad (24)$$

Далі за набором функцій (24) можна, використовуючи, наприклад, апарат теорії інтерлінації [16], побудувати наближений розв'язок задач (2) – (4) та (2), (3), (5) у вигляді функції $u_M(x, t)$, визначеної при всіх $x \in [0, l]$, $t \in [0, T]$. Цей наближений розв'язок має точність $O(\tau)$. Якщо зробити розрахунки з кроком $\frac{\tau}{2}$, то отримаємо наближений розв'язок $u_{2M}(x, t)$, який відповідно до правила Рунге можна уточнити до порядку $O(\tau^2)$ за формулою

$$u(x, t) = 2u_{2M}(x, t) - u_M(x, t). \quad (25)$$

3. Результати обчислювального експерименту

Для проведення обчислювального експерименту було обрано $a=1$, $l=1$, $f(x, t, u) = \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}$, $\varphi(x) = x(l-x)$ для перших крайових умов і $\varphi(x) = 1 + \cos \frac{\pi x}{l}$ для других крайових умов.

Для заданої функції $f(x, t, u)$ функцію $\hat{f}(x, t, v, w)$ оберемо у вигляді $\hat{f}(x, t, v, w) = \sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{w}}$. Нерівність (22) для неї набуває вигляду $\sqrt{\sigma v} + \sqrt{\frac{\sigma}{w}} > \sigma \left(\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{w}} \right)$ і, очевидно, виконується для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\sigma \in (0, 1)$.

Отже, відповідні нелінійні крайові задачі методу прямих матимуть єдиний додатний розв'язок на кожному часовому шарі, який можна буде апроксимувати двобічними ітераціями.

Оберемо крок за часом $\tau=0,1$. Для перших крайових умов нерівності (16), (17) виконуватимуться при $\alpha=3,55$, $\beta=6,47$. Ітераційний процес за формулами (18) – (21) збігся з точністю $\varepsilon=10^{-4}$ за шість ітерацій. На рис. 1 наведено графіки збіжності двобічних наближень

для першого часового шару при $\tau=0,1$. Аналіз оцінок похибки $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{x \in [0, L]} |w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)|$

наближеного розв'язку (23) на k -й ітерації, $k=0, 1, \dots, 6$, показав, що $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \approx q=0,29$, а отже,

послідовність $\{u^{(k)}(x)\}$ збігається у нормі $C[0; 1]$ до точного розв'язку крайової задачі

модифікованого методу Рунге (для першого часового шару) зі швидкістю геометричної прогресії з показником q . Зробимо тепер з початкового моменту часу два кроки з $\tau = 0,05$. Значення наближень до $u(x, 0,1)$, отримані обома способами (з кроком $\tau = 0,1$ і кроком $\tau = 0,05$), а також уточнені за формулою (25) значення на сітці з кроком $0,1$ наведено у табл. 1.

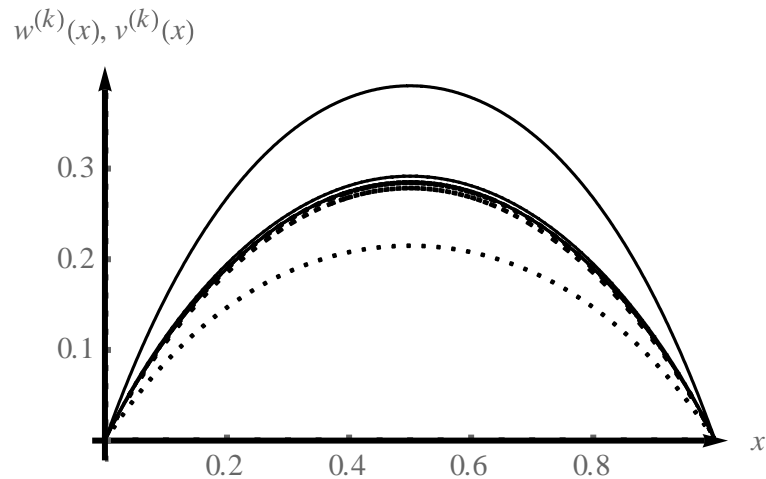


Рис. 1. Графіки верхніх та нижніх наближень для першого часового шару у випадку перших крайових умов

Таблиця 1. Значення наближень до $u(x, 0,1)$ на сітці з кроком $0,1$

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\tau = 0,1$	0	0,1118	0,1897	0,2430	0,2743	0,2847	0,2743	0,2430	0,1897	0,1118	0
$\tau = 0,05$	0	0,1137	0,1930	0,2471	0,2787	0,2891	0,2787	0,2471	0,1930	0,1137	0
Уточненні значення	0	0,1157	0,1964	0,2511	0,2830	0,2935	0,2830	0,2511	0,1964	0,1157	0

Оберемо крок за часом $\tau = 0,1$. Для других крайових умов нерівності (16), (17) виконуватимуться при $\alpha = 6,53$, $\beta = 17,60$. Ітераційний процес за формулами (18) – (21) збігся з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ за чотири ітерації. На рис. 2 наведено графіки збіжності двобічних наближень для першого часового шару при $\tau = 0,1$. Аналіз оцінок похибки $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{x \in [0, L]} |w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)|$

наближеного розв'язку (23) на k -й ітерації, $k = 0, 1, \dots, 6$, показав, що $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \approx q = 0,11$, а отже,

послідовність $\{u^{(k)}(x)\}$ збігається у нормі $C[0; 1]$ до точного розв'язку крайової задачі модифікованого методу Рунге (для першого часового шару) зі швидкістю геометричної прогресії з показником q . Зробимо тепер з початкового моменту часу два кроки з $\tau = 0,05$. Значення наближень до $u(x, 0,1)$, отримані обома способами (з кроком $\tau = 0,1$ і кроком $\tau = 0,05$), а також уточнені за формулою (25) значення на сітці з кроком $0,1$ наведено у табл. 2.

4. Висновки

В роботі вперше запропоновано комбінація модифікованого методу Рунге і метода двобічних наближень для знаходження наближеного розв'язку початково-крайових задач для одновимірного квазілінійного рівняння теплопровідності. Обчислювальний експеримент, проведений для задачі зі степеневу нелінійністю, продемонстрував можливості та ефективність метода. Запропонований підхід може бути використаний при розв'язанні різних прикладних задач, математичними моделями яких є розглянуті початково-крайові задачі, і може бути розповсюджений на багатовимірний випадок. Цим визначається наукова новизна та практична значимість отриманих у роботі результатів.

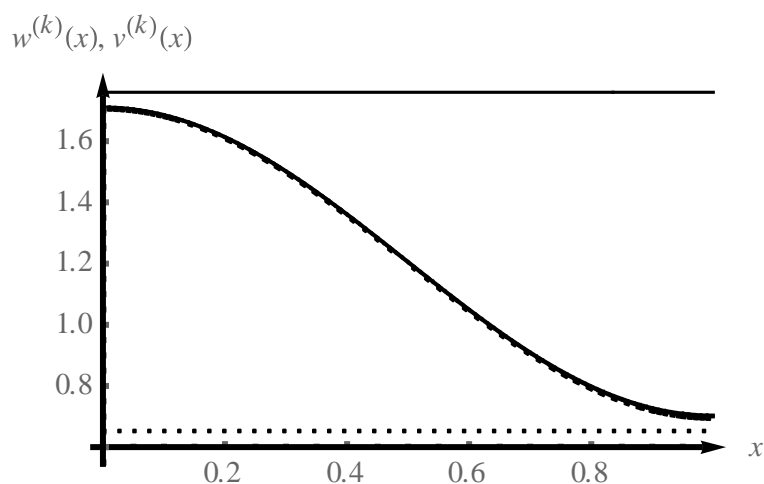


Рис. 2. Графіки верхніх та нижніх наближень для першого часового шару у випадку других крайових умов

Таблиця 2. Значення наближень до $u(x, 0, 1)$ на сітці з кроком 0,1

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\tau = 0,1$	1,7079	1,6831	1,6113	1,4994	1,3585	1,2025	1,0466	0,9062	0,7949	0,7235	0,6989
$\tau = 0,05$	1,6534	1,6313	1,5673	1,4677	1,3424	1,2036	1,0650	0,9402	0,8414	0,7781	0,7563
Уточненні значення	1,5989	1,5795	1,5234	1,4361	1,3262	1,2046	1,0834	0,9743	0,8880	0,8327	0,8137

ЛІТЕРАТУРА

1. Голайдо С.И., Мартинсон Л.К., Павлов К.Б., Нестационарные задачи нелинейной теплопроводности с объемным поглощением тепла // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – Т. 13, № 5. – 1973. – С. 1351–1356.
2. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1966. – 686 с.
3. Калашников А.С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – Т. 14, № 4. – 1974. – С. 891–905.
4. Ладыженская О.А. Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений. – Тр. ММО, т. 7. – 1958. – С. 149–177.
5. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов теплопереноса. Эволюция диссипативных структур. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
6. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов. – М.: Наука, 1987. – 478 с.
7. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 368 с.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. – 2-е изд. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.
9. Rothe E. Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben // Mathematische Annalen. – 1930. – Vol. 102. – № 1. – P. 650-670.
10. Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. – М.: Интеллект, 2008. – 408 с.
11. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2015. – № 3. – С. 107 – 120.
12. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
13. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. – К.: Наук. думка, 1980. – 268 с.

14. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.
15. Сидоров М.В. Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2017. – № 2. – С. 250 – 259.
16. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.

REFERENCES

1. S. I. Golaido, L. K. Martinson and K. B. Pavlov, “Non-stationary problems of non-linear heat conduction with volume heat absorption”, *Journal of Computational Mathematics Mathematical Physics*, vol. 13, no. 5, pp. 1351–1356, 1973 (in Russian).
2. Ya. B. Zel'dovich, Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, 2nd ed. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
3. A. S. Kalashnikov, “The propagation of disturbances in problems of non-linear heat conduction with absorption”, *Journal of Computational Mathematics Mathematical Physics*, vol. 14, no. 4, pp. 891–905, 1974 (in Russian).
4. O. A. Ladyženskaya, “Solution of the first boundary problem in the large for quasilinear parabolic equations”, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshestva*, no. 7, pp. 149–177, 1958 (in Russian).
5. V. P. Maslov, V. G. Danilov and K. A. Volosov, *Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer Processes. Evolution of Dissipative Structures*. Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
6. A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov and A. P. Mikhailov, *Regimes with Peaking in Problems for Quasilinear Parabolic Equations*. Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
7. L. K. Martinson and Yu. I. Malov, *Differential equations of mathematical physics*, 2nd ed. Moscow: Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2002 (in Russian).
8. A. A. Samarskii and A. V. Gul'in, *Numerical Methods of Mathematical Physics*, 2nd ed. Moscow, Russian Federation: Nauchnyj mir, 2003 (in Russian).
9. E. Rothe, “Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben”, *Mathematische Annalen*, vol. 102, no. 1, pp. 650-670, 1930 (in German).
10. D. A. Frank-Kamenetskii, *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*. Moscow, Russian Federation: Intellekt, 2008 (in Russian).
11. S. V. Kolosova, V. S. Lukhanin and M. V. Sidorov, “On the construction of two-sided approximations to the positive solution of the Lane-Emden equation”, *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, no. 3, pp. 107 – 120, 2015 (in Russian).
12. M. A. Krasnosel'skij, *Positive Solutions of Operator Equations*. Moscow: Fizmatgiz, 1962 (in Russian).
13. N.S. Kurpel' and B.A. Shuvar, *Two-sided Operator Inequalities and their Application*. Kiev: Naukova Dumka, 1980 (in Russian).
14. V.I. Opojtsjev and T.A. Khurodze, *Nonlinear Operators in Spaces with a Cone*, Tbilisi, USSR: Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta, 1984 (in Russian).
15. M. V. Sidorov, “Construction two-sided iterative processes for solving nonlinear boundary value problems using methods of Green's functions and the quasi-functions of Green-Rvachev”, *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, no. 2, pp. 250 – 259, 2017 (in Ukrainian).
16. O. M. Lytvyn, *Interlineation of Functions and some its Applications*. Kharkiv, Ukraine: Osнова, 2002 (in Ukrainian).

Сидоров Максим Вікторович – кандидат фізико-математичних наук, доцент; Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків-166, пр. Науки, 14, 61166; e-mail: maxim.sidorov@nure.ua; ORCID: 0000-0001-8022-866X.

УДК 539.3: 534.1

Моделювання динамічного відгуку шаруватих конструкцій на імпульсне навантаження

Н.В. Сметанкіна, С.В. Угрімов, О.М. Шупіков

*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10,
м. Харків, 61046, Україна
e-mail: nsmetankina@ukr.net*

На основі різних дискретно-структурних теорій проведено порівнювальний аналіз параметрів напружено-деформованого стану шаруватих конструкцій при імпульсному навантаженні. Розроблено метод дослідження нестационарних коливань шаруватих пластин. Метод дозволяє вірогідно описувати динамічну поведінку шаруватих елементів конструкцій з різними фізико-механічними властивостями шарів. Встановлено істотний вплив локалізованого навантаження на напруження. Запропонований підхід може бути використаний при проектуванні шаруватого оскління.

Ключові слова: дискретно-структурні теорії, шаруваті конструкції, імпульсне навантаження, нестационарні коливання.

На основе различных дискретно-структурных теорий проведен сравнительный анализ параметров напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций при импульсном нагружении. Разработан метод исследования нестационарных колебаний многослойных пластин. Метод позволяет достоверно описывать динамическое поведение многослойных элементов конструкций с различными физико-механическими свойствами слоев. Установлено существенное влияние локализованной нагрузки на напряжения. Предложенный подход может быть использован при проектировании многослойного остекления.

Ключевые слова: дискретно-структурные теории, слоистые конструкции, импульсное нагружение, нестационарные колебания.

Parameters of a laminated structure effect considerably on the selection of a theory being used. Layers in the pack, which have significantly differing physical characteristics, make the structure all the more susceptible to transverse strain, viz. shear and reduction. The application of 3D elasticity theory equations for investigating non-stationary deformation in laminated structures is faced with significant mathematical complexities. Therefore, 2D theories have found extensive implementation in the design of real structures. The key feature of the modern stage of development of multilayer structures mechanics consists in the transition from more simple 2D models to more complex ones possessing higher accuracy. Therefore, the development of refined 2D models of multilayered structures for the investigation of non-stationary deformation processes is an important problem. The purpose of this research is to develop a method for calculating the response of layered plates under impulse loading, as well as a comparative analysis of possibilities of different 2D theories.

The layer-wise refined model of elastodynamic of laminated plates for investigation dynamic process is presented. This model is based on expanding displacement vector components of each layer into power series about the transverse coordinate. It takes into account transverse shear and normal strains in each layer. This allows to describe reliably the dynamic behavior of laminated structural elements with different physical and mechanical properties of layers. The motion equations and boundary condition are obtained from a variational principle. The solution method is an analytical-numerical one.

The model possibilities are illustrated on investigations of three-layer structures under impulse loading. The results are compared with data obtained from the classical theory as well as the layer-wise theory based on the broken line hypothesis (the Grigoliuk-Chulkov's model). Special attention is placed on analyzing the stress-strained state of laminated structures subjected to local loads. The proposed approach can be used in design of the laminated glazing.

Keywords: layer-wise theories, laminated structures, impulse loading, non-stationary vibrations.

1 Вступ

Складність розв'язання задач про коливання шаруватих конструкцій в рамках тривимірної теорії пружності стимулює розвиток двовимірних теорій пластин і оболонок [1 – 4]. Можна виділити два основних підходи до побудови таких теорій. Перший підхід заснований на використанні єдиних вздовж товщини пластини або оболонки кінематичних і статичних гіпотез. У цьому випадку порядок визначальних рівнянь не залежить від кількості шарів. Другий підхід пов'язаний з побудовою теорії на основі прийняття незалежних кінематичних та статичних гіпотез до кожного шару. У цьому випадку порядок системи рівнянь залежить від кількості шарів оболонки. Це дає можливість більш точно описати напружений стан шаруватих конструкцій, але супроводжується як ускладненням самої моделі, так і збільшенням розмірності системи визначальних рівнянь. Тому необхідно чітко розуміти, коли слід використовувати той або інший підхід та теорію. Їх вибір обумовлюється співвідношенням фізико-механічних параметрів матеріалів шарів, геометрією об'єкта, параметрами навантаження. Найчастіше ці питання досліджуються для задач статички і вільних коливань шаруватих конструкцій [3 – 5].

Тому актуальною задачею залишається дослідження перерахованих вище факторів при нестационарному навантаженні.

Метою дослідження є розробка методу для розрахунку коливань шаруватих пластин при імпульсному навантаженні, а також порівняльний аналіз результатів розрахунку параметрів напружено-деформованого стану, які отримано на основі різних теорій.

2 Постановка задачі. Математична модель шаруватої конструкції

Розглянемо багатошарову прямокутну шарнірно оперту пластину, зібрану з довільного числа I ізотропних шарів постійної товщини h_i ($i = \overline{1, I}$). Фізико-механічні властивості шарів у пакеті можуть значно відрізнятися. Введемо декартову систему координат $Oxyz$, яку зв'яжемо з зовнішньою поверхнею першого шару пластини. На пластину діють деякі нестационарні навантаження $P = \{p_j(x, y, t)\}$ ($j = \overline{1, 3I+3}$, t – час). Припустимо, що напруження в шарах пластини не перевищують границь пружності матеріалів шарів, а навантаження є такими, що допускають використання геометрично лінійної теорії шаруватих пластин.

Математична модель, що описує нестационарне деформування пластини, заснована на гіпотезах уточненої теорії першого порядку, що враховує деформації поперечного зсуву, обтиснення вздовж товщини та інерцію обертання нормального елемента в кожному шарі [6]. При цьому припускається, що для пакета справедлива гіпотеза ламаної лінії, а контакт між шарами виключає їх розшарування і взаємне проковзування. Таким чином, переміщення точки i -го шару в напрямку координатних осей має вигляд

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I(k-1)+i}, \quad k = 1, 2, 3, \quad i = \overline{1, I}, \quad (1)$$

де $u_k = u_k(x, y, t)$, $k = 1, 2, 3$ – переміщення точки координатної поверхні в напрямку координатних осей; $u_{3+I(k-1)+i} = u_{3+I(k-1)+i}(x, y, t)$, $k = 1, 2$ – кути повороту нормального елемента в i -у шарі; $u_{3+2I+i} = u_{3+2I+i}(x, y, t)$ – обтиснення нормального елемента в межах i -го шару; $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $\delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i$, $i = \overline{1, I}$.

На основі варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона [6] отримуємо систему рівнянь руху пластини

$$\Omega \mathbf{U}_{,tt} - \Lambda \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{,t} = 0, \quad t = 0 \quad (2)$$

і граничні умови на контурі

$$\mathbf{B}^T \mathbf{U} = 0 \quad (3)$$

відносно незалежних функцій переміщень (1) $\mathbf{U} = \{u_i\}$, $i = \overline{1, 3I+3}$.

Тут Λ і \mathbf{B}^T – матриці, елементами яких є диференціальні оператори [6].

Елементи матриці Ω , які не дорівнюють нулю, мають вигляд

$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = C_\rho^I, \quad \Omega_{13+i} = \Omega_{3+i1} = \Omega_{23+I+i} = \Omega_{3+I+i2} = \Omega_{33+2I+i} = \Omega_{3+2I+i3} = D_\rho^i,$$

$$\Omega_{3+i3+j} = \Omega_{3+I+i3+I+j} = \Omega_{3+2I+i3+2I+j} = \eta_\rho^{ij},$$

$$C_\rho^i = \sum_{j=1}^i \alpha_\rho^j, \quad D_\rho^i = h_i (C_\rho^I - C_\rho^i) + \beta_\rho^i, \quad K_\rho^i = h_i^2 (C_\rho^I - C_\rho^i) + \gamma_\rho^i,$$

$$\eta_\rho^{ij} = \begin{cases} h_j D_\rho^i, & j < i, \\ K_\rho^i, & j = i, \\ h_i D_\rho^j, & j > i, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, I}.$$

3 Метод розв'язання проблеми

Через те, що пластини шарнірно оперта, розв'язок отриманої системи рівнянь руху (2)

знаходимо шляхом розвинення переміщень і зовнішніх навантажень у ряди Фур'є за функціями, що задовольняють граничним умовам (3)

$$u_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{jmn}(t) B_{jmn}(x, y), \quad p_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}(t) B_{jmn}(x, y), \quad (4)$$

$$\text{де } B_{1mn} = \cos \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B}, \quad B_{2mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \cos \frac{n\pi y}{B}, \quad B_{3mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B},$$

$$B_{3+i mn} = B_{1mn}, \quad B_{3+I+i mn} = B_{2mn}, \quad B_{3+2I+i mn} = B_{3mn}, \quad j = \overline{1, 3I+3}, \quad i = \overline{1, I}, \quad m = \overline{1, m^*}, \\ n = \overline{1, n^*};$$

A і B – розміри пластини в плані.

Система (2) з урахуванням розвинень (4) зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка інтегрується модифікованим методом розвинення розв'язку в ряд Тейлора [7].

Після обчислення коефіцієнтів розвинення в ряди (4) визначаються переміщення u_k (1) і напруження σ_x^i у шарах пластини.

4 Чисельні результати

Для оцінки достовірності розробленого методу проведено дослідження коливань квадратної тришарової пластини під впливом імпульсного навантаження

$$p_3 = \begin{cases} P_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau_+}\right) \cdot \exp\left(-\alpha \frac{t}{\tau_+}\right), & 0 < t < \tau_+, \\ 0, & t \geq \tau_+ \end{cases}$$

де $\tau_+ = 7,7$ мс; $\alpha = 0,55$; $P_0 = 68948$ Па.

Геометричні характеристики пластини – $A = B = 1,325$ м, $h_1 = h_3 = 4,76$ мм, $h_2 = 1,52$ мм. Фізико-механічні властивості шарів – $E_i = 72$ ГПа, $\rho_1 = \rho_3 = 2500$ кг/м³, $\nu_i = 0,25$; $E_2 = 0,274$ ГПа, $\rho_2 = 1100$ кг/м³, $\nu_2 = 0,38$ (E_i – модуль пружності, ν_i – коефіцієнт Пуасона, ρ_i – густина матеріалу i -го шару).

Результати розрахунку за запропонованим методом порівнювалися із даними аналогічного дослідження, проведеного L. R. Dharani на основі класичної теорії [8].

На рис. 1 показано змінення прогинів за часом посередині пластини. Суцільна лінія відповідає уточненій теорії, штрихова – теорії Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова [3], точками – дані, отримані L. R. Dharani за класичною теорією. Спостерігається добре узгодження усіх наведених результатів, що підтверджує їх достовірність і працездатність запропонованого підходу.

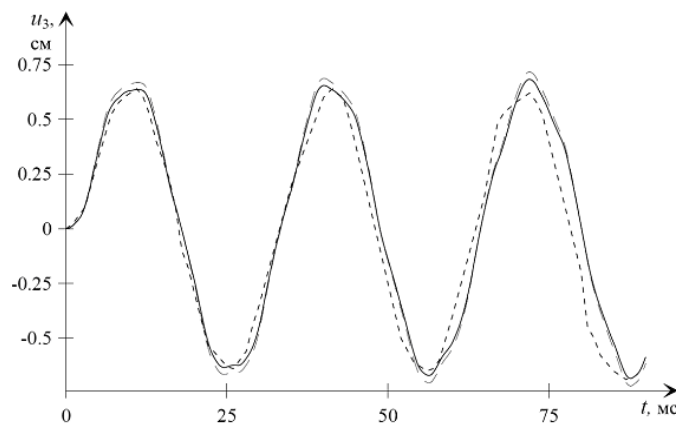


Рис. 1. Змінення прогинів за часом

Слід зазначити, що розглянута пластинка відноситься до тонких, а навантаження діє по всій зовнішній поверхні першого шару пластини. Саме цим пояснюються співпадіння результатів, які

отримані за усіма розглянутими моделями. При збільшенні товщини пластини або при наявності нетонких м'яких шарів, а також при впливі локалізованих навантажень результати розрахунків за розглянутими моделями будуть істотно відрізнятися.

Досліджено динамічну поведінку тришарової квадратної шарнірно опертої пластини при імпульсному навантаженні

$$p_3 = \frac{1}{2} P_0 [1 + \text{sign}(t_1 - t)] \sin \frac{\pi t}{t_1} \sin \pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \sin \pi \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (5)$$

що прикладене до зовнішньої поверхні першого шару по прямокутній ділянці $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$, $t_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ с.

Геометричні й механічні параметри пластини – $A = B = 0,5$ м, $h_1 = h_3 = 15$ мм, $h_2 = 3$ мм; $E_1 = E_3 = 61,2$ ГПа, $E_2 = 0,28$ ГПа; $\nu_1 = \nu_3 = 0,22$, $\nu_2 = 0,39$; $\rho_1 = \rho_3 = 2500$ кг/м³, $\rho_2 = 1200$ кг/м³ (ν_i – коефіцієнт Пуасона, ρ_i – густина матеріалу i -го шару).

Коливання цієї пластини досліджено при імпульсному розподіленому і локалізованому навантаженні (5). Розподілене навантаження, що діє майже по всій поверхні зовнішнього шару, має наступні параметри $x_1 = y_1 = 0,01$ м, $x_2 = y_2 = 0,49$ м, $P_0 = 7,8125$ кПа, а локалізоване, яке розподілене по квадратній площадці розміром $4,8$ мм \times $4,8$ мм – $x_1 = y_1 = 0,2476$ м, $x_2 = y_2 = 0,2524$ м, $P_0 = 78,125$ МПа.

На рис. 2, а, б показано розподіл нормальних напружень σ_x^i вздовж товщини посередині пластини ($x_p = y_p = 0,25$ м) у момент часу, коли вони досягають максимальних значень. Рис. 2, а відповідає розподіленому навантаженню, а рис. 2, б – локалізованому. Напруження в шарі з полімерного матеріалу ($i = 2$) на рисунках не наведено, оскільки вони суттєво менші за аналогічні значення для несучих шарів ($i = 1, 3$). Суцільна лінія відповідає уточненій теорії, штрихова – теорії Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова.

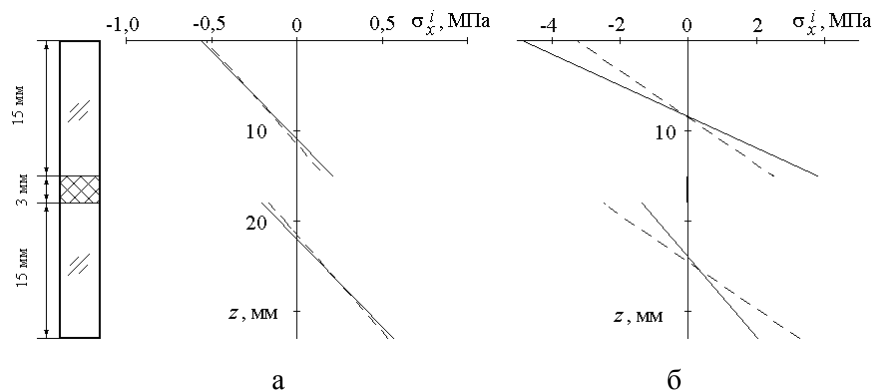


Рис. 2. Розподіл напружень σ_x^i вздовж товщини пластини

Змінення прогинів $w^3 = u_3^3(x, y, t)$ і напружень σ_x^3 в часі в точці $x_p = y_p = 0,25$ м, $z = \delta_3$ на зовнішній поверхні третього шару під дією локалізованого навантаження наведено на рис. 3, а, б. Суцільна лінія відповідає уточненій теорії, штрихова – теорії Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова [3, 6, 7].

Порівняльний аналіз залежностей (рис. 2, 3) показує, що при впливі розподіленого навантаження результати, які отримані без урахування поперечного обтиснення шарів, добре узгоджуються з аналогічними даними розрахунку за запропонованою уточненою теорією першого порядку (рис. 2, а та рис. 3, а). Коли на пластину діє локалізоване навантаження, результати, що отримані за розглянутими моделями, вже значно відрізняються (рис. 3, б).

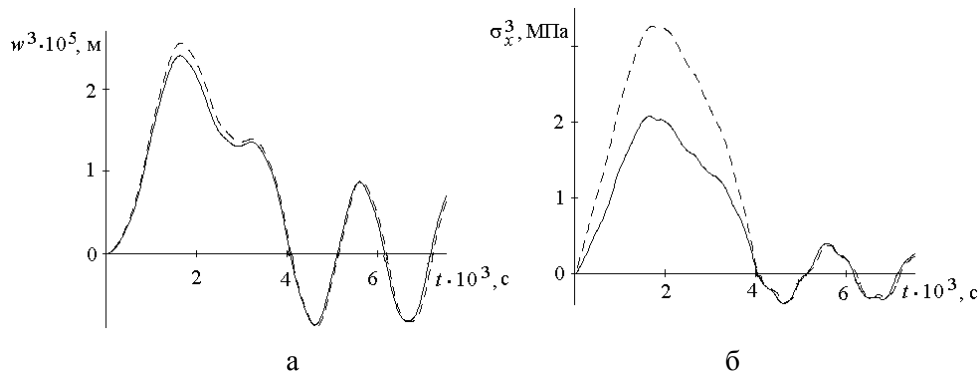


Рис.3 Залежність переміщень w^3 і напружень σ_x^3 від часу

Досліджено вплив характерного розміру площадці (області) навантаження (5) на максимальні значення напружень у несучих шарах розглянутої пластини. Як і раніше, припускається, що навантаження діє на квадратній площадці зі стороною $L = x_2 - x_1 = y_2 - y_1$, яка розташована симетрично відносно центру зовнішньої поверхні пластини. Загальна сила, що прикладається до пластини, залишається завжди сталою і дорівнює 1,8 кН. Характерний розмір області навантаження L варіюється в діапазоні від 48 см до 0,48 см. Граничні значення діапазону відповідають розглянутим раніше випадкам розподіленого та локалізованого навантажень.

На рис. 4 наведено максимальні значення напружень посередині зовнішніх поверхонь несучих шарів. Суцільна лінія відповідає уточненій теорії, штрихова – теорії Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова. Видно, що різниця в результатах, які отримані за цими теоріями, збільшується при зменшенні розмірів області навантаження. Відмінності стають помітними при розмірі площадки навантаження, яка менше за 10 см, що відповідає приблизно трьом товщинам пластини. За теорією Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова, яка не враховує поперечні деформації шарів пакету, для розглянутої пластини на зовнішніх шарах отримано однакові за модулем значення напружень. Але при локалізованому навантаженні характер розподілу реальних напружень вздовж товщини має більш складний характер (див. рис. 2, б). У результаті за моделлю Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова на зовнішній поверхні першого шару згинні напруження є меншими за аналогічні значення, які отримано за запропонованою уточненою теорією, а на зовнішній поверхні третього шару, навпаки, напруження мають більші значення. Теорія Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова в розглянутому випадку дозволяє одержати осереднені значення дійсних напружень.

Для випадку локалізованого навантаження квадратної тришарової пластини $A = B = 0,5$ м симетричної будови ($h_1 = h_3$) з такими ж механічними параметрами шарів, як для розглянутої вище пластини, проведено дослідження впливу співвідношення товщин шарів на максимальні значення згинних напружень. Товщина другого, більш м'якого, шару варіювалася в діапазоні від 3 мм до 27 мм при сталій товщині пластини у 33 мм.

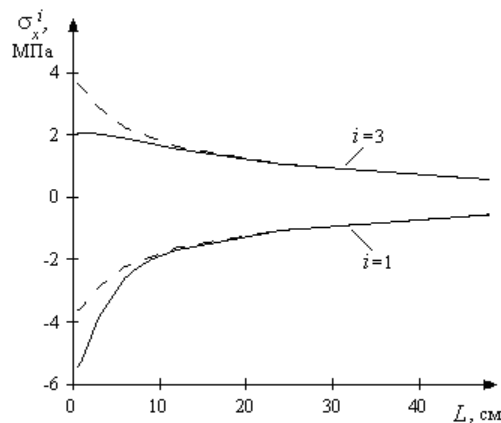


Рис. 4. Залежність максимальних значень згинних напружень від характерного розміру області навантаження

На рис. 5 показано змінення напружень у зовнішніх шарах у залежності від товщини другого шару при локалізованому навантаженні. Суцільна лінія відповідає уточненій теорії, штрихова – теорії Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова. При збільшенні товщини м'якого шару обтиснення пластини стає більш помітним і різниця між результатами, які отримані за моделями, що враховують і не враховують обтиснення, збільшується.

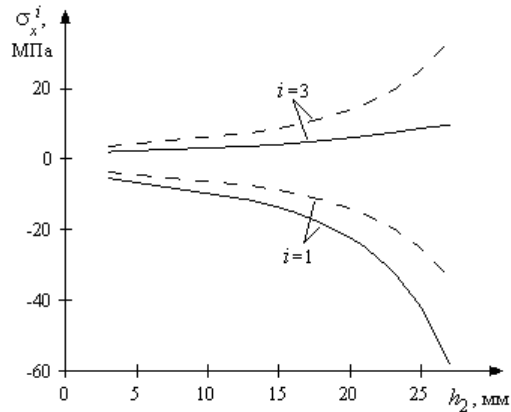


Рис. 5. Залежність максимальних значень згинних напружень від товщини другого шару при локалізованому навантаженні

Висновки

Створено метод дослідження напружено-деформованого стану шаруватих пластин, який базується на уточненій дискретно-структурній теорії шаруватих пластин, що враховує деформації поперечного зсуву, обтиснення вздовж товщини та інерцію обертання нормального елемента в кожному шарі.

На тестовій задачі розрахунку процесу нестационарного деформування тонкої тришарової пластини під впливом імпульсного розподіленого навантаження доведено ефективність розробленого методу. Результати розрахунку за запропонованим методом порівнювалися із даними аналогічного дослідження, яке проведене L. R. Dharani на основі класичної теорії, та з даними, які отримані на основі уточненої теорії Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова. Спостерігається добре узгодження результатів за усіма розглянутими моделями для випадку відносно тонкої пластини при розподіленому навантаженні.

На чисельних прикладах розрахунку тришарових конструкцій симетричної будови проведено дослідження їх напружено-деформованого стану при розподілених й локалізованих навантаженнях. Показано, що при локалізованому навантаженні врахування поперечного обтиснення шарів істотно впливає на значення отриманих напружень.

Запропонований підхід може бути використаний при розрахунку на динамічну міцність шаруватого оскління транспортних засобів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2002. – Vol. 9, № 1. – P. 1-60.
2. Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. Ф. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К.: Изд-во полиграф. центру «Киевский университет», 2005. – 536 с.
3. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек // Вестник Тамбов. гос. техн. ун-та. – 2005. – Т. 11, № 2А. – С. 439-448.
4. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.
5. Курпа Л. В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с.

6. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков: Изд-во «Міськдрук», 2011. – 376 с.
7. Шупиков А. Н., Бузько Я. П., Сметанкина Н. В., Угримов С. В. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. – Харьков: Изд-во ХНЭУ, 2004. – 252 с.
8. Dharani L.R., Wei J. Dynamic response of laminated glass under blast loading: effect of negative phase // Structures under shock and impact VIII, Crete, Greece, March 2004. – 2004. – P. 181-190.

REFERENCES

1. E. Carrera, “Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 9, № 1, pp. 1-60, 2002.
2. P. Z. Lugovoy, V. F. Meysh, E. F. Shtantsel, *Nestatsionarnaya dinamika neodnorodnykh obolochechnykh konstruktsiy*, K.: Izd-vo poligraf. tsentru «Kievskiy universitet», 2005.
3. E. I. Grigolyuk, G. M. Kulikov, “Puti razvitiya teorii uprugih mnogoslonykh plastin i obolochek,” *Vestnik Tambov. gos. tehn. un-ta*, T. 11, No. 2A, pp. 439-448, 2005.
4. Ya. M. Grigorenko, G. G. Vlaykov, A. Ya. Grigorenko, *Chislennno-analiticheskoe reshenie zadach mehaniki obolochek na osnove razlichnykh modeley*, K.: Akadempriodika, 2006.
5. L. V. Kurpa *Metod R-funktsiy dlya resheniya lineynykh zadach izgiba i kolebaniy plogikh obolochek*, Harkov: NTU «HPI», 2009.
6. N. V. Smetankina, *Nestatsionarnoe deformirovanie, termouprugost i optimizatsiya mnogoslonykh plastin i tsilindricheskikh obolochek*, Kharkov: Izd-vo «Miskdruk», 2011.
7. A. N. Shupikov, Ya. P. Buzko, N. V. Smetankina, S. V. Ugrimov, *Nestatsionarnyye kolebaniya mnogoslonykh plastin i obolochek i ih optimizatsiya*, Kharkov: Izd-vo HNEU, 2004.
8. L. R. Dharani, J. Wei, “Dynamic response of laminated glass under blast loading: effect of negative phase,” *In Structures under shock and impact VIII: Proceedings of the VIII International Conference on Structures Under Shock and Impact: SUSI VIII*, Crete, Greece, March 2004. N. Jones, C.A. Brebbia, Eds. Southampton: WIT Press, 2004, pp 181-190.

Сметанкіна Наталя Володимирівна – доктор технічних наук, завідувач відділом вібраційних і термоміцнісних досліджень, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків-46, вул. Пожарського 2/10, 61046; e-mail: nsmetankina@ukr.net; ORCID: 0000-0001-9528-3741

Угримов Сергій Вікторович – доктор технічних наук, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків-46, вул. Пожарського 2/10, 61046; e-mail: sugrimov@ipmach.kharkov.ua; ORCID: 0000-0002-0846-4067

Шупіков Олександр Миколайович – доктор технічних наук, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків-46, вул. Пожарського 2/10, 61046; e-mail: shupikov@ipmach.kharkov.ua; ORCID 0000-0002-9502-7040

CONTENTS

▪ Boguto D.G., Komarov V.F., Nikolyyuk P.K., Nikolyyuk P.P.	4
Automated management system of vehicle management between the city	
▪ Bokov I. P., Bondarenko N. S., Strelnikova E. A.	14
Investigation of the behavior of generalized displacements obtained using the theory of {m,n}-approximation	
▪ N.V. Varlamova, N.G. Styervoyedov.	25
Hardware-software complex for psychological and professional diagnostics with function of remote control	
▪ K.G. Degtyarev, V.I.Gnitko, Yu.V. Naumenko, E.A. Strelnikova.	33
A comparative analysis of axisymmetric vibrations of conical and cylindrical fluid-filled elastic shells	
▪ Karaiev A.O., Strelnikova O.O.	42
Restoration of the polygon vertices using middle of it's sides	
▪ Kosolap A. I., Romanchuk A. A.	49
Transformation of co-ordinates to the problems of global optimization	
▪ Sidorov M. V.	55
The Rothe method and the method of two-sided approximations in the numerical analysis of problems for one-dimensional quasilinear parabolic equations	
▪ Smetankina N. V., Ugrimov S. V., Shupikov A. N.	64
Modelling of the Dynamic Response of Laminated Structures on Impulse Loading	
▪ CONTENTS.	71

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 38

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О. О. Афанасьєва

Підписано до друку 27.04.2018 р.
Формат 70×108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. – 6,4.
Обл.– вид. арк. – 5,5.
Наклад 100 пр. Зам. №

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна.
Видавництво

Надруковано: ХНУ імені В. Н. Каразіна
61022 м. Харків, майдан Свободи, 4,
тел.: 362-01-52
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09