

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна



Серія

«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 35

Харків
2017

ISSN 2304–6201

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна



Серія

«Математичне моделювання.

Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління»

Випуск 35

Серія заснована 2003 р.

Харків
2017

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних та технічних наук (Наказ МОН України № 1328 від 21.12.2015 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 17 від 27.11.2017 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),
д.ф.-м.н., академік НАН України, проф.,
ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора),
д.т.н., проф. ФМІ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т. (заст. гол. редактора),
д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені
В.Н. Каразіна

Споров О.Є. (відповідальний секретар),
к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ
імені Б.І. Веркіна НАН України

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН
України, проф., фізико-енергетичний ф-т
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ
імені В. Н. Каразіна

Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-
енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний
технічний університет "ХПІ"

Стрельнікова О.О., д.т.н., проф. Ін-т
проблем машинобудування НАН України

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра
прикладної інформатики, університет імені

Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter,** Dr.-Ing., Dr. rer. nat.
habil. Professor of Technical Informatics and
Computer Systems, Institute of Informatics,
Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire,** Dr. habil., Professor of
computer science, Dep. of C. S., University of
Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6,
ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

© Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна, оформлення, 2017

ЗМІСТ

▪ Д. Г. Богуто, В. І. Волинець, П. К. Ніколюк, П. П. Ніколюк	5
Автоматизована система керування рухом транспортних засобів в межах міста	
▪ І. П. Боков, Н. С. Бондаренко, О. О. Стрельнікова	13
Дослідження поведінки внутрішніх силових факторів в трансверсально- ізотропних пластинах за дії локальних навантажень	
Н. Н. Кизилова, Е. Н. Соловьева.	21
Анализ дискретных реологических моделей биоактивных мягких и жидких материалов	
▪ D. V. Krutchenko, E. A. Strelnikova, Yu. S. Shuvalova.	31
Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs	
▪ В. М. Куклин, А. В. Приймак, В. В. Яновский.	38
Память и эволюция сообществ	
▪ О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов.	61
Диффузионное описание производственного процесса	
▪ V. V. Romanuke	74
Increasing an expected power of the wind farm with diversification in non-dominated power curves of the used wind turbines	
▪ CONTENTS	80

Шановні читачі та автори цього збірника!

Редакція вживає заходів до перетворення нашого періодичного видання в науковий журнал, широко представлений у міжнародних наукометричних базах даних.

Першою, хоча далеко не останньою вимогою до журналу є забезпечення 4-х повноцінних і своєчасно підготовлених випусків на рік. Чекатимемо на Вашу активну участь у формуванні та постійній підтримці відповідного портфелю редакції. Будь ласка, надсилайте Ваші власні статті та рекомендації до опублікування робіт Ваших колег та учнів!

Важливу роль у здійсненні наших планів відіграватиме зростання відсотку статей, що публікуються у збірнику англійською мовою. Надсилайте без вагань такі роботи до нашої редакції, якщо маєте впевненість не тільки в якості наукових результатів, але й готові до співробітництва в напрямку доведення тексту до якості, відповідної стандартам міжнародних видань. Зі свого боку редакційна колегія забезпечуватиме відповідну якість редагування всіх англійських анотацій та статей, написаних англійською мовою, виходячи протягом наступного року з того, що вони повинні складати до третини загального обсягу статей, які публікуватимуться.

На завершення нагадуємо, що фахові публікації у нашому збірнику повинні відповідати паспорту однієї з наступних спеціальностей (за номенклатурою, за якою зараз поки що діють спеціалізовані ради з захисту дисертацій):

з *фізико-математичних наук* – спеціальності:

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи,

01.02.05 – механіка рідини, газу та плазми,

01.02.04 – механіка деформованого твердого тіла,

01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем;

з *технічних наук* - спеціальності:

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи,

01.02.05 – механіка рідини, газу та плазми,

05.13.05 – комп'ютерні системи та компоненти,

05.13.06 – інформаційні технології,

05.13.21 – системи захисту інформації,

05.13.07 – автоматизація процесів керування.

Просимо з розумінням поставитися до деяких ускладнень підготовки анотацій до статей. Справа в тому, що різні наукометричні бази вимагають різних форм і показників. Починаючи з 1 випуску 2018 року буде змінено вимоги до підготовки рукописів, головним чином у частині підготовки анотацій.

З повагою, **Редакційна колегія.**

УДК 004.942+656.052.1

Автоматизована система керування рухом транспортних засобів в межах міста

Д. Г. Богуто¹, В. І. Волинець², П. К. Ніколюк¹, П. П. Ніколюк³¹Донецький національний університет імені Василя Стуса, Україна²Вінницький інститут економіки Тернопільського національного економічного університету, Україна³Вінницький національний технічний університет, Україна

Представлена технологія такого інтелектуального регулювання руху транспорту у великому місті, при якій не будуть виникати затори. Пропонується рішення проблеми трафіку шляхом контролю регулювання транспортних потоків як на окремому перехресті, так і в межах всього мегаполісу. Вибір найоптимальнішого маршруту базується на моніторингу ситуації з трафіком в режимі постійного контролю і корекції маршруту кожного транспортного засобу, що замовляє маршрут центральному пункту керування трафіком (ЦПКТ).

Ключові слова: розумне перехрестя, п'єзокристалічний датчик, орієнтований мультиграф, імітаційне моделювання, GPS-навігатор.

Представлена технология такого интеллектуального регулирования движения транспорта в большом городе, при которой не будут возникать заторы. Предлагается решение проблемы трафика путем контроля регулирования транспортных потоков как на отдельном перекрестке, так и в пределах всего мегаполиса. Выбор оптимального маршрута базируется на мониторинге ситуации с трафиком в режиме постоянного контроля и коррекции маршрута каждого транспортного средства, заказывающего маршрут центральному пункту управления трафиком (ЦПУТ).

Ключевые слова: умный перекресток, пьезокристаллический датчик, ориентированный мультиграф, имитационное моделирование, GPS-навигатор.

The intellectual traffic regulation technology for a big city which prevents traffic jams is presented. The traffic problem is proposed to be solved by controlling the regulation of traffic flows at separate intersection as well as within an entire metropolis. The choice of the most optimal route is based on monitoring the traffic situation in the constant control mode and the route correction for each vehicle which requests the route from the central office of traffic management (COTM).

Keywords: clever intersection, piezocrystalline sensor, oriented multigraph, simulation modeling, GPS-navigator.

1. Постановка проблеми

Затори на дорогах – головний біль всіх мегаполісів світу. Вихід зі складної транспортної ситуації може бути вирішений шляхом використання мережі «розумних» світлофорів, що синхронно взаємодіють між собою. Припустимо, водій має намір проїхати по міському маршруту самим оптимальним способом, стартуючи із початкової точки і закінчуючи подорож в точці . Для кожної пари заявлених водієм точок комп'ютерна програма формує самий оптимальний варіант руху (маршрут), що постійно коригується (інакше функціонує в режимі «on-line») в залежності від дорожньої ситуації. Технологія, що пропонується, дозволяє синхронізувати потоки транспортних засобів (ТЗ) навіть у містах з

мільйонами автомобілів на вулицях. Це означає, що трафік у великих містах переходить на якісно новий рівень.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій

Першочерговою проблемою регулювання трафіку у мегаполісі є організація ефективної роботи кожного окремого перехрестя. Дійсно, саме на перетині доріг виникають затори. Тому стартово необхідно покращити проїзд місць, де сходяться міські дороги. В першу чергу необхідно реєструвати автомобілі, що перетинають перехрестя доріг. Для реєстрації проїзду ТЗ взагалі кажучи існує кілька способів, що базуються на використанні різних фізичних принципів [1]. Розглянемо та проаналізуємо деякі з них. Патент [2] розглядає відеореєстрацію потоку ТЗ, що не доцільно та малоефективно, тому що, наприклад, в темну пору доби чи під час сильних опадів такий спосіб реєстрації малоефективний. Крім того, відеосигнал може перебиватись високо габаритними ТЗ та має обмежену апертуру. Більш досконала система реєстрації трафіка описана в роботі [3]. Винахідники пропонують встановити на лініях між перехрестями датчики для реєстрації потоків ТЗ та для передачі даних на ЦПКТ всього міста. Автор роботи [4] пропонує спосіб регулювання, що полягає у включенні червоного світла на час відсутності ТЗ. Дуже цікавою є корисна модель, представлена в [5]. Даний винахід розглядає спосіб регуляції трафіку на перехресті з допомогою вмонтованих в полотно дороги індукційних котушок, що реєструють кожен автомобіль. Причому, реєструється не тільки загальне число ТЗ в одному напрямку проїзної частини дороги, а і окремі значення величин автомобілів по смугах руху. Подібна реалізація керування проїздом ТЗ через перехрестя викладена в роботі [6].

Дослідження [7] презентує технологію, що надає переваги при проїзді перехресть громадському транспорту (public transport) а також автомобілям спеціальних служб (emergency vehicles) – поліції, швидкої медичної допомоги і т.д. Технічно на ТЗ вказаної категорії встановлюються генератори інфрачервоних хвиль, які при під'їзді до перехрестя випромінюють спеціальний сигнал в напрямку контролера (traffic light controller), що керує світлофором та при отриманні сигналу від автомобілів зазначеного типу переводить світлофор у зелену фазу.

У відношенні регулювання руху через окреме перехрестя близькою до нашого дослідження є робота [8].

Прототипом першої стадії нашого дослідження є технологія ISBAK – Full Adaptive Traffic Management System [9], яка використовує дані, отримані з магнітних сенсорів, вмонтованих в полотно проїзної частини. При перетині автомобілем місця розташування сенсора дані зчитуються та передаються на ЦПКТ, де використовується програма оптимізації трафіка по всьому місту.

3. Формулювання мети статті

Метою даного дослідження являється розробка інтелектуальної системи, що складається з набору технічних і програмних засобів з метою забезпечення максимізації пропускної спроможності не тільки окремого перехрестя, а і оптимізації трафіку по всьому місту для кожного окремо взятого автомобіля. В

даній роботі пропонується особлива система реєстрації руху ТЗ, відмінна від існуючих. Суть її полягає в тому, що в полотно дороги на перехресті за стоп-лінією монтується п'єзокристаличні датчики, які фіксують число колісних пар, пропорційне числу ТЗ, що або в'їжджають на проїзну частину дороги між сусідніми перехрестями (так звані вхідні датчики) або в'їжджають на перехрестя – вихідні датчики. При цьому вхідні та вихідні датчики на сусідніх перехрестях працюють сумісно.

Усі перехрестя, оснащені описаною високонадійною системою збору інформації в плані завантаженості ТЗ, пов'язані між собою і фіксують дані щодо завантаженості перехресть, змінюючи фази світлофорів на вимогу дорожнього трафіку. Пропонована технологія дозволить збільшити пропускну спроможність на дорогах шляхом щосекундного моніторингу динаміки руху ТЗ і відповідного коригування протяжності світлофорних фаз та пролонгації часу горіння зеленої (або червоної) фаз залежно від дорожньої обстановки.

Умовно пропоновану автоматизовану інтелектуальну систему регуляції дорожнього руху можна розділити на два етапи. На першому етапі здійснюється регулювання трафіку через одне перехрестя, що взаємодіє із сусіднім, а на другому – через все місто. Причому, саме другий етап являє собою принципове «ноу-хау». В цій роботі розглянемо перший етап, що тісно пов'язаний з другим.

4. Виклад основного матеріалу

Технічно рух через перехрестя організований наступним чином. На перетині доріг в полотно проїзної частини перпендикулярно до поздовжньої вісі дороги монтується п'єзокристаличні датчики [1], що реагують на тиск, спричинюваний автомобільною колісною парою. Відповідно електричний сигнал, спричинений стиском п'єзодатчика, поступає на вимірально-обчислювальний комплекс (ВОК), розташований в ЦПКТ. Таким чином відбувається реєстрація сигналів, що поступають з різних перехресть міста. Спектр сигналів, отримуваних з кожного перехрестя, пропорційний числу автомобілів, які перетнули його в різних напрямках. Розглянемо детально перший етап регулювання трафіку. Виокремимо для прикладу хрестоподібне перехрестя і застосуємо до нього «розумну» технологію регулювання проїзду транспорту. Основний принцип світлофорного регулювання при цьому полягає в тому, щоб розподілити час світлофорного циклу, або іншими словами період перемикання світлофору, пропорційно до завантаженості ТЗ напрямків на перехресті. В окремих випадках необхідно пролонгувати час горіння зеленого світла в найбільш завантаженому напрямку. Схематично принцип дії «розумного» світлофора можна зрозуміти із рис. 1. Створена комп'ютерна програма, яка керує роботою світлофорів на перехресті з таким розрахунком, щоб функція інтенсивності проїзду ТЗ через перехрестя $I = I(t)$ досягала максимуму (t – час).

Взагалі період перемикання світлофору – це величина, що може складатися із таких складових

$$T = t_H^G + t_H^R + t^Y + t_V^G + t_V^R + t^P, \quad (1)$$

де t_H^G – час горіння зеленого світла у горизонтальному напрямку;

t_H^R – час горіння червоного світла у горизонтальному напрямку;

t^Y – час горіння жовтого світла;

t_V^G – час горіння зеленого світла у вертикальному напрямку;

t_V^R – час горіння червоного світла у вертикальному напрямку;

t^P – час горіння зеленого світла для пішоходів.

«Розумність» світлофору полягає в тому, що фази горіння зеленого світла пропорційні завантаженості напрямків – в нашому випадку це завантаженість горизонтального та вертикального напрямків (рис. 1). Тобто треба величини протяжності горіння зеленого світла у вертикальному та горизонтальному напрямках (t_V^G та t_V^R відповідно) розподілити пропорційно завантаженості ТЗ цих напрямків N_V та N_H . Тобто

$$\frac{t_V^G}{t_H^G} = \frac{N_V}{N_H}. \quad (2)$$

Такий перерозподіл дозволяє максимізувати функцію $I = I(\nu)$, де I – інтенсивність проїзду перехрестя, що залежить від частоти перемикання світлофора ν , а ν в свою чергу залежить від величини N – загального числа автомобілів, що перетинають перехрестя за період перемикання світлофору.

$$I(\nu(N)) = \frac{dN}{dt}, \quad (3)$$

де $N = N_V + N_H$.

Таким чином, система дозволяє значно покращити пропускну здатність перехрестя завдяки комп'ютерній програмі, що регулює режими роботи світлофорів в плані протяжності горіння різних фаз та їх пролонгації – останнє по необхідності. Причому пролонгація може стосуватись не тільки часу горіння зеленого світла, а також і часу горіння червоного світла. Останнє можливе, наприклад, коли певний напрямок на перехресті основної та другорядної доріг не завантажений зовсім – звичайно зі сторони другорядного напрямку, – тоді на цей напрямок має постійно горіти червоне світло; зелене включається лише у випадку появи на вказаному напрямку хоча б одного ТЗ.

Треба звернути увагу на ту обставину, що запропонована система регуляції дорожнього руху дуже просто імплементується в існуючу транспортну інфраструктуру та є досить економічною і володіє високим ступенем надійності. В даній розробці автори відмовились від відеокамер; наявність останніх, як було сказано, досить суттєво збільшує, з однієї сторони, вартість проекту, а з іншої, є досить ненадійною з точки зору збору інформації про транспортні потоки. В свою чергу, п'єзокристалічні датчики, вмонтовані в полотно дороги є дуже надійними, дешевими, вимагають дуже мало витрат на монтаж та під'єднання до існуючої мережі керування трафіком. Можна використовувати цілий спектр датчиків такого типу, наприклад, датчик дорожнього руху Roadtrax BL.[1]. Для монтування датчика потрібен лише невеликий розріз в полотні дороги та під'єднання виводу до існуючої мережі світлофорного регулювання.

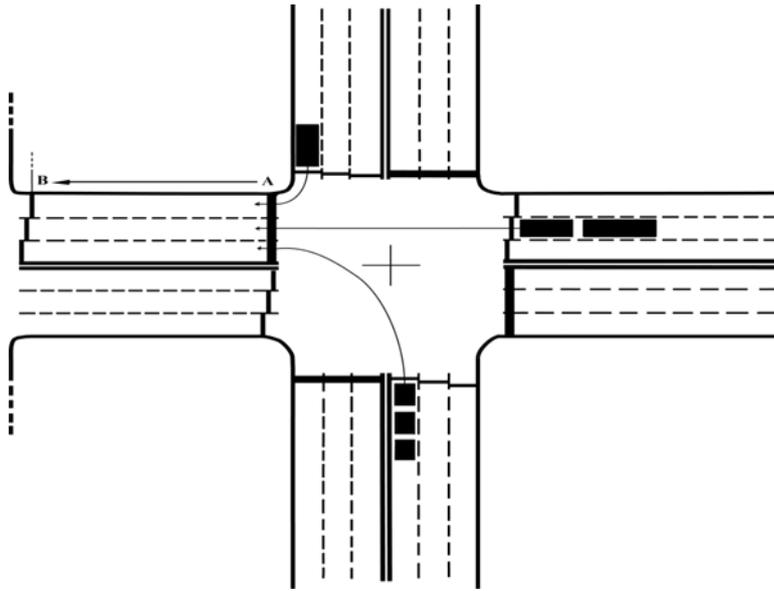


Рис.1. Перехрестя А, з'єднане з сусіднім перехрестям В. Чорними прямокутниками зображені ТЗ, маршрути яких пролягають в напрямку А → В. Показані також вхідні (чорна смужка, позначена літерою А) та вихідні датчики (три рядом розташовані смужки, позначені літерою В). Кожен вхідний та вихідний датчики з'єднані з ВОК (на рисунку зображений лише один такий сигнальний провід, що виходить від одного із датчиків В – це суцільна лінія, що переходить в пунктирну).

Кожне окреме перехрестя працює не автономно, а у тісній взаємодії із сусіднім регульованим перехрестям. Щоб показати таку взаємодію на рис.1 зображена ділянка дороги між сусідніми перехрестями. Вказана взаємодія здійснюється з допомогою вхідних та вихідних датчиків. Вхідний датчик зображений на рис. 1 у вигляді суцільної чорної смужки та позначений літерою А, вихідний – літерою В. Датчик А реєструє автомобілі, які в'їжджають на ділянку дороги АВ з трьох можливих напрямків перехрестя А. Вважатимемо, що кожна ділянка проїзної частини дороги складається із трьох смуг. На цих смугах автомобілі, що в'їхали зі сторони перехрестя А, розподіляються по смугах руху у відповідності з вибраним маршрутом. Тому вихідний датчик В складається власне з трьох датчиків – у випадку трьох смуг руху – з метою реєстрації ТЗ, що рухаються по різних трьох маршрутах. Кожен з цих датчиків реєструє автомобілі, точніше колісні пари ТЗ, що проїжджають перехрестя В. Нехай в межах періоду перемикання світлофора число колісних пар, що перетнули перехрестя В дорівнює відповідно n_a – число колісних пар, що перетнули перехрестя В, рухаючись на розворот та наліво – ці ТЗ реєструються датчиком, що примикає до осьової лінії проїзної частини; n_b – число колісних пар, що перетнули перехрестя В, рухаючись прямо – реєструються середнім датчиком і, нарешті, n_c – число колісних пар, що перетнули перехрестя В, рухаючись направо – реєструються датчиком, що примикає до краю проїзної частини (на

рис.1 пунктиром показано сигнальний вивід лише від цього датчика; проте всі датчики з'єднані з ВОК на ЦПКТ).

Розглянемо відношення $n_a/N_{AB}, n_b/N_{AB}, n_c/N_{AB}$. (тут N_{AB} – кількість автомобілів, що в межах циклу перемикання світлофору T в'їжджають на ділянку дороги в напрямку $A \rightarrow B$). Чим більше кожне з таких відношень, тим більшою є пропускна здатність перехрестя B у відповідному напрямку. При цьому має виконуватись умова

$$n_a + n_b + n_c \approx N_{AB}. \quad (4)$$

Крім того, для кожної проїзної частини комп'ютерна програма передбачає наявність накопичувача, що обліковує число автомобілів n_g , які залишаються на проїзній частині після закінчення фази зеленого світла (мова йде про автомобілі, які не встигли перетнути перехрестя). У випадку виконання співвідношення (4) та при умові невеликого числа на накопичувачі ($n_g \leq 5$) всі смуги проїзної частини ділянки дороги $A \rightarrow B$ є відкритими для трафіка.

Розглянемо тепер мультиплікати виду

$$(N_{AB}/n_a) \cdot l_{AB}, (N_{AB}/n_b) \cdot l_{AB}, (N_{AB}/n_c) \cdot l_{AB}, \quad (5)$$

де l_{AB} – довжина ділянки дороги між перехрестями A і B .

Комп'ютерна програма, що керує прокладанням маршрутів, зберігає в пам'яті саме набори таких величин. При прокладанні маршруту сума таких величин підлягає мінімізації. Для організації такого процесу розглянемо наступне. Транспортну мережу міста представимо у вигляді орієнтованого мультиграфа (рис.2). Нехай маємо справу із рухом ТЗ, що пролягає із точки S в точку F . Завдання полягає в тому щоб для кожної заявленої пари величин (S_i, F_i) прокласти найоптимальніший маршрут. Тобто

$$\sum_{h=1}^f (N_{A_h B_h} / n_h^B) l_{A_h B_h} \rightarrow \min \quad (6)$$

Тут h – індекс, що позначає смуги руху вздовж маршруту (іншими словами, ребра графа), що зчеплені між собою та утворюють нерозривну траєкторію, з'єднуючи початкову S_i та кінцеву F_i точки, заявлені водієм автомобіля i . Символ B (Band) символізує собою смугу руху проїзної частини дороги типу $A \rightarrow B$ одного напрямку (позначатимемо на проїзній частині одного напрямку смуги руху як a, b, c, d і т.д. – літерами латинського алфавіту, починаючи від смуги, що прилягає до осьової лінії). Символ f означає число смуг виду $A_h B_h$, які формують прокладений маршрут. Для кожної заявленої пари (S_i, F_i) програма формує із мультиплікат типу (5) нерозривний маршрут, що пов'язує між собою точки S_i та F_i . Цей маршрут для графа на рис. 2 може виглядати, наприклад, так:

$$(S \rightarrow 1)_c \rightarrow (1 \rightarrow 3)_a \rightarrow (3 \rightarrow 4)_b \rightarrow (4 \rightarrow F)_b \quad (7)$$

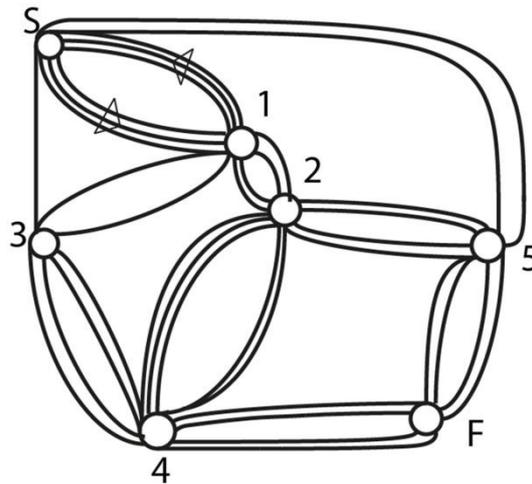


Рис.2. Орієнтований планарний мультиграф, що символізує собою частину транспортної мережі міста. Трикутниками показано напрямки смуг руху лише на окремій ділянці дороги. Точка S символізує собою точку старту ТЗ, а точка F відповідно точку закінчення маршруту.

Взагалі маршрутів подібного типу може бути сотні або тисячі – якщо говорити про транспортну мережу міста. Але треба знайти самий оптимальний нерозривний маршрут. Мовою теорії графів в даному разі маємо справу з орієнтованим простим ланцюгом [10,с.101]. Треба зауважити, що ситуація на маршруті, як і по всьому місту, змінюється щосекундно, але програма, володіючи даними щодо завантаженості смуг руху в режимі «on-line», постійно моніторить ситуацію по кожній парі, тобто проводить GPS-локацію кожного ТЗ та при необхідності адаптує (змінює) маршрут з метою виконання умови (6). При цьому GPS-навігатор задає положення кожного автомобіля на маршруті (GPS-локація), а водій автомобіля отримує голосову інформацію щодо руху по найбільш оптимальному маршруту до своєї кінцевої точки. Відмінність даної технології від відомих Google-карт [11] полягає в тому, що останні констатують наявність заторів на дорогах міста постфактум, а запропонований варіант коригує трафік-ситуацію в режимі реального часу таким чином, щоб жоден автомобіль не потрапив в затор. Очевидно, що при такій технології затори взагалі будуть відсутні. Встановлення такої інтелектуальної інфраструктури на перехрестях міста дозволить не лише поліпшити організацію руху на окремо взятому перетині проїжджих частин, але також і по всьому місту.

Дуже перспективним методом апробації даної технології є програма візуального імітаційного моделювання AnyLogic Profesional 7.3.7 [12], в якій представлено чотири імітаційні моделі, що регулюють дорожній трафік. Найбільш ефективною є модель Traffic Light Phases Optimization, що візуально імітує проїзд ТЗ через три сусідні перехрестя.

Взагалі автомобільні трафік-компанії приділяють велику увагу покращенню ситуації на дорогах і, особливо, на міських маршрутах. Виготовляються різноманітні пристрої та створюються технології з метою ефективно організації трафіку. Наприклад, компанії SICK AG та Sony Visual Imaging & Products [14]

розробляють найсучасніше устаткування для організації дорожнього руху. Проте найважливіше питання стосовно ефективного проїзду у мегаполісах є невирішеним: затори не тільки не зменшуються, а, навпаки, – збільшуються. Це свідчить про доцільність проведення досліджень та створення технологій, подібних до запропонованої.

ЛІТЕРАТУРА

1. Виглеб Г. Датчики /Виглеб Герхард. – М.: Мир, 2014. – 236 с.
2. Pat. CN103164966 China, Intelligent traffic signal lamp / Zhou Xiong; applicant Xi'an King Truck Electron Co.; publ. 24.09.2013.
3. Pat. CN104064049 USA, Intelligent traffic road capacity reporting system through short messages/ Lui Yonghua, Sun Jingyi; applicant Kunming University of Science and Technology; publ. 17.08.2014.
4. Pat. CN104504917 China, Intelligent traffic signal control device and method/Xu Xiude; publ. 14.06.2015.
5. Pat. CN204680208U China, Treat traffic lights that intelligence is switched over through vehicle proportion according to each crossing/Xia Zhongming; applicant Changshu friends connector technology Co., Ltd; publ. 30.09.2015.
6. Pat. CN105390002A China, Intelligent traffic light capable of alleviating congestion/ publ. 09.03.2016.
7. Cross.cz - Traffic Control - CROSS [Електронний ресурс]. – Режим доступу: www.cross.cz/en/products-traffic-control
8. Lugong Wu, Xiaorong Zhang, Zhikai Shi. Intelligent Fuzzi Control for Crossroads Traffic Light/ Lugong Wu, Xiaorong Zhang, Zhikai Shi// An Second WRI Global Congress on Intelligent Systems. – 2010. – P.125-131.
9. ISBAK - Full Adaptive Traffic Management System (АТАК ... – YouTube) [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.youtube.com/watch?v=Ge4rG8ER_C.
10. Основи дискретної математики/[Баранецький Я.О, Гнатів Б.В, Ільків В.С. та ін.]; під ред. О.І. Бобика. – Вид-во нац. у-ту «Львівська політехніка», ч.2. – 2005. – 159 с.
11. Google Maps 9.62.1 для Android [Електронний ресурс]. – Режим доступу: google-maps.ru.uptodown.com
12. AnyLogic [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.anylogic.ru>.
13. Комов А.А. Разработка имитационной модели регулируемого перекрестка /Анатолий Комов //Техника и технология строительства. – №1(1). –2015. – С.34-41.
14. A to Z List of Road Traffic Contractors - Road Traffic Technology [Електронний ресурс]. – Режим доступу: www.roadtraffic-technology.com/contractors/.

УДК 539.3

Дослідження поведінки внутрішніх силових факторів в трансверсально-ізотропних пластинах за дії локальних навантажень

І. П. Боков, Н. С. Бондаренко, О. О. Стрельнікова

Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, Україна

У статті розглядається задача про дію на трансверсально-ізотропну пластину локального силового навантаження. Навантаження розподілене рівномірно та діє у нормальному до серединної площини пластини напрямку. Розміри локальної області набагато менше характерного розміру пластини. Для розв'язання поставленої задачі використаний метод фундаментальних розв'язків і формула згортки. Розглянуто вирази для внутрішніх силових факторів, отриманих на базі узагальненої теорії $\{1,2\}$ -апроксимації. Проаналізовано вплив пружних сталих трансверсально-ізотропного матеріалу на внутрішні силові фактори.

Ключові слова: *теорія $\{m,n\}$ -апроксимації, трансверсально-ізотропні пластини, локальні навантаження, внутрішні силові фактори.*

В статье рассматривается задача о действии на трансверсально-изотропную пластину локальной силовой нагрузки. Нагрузка распределена равномерно и действует в нормальном к срединной плоскости пластинки направлении. Размеры локальной области намного меньше характерного размера пластинки. Для решения поставленной задачи использован метод фундаментальных решений и формула свертки. Рассмотрены выражения для внутренних силовых факторов, полученные на базе уточненной теории $\{1,2\}$ -аппроксимации. Проанализировано влияние упругих постоянных трансверсально-изотропного материала на внутренние силовые факторы.

Ключевые слова: *теория $\{m,n\}$ -аппроксимации, трансверсально-изотропные пластинки, локальные нагрузки, внутренние силовые факторы.*

The paper deals with the problem of a transversely isotropic plate under action of a local power load. The load is distributed evenly and acts in the direction normal to the median plane of the plate. The dimensions of the local area are essentially smaller than the characteristic size of the plate. To solve this problem, we use the method of fundamental solutions and the convolution formula. Expressions for internal force factors obtained on the basis of the refined theory of $\{1,2\}$ -approximation are considered. The influence of the elastic constants of a transversally isotropic material on internal force factors is analyzed.

Key words: *theory of $\{m,n\}$ -approximation, transversely-isotropic plates, local loads, internal force factors.*

1. Вступ

У багатьох прикладних задачах потрібно визначити пружно-деформований стан тіла за дії локальних навантажень. Оскільки розв'язання задач теорії пружності у тривимірному формулюванні пов'язане зі значними математичними труднощами, то для розрахунку тонкостінних елементів конструкцій використовують різні методи зведення тривимірних задач до двовимірних. Використання однієї з найпопулярніших двовимірних теорій – класичної, що заснована на гіпотезах Кірхгофа-Лява або гіпотезах прямих нормалей, у ряді випадків може виявитися недостатнім. Ця теорія використовує залежність від товщини розглядуваної пластини (оболонки) і не враховує деформації

поперечного обтиснення та зсуву. У даній роботі використовується узагальнена теорія $\{m, n\}$ -апроксимації. Ця теорія заснована на методі І. Н. Векуа розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра [1], що дозволяє врахувати зсувну податливість, характерну для більшості композитних матеріалів.

Силові впливи належать до одного з основних видів навантажень, яким підлягають об'єкти й вироби сучасної промисловості. Ці впливи можуть носити зосереджений або локальний характер. Тому дослідження пружно-деформованого стану трансверсально-ізотропних пластин за дії локальних силових навантажень є актуальним і важливим науково-технічним завданням.

Дослідження задач динаміки пластин і оболонок, які перебувають за дії локальних навантажень, представлені в роботах [2, 3]. У публікації [2] розглянуто задачу про дію на тонку ортотропну пластину локального динамічного навантаження, розподіленого в довільній області. У статті [3] досліджено пружно-деформований стан оболонок додатної кривизни при локальних силових впливах. Виконано чисельні дослідження поведінки прогину оболонки при впливі на неї локального навантаження.

Результати досліджень із розрахунку замкнутої циліндричної оболонки за дії локальних і зосереджених навантажень подані у монографії [4]. Розв'язки дозволяють визначити переміщення, зусилля та моменти як у звичайній оболонці, так і в оболонці з пружним заповнювачем (модель Вінклера, модель Власова) за різних варіантів граничних умов.

У публікації [5] досліджується тривимірний пружно-деформований стан кругової циліндричної оболонки, що знаходиться за дії різного типу локальних навантажень. Для отримання двовимірних рівнянь і граничних умов застосовувався принцип можливих переміщень. Аналізується вплив різних типів граничних умов і локальних навантажень, довжин і товщини оболонки на компоненти пружно-деформованого стану.

У публікаціях [6, 7] розглянуті задачі на локальні теплові впливи, в яких джерела тепла розподілені рівномірно в локальній області.

2. Постановка задачі

Розглянемо трансверсально-ізотропну пластину товщини $2h$. Віднесемо пластину до ортогональної системи безрозмірних координат x_i ($i = \overline{1,3}$), визначених із точністю до напівтовщини пластини h . Пластина підлягає локальному силовому впливу в області, розмір якої набагато менше характерного розміру пластини. Зовнішні границі пластини знаходяться на значній відстані від місця прикладення силового навантаження. Це навантаження розподілене рівномірно й діє в нормальному до серединної площини пластини напрямку.

Одним із ефективних методів визначення локального пружно-деформованого стану тонкостінних конструкцій є метод фундаментальних розв'язків [8]. Він заснований на використанні формули згортки, яка стосовно задач локального навантаження записується таким чином

$$P(\vec{r}) = \iint_{\Omega} E(\vec{r} - \vec{r}') W(\vec{r}') d\Omega, \quad (2.1)$$

де P – внутрішні силові фактори; E – силові компоненти фундаментального розв'язку для трансверсально-ізотропної пластини; Ω – область локального навантаження; \vec{r} та \vec{r}' – вектори поточної точки й точки інтегрування відповідно.

3. Внутрішні силові фактори для трансверсально-ізотропної пластини

Фундаментальний розв'язок рівнянь статки для трансверсально-ізотропних пластин на базі уточненої теорії $\{1,2\}$ -апроксимації побудовано в роботі [9]. Вважаємо, що сила діє на пластину тільки в перпендикулярному до серединної площини напрямку, тому у виразах для внутрішніх силових факторів, наведених у [9], слід покласти $q_1^* = m_1^* = q_2^* = m_2^* = 0$. У рамках $\{1,2\}$ -апроксимації закон розподілу компоненти об'ємної сили F_z за товщиною пластини має вигляд [1]

$$F_z = \frac{q_4}{2} P_0 + \frac{3q_3}{2} P_1 + \frac{5q_5}{2} P_2,$$

де $q_i = q_i^* \delta(x_1, x_2)$ ($i = \overline{3,5}$); $\delta(x_1, x_2)$ – двовимірна дельта-функція Дірака; P_i ($i = \overline{0,2}$) – поліноми Лежандра; компонента вектору об'ємної сили F_z визначена з точністю до величини Eh . Наведемо вирази для внутрішніх силових факторів, що не дорівнюють нулю, у полярній системі координат (r, φ) для таких трьох випадків:

Випадок I. $q_3^* = 1$, $q_4^* = q_5^* = 0$, тоді

$$N_{r,\varphi} = -\frac{\lambda_0 B_0 \Omega'_0}{4\pi A \Lambda'_0} (\nu - 1) [G_{0,0}(a_0 r) \mp G_{1,1}(a_0 r)],$$

$$Q_{r1} = -\frac{G_{0,1}(a_0 r)}{\pi r}, \quad R_0 = \frac{B_0 \Omega'_0}{2\pi A \Lambda'_0} G_{0,0}(a_0 r); \quad (3.1)$$

Випадок II. $q_4^* = 1$, $q_3^* = q_5^* = 0$, тоді

$$M_{r,\varphi} = \frac{1}{108\pi A_1 \Lambda_0} \left[-27A_1 \Lambda_0 (\nu + 1) \ln \frac{\gamma r}{2} \pm 147r^2 D_0 \Omega_0 (\nu - 1) G_{2,0}(a_1 r) + \right.$$

$$+ 27D_0 \Lambda_0 \{(\nu + 1)G_{0,0}(a_1 r) \mp (\nu - 1)G_{1,1}(a_1 r)\} - 14\lambda_0 D_0 \Omega_0 \{(\nu - 1)G_{0,0}(a_1 r) \mp$$

$$\left. \mp (\nu - 1)G_{1,1}(a_1 r)\} - 27A_1 \Lambda_0 (\nu + 1)G_{0,0}(a_1 r) + 18\lambda_0^2 \Lambda_0 \Omega_0 G_{0,0}(a_1 r) \right],$$

$$Q_{r0} = \frac{49r^2 D_0 \Omega_0 G_{1,0}(a_1 r) - 9A_1 \Lambda_0 G_{0,1}(a_1 r)}{9\pi A_1 \Lambda_0 r},$$

$$Q_{r2} = -\frac{(9\lambda_0 \Lambda_0 + 14D_0)r\Omega_0}{36\pi A_1 \Lambda_0} G_{1,0}(a_1 r),$$

$$R_1 = \frac{(9\lambda_0 \Lambda_0 + 14D_0)\Omega_0}{54\pi A_1 \Lambda_0} G_{0,0}(a_1 r); \quad (3.2)$$

Випадок III. $q_5^* = 1$, $q_3^* = q_4^* = 0$, тоді

$$M_{r,\varphi} = -\frac{49\lambda_0 D_0 \Omega_0}{27\pi A_1 \Lambda_0} (v-1) [G_{0,0}(a_1 r) \mp G_{1,1}(a_1 r)],$$

$$Q_{r2} = -\frac{G_{0,1}(a_1 r)}{\pi r}, \quad R_1 = \frac{98D_0 \Omega_0}{27\pi A_1 \Lambda_0} G_{0,0}(a_1 r). \quad (3.3)$$

У формулах (3.1) – (3.3) використані позначення:

$$\lambda_0 = \frac{v'}{1-v} E^*, \quad E^* = \frac{E}{E'}, \quad B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1-v^2},$$

$$\Omega'_0 = \frac{25}{21} \Omega_0 = \frac{5}{3} \frac{(1-v)/E^*}{1-v-2(v')^2 E^*},$$

$$A = B_0 + \lambda_0^2 \Omega'_0, \quad A_1 = D_0 + \frac{1}{3} \lambda_0^2 \Omega_0, \quad \Lambda'_0 = \frac{3}{4} \Lambda_0 = \frac{7}{5} \frac{1}{E/G'},$$

$$a_0^2 = \frac{B_0 \Omega'_0}{A \Lambda'_0}, \quad a_1^2 = \frac{196D_0 \Omega_0}{9A_1 \Lambda_0}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

де E , E' – модулі Юнга для розтягання-стиснення за напрямками в площині ізотропії та перпендикулярно до цієї площини; v , v' , G , G' – відповідні цим напрямкам та площинам коефіцієнти Пуассона та модулі зсуву; $C = \ln \gamma = 0,5772\dots$ – константа Ейлера; $G_{n,m}(z)$ – спеціальна G -функція [10].

4. Аналіз отриманих результатів

Застосуємо формулу згортки (2.1) до таких областей:

1) область Ω_1 – коло радіуса r_0 із центром на початку координат:

$$P(x_1, x_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \rho E(x_1 - \rho \cos \theta, x_2 - \rho \sin \theta) W(\rho, \theta) d\rho;$$

2) область Ω_2 – еліпс із напівосями a та b із центром на початку координат:

$$P(x_1, x_2) = ab \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho E(x_1 - \rho \cos \theta, x_2 - \rho \sin \theta) W(\rho, \theta) d\rho.$$

Як приклад розглянемо дію сили, що рівномірно розподілена ($W \equiv 1$) в областях Ω_1 ($r_0 = 1$) та Ω_2 ($a = 1, b = 2$). Для даних областей розраховані значення внутрішніх силових факторів уздовж осі ординат.

Чисельні дослідження проведені для трансверсально-ізотропної пластини при таких значеннях параметрів: $E^* = 5$; $\nu = 0,3$; $\nu' = 0,07$. Також розглянута пластина з ізотропного матеріалу, для якого $E^* = 1$; $E/G' = 2,6$; $\nu = \nu' = 0,3$. На рис. 1–5 надані графіки зміни внутрішніх силових факторів R_1, Q_{ri} ($i = 0, 2$) у залежності від параметра зсувної піддатливості E/G' . При цьому рис. 1–3 відповідають випадку II ($q_4^* = 1, q_3^* = q_5^* = 0$), а рис. 4, 5 – випадку III ($q_5^* = 1, q_3^* = q_4^* = 0$). На всіх рисунках криві під номером 1 відповідають ізотропному матеріалу, а криві під номерами 2, 3 і 4 демонструють поведінку внутрішніх силових факторів трансверсально-ізотропної пластини для таких значень параметра зсувної піддатливості E/G' : 40; 80; 120.

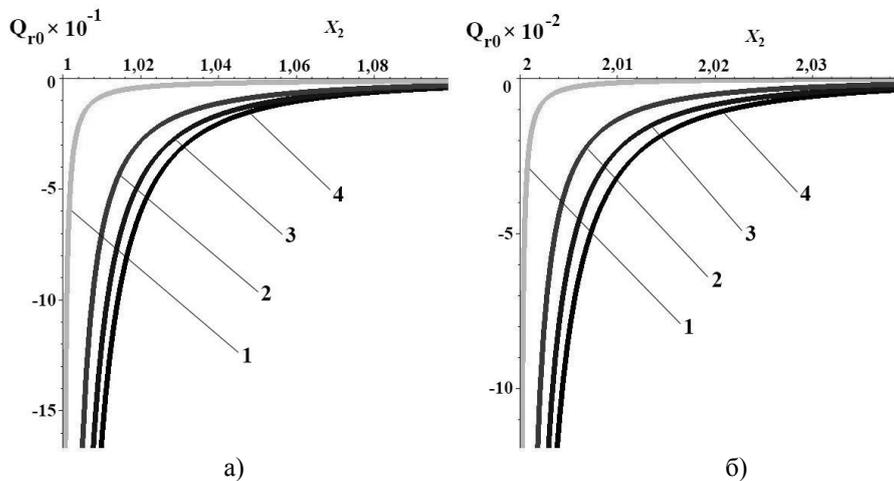


Рис.1. Внутрішній силовий фактор Q_{r0} : а) область Ω_1 , б) область Ω_2

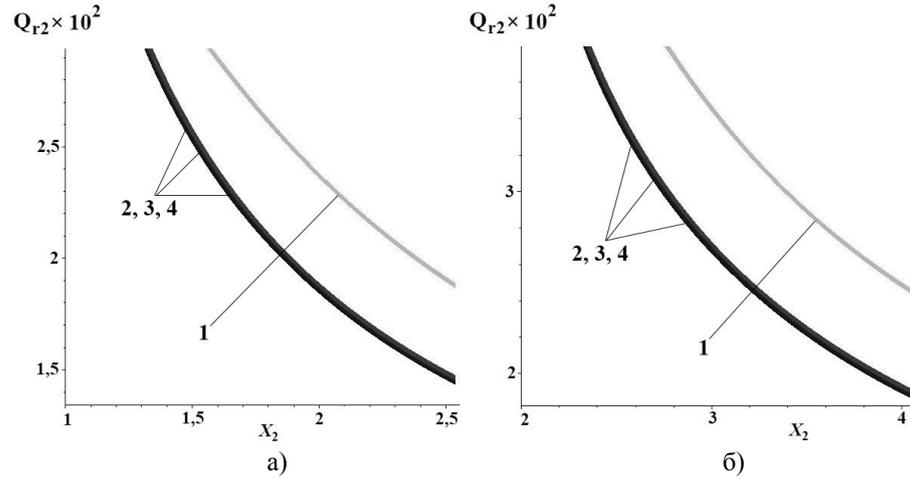


Рис.2. Внутрішній силовий фактор Q_{r2} : а) область Ω_1 , б) область Ω_2

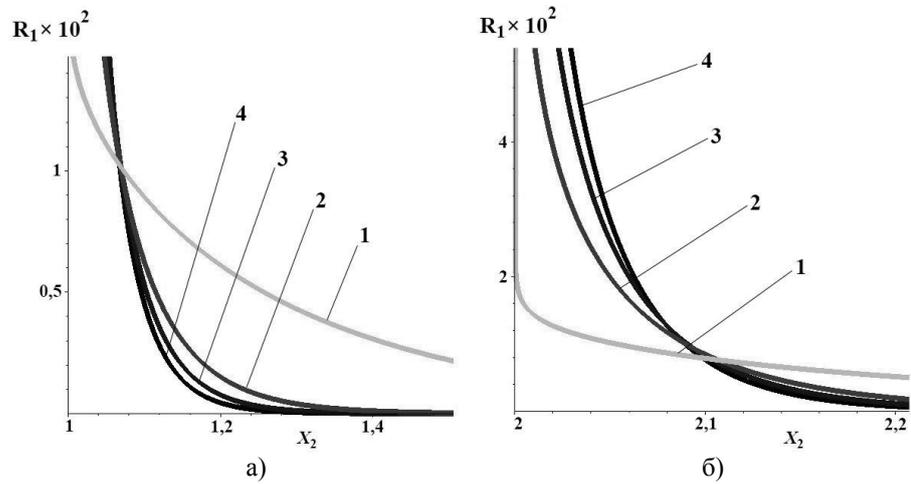


Рис.3. Внутрішній силовий фактор R_1 : а) область Ω_1 , б) область Ω_2

Дані, представлені на рис. 1–3, свідчать про те, що узагальнені зусилля Q_0 та R_1 у випадку II при збільшенні значення параметра зсувної піддатливості E/G' зростають за абсолютною величиною, а Q_{r2} – спадає. Причому зазначена закономірність для R_1 справедлива лише в безпосередньому околі локального силового впливу.

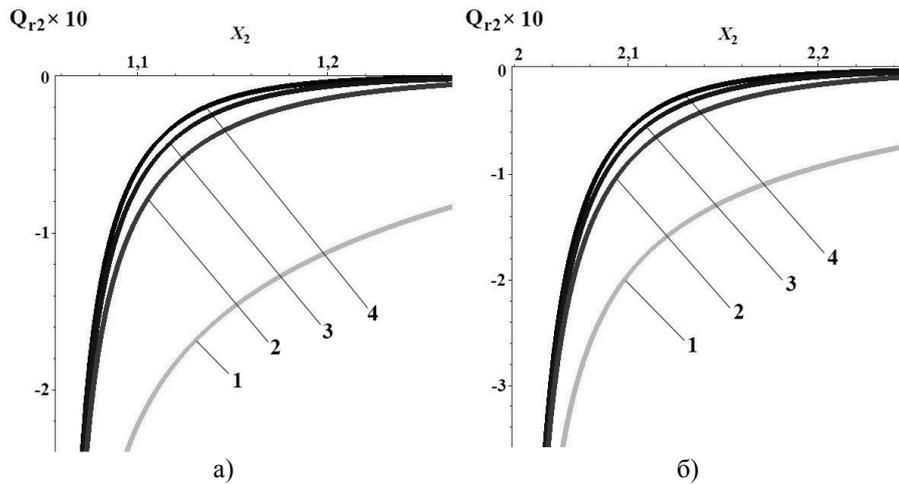


Рис.4. Внутрішній силовий фактор Q_{r2} : а) область Ω_1 , б) область Ω_2

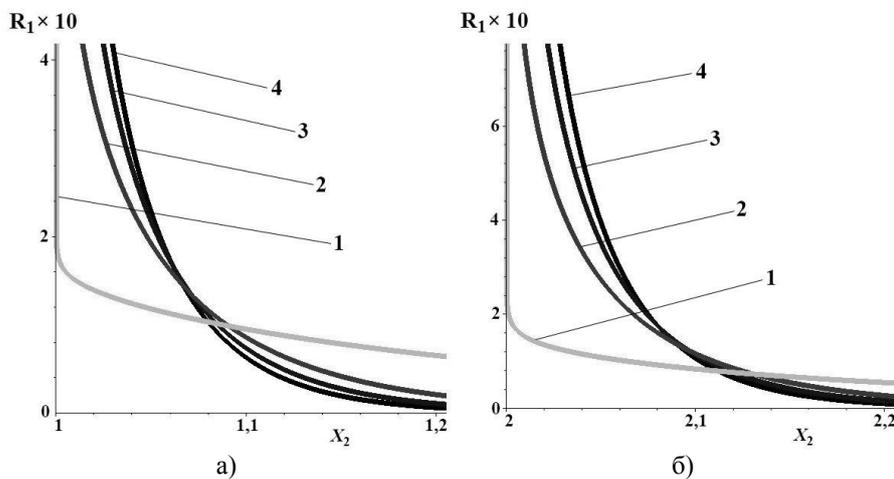


Рис.5. Внутрішній силовий фактор R_1 : а) область Ω_1 , б) область Ω_2

У випадку III, як впливає з рис. 4, 5 при збільшенні значення E/G' внутрішній силовий фактор R_1 збільшується біля області локального силового навантаження, а Q_{r2} – зменшується за модулем.

5. Висновки

Розглянуто задачу про дію на трансверсально-ізотропну пластину локального силового навантаження. Для розв'язання даної задачі використано метод фундаментальних розв'язків і формулу згортки. Проаналізовано вплив пружних сталих трансверсально-ізотропного матеріалу й геометрії області локального навантаження на внутрішні сили фактори. Проведені чисельні дослідження довели, що при розрахунку локального пружно-деформованого стану

тонкостінних пластин важливим є врахування пружних властивостей трансверсально-ізотропних матеріалів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
2. Шевченко В. П. Динамика ортотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок / В. П. Шевченко, О. С. Ветров // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – ISSN 1683-4720. – С. 207–215.
3. Шевченко В. П. Исследование напряженно-деформированного состояния оболочек при локальных нагрузках по уточненным теориям / В. П. Шевченко, А. Ю. Удовиченко // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. – 2014. – №. 1. – С. 94–98.
4. Шагивалеев К. Ф. Расчет замкнутой цилиндрической оболочки на локальные и сосредоточенные нагрузки / К. Ф. Шагивалеев. – Саратов : СГТУ. – 2011. – 316 с.
5. Фирсанов В. В. Замкнутая цилиндрическая оболочка под действием локальной нагрузки / В. В. Фирсанов, Н. Д. Чан // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 91–106.
6. Гольцев А. С. Задачи термоупругости для ортотропных цилиндрических оболочек при локальном температурном воздействии / А. С. Гольцев // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 139–144.
7. Гольцев А. С. Исследование влияния условий теплообмена для локально нагретых ортотропных сферических оболочек / А. С. Гольцев // Динамические системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 76–82.
8. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений (Механика композитов: В 12 т. Т. 7) / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – К.: А. С. К., 1998. – С. 159–196.
9. Vokov I. Analysis of fundamental solutions to the equations of statics constructed for transversal-isotropic plates / I. Vokov, N. Bondarenko, E. Strelnikova // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – 2/7 (86). – P. 4–12.
10. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек : учебн. пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк : ДонГУ, 1980. – 128 с.

УДК 532.1+539.3

Анализ дискретных реологических моделей биоактивных мягких и жидких материалов

Н. Н. Кизилова¹, Е. Н. Соловьева²¹Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина²Харьковский национальный политехнический университет «ХПИ», Украина

В статье приведен анализ дискретных реологических моделей некоторых биологических тканей как биоактивных вязкоупругих деформируемых материалов. Изучены свойства моделей при статическом и динамическом изотоническом и изометрическом нагружениях. Получен общий вид кривых ползучести и релаксации для 3-х и 5-ти элементных моделей. Проведены численные расчеты кривых нагрузки и релаксации моделей и выполнена идентификация параметров моделей на основе данных экспериментов. Предложено обобщение реологических моделей вязкоупругих жидкостей на случай биоактивных жидкостей.

Ключевые слова: активные биоматериалы, вязкоупругие жидкости, реология, математическое моделирование.

У статті наведено аналіз дискретних реологічних моделей деяких біологічних тканин як біоактивних в'язкопружних деформівних матеріалів. Вивчено властивості моделей при статичному та динамічному ізотонічному та ізометричному навантаженнях. Отримано загальний вигляд кривих повзучості та релаксації для 3-х і 5-ти елементних моделей. Виконані чисельні розрахунки кривих навантаження і релаксації моделей та проведено ідентифікацію параметрів моделей на основі даних експериментів. Запропоновано узагальнення реологічних моделей в'язкопружних рідин на випадок біоактивних рідин.

Ключові слова: активні біоматеріали, в'язкопружні рідини, реологія, математичне моделювання.

Analysis of discrete rheological models of muscle tissues and implants as bioactive viscoelastic deformable materials is presented. The properties of the models under static, dynamic, isotonic and isometric loadings have been studied. The general form of creep and relaxation curves for 3-element and 5-element models has been obtained. The numerical calculations for stress and relaxation curves of the models have been obtained. A validation of the models based on the measurement data has been carried out. A generalization of the rheological models for the case of bioactive viscoelastic fluids has been proposed.

Key words: active biomaterials, viscoelastic fluids, rheology, mathematical modeling

1. Введение

Биологические ткани при нагружении проявляют как пассивные механические свойства (деформации, течение, релаксация), так и активные, связанные с работой молекулярных моторов, сокращением волокон микроструктуры, цитоскелета, гладкомышечных клеток, скелетной мускулатуры [1]. При этом общая деформация ε складывается из пассивной ε_p и активной ε_a компонент $\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_a$. Для описания биоактивных свойств предложен ряд многоэлементных реологических моделей [2], для которых остается актуальной

проблема идентификации реологических параметров по данным экспериментов. Поскольку в реологические соотношения упругие, вязкие и активные свойства компонент ткани входят в виде комбинаций, процедура идентификации является неоднозначной.

В последние годы наблюдается значительный интерес к биоактивным материалам; с 2016 г. выходит специализированный журнал *Bioactive materials*. При этом рассматриваются не только биологические ткани, но и их искусственные заменители, импланты [3], а также синтетические материалы, способные преобразовывать разные виды энергии в направленное движение за счет химических реакций, изменений длины и пространственной структуры молекул (так называемых конформационных изменений), а также за счет перестройки микроструктуры. Современные нанотехнологии позволяют имитировать сократительную активность микроволокон, агрегатов микро- и наночастиц, создавая искусственные биоактивные твердые и жидкие материалы. Например, в пористых биоактивных материалах за счет сокращений волокон или перестройки микроструктуры происходит фильтрация заполняющих их жидкостей, активное впитывание жидкостей в биоактивную пористую губку, интенсификация химических реакций и перемешивания за счет сокращений.

В последние годы развивается новое направление механики жидкости - механика активных жидкостей [4-6]. В качестве таковых рассматриваются концентрированные суспензии жгутиковых и других клеток, способных перемещаться, химически/оптически управляемые коллоиды, суспензии микросвиммеров (*microswimmers*) – неньютоновских жидкостей с внутренними степенями свободы. Предложены статистические и термодинамические модели активных жидкостей, однако их реологические свойства остаются малоизученными [7].

2. Дискретные реологические модели вязкоупругих биоактивных мягких материалов и их свойства

Простейшая модель биоактивной ткани была предложена для мышцы [1] в виде модели вязкоупругого тела Зенера, дополненной активным элементом (Рис.1а), который, в зависимости от деформации ε_2 пружины с модулем Юнга E_2 , создает мгновенное напряжение $f = k_1\varepsilon_2 + k_2\dot{\varepsilon}_2$. Таким образом, активная реакция ткани состоит в пропорциональной генерации напряжений, соответствующих сокращению и скорости сокращения упругого элемента E_2 . Постоянные $k_{1,2}$ играют роль управляющих параметров. В мышечной ткани активный элемент соответствует актиново-миозиновым мостикам, а $k_{1,2}$ - функции концентрации активатора сокращения. В искусственных активных материалах $k_{1,2}$ могут быть как функциями концентраций химически активных веществ, так и интенсивности оптического излучения, напряженности внешнего электрического или магнитного поля, температуры, сдвиговых или нормальных напряжений [8].

Для этой модели получим реологическое соотношение в виде

$$(k_2 + \mu)\dot{\sigma} + (k_1 + E_2)\sigma = E_1(E_2 + k_1)\varepsilon + (E_1(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)\mu)\dot{\varepsilon} + \mu k_2 \ddot{\varepsilon} \quad (1)$$

где σ, ε - общие напряжения и деформации в теле, $E_{1,2}$ - модули упругости упругих элементов, μ - коэффициент вязкости вязкого элемента.

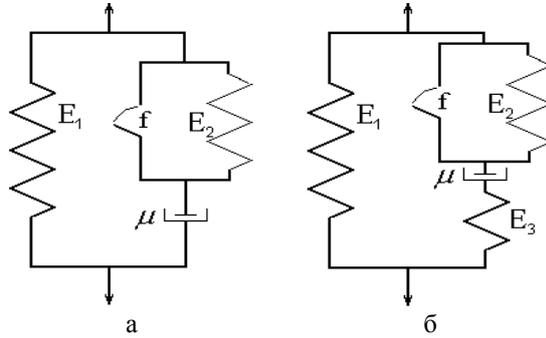


Рис.1. 4-х (а) и 5-ти (б) элементные реологические модели мышцы активного вязкоупругого материала

Исследуем поведение модели при (1) при изотоническом нагружении. Подставляя $\sigma = \sigma^* = \text{const}$ и решая полученное ОДУ для деформаций с граничными условиями $\varepsilon(0) = 0, \dot{\varepsilon}(0) = 0$, получим кривую ползучести

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^*}{E_1} \left(1 + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right), \quad \lambda_{1,2} = \frac{E_1(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)\mu \pm \sqrt{D_1}}{2\mu k_2}, \quad (2)$$

$$D_1 = (E_1(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)\mu)^2 - 4\mu k_2 E_1(E_2 + k_1)$$

После снятия нагрузки $\sigma^* = 0$ в некоторый момент времени $t = t_1$ получим релаксационную зависимость

$$\varepsilon_{\text{rel}}(t) = \frac{\varepsilon_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_2 e^{-\lambda_1(t-t_1)} - \lambda_1 e^{-\lambda_2(t-t_1)} \right) \quad (3)$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$ получено путем подстановки $t = t_1$ в (2). Для сравнения, в модели Зенера имеется только один релаксационный параметр $\tilde{\tau}_1 = (E_1 + E_2)\mu / E_1 E_2$.

Для исследования свойств модели при изометрическом нагружении подставим в (1) $\varepsilon = \varepsilon^* = \text{const}$ и решим полученное ОДУ для напряжений с граничным условием $\sigma(0) = \sigma_0 = (E_1 + E_2 + k_1)\varepsilon^*$. Получим

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon^* \left(1 - e^{-\lambda t} \right) + \sigma_0 e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{k_1 + E_2}{k_2 + \mu} \quad (4)$$

После снятия нагрузки $\varepsilon^* = 0$ в некоторый момент времени $t = t_1$, получим релаксационную зависимость

$$\sigma_{\text{rel}}(t) = \sigma_1 e^{-\lambda(t-t_1)} \quad (5)$$

где $\sigma_1 = \sigma(t_1)$ получено путем подстановки $t = t_1$ в (4). В модели Зенера $\lambda = E_2 / \mu$, что соответствует (4) при $k_{1,2} = 0$.

В динамических изотонических экспериментах, т.е. при периодическом нагружении $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$ в вязкоупругих материалах возникают колебания деформаций $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i(\omega t + \phi)}$, где ϕ - фазовый сдвиг. Аналогичные зависимости возникают при динамических изометрических экспериментах, причем с тем же фазовым сдвигом. Подставляя $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ в (1), получим для напряжений

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i(\omega t + \phi)}, \quad \sigma_0 = \frac{\varepsilon_0}{a_{12}^2 + a_{11}^2 \omega^2}, \quad \operatorname{tg}(\phi) = \frac{b_{11} a_{11} \omega^3 + (b_{12} a_{12} - a_{11} b_{13}) \omega}{(b_{12} a_{11} - b_{11} a_{12}) \omega^2 + b_{13} a_{12}}$$

где $a_{11} = k_2 + \mu$, $a_{12} = k_1 + E_2$, $b_{11} = \mu k_2$, $b_{12} = E_1(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)\mu$, $b_{13} = E_1(E_2 + k_1)$.

Для популярной 5-элементной дискретной модели мышцы (Рис.1б) реологическое соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} \mu k_2 \ddot{\sigma} + ((k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu)\dot{\sigma} + E_3(k_1 + E_2)\sigma = \\ = E_1 E_3 (E_2 + k_1)\varepsilon + (E_1 E_3 (k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu)\dot{\varepsilon} + \mu(E_1 + E_3)k_2 \ddot{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (6)$$

При изотоническом нагружении (6) дает кривые ползучести и релаксации деформаций такие же, как и (2), (3) соответственно, но при этом

$$\lambda_{1,2} = \frac{E_1 E_3 (k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu \pm \sqrt{D_2}}{2\mu(E_1 + E_3)k_2}, \quad (7)$$

$$D_2 = (E_1 E_3 (k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu)^2 - 4E_1 E_3 (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)k_2 \mu$$

При изометрическом нагружении модели (6) получим

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0 - E_1 \varepsilon^*}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}) + E_1 \varepsilon^*, \quad \lambda_{1,2} = \frac{(k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu \pm \sqrt{D_3}}{2\mu k_2}, \quad (8)$$

$$D_3 = ((k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu)^2 - 4\mu k_2 E_3 (k_1 + E_2), \quad \sigma_0 = \left(E_1 + \frac{E_3 (E_2 + k_1)}{E_2 + E_3 + k_1} \right) \varepsilon^*$$

и после снятия нагрузки

$$\sigma_{\text{rel}}(t) = \frac{\sigma_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_2 e^{-\lambda_1(t-t_1)} - \lambda_1 e^{-\lambda_2(t-t_1)} \right), \quad (9)$$

где $\sigma_1 = \sigma(t_1)$ получено путем подстановки $t = t_1$ в (8).

В этом случае имеется два релаксационных параметра как деформаций, так и для напряжений, причем выражения для них существенно отличаются у моделей (1) и (6).

Оценивая величины первых и вторых производных кривых $\sigma(t), \varepsilon(t)$ (2)-(4), (7)-(9), получим общий вид кривых ползучести и релаксации (Рис.2).

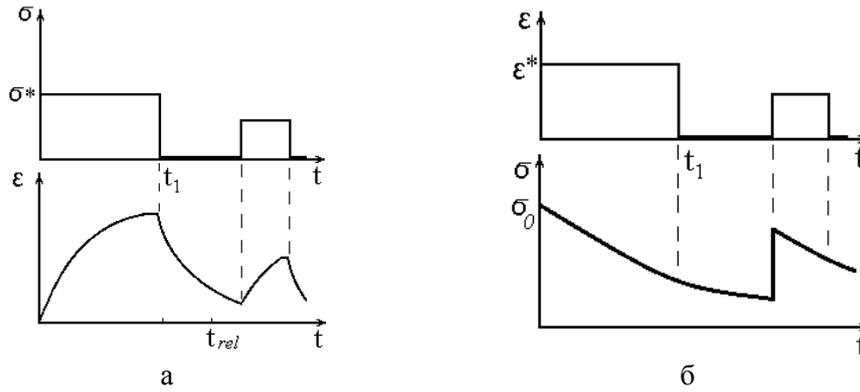


Рис.2. Кривые $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ для изотонического (а) и изометрического (б) экспериментов с моделями (1), (6).

При динамическом нагружении модели (6) получим

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0}{(a_{23} - a_{21}\omega^2)^2 + a_{22}^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{(b_{22}a_{23} - a_{22}b_{23})\omega + (b_{21}a_{22} - b_{22}a_{21})\omega^3}{b_{21}a_{21}\omega^4 + (b_{22}a_{22} - b_{21}a_{23} - b_{23}a_{21})\omega^2 + b_{23}a_{23}},$$

где $a_{21} = \mu k_2$, $a_{22} = (k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu$, $a_{23} = E_3(k_1 + E_2)$,
 $b_{21} = \mu(E_1 + E_3)k_2$, $b_{22} = E_1E_3(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu$,
 $b_{23} = E_1E_3(E_2 + k_1)$.

3. Новые модели биоактивных вязкоупругих жидкостей

По аналогии с биоактивными мягкими материалами можно предложить биоактивные жидкие материалы, которые могут заменять вязкоупругие гидрогели в тех случаях, когда для нативной ткани характерны те или иные реологические свойства. На Рис.3а приведена модификация модели Джеффри, реологическое соотношение для которой получим в виде

$$(k_2 + \mu_2)\dot{\sigma} + E_3(k_1 + E)\sigma = (\mu_1 + \mu_2)(E + k_1)\dot{\varepsilon} + (\mu_1\mu_2 + (\mu_1 + \mu_2)k_2)\ddot{\varepsilon}, \quad (10)$$

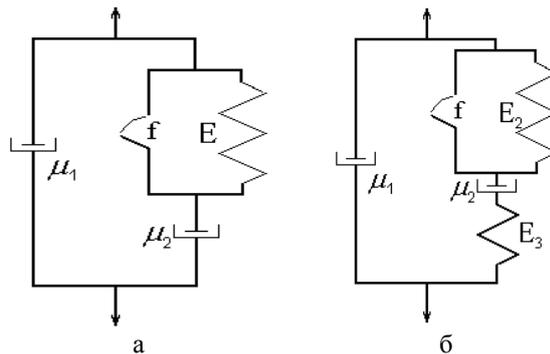


Рис.3. 4-х (а) и 5-ти (б) элементные реологические модели активной вязкоупругой жидкости

При изотоническом нагружении $\sigma = \sigma^* = \text{const}$ из (10) получим

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^*}{(\mu_1 + \mu_2)} t - \frac{\sigma^*}{(\mu_1 + \mu_2)\lambda_2} (1 - e^{-\lambda t}), \quad \lambda = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(E + k_1)}{\mu_1\mu_2 + (\mu_1 + \mu_2)k_2}, \quad (11)$$

а после снятия нагрузки $\sigma^* = 0$ в некоторый момент времени $t = t_1$, получим

$$\varepsilon_{\text{rel}}(t) = \frac{\varepsilon_1}{1 + t_1\lambda} (\lambda t - e^{-\lambda(t-t_1)}) \quad (12)$$

При изометрическом нагружении модели (10) получим

$$\sigma(t) = \varepsilon_1(k_1 + E)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{k_1 + E}{k_2 + \mu_2}, \quad (13)$$

причем после снятия нагрузки релаксационная кривая имеет тот же вид (13).

При динамическом нагружении модели (10) получим

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0}{a_{32}^2 + a_{31}^2\omega^2}, \quad \text{tg}(\phi) = \frac{(b_{32}a_{32} + b_{31}a_{31}\omega^2)\omega}{(b_{32}a_{31} - b_{31}a_{32})\omega^2},$$

где $a_{31} = k_2 + \mu_2$, $a_{32} = E_3(k_1 + E)$, $b_{31} = \mu_1\mu_2 + (\mu_1 + \mu_2)k_2$,
 $b_{32} = (\mu_1 + \mu_2)(E + k_1)$.

Замена в 5-элементной модели упругого элемента E_1 на аналогичный предыдущей модели вязкий элемент μ_1 (рис. 3б) приводит к реологическому соотношению

$$\mu_2 k_2 \ddot{\sigma} + (E_2 k_2 + \mu_2 (E_1 + E_2 + k_1)) \dot{\sigma} + E_2 (E_1 + k_1) \sigma = (E_1 + k_1) (\mu_1 + \mu_2) E_2 \dot{\varepsilon} + ((\mu_1 + \mu_2) k_2 E_2 + (E_1 + E_2 + k_1) \mu_1 \mu_2) \ddot{\varepsilon} + \mu_1 \mu_2 k_2 \ddot{\varepsilon}. \quad (14)$$

При изотоническом нагружении из (14) получим

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^*}{\mu_1 + \mu_2} \left(t + \frac{\lambda_1^2 (1 - e^{-\lambda_1 t}) - \lambda_2^2 (1 - e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \right), \quad (15)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\mu_1 + \mu_2) k_2 E_2 + (E_1 + E_2 + k_1) \mu_1 \mu_2 \pm \sqrt{D_4}}{2 \mu_1 \mu_2 k_2},$$

$$D_4 = ((\mu_1 + \mu_2) k_2 E_2 + (E_1 + E_2 + k_1) \mu_1 \mu_2)^2 - 4 (E_1 + k_1) (\mu_1 + \mu_2) E_2 \mu_1 \mu_2 k_2,$$

а после снятия нагрузки

$$\varepsilon_{\text{rel}}(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) t + \lambda_2^2 e^{-\lambda_1(t-t_1)} - \lambda_1^2 e^{-\lambda_2(t-t_1)}}{\lambda_2^2 (1 + \lambda_1 t_1) - \lambda_1^2 (1 + \lambda_2 t_1)}. \quad (16)$$

При изометрическом нагружении модели (14) получим

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{(\lambda_1 - \lambda_2)} (\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}), \quad \lambda_{1,2} = \frac{E_2 k_2 + \mu_2 (E_1 + E_2 + k_1) \pm \sqrt{D_5}}{2\mu_2 k_2} \quad (17)$$

$$D_5 = (E_2 k_2 + \mu_2 (E_1 + E_2 + k_1))^2 - 4\mu_2 k_2 E_2 (E_1 + k_1),$$

а после снятия нагрузки релаксационная кривая будет иметь тот же вид (17).

Оценивая величины первых и вторых производных кривых $\sigma(t), \varepsilon(t)$ (11)-(13), (15)-(17), получим общий вид кривых ползучести и релаксации (Рис.4).

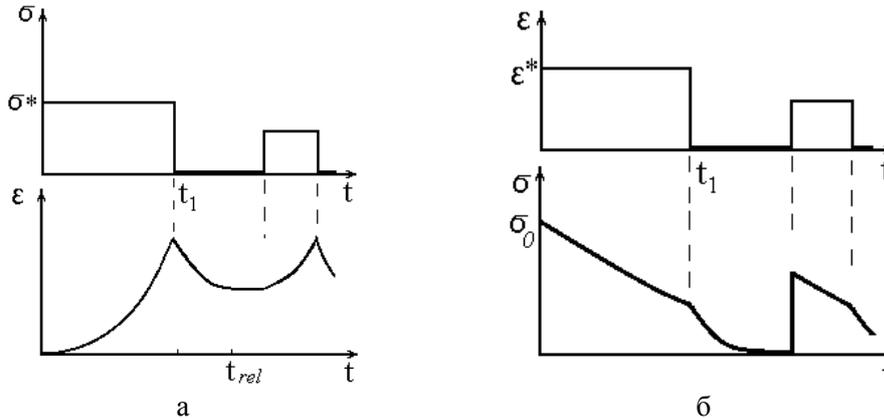


Рис.4. Кривые $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ для изотонического (а) и изометрического (б) экспериментов с моделями (10), (14)

При динамическом нагружении модели (14) имеем

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0}{(a_{43} - a_{41}\omega^2)^2 + a_{42}^2\omega^2},$$

$$tg(\phi) = \frac{a_{41}b_{41}\omega^5 + (b_{42}a_{42} - b_{41}a_{43} - b_{43}a_{41})\omega^3 + b_{43}a_{43}\omega}{(b_{42}a_{41} - b_{41}a_{42})\omega^4 + (b_{43}a_{42} - b_{42}a_{43})\omega^2},$$

где $a_{41} = \mu_2 k_2$, $a_{42} = E_2 k_2 + \mu_2 (E_1 + E_2 + k_1)$, $a_{43} = E_2 (E_1 + k_1)$, $b_{41} = \mu_1 \mu_2 k_2$, $b_{42} = (\mu_1 + \mu_2) k_2 E_2 + (E_1 + E_2 + k_1) \mu_1 \mu_2$, $b_{43} = (E_1 + k_1) (\mu_1 + \mu_2) E_2$.

4. Идентификация реологических параметров

Для выбора адекватной модели материала и идентификации реологических параметров используют экспериментальные кривые $\sigma(\varepsilon)$, релаксационные кривые $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$, а также амплитудно-фазовый спектр при периодических нагрузках $\sigma(t) \sim \sin(\omega t)$ и $\varepsilon(t) \sim \sin(\omega t)$. При этом наборы реологических коэффициентов $\{E_j, \mu_j\}$ могут не соответствовать значениям, характерным для модулей упругости и коэффициентов вязкостей компонент такни – волокнам актина, миозина, коллагена и тканевой жидкости. Кроме этого, параметры $k_{1,2}$ в

моделях (1), (6), (10), (14) остаются неопределенными, поскольку зависят от особенностей управления микроструктурой в данном биоактивном материале. Для разработки метода идентификации реологической модели и ее параметров были проведены численные расчеты кривых нагрузки и релаксации моделей (1), (6), (10), (14). В качестве значений $\{E_j, \mu_j\}$ выбирались параметры, соответствующие волокнам актина, миозина и коллагена из которых образованы активные биологические ткани. Волокна со сходными свойствами используются при создании заменителей и имплантов. Для управляющих параметров принималось $k_1 = k_2 = 1$. Некоторые результаты расчетов представлены на рис.5.

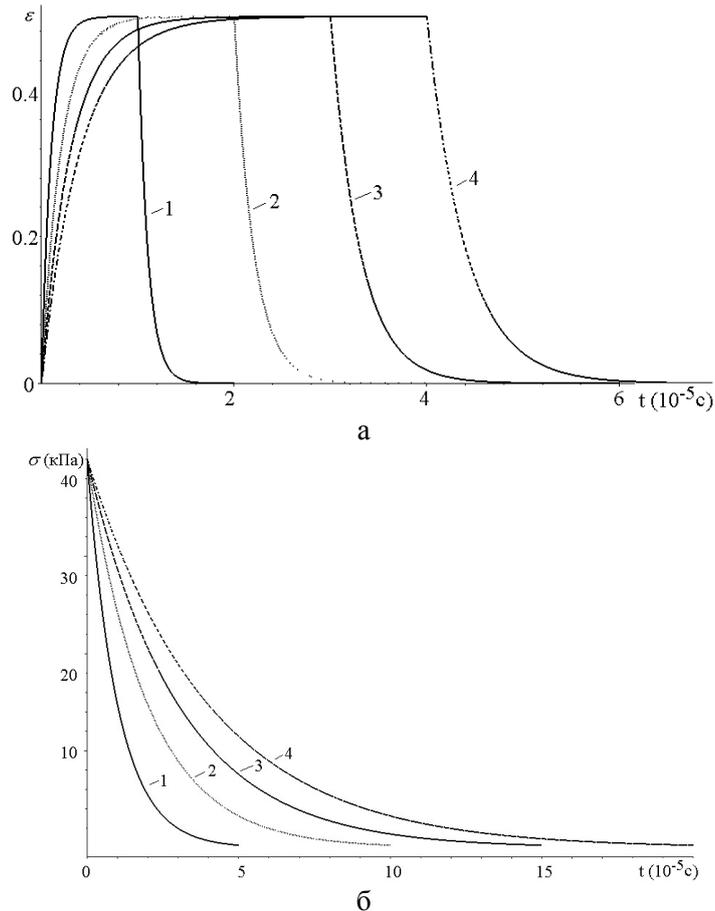


Рис.5. Зависимости $\varepsilon(t)$ (а) и $\sigma(t)$ (б) для модели (6) при $E_1 = 10^5$ Па, $E_2 = 10^6$ Па, $E_3 = 10^7$ Па, $\mu = 10^{-3}$ Па·с, $\sigma^* = 50$ кПа, $k_1 = 1$. Кривые 1-4 соответствуют значениям $k_2 = 1; 2; 3; 4$

При уменьшении модулей Юнга и увеличении вязкостей дискретных реологических элементов время релаксации деформаций в изотонических экспериментах и напряжений – в изометрических – увеличивается аналогично

кривым, изображенным на Рис. 5а и Рис.5б соответственно. При увеличении веса слагаемого, отвечающего биоактивному контролю по скоростям деформаций (рост k_2), время релаксации быстро увеличивается, а при большем весе контроля по величине деформации (рост k_1) – быстро уменьшается. Сопоставление релаксационных кривых моделей (1) и (6) с данными экспериментов по изометрическому и изотоническому нагружению скелетных мышц [9-11] показало, что модель (6) лучше описывает динамику участков ползучести и релаксации чем модель (1). Начальный выбор реологических параметров моделей, близких по значениям к основным компонентам мышечной ткани, позволяет относительно быстро проводить идентификацию параметров методом наименьших квадратов. Результаты идентификации приведены в Табл.1. Некоторые различия в модулях Юнга могут быть связаны с различными видами миозинов и числом волокон разного типа в мышцах животных разных видов.

Табл.1. Результаты идентификации параметров модели (6) для разных видов мышц

мышца	E_1 (МПа)	E_2 (МПа)	E_3 (МПа)	μ (сПз)	k_1	k_2
sartorius (лягушка, [9])	52.1	8.5	34.1	24.2	0.87	2.15
soleus (кот, [10])	45.2	9.3	29.6	28.7	0.67	3.42
gracilis anticus (крыса, [11])	46.9	7.9	31.2	34.1	0.79	3.90
gracilis anticus (кролик, [11])	51.4	8.2	33.8	31.4	0.78	2.87

4. Выводы и направления дальнейших исследований

Сравнительный анализ дискретных реологических моделей биоактивных вязкоупругих материалов в условиях изотонического и изометрического нагружения материала показал, что скорость деформирования и релаксационные кривые имеют различия для 3-х и 5-ти элементных моделей. Сопоставление теоретических зависимостей с результатами соответствующих экспериментов на мышцах показало, что 5-ти элементная модель лучше описывает динамику релаксации напряжений и деформаций и позволило идентифицировать реологические параметры, которые несколько отличаются у мышц разных животных, но имеют одинаковый порядок значений.

Полученные значения параметров могут быть использованы для анализа поведения биоактивных жидкостей (модели (10) и (14)), а также для подбора материалов для создания синтетических биоактивных материалов со сходными свойствами для использования их в качестве заменителей тканей, имплантов, стентов, графтов и др.

Предложены новые реологические модели биоактивных технических жидкостей. Исходя из требуемых динамических свойств жидкости, материал для ее изготовления (несущая жидкости, волокна, гранулы, активные компоненты) может быть подобран путем идентификации параметров соответствующей

моделі (10) или (14) подобно тому, как была проведена идентификация параметров моделей мышечной ткани разных животных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С.А. Лекции по биологической механике, – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 144с.
2. Філіппова О.М., Кізілова Н.М. Дослідження руху в'язкої рідини у в'язкопружній камері з біоактивного матеріалу. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2015. – Спецвипуск. – С.277–282.
3. Rezwana K., Chena Q.Z., Blakera J.J., Voccaccinia A.R. Biodegradable and bioactive porous polymer/inorganic composite scaffolds for bone tissue engineering. // *Biomaterials*. – 2006. – 27(18). – P. 3413–3431.
4. Kumar K.V., Bois J.S., Jülicher F., Grilli S.W. Pulsatory Patterns in Active Fluids. // *Phys. Rev. Lett.* – 2014. – v.112, 208101.
5. Marconi U.M.B., Maggi C. Towards a statistical mechanical theory of active fluids. // *Soft Matter*. – 2015. – v.11. – P.8768–8781.
6. Morozov A. From chaos to order in active fluids. Random flows in an active fluid become directional under confinement. // *Science*. – 2017. – 355(6331). – P. 1262–1263.
7. Heidenreich S., Dunkel J., Klapp H., Bär M. Hydrodynamic length-scale selection in microswimmer suspensions. // *Physical Review E*. – 2016. – v.94(2), 020601.
8. Alonso S., Strachauer U., Radszuweit M., Bär M., Hauser M. Oscillations and uniaxial mechanochemical waves in a model of an active poroelastic medium: Application to deformation patterns in protoplasmic droplets of *Physarum polycephalum*. // *Physica D*. – 2016. – v.318. – P.58–69.
9. Bressler B.H., Clinch N.F. The compliance of contracting skeletal muscle. // *J. Physiol.* – 1974. – v.237(3). – P. 477–493.
10. Joyce G.C., Rack P.M.H. Isotonic lengthening and shortening movements of cat soleus muscle. // *J. Physiol.* – 1969. – v.204(2). – P.475–491.
11. Bahler A.S., Fales J.T., Zierler K.L. The Dynamic Properties of Mammalian Skeletal Muscle. // *J. Gen. Physiol.* – 1968. – v.51 (3). – P. 369-384.

УДК 539.3

Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs

D. V. Krutchenko¹⁾, E. A. Strelnikova^{1),2)}, Yu. S. Shuvalova³⁾¹⁾"Podgorny Institute For Mechanical Engineering Problems" National Academy of Sciences of Ukraine,²⁾V. N. Karazin Kharkiv National University,³⁾Ukrainian State University of Railway Transport

A numerical method to simulate impulse and seismic effects on storages filled with a liquid has been proposed. The liquid is supposed to be ideal, incompressible, and its current is irrotational. The fluid pressure satisfies the Cauchy-Lagrange integral. To determine it, a system of integral equations has been obtained. Its numerical solution is obtained by the boundary element method. The eigenvalues and the forms of liquid vibrations have been obtained. The proposed method has made it possible to estimate the level of the free surface under the action of a suddenly applied force.

Key words: tanks with liquid, method of integral equations, free and forced oscillations

Предложен численный метод, для моделирования импульсного и сейсмического воздействия на хранилища с жидкостью. Предполагается что жидкость идеальная, несжимаемая, а её течение безвихревое. Давление жидкости удовлетворяет интегралу Коши-Лагранжа. Для его определения получена система интегральных уравнений. Её численное решение получено методом граничных элементов. Получены собственные значения и формы колебаний жидкости. Предложенный метод позволил оценить уровень свободной поверхности при внезапно приложенной нагрузке.

Ключевые слова: резервуары с жидкостью, метод интегральных уравнений, свободные и вынужденные колебания

Запропоновано чисельний метод для моделювання імпульсу і сейсмічної дії на сховища з рідиною. Припускається, що рідина ідеальна, нестислива, а її рух є безвихровим. Тиск рідини задовольняє інтегралу Коші-Лагранжа. Для його визначення отримана система інтегральних рівнянь. Її чисельний розв'язок отримано методом граничних елементів. Отримано власні значення і форми коливань рідини. Запропонований метод дозволив визначити рівень вільної поверхні при раптово прикладеному навантаженні.

Ключові слова: резервуары с жидкостью, метод интегральных уравнений, свободные и вынужденные колебания

1. Problem statement and its topicality

Containers and tanks for storing oil, flammable and poisonous liquids are widely used in various fields of engineering such as power engineering and transportation, as well as, in aircraft industry, chemical, oil and gas industry. These tanks usually operate under increased technological loadings and they are filled with oil, flammable or toxic agents. As a result of a sudden action of earthquakes, shockwaves or other force majeure circumstances the liquid stored in tanks may be affected by intensive sloshing.

Sloshing is a phenomenon observed in a number of industrial facilities: containers for storage of liquefied gas, oil or fuel tanks, tanks of cargo tankers. It is known that partially filled tanks are affected by especially intensive sloshing. It can lead to high

pressure on tank walls, to destruction of structures or loosing stability, and to leakage of dangerous contents, that in turn, can result in serious ecological consequences.

The analysis of research devoted to the problems of liquid sloshing in tanks is given in R. A. Ibrahim's works [1, 2]. The works [3-5] also deal with liquid sloshing in cylindrical tanks under seismic loadings.

In this paper the problem concerning liquid vibrations in a shell of revolution is considered. We designate a moistened shell surface by S_1 , and a free surface by S_0 . Suppose the Cartesian coordinate system $Oxyz$ is connected with the shell, the liquid free surface S_0 coincides with the xOy plane at the state of rest (fig. 1)

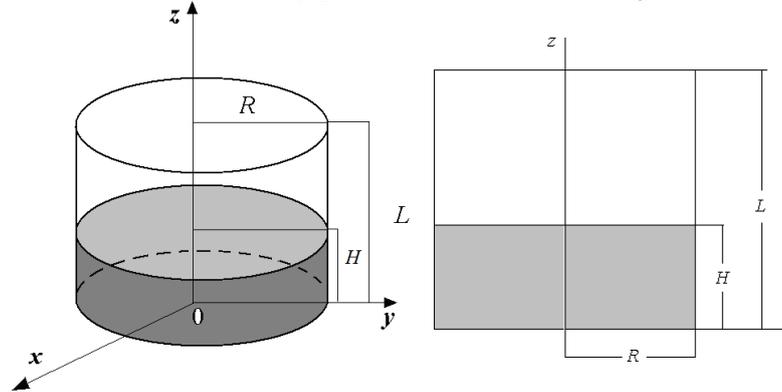


Fig.1. Fluid-filled cylindrical shell and its sketch

Suppose that the liquid is an ideal and incompressible one and its movement starts from the state of rest and is irrotational. Then there exists a liquid velocity potential Φ

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

which satisfies the Laplace's equation.

We determine the pressure p on shell walls from the linearized Cauchy-Lagrange's integral by the following formula

$$p = -\rho_l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) + p_0 + a_s(t)x,$$

Here Φ is the velocity potential, g is the acceleration of gravity, z is a point vertical coordinate in the liquid, ρ_l is the liquid density, p_0 is an atmospheric pressure, $a_s(t)$ is a function which characterizes the external influence (a horizontal seism or an impulse).

On the free surface of liquid the following conditions are to be satisfied:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0,$$

where the function ζ describes the form and location of the free surface.

Thus, for the potential we have the following boundary problem

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + a_s(t)x \Big|_{S_0} = 0.$$

Having determined the velocity potential Φ and the function ζ , we establish the height of raising the free surface and determine the liquid pressure on shell walls.

2. The mode superposition method

Consider the potential Φ in the next form

$$\Phi = \sum_{k=1}^M d_k \varphi_k. \quad (1)$$

For the functions φ consider the following boundary problems:

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (3)$$

Let us differentiate the second relation in (3) and substitute it for the received equality $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ from the first relation. Further we present the functions φ_k in the following form $\varphi_k(t, x, y, z) = e^{i\chi_k t} \varphi_k(x, y, z)$. We come to the eigenvalue

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_k. \quad (4)$$

As the equation for the free surface we obtain the expression

$$\zeta = \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}. \quad (5)$$

In cylindrical coordinates system we have the following expression

$$\varphi_k(r, z, \theta) = \varphi_k(r, z) \cos \alpha \theta \quad (6)$$

Here α is a harmonica number. Thus, frequencies and modes of free vibrations are considered separately for different α .

We present φ as potentials of simple and double layers [5]

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS. \quad (7)$$

Here $S = S_1 \cup S_0$; points P and P_0 belong to the surface S . By $|P - P_0|$ we denote the Cartesian distance between points P and P_0 .

With the boundary conditions (2), (3) we come to the system of the integral equations in the form [6, 7]:

$$\begin{cases} 2\pi\varphi_1 + \iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dS_0 = 0, \\ - \iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - 2\pi\varphi_0 + \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Here for convenience we denote values of potential on the free surface by φ_0 and by φ_1 on the shell walls.

We look for the solution of the system (8) in form (9).

Previously, having integrated the equation (8) by the variable θ , we have obtained the following system of one-dimensional singular equations.

$$2\pi\varphi(z_0) + \int_{\Gamma} \varphi(z) \mathcal{Q}(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma; P_0 \in S_1, \quad (9)$$

$$\int_{\Gamma} \varphi(z) \mathcal{Q}(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma; P_0 \in S_0.$$

Here

$$\mathcal{Q}(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_{\alpha}(k) - F_{\alpha}(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_{\alpha}(k) n_z \right\};$$

$$\Psi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_{\alpha}(k); E_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} (1 - 4\alpha^2) \int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi;$$

$$F_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}; a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z^* - z_0)^2; b = 2\rho\rho_0; k^2 = \frac{2b}{a+b}.$$

To define potentials φ_k we use representation (9) and introduce the following integral operators:

$$\begin{aligned} A\psi_1 &= 2\pi\psi_1 + \iint_{S_1} \psi_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(P, P_0)} dS_1; B\psi_0 = \iint_{S_0} \psi_0 \frac{1}{r} dS_0; C\psi_0 = \iint_{S_0} \psi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dS_0; \\ D\psi_1 &= -\iint_{S_1} \psi_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS_1; F\psi_0 = \iint_{S_0} \psi_0 \frac{1}{r} dS_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Then the boundary value problem (2)-(5) takes the form

$$A\psi_1 = \frac{\kappa^2}{g} B\psi_0 - C\psi_0; P_0 \in S_1; \quad D\psi_1 = 2\pi E\psi_0 - \frac{\kappa^2}{g} F\psi_0; \quad P_0 \in S_0.$$

After excluding function ψ_1 from these relations we obtain the following eigenvalue problem

$$(DA^{-1}C + E)\psi_0 - \lambda(DA^{-1}B + F)\psi_0 = 0; \quad \lambda = \frac{\chi^2}{g}$$

Its solution gives natural modes and frequencies of liquid sloshing in a rigid tank.

The evaluation of integral operators in (10) is carried out by the method proposed in [8-10].

3. Reducing the dynamic problem to the differential equation system

Having defined the basic functions φ_k , let us substitute them in expressions for velocity potential (1) and for the free surface elevation (5). Then substitute the received relations for the boundary condition on the free surface.

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + a_s(t)x \right|_{S_0} = 0.$$

As in a cylindrical system of coordinates there is $x = r \cos \theta$, we are only interested in the first harmonica, i.e. in the formula (6) we only consider $\alpha=1$. We come to the following equation on the surface S_0

$$\sum_{k=1}^M \ddot{d}_k \varphi_k + g \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} + a_s(t)r = 0.$$

Due to validity of the relation (4) on the surface S_0 the equality given above takes the form

$$\sum_{k=1}^M \ddot{d}_k \varphi_k + \sum_{k=1}^M \chi_k^2 d_k \varphi_k + a_s(t)r = 0. \quad (11)$$

Accomplishing the dot product of equality (11) by φ_l ($l = \overline{1, M}$) and having used orthogonality of its own modes, we receive the system of ordinary differential equations of the second order

$$\ddot{d}_k + \chi_k^2 d_k + a_s(t)F_k = 0; \quad F_k = \frac{(r, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}; \quad k = \overline{1, M}. \quad (12)$$

Suppose that before applying the horizontal impulse the tank has been at the state of rest. Then we are to solve (12) under zero initial conditions. The operational method is applied here for solving the system (12).

The following values for the coefficients $d_k(t)$, $k = \overline{1, M}$ are obtained:

$$d_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\chi_k^2} - \frac{1}{\chi_k^2} \cos(\chi_k t) & 0 \leq t \leq T \\ \frac{1}{\chi_k^2} - \frac{1}{\chi_k^2} \cos(\chi_k t) - \frac{1}{\chi_k^2} + \frac{1}{\chi_k^2} \cos \chi_k(t-T) & t > T \end{cases}$$

Substituting these coefficients in the relation (5), one can obtain the time-history of the free surface elevation.

4. Analysis of the numerical results

Let us consider the cylindrical shell with a flat bottom partially filled with the liquid. The tank parameters are following: radius is $R = 1$ m, thickness is $h = 0.01$ m, length is $L = 2$ m, filling level is $H = 0.8$ m.

For carrying out the calculations we accepted different numbers of the basic functions.

Fig. 2 shows the time-history of the free surface elevation in the point B with $r=1.5$ (see fig. 1). Here the only one ($M=1$) basic function is used in (5).

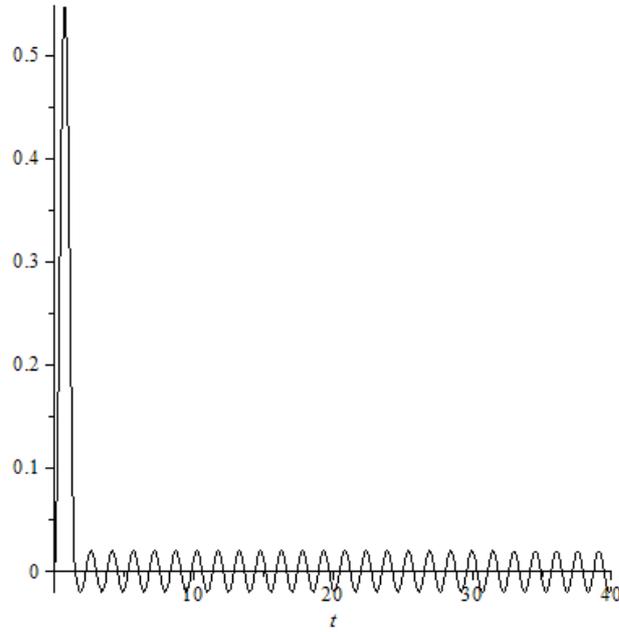


Fig.2. Time –history of the free surface under impulse loading, $M=1$.

On fig. 3 the free surface elevation in the point B with $r=1.5$ point, depending on time is shown. Here we use three basic functions ($M = 3$ in (5)).

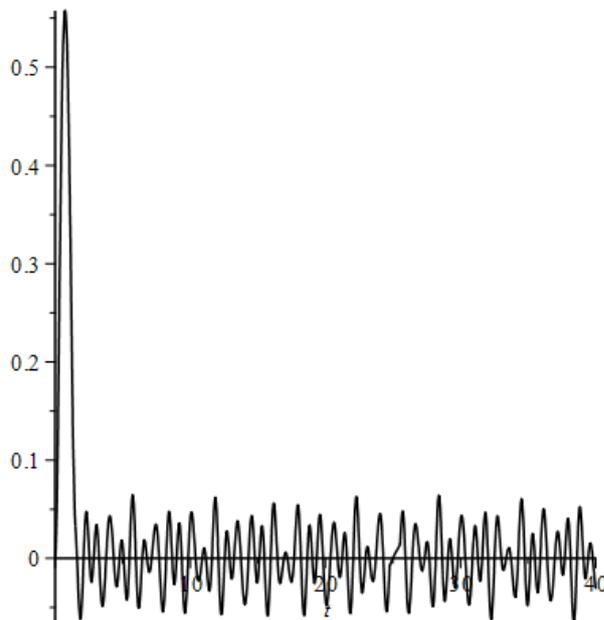


Fig.3. Time –history of the free surface under impulse loading, $M=3$

Further increasing in number of basic functions has not lead to the essential change of the results.

Conclusion

The developed method allows us to estimate the level of the free surface elevation under suddenly enclosed loadings. This approach can be easily generalized for elastic tanks with elastic baffles. The tank geometry can be changed easily, therefore the results could be obtained for conical, spherical and compound shells. It can allow us to make recommendations about installation of protective elements (covers, partitions).

REFERENCES

1. R.A. Ibrahim. Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics. / R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuck, T. Ikeda // Applied Mechanics Reviews, Vol. 54, No. 2, PP. 133-199, 2001.
2. R.A. Ibrahim. Liquid Sloshing Dynamics. Cambridge University Press, New York, 2005 Ventsel E., Naumenko V, Strelnikova E., Yeseleva E. Free vibrations of shells of revolution filled with a fluid. Engineering analysis with boundary elements, 34, pp. 856-862, 2010.
3. .Koh, Hyun Moo, Jae Kwan Kim, and Jang - Ho Park. Fluid-structure interaction analysis of 3 - D rectangular tanks by a variationally coupled BEM-FEM and comparison with test results. Earthquake engineering & structural dynamics, 27.2 (1998): pp. 109-124
4. Chen, Y.H., Hwang, W.S. & Ko, C.H., Numerical simulation of the three-dimensional sloshing problem by boundary element method. Journal of the Chinese Institute of Engineers, 23(3), pp. 321-330, 2000.
5. Malhotra, P. K., New method for seismic isolation of liquid-storage tanks. Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 26(8), pp. 839-847, 1997.
6. K.G. Degtyarev, V.I. Gnitko, V.V. Naumenko, E.A. Strelnikova. Free vibrations of the liquid in elastic cylindrical shell coupled with liquid sloshing. // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна, 2015, №1156, с. 63-75.
7. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L., Strelnikova, E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), pp.75-87, 2016.
8. Gnitko, V., Degtyariov, K., Naumenko, V., Strelnikova, E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, 2017, 5(3), pp. 317-328,
9. K Degtyarev, P Glushich, V Gnitko, E Strelnikova. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells. *International Journal of Modern Physics and Applications* 1 (4), 2015, pp. 159-168.
10. / К.В. Аврамов, Е.А. Стрельникова // Хаотические колебания пластинок при их двустороннем взаимодействии с потоком движущейся жидкости *Прикладная механика*. — 2014. — Т. 50, № 3. — С. 86-93.

УДК 519.6, 51-76

Память и эволюция сообществ

В. М. Куклин¹, А. В. Приймак¹, В. В. Яновский^{1,2}¹Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина²Институт монокристаллов, Национальная
Академия Наук Украины, пр. Науки, 60, 61001 Харьков, Украина

Рассмотрена эволюция популяции с полным набором стратегий поведения, ограниченных только глубиной памяти. Каждое последующее поколение популяции последовательно утрачивает наиболее невыгодные стратегии поведения предыдущего поколения. Показано, что увеличение памяти в популяции эволюционно выгодно. Победители эволюционного отбора неизменно относятся к агентам с максимальной памятью. Вводится понятие сложности стратегии. Показано, что стратегии, побеждающие в естественном отборе, имеют максимальную или близкую к максимуму сложность. Агрессивность общества в процессе эволюции уменьшается.

Ключевые слова: эволюция, популяция, стратегия, сложность, кооперация.

Розглянуто еволюцію популяції з повним набором стратегій поведінки, обмежених тільки глибиною пам'яті. Кожне наступне покоління популяції послідовно втрачає найбільш невідгідні стратегії поведінки попереднього покоління. Показано, що збільшення пам'яті в популяції еволюційно вигідно. Переможці еволюційного відбору незмінно відносяться до агентів з максимальною пам'яттю. Вводиться поняття складності стратегії. Показано, що стратегії, які перемагають в природному відборі, мають максимальну або близьку до максимуму складність. Агресивність суспільства в процесі еволюції зменшується.

Ключові слова: еволюція, популяція, стратегія, складність, кооперація.

The population evolution with a complete set of behavioral strategies limited only by the depth of memory has been considered. Each successive generation of the population subsequently loses the most unfavorable behavior strategies of the previous generation. An increase in population memory has been shown to be evolutionarily beneficial. The evolutionary selection winners invariably belong to the agents with maximum memory. The concept of strategy complexity has been introduced. The strategies that win in natural selection have been shown to have a maximum or close to maximum complexity. The society aggressiveness in the process of evolution is decreasing.

Key words: evolution, population, strategy, complexity, cooperation.

1. Введение

Понимание природы возникновения кооперативного поведения в разных системах интересует исследователей уже на протяжении нескольких десятилетий. Эволюционная теория игр [1-3] обеспечивает гибкие основания и эффективные методы для изучения появления сотрудничества. Среди многих игровых моделей, которые используются для объяснения кооперативного поведения, особое место занимают игры, которые можно рассматривать как обобщение дилеммы заключенного [4-6]. Выбор матрицы выплат в этом случае определяется простым физическим соображением - кооперация всегда требует дополнительных затрат ресурсов по сравнению с отказом от кооперации.

Склонность к экономии ресурсов или усилий накладывает ограничение на свойства матрицы выплат. Так, при каждом отдельном взаимодействии индивидуальный выигрыш при отказе от кооперации превышает выигрыш при согласии на кооперацию. На каждом этапе процесса эволюции популяция отказывается от применения худших стратегий предыдущего поколения.

Эти игры служат в качестве парадигмы, которая привела к открытию механизма кооперативного поведения как в теории, так и экспериментальных наблюдениях [7]. Начиная с работы Новак и Мей [8], эволюционные игры были широко изучены в структурированных популяциях, в том числе на регулярных решетках [9-17] и сложных сетях [18-20]. В настоящее время обнаружен ряд общих, но конкретных механизмов, приводящих к кооперации в самых разнообразных системах (см. например [21]). Среди таких механизмов следует отметить: добровольное участие [22], наказания [23], сходство [24], неоднородная деятельность [25], социальное разнообразие [26, 27], динамические связи [28], асимметричное взаимодействие и граф перестановок [29], миграция [30-32], групповой фаворитизм [33], взаимозависимые связи [34]. Используя такой подход, можно выяснить появление множества разнообразных свойств у эволюционирующих популяций. Под эволюционными популяциями, следуя Дарвину, будем понимать множество объектов, которые подчиняются следующим принципам. Это 1) принцип наследственности, 2) принцип изменчивости и 3) естественного отбора.

В этой работе мы исследуем влияние памяти на процесс эволюции в простой постановке задачи Коши. Если действие объекта зависит не только от наблюдаемой ситуации, а и от предшествующих событий, то будем считать, что объект обладает памятью. В этом смысле большинство биологических объектов обладают памятью. Основной вопрос, который мы будем обсуждать в работе, это насколько выгодно для популяции увеличивать память в процессе эволюции и к каким следствиям это приводит. Важность этой характеристики определяется тем, что глубина памяти объектов популяции и определяет число всех возможных стратегий, доступных популяции. Центральным и важным элементом работы является конкуренция в исходной популяции всех возможных стратегий с ограниченной сверху памятью. Это гарантирует, что не упущена ни одна стратегия, которая может изменить ход эволюции.

Важное следствие наличия памяти это появление стратегий разной сложности. Конкуренция стратегий разной сложности ведет к изменению доминирующих стратегий популяции в процессе эволюции. Поэтому влияние сложности стратегий на эволюцию детально обсуждается в работе. Основной вопрос сводится: является ли сложность стратегий эволюционно выгодной? На интуитивном уровне ответы на эти вопросы кажутся очевидными. При моделировании взаимодействия стратегий использовалось одночастичное приближение, при котором все агенты популяции, исповедующие одну из возможных стратегий, объединялись в единый кластер. Взаимодействие осуществлялось между кластерами или стратегиями. Другими словами, взаимодействуют именно стратегии. При этом каждая стратегия взаимодействует с каждой, включая себя. Рассмотрено 3 типа популяций: популяции без памяти, популяции с глубиной памяти 1 и 2. В работе

рассмотрена задача типа Коши об эволюции сообщества с полным набором стратегий.

В каждом случае в начальной популяции присутствуют все стратегии с памятью, не превышающую указанную. Так, например, при глубине памяти 2 присутствуют все стратегии с памятью 2, 1 и 0. В результате численного моделирования показано, что увеличение памяти в популяции эволюционно выгодно. Победители эволюционного отбора неизменно относятся к агентам с максимальной памятью. Стратегии, побеждающие в естественном отборе, имеют максимальную или близкую к максимуму сложность. Попутно обнаружено, что в таких популяциях победившие стратегии относились к «добропорядочным» стратегиям, склонным к кооперации. В определенном смысле можно сказать, что кооперативное поведение в таких случаях устанавливается автоматически. Можно ожидать, что в этом и состоит универсальная тенденция эволюции. В популяциях с ограниченной сверху памятью конкуренция всех возможных стратегий в начальной популяции приводит к доминированию в ходе эволюции добропорядочных стратегий. Дальнейшее увеличение глубины памяти приводит к новой проблеме, когда число агентов популяции окажется меньше числа возможных стратегий. Следствие этого также обсуждается в заключении этой работы.

2. Взаимодействие объектов популяции

Жизнь в популяции и ее эволюция определяется характером взаимодействия объектов популяции. Наиболее простой случай это их парное взаимодействие. Например, когда каждый объект взаимодействует с каждым, включая себя. Этот вариант взаимодействия можно осуществить при относительно небольшом числе объектов. Причина этого в конечности времени жизни объекта популяции.

Действительно, на взаимодействие пары индивидов затрачивается некоторое характерное время Δt и, соответственно, на взаимодействие n индивидов друг с другом будет затрачено время $n^2 \Delta t$. При увеличении n время $n^2 \Delta t$ может превысить время жизни объекта.

Существуют другие варианты осуществления парного взаимодействия. Например, когда противник выбирается случайным образом среди всего множества стратегий, предполагая их равновероятными. Еще один общий способ, не использующий случайность, можно осуществить, используя сеть взаимодействий. В графе этой сети будут соединены взаимодействующие стратегии. Ее можно обобщить, учитывая взаимодействия удаленных вершин с некоторым весом включая вероятностный. Можно также учитывать пространственное структурирование популяций [7, 9, 13, 19, 24, 35], в этом случае в пространстве могут возникать геометрические структуры сотрудничества [8, 36]. Еще одно важное обстоятельство, которое влияет на характер взаимодействия стратегий, уже отмечалось ранее. Это конечность множества объектов, составляющих популяцию. В этом случае количество стратегий может значительно превышать количество объектов общества. Тогда взаимодействие может происходить только между частью индивидов.

В этой работе будем предполагать, что объект в процессе жизни не меняет стратегию и взаимодействует с каждой стратегией популяции включая себя.

Другими словами, можно сказать, что рассматривается одночастичное приближение взаимодействия стратегий - без учета числа носителей стратегии.

Для того, чтобы установить результат парного взаимодействия стратегий, определим матрицу выплат. Напомним, что дилемма заключенного двух игроков состоит в том, что каждый игрок может выбрать между сотрудничеством (1) или отказом (0). В зависимости от стратегии соперника, выбранный игрок получает a_{11} , если оба сотрудничают; a_{22} - если оба отказываются; a_{12} - если выбранный сотрудничает и противник отказывается; и a_{21} - если выбранный отказывается, а противник сотрудничает. Матричные элементы, соответствующие дилемме заключенных, ограничены неравенствами $a_{21} > a_{11} > a_{22} > a_{12}$ и $2a_{11} > a_{21} + a_{12}$. В работе мы используем значения матрицы выплат Аксельрода M_1 [37]:

	Кооперация	Отказ
Кооперация	3,3	0,5
Отказ	5,0	1,1

Таким образом, результат взаимодействия стратегий будет определяться этой матрицей. Собственно эта матрица определяет число очков эволюционных преимуществ, получаемых стратегией при взаимодействии с другой стратегией. Разумеется, взаимодействие двух объектов популяции на протяжении жизни или поколения осуществляется многократно и число взаимодействий можно рассматривать как параметр в такой игре. Эта игра соответствует итерированной дилемме заключенных [37]. Повторение ходов многократно уже позволяет использовать наказание за ход или премирование. Очевидно, что в этом случае исключительно важна память.

В этой работе, используя взаимодействие между всеми стратегиями с конечной глубиной памяти, установим прежде всего, получают ли стратегии с большей памятью эволюционное преимущество. Кроме этого интересно изучить, как влияет сложность стратегий на эволюционные преимущества стратегий. Другими словами, есть ли причина усложнения общества.

3. Эволюция стратегий

Стратегия это правило, по которому определяется ход по известным значениям ходов противника. Для их классификации используем глубину памяти. Под глубиной памяти будем понимать число предыдущих ходов, которые использует стратегия для выполнения хода.

Стратегии, которые не используют память, осуществляют ход, основываясь только на наблюдаемом ходе противника. В этом случае возможный наблюдаемый ход это 0 или 1 (0 - отказ, 1 - кооперация). Соответственно, для описания отдельной стратегии нам нужно описать определенное правило ответа на эти хода. Для того, чтобы описать все такие стратегии нужно создать все правила реакции на значения ходов противника. Если договориться о порядке записи возможных значений ходов противника, например, в

лексикографическом порядке, то для описания правил действия стратегии достаточно знать последовательность нулей и единиц. Ясно, что имена всех стратегий при отсутствии памяти это числа от 00 до 11, откуда очевидно, что таких стратегий 4 – 00, 01, 10, 11.

Стратегии с глубиной памяти 1 определяются числами от 0000 до 1111. Однако среди определенных таким образом стратегий встречаются стратегии с меньшей глубиной памяти, чем 1. Действительно, если стратегия действует одинаково при различных предыдущих ходах противника, то она фактически не использует информацию о предыдущем ходе или теряет память о предыдущем ходе. Соответственно, такие стратегии совпадают со стратегиями с нулевой глубиной памяти и не считаются стратегиями первой глубины памяти – 0000, 0101, 1010, 1111. Таким образом, между 0000 и 1111 имеется 16 чисел, и если вычтеть 4 стратегии с памятью 0, получим 12 стратегий с памятью 1.

Аналогично перечисляются все стратегии с памятью о двух ходах противника, или в общем случае с памятью о k ходах противника.

Рассмотрим понятие сложности стратегии. Сложность – это исключительно глубокое понятие, которое находит важные применения в физике и математике. В частности, понятие хаотичности тесно связано с понятием сложности (см. например [38]). Наиболее естественным выбором этой характеристики можно считать сложность по Колмогорову [39]. Существуют и другие определения сложности, которые основаны на других представлениях о сложности [40].

Используем подход к описанию сложности конечных 0,1-последовательностей, который основан на сравнительной сложности функций, в частности многочленов. В основе лежит понимание, что многочлены более высокой степени сложнее, чем более низкой степени.

Для более последовательной формулировки сложности используем, следуя [41], теорию монад. Под монадой будем понимать конечное множество Ω и отображение A этого конечного множества в себя. Другими словами, каждой точке этого конечного множества сопоставляется другая его точка. Монадам сопоставляется граф, вершины которого – конечное множество Ω , а ориентированные ребра связывают вершины в соответствии с их отображением A . Из каждой вершины x в этом графе выходит ровно одно ребро, и оно ведет в вершину Ax . В нашем случае точками являются стратегии или 0,1-последовательности конечной длины.

0,1-последовательности $x = x_1x_2\dots x_n$ можно рассматривать и как функцию, которая сопоставляет целочисленному значению i значение $x_i \in \{0,1\}$. Введение сложности функций восходит к идеям Ньютона. Для этого он предложил использовать разности функций. В нашем случае определим такое отображение $y = Ax$ разностным оператором $A: \Omega \rightarrow \Omega$, где элементы последовательности $y = y_1y_2\dots y_n$ определяются разностями $y_i = x_{i+1} - x_i$.

Таким образом, приходим к монаде стратегий. Стратегия x отображается в стратегию y . Используя отображения стратегий строится дерево стратегий, уровни которого и определяют сложность стратегий, находящихся на этих уровнях.

Более подробно правила составления стратегий и расчет их сложности описан в [42].

Смоделируем процесс эволюции стратегий с памятью. Начнем с простой задачи Коши. Принцип изменчивости учтем в простом варианте, предполагая, что в популяции реализованы все стратегии с глубиной памяти меньше или равной k . Так как в этом случае учтены все стратегии, то в процессе эволюции не будут появляться другие стратегии. Принцип наследственности будет состоять в передаче выигрышных стратегий потомкам. Принцип естественного отбора реализуем исключением или уничтожением проигрышных стратегий. Естественно, такой упрощенный вариант эволюции можно усложнить многими способами. Некоторые из них обсудим позже.

Естественный отбор реализуем следующим образом. Пусть все стратегии взаимодействуют друг с другом по круговой системе в соответствии с итерированной игрой по дилемме заключенного. Число взаимодействий двух стратегий в одном поколении выберем одинаковым для всех равным n . Собственно выбор большого числа взаимодействий между двумя стратегиями призван исключить влияние первого хода. Далее будем использовать $n = 100$. Это оптимальное значение уже достаточное для нечувствительности результатов эволюции к первому ходу, как показано в [42]. В результате такого соревнования стратегии набирают очки, в соответствии с приведенной выше матрицей выплат. После этого проигравшая стратегия, а возможно и несколько стратегий, набравших минимальное число очков, выбывают из следующего поколения. Далее очки эволюционных преимуществ обнуляются и проводится следующий круг взаимодействий между оставшимися стратегиями, соответствующий формированию стратегий нового поколения.

Остановимся теперь на способе описания поведения стратегий в процессе эволюции. С появлением памяти и увеличением ее глубины число стратегий возрастает сверх экспоненциальным образом и делает невозможным и бессмысленным слежение за поведением каждой стратегии. Мы нуждаемся в огрубленном описании сообществ. Поэтому нужно ввести коллективные переменные, которые делают возможным описание огромного числа стратегий. Учитывая, что основными характеристиками стратегий, которые рассматриваются в работе, являются память и сложность, удобно ввести соответствующие коллективные переменные. Так, введем $a_j(t)$ - число стратегий именно с памятью j на t этапе эволюции ($j = 0, \dots, k$, где k - глубина памяти стратегий общества). Эти переменные позволяют понять изменение численности стратегий с определенной памятью в процессе эволюции. Еще один набор коллективных переменных $n_i(t)$ - численность стратегий сложности i на t этапе эволюции ($i = 0, \dots, i_{max}(k)$). Эти переменные удобны для слежения за усложнением стратегий общества. Далее при сокращенном описании эволюции общества будем пользоваться этими переменными.

4. Мир без памяти

Начнем с обсуждения эволюции самого простого мира с глубиной памяти 0 или мира без памяти. Пусть каждая стратегия взаимодействует с другой стратегией $n = 100$ раз в рамках итерированной дилеммы заключенных. Набор очков определяется матрицей выплат, приведенной выше, и суммируется. Каждая стратегия в одной игре отвечает на первый ход выбранного противника, а в другой начинает, делая первый ход в игре с тем же противником. В тех играх, которые она начинает, есть две возможности сделать первый ход это выбрать 0 или 1. Стратегия, делающая определенный первый ход, рассматривается как отдельная стратегия. После проведения игр между всеми такими стратегиями, включая себя, стратегии распределяются по занятым местам в соответствии с набранными очками. Первое место занимает стратегия, набравшая самую большую сумму очков. Стратегия или стратегии, набравшие минимальное число очков, исключаются и не передаются следующему поколению. Оставшиеся стратегии передаются следующему поколению и снова вступают в соревнование с начальными нулевыми очками эволюционных преимуществ. Эти стратегии можно рассматривать как потомки предыдущего поколения.

В этом простом мире число стратегий достаточно малое (4 стратегии с учетом первых ходов составляют $N_0 = 8$ стратегий). Поэтому возможно проследить за всеми стратегиями. Однако и в нем будем использовать коллективные переменные, обсуждаемые выше. В этом мире все стратегии имеют 0 глубину памяти и поэтому переменные $a_0(t)$ просто отслеживают численность стратегий $a_0(t) = N_0(t)$. Ясно, что при удалении одной проигравшей стратегии на каждом этапе эволюции их число линейно падает со временем $N_0 = (1-t) + 8$. Здесь $t = 1, 2, \dots, 8$ - дискретное время эволюции. Все время эволюции занимает 8 этапов (или поколений), после которых выживает одна стратегия и наступает стационарное состояние.

Перейдем теперь к обсуждению изменения сложности стратегий общества. Это основная характеристика, по которой можно классифицировать стратегии в этом мире. Самую детальную информацию о поведении сложности несет количество стратегий соответствующей сложности на каждом этапе эволюции. В мире с нулевой памятью присутствуют стратегии сложности 0, 1 и 2. Графики изменения со временем числа стратегий определенной сложности приведены на рис.1, где $n_0(t)$ - число стратегий сложности 0 на t -ом этапе эволюции, $n_1(t)$ и $n_2(t)$ - число стратегий сложности 1 и 2 соответственно на t -ом этапе эволюции.

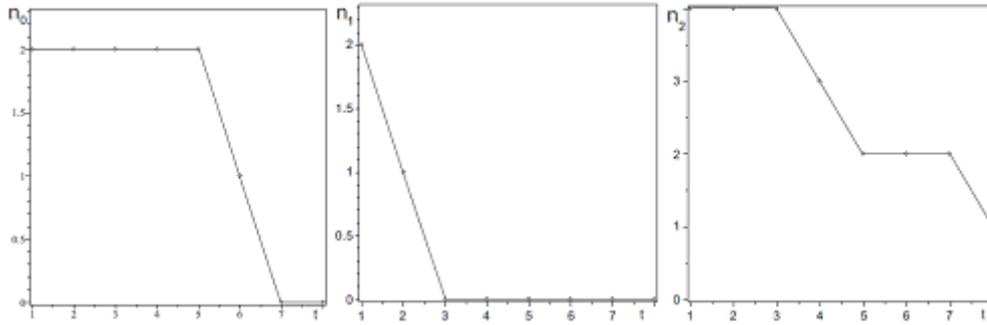


Рис.1. Слева - изменение n_0 - числа стратегий нулевой сложности. Посередине - эволюция n_1 - числа стратегий единичной сложности, справа - n_2 - сложности 2. Отметим, что точки соединены линиями только для наглядности и линии не играют никакого значения. Время дискретно

Из этих зависимостей видно, что стратегии сложности 1 исчезают уже на 3 этапе эволюции. Стратегии нулевой сложности исчезают только на 7 этапе эволюции. Собственно на этом эволюция заканчивается и остается победившая сложная стратегия со сложностью 2. В нашем случае это стратегия «око за око» [1]01. Сложность выигравшей стратегии максимальна в этом классе стратегий.

Из приведенных зависимостей рис.1 легко установить время исчезновения стратегий определенной сложности. Также можно получить среднее значение сложности всего «общества» на каждом этапе эволюции. Среднее значение сложности определяется как

$$\bar{C}(t) = \frac{0 \cdot n_0(t) + 1 \cdot n_1(t) + 2 \cdot n_2(t)}{n_0(t) + n_1(t) + n_2(t)} \equiv \frac{1 \cdot n_1(t) + 2 \cdot n_2(t)}{n_0(t) + n_1(t) + n_2(t)}.$$

Зависимость средней сложности стратегий «общества» от времени эволюции показана на рис.2.

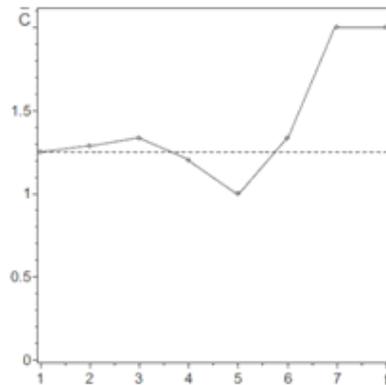


Рис.2. Изменение среднего значения сложности всего «общества» в процессе эволюции. Пунктирная линия - начальное среднее значение сложности «общества»

Средняя сложность такого общества демонстрирует достаточно нетривиальное поведение. В начале эволюции сложность стратегий немного нарастает, но затем уменьшается. После достижения некоторого минимального значения средняя сложность начинает нарастать до максимального значения. Минимум сложности общества наступает на этапе 5. Разумеется, такое поведение средней сложности следует из поведения числа стратегий разной сложности (см. рис.1).

Обсудим теперь, какие стратегии побеждают на разных этапах эволюции общества или какие стратегии доминируют в обществе. Будем следить за сложностью победивших стратегий на разных этапах эволюции. На рис.3 приведена соответствующая зависимость. Видно, что на ранних этапах эволюции (до 5 этапа включительно) побеждали только примитивные стратегии с нулевой сложностью. Заметим, это коррелирует с минимумом средней сложности общества.

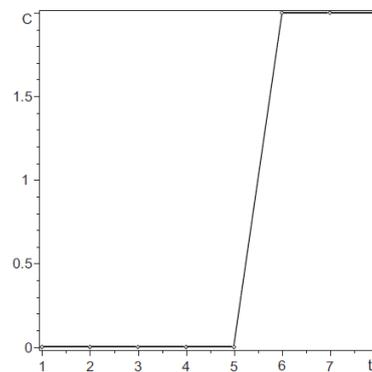


Рис.3. Сложность победившей стратегии на соответствующем этапе эволюции

Таким образом, начальный этап эволюции «общества» можно охарактеризовать как примитивный мир (до 5 этапа включительно). Стадия примитивного общества в мире без памяти длится 62.5% времени выхода в стационар. На этих этапах в «обществе» доминируют примитивные стратегии нулевой сложности (см. рис.3). Заключительные этапы соответствуют развитому «обществу», где доминируют сложные (даже самые сложные) стратегии.

Однако, следует обратить внимание, что примитивные стратегии присутствуют в обществе даже после наступления стадии развитого «общества». Последняя примитивная стратегия исчезает только на 6 этапе эволюции (это стратегия (1)00) (см. рис.1).

Рассмотрим теперь еще одну важную характеристику стратегий. Ее можно условно назвать агрессивностью стратегии. Под агрессивностью будем понимать долю отказов стратегии от кооперации. Моделирование эволюции стратегий дает изменение средней агрессивности общества, приведенное на рис.4.

Из этой зависимости можно установить, что примитивный этап развития общества характеризуется еще и ростом средней агрессивности. На этапе окончания периода примитивного общества его агрессивность максимальна.

Затем после перехода к развитому обществу наблюдается монотонное уменьшение средней агрессивности общества и при выходе в стационарное состояние средняя агрессивность нулевая.

Интересно отметить, что наиболее агрессивная стратегия также вымирает на 5 этапе эволюции, самая «порядочная» на первом этапе. Таким образом можно определить примитивную эру общества по росту агрессивности и примитивная стадия заканчивается после достижения максимальной агрессивности стратегий общества. В мире без памяти это дает эквивалентное определение примитивной эры общества. Третья возможность разумного определения примитивной стадии связана с периодом наличия в обществе самой агрессивной стратегии. Ее исчезновение знаменует переход к развитому обществу.

Наконец перейдем к обсуждению набора стратегиями очков эволюционных преимуществ на разных этапах эволюции. Эта характеристика дает возможность сравнивать набор очков стратегиями на разных этапах эволюции. В качестве такой характеристики можно использовать число очков, набранных на одном ходе стратегии в среднем на определенном этапе эволюции. Зависимость от времени такой величины показана на рис.4. Легко заметить, что с ростом агрессивности среднее число очков, которое набирает стратегия уменьшается. Чем выше агрессивность, тем меньше количество набранных очков. На стадии развитого общества получаемое число очков начинает монотонно нарастать, достигая максимума на стационарной стадии. Сравнивая зависимости на рис.4 легко заметить корреляцию между поведением этих характеристик при эволюции.

В мире с нулевой памятью видна корреляция в поведении средней агрессивности и среднего заработка на ход. Можно предположить, что связь между этими характеристиками определяется соотношением

$$\bar{A}(t) = \sqrt{\lambda \cdot (\bar{P}_{max} - \bar{P}(t))} - a. \quad (1)$$

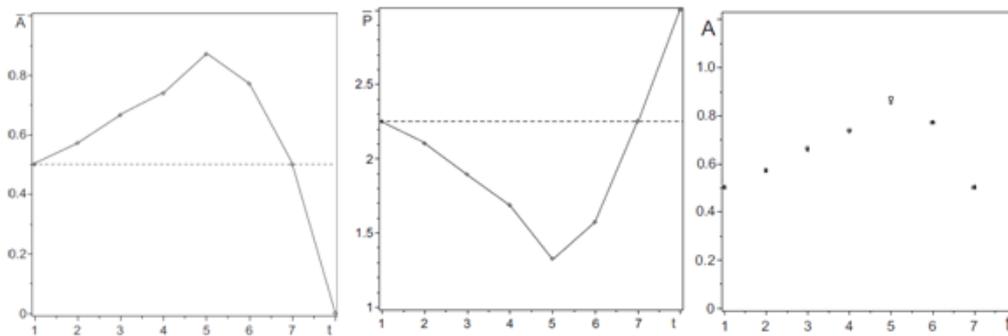


Рис.4. Слева изменение средней агрессивности «общества» со временем (пунктирная линия – начальное среднее значение агрессивности, это 0.5). В центре изменение среднего числа заработанных очков эволюционных преимуществ стратегией за один ход на каждом этапе эволюции. Справа сравнение средней агрессивности, полученной численным моделированием (квадратики), с соотношением (1) (крестики). Отличие заметно только в максимуме, в остальных наблюдается наложение точек

На рис. 4 приведено сравнение средней агрессивности, полученной численным моделированием, с эмпирической закономерностью, приведенной выше. Масштабный коэффициент выбран из соображений равенства этих характеристик на первом этапе эволюции $\lambda = 5.3/8$ и $a = 0.2$. Несмотря на небольшое отклонение в области максимума, графики демонстрируют хорошее согласие в поведении со временем этих характеристик.

Такая связь (1) устанавливает, что уменьшение количества очков на ход приводит к увеличению агрессивности общества. Естественно, можно переписать соотношение (1), разрешив его относительно $\bar{P}(t)$. Тогда можно утверждать, что увеличение агрессивности приводит к уменьшению среднего количества очков на ход стратегии согласно $\bar{P}(t) = \bar{P}_{max} - \frac{(\bar{A}(t) + a)^2}{\lambda}$. Таким образом, количество очков на ход стратегии квадратичным образом зависит от агрессивности.

5. Мир с глубиной памяти 1

Перейдем к миру с глубиной памяти 1. В этом мире число всех стратегий возрастает и становится равным 104. Ясно, что слежение за каждой стратегией хотя еще и возможно, но становится мало содержательным. Столь детальная информация скорее запутывает, чем помогает разобраться в закономерностях поведения стратегий. Поэтому с увеличением глубины памяти и, соответственно, количества стратегий становится исключительно важным коллективный способ описания стратегий. В мире с глубиной памяти 1 стратегии отличаются по сложности (0, 1, 2, 3, 4) и еще по глубине памяти (0,1). Эти характеристики позволяют классифицировать все стратегии на группы по этим свойствам. Таким образом, в этом мире кроме характеристик числа стратегий определенной сложностью (n_0, n_1, n_2, n_3 и n_4) можно ввести другие характеристики - число стратегий определенной глубины памяти. Далее введем a_0 -число стратегий с глубиной памяти 0 и a_1 -число стратегий с глубиной памяти 1. Это очень важные коллективные переменные, позволяющие описывать свойства большого числа разных стратегий. В процессе эволюции эти числа меняются и дают сокращенное описание поведения стратегий. Время эволюции в этом мире равно 100. В стационаре остаются 4 стратегии.

Начнем с обсуждения изменения памяти при эволюции. Наиболее полную информацию об этом процессе можно извлечь, наблюдая за поведением $a_0(t)$ и $a_1(t)$. Разумеется некоторые закономерности связаны с экспоненциальным отличием числа стратегий разной глубины памяти. Так, начальное число стратегий 0-ой глубины памяти - 8, а глубины 1 - уже 96. Поэтому дискретность изменения числа стратегий нулевой памяти так заметна на рис.5. Поведение $a_1(t)$, хотя и выглядит, как линейная функция, имеет важные отличия от нее. Кроме этого, такое значительное отличие их численности делает неинформативным сравнение их поведения на одном графике. Для сравнения их поведения нужно использовать другие характеристики.

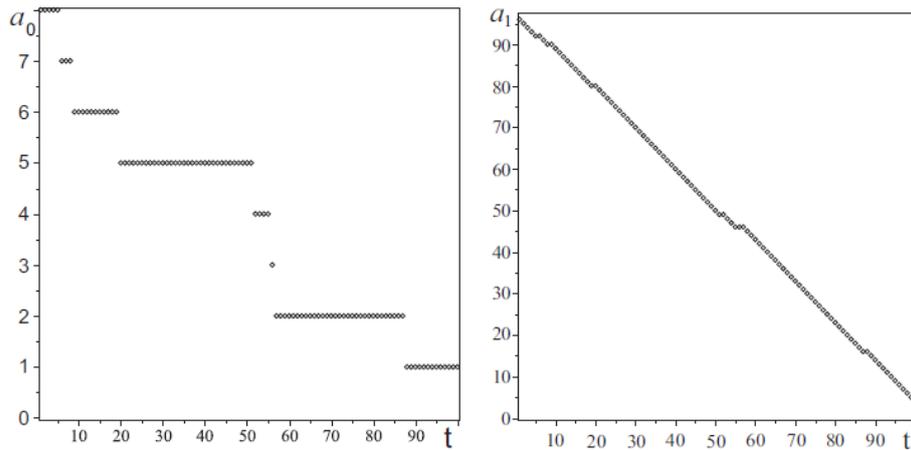


Рис.5. Слева зависимость числа стратегий с нулевой глубиной памяти, справа с глубиной 1 от времени

Из рис.5 видно, что стратегии с нулевой глубиной памяти присутствуют в этом мире на протяжении всего времени эволюции.

Функции $a_0(t)$ и $a_1(t)$ позволяют вычислять среднюю глубину памяти общества, которая определяется как $\bar{M} = \frac{0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1}{a_0 + a_1} \equiv \frac{a_1}{a_0 + a_1}$. Результат усреднения приведен на рис.6.

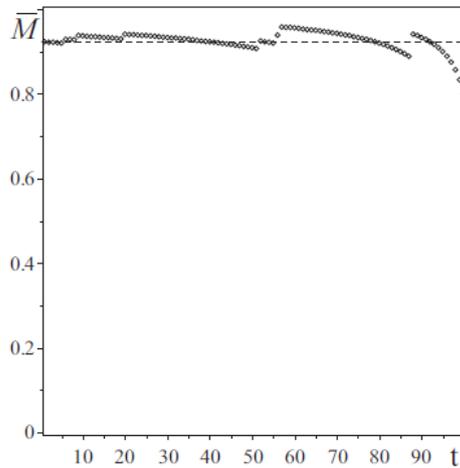


Рис.6. Изменение средней памяти общества

Исходя из рис.6 можно заметить, что в процессе эволюции средняя глубина памяти общества меняется незначительно. Причина этого связана с малым количеством стратегий с нулевой памятью и с присутствием стратегий с большей глубиной памяти даже при выходе в стационарное состояние. На рис.7

приведены значения глубины памяти победивших стратегий на соответствующих этапах эволюции. Легко заметить, что на начальном периоде доминирующие стратегии имеют максимальную глубину памяти. При этом могут возникать периоды, когда доминирующая стратегия имеет малую глубину памяти. Однако существенного влияния на среднюю память общества это не оказывает. Это следствие относительной малочисленности стратегий с малой памятью даже на этих этапах.

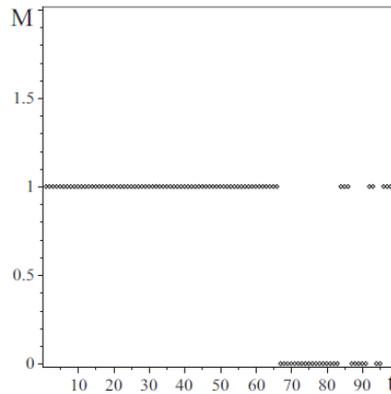


Рис.7. Глубина памяти победивших стратегий на соответствующих этапах

Перейдем к анализу поведения сложности общества. Наиболее детальную информацию о сложности общества несут функции $n_0(t)$, $n_1(t)$, $n_2(t)$, $n_3(t)$ и $n_4(t)$. Эти характеристики приведены на рис.8. Обратим внимание на начальную стадию, на которой присутствуют самые примитивные стратегии $n_0(t)$. Этот период занимает 55 этапов эволюции и заканчивается после исчезновения самой агрессивной стратегии 0000. В отличие от стратегий с 0-ой памятью в этом мире примитивные стратегии не доминируют на этом периоде. Однако они присутствуют в обществе в полном составе. Поэтому примитивный период развития общества с памятью не характеризуется доминированием самых примитивных стратегий, а определяется их наличием. Примитивный период занимает 55% времени выхода на стационарное состояние. Заметим, что относительная длительность примитивного периода уменьшилась с увеличением или точнее, с появлением памяти.

Самыми первыми исчезают из общества стратегии со сложностью 1 (см. рис.8 - зависимость $n_1(t)$), к которым относится и самая добропорядочная стратегия 1111, которая исчезает уже на 5 этапе. Можно только удивиться, что она исчезла не на первом этапе эволюции.

Интересно отметить, что усредненная скорость исчезновения стратегий самая большая у самых сложных стратегий. Чем выше сложность, тем больше средняя скорость исчезновения соответствующих стратегий. Несмотря на это выживают сложные стратегии.

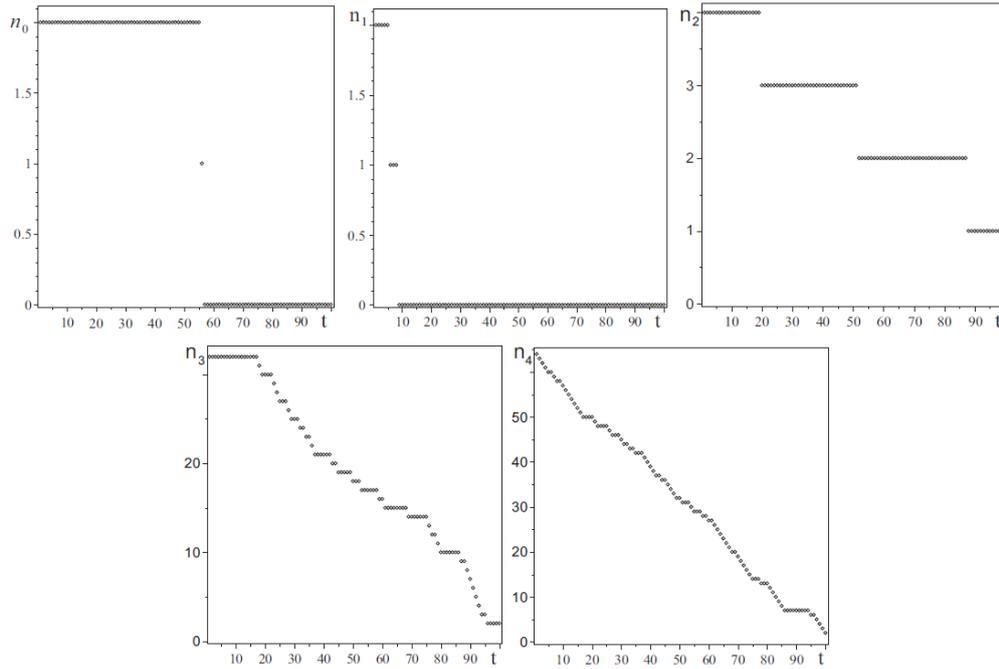


Рис.8. Количество стратегий соответствующей сложности на этапах эволюции

Это хорошо заметно по изменению средней сложности стратегий общества в процессе эволюции (см. рис.9). Видно, что средняя сложность меняется незначительно.

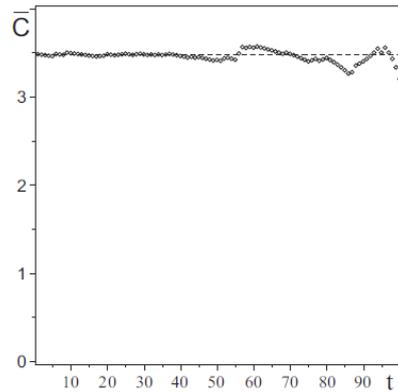


Рис.9. Изменение средней сложности стратегий общества со временем эволюции

Кроме этого можно заметить, что в мире с глубиной памяти 1 на всех этапах эволюции доминировали сложные стратегии. Это хорошо видно из рис.10, на котором отмечена сложность победивших стратегий на каждом этапе эволюции общества. Хорошо видно, что самые сложные стратегии захватывают первенство с начала эволюции и сохраняют его или, точнее, разделяя его со стратегиями, близкими по сложности к максимальной.

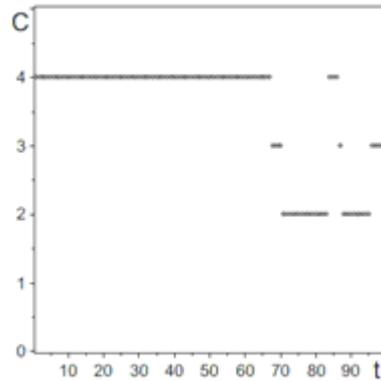


Рис.10. Сложность победивших стратегий на разных этапах эволюции

Рассмотрим теперь, как меняется агрессивность стратегий в процессе эволюции. На рис.11 приведено изменение средней агрессивности общества. Легко заметить, что как и в предыдущем мире средняя агрессивность на начальных временах нарастает. Затем агрессивность уменьшается, достигая минимума при выходе в стационарное состояние. Качественно такое поведение напоминает поведение агрессивности и при отсутствии памяти. Отличие состоит в сдвиге максимума при наличии памяти в относительно более ранние времена эволюции. Так, положение максимума с глубиной памяти 1 достигается на временах, составляющих 37% времени эволюции, а при отсутствии памяти - на временах 62.5% времени эволюции. Таким образом, если определять примитивный период по достижению средней агрессивности максимума, то стадия примитивного общества заканчивается на 37, 38 этапах. Стадия примитивного общества при глубине памяти 1 существенно укорачивается и составляет 37%-38% времени эволюции.

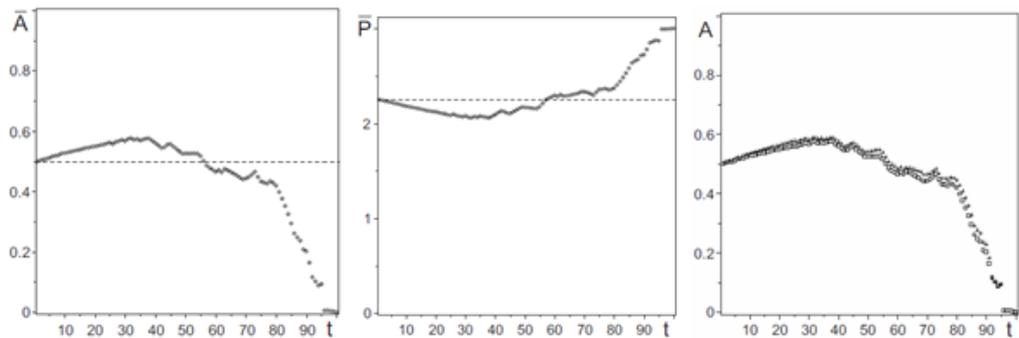


Рис.11. Слева изменение со временем средней агрессивности социума с глубиной памяти 1. В центре средний заработок на ход на каждом этапе эволюции. Пунктиром слева и в центре показаны средние значения общества, в котором присутствуют все стратегии с глубиной памяти 1 и ниже. Справа сравнение средней агрессивности (квадратики) с закономерностью (1), построенной по зависимости выплат за ход (крестики)

Рассмотрим теперь, как меняется набор очков эволюционного преимущества. На рис.11 показано количество очков, в среднем приходящихся на один ход на каждом этапе эволюции. Как и в мире с нулевой памятью видна корреляция в поведении средней агрессивности и среднего заработка на ход. Если предположить, что связь между этими характеристиками определяется соотношением (1), то можно осуществить сравнение средней агрессивности, полученной прямым моделированием (см. рис.11), с агрессивностью полученной по средним выплатам на ход. Масштабный фактор λ выбран $\lambda = 5.3/8$ и $a = 0.2$ так, чтобы значение на первом этапе этих зависимостей совпадало.

Такое сравнение показано на рис.11. Легко заметить высокую схожесть полученных функций. Разумеется, закономерность получена эмпирически и механизм такой связи не вполне ясен. Однако, хорошее согласие между такими же функциями наблюдается и при нулевой памяти. Другими словами, эти характеристики не являются независимыми, а одна из них зависит от другой.

6. Мир с глубиной памяти 2

Перейдем теперь к анализу закономерностей в мире с глубиной памяти 2. Матрица выплат и число ходов двух стратегий остается прежние. Естественно, что число всех возможных стратегий (с учетом начальных ходов) в этом мире увеличивается и равно 30824. Для существенного сокращения численных ресурсов и времени эволюции будем удалять на каждом этапе проигравшую стратегию (одну из 256) независимо от первых ходов. Тогда длительность эволюции занимает 256 этапов. В терминах коллективных переменных для анализа поведения стратегий с разной глубиной памяти все стратегии разделим на 3 группы по глубине памяти $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ и будем следить за изменением численности этих групп со временем (рис.12).

Как и следовало ожидать, дискретность изменения проявляется наиболее заметно для групп с небольшой глубиной памяти 0,1 и почти незаметна для $a_2(t)$. Причина этого в относительно небольшой численности стратегий с малой глубиной памяти.

Характерная особенность, которая хорошо заметна из рис.12, это присутствие стратегий с малой глубиной памяти на протяжении почти всего времени эволюции, несмотря на свою малочисленность. Так, стратегии с нулевой глубиной памяти исчезают на 236 этапе, а с глубиной памяти 1 на 249 этапе, что занимает 92% и 97% времени эволюции соответственно. Начиная с 249 этапа в эволюции участвуют только стратегии с максимальной глубиной памяти. Таким образом, и в этом мире память является эволюционно выгодной. Следует ожидать, что с увеличением глубины памяти эта тенденция будет проявляться, начиная с более ранних этапов эволюции.

Используя функции $a_i(t)$, рассмотрим, как меняется средняя память общества в процессе эволюции (см. рис.13)
$$\overline{M} = \frac{0 \cdot a_0(t) + 1 \cdot a_1(t) + 2 \cdot a_2(t)}{a_0(t) + a_1(t) + a_2(t)}.$$

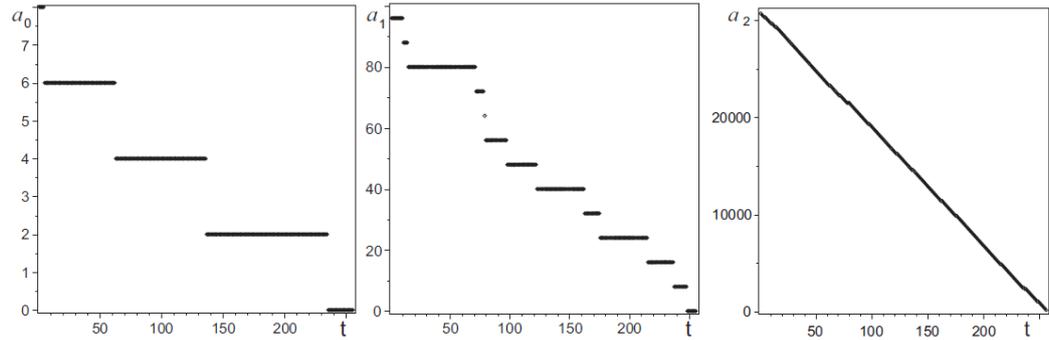


Рис.12. Изменение числа стратегий с определенной глубиной памяти в мире с глубиной памяти 2

Легко заметить, что средняя глубина памяти общества практически не меняется и близка к максимальной. На последних этапах можно заметить незначительное возрастание средней глубины памяти. Это связано с исчезновением на последних этапах стратегий с малой глубиной памяти и достижением максимального значения.

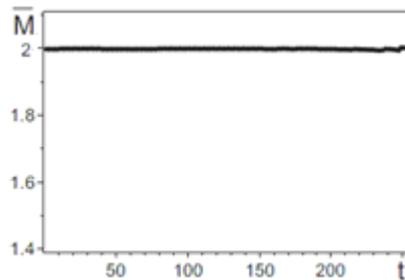


Рис.13. Изменение средней глубины памяти общества при эволюции

Доминирование стратегий с большой глубиной памяти наблюдается в этом мире на всех этапах эволюции (см. рис.14). Отсутствует эра доминирования стратегий с нулевой глубиной памяти.

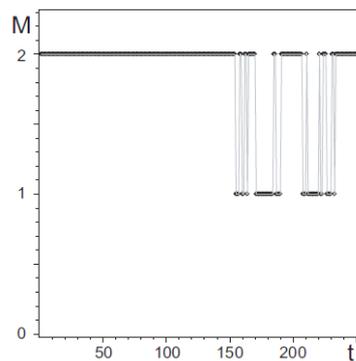


Рис.14. Глубина памяти победившей стратегии на каждом этапе эволюции

Перейдем к поведению сложности стратегий со временем. Разумеется, как и в предыдущих случаях, используем коллективные переменные $n_i(t)$. Результаты численного моделирования показаны на рис.15. Эти зависимости показывают, что примитивные стратегии малой сложности исчезают из общества на ранних этапах эволюции. Так, первыми исчезают стратегии сложности 1 - на 4 этапе (на этом этапе исчезает и самая «порядочная» стратегия), стратегии 0-ой сложности исчезают на 136 этапе (последней исчезает самая агрессивная стратегия), стратегии сложности 2 - на 235, сложности 3 - на 215, сложности 4 - на 248, сложности 5 - на 216 этапе. На заключительном этапе соревнуются только сложные стратегии. Стационар формируют только самые сложные стратегии.

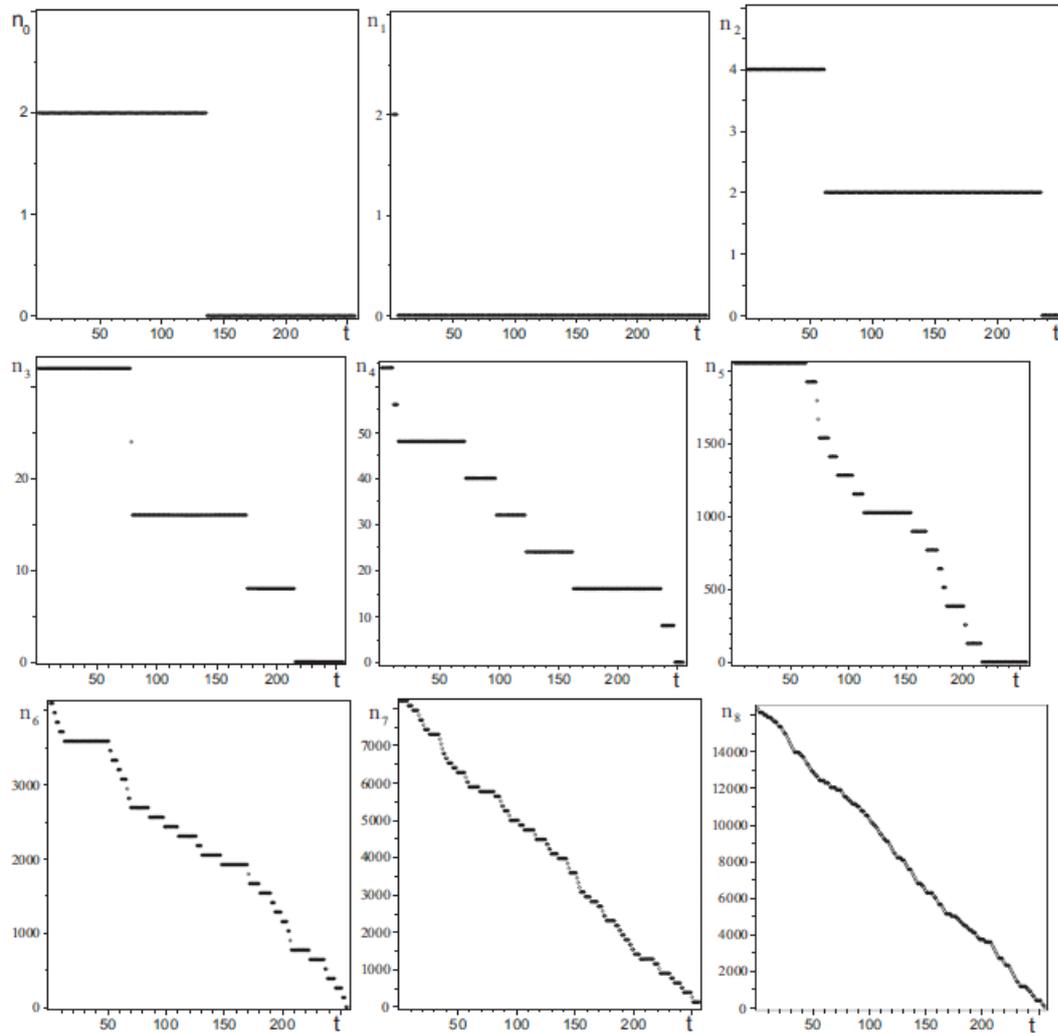


Рис.15. Изменение числа стратегий определенной сложности в мире с глубиной памяти 2

В мире с памятью сложность стратегий является выгодным при эволюции свойством. Можно сказать, что эволюция поддерживает и одобряет сложность стратегий.

Для демонстрации этого можно привести изменение средней сложности стратегий всего общества в процессе эволюции (см. рис.16). Видно, что средняя сложность стратегий мало меняется в процессе эволюции и небольшие ее осцилляции на заключительных этапах эволюции связаны с уменьшением числа стратегий общества. В этом случае исчезновение даже одной стратегии влияет на среднее значение. Можно предположить, что среднее значение сложности стратегий сохраняется при эволюции общества и с большей глубиной памяти.

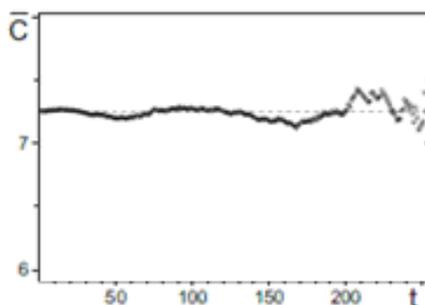


Рис.16. Поведення середньої складності стратегій суспільства

В мире с глубиной памяти 2 сложные стратегии доминируют на всех этапах эволюции. Это хорошо видно из рис.17, на котором показана сложность победившей стратегии на каждом этапе эволюции. Легко заметить, что стратегии малой сложности отсутствуют среди победителей на всех этапах эволюции. Другими словами, примитивный период развития общества, когда доминируют примитивные стратегии, в этом мире отсутствует. Поэтому можно выделить примитивный период по наличию примитивных стратегий, а не по их доминированию. Более естественный способ выделения примитивного периода можно осуществить по возрастанию агрессивности в обществе и достижения максимального значения.

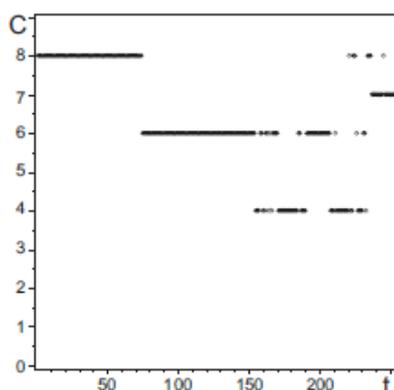


Рис.17. Складність стратегії переможця на кожному етапі еволюції

На рис. 18 приведена средняя агрессивность общества на каждом этапе эволюции. Видна характерная зависимость средней агрессивности со временем. Начальный примитивный этап развития можно выделить по росту агрессивности стратегий до максимума. Этот этап в мире с глубиной памяти 2 длится до $53 \div 57$ этапов, и еще один близкий по значению агрессивности достигается на $115 \div 118$ этапах. Обратим внимание, что в силу дискретности и не гладкости данных, максимальное значение трудно идентифицировать. Присутствует широкое плато в данных. Поэтому будем ориентироваться на период, за который достигается значение агрессивности исходного общества, что занимает примерно 188 этапов. Предполагая симметричность максимума, оценим характерное время примитивной стадии как $188 / 2 = 94$. Этот период занимает 37% времени эволюции. Обратим внимание, что он заканчивается до исчезновения самой агрессивной стратегии. Причина возникновения широкого плато в окрестности максимума возможно связана со стремлением максимального значения агрессивности к 0.5 при увеличении глубины памяти.

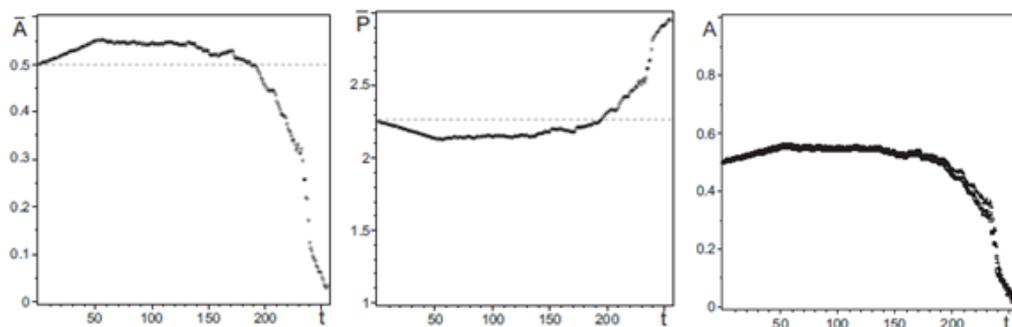


Рис.18. Слева средняя агрессивность стратегий на каждом этапе эволюции. В центре число очков в среднем на один ход одной стратегии. Справа средняя агрессивность (квадратики) и агрессивность построенная по уравнению (1) (крестики)

Общая тенденция уменьшения очков с увеличением агрессивности сохраняется и в этом мире (см. рис.18). Характер изменения имеет типичный для всех миров вид. Отличия сводятся к относительному положению минимума получаемых очков эволюционного преимущества. Также заметна корреляция между агрессивностью и количеством очков на ход. С ростом памяти выполнимость универсальной связи (1) улучшается. Интересно отметить, что $\bar{P}_{max} = 3$ во всех мирах, как и коэффициент $\lambda = 5.3/8$ и $a = 0.2$.

7. Выводы

Прежде всего отметим, что для рассматриваемой задачи Коши, память и, как ее следствие, сложность дают эволюционные преимущества. Вымирают стратегии с малой памятью и малой сложностью. Средняя память и сложность общества при фиксированной глубине памяти стратегий мало меняется при эволюции и близки к максимальным значениям. По-видимому, это основная причина усложнения и возникновения разнообразия при эволюции. Кроме этого, выжившие стратегии в стационаре обладают нулевой агрессивностью по

отношению друг к другу. В определенном смысле можно сказать, что память и есть универсальный механизм возникновения кооперации в сообществе.

Во всех рассмотренных мирах можно выделить примитивный период, на котором агрессивность стратегий в обществе нарастает. С увеличением глубины памяти относительная длительность этого периода уменьшается. Так, в мире без памяти примитивный период занимает 62.5% времени эволюции (до выхода в стационар), в мире с памятью 1 - $37 \div 38\%$, а в мире с памятью 2 – 37% возможно и меньше. Примитивные стратегии существуют в обществе и после окончания примитивного периода.

Время существования самой агрессивной стратегии в обществе с увеличением глубины памяти тоже сокращается. Так, при глубине памяти 0 оно занимает 62.5% времени эволюции, в мире с памятью 1 – 55%, а в мире с памятью 2 – 53%. Можно заметить корреляцию с длительностью примитивного периода. В принципе, можно использовать другое определение примитивного периода, например, по существованию в нем самой агрессивной стратегии.

Во всех мирах зависимость средней агрессивности от времени имеет характерный колоколообразный вид. Отличия состоят в положении максимума и его величине. Так, с увеличением глубины памяти максимум смещается к началу эволюции, а его величина падает, что затрудняет нахождение его положения. Поэтому с увеличением глубины памяти его ширина возрастает. Агрессивность в процессе эволюции после примитивного периода убывает и стремится к минимальному значению. Стационар формируют стратегии с нулевой агрессивностью по отношению к друг другу.

Существует универсальная связь (1) между агрессивностью общества и количеством получаемых стратегией очков эволюционных преимуществ в среднем за ход в обществе.

Разумеется, в дальнейшем мы рассмотрим влияние двух важных факторов, которые в постановке задачи Коши отсутствовали. Прежде всего, это влияние источников новых стратегий на разных этапах эволюции и изменение числа носителей стратегий. Изменение числа носителей стратегий можно осуществить без существенного увеличения вычислительных ресурсов используя пересчет одночастичного приближения. Эти факторы существенны для характера эволюции. Более серьезная проблема состоит в огромных вычислительных сложностях при увеличении глубины памяти. Даже небольшое увеличение в связи со сверхэкспоненциальным ростом числа стратегий является мощным ограничением. Преодоление этого требует недоступных вычислительных мощностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weibull J. W. Evolutionary game theory. – MIT press, 1997.
2. Nowak M. A. Evolutionary dynamics. – Harvard University Press, 2006.
3. Claussen J. C. Discrete stochastic processes, replicator and Fokker-Planck equations of coevolutionary dynamics in finite and infinite populations //arXiv preprint arXiv:0803.2443. – 2008.
4. Traulsen A., Claussen J. C., Hauert C. Coevolutionary dynamics: from finite to infinite populations //Physical review letters. – 2005. – Т. 95. – №. 23. –

- C. 238701.
5. Nowak M. A., May R. M. The spatial dilemmas of evolution //International Journal of bifurcation and chaos. – 1993. – Т. 3. – №. 01. – С. 35-78.
 6. Nowak M., Sigmund K. A strategy of win-stay, lose-shift that outperforms tit-for-tat in the Prisoner's Dilemma game //Nature. – 1993. – Т. 364. – №. 6432. – С. 56-58.
 7. Brandt H., Hauert C., Sigmund K. Punishment and reputation in spatial public goods games //Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences. – 2003. – Т. 270. – №. 1519. – С. 1099-1104.
 8. Nowak M. A., May R. M. Evolutionary games and spatial chaos //Nature. – 1992. – Т. 359. – №. 6398. – С. 826-829.
 9. Szabó G., Hauert C. Phase transitions and volunteering in spatial public goods games //Physical review letters. – 2002. – Т. 89. – №. 11. – С. 118101.
 10. Perc M. Chaos promotes cooperation in the spatial prisoner's dilemma game //EPL (Europhysics Letters). – 2006. – Т. 75. – №. 6. – С. 841.
 11. Perc M., Szolnoki A., Szabó G. Restricted connections among distinguished players support cooperation //Physical Review E. – 2008. – Т. 78. – №. 6. – С. 066101.
 12. Baek S. K. et al. Intelligent tit-for-tat in the iterated prisoner's dilemma game //Physical Review E. – 2008. – Т. 78. – №. 1. – С. 011125.
 13. Szolnoki A., Perc M. Reward and cooperation in the spatial public goods game //EPL (Europhysics Letters). – 2010. – Т. 92. – №. 3. – С. 38003.
 14. Szolnoki A., Perc M. Impact of critical mass on the evolution of cooperation in spatial public goods games //Physical Review E. – 2010. – Т. 81. – №. 5. – С. 057101.
 15. Szolnoki A., Perc M. Group-size effects on the evolution of cooperation in the spatial public goods game //Physical Review E. – 2011. – Т. 84. – №. 4. – С. 047102.
 16. Liu Y. et al. Aspiration-based learning promotes cooperation in spatial prisoner's dilemma games //EPL (Europhysics Letters). – 2011. – Т. 94. – №. 6. – С. 60002.
 17. Szolnoki A., Perc M. Conditional strategies and the evolution of cooperation in spatial public goods games //Physical Review E. – 2012. – Т. 85. – №. 2. – С. 026104.
 18. Szabó G., Fath G. Evolutionary games on graphs //Physics reports. – 2007. – Т. 446. – №. 4. – С. 97-216.
 19. Ohtsuki H. et al. A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks //Nature. – 2006. – Т. 441. – №. 7092. – С. 502-505.
 20. Santos F. C., Pacheco J. M. Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation //Physical Review Letters. – 2005. – Т. 95. – №. 9. – С. 098104.
 21. Nowak M., Highfield R. Supercooperators: Altruism, evolution, and why we need each other to succeed. – Simon and Schuster, 2011.
 22. Szabó G., Hauert C. Evolutionary prisoner's dilemma games with voluntary participation //Physical Review E. – 2002. – Т. 66. – №. 6. – С. 062903.
 23. Hauert C. et al. Via freedom to coercion: the emergence of costly punishment //science. – 2007. – Т. 316. – №. 5833. – С. 1905-1907.

24. Traulsen A., Claussen J. C. Similarity-based cooperation and spatial segregation //Physical Review E. – 2004. – Т. 70. – №. 4. – С. 046128.
25. Szolnoki A., Szabó G. Cooperation enhanced by inhomogeneous activity of teaching for evolutionary Prisoner's Dilemma games //EPL (Europhysics Letters). – 2007. – Т. 77. – №. 3. – С. 30004.
26. Perc M., Szolnoki A. Social diversity and promotion of cooperation in the spatial prisoner's dilemma game //Physical Review E. – 2008. – Т. 77. – №. 1. – С. 011904.
27. Yang H. X. et al. Diversity-optimized cooperation on complex networks //Physical Review E. – 2009. – Т. 79. – №. 5. – С. 056107.
28. Pacheco J. M., Traulsen A., Nowak M. A. Coevolution of strategy and structure in complex networks with dynamical linking //Physical review letters. – 2006. – Т. 97. – №. 25. – С. 258103.
29. Ohtsuki H., Nowak M. A., Pacheco J. M. Breaking the symmetry between interaction and replacement in evolutionary dynamics on graphs //Physical review letters. – 2007. – Т. 98. – №. 10. – С. 108106.
30. Meloni S. et al. Effects of mobility in a population of prisoner's dilemma players //Physical Review E. – 2009. – Т. 79. – №. 6. – С. 067101.
31. Jiang L. L. et al. Role of adaptive migration in promoting cooperation in spatial games //Physical Review E. – 2010. – Т. 81. – №. 3. – С. 036108.
32. Fu F., Nowak M. A. Global migration can lead to stronger spatial selection than local migration //Jour. of stat. physics. – 2013. – Т. 151. – №. 3-4. – С. 637-653.
33. Fu F. et al. Evolution of in-group favoritism //Scientific reports. – 2012. – Т. 2. – С. 460.
34. Wang Z., Szolnoki A., Perc M. Optimal interdependence between networks for the evolution of cooperation //Scientific reports. – 2013. – Т. 3.
35. Lieberman E., Hauert C., Nowak M. A. Evolutionary dynamics on graphs //Nature. – 2005. – Т. 433. – №. 7023. – С. 312-316.
36. Hauert C., Doebeli M. Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game //Nature. – 2004. – Т. 428. – №. 6983. – С. 643-646.
37. Axelrod R. The evolution of cooperation. – 1984.
38. Колмогоров А. Н. Три подхода к определению понятия " количество информации". – 2015.
39. Колмогоров А. Н. К логическим основам теории информации и теории вероятностей //Проблемы передачи информации. – 1969. – Т. 5. – №. 3. – С. 3-7.
40. Lloyd S. Measures of complexity: a nonexhaustive list //IEEE Control Systems Magazine. – 2001. – Т. 21. – №. 4. – С. 7-8.
41. Арнольд В. Экспериментальное наблюдение математических фактов. – Litres, 2017.
42. В.М.Куклин, А.В.Приймак, В.В.Яновский. Влияние памяти на эволюцию популяций, Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» т.29, с.41-66, 2016.

УДК 658.51.012

Диффузионное описание производственного процесса

О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье основное внимание уделяется построению стохастического уравнения для расчета производственного цикла изготовления партии изделий на предприятии с поточным типом организации производства. В качестве базового подхода рассмотрен процесс движения предметов труда по синхронизированной поточной линии. Выполнена оценка размеров межоперационных заделов технологических операций, обеспечивающая бесперебойный режим функционирования поточной линии. Записано в канонической форме стохастическое уравнение и получено определение коэффициента диффузии.

Ключевые слова: поточная линия, стохастическое уравнение, PDE-модель, предмет труда, технологический процесс, полупроводниковое производство, межоперационные запасы, уравнение Ито, диффузионное приближение, коэффициент диффузии, производственный цикл, основное время обработки

У статті основну увагу приділяється побудові стохастичного рівняння для розрахунку виробничого циклу виготовлення партії виробів на підприємствах з потоковим типом організації виробництва. В якості базового підходу розглянуто процес руху предметів праці по синхронизованій потоковій лінії. Виконано оцінку розмірів міжопераційних заділів технологічних операцій, що забезпечує безперебійний режим функціонування потокової лінії. Записано в канонічній формі стохастичне рівняння і отримано визначення коефіцієнта дифузії.

Ключові слова: поточна лінія, Конверс, стохастичне рівняння, PDE-модель, предмет праці, технологічний процес, напівпровідниковий виробництво, між операційні запаси, рівняння Іто, дифузійне наближення, коефіцієнт дифузії, виробничий цикл, основний час обробки

The article focuses on the construction of the stochastic equation for calculating a serial production run for enterprises with a flow type manufacturing process. The process of moving subjects of labor along the synchronized production line has been considered as the basic approach. The operational reserves of technological operations required for a production line uninterrupted functioning has been estimated. The stochastic equation in the canonical form has been written and the definition of the diffusion coefficient has been obtained.

Key words: production line, flow line, stochastic equation, PDE-model, subject of labor, technological process, semiconductor production, production cycle, operational stocks, Ito equation, diffusion approximation, diffusion coefficient, processing time.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

При моделировании движения предмета труда по технологическому маршруту поточной линии выделяют три характерные величины технологического процесса [1-4]:

– $\Delta\tau_{0m}$ – основное технологическое время выполнения m -ой технологической операции (промежуток времени, в течение которого предмет труда находится в непосредственной обработке), $m=1..M$, где M – количество технологических операций в производственном процессе;

– $\Delta\tau_{qm} = \Delta\tau_{0m}N_m$ – время обработки предмета на m -ой технологической операции с очередью деталей на обработку $(N_m - 1)$ и одной детали, которая

находится в процессе обработки; N_m - общее количество деталей в очереди на обработку на m -ой операции;

$$-T_d = \sum_{m=1}^M \Delta\tau_{qm} - \text{производственный цикл обработки предмета труда.}$$

Движение предмета труда по технологическому маршруту представим в виде перемещения предмета труда по состояниям очереди ожидания в каждом межоперационном накопителе (принцип обслуживания: “первый пришел – первый обработан”), рис.1:

$$N_m \rightarrow (N_m - 1) \rightarrow (N_m - 2) \rightarrow \dots \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1. \quad (1)$$

Общее время обработки предмета труда с момента поступления в очередь на первую технологическую операцию и до окончания обработки на $(m-1)$ -ой технологической операции составляет

$$\sum_{k=1}^{m-1} \Delta\tau_{qk} = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta\tau_{0k} N_k. \quad \text{Введем}$$

обозначение τ_{m,N_i} - общее время, которое предмет труда находился в технологической обработке перед тем, как он оказался в очереди на обработку под номером N_i на m -ой технологической операции. Для предмета труда, который только что закончил обработку на $(m-1)$ -ой технологической операции и ожидает обработку на m -ой технологической операции, находится последним в очереди (с номером на обработку N_m), справедливо равенство:

$$\tau_{m,N_m} = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta\tau_{qk} = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta\tau_{0k} N_k.$$

Поступивший на обработку на m -ую технологическую операцию предмет труда находится в конце очереди. Его состояние в очереди на обработку определим как состояние N_m . Переход предмета труда $N_m \rightarrow (N_m - 1)$ из состояния в очереди на обработку N_m в состояние в очереди на обработку $(N_m - 1)$ произойдет в тот момент времени, когда будет закончена обработка предмета труда, который находился первым в очереди на обработку (состояние в очереди на обработку под номером 1)

$$\tau_{m,(N_m-1)} = \tau_{m,N_m} + \Delta\tau_{1m}, \quad (2)$$

где $\Delta\tau_{1m}$ - время обработки технологическим оборудованием предмета труда, который находился в состоянии 1 (рис.1). Время обработки на m -ой технологической операции $\Delta\tau_m$ есть случайная величина с известным законом распределения $f(\Delta\tau_m)$. Закон распределения $f(\Delta\tau_m)$ определяется технико-экономическими характеристиками используемого в технологическом процессе оборудования. Переход предмета труда $(N_m - 1) \rightarrow (N_m - 2)$ из состояния в очереди на обработку $(N_m - 1)$ в состояние $(N_m - 2)$ произойдет в момент времени

$$\tau_{m,(N_m-2)} = \tau_{m,(N_m-1)} + \Delta\tau_{2m} = \tau_{m,N_m} + \Delta\tau_{1m} + \Delta\tau_{2m} \quad (3)$$

после начала обработки. Соответственно, для перехода $(N_m) \rightarrow (N_m - i)$ из состояния в очереди на обработку N_m в состояние $(N_m - i)$ следует равенство

$$\tau_{m,(N_m-i)} = \tau_{m,N_m} + \Delta\tau_{1\ m} + \Delta\tau_{2\ m} + \dots + \Delta\tau_{i\ m} = \tau_{m,N_m} + \sum_{k=1}^i \Delta\tau_{k\ m}. \quad (4)$$

Сумма $\sum_{k=1}^i \Delta\tau_{k\ m}$ в выражении (4) есть время обработки первых i -деталей очереди длиной N_m . В этой очереди под номером N_m на обработку находится рассматриваемый предмет труда. Запишем также выражение для перехода $(N_m - i_1) \rightarrow (N_m - i_2)$ из состояния в очереди на обработку $(N_m - i_1)$ в состояние в очереди на обработку $(N_m - i_2)$

$$\tau_{m,(N_m-i_2)} - \tau_{m,(N_m-i_1)} = \sum_{k=i_1+1}^{i_2} \Delta\tau_{k\ m}, \quad (5)$$

которое может быть получено из соотношения (4).

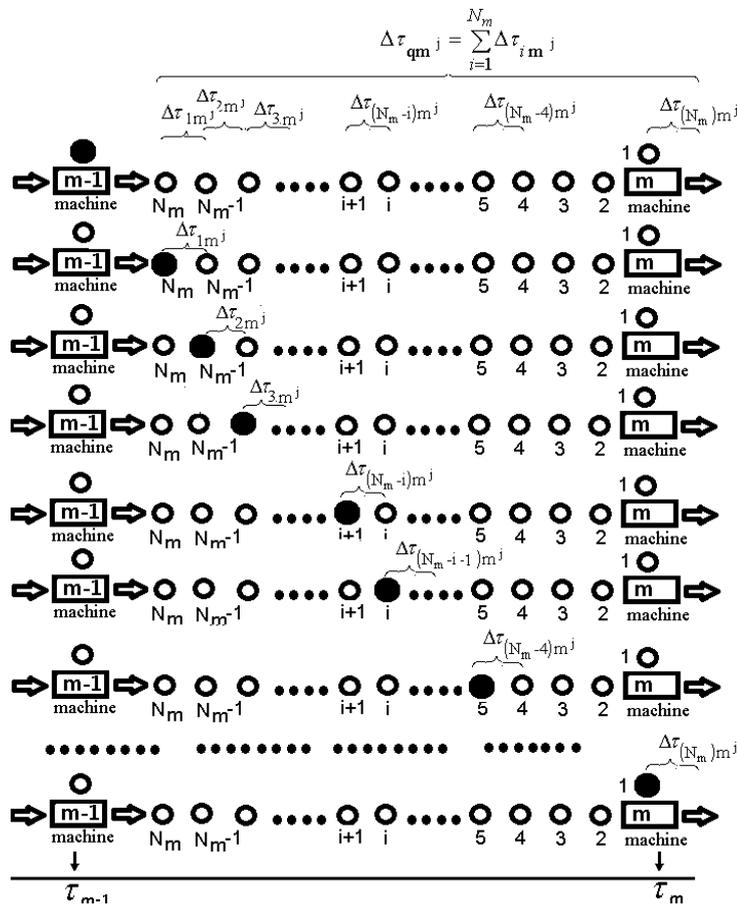


Рис.1. Схема перемещения предметов труда по состояниям на m -ой технологической операции

Введем случайную величину

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta\tau_m - \Delta\tau_{0m}}{\sigma_m}, \quad (6)$$

где $\Delta\tau_{0m}, \sigma_m$ – математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайной величины $\Delta\tau_m$ с плотностью распределения $f(\Delta\tau_m)$. Случайная величина ε_m , определенная соотношением (6) будет иметь плотность распределения [5, стр.338]:

$$g_m(\varepsilon_m) = \sigma_m f_m(\sigma_m \cdot \varepsilon_m + \Delta\tau_{0m}), \quad \langle \varepsilon_m \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_m^2 \rangle = 1 \quad (7)$$

с математическим ожиданием $\langle \varepsilon_m \rangle$ и среднее квадратичное отклонением $\langle \varepsilon_m^2 \rangle$.

Время обработки i – детали из очереди на обработку может быть выражено через величину ε_{im} , определяющую ее отклонение от математического ожидания $\Delta\tau_{0m}$:

$$\Delta\tau_{im} = \Delta\tau_{0m} + \sigma_m \cdot \varepsilon_{im}. \quad (8)$$

Это позволяет записать выражение (4) в виде

$$\tau_{m,(N_m-i)} = \tau_{m,N_m} + \Delta\tau_{0m} \cdot i + \sigma_m \cdot (\varepsilon_{1m} + \varepsilon_{2m} + \dots + \varepsilon_{i-1m} + \varepsilon_{im}). \quad (9)$$

Используя свойство дисперсии линейной функции случайных величин [5, стр.270], получим

$$\varepsilon_{1m} + \varepsilon_{2m} + \dots + \varepsilon_{i-1m} + \varepsilon_{im} = \sqrt{i} \varepsilon_m, \quad \langle \varepsilon_m \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_m^2 \rangle = 1. \quad (10)$$

Подстановка (10) в (9) дает уравнение

$$\tau_{m,(N_m-i)} = \tau_{m,N_m} + \Delta\tau_{0m} \cdot i + \sigma_m \cdot \sqrt{i} \varepsilon_m. \quad (11)$$

Рассмотрим переход из состояния, характеризующего координатой $\tau_{m,N_m} = \tau(t_0)$, в состояние, характеризующееся координатой $\tau_{m,(N_m-i)} = \tau(t)$ за промежутки времени

$$(t - t_0) = \Delta\tau_{0m} \cdot i. \quad (12)$$

Воспользуемся соотношением (12), запишем выражение (11) в виде

$$\tau(t) = \tau(t_0) + (t - t_0) + \frac{\sigma_m}{\sqrt{\Delta\tau_{0m}}} \cdot \sqrt{t - t_0} \varepsilon_m. \quad (13)$$

Решение уравнение (13) позволяет построить диффузионную модель производственной поточной линии и исследовать характеристики производственного процесса для предприятий с поточным типом организации производства. Возможность расширить класс PDE-моделей [6-10], используемых для описания производственных систем, определила актуальность настоящей работы.

2. Постановка проблемы и формулировка цели статьи

Целью настоящей статьи является построение модели движения партии предметов труда по производственной поточной линии, размер которой конечный и равен N_p . При этом выделим отдельные подзадачи:

А)оценить темп обработки предметов труда на технологической операции;

Б)оценить минимальную величину размера межоперационных заделов N_m , который позволяет обеспечить бесперебойную работу технологического оборудования при обработке партии изделий размером N_p ;

В)определить режим последовательного запуска каждой единицы оборудования для обеспечения бесперебойной работы поточной линии при поступлении партии предметов труда на обработку на технологические позиции, не содержащие межоперационных заделов. Определить программу запуска поточной линии;

Г)построить стохастическое уравнение для моделирования процесса обработки партии предметов труда на производственной линии.

3. Оценка среднего темп обработки предметов труда на технологической операции.

Определим среднюю производительность обработки партии N_p предметов труда на каждой технологической операции при заданной вероятности

$$P\left(\left|\Delta\tau_{0\ mN_p} - \Delta\tau_{0\ m}\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{N_p}}{\sigma_m}\right) = \gamma, \quad (14)$$

где
$$\Delta\tau_{0\ mN_p} = \frac{1}{N_p} \sum_1^{N_p} \Delta\tau_{i\ m}. \quad (15)$$

$\Phi(x)$ - функция Лапласа. Смысл соотношения (14) следующий: с заданной надежностью $\gamma = 2\Phi(x)$ можно утверждать, что доверительный интервал

$$\left(\Delta\tau_{0\ mN_p} - x \frac{\sigma_m}{\sqrt{N_p}}, \Delta\tau_{0\ mN_p} + x \frac{\sigma_m}{\sqrt{N_p}}\right) \quad (16)$$

покрывает среднее время обработки деталей на m -ой технологической операции $\Delta\tau_{0\ m}$. Точность оценки

$$\delta = x \frac{\sigma_m}{\sqrt{N_p}}. \quad (17)$$

Для надежности оценки $\gamma = 0.95$ имеем $x = 1.96$. В пределах интервала (16) среднее выборочное значение $\Delta\tau_{0\ mN_p}$ (15) на партии изделий размером N_p может иметь отклонение δ . С увеличением размера партии N_p величина отклонения δ уменьшается. Если за характерное время рассмотрения процесс обрабатывается большое количество изделий $N_p \rightarrow \infty$, то возможно полагать, что $\delta \approx 0$. Это обстоятельство, которое соответствует большим характерным временам протекания процесса производства $\Delta t \approx N_p \cdot \Delta\tau_{0\ m}$, позволяет использовать для описания движения предметов труда по поточной производственной линии кинетическое уравнение [2,11,12]:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f = \lambda_{plant} \cdot \{\varphi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1 - \mu \cdot \chi\}, \quad \frac{d\mu}{dt} = f(t, S), \quad (18)$$

где $\chi(t, S, \mu)$ соответствующим образом нормированная функция распределения числа N предметов труда по состояниям в фазовом пространстве (t, S, μ) , $f(t, S)$ - инженерно-производственная функция, определяющая нормативную траекторию движения предметов труда по технологическому маршруту [13,14]. Если же размер партии является небольшим или при исследовании изменения во времени темпа обработки партии изделий размером N_p за характерный промежуток времени Δt обрабатывается не слишком большое количество предметов труда $N_{p\tau}$:

$$\Delta \tau_{0m} \ll \Delta t \ll T_d, \quad \Delta t = N_{p\tau} \cdot \Delta \tau_{0m}, \quad (19)$$

то в соответствие с (17) абсолютное отклонение $\delta = x \frac{\sigma_m}{\sqrt{N_{p\tau}}}$ времени обработки

предметов труда $\Delta \tau_{0m} N_{p\tau}$ за характерный промежуток времени Δt от среднего времени обработки может быть существенным и использование (18) для построения модели производственной поточной линии приводит к значительной погрешности, что отражается на производительности обработки предмета труда за характерный промежуток времени:

$$[\chi]_{1m} \approx \frac{1}{\Delta \tau_{0m} - \delta} \approx [\chi]_{1\psi m} + \Delta[\chi]_{1\psi m}.$$

В выражении (19) длительность времени $\Delta \tau_{0m}$ соответствует времени протекания быстрого процесса (непосредственно единичной обработки предмета труда на технологической операции), T_d - соответствует времени протекания медленного процесса (продолжительности производственного цикла обработки партии предметов труда). Наличие дополнительного слагаемого $\Delta[\chi]_{1\psi m}$ приводит к образованию колебаний потоковых параметров производственной линии [15].

3. Оценка размера межоперационных заделов N_m

Оценим требуемый размер межоперационных заделов N_m , который позволяет обеспечить бесперебойную работу технологического оборудования при обработке партии изделий количеством N_p . Будем полагать, что предметы труда поступают в межоперационный задел с $(m-1)$ -технологической операции (рис.2) с производительностью

$$[\chi]_{1(m-1)} = \frac{1}{\Delta \tau_{0(m-1)} N_p} \approx \frac{1}{\Delta \tau_{0(m-1)} + \delta} \approx [\chi]_{1\psi(m-1)} - \Delta[\chi]_{1\psi(m-1)}, \quad (20)$$

$$[\chi]_{1\psi(m-1)} = \frac{1}{\Delta \tau_{0(m-1)}}, \quad \Delta[\chi]_{1\psi(m-1)} = \frac{\delta}{(\Delta \tau_{0(m-1)})^2}, \quad (21)$$

а убывают с производительностью

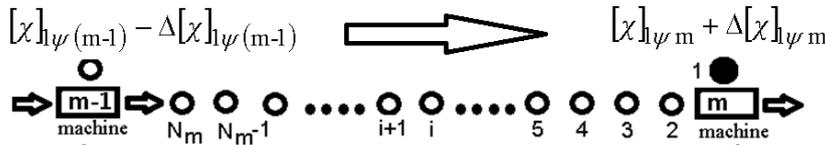


Рис.2. Модель изменения уровня межоперационных заделов

$$[\chi]_{1m} = \frac{1}{\Delta\tau_{0 m N_p}} \approx \frac{1}{\Delta\tau_{0 m} - \delta} \approx [\chi]_{1\psi m} + \Delta[\chi]_{1\psi m}, \quad (22)$$

$$[\chi]_{1\psi m} = \frac{1}{\Delta\tau_{0 m}}, \quad \Delta[\chi]_{1\psi m} = \frac{\delta}{(\Delta\tau_{0 m})^2}, \quad (23)$$

Изменение величины межоперационных заделов в единицу времени перед с m-технологической операции для синхронизированной производственной линии, для которой соблюдается условие синхронности работы технологического оборудования

$$[\chi]_{1\psi(m-1)} = [\chi]_{1\psi m} = \frac{1}{\Delta\tau_{0 m}} = \frac{1}{\Delta\tau_0}, \quad (24)$$

определяется выражением

$$[\chi]_{1\psi m} - [\chi]_{1\psi(m-1)} = 2\Delta[\chi]_{1\psi m} = \frac{2\delta}{(\Delta\tau_{0 m})^2}. \quad (25)$$

За промежуток времени $\Delta t = N_p \cdot \Delta\tau_{0 m}$, который соответствует времени обработки на m-технологической операции всей партии предметов труда размером N_p , изменение межоперационного задела определяется величиной

$$\Delta N_m = ([\chi]_{1\psi m} - [\chi]_{1\psi(m-1)})\Delta t = 2\Delta[\chi]_{1\psi m} \Delta t = \frac{2\delta \cdot \Delta t}{(\Delta\tau_{0 m})^2}. \quad (26)$$

Подставим в (26) значение δ (17) при $\gamma = 0.95$, получим

$$\Delta N_m = \frac{2\delta \cdot \Delta t}{(\Delta\tau_{0 m})^2} = 1.96 \frac{\sigma_m}{\sqrt{N_p}} \frac{2 \cdot N_p \cdot \Delta\tau_{0 m}}{(\Delta\tau_{0 m})^2} \approx \frac{4 \cdot \sigma_m}{\Delta\tau_{0 m}} \sqrt{N_p} \approx 4 \cdot [\chi]_{1\psi m} \sigma_m \sqrt{N_p}. \quad (27)$$

Большинство единиц технологического оборудования работают со значением потоковых параметров $\frac{\sigma_m}{\Delta\tau_{0 m}} = (0.1 \div 0.2)$, которые накладывают ограничение на минимальный размер межоперационного задела

$$N_{m \min} \approx 4 \cdot [\chi]_{1\psi m} \sigma_m \sqrt{N_p} \approx \frac{4 \cdot \sigma_m}{\Delta\tau_{0 m}} \sqrt{N_p} \approx 0.8 \sqrt{N_p}. \quad (28)$$

с требованием вместимости межоперационного накопителя

$$N_{m \psi} \geq 2N_{m \min} \approx 1.6 \sqrt{N_p}. \quad (29)$$

Выражения (28),(29) определяют режим непрерывной работы поточной линии, при котором не допускается остановка производственного процесса как из-за опустошения межоперационного накопителя (28), так и из-за его переполнения накопителя. При обработки партии изделий $N_p=10^4$, соответственно минимальный требуемый межоперационный задел равен $N_{m \min} \approx 80$ изделий при требуемой емкости межоперационного накопителя $N_{m \psi} \geq 2N_{m \min} \approx 160$. Если заказ поступает в обработку на поточную линию с отсутствующими межоперационными заделами [18] в момент времени $t_{start}=0$, то для обеспечения бесперебойной работы синхронизированной поточной линии с условием синхронизации (24) требуется управления запуском m -го технологического оборудования с заданной задержкой, определяемой условиями (28), (29) [16,17]. Для упрощения полагаем

$$\sigma_{(m-1)} = \sigma_m, \quad m=1..M, \quad (30)$$

соответственно $N_{(m-1) \min} = N_{m \min} = N_{0 \min}$, определим время задержки $\Delta\tau_{\text{delay time}}$ последовательного запуска оборудования поточной линии

$$\Delta\tau_{\text{delay time}} = \Delta\tau_0 N_{0 \min} \approx 0.8 \cdot \Delta\tau_0 \sqrt{N_p}, \quad (31)$$

которое задаем времена старта t_{startm} m -ой единицы оборудования

$$t_{startm} = m \cdot \Delta\tau_{\text{delay time}} = m \Delta\tau_0 N_{0 \min} \approx 0.8 \cdot m \cdot \Delta\tau_0 \sqrt{N_p}. \quad (32)$$

Для случая, когда партия деталей поступает на обработку не частями (подпартиями), а целиком, или же количество изделий в подпартии превышает значение $N_{m \min}$, то в задержке для первой технологической операции нет необходимости и выражение (32) принимает вид

$$t_{startm} = (m-1) \cdot \Delta\tau_{\text{delay time}} = (m-1) \Delta\tau_0 N_{0 \min} \approx 0.8 \cdot (m-1) \cdot \Delta\tau_0 \sqrt{N_p}. \quad (33)$$

Соотношение (33) при обработке партии изделий $N_p=10^4$ определяет время запуска каждой единицы оборудования ($\Delta\tau_{\text{delay time}} = 80 \cdot \Delta\tau_0$):

$$t_{start1} = 0, \quad t_{start2} = 80 \cdot \Delta\tau_0, \quad t_{start3} = 160 \cdot \Delta\tau_0, \quad t_{start2} = (m-1)80 \cdot \Delta\tau_0.$$

Таким образом, первое изделие партии поступит на обработку на M -ю технологическую операцию в момент времени

$$t_{startM} = (M-1) \frac{4 \cdot \sigma_m}{\Delta\tau_{0m}} \sqrt{N_p} \cdot \Delta\tau_0 = (M-1)80 \cdot \Delta\tau_0, \quad (34)$$

а завершит обработку в момент времени

$$t_{finishM} = (M-1) \frac{4 \cdot \sigma_m}{\Delta\tau_{0m}} \sqrt{N_p} \cdot \Delta\tau_0 + \Delta\tau_0 = (M-1)80 \cdot \Delta\tau_0 + \Delta\tau_0, \quad (35)$$

в то время, как изделие будет находится в обработке в течение времени

$$t_{\text{time of processing } M} = M \cdot \Delta\tau_0. \quad (36)$$

Приведенная оценка наглядно показывает, что время, которое находится в обработке первый предмет труда для рассматриваемого случае (35), во много раз превышает необходимое время для его обработки (36)

$$\frac{t_{\text{finish } M}}{t_{\text{time of processing } M}} = \frac{(M-1) \frac{4 \cdot \sigma_m}{\Delta\tau_{0m}} \sqrt{N_p} \cdot \Delta\tau_0 + \Delta\tau_0}{M \cdot \Delta\tau_0} = \frac{(M-1) \frac{4 \cdot \sigma_m}{\Delta\tau_{0m}} \sqrt{N_p} + 1}{M}$$

Для современных поточных линий $M \gg 1$ [11,12,16], что соответствует отношению

$$\frac{t_{\text{finish } M}}{t_{\text{time of processing } M}} = \frac{(M-1) \frac{4 \cdot \sigma_m}{\Delta\tau_{0m}} \sqrt{N_p} + 1}{M} \approx N_{m \min} \approx \frac{4 \cdot \sigma_m}{\Delta\tau_{0m}} \sqrt{N_p}. \quad (37)$$

4. Дифференциальное уравнение, моделирующее процесс обработки партии изделий

Преобразуем уравнение (13)

$$\tau(t) = \tau(t_0) + (t - t_0) + \frac{\sigma_m}{\sqrt{\Delta\tau_{0m}}} \cdot \sqrt{t - t_0} \cdot \varepsilon_m,$$

которое определяет время нахождения предмета труда в процессе обработки. Рассмотрим изменение времени обработки предмета труда

$$d\tau(t) = \tau(t) - \tau(t_0) \quad (38)$$

за бесконечно малый интервал времени

$$dt = t - t_0. \quad (39)$$

С учетом (38),(39) уравнение (13) запишем в виде

$$d\tau(t) = dt + \frac{\sigma_m}{\sqrt{\Delta\tau_{0m}}} \varepsilon_m \sqrt{dt}. \quad (40)$$

Процесс, подчиняющийся уравнению (40) является винеровским. С учетом обозначений:

$$a(\tau, t) = 1; \quad b(\tau, t) = \frac{\sigma_m}{\sqrt{\Delta\tau_{0m}}}; \quad \delta W = \varepsilon_m \sqrt{dt} \quad (41)$$

уравнение (40) представим в каноническом виде

$$d\tau(t) = a(\tau, t)dt + b(\tau, t)\delta W, \quad (42)$$

где $\delta W = \varepsilon_m \sqrt{dt}$ – бесконечно малый винеровский шум, $\varepsilon_m \approx N(0,1)$ (10). Функция $a(\tau, t)$ является коэффициентом сноса, а квадрат функции $b(\tau, t)$ является диффузией процесса:

$$b^2(\tau, t) = D(\tau, t). \quad (43)$$

В рассматриваемом случае (40) в силу особенности модели описания синхронизированного производственного процесса (24), (30) функции $a(\tau, t)$ и $b(\tau, t)$ являются постоянными величинами. В этом случае уравнение (42) описывает обычное аддитивное винеровское блуждание.

Уравнение (42) позволяет моделировать динамику изменения во времени величины $\tau(t)$ при помощи рекуррентной схемы (11), представленной в каноническом виде

$$\tau(t_{k+1}) = \tau(t_k) + a(\tau_k, t_k)\Delta t + b(\tau_k, t_k)\varepsilon_{km}\sqrt{\Delta t}. \quad (44)$$

Алгоритм моделирования следующий: выбирается начальное значение $\tau_0 = \tau(t_0)$ и малый интервал времени $\Delta t = (t_1 - t_0)$. Генерируется случайное число ε_{0m} (10) с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной единицы. Функция распределения случайной величины является заданной и определяется техническими характеристиками используемого оборудования. Функция распределения может быть определена через паспортные параметры технологического оборудования или в результате нормирования технологических операций производственной поточной линии.

Дискретная схема Ито (44) позволяет определить смысл функций $a(\tau, t)$ и $b(\tau, t)$. Из уравнения (44) найдем значение величины $(\tau(t) - \tau(t_0))$ между произвольными моментами времени t и t_0 , $\Delta t = (t - t_0)$:

$$\langle \tau(t) - \tau(t_0) \rangle = a(\tau_0, t_0)\Delta t + b(\tau_0, t_0)\langle \varepsilon_m \rangle\sqrt{\Delta t}, \quad (45)$$

где $a(\tau_0, t_0)$, $b(\tau_0, t_0)$, Δt – не случайные величины. В силу определения случайной величины (10) имеем $\langle \varepsilon_m \rangle = 0$, откуда из уравнения (45) следует

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \tau(t) - \tau(t_0) \rangle}{\Delta t} = a(\tau_0, t_0). \quad (46)$$

Среднее значение квадрата отклонения в силу определения $\langle \varepsilon_m \rangle = 0$, $\langle (\varepsilon_m)^2 \rangle = 1$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \langle (\tau(t) - \tau(t_0))^2 \rangle &= \\ &= \left\langle \left(a(\tau_0, t_0)\Delta t \right)^2 + a(\tau_0, t_0)b(\tau_0, t_0)\varepsilon_m\Delta t^{3/2} + \left(b(\tau_0, t_0)\varepsilon_m\sqrt{\Delta t} \right)^2 \right\rangle = \\ &= a^2(\tau_0, t_0)\Delta t^2 + a(\tau_0, t_0)b(\tau_0, t_0)\langle \varepsilon_m \rangle\Delta t^{3/2} + b^2(\tau_0, t_0)\langle (\varepsilon_m)^2 \rangle\Delta t = \\ &= a^2(\tau_0, t_0)\Delta t^2 + b^2(\tau_0, t_0)\Delta t, \quad (47) \end{aligned}$$

откуда

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle (\tau(t) - \tau(t_0))^2 \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a^2(\tau_0, t_0) \Delta t + b^2(\tau_0, t_0) = b^2(\tau_0, t_0). \quad (48)$$

Несложно показать, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle (\tau(t) - \tau(t_0))^k \rangle}{\Delta t} = 0, \quad \text{при } k > 2 \quad (49)$$

Класс производственных процессов, свойства которых определяются соотношениями (46), (48), (49) относятся к диффузионным.

Выводы

В работе рассмотрено диффузионное описание процесса изготовления партии изделий размером N_p . Движение предмета труда по технологическому маршруту представлено в виде перемещения предмета труда по состояниям очереди ожидания в каждом межоперационном накопителе с принципом обслуживания: “первый пришел – первый обработан”). Рассмотрены характерные времена протекания производственных процессов и определены условия применимости диффузионного приближения. Получены уравнения, позволяющие оценить отклонение темпа обработки части партии предметов труда за рассматриваемый характерный промежуток времени Δt . Представленные в работе результаты позволяют сделать следующие выводы:

– существуют производственные процессы с характерными временами протекания, в течение которых отклонение темпа обработки изделий может значительно отклоняться от нормативного значения, определенного паспортными данными технологического оборудования;

– величина требуемого размера заделов от среднего темпа обработки предметов труда и размера партии, поступившей в обработку. Для обеспечения непрерывной работы синхронизированной поточной линии требуются межоперационные заделы. Требуемый объем межоперационных заделов и требуемая емкость накопителей является расчетной величиной, которая определяется технологическими параметрами поточной линии;

– для обеспечения бесперебойной работы синхронизированной поточной линии требуется управление запуском каждого m -го технологического оборудования с заданной задержкой, определяемой величиной размеров межоперационных накопителей, определяющих бесперебойный режим работы.

Перспективами дальнейших исследований труда является:

– построение уравнения Фоккера-Планка, моделирующее процесс обработки партии деталей на поточной производственной линии;

– основываясь на уравнении Ито для моделирования движения партии предметов труда (40) построение уточненной формулы расчета продолжительности производственного цикла изготовления партии изделий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пигнастый О.М. Сетевая модель многоресурсной поточной производственной линии / О.М.Пигнастый // Научный результат. Серия «Информационные технологии». Белгород: БГУ. –2016. – Т.1. № 2. – С. 31 – 45.
2. Пигнастый О. М. Статистическая теория производственных систем. / О.М. Пигнастый. – Х.: Изд. ХНУ им. Каразина, 2007. – С. 388. –Available at: <https://goo.gl/dzcEZk>
3. Разумов И. М. Организация и планирование машиностроительного производства / И. М. Разумов, Л. Я. Шухгалтер – М.: Машиностроение, 1974. – 592 с.
4. Управление гибкими производственными системами / Е. Д. Воронина и др. / общ. ред. С. В. Емельянов. – М.:Машиностроение, 1987. – 368 с.
5. Венцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С.Венцель, Л.А.Овчаров – Москва: Высшая школа, 2000. – 480 с.
6. Пигнастый О. М. О новом классе динамических моделей поточных линий производственных систем / О. М. Пигнастый // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Белгород: БГУ. - 2014. – № 31/1. - С. 147-157 –Available at: <https://goo.gl/9k3v1r>
7. Пигнастый О. М. Использование PDE-моделей для построения единой теории производственных линий / О. М. Пигнастый // Вісник Херсонського національного технічного університету. Херсон: ХНТУ. - 2014. - № 3 (50). - С. 405 –412. –Available at: <https://goo.gl/WU87S1>
8. Власов В.А. Моделирование технологических процессов изготовления промышленной продукции / В. А. Власов, И. А. Тихомиров, И. И. Локтев.– Томск, 2006. – 300 с.
9. Berg R. Modelling and Control of a Manufacturing Flow Line using Partial Differential Equations. / R. Berg, E. Lefeber, J. Rooda // IEEE Transactions on Control Berg R. Modelling and Control of a Manufacturing Flow Line using Partial Differential Equations. / R. Berg, E. Lefeber, J. Rooda // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2008. – vol. 16, №1. – P. 130 – 136.
10. Armbruster D. A Continuum Model for a Re-entrant Factory / D. Armbruster, D. Marthaler, C. Ringhofer, K. Kempf, Jo T -C. // Operations research. – 2006. – VOL 54 – №5. – P. 933 - 950 .
11. Pihnastyi O.M. Statistical validity and derivation of balance equations for the two-level model of a production line// O.M.Pihnastyi//Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Kharkiv: PC "TECHNOLOGY CENTER". – 2016. – vol 5. –№ 4 (83). - P. 17 – 22. –Available at: <https://goo.gl/4Jwn2r>
12. Пигнастый О. М. О выводе кинетического уравнения производственного процесса / О. М. Пигнастый // Вісник Херсонського національного технічного університету. Херсон: ХНТУ. - 2015. - № 3 (54). - С. 439 –446. – Available at: <https://goo.gl/z5pLdE>
13. Пигнастый О.М. Инженерно-производственная функция предприятия с серийным или массовым выпуском продукции / О.М. Пигнастый //

- Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. - Харьков: НАКУ. - 2005. - № 42(3). - С. 111-117.
14. Демуцкий В.П. Целевая функция производственной системы с массовым выпуском продукции / В.П.Демуцкий, О.М.Пигнастый, В.Д.Ходусов, М.Н.Азаренкова // - Вісник Харківського національного університету. - Харків: ХНУ. - 2006. - N746. Сер. "Фізична" - С.95-103. – Available at: <https://goo.gl/KzUDqO>
 15. Ходусов В.Д., Пигнастый О.М. Использование методов физической кинетики для исследования колебания параметров поточной линии // - Восточно-европейский физический журнал. - Харьков: ХНУ. - 2014. - Vol.1. – №4. – С. 88-95.
 16. Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления / Л.Г.Раскин. – М.: Сов.радио, 1976. – 344 с.
 17. Раскин Л.Г. Решение многономенклатурной задачи управления запасами по вероятностному критерию / Л.Г.Раскин, П.Е.Пустовойтов // Системный анализ, управление, информационные технологии.–Х.: НТУ «ХПИ. – 2002. – №. 13. – С. 49-53.
 18. Заруба В. Я. Моделирование движения предмета труда по технологическому маршруту в двухкоординатном описании / В. Я. Заруба О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут”. Збірник наукових праць. Серія: Технічний прогрес та ефективність виробництва. – Харків: НТУ „ХПИ”. - 2015. - № 60 (1169) – С. 39-45.
 19. Пигнастый О. М. К вопросу использования статистической теории для расчета производственного цикла / В. Д. Ходусов, О. М. Пигнастый // - Вісник Харківського національного університету. - Харків: ХНУ. -2009. - №868, вип.3/43/ Сер. "Фізична". с.112-118.
 20. Пигнастый О. М. О построении целевой функции производственной системы / О. М. Пигнастый // Доповіді Національної академії наук України. - Київ: Видавничий дім "Академперіодика". - 2007. - №5. - С. 50-55.

UDC 519.8::620.9

Increasing an expected power of the wind farm with diversification in non-dominated power curves of the used wind turbines

V. V. Romanuke

Odessa National A. S. Popov Academy of Telecommunications, Ukraine

A problem of increasing an expected power of the wind farm is considered. Instead of a wind farm consisting of identical wind turbines, a wind farm is suggested to be built of a definite number of wind turbines having different power curves. A prime condition for those wind turbines is that their power curves should not dominate each other. Another constraint, inserted by default, is that total nominal powers of such wind farm and the farm of identical turbines must be equal. The gain increases when approaching to a cut-in speed. It increases slower for greater number of wind turbines.

Key words: *renewable energy, wind turbine, wind farm.*

Розглядається задача збільшення очікуваної потужності вітрової електростанції. Замість вітрової станції, що складається з однакових вітрогенераторів, пропонується будувати станцію з визначеного числа вітрогенераторів, котрі мають різні криві потужності. Вихідною умовою для цих генераторів є те, щоб їх криві потужності не домінували одна одну. Іншим обмеженням за умовчанням є те, що загальні номінальні потужності такої електростанції та станції з однакових генераторів мають бути рівними. Виграш збільшується з наближенням до швидкості включення. Він збільшується повільніше для більшого числа вітрогенераторів.

Ключові слова: *відновлювана енергетика, вітрогенератор, вітрова електростанція.*

Рассматривается задача увеличения ожидаемой мощности ветровой электростанции. Вместо ветровой станции, что состоит из одинаковых ветрогенераторов, предлагается строить станцию из определённого числа генераторов, которые обладают различными кривыми мощности. Исходным условием для этих генераторов является то, что их кривые мощности не должны доминировать друг друга. Другим ограничением по умолчанию является то, что общие номинальные мощности такой электростанции и станции из одинаковых генераторов должны быть равными. Выигрыш увеличивается при приближении к скорости включения. Он увеличивается медленнее для большего числа ветрогенераторов.

Ключевые слова: *возобновляемая энергия, ветрогенератор, ветряная электростанция.*

A problem of increasing wind power efficiency (WPE) for large grid systems

Wind power is a very good renewable energy source. Its effects on the environment are far less problematic than those of nonrenewable power sources. Wind farms (WFs) consist of many individual wind turbines (WTs) which are connected to the electric power transmission network [1, 2]. A challenge is the full integration into power grids (the combined transmission and distribution networks). Small WFs can feed just some energy into the grid or provide electric power to isolated off-grid locations [1, 3, 4]. Larger grid areas require not only larger WFs and more powerful WTs, but also higher stability of the generated electric power [4, 5]. It is hard to increase WPE for large grid systems considerably due to a lot of technical and economical obstacles [1, 2, 6].

Methods of meeting wind statistics in order to increase WPE

Some works (e. g., [5, 7]) suggest to improve WPE by a kind of diversification either in construction of WT or in deploying the WF. A novel pitch control method

that integrates a non-standard extended Kalman-filter-based estimator is proposed in [5], wherein a cascade control structure is developed for the pitch controller, which receives the speed reference from a power-speed scheduler. Nonlinearities in the WT are removed with using the information provided by the estimator. The controller provides a consistent optimal performance under the global-power regulation while avoiding wind measurement. This method seems effective, if disregard costs of its implementation. The paper [7] proposes a micro-siting strategy that optimizes the layout of different farm areas synchronously for the largest profit of the whole WF. However, the produced energy of the WF designed by the proposed strategy decreases in the first few years, and only after that a substantial increment is added to the total profit of the whole project. But both the works [5, 7] did not take into account the wind instability and statistical peculiarities. Wind statistics remind a narrow-band filter that cuts off a lot of potential power [6, 7]. Especially, when the wind speed (WS) is about 1.5 to 3.5 m/s. The question is what if we use a series of different WTs whose power curves (PCs) are shifted against each other? This might distribute PCs for light, moderate, and strong winds so that breezes, which are closer to the average WS (AWS) and below the rated-out WS (of a PC), could be used more effectively (see a sketch of this idea in Fig. 1).

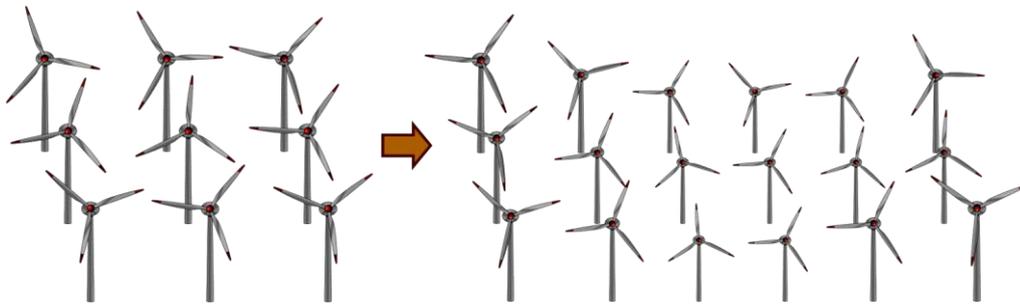


Fig. 1. An idea of converting a WF of individual WTs into a WF of different WTs

Goal of the article and tasks to be accomplished

Under suggestion of that a series of WTs with different PCs might produce greater power expectation than that of identical WTs, the goal is to determine conditions for the series. A constraint is an amount of nominal power (NP) of those WTs should be equal to a given identical WTs' power. To reach the goal, there are the following tasks:

1. To formulate a problem of maximizing the power from WTs with different PCs.
2. To check a hypothesis on possibility of increasing WPE for a WF of real WTs.

Maximization task and check of a hypothesis on possibility of increasing WPE

Let $w(k, s)$ be a PC of a k -th WT, where s is WS in meters per second, and $w(k, s)$ is in megawatts (MW). Suppose that a series of K WTs exists, so $k = \overline{1, K}$. NP of the k -th WT is

$$\bar{w}(k) = \max_{s \in (0; \infty)} w(k, s)$$

and it is held for a range of WS [6, 8]. First, a one WT is selected as that, which would

be used for building a WF. Let it be the k_0 -th WT, $k_0 \in \{\overline{1, K}\}$. This WT is supposed to have good characteristics of its PC by high NP. The WF is of N such WTs. The expected power output (EPO) of this WF is

$$r(k_0) = N \cdot \int_0^{\infty} p(s)w(k_0, s)ds \tag{1}$$

by the wind statistics given as the Weibull probability density function (PDF) [6]

$$p(s) = (b/a) \cdot (s/a)^{b-1} \cdot e^{-(s/a)^b} \tag{2}$$

with the shape parameter b and the scale parameter a (see in Fig. 2 an example of such a PDF superimposed on PCs). For further consideration, the WF whose EPO is (1) is called a mono-WF (Fig. 1, at the left). Let take a subset of L WTs with indices $I = \{k_l\}_{l=1}^L \subset \{\overline{1, K}\}$. Suppose we are building a WF including L those WTs, where the k_l -th WT is installed in $n(k_l)$ places, $n(k_l) \in \mathbb{N}$. EPO of such WF (multi-WF) is

$$r(L, I, \{n(k_l)\}_{l=1}^L) = \sum_{l=1}^L n(k_l) \int_0^{\infty} p(s)w(k_l, s)ds. \tag{3}$$

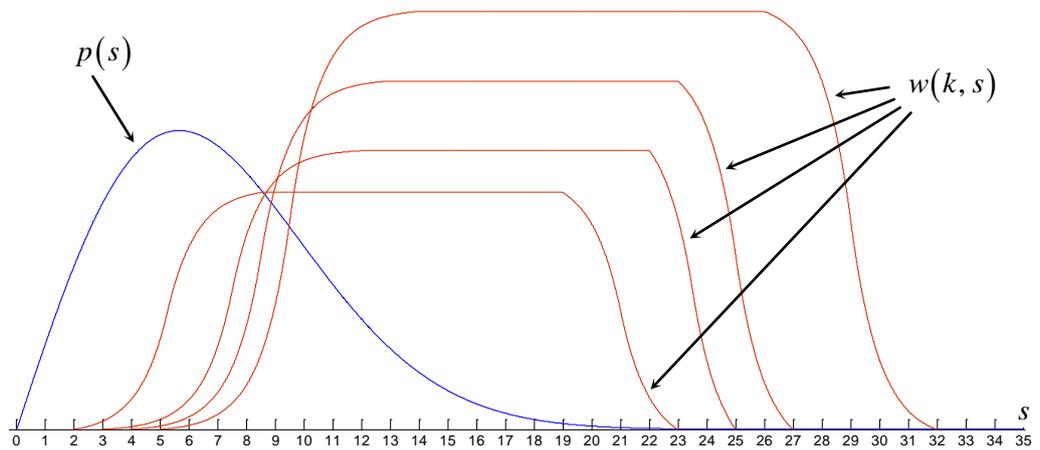


Fig. 2. An example of wind statistics superimposed on PCs (some potential power is cut off)

If those NPs and numbers of places for installing WTs are such that

$$N \cdot \bar{w}(k_0) = \sum_{l=1}^L n(k_l) \bar{w}(k_l) \text{ by } k_0 \in I, \tag{4}$$

then we might maximize EPO (3) under condition (4) for new combinations of indices I and natural numbers $\{n(k_l)\}_{l=1}^L$ along with varying natural numbers N and L :

$$r_* = r(L_*, I_*, \{n_*(k_l)\}_{l=1}^{L_*}) = \max_{N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, L=2, \overline{K}, \{k_l\}_{l=1}^L \subset \{\overline{1, K}\}, n(k_l) \in \mathbb{N}} \left\{ r(L, I, \{n(k_l)\}_{l=1}^L) \right\}. \tag{5}$$

The hypothesis is whether inequality

$$r(k_0) < r\left(L_*, I_*, \{n_*(k_l)\}_{l=1}^{L_*}\right) \text{ by } M_* = \sum_{l=1}^{L_*} n_*(k_l) \quad (6)$$

is possible at practice, wherein costs of mono-WF and of multi-WF are presumed to be approximately the same due to (4). This hypothesis can be checked via solving the problem (5) with integer selection routine (ISR). By ISR, some limit \hat{N} for N is given (which may be considered as an ultimate total cost could be paid for installing a WF), and some L is assigned. Indices in the set I are fixed as well. Then, starting off $N=2$, we select only those numbers $\{n(k_l)\}_{l=1}^L$ that satisfy (4). Thus, EPOs (3) and (1) are calculated and compared until $N > \hat{N}$. The selected numbers $\{n(k_l)\}_{l=1}^L$ giving the greatest EPO (3) are stored for those number L and set I . Deeper, L and I are changed as well. In the end, some L_* , I_* , $\{n_*(k_l)\}_{l=1}^{L_*}$, giving the greatest EPO (3) are caught. Surely, if L and I are known beforehand, the search by ISR becomes simpler.

The hypothesis on possibility of increasing WPE is going to be checked over five known and widespread WTs: Enercon E82 E2 (2.3 MW), Gamesa G128-4.5 MW, Nordex N90/2500 (2.5 MW), REpower MM82 (2 MW), Vestas V112-3.0 MW (their characteristics are downloadable from [8]). For further, enumerate them from #1 to #5, respectively. Obviously, the Gamesa WT is the most powerful, but it is the most expensive. Besides, locating big WTs is another problem (see in Fig. 3, for instance, how Enercon WTs are located). Thus, consider the rest four WTs, among which we take Vestas WT as that single k_0 -th WT: $k_0=5$, $L=4$, $I=\{1, 3, 4, 5\}$. PCs of these WTs are plotted after real measurements [8]. Wind statistics may be taken optionally, without tethering to a region. In Northern Europe and most other locations around the world the shape parameter value is approximately $b=2$, so PDF (2) becomes a Rayleigh distribution PDF. The scale parameter is determined by an AWS [6, 7].



Fig. 3. Location of Enercon WTs having a storm control feature that smoothes PCs at the right

For $a=7$ corresponding to AWS 6.2 m/s, a mono-WF of 10 Vestas WT's gives EPO $r(5)=6.6658$ MW, whereas taking just single Vestas WT, 5 Enercon WT's, 3 Nordex WT's, and 4 REpower WT's gives 7.6276 MW. Here, this is EPO that solves the task (5) and confirms inequality (6), wherein

$$n_*(1)=5, n_*(3)=3, n_*(4)=4, n_*(5)=1.$$

The gain of such multi-WF is obvious: $r_*/r(k_0)=1.1443$, that is more than 14 %. If $\hat{N}=20$ then a mono-WF of 19 Vestas WT's loses versus a multi-WF by

$$n_*(1)=5, n_*(3)=1, n_*(4)=20, n_*(5)=1,$$

giving 14.6888 MW, for almost 16 %. When AWS is lower (4 m/s for $a=4.51$), the gain increases (Fig. 4): it is 27 % by the same mono-WF and numbers n_* 's, although the multi-WF's EPO now is 4.5554 MW (Fig. 5). For AWS closer to cut-in speeds of many WT's, this tendency is kept: the gain increases while the multi-WF's EPO drops. For $a=3.95$ AWS is 3.5 m/s, and the gain is 30.1 % versus 2.9562 MW of the multi-WF's EPO by the same integers. If \hat{N} is increased, the gain slowly increases, though multi-WF's EPO increases faster. An inconvenient gap in the multi-WF is that numbers $\{n_*(k_l)\}_{l=1}^{L_*} \setminus \{k_0\}$ are likely to be far from a quasi-uniform distribution (e. g., some types of WT's are installed just once). This may cause extra costs for installing and maintaining multi-WF. But imposing new constraints on task (5) is not desirable because it badly narrows the solution. Once task (5) is solved, we can only try to decrease L_* and "smooth" numbers n_* 's.

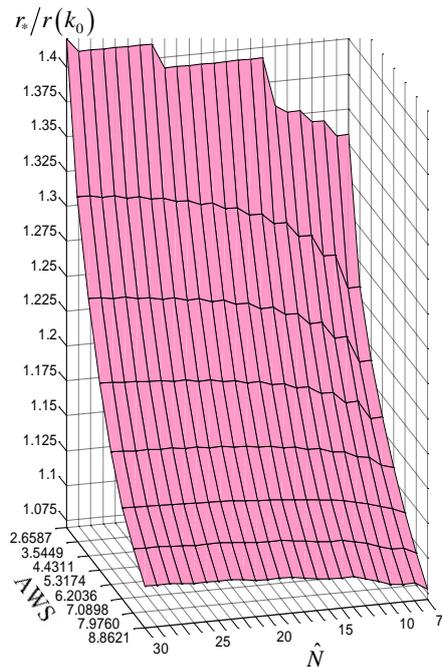


Fig. 4. The gain of using multi-WFs

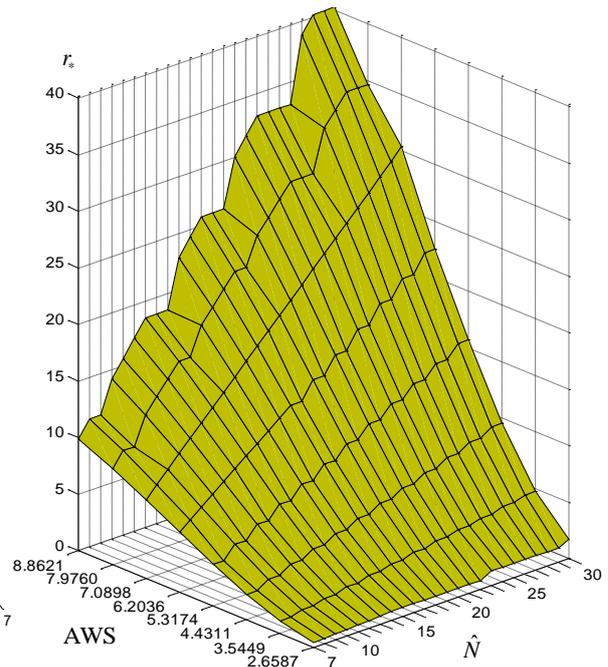


Fig. 5. The best EPO (in MW) of multi-WFs

Certainly, a condition exists when (6) is impossible and task (5) is useless. Thus, if

$$\exists I_K = \{k_l^{**}\}_{l=1}^K = \{1, K\} \text{ such that } w(k_l^{**}, s) > w(k_{l+1}^{**}, s) \quad \forall l = 1, K-1 \quad (7)$$

then that all does not make a sense, because the k_1^{**} -th WT can be taken, and then $r(k_1^{**}) > r(I)$ for any subset I . Hence, the maximization task (5) may make a sense when inequalities (7) are impossible for any indices' order I_K . The best case is when the bunch of those PCs $\{w(k, s)\}_{k=1}^K$ is a Pareto-like functional set (PLFS), i. e. inequality $w(k, s) > w(j, s)$ is false for any indices $k = \overline{1, K}$ and $j = \overline{1, K}$ by $k \neq j$.

Conclusion and an outlook for further research of increasing WPE

A prime condition for a series of different WTs that, as a multi-WF, might produce a greater EPO than a mono-WF by (4), is determined as a requirement of that there should not be dominating PCs making (7). Another condition is the bunch of those PCs within the multi-WF should remind a PLFS. Constraint (4) is inserted by default, although that equality does not necessarily imply equality of mono- and multi-WF costs. An approximate cost equality (ACE) is believed to be when number M_* is not too much greater than N , as installation of a WT is expensive itself regardless its NP.

The greater gain is for smaller areas. According to the last three examples, although we need to buy and install 27 WTs for the multi-WF, their cost is comparable to the higher-NP 19 WTs of the mono-WF. In a further research, there could be an additional constraint to task (5) — to fulfill an ACE between the mono- and multi-WF costs, along with (4). Then, however, constraint (4) can be relaxed in order to get closer to a cost equality. In that way, we will have the cost equality opposed to NPs' equality.

REFERENCES

1. Wind Energy Engineering. A Handbook for Onshore and Offshore Wind Turbines / Ed. by T. M. Letcher. – Elsevier : Academic Press, 2017. — 622 p.
2. Offshore wind farms : technologies, design and operation / Ed. by C. Ng, L. Ran. – London, UK : Woodhead Publishing, 2016. – 654 p.
3. <https://windeurope.org/about-wind/statistics/global>
4. <https://www.gerenewableenergy.com/wind-energy/turbines>
5. Song D. A novel wind speed estimator-integrated pitch control method for wind turbines with global-power regulation / D. Song, J. Yang, M. Su, A. Liu, Z. Cai, Y. Liu, Y. H. Joo // Energy. – 2017. – Vol. 138. – P. 816 – 830.
6. <http://www.wind-power-program.com>
7. Song M. Micro-siting optimization of a wind farm built in multiple phases / M. Song, Y. Wen, B. Duan, J. Wang, Q. Gong // Energy. – 2017. – Vol. 137. – P. 95 – 103.
8. https://www.thewindpower.net/data/samples/Sample_Power_curves.xls
9. Breeze P. Wind Power Generation. – Elsevier : Academic Press, 2015. – 104 p.

CONTENTS

<p>▪ D. G. Boguto, V. I. Volynets, P. K. Nikolyuk, P. P. Nikolyuk</p> <p>Automated management system of vehicle management between the city</p>	<p>5</p>
<p>▪ I. P. Bokov, N. S. Bondarenko, E. A. Strelnikova</p> <p>Investigation of the behavior of internal force factors in transversely isotropic plates under the action of local loads</p>	<p>13</p>
<p>▪ N. N. Kizilova, O. M. Solovjova</p> <p>Analysis of discrete rheological models of bioactive soft and fluid materials</p>	<p>21</p>
<p>▪ D. V. Krutchenko, E. A. Strelnikova, Yu. S. Shuvalova</p> <p>Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs</p>	<p>31</p>
<p>▪ V. M. Kuklin, A. V. Pryimak, V. V. Yanovsky</p> <p>The memory and the evolution of populations</p>	<p>38</p>
<p>▪ O. M. Pihnastyi, V. D. Khodusov</p> <p>Diffusion description of the production process</p>	<p>61</p>
<p>▪ V. V. Romanuke</p> <p>Increasing an expected power of the wind farm with diversification in non-dominated power curves of the used wind turbines</p>	<p>74</p>
<p>CONTENTS</p>	<p>80</p>

**ВІСНИК ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
імені В.Н. Каразіна**

**Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»**

Випуски даної серії розповсюджуються у академічних та наукових колах України та за її межами з метою оперативного висвітлення досліджень у таких актуальних галузях: математичне та комп'ютерне моделювання, обчислювальний експеримент, теорія і прикладні методи обробки інформації, захист інформації, програмно-апаратні системи інформаційного або управляючого призначення, застосування математичного моделювання та системного аналізу у високих, наукоємних технологіях, враховуючи технології створення програмної продукції. Приймаються роботи, що відносяться до напрямів фізико-математичних і технічних наук (бажаний об'єм 6-18 сторінок). Усі рукописи рецензуються.

Примітка. Протягом 2017-18 рр. редакційна колегія при інших рівних умовах надаватиме перевагу роботам, що представлені англійською мовою, якщо стаття отримала схвалення при рецензуванні.

Офіційний сайт <http://mia.univer.kharkov.ua>

<http://periodicals.karazin.ua/mia>

Сайт редколегії <http://www.dsmpm.org.ua/bulletin.html>

**ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В.Н. Каразина**

**Серія «Математическое моделирование. Информационные
технологии. Автоматизированные системы управления»**

Випуски данной серии распространяются в академических и научных кругах Украины и за ее пределами с целью оперативного освещения исследований в следующих актуальных областях: математическое и компьютерное моделирование, вычислительный эксперимент, теория и прикладные методы обработки информации, защита информации, программно-аппаратные системы информационного или управляющего назначения, приложения математического моделирования и системного анализа в высоких, наукоёмких технологиях, включая технологии создания программной продукции. Принимаются работы, относящиеся к направлениям физико-математических и технических наук (желательный объем 6-18 страниц). Все рукописи рецензируются.

Примечание. На протяжении 2017-18 гг. редакционная коллегия при прочих равных условиях будет отдавать предпочтение работам, представленным на английском языке, если статья получила одобрение при рецензировании.

Официальный сайт <http://mia.univer.kharkov.ua>

<http://periodicals.karazin.ua/mia>

Сайт редколлегии <http://www.dsmpm.org.ua/bulletin.html>

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 35

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О. О. Афанасьєва

Підписано до друку 30.11.2017 р.
Формат 70×108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. – 6,4.
Обл.– вид. арк. – 5,5.
Наклад 100 пр. Зам. №

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна.
Видавництво

Надруковано: ХНУ імені В. Н. Каразіна
61022 м. Харків, майдан Свободи, 4,
тел.: 362-01-52
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09