

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна



Серія

«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 34

Харків
2017

ISSN 2304–6201

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна



Серія

«Математичне моделювання.

Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління»

Випуск 34

Серія заснована 2003 р.

Харків
2017

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних та технічних наук (Наказ МОН України № 1328 від 21.12.2015 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 14 від 27.10.2017 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),
д.ф.-м.н., академік НАН України, проф.,
ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора),
д.т.н., проф. ФМІ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т. (заст. гол. редактора),
д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені
В.Н. Каразіна

Споров О.Є. (відповідальний секретар),
к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ
імені Б.І. Веркіна НАН України

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН
України, проф., фізико-енергетичний ф-т
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ
імені В. Н. Каразіна

Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-
енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний
технічний університет "ХПІ"

Стрельникова О.О., д.т.н., проф. Ін-т
проблем машинобудування НАН України

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра
прикладної інформатики, університет імені
Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat.
habil. Professor of Technical Informatics and
Computer Systems, Institute of Informatics,
Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of
computer science, Dep. of C. S., University of
Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6,
ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

© Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна, оформлення, 2017

ЗМІСТ

▪ В. А. Балабанов, Н. Н. Кизилова	5
Математическое моделирование и 3D визуализация бинарных деревьев с минимумом самопересечений	
▪ Л. С. Глоба, Н. А. Гвоздецька, В. А. Прокопець, О. В. Степурін	18
Енергоєфективний підхід до розподілу задач у серверному кластері	
▪ V. I. Gnitko, Yu. V. Naumenko, E. A. Strelnikova	29
Discrete singularities method in problems of liquid vibrations in spherical tanks	
Г. Н. Доля, Е. С. Литвинова	38
Моделирование свойств световозвращения решеткой тетраэдрических ретрорефлекторов	
▪ Р. П. Москаленко, В. В. Науменко, Е. А. Стрельникова	44
Метод дискретных особенностей в задаче определения частот и форм колебаний лопастей гидротурбин	
▪ V. V. Romanuke	52
Determination of probabilistic type intervals for constructing antagonistic game kernel defined on a hyperparallelepiped enclosed within the unit hypercube	
▪ М. В. Сидоров	58
Побудова двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійної задачі Нав'є	
▪ Ю. К. Чернышев	67
Распределение разностей между соседними простыми числами	
▪ CONTENTS	75

Шановні читачі та автори цього збірника!

Редакція вживає заходів до перетворення нашого періодичного видання в науковий журнал, широко представлений у міжнародних наукометричних базах даних.

Першою, хоча далеко не останньою вимогою до журналу є забезпечення 4-х повноцінних і своєчасно підготовлених випусків на рік. Чекаємо на Вашу активну участь у формуванні та постійній підтримці відповідного портфелю редакції. Будь ласка, надсилайте Ваші власні статті та рекомендації до опублікування робіт Ваших колег та учнів!

Важливу роль у здійсненні наших планів відіграватиме зростання відсотку статей, що публікуються у збірнику англійською мовою. Надсилайте без вагань такі роботи до нашої редакції, якщо маєте впевненість не тільки в якості наукових результатів, але й готові до співробітництва в напрямку доведення тексту до якості, відповідної стандартам міжнародних видань. Зі свого боку редакційна колегія забезпечуватиме відповідну якість редагування всіх англійських анотацій та статей, написаних англійською мовою, виходячи протягом наступного року з того, що вони повинні складати до третини загального обсягу статей, які публікуватимуться.

На завершення нагадуємо, що фахові публікації у нашому збірнику повинні відповідати паспорту однієї з наступних спеціальностей (за номенклатурою, за якою зараз поки що діють спеціалізовані ради з захисту дисертацій):

з *фізико-математичних наук* – спеціальності:

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи,

01.02.05 – механіка рідини, газу та плазми,

01.02.04 – механіка деформованого твердого тіла,

01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем;

з *технічних наук* - спеціальності:

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи,

01.02.05 – механіка рідини, газу та плазми,

05.13.05 – комп'ютерні системи та компоненти,

05.13.06 – інформаційні технології,

05.13.21 – системи захисту інформації,

05.13.07 – автоматизація процесів керування.

Просимо з розумінням поставитися до деяких ускладнень підготовки анотацій до статей. Справа в тому, що різні наукометричні бази вимагають різних форм і показників. Починаючи з 1 випуску 2018 року буде змінено вимоги до підготовки рукописів, головним чином у частині підготовки анотацій.

З повагою, **Редакційна колегія.**

УДК 004.02:532.542+612.1

Математическое моделирование и 3D визуализация бинарных деревьев с минимумом самопересечений

В. А. Балабанов, Н. Н. Кизилова

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В работе предложен новый алгоритм построения трехмерного бинарного дерева, состоящего из трубок кругового сечения и заполняющего пространство, в случае, когда длины, диаметры, углы ветвления и число поколений изначально заданы. Разработана практическая реализация алгоритма, обеспечивающая построение трехмерной модели с минимумом самопересечений, образованной тройниками трубок, расположенных в одной плоскости. Алгоритм адаптирован для моделирования систем кровеносных сосудов, выполнения расчетов гемодинамических параметров и их визуализации на модели.

Ключевые слова: бинарное дерево; деревья, заполняющие пространство; артериальные русла; гемодинамика; трехмерная визуализация.

В роботі запропоновано новий алгоритм побудови тривимірного бінарного дерева, що складається з трубок кругового перерізу і заповнює простір у випадку, коли довжини, діаметри, кути розгалуження і число поколінь є заданими. Розроблена практична реалізація алгоритму, який забезпечує побудову тривимірної моделі з мінімумом самоперетинів, яка складається з трійників трубок, що розташовані в одній площині. Алгоритм адаптовано для моделювання систем кровоносних судин, проведення чисельних розрахунків гемодинамічних параметрів і їх візуалізації на моделі.

Ключові слова: бінарне дерево; дерева, що заповнюють простір; артеріальні русла; гемодинаміка; тривимірна візуалізація.

In the paper a new algorithm for constructing a 3d space-filling binary tree composed of circular cross section tubes, for the case when the lengths, the diameters, the branching angles and the number of generations are set initially, has been proposed. A practical implementation of the algorithm for 3d model, with a minimal number of intersections, formed by the trifurcated tubes within a single plane has been presented. The algorithm is adapted for simulating vascular systems, computing hemodynamic parameters and their visualizing on the model.

Key words: binary tree; space-filling trees; arterial vasculatures; 3d visualization.

1. Общая формулировка задачи и её актуальность

Бинарные деревья служат моделями многих ветвящихся систем, имеющих в природе: артериальные и венозные сосудистые русла, бронхиальное дерево и дыхательные пути, трофические системы простейших, корни и кроны растений, речные русла и другие проточные системы, обеспечивающие доставку/отток вещества к/от распределенной в пространстве системе стоков/источников – клеток, тканей и органов растений и животных [1]. Аналогичные транспортные системы используются в технических тепло- и массообменных системах. При определенных соотношениях между геометрическими параметрами бинарные деревья представляют собой оптимальные трубопроводы [2], обеспечивающие минимальные расходы энергии $W \rightarrow \min$ на транспортировку, что свойственно оптимальным системам [1,3]. Одним из важнейших свойств таких систем является отсутствие самопересечений. Для планарных деревьев это условие

можно выполнить, задавая законы самоподобия областей [2,4,5] или bottom-to-top алгоритм [6], основанный на закономерностях ветвлений артериальных русел [3-5]. Для 3d систем возможный top-to-bottom алгоритм генерации бинарных деревьев без самопересечений был предложен в [7].

В настоящей работе приведена программная реализация предложенного алгоритма и проанализированы результаты ее работы на моделях артериальных русел разных внутренних органов. Разработанный программный комплекс полезен для количественного анализа распределения давлений и скоростей кровотока во внутренних органах, диагностики патологий, планирования терапевтического или хирургического лечения. При этом максимально информативной визуальной моделью можно считать трехмерное изображение, для построения которого может использоваться анаглифная стереоскопическая графика [8].

2. Закономерности строения сосудистых русел

За более чем столетнюю историю детальных исследований геометрии сосудистых русел человека и животных было показано наличие определенных зависимостей между диаметрами, углами разветвлений (Рис.1) и длинами сегментов сосудов в виде закона Мюррея

$$d_0^\gamma = d_1^\gamma + d_2^\gamma, \quad (1)$$

где d_0 – диаметр родительского сосуда, $d_{1,2}$ – диаметры двух дочерних сосудов, $\gamma \approx 3$ ($\gamma = 2.55 - 3.02$ и $\gamma = 2.76 - 3.02$ для артериальных и венозных русел, $\gamma = 2.61 - 2.91$ для бронхиального дерева) [5].

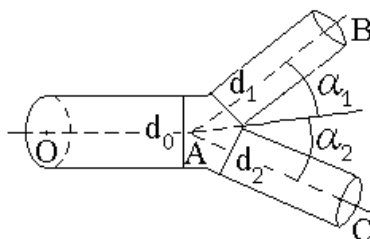


Рис. 1. Схема бифуркации проводящих элементов в бинарном дереве

Для углов ветвления $\alpha_{1,2}$ выполняются соотношения Розена [9]:

$$\alpha_1 = \arccos \left(\frac{(1 + \xi^3)^{\frac{4}{3}} + 1 - \xi^4}{2(1 + \xi^3)^{\frac{2}{3}}} \right), \quad \alpha_2 = \arccos \left(\frac{(1 + \xi^3)^{\frac{4}{3}} \xi^4 - 1}{2\xi^2(1 + \xi^3)^{\frac{2}{3}}} \right) \quad (2)$$

где $\xi = \min \{d_1, d_2\} / \max \{d_1, d_2\}$ – коэффициент асимметрии бифуркации.

Для длин сегментов выполняются соотношения (аллометрический принцип) [10]:

$$L_j = ad_j^\beta \quad (3)$$

где $\alpha \in [2.6; 7.59]$, $\beta \in [0.84; 1.16]$ (в среднем $\beta \sim 1$). Для внутриорганных артериальных русел имеются также аппроксимации зависимостей $L_j(d_j)$ полиномами и др. функциями, специфичными для различных органов [11].

На соответствующих математических моделях было показано, что соотношения (1)–(2) являются необходимыми условиями локальной [4] и глобальной [2] оптимальности бинарного дерева в смысле критерия $W \rightarrow \min$.

Строение систем дальнего транспорта жидкости у растений [5], проточных трофических систем у простейших [3] и других транспортных систем в живой и неживой природе также основано на соотношениях (1)–(3). Подробный обзор существующих алгоритмов построения и визуализации бинарных деревьев приведен в [6].

3. Описание алгоритма top-to-bottom

В связи с тем, что аналоги, рассмотренные выше, не удовлетворяют поставленной задаче, необходимо разработать метод 3d визуализации бинарного дерева, удовлетворяющего ограничениям (1)–(3) и критерию минимально возможного числа самопересечений.

Определение 1. Назовем бифуркацией плоскость, содержащую три узла (рис.1): родительский (А) и два дочерних (В,С), а также две дочерних трубки (АС и ВС), соединяющих родительский узел с дочерними, при этом углы ветвления в бифуркации соответствуют условию (2).

Определение 2. Назовем осью бифуркации прямую, которая является осью симметрии родительской трубки ОА (рис.1).

Определение 3. Назовем пересечением двух бифуркаций число, характеризующее ситуацию, при которой расстояние h_{ij} между осями трубок из первой и второй бифуркаций удовлетворяет условию $h_{ij} \leq (d_i + d_j) / 2$, причем одна бифуркация не является непосредственным потомком другой. Таким образом, число пересечений двух бифуркаций может принимать целочисленные значения $n_{ij} = 0 \div 4$. Числом пересечений в дереве будем называть сумму пересечений всех входящих в дерево бифуркаций.

Определение 4. Назовем поворотом дерева поворот плоскости каждой бифуркации в дереве на некоторый заданный угол вокруг ее оси. Поворот дерева является основой предложенного в работе метода и позволяет практически полностью устранить пересечения между ребрами в 2d модели дерева (Рис. 2).

Результатирующее количество пересечений, а значит и эффективность метода, зависит только от угла поворота, что обуславливает важность его правильного определения. Данный метод предполагает два варианта определения: ручную и автоматически посредством перебора всех углов поворота в заданном интервале с заданным шагом. При определении угла вручную и при использовании данного метода для визуализации деревьев, описывающих один класс деревьев, например, артериальные русла, для увеличения эффективности работы метода можно использовать статистический анализ корреляции угла поворота и числа

пересечений с целью поиска оптимального угла поворота, минимизирующего число пересечений.

Следует отметить, что число пересечений в полученной после поворота дерева 3d модели прямо пропорционально числу пересечений в исходной 2d модели. Таким образом, минимизируя число исходных пересечений, можно уменьшить их количество после поворота дерева. В связи с тем, что в 2d модели отсутствует информация о том, какой из узлов-потомков в каждой бифуркации «левый», а какой «правый», мы можем менять их местами, сохраняя отношение наследования и не нарушая планарную геометрическую модель бифуркации. С учетом этого возникает задача подготовки 2d модели к повороту дерева путем минимизации числа исходных пересечений. Для этого в модель вводится понятие расположения дочерних элементов в бифуркации относительно ее оси, которая может быть «левой» и «правой».

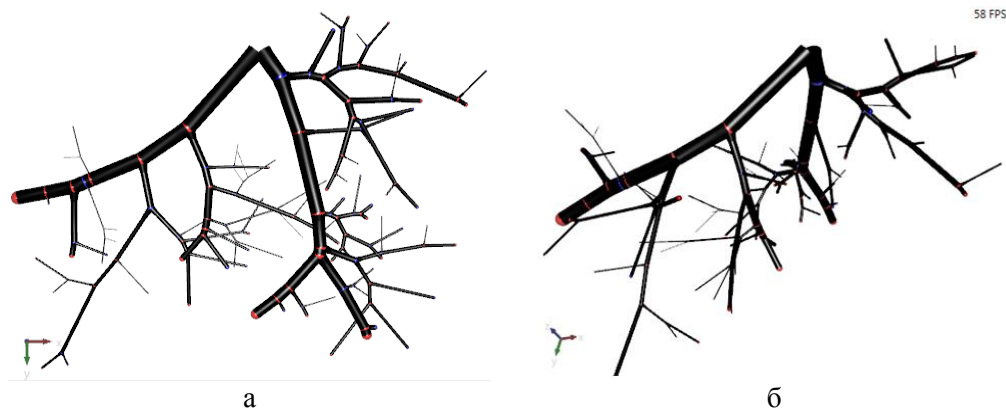


Рис. 2. Дерево до (а) и после (б) поворота

Определение 5. Назовем суммарной длиной ребер элемента сумму длин всех его потомков, включая его собственную длину.

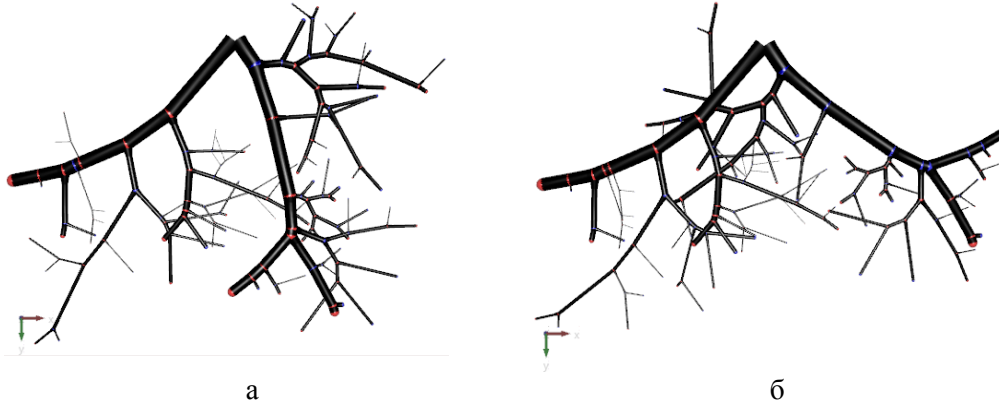
Определение 6. Назовем центральной осью дерева ось исходного родительского элемента этого дерева.

Определение 7. Назовем распределением бинарного дерева изменение расположения с «левого» на «правое» между потомками двух дочерних элементов данного узла так, чтобы дочерний элемент с меньшей суммарной длиной ребер находился ближе к оси дерева, а элемент большей суммарной длиной ребер – дальше. Распределение бинарного дерева позволяет вынести поддерева с большим числом и/или большими длинами ребер на периферию дерева, что увеличивает занимаемую им площадь, соответственно уменьшая число начальных пересечений (Рис. 3).

Предложенный подход не может гарантировать отсутствие самопересечений при 3d визуализации бинарного дерева, но позволяет существенно снизить их число.

Определение 8. Назовем уменьшением пересечения бифуркаций процесс, при котором из пары пересекающихся бифуркаций выбирается одна с меньшей суммарной длиной потомков, и поворачивается на некоторый угол, который уменьшает число пересечений этих бифуркаций. Процесс обхода дерева от

корня к листьям с уменьшением пересечения для каждой бифуркации назовем *уменьшением числа оставшихся пересечений*. При этом необходимо найти для каждого уменьшения такой угол поворота, при котором пересечение будет минимальным. Этот угол ищется путем перебора возможных значений угла в заданном промежутке с заданным шагом.



а б
Рис. 3. Дерево до (а) и после (б) распределения

Предложенный алгоритм схематически представлен на блок-схеме (Рис. 4).

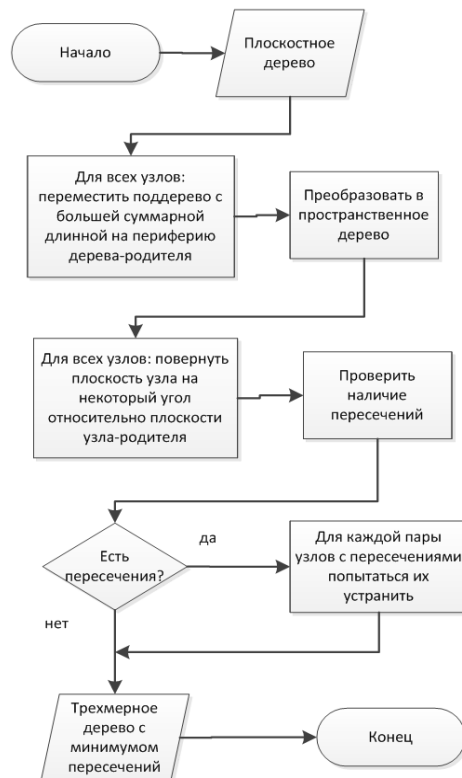


Рис. 4. Блок-схема: основные этапы алгоритма

Для оценки числа пересечений между элементами вычисления расстояния между отрезками прямых в пространстве используется алгоритм Эберли [15].

4. Программная реализация

В соответствии с предложенным алгоритмом для заданного бинарного дерева трубок сначала вызывается функция распределения, затем функция наилучшего поворота дерева, и в завершении – функция уменьшения числа оставшихся пересечений. При неудовлетворительном результате последняя функция может быть вызвана повторно, вплоть до полного устранения пересечений. Стоимость работы алгоритма в худшем случае при наличии m итераций поворота узлов дерева и k итераций локального поворота бифуркаций эквивалентна

$$\theta(n) + m(\theta(n^2) + \theta(n)) + k(\theta(n^3) - \theta(n^2)) = k\theta(n^3) + (m - k)\theta(n^2) + (m + 1)\theta(n)$$

и является кубической функцией от количества узлов.

Результатом работы алгоритма является построенная в пространстве геометрическая модель бинарного дерева трубок с минимальным числом самопересечений. Данный метод позволяет по заданному числу $2d$ бифуркаций построить $3d$ модель бинарного дерева трубок с минимальным количеством пересечений, сохраняя заданные диаметра, длины и углы ветвления. Метод оперирует со входной информацией, заданной в виде набора значений длин и диаметров каждой трубки в модели, плоскими углами ветвления в бифуркациях трубок, а также отношением родитель-потомок для каждого узла.

5. Адаптация алгоритма к использованию на классе артериальных русел

5.1. Общее описание. Гипотеза об оптимальном угле поворота

Описанный алгоритм построения бинарных деревьев без самопересечений был использован в разработанной программной системе $3d$ визуализации артериальных русел по результатам морфометрических измерений на препаратах [11] или сгенерированных самоподобных деревьев [12]. Из описания алгоритма следует, что эффективность его работы сильно зависит от выбранного начального угла поворота; при этом малое изменение значения угла приводит к большому изменению эффективности алгоритма, что обосновывает необходимость его правильного определения. Для этого можно использовать метод полного перебора углов поворота в заданном интервале с заданным шагом, выбирая угол, при котором количество пересечений будет минимальным. Однако вычислительная сложность этого процесса для одного шага является квадратичной функцией и эквивалентна $\theta(n^3) - \theta(n^2)$, а для m шагов ее сложность будет $m(\theta(n^3) - \theta(n^2))$. Даже учитывая вычислительные возможности современных рабочих станций, работа этого метода на больших объемах входных данных $\sim 10^9$ будет занимать продолжительное время. Поэтому для уменьшения времени работы алгоритма в ходе вычислительного эксперимента была выдвинута и обоснована гипотеза о существовании фиксированного угла поворота, оптимального для бинарных деревьев из класса артериальных систем, которая состоит в существовании оптимального

фиксированного значения угла поворота, при котором число пересечений для выбранного класса после поворота на этот угол близко к минимально возможному из всех углов поворота $\alpha \in [0; 180^\circ]$.

Для описания гипотезы в формализованном виде примем следующие обозначения:

A – некоторый класс систем (артериальные русла);

B – конкретный экземпляр бинарного дерева из класса A;

$f(B, \alpha)$ – функция зависимости числа пересечений после поворота B на заданный угол α ;

$\min(B)$ – минимально возможное число пересечений после поворота B на угол α .

Тогда принятую гипотезу можно записать в следующей форме:

$$\forall A : \exists \alpha : (\forall B \in A) \left(f(B, \alpha) \rightarrow \min_{\beta} f(B, \beta) \right)$$

Подтверждение этой гипотезы позволит заменить поиск наилучшего угла поворота с помощью перебора значений углов в заданном интервале с заданным шагом на фиксированное значение угла поворота, при котором число пересечений приближается к таковому при наилучшем угле поворота.

5.2. Проверка гипотезы

В целях проверки выдвинутая гипотеза была сужена на класс артериальных русел, после чего были собраны и проанализированы результаты зависимости числа пересечений от угла поворота для набора данных, полученных в ходе детальных измерений на коррозионных пластиковых препаратах внутриорганых артериальных русел человека [11]. Всего были исследованы по 6 образцов артериальных систем 6 внутренних органов: головного мозга, сердца, мышц, селезенки, почек и толстого кишечника. Соответственно, суммарное число обработанных органов равно 36, а число артерий в каждом из них составило порядка 10^3 . Для каждого дерева, представляющего орган, была построена таблица соответствия угла поворота дерева и результирующего числа самопересечений после поворота. При этом суммарное количество трубок сегментов сосудов по всем файлам составило порядка 28000.

5.3. Входные данные

Артериальное русло каждого органа было представлено в виде связного графа, вершины которого соответствовали узлам бифуркаций артерий, а ребра – артериальным сегментам. Каждому узлу был присвоен уникальный идентификатор, после чего регистрировались длины сосудистых сегментов между узлами ветвлений и диаметр сосудистого сегмента в его срединном сечении (Рис. 5).

Полное дерево артериального русла каждого органа было представлено в текстовом файле данных специального формата в кодировке Windows ANSI. Каждая строка файла данных содержит информацию о сосудистом сегменте, представленную идентификаторами начала и конца сегмента, значениями его диаметра и длины (в мм). Для хранения информации об идентификаторах сегмента используются целые числа, а о длине и диаметре – десятичные дроби с запятой или точкой в качестве разделителя целой и дробной частей. Точность

измерений значений длин и диаметров составила 0.05 мм, измерения проводились на сосудистых сегментах вплоть до самых малых представленных на слепке с $d > 0.1$ мм. Числа в строке разделены символом пробела (0x20 в кодировке ANSI) либо символом абзаца (0x09 в кодировке ANSI), конец каждой строки представлен последовательностью символов CR LF (0x0D 0x0A в кодировке ANSI)

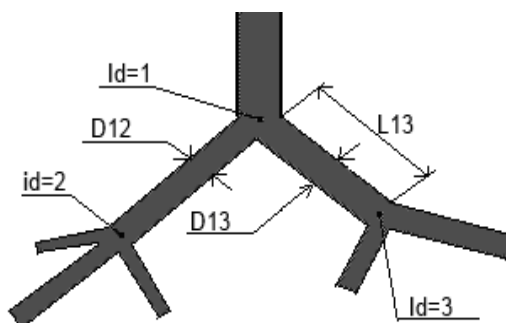


Рис. 5. Схема бифуркации: $Id=1$, $Id=2$, $Id=3$ – узлы последовательных бифуркаций, $D12$, $D13$ – диаметры дочерних сегментов, $L13$ – длина сегмента

5.4. Процесс генерации сводной таблицы

Список полных путей к файлам данных передавался в разработанный в рамках данной научной работы программный комплекс пространственной визуализации. Для каждого файла из переданного списка проводилась загрузка информации в программу, построение трехмерного дерева по загруженным данным и его распределение. После распределения осуществлялся полный перебор углов поворота в промежутке $\alpha \in]0; 180[$ с шагом в один градус. Для каждой итерации перебора углов исходное дерево поворачивалось на текущий угол, после чего подсчитывалось суммарное число пересечений в дереве после поворота. Текущий угол и подсчитанное число пересечений запоминались. После обработки всех файлов результаты заносились в сводную таблицу. В ней каждому файлу данных соответствовало два столбца, в первом находился номер итерации, равный углу поворота дерева в градусах, а во втором – суммарное количество пересечений в дереве после его поворота на угол, указанный в первом столбце. Полученная сводная таблица с количеством столбцов, равным удвоенному количеству входных файлов, и количеством строк, равным количеству итераций, дополнялась информацией о радианной мере угла поворота, именами обработанных файлов и временем, затраченным на обработку (в миллисекундах), после чего экспортировалась в таблицу Microsoft Office Excel 1997-2003 (Рис. 6).

Далее в полученной таблице вычислялось суммарное число пересечений N_1 для каждого угла поворота α в каждой модели одного из 6 типов внутриорганных русел; суммарное число пересечений N_2 по данному органу для фиксированного α ; среднее число пересечений N_3 на орган для заданного α .

	A	B	C	D	E	F	G
1	angle, balancir	Heart20.txt		Heart22.txt		Heart25.txt	
2	0	0	863	0	323	0	154
3	0,017453293	1	56	1	28	1	23
4	0,034906585	2	2	2	9	2	7
5	0,052359878	3	2	3	2	3	0
6	0,06981317	4	1	4	2	4	1
7	0,087266463	5	2	5	3	5	1
8	0,104719755	6	0	6	0	6	1
9	0,122173048	7	0	7	0	7	0
10	0,13962634	8	1	8	3	8	0
11	0,157079633	9	3	9	5	9	0
12	0,174532925	10	2	10	6	10	0
13	0,191986218	11	7	11	7	11	0
14	0,20943951	12	2	12	4	12	1

Рис. 6. Образец сводной таблицы, сгенерированной по результатам работы разработанного ПО

5.5. Выбор оптимального угла поворота дерева

Рассчитанные значения $N_{1,3}$ далее анализировались с целью нахождения угла α , при котором N_3 минимально, максимальное количество пересечений по органам также минимально, а 3d геометрия построенного дерева близка к геометрии исходного артериального русла органа.

Для описания в формальном виде примем следующие обозначения:

$A_i, i = 1, \dots, 6$ – классы органов (мозг, печень, и т.д., по 6 экземпляров каждого класса);

$A_i^k, i = 1, \dots, 6, k = 1, \dots, 6$ – k -й экземпляр i -го класса органа.

Тогда имеют место следующие формулы:

– суммарное количество пересечений для экземпляров класса A_i при угле поворота α :

$$N_1 = \sum_{k=1}^6 f(A_i^k, \alpha);$$

– суммарное количество пересечений для всех органов при угле поворота α :

$$N_2 = \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 f(A_i^k, \alpha);$$

– среднее количество пересечений $N_3 = N_2 / 6^2$ для всех органов при угле поворота α ;

– минимальное среднее количество пересечений для всех органов при угле поворота в интервале $[0; \pi)$:

$$N_{\min} = \min_{\alpha \in [0; \pi)} N_3 \quad (4)$$

– максимальное количество пересечений на орган при угле поворота α :

$$N_{\max} = \max_{i=1..6, k=1..6} f(A_i^k, \alpha) \quad (5)$$

Тогда наша цель заключается в одновременной минимизации N_{\min} и N_{\max} .

В процессе анализа исходных данных было установлено, что для любого органа можно найти такой угол поворота дерева α , при котором число

пересечений после поворота не больше единицы. Было выявлено, что только для одного из 36 исследованных файлов данных $N_{\min} \neq 0$. Рассчитанные зависимости N_3 и N_{\max} от угла поворота для одного из файлов данных представлены на Рис.7. Глобальный минимум функции $N_3(\alpha)=1$ достигается при $\alpha=165$ град. (= -15 град.). При $\alpha=54$ град. суммарное число пересечений после поворота во всех 36 проанализированных органах было минимальным и составило $N_2=6$, а $N_{\max}=2$, причем для многих файлов данных $N_1=0$ (Табл. 1).

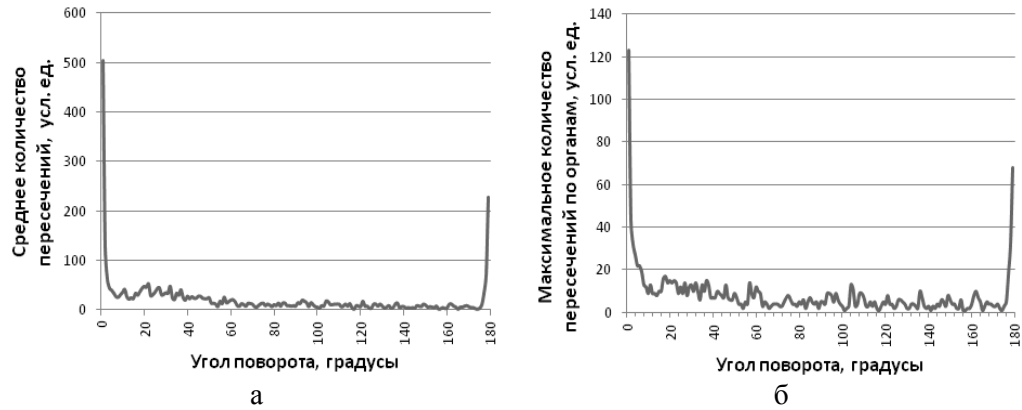


Рис. 7. Зависимости N_3 (а) и N_{\max} (б) от угла поворота дерева α для одного из файлов данных

Табл. 1. Значения N_1 для разных экземпляров артериальных русел мозга и печени при повороте дерева на угол $\alpha = 54^\circ$

имя файла	N_1	имя файла	N_1	имя файла	N_1
Brain15	0	Heart20	1	Kidney20	0
Brain18	0	Heart22	0	Kidney25	0
Brain20	0	Heart25	0	Kidney30	0
Brain22	0	Heart27	2	Kidney35	0
Brain25	0	Heart30	1	Kidney37	0
Brain30	0	Heart32	2	Kidney40	0
Brains	0	Hearts	6	Kidney	0
Liver30	0	Muscle16	0	Spleen30	0
Liver35	0	Muscle18	0	Spleen32	0
Liver40	0	Muscle20	0	Spleen35	0
Liver45	0	Muscle21	0	Spleen40	0
Liver50	0	Muscle28	0	Spleen45	0
Liver55	0	Muscle30	0	Spleen50	0
Liver	0	Muscle	0	Spleen	0
Summary	6	Mid	0,167		
Min	0	Max	2		

5.6. Программный комплекс для 3D визуализации и численных расчетов гемодинамических параметров артериальных систем

На основании сформулированных целей и задач, обзор существующих аналогов и результаты численного эксперимента по предложенному алгоритму были сформулированы следующие требования к разрабатываемому программному продукту:

1. Импорт данных, имеющих специальную структуру, из файлов формата Microsoft Office Excel 1997-2003, Microsoft Office Excel 2007-2010 и текстовых файлов;
2. Построение по импортированным данным 3d визуализации с широкими возможностями просмотра, включающими в себя свободное манипулирование положением камеры с помощью мыши;
3. Наличие автоматического режима расчета пространственной геометрической модели бинарного дерева с минимумом числа самопересечений;
4. Автоматический режим расчета, экспорта и визуализации гемодинамической информации на 3d модели с помощью градиентной карты;
5. Режим анаглифного стереоизображения для просмотра 3d модели с помощью очков с красным и синим светофильтрами;
6. Использование современной аппаратной базы рабочих станций для обеспечения минимальных временных затрат на расчеты и максимального быстродействия при визуализации.

Основные этапы жизненного цикла программы:

- 1) Импорт данных. Данные импортируются из текстового файла специального формата, или из файла таблицы Microsoft Office Excel, имеющего схожую структуру.
- 2) Настройка визуального представления данных. Состоит из выбора режима визуализации гемодинамики:
 - отображение карты величин давлений;
 - отображение карты объемного тока крови;
 - отображение карты сопротивлений сегментов кровотоку;
 - отсутствие визуализации гемодинамики.Также в этот этап включена настройка качества, или детализации представления и настройка цветовой схемы.
- 3) Поворот дерева. Этап преобразования плоскостной модели дерева в пространственную модель с минимумом самопересечений, представлен тремя режимами:
 - поворот на заданный угол, при котором пользователь самостоятельно вводит численное значение угла поворота;
 - поворот на фиксированный угол, оптимальный для класса артериальных русел;
 - автоматический расчет оптимального угла поворота. В этом режиме угол рассчитывается итеративно с использованием разработанного алгоритма.

Каждая итерация обрабатывается в отдельном потоке, число работающих одновременно потоков равно числу процессоров.

- 4) Устранение оставшихся пересечений. При необходимости, пользователь может запустить последний этап алгоритма для минимизации оставшихся пересечений.
- 5) Анаглифный режим. После построения визуального представления модели пользователь может переключиться в анаглифный стереорежим, предназначенный для просмотра стереоизображения с помощью очков с красным и синим светофильтрами.
- 6) Экспорт гемодинамических параметров. Программа поддерживает автоматический расчет параметров построенной сердечно-сосудистой системы и экспорт их в файл формата таблицы Microsoft Office Excel.

Результат построения и отображения 3D модели коронарного дерева с наложенной на него рассчитанной градиентной картой давлений представлен на рис.8.



Рис. 8. Основное окно визуализатора. Коронарное дерево. Градиентная карта давлений

7. Выводы

В работе рассмотрена важная научно-прикладная задача восстановления 3D структуры бинарных деревьев с минимальным количеством самопересечений.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

- 1) разработан метод автоматического расчета пространственной геометрии бинарного дерева трубок с минимальным количеством самопересечений при наличии набора заданных значений числа трубок, отношений родитель-потомок, длин, диаметров и углов ветвления в бифуркациях для каждой трубки;
- 2) на основе разработанного метода формально описан соответствующий алгоритм и проведена оценка вычислительной стоимости;

- 3) описанный алгоритм адаптирован на класс артериальных русел, после чего была сформулирована и доказана гипотеза о существовании единого для всего класса оптимального угла поворота дерева, а также проведена оценка эффективности работы алгоритма;
- 4) разработана практическая реализация алгоритма, эффективно использующая современную аппаратную базу для 3d и анаглифной визуализации артериальных русел как бинарных деревьев;
- 5) реализован автоматический расчет и визуализация с помощью градиентной карты гемодинамической информации на 3d модели, соответствующей артериальной системе внутреннего органа человека.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bejan A. Shape and Structure: from Engineering to Nature, Cambridge Univ. Press. – 2000. – 210p.
2. Черноусько Ф.Л. Оптимальная структура ветвящихся трубопроводов // Прикл. матем. мех. – 1977. – т.41, №2. – С.376–383.
3. La Barbera M. Principles of design of fluid transport systems in zoology // Science. – 1990. – v.249. – P.992–1000.
4. Образцов И.Ф. Оптимальные биомеханические системы. – М., 1989. – 196с.
5. Kizilova N.N. Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics. // Lecture Notes in Computer Sci. – 2004. – v.3044. – P.476–485.
6. Балабанов В. О, Кизилова Н. М. Математичне моделювання артеріальних систем як бінарних дерев, які заповнюють об'єм простору. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. Спецвипуск. – 2015. – С.27-32.
7. Балабанов В.А., Кизилова Н.Н. Новый алгоритм построения оптимальных транспортных систем, заполняющих заданную область. // Механика. Исследования и инновации. Вып. 9. Гомель, 2016. – С.18-26.
8. Бубнов Р.В., Киселева О.Г. Стереоскопическая визуализация биомедицинских объектов. // Биомед. инженерия. – 2011. – № 2. – С.54–57.
9. Розен Р. Принцип оптимальности в биологии. М.:Мир, 1968. – 212с.
10. Dawson C.A., Krenz G.S., Karau K.L., et al Structure-Function Relationships in the Pulmonary Arterial Tree. // J. Appl. Physiol. – 1999. – v.86. – P.569–583.
11. Зенин О.К. Артериальная система человека в цифрах и формулах. Донецк: "Донбасс", – 2002. – 196с.
12. Bondarenko M.Ye., Kizilova N.N. Pulse wave reflections in asymmetrically branching arterial networks. // Russian J.Biomech. – 2002. – N4. - P.52-62.

УДК 004.56

Енергоефективний підхід до розподілу задач у серверному кластері

Л. С. Глоба, Н. А. Гвоздецька, В. А. Прокопець, О. В. Степурін
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна

У статті описано підхід щодо підвищення енергоефективності обчислень у центрі обробки даних (ЦОД) шляхом застосування енергоефективного розподілу задач в рамках серверного кластера як складової частини інформаційної інфраструктури ЦОД. Запропонований підхід відрізняється одночасним врахуванням параметрів енергоефективності та продуктивності при розподілі задач, на його основі розроблено алгоритм підвищення енергоефективності обчислень, суть якого полягає у попередній індивідуальній атестації серверного кластера. Перевірено ефективність підходу експериментально та шляхом імітаційного моделювання. Проведено аналіз отриманих результатів, та визначено, що підхід проявляє більшу ефективність – до 49,09% за параметром продуктивності та до 9,04% за параметром енергоефективності – для великих гетерогенних кластерів.

Ключові слова: енергоефективність, продуктивність, серверний кластер, розподіл задач, обробка даних.

В статье описан подход к повышению энергоэффективности вычислений в центре обработки данных (ЦОД) путем применения энергоэффективного распределения задач в рамках серверного кластера как составляющей части информационной инфраструктуры ЦОД. Предложенный подход отличается одновременным учетом параметров энергоэффективности и продуктивности при распределении задач, а на его базе разработан алгоритм повышения энергоэффективности вычислений, суть которого состоит в предварительной индивидуальной аттестации серверного кластера. Эффективность подхода проверена экспериментально и путем имитационного моделирования. Проведен анализ полученных результатов и определено, что подход дает большую эффективность – до 49,09% по параметру продуктивности и до 9,04% по параметру энергоэффективности – для больших гетерогенных кластеров.

Ключевые слова: энергоэффективность, продуктивность, серверный кластер, распределение задач, обработка данных.

The approach to increasing energy efficiency of the data center computing by using energy efficient tasks scheduling within the server cluster as an integral part of the data center infrastructure has been described in the paper. The proposed approach is characterized by taking into account both energy efficiency and performance parameters. The approach is implemented in the task scheduling algorithm. The main idea of the algorithm is to carry out the preliminary attestation of each cluster nodes individually. The efficiency of the proposed approach has been tested by the simulation process and proved experimentally. The approach has shown a gain of up to 49,09% by the performance criteria and up to 9,04% by the energy efficiency criteria for big heterogeneous clusters.

Keywords: energy efficiency, performance, server cluster, task distribution, data processing.

1. Проблематика підвищення енергоефективності обчислень у ЦОД

У сучасному світі обсяги даних, що потребують обробки, стрімко зростають. Це пов'язано зокрема із розвитком сучасних технологій таких як Інтернет речей, Хмарні обчислення, технології віртуальної реальності, тощо. Разом із обсягами

даних зростають і вимоги до швидкості їх обробки. Це спричиняє зростання загального енергоспоживання центрів обробки даних. Частка потужності, що споживається центрами обробки даних, становить близько 1,5% всього обсягу енергоспоживання у світі [1] і постійно зростає. Це робить актуальною проблему підвищення енергоефективності обчислень в центрах обробки даних.

Існує низка методів підвищення енергоефективності обчислень, які можна поділити на статичні та динамічні, такі, що застосовуються на рівні апаратного та програмного забезпечення, а також класифікувати за рівнем їх застосування в системі (на рівні операційної системи, на рівні віртуалізації, на рівні архітектури процесора, тощо) (Рис. 1) [2].

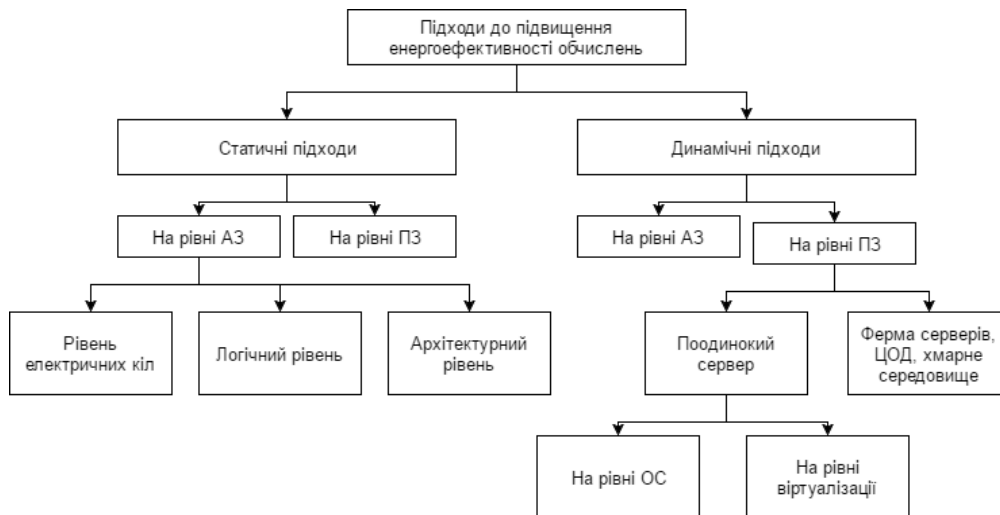


Рис. 1. Класифікація існуючих підходів щодо підвищення енергоефективності обчислень

Підходи на рівні апаратного забезпечення зазвичай мають високу ефективність, проте потребують значних затрат на розробку та побудову додаткових апаратних модулів підвищення енергоефективності та є досить складними у застосуванні. Динамічні підходи, у порівнянні із статичними, дозволяють отримати суттєвіший ефект з огляду на їх спроможність до адаптації до конкретних умов проведення обчислень [2]. Тому, запропонований у статті підхід відноситься до динамічних підходів, що застосовуються на рівні програмного забезпечення у рамках серверного кластера як інформаційної одиниці інфраструктури ЦОД.

В ході аналізу існуючих підходів до підвищення енергоефективності обчислень у ЦОД, що описані зокрема у роботах [3], [4], [5], [6], [7], було виявлено, що жоден з відомих підходів не мінімізує споживання енергії без зменшення при цьому продуктивності роботи обчислювальної системи. Запропонований у даній статті підхід має на меті одночасне підвищення енергоефективності обчислень та збереження рівня продуктивності обробки даних.

2. Запропонований підхід щодо підвищення енергоефективності обчислень у ЦОД

Постановка задачі: розглянемо серверний кластер, як одиницю інформаційної інфраструктури центру обробки даних, що являє собою групу обчислювальних машин (вузлів кластера), з'єднаних високопродуктивними каналами зв'язку. Нехай серверний кластер містить N вузлів та має топологію зірки, тобто містить один центральний вузол та $N-1$ підлеглих вузлів. Кожен j -й вузол кластера характеризується параметрами: k_{core_j} - кількість обчислювальних ядер процесора, V_j - об'єм оперативної пам'яті, $flops_j$ - продуктивність вузла у кількості елементарних операцій за секунду.

Нова задача $task_i$ приходиться до системи в момент t . Кожна задача для свого успішного виконання потребує певних значень параметрів $V_{req}, k_{core_j}, t_{max}$, тобто доступного обсягу оперативної пам'яті, доступної кількості вільних обчислювальних ядер та характеризується максимальним часом, за який вона має бути оброблена. набір вимог щодо необхідних значень параметрів $V_{req}, k_{core_j}, t_{max}$ у поєднанні з самою задачею $task_i$ визначає роботу, яка буде виконуватись на певному обчислювальному вузлі.

$$\{V_{req}, k_{core_{req}}, t_{max}\} \Rightarrow job_i \rightarrow task_i, \{V_{req}, k_{core_{req}}, t_{max}\} \quad (1)$$

Необхідно:

Розробити підхід до розподілу задач, такий що $P_{\Sigma} \rightarrow \min t_{task_i} \rightarrow \min$,

де P_{Σ} - сумарна потужність спожита усім кластером,

t_{Σ} - час виконання набору із m задач.

При виконанні умов розподілу: $V_{N_j} \geq V_{req}, k_{core_{n_j}} \geq k_{core_{req}}, t_{task_i} < t_{max}$

Запропонований підхід:

Запропонований підхід до енергоефективного розподілу задач складається з двох основних етапів:

1. Етап попередньої атестації вузлів серверного кластера;
2. Етап динамічного розподілу задач.

Етап попередньої атестації проводиться у серверному кластері періодично, при його налаштуванні. Цей етап передбачає попереднє визначення залежностей енергоспоживання кожного вузла кластера від його завантаженості у вигляді функцій:

$$P = f(CPU),$$

де P – потужність, що споживається вузлом кластера,

CPU – завантаженість центрального процесора вузла у відсотках.

Функції $P = f(CPU)$ визначаються індивідуально для кожного вузла кластера у табличному вигляді (як результат вимірювання потужності у ряді дискретних точок, що відповідають певним значенням завантаженості), після чого отримані функції представляються у вигляді поліномів ступеню n в результаті

інтерполяції їх поліномами канонічного вигляду. Коефіцієнти отриманих поліномів та інші параметри вузлів кластера, такі як кількість ядер процесора, об'єм оперативної пам'яті та продуктивність вузла у кількості елементарних операцій за секунду (величина *FLOPS*), формують описи вузлів, які міститимуться на центральному вузлі кластера із планувальником задач (брокером).

Індивідуальне визначення функцій $P = f(CPU)$ для кожного вузла обробки та їх подальше використання у процесі розподілу задач є ключовою особливістю запропонованого підходу.

Другий етап передбачає вирішення оптимізаційної задачі за критеріями енергоефективності та продуктивності обробки задач з використанням індивідуально визначених енергетичних моделей вузлів (тобто функцій $P = f(CPU)$). Результатом цього процесу є розміщення кожної поточної задачі для обробки на сервер із оптимальними параметрами. Процес розподілу задач є динамічним, оскільки для вибору вузла обробки враховуються поточні характеристики системи обробки (завантаженість вузлів, доступні ресурси, енергоефективність).

В загальному випадку запропонований підхід можна представити у вигляді алгоритму, у якому Крок 0 відповідає за виконання 1 етапу підходу, Кроки 1-7 – за виконання другого етапу.

Алгоритм:

Крок 0. Попередня атестація кластера

В процесі початкового налаштування кластера та його підготовки до роботи необхідно виміряти залежності споживаної кожним сервером електроенергії від завантаженості його центрального вузла обробки. Ця залежність може бути виміряна із використанням навантажувального тесту та представлена у вигляді функції:

$$P = f(CPU)$$

де *CPU* – *Central Processor Utilization* – завантаженість центрального процесора (вузла обробки).

Функції початково представлені у табличному вигляді. У даній статті запропоновано проводити подальшу інтерполяцію функцій $P = f(CPU)$ поліномами ступеня *n* для отримання аналітичного вигляду функцій.

Після визначення залежностей $P = f(CPU)$ згідно запропонованого підходу відбувається формування опису кожного вузла. До опису входять такі дані:

- Функція енергоспоживання сервера від *CPU*;
- Загальна продуктивність сервера;
- Кількість ядер центрального процесора сервера;
- Об'єм оперативної пам'яті сервера.

Крок 1. Оцінка стану кластера в момент τ_{k-1}

У момент часу τ нова задача (робота) job_i надходить до кластера. У момент часу τ_{k-1} (попередня оцінка) необхідно виміряти такі параметри кожного вузла N_i

$$\Delta V_{j_{avail}} = V_j - V_{j_{used}} \text{ - доступний об'єм оперативної пам'яті } j\text{-го вузла,}$$

де $V_{j_{used}}$ – оперативна пам'ять, зайнята на момент часу τ_{k-1} ;

$$\Delta k_{core_{j_{avail}}} = K_{core_j} - \Delta k_{core_{j_{used}}} \text{ - кількість ядер процесора, доступних на}$$

вузлі N_j ,

де $k_{core_{j_{used}}}$ - кількість ядер вузла N_j , що зайняті іншими задачами на момент часу τ_{k-1} ;

$$P_{\Sigma} = \sum_j P_j | \tau_{k-1} \text{ - сумарна потужність, що споживається кластером в}$$

момент часу τ_{k-1} .

Крок 2. Виключення із розгляду всіх вузлів, які не підходять для обробки job_i (за відсутністю ресурсів для обробки)

Якщо доступний об'єм оперативної пам'яті менший за той, що вимагається для виконання задачі $task_i$ ($\Delta V_{j_{avail}} \leq V_{req_i}$) вузол N_j кластера виключається із розгляду доступних для обробки даної задачі вузлів. Аналогічно, якщо кількість незадіяних у роботі ядер вузла N_j менша, ніж цього вимагає задача $task_i$ вузол N_j виключається із розгляду доступних для обробки даної задачі вузлів.

У результаті таких операцій отримуємо масив $\{N_{avail_j}\}$ теоретично доступних для розміщення задачі $task_i$ вузлів, такий що $\{N_{avail_j}\} \subset \{N_j\}$.

Крок 3. Знаходження масиву значень сумарного енергоспоживання кластера $P_{\Sigma} = P_{\Sigma_j}$ при розміщенні задачі $task_i$ на кожен з вузлів N_j

Для кожного j -го вузла обчислювального кластера залежність потужності споживання від завантаженості процесора є відомою функцією: $P_j = f_j(CPU_j)$. Цю залежність було виміряно і збережено при проведенні попередньої атестації кластера.

Припустивши, що робота job_i була призначена для виконання вузлу N_j , та знаючи залежність $P_i = f_j(CPU_j)$ для цього вузла, обчислимо теоретичне значення сумарної спожитої кластером потужності у разі розміщення задачі на обробку на j -й вузол:

$$P_{\Sigma_j} | \tau_k \ \& \ N_j = P_{\Sigma} | \tau_{k-1} + \Delta P_j | \tau_k$$

Проведемо такі обчислення для кожного вузла кластера.

Таким чином, маємо масив значень $P_{\Sigma} = \sum P_{\Sigma_j}$ отриманий шляхом

теоретичного розміщення роботи job_i на кожний з вузлів N_j

Крок 4. Сортування масиву вузлів N_j за теоретичним вкладом у загальну споживану потужність: $N_{P_{avail}} = \{N_{flops_{i_{max}}}, \dots, N_{flops_{i_{min}}}\}$ $N_P = \{N_{P_j}\}$

Проведемо сортування масиву доступних для розміщення задачі $task_i$ вузлів N_{avail_i} за їх теоретично обрахованим на кроці 3 вкладом у загальне сумарне енергоспоживання всього обчислювального кластера $\Delta P_j | \tau_k$. Нехай сортування буде також проведене в порядку спадання. В результаті отримаємо масив $N_{P_{avail}}$:

$$N_{P_{avail}} = \{N_{P_{j_{max}}}, \dots, N_{P_{j_{min}}}\}$$

Крок 5. Сортування масиву вузлів, що лишилися, за продуктивністю (*FLOPS*)

Проведемо сортування масиву доступних для розміщення задачі $task_i$ вузлів N_{avail_i} за їх продуктивністю $flops_i$ у порядку спадання.

В результаті отримаємо масив $N_{flops_{avail}}$:

$$N_{flops_{avail}} = \{N_{flops_{i_{max}}}, \dots, N_{flops_{i_{min}}}\}$$

Крок 6. Призначення вагових коефіцієнтів (балів) за продуктивність та енергоефективність кожному вузлу

В залежності від позиції вузла із номером j у сортованому масиві $N_{flops_{avail}}$ та $N_{P_{avail}}$, він отримує два вагових коефіцієнта (дві оцінки): $mark_P$ і $mark_{flops}$ відповідно, при чому $mark_P$, $mark_{flops} = \frac{1}{n}$ де n – кількість вузлів у кластері. $mark_P$ рівна позиції j -го вузла у сортованому масиві $N_{P_{avail}}$, $mark_{flops}$ – позиції цього вузла у сортованому масиві $N_{flops_{avail}}$ відповідно.

Крок 7. Розміщення задачі $task_i$ на вузол із найбільшим сумарним ваговим коефіцієнтом

Сумарна оцінка кожного вузла:

$$mark_{\Sigma_i} = mark_{flops_i} + mark_{P_i}$$

Вузол, для якого $mark_{\Sigma_i} = \max_j mark_{\Sigma_k}$ вибирається для здійснення обробки завдання $task_i$

Приклад роботи алгоритму при виборі із 4 підходящих вузлів кластера за їх сумарними оцінками зображено на Рис. 2.

З рис.2 видно, що найбільший рейтинг за продуктивністю має *Node 3*, а найефективнішим вузлом за енергоефективністю є *Node 2*.

При підрахуванні найвищого рейтингу за комплексом показників визначено, що найкращим є вузол *Node 2*, тому що має найбільший загальний рейтинг. Виходячи з цього цей вузол було визначено як цільовий вузол, куди брокером буде направлено задачу (роботу) job_i для її виконання.

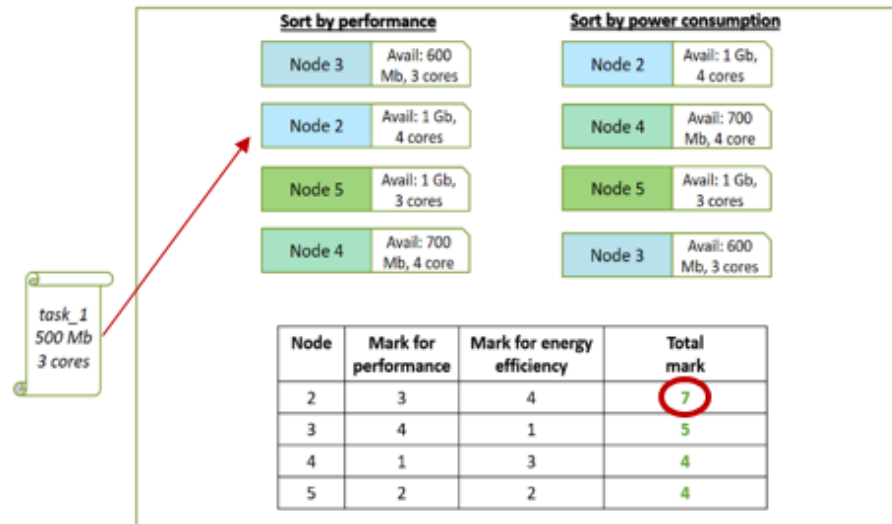


Рис. 2. Приклад вибору вузла за сумою балів за продуктивність та енергоефективність обчислень

3. Експериментальна перевірка ефективності запропонованого підходу

Для перевірки енергоефективності запропонованого підходу було проведено натурний експеримент, в ході якого було апробовано роботу підходу у невеликому кластері Дрезденського технічного університету.

Для проведення експерименту було використано 5 машин (серверів). Серед них 3 належали до одного типу (мали подібні фізичні характеристики), а 2 інші – до другого типу. Сервери було об'єднано у кластер із топологією зірки (Рис. 3).

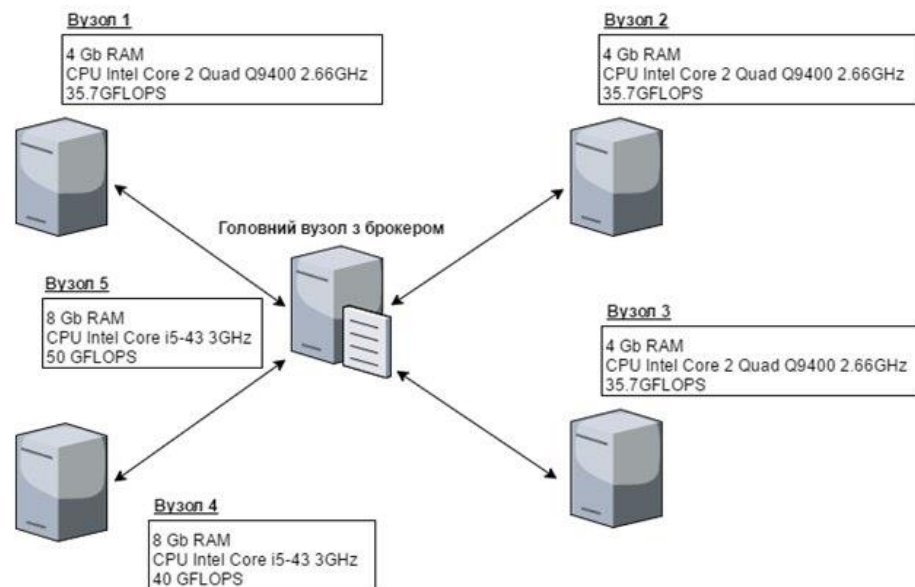


Рис. 3. Топологія серверного кластера, використаного при експериментальній перевірці запропонованого підходу

На центральний вузол кластера було завантажено код планувальника задач, що працює за запропонованим алгоритмом і реалізований на мові програмування C.

Для моделювання реальної роботи серверного кластера було обрано різні за характеристиками задачі, при цьому задачі були об'єднані у пакет задач.

Для зняття характеристик $P_j = f_j(CPU_j)$ кожного вузла, було використано цифровий мультиметр Yokogawa WT210, що здатний вимірювати струм, напругу та миттєву потужність безпосередньо між джерелом живлення та навантаженням. Також, для зняття характеристик $P_j = f_j(CPU_j)$ було використано навантажувальний тест (stress-test) [8].

Зняття характеристик проводилось шляхом послідовного підключення мультиметра у коло живлення кожного сервера. Вимірювання потужності споживання проводилось для 0, 25, 50, 75 та 100% завантаженості CPU. Визначені експериментально характеристики зображені на Рис. 4а у графічному та на Рис. 4б у аналітичному представленні внаслідок інтерполяції їх поліномами 3 ступеня.

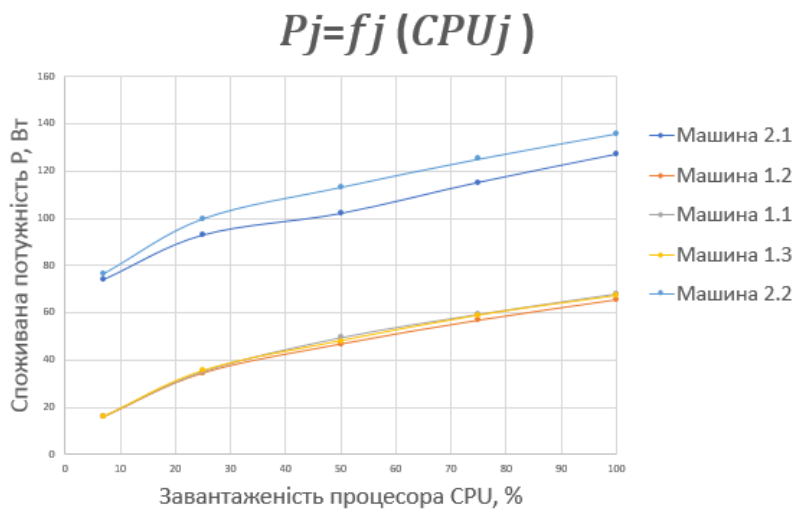


Рис. 4а. Експериментально визначені залежності енергоспоживання вузлів кластера від їх завантаженості (у графічному вигляді)

$$P(CPU) = 0.0001 * x^3 - 0.0139 * x^2 + 1.0443 * x^1 + 15.86 * x^0$$

$$P(CPU) = -0.0018 * x^2 + 0.8275 * x^1 + 16.13 * x^0$$

$$P(CPU) = 0.0001 * x^3 - 0.0107 * x^2 + 0.9536 * x^1 + 15.86 * x^0$$

$$P(CPU) = 0.0005 * x^3 - 0.0328 * x^2 + 1.3271 * x^1 + 73.91 * x^0$$

$$P(CPU) = 0.0002 * x^3 - 0.0212 * x^2 + 1.3389 * x^1 + 76.33 * x^0$$

Рис. 4б. Експериментально визначені залежності енергоспоживання вузлів кластера від їх завантаженості (у аналітичному вигляді)

Для перевірки ефективності підходу його було порівняно із широко застосовуваним у реальних кластерах алгоритм планування Round Robin [9]. Порівняння було здійснено за двома критеріями – середній час обробки задачі (як критерій продуктивності обчислень) та критерій енергоефективності обчислень у вигляді сумарної спожитої кластером потужності за час обчислень. Результати експерименту наведено у Табл.1.

Табл. 1. Результати експериментального порівняння запропонованого підходу із широко використовуваним підходом Round Robin

Алгоритм	Середній час обробки задачі, с	Сумарна спожита потужність, Вт	Виграш у порівнянні із Round Robin, %	
			За часом	За спожитою енергією
Round Robin	14.835	376.88	-	-
Запропонований підхід	13.324	365.8	10,2%	3%

Отриманий виграш є незначним. Виграш за параметром енергоефективності майже підпадає під класифікацію статистичної помилки (при визначеній похибці у 2%). Такий незначний виграш пояснюється тим, що вузли серверного кластера, використаного в експерименті, за своїми характеристиками належали до 2 груп, при чому в рамках груп характеристики були однаковими.

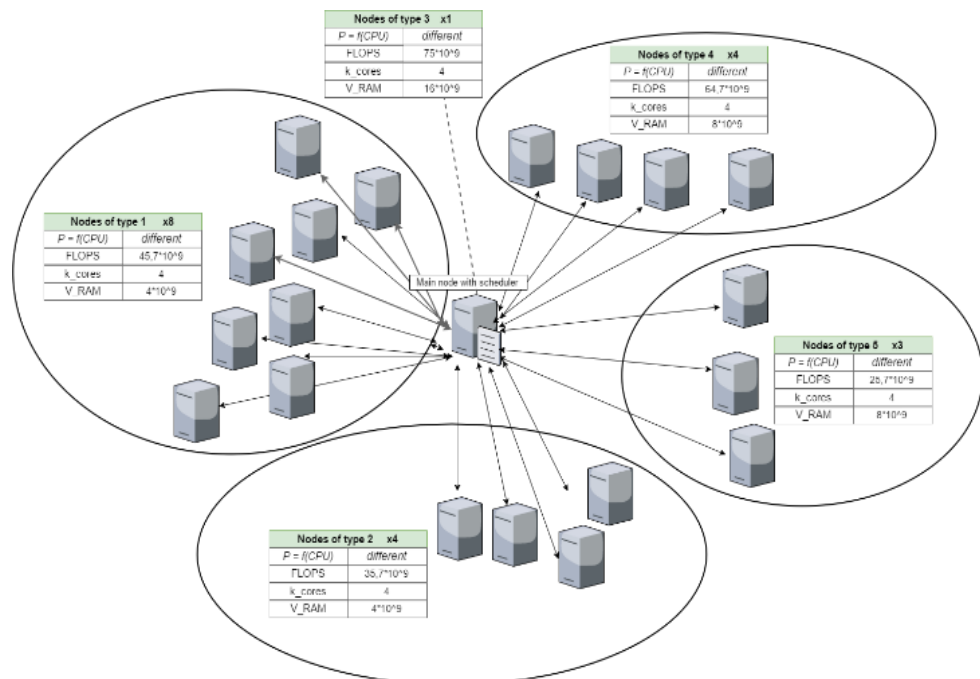


Рис. 5. Топологія кластера з 20 вузлів, використаного у ході імітаційного моделювання

Крім того, залежності $P = f(CPU)$ для досліджуваного кластера також були близькими.

Для подальшого дослідження ефективності підходу (для масштабніших та гетерогенних кластерів), було використано засоби імітаційного моделювання у середовищі Matlab. Перш за все було доведено, що у випадку використання імітаційної моделі результати є статистично еквівалентними та їх похибка не перевищує допустимого рівня.

Наступним кроком було проведено імітаційне моделювання роботи підходу у серверному кластері з 20 вузлів, топологія та характеристика вузлів якого наведена на Рис. 5.

При цьому, запропонований підхід було порівняно із рядом широко відомих алгоритмів планування, серед яких і два енергоефективні підходи, описані у джерелах [6] та [7]. Було змодельовано роботу кластера впродовж доби із навантаженням, подібним до реального [10].

Результати моделювання показали, що запропонований підхід дозволяє отримати вигоду до 49,09% за параметром продуктивності обчислень та вигоду до 9,04% за параметром енергоефективності.

Такі результати дозволяють зробити висновок, що запропонований підхід може суттєво підвищити енергоефективність обчислень, одночасно приносячи вигоду за продуктивністю. Розглянутий у ході моделювання серверний кластер порівняно не є великим. У випадку використання підходу у більш масштабних кластерах очікується зростання його ефективності, що буде перевірено у рамках майбутніх досліджень.

4. Висновки

У статті запропоновано підхід до підвищення енергоефективності обчислень для серверного кластера як інформаційної одиниці інфраструктури ЦОД, який відрізняється одночасним врахуванням параметрів енергоефективності та продуктивності при розподілі задач.

Розроблено алгоритм підвищення енергоефективності обчислень на основі підходу, суть якого полягає у попередній індивідуальній атестації серверного кластера та застосуванні алгоритму енергоефективного розподілу задач.

Врахування індивідуальних залежностей енергоспоживання серверів від їх завантаженості є основною відмінною рисою запропонованого підходу.

Перевірено ефективність підходу експериментально та шляхом імітаційного моделювання.

Проведено аналіз отриманих результатів, та визначено, що підхід проявляє більшу ефективність – до 49,09% за параметром продуктивності та до 9,04% за параметром енергоефективності – для великих гетерогенних кластерів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Koomey J. G., Worldwide electricity used in data centers / J. Koomey // Environmental Research Letters, vol. 3, no. 3, p., 2008.
2. Beloglazov A. Energy-Efficient Management of Virtual Machines in Data Centers for Cloud Computing / Beloglazov Anton – Melbourne, 2013.

3. Hosseinimotlagh S. A Cooperative Two-Tier Energy-Aware Scheduling for Real-Time Tasks in Computing Clouds / S. Hosseinimotlagh, F. Khunjush, S. Hosseinimotlagh. // Euromicro International Conference on Parallel, Distributed, and Network-Based Processing. – 2014. – №22. – С. 178–182.
4. An Energy and Deadline Aware Resource Provisioning, Scheduling and Optimization Framework for Cloud Systems / Y.Gao, Y. Wang, S. K. Gupta, M. Pedram. // IEEE/ACM/IFIP International Conference on Hardware/Software Codesign and System Synthesis. – 2013. – №9. – С. 31:1–31:10
5. Min_с: стратегия неоднородной концентрации задач для энергосберегающих компьютерных расписаний / [Ф. Армента-Кано, А. Черных, Х. М. Кортес-Мендоза та ін.]. // Труды ИСП РАН. – 2015. – №6. – С. 355.
6. Liu N. Task Scheduling and Server Provisioning for Energy-Efficient Cloud-Computing Data Centers / N. Liu, Z. Dong, R. Rojas-Cessa. // IEEE 33rd International Conference on Distributed Computing Systems Workshops. – 2013. – №33. – С. 226–231.
7. Грушин Д. А. Энергоэффективные вычисления для группы кластеров / Д. А. Грушин, Н. Н. Кузюрин. – Москва, 2013. – 433 с.
8. Stress-test, POSIX [Электронный ресурс] – Режим доступа до ресурсу: <https://people.seas.harvard.edu/~apw/stress/>.
9. Jyoti V. Comparative Study of Load Balancing Algorithms / V. Jyoti, K. J. Anant. // IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN). – 2013. – С. 45–50.
10. Проектирование ЦОД и строительство дата-центра [Электронный ресурс] – Режим доступа до ресурсу: <http://www.datacenter-ts.ru/>.

UDC 539.3

Discrete singularities method in problems of liquid vibrations in spherical tanks

V. I. Gnitko¹⁾, Yu. V. Naumenko¹⁾, E. A. Strelnikova^{1),2)}

A.N.Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine

V.N. Karazin Kharkiv National University

This paper presents an analysis of low-frequency liquid vibrations in rigid partially filled spherical containers with baffles. The liquid is supposed to be an ideal and incompressible one and its flow is irrotational. A shell of revolution is considered as the container model. For evaluating a velocity potential, the system of singular boundary integral equations has been obtained. The method of discrete singularities as well as the multi-domain boundary element method are used for its numerical simulation.

Key words: *ideal incompressible liquid, sloshing, spherical shell, baffle, singular integral equations, boundary element method*

В роботі надано аналіз низькочастотних коливань рідини в жорсткому частково заповненому рідиною сферичному контейнері з перегородкою. Припускається, що рідина є ідеальною нестисливою, а її рух є безвихровим. Як модель контейнера обрано оболонку обертання. Для обчислення потенціалу швидкостей отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь. Для її чисельного розв'язання застосовані метод дискретних особливостей та метод граничних супер-елементів.

Ключові слова: *ідеальна нестислива рідина, плескання, сферична оболонка, перегородка, сингулярні інтегральні рівняння, метод граничних елементів*

В работе проведен анализ низкочастотных колебаний жидкости в жестком частично заполненном жидкостью сферическом контейнере с перегородкой. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение является безвихревым. В качестве модели контейнера выбрана оболочка вращения. Для вычисления потенциала скоростей получена система сингулярных интегральных уравнений. Для ее численного решения применены метод дискретных особенностей и метод граничных суперэлементов.

Ключевые слова: *идеальная несжимаемая жидкость, плескания, сферическая оболочка, сингулярные интегральные уравнения, метод граничных элементов.*

1. Problem statement and basic relations

The intensive movement of liquid in reservoirs has been a scientific research subject for several decades. The problem is of great interest because of the extreme importance of sloshing control in fuel tanks of launch vehicles. The proximity of the frequency of fluid vibrations to the frequencies of regulating mechanisms leads repeatedly to stability losses, immediate deorbits, destructions of aircrafts [1]. Liquid spattering and sloshing in spherical tanks was studied in the papers [2,3]. A characteristic feature of spherical tanks is the change in radius of a free surface according to changes in a filling level. There exist known analytical solutions for almost completely filled tanks with small radii of the free surface, the so-called "ice fishing problems" formulation. The effect of baffles on sloshing frequencies was studied by Biswal et al. [4]. The numerical method using a finite element formulation

was developed by Kumar and Sinhamahapatra [5]. Sloshing in spherical tanks for liquefied natural gas carriers was studied by Faltinsen and Timokha [6] and for water supply towers by Curadelli et al. [7]. Various approximate methods for solving the natural sloshing problem, starting with the famous works by Budiansky [8] and McIver [9] and, recently, by Patkas & Karamanos [10] have been proposed.

In this paper we consider the problem of fluid vibrations in the spherical shell. To reduce the sloshing in the shell, an internal baffle is installed, Fig. 1.

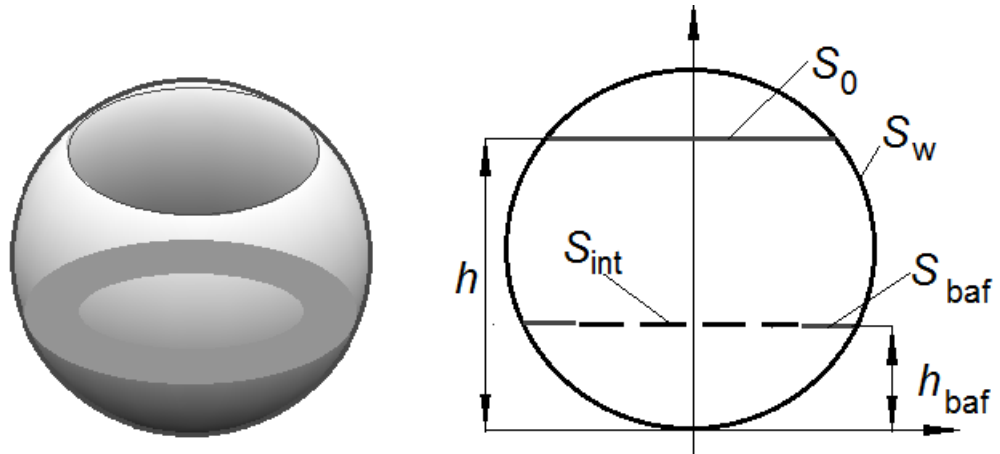


Fig. 1. A spherical fuel tank with an internal baffle

We denote a wetted surface of the shell as S_w , and a free surface as S_0 . Let h be the filling level, h_{baf} be a height where the baffle is located. We also denote the baffle surface as S_{baf} , and as S_{int} an interface surface [11]. It is assumed here that a liquid is an ideal and incompressible one, and its motion, beginning from the state of rest, is irrotational. For these conditions, there exists a fluid velocity potential Φ

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

that satisfies the Laplace equation. A liquid pressure p upon the shell walls is determined from the linearized Cauchy-Lagrange integral by the formula

$$p = -\rho_l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) + p_0,$$

where Φ is the velocity potential, g is the acceleration of gravity, z is the vertical fluid point coordinate, ρ_l is a fluid density, p_0 is an atmospheric pressure. On the wetted surfaces of the shell and baffle the non-penetration boundary condition is set, on the free surface the following dynamic and kinematic boundaries are given

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0,$$

where the function ζ describes the shape and position of the free surface. Thus for the velocity potential we have the following boundary-value problem

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_w \cup S_{\text{baf}}} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta \Big|_{S_0} = 0. \quad (1)$$

To calculate the liquid vibrations in the presence of the baffle we use the multi-domain method (boundary super-element method). In doing so, we introduce an "artificial" interface surface S_{int} [12], then divide the region filled with the liquid into two parts $\Sigma_1; \Sigma_2$, bounded by the surfaces $S_w, S_{\text{baf}}, S_{\text{int}}$ and $S_w, S_{\text{baf}}, S_{\text{int}}, S_0$. On the interface surface, the following boundary conditions are set:

$$\Phi \Big|_{S_{\text{int}} \cap \partial \Sigma_1} = \Phi \Big|_{S_{\text{int}} \cap \partial \Sigma_2}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{\text{int}} \cap \partial \Sigma_1} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{\text{int}} \cap \partial \Sigma_2} \quad (2)$$

The boundary value problem (1), (2) is reduced to a system of singular integral equations in the form [5]

$$\begin{aligned} A_{11}\varphi_1 + A_{12}\varphi_{1i} &= B_{12}q_1; & P_0 &\in S_1; \\ A_{21}\varphi_1 + A_{22}\varphi_{1i} &= B_{22}q_1; & P_0 &\in S_{\text{int}}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A_{32}\varphi_{1i} + A_{33}\varphi_2 + A_{34}\varphi_0 - \omega^2 B_{34}\varphi_0 &= -B_{32}q_1; & P_0 &\in S_2; \\ A_{22}\varphi_{1i} + A_{23}\varphi_2 + A_{24}\varphi_0 - \omega^2 B_{24}\varphi_0 &= -B_{22}q_1; & P_0 &\in S_{\text{int}}; \\ A_{42}\varphi_{1i} + A_{43}\varphi_2 + A_{44}\varphi_0 - \omega^2 B_{44}\varphi_0 &= -B_{42}q_1; & P_0 &\in S_0. \end{aligned}$$

Here we introduce the following notations

$$A_{ij} = A(S_i, S_j); \quad B_{ij} = B(S_i, S_j), \quad i, j = \overline{1, 4};$$

$$A(S, \sigma)\psi = \iint_S \psi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} dS; \quad B(S, \sigma)\psi = \iint_S \psi \frac{1}{|P - P_0|} dS; \quad P_0 \in \sigma,$$

$$\varphi_1 = \Phi \Big|_{S_1}; \quad \varphi_2 = \Phi \Big|_{S_2}; \quad \varphi_{ji} = \Phi \Big|_{S_{\text{int}} \cap \partial \Sigma_j}; \quad \varphi_0 = \Phi \Big|_{S_0}; \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}},$$

where $S_1 = S_{w1} \cup S_{\text{baf}}$; $S_2 = S_{\text{int}}$; $S_3 = S_{w2} \cup S_{\text{baf}}$; $S_4 = S_0$, S_{w1}, S_{w2} are wetted shell surfaces in the subregions $\Sigma_1; \Sigma_2$.

The numerical solution of the system of integral equations (6) is carried out by the method of discrete singularities (MDS) [13]. The transformation to one-dimensional boundary integral equations is preliminary carried out by transition to cylindrical coordinates and representation of unknown functions in the form

$$\varphi_k(r, z, \theta) = \varphi_k(r, z) \cos \alpha \theta, \quad (4)$$

where α is a harmonic number.

2. Analysis of numerical results

2.1. Low-frequency oscillations of a spherical shell without baffles

Consider the spherical shell of radius $R = 1$ m, partially filled with the ideal incompressible fluid, with the filling level h . The numerical analysis is carried out for

($0.2 < h/R < 1.99$) and various α ($\alpha = \overline{0,3}$). The MDS and the multi-domain method of boundary elements (MDBE) are used [12, 13].

Both MDS and MDBE are applied here. The boundary elements with constant approximation of unknowns inside the elements are used. In MDS there are 200 elements along the spherical surface and 150 elements along the free surface. In MBEM we divide the computational domain into two parts by the artificial interface surface at $h_{\text{int}} = 0.5h_1$ using 100 boundary elements in each sub-domain along the spherical surface and 150 elements along the free surface. We use practically the same mesh to find a numerical approximation of low eigenvalues for the so called “ice-fishing problem”. In this problem, formally, we should consider an infinitely wide and deep ocean covered with ice, with a small round fishing hole. Sloshing in such “containers” was studied by McIver [9]. We approximate this infinite case using the spherical tank with the small round hole on its top. It allows us to compare our numerical results with those obtained in the papers [3],[9].

In Tables 1-2 we compare results obtained by using MDS and MBEM with those obtained in [3],[9] for axisymmetric ($\alpha=0$) and non-axisymmetric ($\alpha=1$) modes. Four first frequencies ($n = \overline{1,4}$) are evaluated for each α . Here we consider different filling levels h_1 . The value $h_1/R_1=1.99$ corresponds to the ice-fishing problem.

Table 1: Frequency of axisymmetric oscillations of the fluid-filled spherical shell.

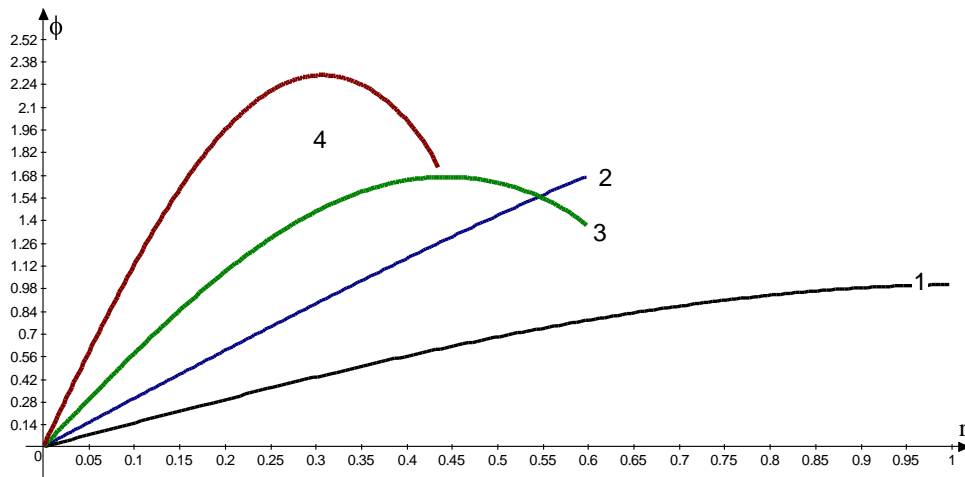
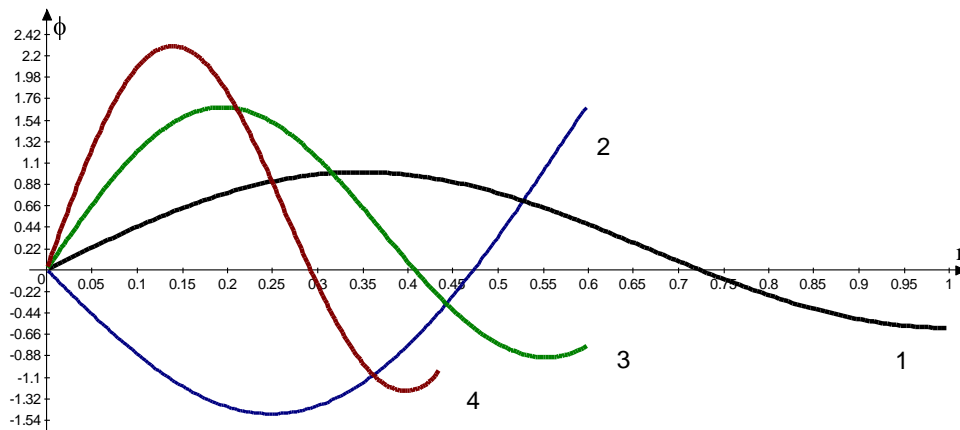
n	Method	Filling level h, m				
		$h_1=0.2$	$h_1=0.6$	$h_1=1.0$	$h_1=1.8$	$h_1=1.99$
1	[3]	3.8261	3.6501	3.7451	6.7641	29.0500
	[9]	3.8261	3.6501	3.7451	6.7641	29.2151
	MDBE	3.4034	3.5455	3.7294	6.6098	30.7081
	MDS	3.8314	3.6510	3.7456	6.7665	29.1811
2	[3]	9.2561	7.2659	6.9763	12.1139	51.8122
	[9]	9.2561	7.2659	6.9763	12.1139	52.0467
	MDBE	9.2636	7.2893	6.9796	12.0008	52.9393
	MDS	9.2686	7.2684	6.9780	12.1205	52.0255

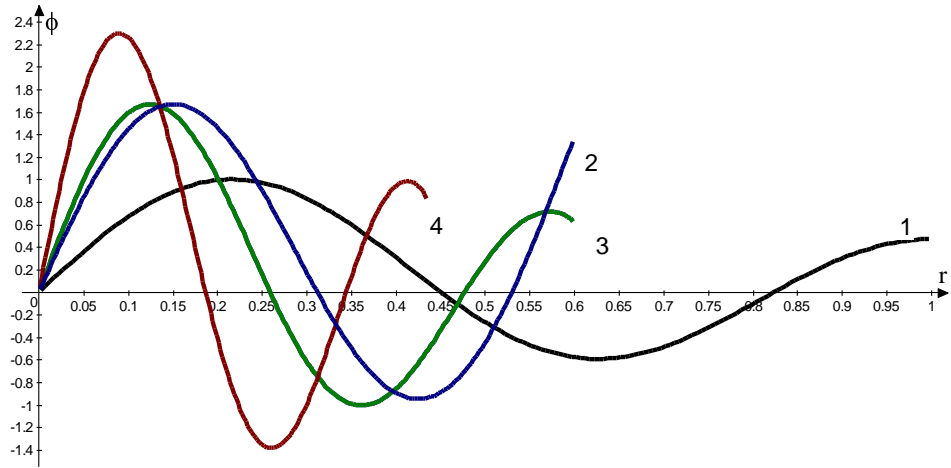
Table 2: Non-axisymmetric slosh frequencies of the fluid-filled spherical shell, Hz.

n	method	Filling level h_1, m				
		$h_1=0.2$	$h_1=0.6$	$h_1=1.0$	$h_1=1.8$	$h_1=1.99$
1	[3],	1.0723	1.2625	1.5601	3.9593	18.9838
	[9]	1.0723	1.2625	1.5601	3.9593	19.1582
	MDBE	1.1034	1.2777	1.5638	3.9606	19.1603
	MDS	1.0723	1.2626	1.5603	3.9508	19.1130
2	[3],	6.2008	5.3860	5.2755	9.4534	41.3491
	[9]	6.2008	5.3860	5.2755	9.4534	41.7683
	MDBE	6.1227	5.3534	5.2749	9.4582	41.5327
	MDS	6.2090	5.3697	5.2764	9.4538	41.5333

Different levels of fluid filling are considered, including $h_1 = 1.99$, that corresponds to «ice-fishing problem», [9]. The results of calculations are close but in some cases MDS gives more accuracy.

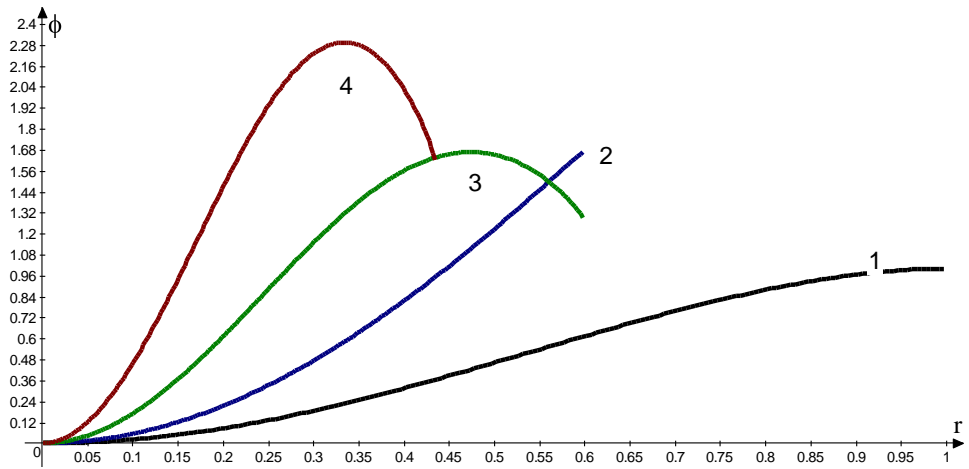
Considering our approximate natural sloshing modes one can observe how free surface profiles change with the liquid depth. These results are illustrated in Fig. 2 for the three lowest eigenvalues of the mode $\alpha = 1$, and for $\alpha = 2$ in Fig.3. Here numbers 1,2,3,4 correspond to the different non-dimensional filling levels: $h_1/R_1=1.0$; 0.2; 1.8; 1.9, respectively.

a) $\alpha = 1, m=1$ b) $\alpha = 1, m=2$

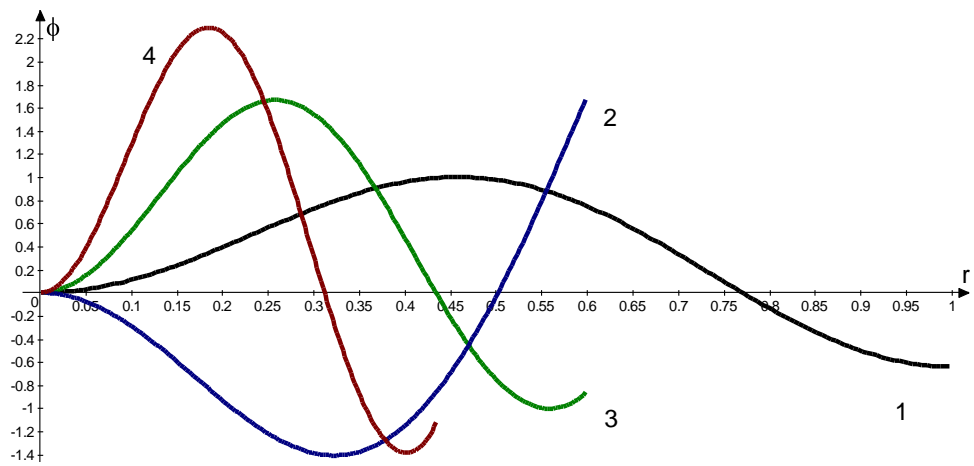


c) $\alpha = 1, m=3$

Fig. 2. The radial wave profiles $n=1,2,3$ for different non-dimensional liquid depths h_i/R_i .



a) $\alpha = 2, m=1$



b) $\alpha = 2, m=2$

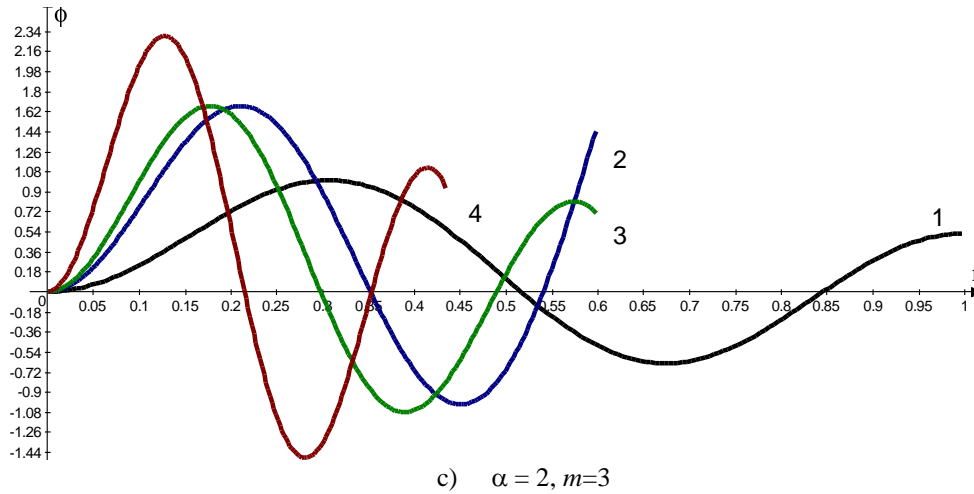


Fig. 3: The radial wave profiles $n=1,2,3$ for different non-dimensional liquid depths h_1/R_1 .

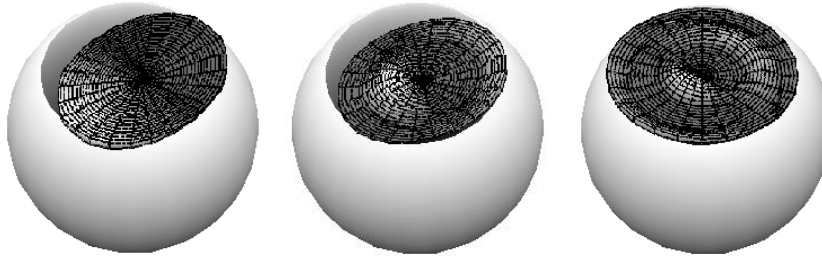


Fig. 4. Spatial wave patterns for $\alpha=1; m=1,2,3$.

In the spherical tank with $0 < h_1/R_1 < 0.5$ the lowest mode presents a spatial wave pattern that looks like inclination of an almost flat free surface. Increasing the liquid depth yields more complicated free surface profiles. Fig.4 demonstrates the spatial wave patterns for $\alpha=1, n=1,2,3$ at $h_1/R_1=1.8$.

2.2. Low-frequency oscillations of the baffled spherical shell

The rigid spherical tank of radius $R_1=1\text{m}$ filled to the depth $h_1=1.4\text{m}$ is considered. The inner periphery of the tank contains a thin rigid-ring baffle. The baffle position is $h_{\text{baf}}=1\text{m}$. The different annular orifices in the baffle are considered. Radii of these orifices are radii R_{int} of the interface surfaces. The first four frequencies for the mode $\alpha=1$ are evaluated for radii $R_{\text{int}}=1.0\text{m}$, $R_{\text{int}}=0.7\text{m}$, and $R_{\text{int}}=0.2\text{m}$. Note that $R_{\text{int}}=1.0\text{m}$ corresponds to the un-baffled tank. These frequencies are presented in Table 3.

Table 2: Vibrations of the tank with a baffle, Hz

m	ω^2/g		
	$R_{int} = 1.0$ m	$R_{int} = 0.7$ m	$R_{int} = 0.2$ m
1	2.1232	2.0435	1.4234
2	5.9800	5.9723	5.8405
3	9.4789	9.4785	9.4567

Figure 5 shows the first three forms of fluid vibrations in the spherical shell at $\alpha=1$ with baffles.

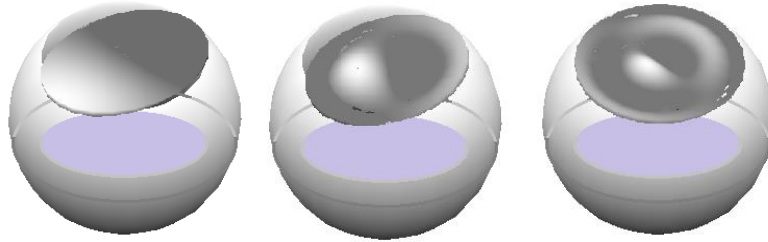


Fig. 5. Modes of liquid vibrations in the baffled spherical shell.

When the baffle is installed, the mode shape becomes almost flat.

3. Conclusion

Sloshing in the tank may be controlled by installing baffles, and the effectiveness highly depends on the shape, the location, and the number of baffles inside the tank. But in practice, the effect of baffles usually can be seen after the baffle has already been installed. Also, the visual inspection of the sloshing event inside the tank is not adequate for baffles design validation. Due to the complexities associated with the sloshing phenomenon, the numerical simulation is an effective method to meet the design intent, and shorten the development time. The proposed method makes it possible to determine a suitable place with a proper height for installing the baffles in tanks by using the numerical simulation. Estimating the frequency of fluid oscillations in spherical tanks on the basis of the proposed method will allow detuning from the operating frequency range of the regulating mechanisms.

REFERENCES

1. Space Exploration Technologies Corp. Demo Flight 2 Flight Review Update, June 15, 2007.
2. Faltinsen O.M., Timokha A.N. Analytically approximate natural sloshing modes for a spherical tank shape. //J. Fluid Mech., 2012, 703, pp. 391-401.
3. Kulczycki T., Kwaśnicki M., Siudeja, B. The shape of the fundamental sloshing mode in axisymmetric containers. //Journal of Engineering

- Mathematics, 2016. V. 99 N1, pp. 157-193,
4. Biswal, K. C., Bhattacharyya, S. K. & Sinha, P. K., Dynamic characteristics of liquid filled rectangular tank with baffles, //IE (I) Journal-CV 84, 2004, pp. 145–148.
 5. Kumar, A., Sinhamahapatra K.P., Dynamics of rectangular tank with perforated vertical baffle. //Ocean Engineering, 2016, V. 126 N 1, pp. 384–401.
 6. Faltinsen, O. M., Timokha, A. N. Sloshing. Cambridge University Press, - 2009, 208 p.
 7. Curadelli, O., Ambrosini, D., Mirasso, A. & Amani, M. Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement.// J. Fluids Struct., 2010 V. 26, N 1, pp. 148–159.
 8. Budiansky, B. Sloshing of liquid in circular canals and spherical tanks. //J. Aerosp. Sci. 1960, V. 27, N 3, pp. 161–172.
 9. McIver, P. Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers filled to an arbitrary depth.// J. Fluid Mech. 1989, N 201, pp. 243–257.
 10. Patkas, L. & Karamanos, S. A. Variational solution of externally induced sloshing in horizontal–cylindrical and spherical vessels. //J. Engng Mech. 2007, V. 133, N 6, pp. 641–655.
 11. Gnitko V., Naumenko V., Rozova, L., Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. //Journal of Basic and Applied Research International, 2016, V. 17, N1, pp.75-87.
 12. Degtyarev K., Gnitko V., NaumenkoV., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles// Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences 2016, V. 1, N 1, pp.14-27.
 13. K. Degtyarev, P. Glushich, V. Gnitko, E Strelnikova. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells. //International Journal of Modern Physics and Applications 2015, V. 1 N 4, pp. 159-168.

УДК 535.4

Моделирование свойств световозвращения решеткой тетраэдрических ретрорефлекторов

Г. Н. Доля, Е. С. Литвинова

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье рассмотрены особенности рассеяния лазерного излучения на дифракционных решетках, состоящих из набора тетраэдрических ретрорефлекторов. В процессе физического и имитационного моделирования исследовано влияние различных параметров решетки на пространственные характеристики отраженного излучения. Полученные зависимости свидетельствуют о том, что мощность рассеянного излучения сосредоточена на небольшой площади области приема и существенно зависит от условий наблюдения, а также характеристик отражательной системы и параметров подсвечивающего излучения.

Ключевые слова: *тетраэдрический ретрорефлектор, дифракционная картина, имитационное моделирование.*

У статті розглянуто особливості розсіювання лазерного випромінювання на дифракційних решітках, що складаються з набору тетраедричних ретрорефлекторів. У процесі фізичного та імітаційного моделювання досліджено вплив різних параметрів решітки на просторові характеристики відбитого випромінювання. Отримані залежності свідчать про те, що потужність розсіяного випромінювання зосереджена на невеликій площі області прийому та істотно залежить від умов спостереження, а також характеристик відбивної системи та параметрів підсвітлюючого випромінювання.

Ключові слова: *тетраедричний ретрорефлектор, дифракційна картина, імітаційне моделювання.*

The features of laser radiation scattering by diffraction gratings consisting of a set of tetrahedral retroreflectors are considered in the article. In the process of a physical and computer simulation, the influence of various lattice parameters on the spatial characteristics of the reflected radiation has been investigated. The obtained dependencies indicate that the power of the scattered radiation is concentrated on a small area of the receiving area and essentially depends on the observation conditions, as well as the characteristics of the reflecting system and the illumination radiation parameters.

Key words: *tetrahedral retroreflector, diffraction pattern, simulation.*

Введение

В настоящее время лазеры широко используются для решения локационных задач, дистанционного мониторинга среды, экологического контроля и множества других применений [1-3]. Эффективное решение поставленных задач существенно зависит от мощности принимаемого сигнала, который в свою очередь определяется отражающими свойствами поверхности. Принято считать, что существующие поверхности являются либо зеркальными, либо диффузно-отражающими в зависимости от качества обработки поверхности [4, 5]. При зеркальном отражении, когда микронеровности значительно меньше по величине, чем длина волны лазерного излучения, выполняются известные законы геометрической оптики. При этом при отражении расходимость лазерного луча сохраняется. В случае, когда величина микронеровностей

сопоставима с длиной волны (случай шероховатой поверхности [6]), лазерное излучение рассеивается в полусферу в соответствии с законом Ламберта. Мощность сигнала, принимаемого в этом случае от удаленного объекта, существенно уменьшается по сравнению со случаем зеркального отражения. Отметим, что на практике зачастую отражение от реальных объектов носит смешанный характер [5, 7].

Для увеличения мощности сигнала, отраженного строго в направлении источника подсвета объекта, в последнее время разработаны поверхности, содержащие совокупность миниатюрных элементов размерами порядка сотни микрометров, обладающих свойством световозвращения [8]. Такими элементами являются либо микропризмы - тетраэдрические ретрорефлекторы (ТРР) [9], либо микростеклошарики. В этом случае диаграмма рассеяния луча существенно сужается, что обеспечивает существенное увеличение мощности принимаемого сигнала. Весьма целесообразным представляется анализ влияния параметров лазерного излучения и структуры поверхности на способность концентрировать в пространстве мощность рассеянного в обратном направлении света при облучении поверхности на основе решетки ТРР. В данной работе приведены некоторые результаты такого анализа, полученные методом имитационного моделирования.

Основная часть

Используемые на практике световозвращающие поверхности (СВП) на основе ТРР имеют широкое разнообразие параметров, определяющих вид пространственной структуры рассеянного в обратном направлении лазерного излучения. Эти параметры определяются пространственным периодом решетки, характеристиками задней поверхности микропризм, точностью изготовления элементов решетки и т. д. На рис. 1 (а, б, в) показаны распределения интенсивности в рассеянном назад излучении при одинаковых условиях подсвета несфокусированным лазерным лучом для различных образцов поверхностей, применяемых в промышленных и бытовых целях.

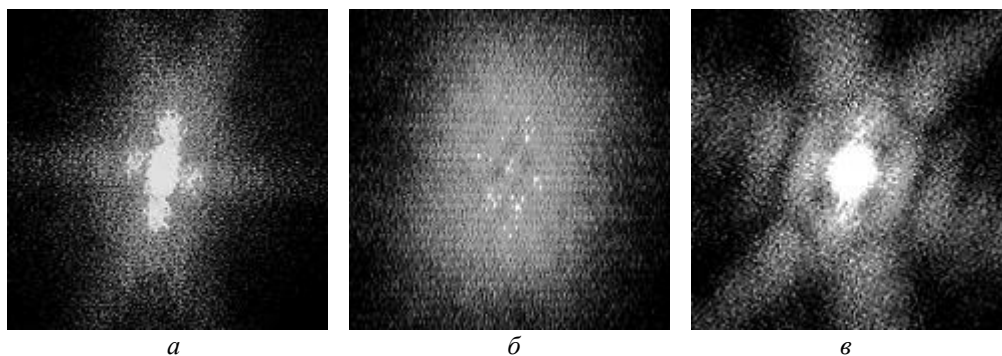


Рис. 1. Картины рассеяния излучения на различных решетках (результаты физического моделирования).

Как видно из приведенных фотографий, эти поверхности различным образом концентрируют излучение в области центрального максимума, определяемого

направлением падающего луча. Общим для этих распределений является то, что основная часть мощности рассеянного луча концентрируется в пределах конуса с углом при вершине несколько градусов, обеспечивая высокую степень световозвращения.

Для анализа отмеченных выше особенностей световозвращения была разработана имитационная модель, позволяющая рассчитать характеристики пространственного распределения интенсивности в плоскости наблюдения, аналогичные приведенным на рис. 1 экспериментальным результатам. Модель содержала следующие основные компоненты. Подсвет осуществлялся с помощью лазерного луча, распределение интенсивности в котором описывалось гауссовой кривой. Начальное распределение фазы в исходном пучке считалось постоянным.

Модель трансформации поля падающего луча в решетке ТРР подробно описана в [10]. Основными этапами этой части модели являлись расчет траектории луча и координат точки его выхода при заданных координатах его входа, расчет набега фазы для каждого парциального луча, а также характер изменения его амплитуды при отражении от граней элементарного ТРР.

Следующим этапом моделирования являлся расчет распределения интенсивности в дальней зоне дифракции с использованием алгоритма двумерного БПФ. Исходной информацией для такого расчета являлось амплитудно-фазовое распределение на выходе решетки ТРР как результат предыдущего этапа моделирования.

Характерное распределение интенсивности в плоскости приема представлено на рис. 2.

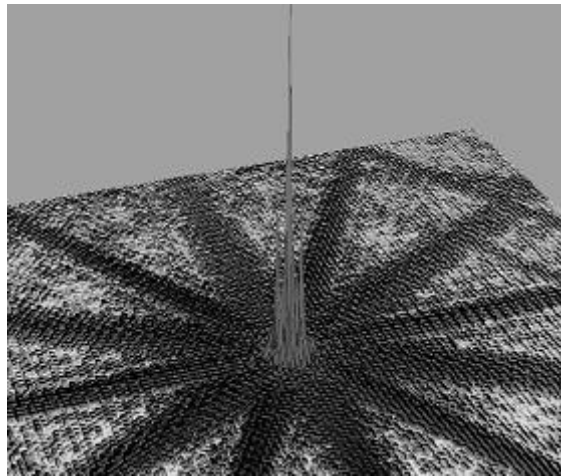


Рис. 2. Распределение интенсивности в плоскости приема (результат имитационного моделирования).

Как видно из рисунка, это распределение представляет собой совокупность локальных максимумов, промодулированных огибающей в соответствии с закономерностями дифракции лазерного излучения на решетке ТРР.

Заключительным этапом моделирования являлась оценка пространственных характеристик распределения интенсивности лазерного излучения в плоскости приема при изменении условий облучения объекта и свойств поверхности. Величина мощности, принимаемой в пределах квадратной апертуры, являлась характеристикой свойств световозвращения при изменении отмеченных выше параметров. Результаты моделирования представлены на рис. 3-5.

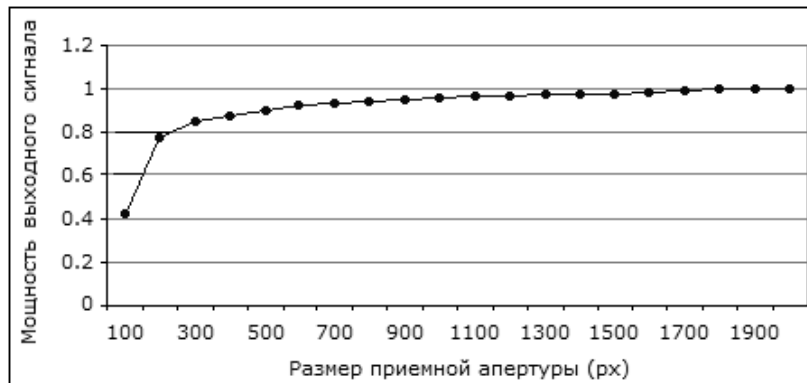


Рис.3. Зависимость мощности сигнала от линейного размера апертуры в плоскости приема.

Так на рис. 3 показана зависимость мощности, которая может быть принята и затем протектирована для решения прикладных задач, от размера приемной апертуры (количество пикселей в плоскости приема). Как видно из приведенного рисунка, в пределах квадрата со стороной 200 px сосредоточено 80% мощности рассеянного лазерного излучения. Дальнейшее увеличение площади приема не приводит к существенному возрастанию мощности принимаемого сигнала. Таким образом, размер этого квадрата характеризует степень пространственной концентрации мощности рассеянного (отраженного) от решетки ТРР лазерного излучения.

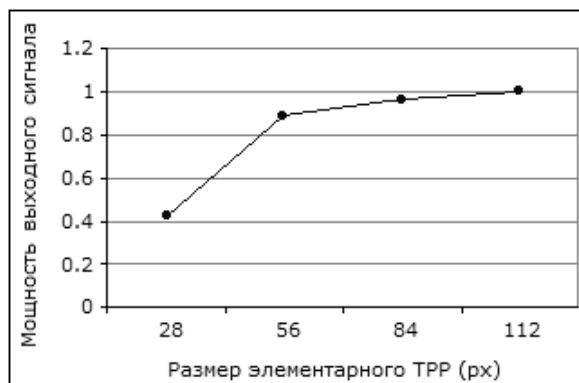


Рис.4. Зависимость мощности сигнала от размера ТРР.

На рис. 4 показана зависимость мощности принимаемого сигнала при изменении размеров элементарного ТРР. Как видно из приведенного рисунка, мощность сигнала, концентрируемая в пределах квадрата 200×200 рх, убывает при уменьшении размера ТРР. Это обстоятельство может быть пояснено на основе закономерностей теории дифракции. Размер области, в пределах которой сосредоточена основная мощность отраженного сигнала (основной максимум огибающей дифракционной картины), обратно пропорционален размеру ТРР. Таким образом, при фиксированной области интегрирования (площади приема) и уменьшении размера ТРР происходит расплывание нулевого порядка огибающей и, как следствие, уменьшение мощности в пределах фиксированной приемной апертуры 200×200 рх.

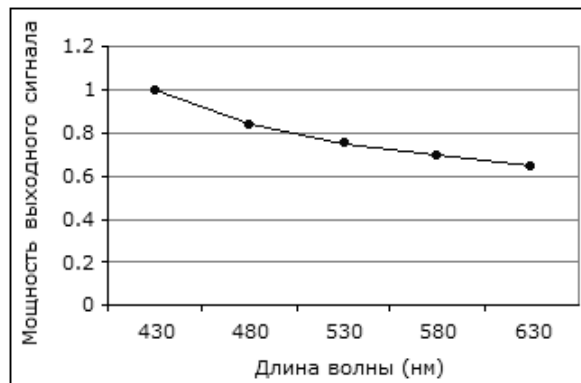


Рис.5. Зависимость мощности сигнала от длины волны лазерного излучения.

Из тех же соображений могут быть объяснены закономерности уменьшения мощности в пределах заданной приемной апертуры при увеличении длины волны излучения. Ширина нулевого порядка огибающей распределения интенсивности прямо пропорциональна длине волны излучения. Поэтому при увеличении длины волны фиксированная площадь приема не охватывает полностью область нулевого порядка огибающей, что приводит к уменьшению мощности на рис. 5.

Последние два графика и их интерпретация, приведенная выше, свидетельствуют о том, что для практических применений необходимо согласовывать область приема (площадь приемной апертуры) с параметрами лазерного луча и пространственной структурой решетки.

Выводы

Таким образом, в работе показано, что решетки на основе ТРР обладают выраженными свойствами световозвращения, концентрируя мощность рассеянного лазерного излучения в пределах небольшого угла порядка единиц градусов.

Разработана имитационная модель, включающая в себя этапы облучения решетки лазерным лучом, трансформации поля лазерного излучения на решетке ТРР, обратного распространения и детектирования лазерного излучения в пределах заданной апертуры.

В результате имитационного моделирования получены и проанализированы закономерности, описывающие эффективность приема лазерного излучения при изменении условий облучения поверхности, детектирования сигнала, а также пространственных параметров решетки ГРР.

Обоснована необходимость согласования таких параметров. Отмечены пути эффективного решения такой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лазерные измерительные системы / Под ред. Д. П. Лукьянова. – М.: Радио и связь, 1981.
2. Каталог-справочник по странам СНГ «Лазерные измерения и диагностика в технике и экологическом контроле». – М.: Научно-технический информационно-учебный центр Лазерной ассоциации, 2000.
3. Клочков В. П., Козлов Л. Ф., Потыкевич И. В., Соскин М. С. Лазерная анемометрия, дистанционная спектроскопия и интерферометрия. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 759 с.
4. Устинов Н. Д., Матвеев И. Н., Протопопов В. В. Методы обработки оптических полей в лазерной локации. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 272 с.
5. Оптическая локация. Теоретические основы приема и обработки оптических сигналов / Под ред. А. И. Стрелкова Х; Вировец А. П. «Апостроф», 2010. – 312 с.
6. Топорец А. С. Оптика шероховатой поверхности. – Л.: Машиностроение, 1988. – 191 с.
7. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т.2. Многократное рассеяние, турбулентность, шероховатые поверхности и дистанционное зондирование. – М.: Мир, 1981. – 317 с.
8. Lloyd J. A Brief History of Retroreflective Sign Face Sheet Materials. <http://www.rema.org.uk/pub/pdf/history-retroreflective-materials.pdf>.
9. Ханюх Б. Ю. Оптические отражатели тетраэдрического типа в активных системах. – Минск: Издательство БГУ им. В. И. Ленина, 1982. – 160 с.
10. Доля Г. Н., Литвинова Е. С. Преобразование амплитудно-фазового распределения при отражении лазерного излучения от тетраэдрических ретрорефлекторов // Системы обработки информации. – 2010. – № 6(87). – С. 81-86.

УДК 539.3

Метод дискретных особенностей в задаче определения частот и форм колебаний лопастей гидротурбин

Р. П. Москаленко¹⁾, В. В. Науменко²⁾, Е. А. Стрельникова^{1, 3)}*1) Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина**2) Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, Украина**3) Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАНУ, Украина*

На основе методов теории потенциала и граничных интегральных уравнений построены математические модели для исследования свободных колебаний элементов турбомашин при взаимодействии с жидкостью. В данной статье дан анализ колебаний пластин с учетом влияния присоединенных масс жидкости. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее течение – безвихревое. Давление определяется из линеаризованного интеграла Бернулли. Для вычисления потенциала скоростей получена система сингулярных интегральных уравнений. Для ее решения применен метод дискретных особенностей.

Ключевые слова: гидротурбина, свободные колебания, присоединенные массы жидкости, гиперсингулярное уравнение, метод дискретных особенностей.

На основі методів теорії потенціалу та граничних (сингулярних та гіперсингулярних) інтегральних рівнянь побудовано математичні моделі і методи дослідження вільних коливань елементів турбомашин з при взаємодії з рідиною. В цій роботі надано аналіз коливань пластин з урахуванням приєднаних мас рідини. Припускається, що рідина ідеальна, нестислива, а її рух безвихровий. Тиск визначається з лінеаризованого інтегралу Бернуллі. Для обчислення потенціалу швидкостей отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь. Для її числової симуляції застосовано метод дискретних особливостей.

Ключові слова: гідротурбіна, вільні коливання, приєднані маси рідини, гіперсингулярне рівняння, метод дискретних особливостей.

The mathematical models for estimation of free vibrations of turbomachine elements in interaction with a fluid has been developed on the basis of the methods of potential theory as well as boundary singular and hypersingular integral equations. The analysis of plate vibrations with consideration of the effects of added liquid masses has been presented in the paper. The liquid is supposed to be an ideal and incompressible one and its flow is irrotational. The pressure is obtained by linearized Bernoulli integral. To evaluate a velocity potential, the system of singular boundary integral equations has been developed. The discrete singularities method has been used for its numerical solution.

Key words: hydro-turbine, free vibrations, liquid added masses, hypersingular equation, discrete singularities method.

1. Постановка задачи и основные соотношения

В работе исследованы малые колебания пластин, моделирующих лопасти гидротурбин, при взаимодействии с идеальной несжимаемой жидкостью. Изучение частот и форм собственных колебаний лопастей в жидкости является актуальной задачей при проектировании рабочих колес гидротурбин. Такие исследования необходимо проводить для предотвращения резонанса. Предлагаемые для решения этих задач методики [1,2] обычно основываются на упрощающих гипотезах (плоских сечений, совпадения форм колебаний в

вакууме и жидкости и др.). Такие подходы не могут быть приложены без дополнительных обоснований к задаче о погруженной в жидкость оболочке, моделирующей лопасть рабочего колеса, взаимодействующего с водной средой. Методики, основанные на использовании метода конечных элементов, требуют больших затрат машинного времени, что затрудняет их применение на практике. В этой связи возрастает актуальность использования в таких задачах методов граничных элементов и бессеточных методов. Отметим, что лопасть в воде представляет собой разрыв сплошности среды, что позволяет свести задачи о гидроупругих колебаниях пластин и оболочек к гиперсингулярным интегральным уравнениям. Современные возможности вычислительной техники позволяют применить этот сложнейший аппарата математической физики для решения актуальных практических задач.

1.1. Постановка задачи о гидроупругих колебаниях пластин в воде

Малые колебания пластины описываются уравнением

$$D\nabla^2\nabla^2\bar{w} + \rho_1 h \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial t^2} = P, \quad (1)$$

где P – давление жидкости на пластину; D – цилиндрическая жесткость; h – толщина; ρ_1 – плотность материала пластины, \bar{w} нормальное перемещение пластины.

Скорость набегающего потока принимается равной нулю. Движение жидкости изучается в трехмерной постановке методами теории потенциала. Предполагается, что жидкость идеальная; свободные вихри не образуются и не сходят с несущей поверхности. В таком случае существует потенциал скоростей, удовлетворяющий всюду вне пластины гармоническому уравнению, а на лицевых поверхностях пластины S_{\pm} – условию непротекания.

При потенциальном течении возмущенная скорость жидкости представляется в виде

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \text{grad}\Phi(x, y, z, t), \quad (2)$$

где $\Phi(x, y, z, t)$ – потенциал скоростей, индуцированных малыми свободными колебаниями пластины.

Для определения давления жидкости на смоченные поверхности служит интеграл Коши-Лагранжа, который в случае покоящейся жидкости может быть записан в следующем виде:

$$P = -\rho_2 \left[\frac{\partial\Phi^+(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial\Phi^-(x, y, z, t)}{\partial t} \right], \quad (3)$$

где ρ_2 – плотность жидкости.

Для нахождения давления на пластину со стороны жидкости необходимо определить функцию $\Phi(x, y, z, t)$, решая уравнение Лапласа при следующем граничном условии

$$(\text{grad}\Phi \cdot \mathbf{n})_s = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}, \quad (4)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к пластине, а правая часть уравнения представляет собой скорость нормального перемещения деформируемой пластинки.

Таким образом, требуется определить функции $\bar{w}(x, y, t)$, $\Phi(x, y, z, t)$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (1) – (3), условиям непротекания (4), закрепления пластины и затухания возмущенной скорости жидкости на бесконечности.

Рассмотрим задачу о малых гармонических колебаниях упругой лопасти в потоке. Представим искомые функции в виде $\bar{w}(x, y, t) = e^{i\Omega t} w(x, y)$, $\Phi(x, y, z, t) = e^{i\Omega t} \varphi(x, y, z)$, где Ω – частота, а w – собственная форма колебаний пластины в жидкости. Пусть S – поверхность, ограничивающая погруженную в жидкость пластину. Представим функцию $\varphi(x, y, z)$ в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью $\Gamma(\xi)$, $\xi \in S$:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi. \quad (5)$$

Известно, что $\varphi^+ - \varphi^- = \Gamma$, т.е. перепад давления пропорционален плотности потенциала Γ .

Вычисляя нормальную производную потенциала двойного слоя (5) и подставляя полученное выражение в граничные условия (4), приходим к гиперсингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi = i\Omega w. \quad (6)$$

Как и в [3], представим неизвестное перемещение в виде $w = \sum_{k=1}^N c_k w_k$, где w_k представляют собой формы колебаний пластины в вакууме. Пусть функции $\Gamma_k(\xi)$ являются решениями гиперсингулярного уравнения (6) с правыми частями w_k . Полагая $\Gamma_k(\mathbf{x}) = H(w_k)$, где H – обратный оператор к интегральному оператору в (6), приходим к проблеме собственных значений

$$c_j \Omega_j^2 = \Omega^2 \sum_{k=1}^N c_k \left[\delta_{kj} + (H(w_k) \cdot w_j) \right]. \quad (7)$$

Определив решение (7), вычисляем частоты Ω колебаний в жидкости, а, зная коэффициенты c_k , находим формы колебаний пластины в жидкости. Построенную в (7) матрицу $P_{kj} = (H(w_k) \cdot w_j)$ называют матрицей присоединенных масс жидкости. Для определения матрицы присоединенных масс используем метод дискретных особенностей [3].

2. Численное определение элементов матрицы присоединенных масс жидкости

Для решения гиперсингулярного уравнения (6) применен метод дискретных особенностей (МДО) [3]. Область интегрирования разбивалась на конечное число четырехугольных подобластей NS, в каждой из которых неизвестная плотность заменялась постоянной величиной.

Пусть область интегрирования S представляет собой плоский прямоугольник $S = \{-b, b\} \times [-1, 1]$.

Предположим, что функция $\Theta(\xi)$ имеет непрерывные частные производные, удовлетворяющие условию Гельдера всюду внутри S. Пусть $x \notin S$, $x \neq l$. Тогда нормальную производную потенциала двойного слоя можно представить в виде

$$I(\mathbf{x}) = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = \iint_S \Theta(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{N}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} dS_\xi = \int_{-b-l}^b \int_{-1}^1 \Theta(\xi) \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3x_3^2}{r^5} \right] d\xi_1 d\xi_2, \text{ где}$$

$$r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + x_3^2}.$$

Интеграл в правой части (3.47) существует в обычном смысле при $x \notin S$ ($x_3 \neq 0$).

Пусть $\Theta(\xi) = \Theta_0$, $\Theta_0 = \text{const}$ на S, $x \notin S$. Тогда из (3.47) получим

$$I(\mathbf{x}) = \Theta_0 \int_{-b-l}^b \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3x_3^2}{r^5} \right] d\xi_1 d\xi_2.$$

Вычисляя этот интеграл аналитически и переходя к пределу при $x_3 \rightarrow 0$, приходим к следующей формуле:

$$I(\mathbf{x}) = \Theta_0 L(\mathbf{x}), \text{ где } L(\mathbf{x}) = \left[-\frac{\sqrt{(x_1 - b)^2 + (x_1 - l)^2}}{(x_1 - b)(x_2 - l)} + \frac{\sqrt{(x_1 - b)^2 + (x_1 + l)^2}}{(x_1 - b)(x_2 + l)} + \frac{\sqrt{(x_1 + b)^2 + (x_1 - l)^2}}{(x_1 + b)(x_2 - l)} - \frac{\sqrt{(x_1 + b)^2 + (x_1 + l)^2}}{(x_1 + b)(x_2 + l)} \right].$$

При вычислении конечной части по Адамару для интегралов в (6) по четырехугольнику, произвольно ориентированному в пространстве, использованы формулы:

$$J_i(\mathbf{x}) = \frac{([\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_i] \cdot \mathbf{n})}{|[\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_i]|^2} \left[\frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1})}{r_{i+1}} - \frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_i)}{r_i} \right];$$

$$r_k = |\mathbf{r}_k|; \mathbf{r}_k = (x_k - x_0, y_k - y_0, z_k - z_0);$$

$$\mathbf{l}_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i, z_{i+1} - z_i);$$

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3).$$

Применена модификация метода дискретных особенностей, касающаяся выбора контрольной точки. В [4] показано, что точность метода граничных элементов и его сходимость зависят от выбора контрольных точек.

Анализируя величины, вычисляемые по формуле (8) устанавливаем, что на границах элементов отклик обращается в минус бесконечность, однако внутри каждого элемента имеется точка, в которой отклик имеет конечный максимум.

На рис. 1 показаны линии уровня функций-откликов, определенных формулой (8), для треугольного и четырехугольного элементов.

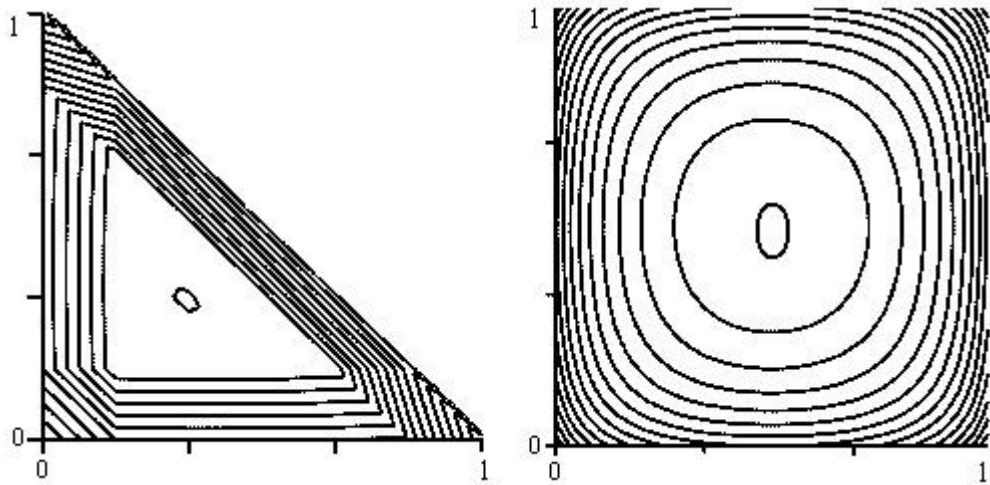


Рис. 1. Линии уровня функций-откликов от постоянной плотности

Проведенный численный анализ позволяет сделать вывод о том, что отклики для постоянной плотности имеют конечный максимум в центрах тяжести граничных элементов.

Элементы матрицы присоединенных масс находились по формуле

$$P_{ik} = \iint_S \Gamma_i(x) w_k(x) dS, \quad D^z = \|d_{ij}^z\|, \quad \text{где } \Gamma_i(x) - \text{амплитудные значения}$$

давления, индуцированного собственной формой $w_k(x)$.

3. Численный анализ частот и форм свободных гидроупругих колебаний консольных пластин

В качестве тестовой задачи рассматривались колебания квадратной пластины со стороной a и толщиной h (геометрические параметры и механические свойства взяты из работы [4]). Изучались колебания в воздухе и с учетом присоединенных масс жидкости.

В таблице 1 приведены значения частот колебаний этой пластин в воздухе и в воде и проведено сравнение с теоретическими и экспериментальными данными из работы [4].

Рассматривался безразмерный частотный параметр, вычисляемый по формуле

$$\lambda = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_1 h}{D}}.$$

Таблица 1. Безразмерный частотный параметр для квадратной пластинки

n	В воздухе			В воде		
	Эксперимент [4]	Теория [4]	МК [3]	Эксперимент [4]	Теория [4]	МДО
1	3.43	3.49	3.49	1.475	1.59	1.434
2	8.32	8.55	8.547	4.5	4.7	4.24
3	20.55	21.36	21.33	10.05	10.7	10.00
4	27.15	-	27.81	-	-	13.70
5	30.75	31.10	31.34	17.0	18.74	16.43

Результаты показывают, что метод дискретных особенностей может быть успешно применен для решения задач о гидроупругих колебаниях лопастей в воде.

На рис. 2 показаны две первые формы колебаний консольной прямоугольной пластинки в воде. Отметим, что в данной задаче формы колебаний в жидкости и воздухе практически совпадают.

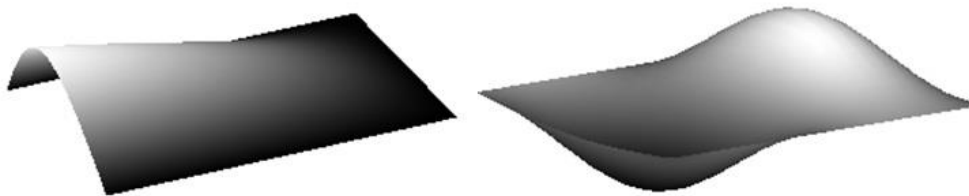


Рис. 2. Формы колебаний прямоугольной пластинки в жидкости

Результаты, приведенные в табл.2, характеризуют изменение частот колебаний в зависимости от угла φ раствора секториальной пластинки (см. рис.2). Здесь же приведены значения коэффициента снижения частоты k .

Таблиця 2. Частоти свободних колибаний секторіальної консольної пластинки.

номер частоты	$\varphi = 30^\circ$			$\varphi = 60^\circ$			$\varphi = 90^\circ$		
	в воздухе	в воде	$k, \%$	в воздухе	в воде	$k, \%$	в воздухе	в воде	$k, \%$
1	370,0	236,2	36,2	384,3	224,2	41,7	389,5	190,4	48,7
2	699,1	71,90	18,2	460,6	339,0	26,4	413,8	280,6	31,5
3	1620,4	1386,1	14,4	742,30	614,6	17,2	530,20	407,0	23,2
4	1858,3	1666,0	11,2	1230,3	1858,3	14,4	747,30	628,2	16,0
5	2218,2	2026,0	9,7	1693,2	2218,2	10,2	1058,3	950,3	10,2

Рассмотрена также секторіальная (рис.3) пластина ($R_1 = 0.115$ м, $R_2 = 0.230$ м, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$), толщина изменяется вдоль радиуса по линейному закону, $\nu = 0.3$, $h(R_1) = 0.006$ м, $h(R_2) = 0.002$ м); $E = 2.1 \times 10^6$ н/м², $\rho_1 = 7900$ кг/м³.

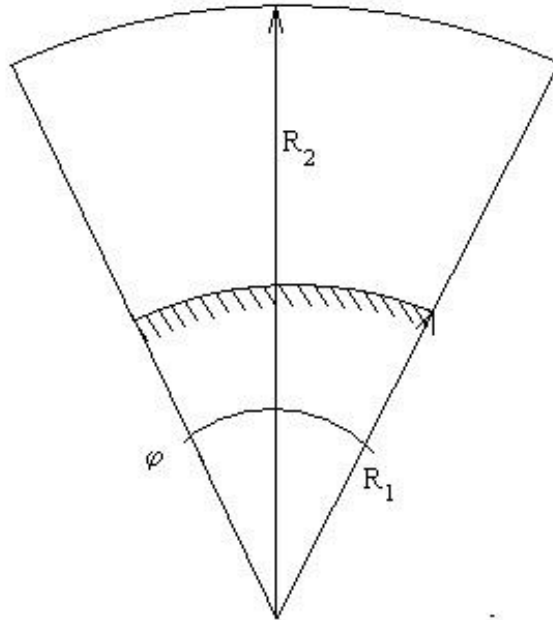


Рис.3. Секторіальная консольная пластина

На рис. 4 показаны две первые формы колебаний консольной секторіальной пластинки в воде. Отметим, что и в данной задаче формы колебаний в жидкости и воздухе практически совпадают.

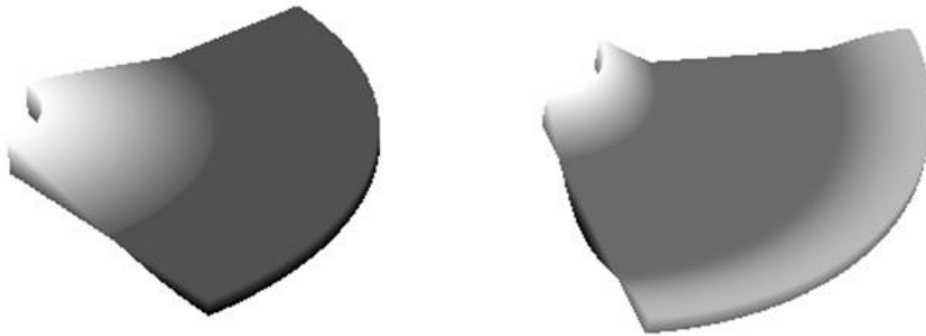


Рис. 4. Формы колебаний секториальной пластины в жидкости

Приведенные расчеты являются тестовыми и служат обоснованием для дальнейшего изучения колебаний в воде реальных лопастей.

4. Выводы

Исследованы малые колебания пластин, моделирующих лопасти гидротурбин в воде. Применен метод заданных форм для определения форм упругих колебаний в жидкости через формы колебаний в вакууме.

Анализ численных результатов показывает, что частоты колебаний в воде и вакууме отличаются существенно; причем разница в частотах уменьшается с ростом номера частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмаков В.Н. К вычислению собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью.—Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1978 г.—С.157-162.
2. Gehrler A, Schmidl R, Sadnik D. Kaplan turbine runner optimization by numerical flow simulation (CFD) and an evolutionary algorithm. Proceedings of 23rd IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems, Japan, 2006.
3. Ганчин Е.В., Ржевская И.Е., Стрельникова Е.А. Прочность, динамика и ресурс лопастей рабочего колеса поворотно-лопастной гидротурбины Двигатели и энергоустановки аэрокосмических летательных аппаратов, т 66 №9, С. 91-94, 2009.
4. Стрельникова Е.А Гиперсингулярные интегральные уравнения в двумерных краевых задачах для уравнения Лапласа и уравнений Ламе. Доп. НАН України №3, с. 27-31. 2001.
5. Muthuveerappan, G.; Ganesan, N.; Veluswami, M.A.. Vibration of square cantilever plate immersed in water. Journal of Sound and Vibration, Volume 61, Issue 3, p. 467-470, 1978

UDC 519.866.6::519.832.4

Determination of probabilistic type intervals for constructing antagonistic game kernel defined on a hyperparallelepiped enclosed within the unit hypercube

V. V. Romanuke

Khmelnitskiy National University, Ukraine

A method of constructing a definitional domain for the kernel of an antagonistic game is suggested. The domain is a hyperparallelepiped enclosed within the unit hypercube. The game is intended for reducing interval uncertainties, where a pure strategy component is between 0 and 1, but the sum of the components is always equal to 1. Such normalization allows to distribute capacities among "rooms" optimally, whose needs are uncertain and enclosed within intervals. In a special case, when the available capacity is not sufficient, an additional capacity that a room may need is found.

Key words: *interval uncertainty, antagonistic game, construction of kernel.*

Пропонується метод побудови області визначення ядра антагоністичної гри. Цією областю є гіперпаралелепіпед усередині одиничного гіперкуба. Гра призначена для усунення інтервальних невизначеностей, де компонента чистої стратегії знаходиться між 0 та 1, але сума усіх компонент завжди дорівнює 1. Така нормалізація дозволяє оптимально розподіляти потужності між "відділеннями", чії потреби невизначені та вкладені в інтервали. У спеціальному випадку, коли наявної потужності недостатньо, визначається додаткова потужність, яку може потребувати відділення.

Ключові слова: *інтервальна невизначеність, антагоністична гра, побудова ядра.*

Предлагается метод построения области определения ядра антагонистической игры. Этой областью является гиперпараллелепипед внутри единичного гиперкуба. Игра предназначена для снижения интервальных неопределённости, где компонента чистой стратегии находится между 0 и 1, а сумма всех компонент равна 1. Такая нормализация позволяет оптимально распределять мощности между "отделениями", чьи потребности неопределены и вложены в интервалы. В специальном случае, когда имеющейся мощности недостаточно, определяется дополнительная мощность, в которой может нуждаться отделение.

Ключевые слова: *интервальная неопределённость, антагонистическая игра, построение ядра.*

Construction of game kernels

The kernel of a game is a function, which is the core of modeling interaction among players. Construction of a game kernel is the crucial point in building the game model. Values of the kernel reflect consequences of applying the strategies chosen by players. Those values may be very susceptible to changes in strategies [1]. Therefore, the kernel must be constructed carefully. It is done quite well for finite games, where every player has a finite number of strategies [2]. Such games have a finite number of situations, which can be evaluated easily. Infinite games, more complicated ones, have infinite number of situations, so it is impossible to survey all the situations without an algorithmic approach. However, such an approach is not always available [3, 4].

Background of building game models

Sets of the players' pure strategies are defined at the start of building the game model. Strategies that are equal/equivalent in the Helly metric are defined as a single

strategy (see, e. g., [2]). The game kernel is defined on the Cartesian product of the strategy sets [2]. Then values of the kernel are obtained either analytically or empirically. In addition, a lot of games model distribution of resources/capacity [1, 3, 5, 6]. So it is convenient to normalize all data, having components of a pure strategy between 0 and 1, where the sum of the components is always equal to 1. In this way, each component belongs to an interval whose values resemble probabilities [2, 4, 7]. But when demands for resources are fluent, normalization of their grand total to 1 calls for a tricky approach.

The goal of the article and the tasks to be accomplished

Given the initial data, the goal is to determine probabilistic type intervals. They will constitute a hyperparallelepiped, on which the game kernel is defined for modeling distribution of a capacity. This hyperparallelepiped will be enclosed within the unit hypercube of the nonnegative orthant in Euclidean space of the corresponding dimensionality. For reaching the goal, the following tasks are to be accomplished:

1. To describe and set conventions of the initial data (related to the capacity units).
2. To state a method of mapping them into probabilistic type intervals.
3. Based on the game model, to give formulae for optimally distributing a capacity.

Eventually, a few examples are to be given. They shall illustrate how to use the mapping method in various cases for distributing a capacity.

Mapping the initial data into probabilistic type intervals

Let V be a capacity of some object (energy, water, gas, funds, heat, oil, etc.). This capacity is to be distributed among N “rooms” or to be divided into N parts, where $N \in \mathbb{N}$. The i -th room needs its part of the capacity within a segment

$$\left[V_i^{<\min>} ; V_i^{<\max>} \right]$$

by

$$V_i^{<\max>} > V_i^{<\min>} > 0.$$

So its capacity to be delivered is

$$V_i \in \left[V_i^{<\min>} ; V_i^{<\max>} \right], \quad i = \overline{1, N}.$$

Also the i -th room has its nominally required capacity r_i (see, e. g., [8]).

As the capacities $\{V_i\}_{i=1}^N$ are fluent, there are three cases of treating them to V . If

$$V \leq \sum_{i=1}^N V_i^{<\min>} \quad (1)$$

then it is divided among N rooms proportionally to their nominal demands $\{r_i\}_{i=1}^N$:

$$V_i^* = r_i V_i^{<\min>} / \sum_{k=1}^N V_k^{<\min>} \quad \forall i = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Otherwise, there are another two cases, which are not as naive as (1) and solution (2):

$$\sum_{i=1}^N V_i^{<\min>} < V < \sum_{i=1}^N V_i^{<\max>} , \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^N V_i^{<\max>} \leq V . \tag{4}$$

The case of inequality (4) is easier. Instead of the initial segments with endpoints $V_i^{<\min>}$ and $V_i^{<\max>}$, we get them as

$$\left[V_i^{<\min>} / V ; V_i^{<\max>} / V \right] = [a_i ; b_i] \subset (0; 1) \text{ by } i = \overline{1, N} . \tag{5}$$

Denote a demand of the i -th room by x_i and its supply by y_i . Here $\mathbf{X} = (x_i)_{1 \times N}$, $\mathbf{Y} = (y_i)_{1 \times N}$ by $x_i \in [a_i ; b_i]$ and $y_i \in [a_i ; b_i]$. Let $\eta(z)$ be a function that maps a positive z into a positive. Then the kernel of a game model for the distribution is

$$K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \max \left\{ \left\{ \eta(x_k) / \eta(y_k) \right\}_{k=1}^N , \eta \left(1 - \sum_{n=1}^N x_n \right) / \eta \left(1 - \sum_{n=1}^N y_n \right) \right\} . \tag{6}$$

This kernel (6) is defined on a hyperparallelepiped

$$\left(\bigtimes_{k=1}^N [a_k ; b_k] \right) \times \left(\bigtimes_{n=1}^N [a_n ; b_n] \right) \subset \bigtimes_{j=1}^{2N} (0; 1) \subset \bigtimes_{j=1}^{2N} [0; 1] \subset \mathbb{R}^{2N} . \tag{7}$$

It is solved easily for the function $\eta(z) = z$, where the game becomes strictly convex [2, 7]. The solution $\mathbf{Y}^* = (y_i^*)_{1 \times N}$ is a pure strategy [2] of the second player (distributor). Then [7]

$$y_i^* = b_i / \left(1 + \sum_{m=1}^N b_m - \sum_{m=1}^N a_m \right) \tag{8}$$

by

$$b_i / \left(1 + \sum_{m=1}^N b_m - \sum_{m=1}^N a_m \right) \geq a_i \quad \forall i = \overline{1, N} . \tag{9}$$

If a condition in (9) is violated, the solution has special forms [7]. Anyway, here

$$V_i^* = y_i^* V \quad \text{and} \quad V_{\text{off}} = \left(1 - \sum_{i=1}^N y_i^* \right) V \tag{10}$$

are the optimal capacity delivered to the i -th room and capacity that is drawn off (or ignored/rejected), respectively. Particularly, when $N = 1$ goes into (6), we simply have the kernel [2]

$$K(x, y) = \max \{x/y, (1-x)/(1-y)\} \text{ by } x = x_1, y = y_1, \quad (11)$$

which is an example of the simplest model for reducing interval uncertainty [2, 6, 7]. The optimal strategy of the distributor in the game with kernel (11) is

$$y^* = b/(1+b-a).$$

For solving the case of inequality (3), we take a fictional capacity V_+ and intervals:

$$V_+ = \sum_{i=1}^N V_i^{<\max>}, \quad [V_i^{<\min>}/V_+; V_i^{<\max>}/V_+] = [a_i; b_i] \subset (0; 1) \text{ by } i = \overline{1, N}. \quad (12)$$

When y_i^* is found in the game with kernel (6) on (7), then we check whether

$$y_i^* \leq (V_i^{<\max>}/V_+)^2. \quad (13)$$

If (13) is true, then the optimal capacity delivered to the i -th room is $V_i^* = y_i^* V_+$. If (13) is false, then

$$y_i^{**} = (V_i^{<\max>}/V_+)^2, \quad V_i^* = y_i^{**} V_+ = (V_i^{<\max>}/V_+)^2 V_+, \quad V_i^{<\text{add}>} = (y_i^* - y_i^{**}) V_+, \quad (14)$$

where $V_i^{<\text{add}>}$ is an additional capacity that this room needs.

Examples of using the mapping method in various cases

Considering a few examples, we should not forget that the solution depends on kernel (6). Firstly, let $V_1 \in [20; 30]$ for a single room. Then, using normalization (5) and solution (8) by (9),

$$[a_1; b_1] = [20/V; 30/V], \quad y_1^* = 30/(V+10), \\ V_{\text{off}} = (V-20)V/(V+10) \text{ for any } V \geq 30.$$

If $20 < V < 30$, then we use (12), (13), (14):

$$y_1^* = 30/(V+10) \leq (30/V)/30^2 = V/30$$

by

$$V^2 + 10V - 900 \geq 0,$$

whence these inequalities are true by $V \geq 5\sqrt{37} - 5$. This implies that

$$y_1^* = 30/(V+10) \text{ by } V \in [5\sqrt{37} - 5; 30]$$

and

$$y_1^{**} = V/30 \text{ by } V \in (20; 5\sqrt{37} - 5].$$

Suppose that $V_1 \in [20; 30]$ and $V_2 \in [25; 40]$ for $N = 2$, $V \geq 70$. We have hyperparallelepiped (7) as

$$[a_1; b_1] \times [a_2; b_2] = [20/V; 30/V] \times [25/V; 40/V].$$

Here we get just strategies

$$y_1^* = 30/(V + 25)$$

and

$$y_2^* = 40/(V + 25),$$

inasmuch as

$$y_1^* = 30/(V + 25) \geq 20/V$$

is followed with $V \geq 50$, and

$$y_2^* = 40/(V + 25) \geq 25/V$$

is followed with $V \geq 125/3$. If $45 < V < 70$, then the fictional capacity $V_+ = 70$, hyperparallelepiped (7) is

$$[a_1; b_1] \times [a_2; b_2] = [2/7; 3/7] \times [5/14; 4/7],$$

whereupon points $y_1^* = 6/19$ and $y_2^* = 8/19$ are checked whether (13) is true:

$$6/19 \leq (30V)/70^2 = 3V/490$$

is followed with $V \geq 980/19$, and $8/19 \leq 4V/490$ is followed with $V \geq 980/19$.

Hence,

$$y_1^* = 6/19, \quad y_2^* = 8/19 \quad \text{by } V \in [980/19; 70)$$

and

$$y_1^{**} = 3V/490, \quad y_2^{**} = 4V/490 \quad \text{by } V \in (45; 980/19],$$

where

$$V_1^{\langle \text{add} \rangle} \approx 22.11 - 0.43V, \quad V_2^{\langle \text{add} \rangle} \approx 29.47 - 0.57V$$

by (14).

Surely, it is much easier when interval data are identical. Let $V_i \in [30; 40]$ for $i = \overline{1, 3}$. The case $V \geq 120$ is trivial:

$$y_i^* = 40/(V + 30) \quad \forall i = \overline{1, N}.$$

If $90 < V < 120$, then $y_i^* = 4/15$ and $4/15 \leq V/360$ is followed with $V \geq 96$, whence

$$y_i^* = 4/15 \quad \text{by } V \in [96; 120)$$

and

$$y_i^{**} = V/360 \quad \text{by } V \in (90; 96].$$

An additional capacity that these rooms need is

$$V_i^{<add>} = 32 - V/3, \quad i = \overline{1, 3}.$$

The considered examples do not cover all the peculiarities in using the method of probabilistic type intervals, but they give a simple illustration of how to solve cases of inequalities (3) and (4). Cases with a larger amount of intervals are solved similarly.

Conclusion

The suggested approach allows determining probabilistic type intervals that constitute hyperparallelepiped (7). This is done either with (5) by (4) or with (12) by (3). Once the game with kernel (6) on hyperparallelepiped (7) is given, the second player's optimal strategy in this game's solution can be used for distributing a capacity among "rooms". This is executed either with (10) or with (14) by when inequality (13) fails. Moreover, in the case of inequality (4), superfluous capacity is ignored. If (3) is true and (13) is false, we know what capacity is needed for the i -th room. The easiest case (1), standing apart from the game model solutions, is nonetheless very important giving us capacities (2). However, if nominal demands are unknown, the capacity should be divided into equal parts. Thus, further study can be focused on violations of inequalities in (9). Such violations generate "cyclic" solutions given in a few steps [7].

REFERENCES

1. Ning Z. A message distribution mechanism based on distributed game theory in LTE-V network / Z. Ning, P. Wang, N. N. Van // *Procedia Computer Science*. – 2017. – Vol. 107. – P. 590–598.
2. Воробьёв Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры / Воробьёв Н. Н. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 496 с. – Title in English : Vorob'yov, N. N. (1984) Game theory fundamentals. Noncooperative games. Moscow: Nauka, 496.
3. Lozano S. Information sharing in DEA: A cooperative game theory approach / S. Lozano // *European Journal of Operational Research*. – 2012. – Vol. 222, Iss. 3. – P. 558–565.
4. Information, Inference and Decision / Ed. by G. Menges. – Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1974. – 201 p.
5. Madani K. Game theory and water resources / K. Madani // *Journal of Hydrology*. – 2010. – Vol. 381, Iss. 3–4. – P. 225–238.
6. Azzedin F. Modeling BitTorrent choking algorithm using game theory / F. Azzedin, M. Yahaya // *Future Generation Computer Systems*. – 2016. – Vol. 55. – P. 255–265.
7. Romanuke V. V. Model of removing partial indeterminacies of the probabilistic type as maximal disbalance minimization / V. V. Romanuke // *Scientific bulletin of CNU. Computer systems and components*. – 2011. – Vol. 2, Iss. 1. – P. 32–40.
8. Feng G. Characterization of pore volume of cumulative water injection distribution / G. Feng, M. Yu // *Petroleum*. – 2015. – Vol. 1, Iss. 2. – P. 158–163.

УДК 517.988 : 519.632

Побудова двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійної задачі Нав'є

М. В. Сидоров

Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна

Рассмотрена однородная задача Навье для нелинейного уравнения четвертого порядка. Для построения двусторонних приближений к положительному решению этой задачи используются методы теории полуупорядоченных пространств, в частности, результаты В.И. Опоיצева о разрешимости операторных уравнений с гетеротонным оператором. Работа и эффективность разработанного метода продемонстрирована вычислительным экспериментом для задачи со степенной нелинейностью.

Ключевые слова: положительное решение, нелинейная задача Навье, гетеротонный оператор, двусторонние приближения.

Розглядається однорідна задача Нав'є для нелінійного рівняння четвертого порядку. Для побудови двобічних наближень до додатного розв'язку цієї задачі використовуються методи теорії напівупорядкованих просторів, зокрема, результати В.І. Опоїцева про розв'язність операторних рівнянь з гетеротонним оператором. Робота і ефективність розробленого метода продемонстрована обчислювальним експериментом для задачі зі степенною нелінійністю.

Ключові слова: додатний розв'язок, нелінійна задача Нав'є, гетеротонний оператор, двобічні наближення.

A homogeneous Navier problem for a semilinear four-order elliptic equations has been considered. To construct two-way approximations to a positive solution of this problem the methods of the theory of semi-ordered spaces, in particular, the results of V.I. Opoicev on the solvability of operator equations with a heterotone operator has been used. The work and the effectiveness of the developed method have been demonstrated by a computational experiment for the problem with power non-linearity.

Key words: positive solution, semilinear Navier problem, heterotone operator, two-sided approach.

1. Постановка задачі

Розглянемо однорідну задачу Нав'є для нелінійного рівняння четвертого порядку:

$$\Delta^2 u = f(\mathbf{x}, u, -\Delta u) \text{ у } \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \Delta u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, Δ – оператор Лапласа, Δ^2 – бігармонічний оператор.

Вважатимемо, що $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ – обмежена область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, функція $f(\mathbf{x}, u, v)$ невід'ємна та неперервна за сукупністю змінних \mathbf{x} , u , v , якщо $\mathbf{x} \in \Omega$, $u > 0$, $v > 0$.

Задача (1), (2) виникає, наприклад, при математичному моделюванні різних процесів теорії пружності. Дослідженню задачі (1), (2) присвячено багато робіт [6 – 11 та інші], але увага у цих роботах була зосереджена в основному на з'ясуванні умов існування та єдиності додатного розв'язку задачі чи на умовах наявності розв'язку з радіальною симетрією для випадку, коли Ω – одинична ку-

ля, і не було запропоновано ефективного алгоритму чисельного знаходження розв'язку.

Метою даної роботи є розробка нових ітераційних методів розв'язання крайової задачі (1), (2), які мають двобічний характер збіжності до шуканого розв'язку. Двобічні наближені методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь, засновані на використанні теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах, розроблялись у роботах [1 – 4]. Побудова двобічних наближень до розв'язків крайових задач для рівнянь вищих порядків не розглядалася. Отже, тема роботи є актуальною.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті в [1], і розповсюджує їх на рівняння вищих порядків.

2. Побудова двобічних наближень

Задачу (1), (2) замінимо еквівалентною системою нелінійних рівнянь. Поклавши $u_1 = u$, $u_2 = -\Delta u$, отримаємо задачу

$$-\Delta u_1 = u_2, \quad -\Delta u_2 = f(\mathbf{x}, u_1, u_2) \quad \text{у } \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad (3)$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_2|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Для аналізу задачі (3), (4) та побудови двобічних наближень до її додатного розв'язку використаємо методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [2, 4].

Нехай $C_2(\bar{\Omega}) = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2) : u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})\}$ – банахів простір неперервних у $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ вектор-функцій з нормою $\|\mathbf{u}\|_2 = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|\}$, де $\|u_i\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u_i(\mathbf{x})|$,

$i = 1, 2$. Виділимо у $C_2(\bar{\Omega})$ конус

$$\mathbf{K}_+ = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in C_2(\bar{\Omega}) : u_i(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, i = 1, 2\}$$

вектор-функцій з невід'ємними координатами. Зазначимо, що конус \mathbf{K}_+ у $C_2(\bar{\Omega})$ є нормальним (і навіть гострим) [2, 4].

За допомогою конуса \mathbf{K}_+ у просторі $C_2(\bar{\Omega})$ введемо напівупорядкованість за правилом: для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C_2(\bar{\Omega})$ $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$, якщо $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in \mathbf{K}_+$, тобто

$$\mathbf{u} \leq \mathbf{v}, \quad \text{якщо } u_1(\mathbf{x}) \leq v_1(\mathbf{x}), \quad u_2(\mathbf{x}) \leq v_2(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Від задачі (3), (4) перейдемо до системи інтегральних рівнянь Гаммерштейна

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) u_2(\xi) d\xi, \quad (5)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) f(\xi, u_1(\xi), u_2(\xi)) d\xi, \quad (6)$$

де $G(\mathbf{x}, \xi)$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ у області Ω , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$.

Розв'язком (узагальненим) задачі (3), (4) називатимемо вектор-функцію $\mathbf{u}^* \in C_2(\bar{\Omega})$, яка є розв'язком системи (5), (6). Тоді функцію $u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x})$ природно назвати узагальненим розв'язком задачі (1), (2)

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор \mathbf{T} , який діє у $\mathbf{C}_2(\bar{\Omega})$ за правилом, яке визначається правою частиною системи рівнянь (5), (6):

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \left(\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) u_2(\xi) d\xi, \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) f(\xi, u_1(\xi), u_2(\xi)) d\xi \right). \quad (7)$$

Оскільки $f(\mathbf{x}, u_1, u_2) \geq 0$, якщо $\mathbf{x} \in \Omega$, $u_1, u_2 \geq 0$, та $G(\mathbf{x}, \xi) \geq 0$, $\mathbf{x}, \xi \in \Omega$, $\mathbf{x} \neq \xi$, то оператор \mathbf{T} є додатним, тобто залишає інваріантним конус \mathbf{K}_+ : $\mathbf{T}(\mathbf{K}_+) \subset \mathbf{K}_+$.

Припустимо, що функція $f(\mathbf{x}, u_1, u_2)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u})$, де неперервна за сукупністю змінних \mathbf{x} , \mathbf{v} , \mathbf{w} функція $\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \hat{f}(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2)$ монотонно зростає за v_1, v_2 і монотонно спадає за w_1, w_2 для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$. Тоді оператор \mathbf{T} вигляду (7) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \left(\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) v_2(\xi) d\xi, \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, v_1(\xi), v_2(\xi), w_1(\xi), w_2(\xi)) d\xi \right). \quad (8)$$

Оператори \mathbf{T} і $\hat{\mathbf{T}}$ є цілком неперервними [2, 4].

У конусі \mathbf{K}_+ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$, де $\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = (v_1^0(\mathbf{x}), v_2^0(\mathbf{x}))$, $\mathbf{w}^0(\mathbf{x}) = (w_1^0(\mathbf{x}), w_2^0(\mathbf{x}))$, умовами

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \geq \mathbf{v}^0, \quad \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{w}^0, \mathbf{v}^0) \leq \mathbf{w}^0,$$

тобто

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) v_2^0(\xi) d\xi \geq v_1^0(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, v_1^0(\xi), v_2^0(\xi), w_1^0(\xi), w_2^0(\xi)) d\xi \geq v_2^0(\mathbf{x}), \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) w_2^0(\xi) d\xi \leq w_1^0(\mathbf{x}), \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, w_1^0(\xi), w_2^0(\xi), v_1^0(\xi), v_2^0(\xi)) d\xi \leq w_2^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (12)$$

Якщо межа $\partial\Omega$ області Ω складається зі скінченної кількості кусків ліній $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, s$, де кожна $\sigma_i(\mathbf{x})$ – елементарна функція, то за допомогою методу R -функцій [5] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію $\omega(\mathbf{x})$ таку, що:

- а) $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω ;
- б) $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$;
- в) $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$ на $\partial\Omega$.

Тоді сильно інваріантний конусний відрізок можна шукати у вигляді $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle = \langle \alpha\omega(\mathbf{x}), \beta\omega(\mathbf{x}) \rangle$, де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $0 \leq \alpha_1 < \beta_1$,

$0 \leq \alpha_2 < \beta_2$, задовольняють системі нерівностей

$$\alpha_2 \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \omega(\xi) d\xi \geq \alpha_1 \omega(\mathbf{x}),$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, \alpha_1 \omega(\xi), \alpha_2 \omega(\xi), \beta_1 \omega(\xi), \beta_2 \omega(\xi)) d\xi \geq \alpha_2 \omega(\mathbf{x}),$$

$$\beta_2 \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \omega(\xi) d\xi \leq \beta_1 \omega(\mathbf{x}),$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, \beta_1 \omega(\xi), \beta_2 \omega(\xi), \alpha_1 \omega(\xi), \alpha_2 \omega(\xi)) d\xi \leq \beta_2 \omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Сформуємо ітераційний процес за схемою

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)}), \quad \mathbf{w}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}^0, \quad \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0,$$

тобто

$$v_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) v_2^{(k)}(\xi) d\xi, \quad (13)$$

$$v_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, v_1^{(k)}(\xi), v_2^{(k)}(\xi), w_1^{(k)}(\xi), w_2^{(k)}(\xi)) d\xi, \quad (14)$$

$$w_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) w_2^{(k)}(\xi) d\xi, \quad (15)$$

$$w_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, w_1^{(k)}(\xi), w_2^{(k)}(\xi), v_1^{(k)}(\xi), v_2^{(k)}(\xi)) d\xi, \quad (16)$$

$$v_1^{(0)}(\mathbf{x}) = v_1^0(\mathbf{x}), \quad v_2^{(0)}(\mathbf{x}) = v_2^0(\mathbf{x}), \quad (17)$$

$$w_1^{(0)}(\mathbf{x}) = w_1^0(\mathbf{x}), \quad w_2^{(0)}(\mathbf{x}) = w_2^0(\mathbf{x}). \quad (18)$$

З огляду на сильну інваріантність побудованого конусного відрізка та гетеротонність оператора \mathbf{T} , для якого оператор $\hat{\mathbf{T}}$ є супровідним, можна зробити висновок про те, що послідовність $\{\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не спадає за конусом \mathbf{K}_+ , а послідовність $\{\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не зростає за конусом \mathbf{K}_+ . Крім того, з нормальності конуса \mathbf{K}_+ і цілком неперервності оператора $\hat{\mathbf{T}}$ впливає існування границь $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$ і $\mathbf{w}^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} \leq \mathbf{v}^{(1)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^* \leq \mathbf{w}^* \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(1)} \leq \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0.$$

Якщо отримали, що $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^* = \mathbf{u}^*$, то \mathbf{u}^* – єдина на конусному відріжку $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$ нерухома точка оператора \mathbf{T} , а отже, \mathbf{u}^* – єдиний на $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$ розв'язок крайової задачі (3), (4).

Теорема. Якщо система нерівностей (9) – (12) має розв'язок $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, такий, що $0 \leq \alpha_1 < \beta_1$, $0 \leq \alpha_2 < \beta_2$, то ітераційний процес (13) – (18) збігається: $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}^*$, $\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{w}^*$, причому

$$\mathbf{v}^{(0)} \leq \mathbf{v}^{(1)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^* \leq \mathbf{w}^* \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(1)} \leq \mathbf{w}^{(0)}.$$

Якщо ж при цьому $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^* = \mathbf{u}^*$, то \mathbf{u}^* – єдина на $\langle \alpha\omega(\mathbf{x}), \beta\omega(\mathbf{x}) \rangle$ нерухома точка оператора (7).

Зауважимо, що перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу є те, що на кожній k -й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку $\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x}))$:

$$\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{(k)}\|_2 \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k)}\|_2.$$

Тоді, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \{\max(w_1^{(k)}(\mathbf{x}) - v_1^{(k)}(\mathbf{x})), \max(w_2^{(k)}(\mathbf{x}) - v_2^{(k)}(\mathbf{x}))\} < 2\varepsilon$ і з точністю ε можна вважати, що $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x})$.

3. Результати обчислювального експерименту

Для проведення обчислювального експерименту була обрана задача

$$\Delta^2 u = \sqrt{u} \text{ у } \Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : |\mathbf{x}| < 1\} \subset \mathbf{R}^2, \quad (19)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \Delta u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (20)$$

Заміною $u_1 = u$, $u_2 = -\Delta u$ задачу (19), (20) зводимо до системи диференціальних рівнянь

$$-\Delta u_1 = u_2, \quad -\Delta u_2 = \sqrt{u_1} \text{ у } \Omega,$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_2|_{\partial\Omega} = 0,$$

яку в свою чергу замінимо системою інтегральних рівнянь Гаммерштейна

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) u_2(\xi) d\xi, \quad u_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{u_1(\xi)} d\xi, \quad (21)$$

де $G(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho r_{\mathbf{x}\xi^1}}{r_{\mathbf{x}\xi}}$, де $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, точки ξ і ξ^1 симетричні відносно кола

одиничного радіуса, $r_{\mathbf{x}\xi}$, $r_{\mathbf{x}\xi^1}$ – відстані між точками \mathbf{x} , ξ і \mathbf{x} , ξ^1 відповідно.

З системою (21) пов'яжемо гетеротонний оператор

$$\mathbf{T}(u_1, u_2) = \left(\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) u_2(\xi) d\xi, \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{u_1(\xi)} d\xi \right), \quad (22)$$

для якого супровідний оператор має вигляд

$$\hat{\mathbf{T}}(v_1, v_2, w_1, w_2) = \left(\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) v_2(\xi) d\xi, \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{v_1(\xi)} d\xi \right).$$

Для оператора (22) сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$, де

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = (v_1^0(\mathbf{x}), v_2^0(\mathbf{x})) = (\alpha_1\omega(\mathbf{x}), \alpha_2\omega(\mathbf{x})),$$

$$\mathbf{w}^0(\mathbf{x}) = (w_1^0(\mathbf{x}), w_2^0(\mathbf{x})) = (\beta_1 \omega(\mathbf{x}), \beta_2 \omega(\mathbf{x})),$$

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1, \quad 0 \leq \alpha_2 < \beta_2,$$

а функція $\omega(\mathbf{x})$, що задовольняє умовам а) – в) з п. 2, обрана у вигляді

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

Система нерівностей для визначення сталих $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ має вигляд:

$$\alpha_2 \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \omega(\xi) d\xi \geq \alpha_1 \omega(\mathbf{x}), \quad \sqrt{\alpha_1} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{\omega(\xi)} d\xi \geq \alpha_2 \omega(\mathbf{x}),$$

$$\beta_2 \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \omega(\xi) d\xi \leq \beta_1 \omega(\mathbf{x}), \quad \sqrt{\beta_1} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{\omega(\xi)} d\xi \leq \beta_2 \omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Розв'язком цієї системи нерівностей є, наприклад, числа $\alpha_1 = 0,000868$, $\alpha_2 = 0,00694$, $\beta_1 = 0,00321$, $\beta_2 = 0,0171$.

Було проведено десять ітерацій за схемою

$$v_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) v_2^{(k)}(\xi) d\xi, \quad v_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{v_1^{(k)}(\xi)} d\xi,$$

$$w_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) w_2^{(k)}(\xi) d\xi, \quad w_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{w_1^{(k)}(\xi)} d\xi,$$

$$v_1^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_1 \omega(\mathbf{x}), \quad v_2^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_2 \omega(\mathbf{x}),$$

$$w_1^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_1 \omega(\mathbf{x}), \quad w_2^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_2 \omega(\mathbf{x}).$$

В таблиці 1 наведено дані як змінюється оцінка $\varepsilon_i^{(k)} = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \frac{1}{2} |w_i^{(k)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k)}(\mathbf{x})|$ норми похибки $\|u_i^* - u_i^{(k)}\|$ наближеного розв'язку $u_i^{(k)}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, в залежності від номера ітерації k , $k = 0, 1, \dots, 10$. На рис. 1 наведено графіки перерізів верхніх $w_1^{(k)}(\mathbf{x})$, $w_2^{(k)}(\mathbf{x})$ та нижніх $v_1^{(k)}(\mathbf{x})$, $v_2^{(k)}(\mathbf{x})$ наближень при $x_2 = 0$ для $k = 0, 2, 6, 8, 10$.

Отже, з точністю $0,27 \cdot 10^{-4}$ наближеним розв'язком задачі (19) – (20) буде функція $u^{(10)}(\mathbf{x}) = u_1^{(10)}(\mathbf{x}) = \frac{v_1^{(10)}(\mathbf{x}) + w_1^{(10)}(\mathbf{x})}{2}$. На рис. 2 і 3 відповідно наведено поверхню та лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(10)}(\mathbf{x})$. Зауважимо, що розв'язок $u^{(10)}(\mathbf{x})$ має радіальну симетрію. Через це у таблиці 2 наведено знайдені з точністю $0,27 \cdot 10^{-4}$ значення наближеного розв'язку $u^{(10)}(\mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x}_i = (ih, 0)$, $h = 0,25$, $i = 0, 1, 2, 3$, розташованих на промені $\varphi = 0$, при цьому отримано, що $\|u^{(10)}\| = 0,00133$.

Таблиця 1. Значення оцінки похибки наближеного розв'язку

Номер ітерації k	$\varepsilon_1^{(k)}$	$\varepsilon_2^{(k)}$
0	$0,59 \cdot 10^{-3}$	$0,25 \cdot 10^{-2}$
1	$0,48 \cdot 10^{-3}$	$0,21 \cdot 10^{-2}$
2	$0,37 \cdot 10^{-3}$	$0,15 \cdot 10^{-2}$
3	$0,27 \cdot 10^{-3}$	$0,11 \cdot 10^{-2}$
4	$0,20 \cdot 10^{-3}$	$0,79 \cdot 10^{-3}$
5	$0,14 \cdot 10^{-3}$	$0,59 \cdot 10^{-3}$
6	$0,11 \cdot 10^{-3}$	$0,41 \cdot 10^{-3}$
7	$0,73 \cdot 10^{-4}$	$0,30 \cdot 10^{-3}$
8	$0,54 \cdot 10^{-4}$	$0,21 \cdot 10^{-3}$
9	$0,37 \cdot 10^{-4}$	$0,15 \cdot 10^{-3}$
10	$0,27 \cdot 10^{-4}$	$0,10 \cdot 10^{-3}$

Таблиця 2. Значення наближеного розв'язку в точках $\mathbf{x}_i = (0, 25i, 0)$, $i = 0, 1, 2, 3$

$\mathbf{x}_i = (0, 25i, 0)$	(0, 0)	(0, 25, 0)	(0, 5, 0)	(0, 75, 0)
$u^{(10)}(\mathbf{x}_i)$	0,001333	0,00121	0,00088	0,00044

4. Висновки

В роботі вперше запропоновано метод побудови двобічних наближень до додатного розв'язку однорідної задачі Нав'є для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором. Обчислювальний експеримент, проведений для задачі зі степенною нелінійністю, продемонстрував можливості та ефективність метода. Запропонований підхід до чисельного розв'язання напівлінійних рівнянь вищих порядків може бути використаний при розв'язанні різних прикладних задач, математичними моделями яких є задача (1), (2).

Обмеженість використання запропонованого метода може бути пов'язана з тим, що функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-D$ відома лише для певної кількості класичних областей. При розгляді задачі (1), (2) у областях некласичної геометрії або у областях, для яких функція Гріна відома, але має складний аналітичний вираз, для побудови відповідної (1), (2) системи інтегральних рівнянь можна використати підхід, заснований на використанні замість функції Гріна відповідної квазіфункції [5].

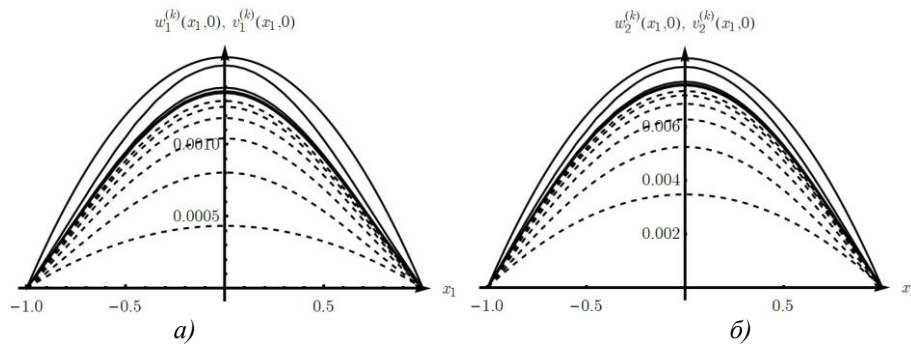


Рис. 1. Графіки перерізів верхніх та нижніх наближень $w_1^{(k)}(x_1, 0)$, $v_1^{(k)}(x_1, 0)$ (а) та $w_2^{(k)}(x_1, 0)$, $v_2^{(k)}(x_1, 0)$ (б), $k = 0, 2, 6, 8, 10$

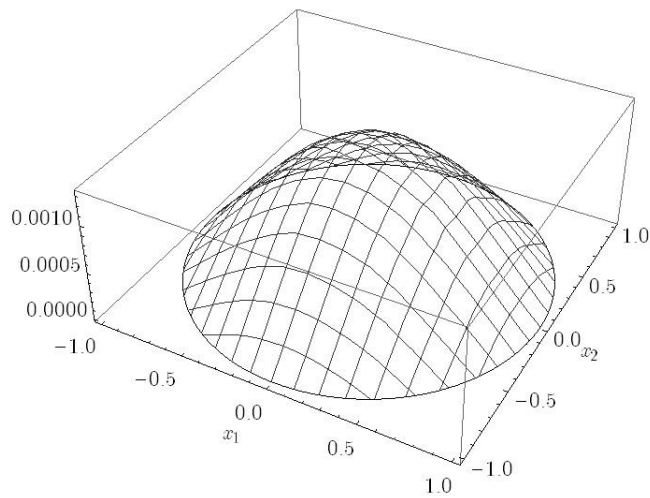


Рис. 2. Графік поверхні наближеного розв'язку $u^{(10)}(\mathbf{x})$

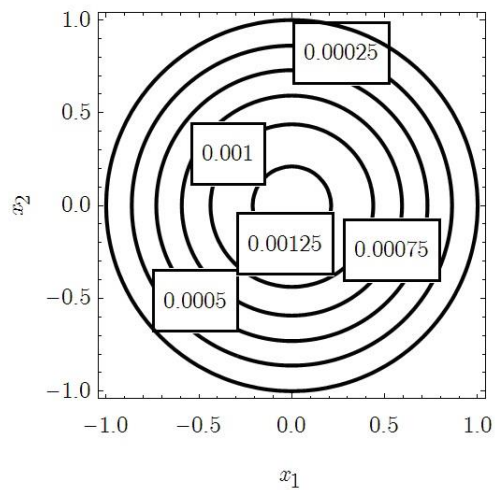


Рис.3. Графік та ліній рівня наближеного розв'язку $u^{(10)}(\mathbf{x})$

ЛІТЕРАТУРА

1. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2015. – № 3. – С. 107 – 120.
2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
3. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. – К.: Наук. думка, 1980. – 268 с.
4. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.
5. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
6. Baraket S., Bazarbacha I., Trabelsi N. Construction of singular limits for four-dimensional elliptic problems with exponentially dominated nonlinearity // Bulletin des Sciences Mathematiques. – 2007. – Vol. 131. – №. 7. – Pp. 670-685.
7. Dalmasso R. Uniqueness theorems for some fourth-order elliptic equations // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1995. – Vol. 123. – №. 4. – Pp. 1177-1183.
8. Dammak M. et al. Singular limits for 4-dimensional semilinear elliptic problems with exponential nonlinearity adding a singular source term given by Dirac masses // Differential and Integral Equations. – 2008. – Vol. 21. – №. 11-12. – Pp. 1019-1036.
9. Omrane I. B., Dammak M. A Generalized four dimensional Emden-Fowler equation with exponential nonlinearity // Communications in Applied Analysis. – 2009. – Vol. 13. – №. 3. – Pp. 431.
10. Peletier L. A., Van der Vorst R. Existence and non-existence of positive solutions of non-linear elliptic systems and the biharmonic equation // Differential and Integral Equations. – 1992. – Vol. 5. – №. 4. – Pp. 747-767.
11. Van der Vorst R. Fourth order elliptic equations with critical growth // Comptes Rendus-Academie des Sciences Paris Serie 1. – 1995. – Vol. 320. – Pp. 295-295.

УДК 519.683+519.24+511.333

Распределение разностей между соседними простыми числами

Ю. К. Чернышев

Национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Применением ЭВМ для построения гистограммы расстояний между соседними простыми числами (т. н. близнецами различных порядков) обнаружено существование периода величины 6 между локальными максимумами в статистическом ряде распределения этих величин. Для чисел, меньших 2850000000, показано, что наиболее часто встречается расстояние, равное 6. Путём нормирования получена приближённая универсальная модель распределения пробелов. Полученные результаты целесообразно применять для ускорения поиска простых сомножителей, что используется в современных методах шифрования данных.

Ключевые слова: простые числа, числа-близнецы различных порядков, ряды распределения

Застосуванням ЕОМ для побудови гістограми відстаней між сусідніми простими числами (т. з. близнюками різних порядків) виявлено існування періоду величини 6 між локальними максимумами в статистичному ряді розподілу цих величин. Для чисел, менших 2850000000, показано, що найбільш часто зустрічається відстань, яка дорівнює 6. Шляхом нормування отримана наближена універсальна статистична модель розподілу відстаней. Отримані результати доцільно застосовувати для прискорення пошуку простих співмножників, що використовується в сучасних методах шифрування даних.

Ключові слова: прості числа, числа-близнюки різних порядків, ряди розподілення

Using a computer for constructing a histogram distances between adjacent prime numbers (so-called twins of different orders) has revealed the existence of a period of the magnitude 6 between local maximum in the statistical row. An approximate universal statistical model of the gap distribution has been obtained by the normalization. The obtained results can be applied for acceleration in the search for prime factors, which is used in modern methods of data encryption.

Keywords: prime numbers, twin numbers of different orders, distribution series.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В основе современных методов шифрования текстовых сообщений лежат принципы, заложенные ещё Эратосфеном, Диофантом, П. Ферма, Л. Эйлером и многими другими математиками. Для использования, например, метода несимметричного шифрования RSA [1, 2] требуется знание достаточно больших двух простых чисел [3, 4]. Методам поиска чисел, с высокой вероятностью являющихся простыми, посвящено большое количество трудов специалистов теории чисел. Вычислительные сложности требуют применения мощных ЭВМ и изощрённых алгоритмов, поскольку вручную такие задачи неразрешимы. В данной работе предложено осуществить построение статистического ряда распределения для интервалов между соседними простыми числами. В качестве исходной рассматривается отрезок длины m возрастающей последовательности простых чисел $p_i, p_{i+1} > p_i, i = 1, \dots, \infty$, не превышающих некоторого заданного

предельного числа n : $p_m \leq n < p_{m+1}$. Пары соседние чисел p_i, p_{i+1} будем называть «близнецами порядка $gap \equiv 2k$ », если разность (gap , пробел [5]) равна этому порядку: $p_{i+1} - p_i = 2k$. Порядок – заведомо чётное число ввиду нечётности простых чисел, больших $p_1 = 2$. Вопрос о структуре множества порядков близнецов издавна рассматривался вместе с проблемами, связанными с распределением простых чисел и их генерированием [6, 7]. К настоящему времени известно следующее.

- Для сколь угодно большого числа существуют близнецы порядка, превышающего это число.
- Отношение количества близнецов любого конечного порядка к количеству простых чисел m , не превышающих числа n и содержащих эти близнецы, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.
- Вопрос о конечности числа близнецов остаётся открытым, невзирая на некоторые успехи, достигнутые в 2013 – 2017 гг.
- «...промежутки преимущественно делятся на 6; промежутки между промежутками также проявляют своеобразный характер» [5].

В данной работе предложен статистический подход к изучению и уточнению структуры множества порядков близнецов.

2. Выбор метода построения последовательности простых чисел

Прежде всего, с точки зрения разрешимости поставленной задачи следует выбрать способ построения последовательности простых чисел наибольшей доступной для практических вычислений длины. Базовым решетом *sieve* является булев массив длины $n_0 = 0,95 \cdot 10^9$, изначально заполненный булевыми единицами. Исключением составных чисел согласно алгоритму Эратосфена может быть получен массив той же длины $n = n_0$, номера позиций с булевыми единицами которого и образуют отрезок простых чисел на исходном интервале. Цикл обнаружения первичных простых чисел ограничивается пределом $lim = \lfloor \sqrt{n_0 + 1} \rfloor$.

Простейшая модификация заключается в исключении из рассмотрения позиций с чётными номерами, что даёт возможность получить последовательность простых чисел вплоть до $n = 2n_0 = 1,9 \cdot 10^9$ без увеличения требуемой памяти ЭВМ; при этом достаточно ограничиться $lim = \lfloor \sqrt{n_0 / 2 + 1} \rfloor$. Проверка чётности сводится к выяснению значения младшего бита, т.е. требует очень малого машинного времени.

В данной работе использована модификация, сводящаяся к исключению из рассмотрения тех номеров позиций в модифицированном решете, которые делятся либо на два, либо на три. Это позволило довести предельное значение последовательности простых чисел до $n = 3n_0 = 2,85 \cdot 10^9$, причём $lim = \lfloor \sqrt{n_0 / 3 + 1} \rfloor$. Общее количество простых чисел на достигнутом интервале: $m = 137568155$. Понятный для дальнейшего сжатия путь, основанный на

исключении чисел, делящихся на 5 (или большие простые), сопряжён с потерей времени для определения делимости на числа, большие 2, а потому и не рассматривался. Основной фрагмент алгоритма приведен в Табл. 1. Для иллюстрации использован язык Pascal.

Табл.1. Основная часть построения модифицированного решета

<code>lim := trunc(sqrt(n / 3.0 + 1));</code>	Предел для внутреннего цикла
<code>i := 1; repeat inc(i); if sieve[i] then begin</code>	<code>sieve[0]= sieve[1]=false</code>
<code> If odd(i) then begin p := 3*i-2; d1 := i+p -1; end else begin</code>	Выяснение нечётности номера i
<code>p := 3*i-1; d1 := i+p; end; d2 := 2*p -d1;</code>	Вычисление «периодов» $d1$ и $d2$
<code>ii:=i; while (ii <= n) do begin ii := ii + d1; if ii <=n then sieve[ii] := false; ii := ii + d2; if ii <=n then sieve[ii] := false; end;</code>	Собственно построение решета. Последовательное вычёркивание элементов, делящихся на найденное простое p
<code>until i>=lim;</code>	

Составление рассмотренного модифицированного решета занимает 2-3 минуты работы персонального компьютера средней мощности. Наибольшее простое число в данных условиях равно 2 849 999 963. Отметим, что те варианты построения решета, которые основываются на активном использовании проверки делимости, требуют гораздо большего машинного времени. Например, алгоритм, описанный в работе [8] и использованный в ней для исследования ряда распределения расстояний между соседними простыми числами, «для получения 1 млн простых чисел требует около 1.5 часа счета».

3. Построение ряда распределения для порядков близнецов

По полученному модифицированному решету *sieve* можно построить массив простых чисел $p_i < n$. Для этого последовательно просматривается массив *sieve*. Предположим, некоторой позиции j отвечает значение «истина»: $sieve[j] = true$. Тогда в случае, если j чётно, то соответствующее простое число вычисляется как $\hat{p} = 3j - 1$; в противном случае $\hat{p} = 3j - 2$. Текущий номер i увеличивается на единицу, и массив простых чисел пополняется числом $p_i = \hat{p}$. Для построения ряда распределения следует предусмотреть массив *dist*, длина которого заведомо превосходит наибольшее из чисел $(p_{i+1} - p_i) / 2$, и обнулить его элементы. В рассмотренных выше условиях максимальное расстояние между простыми числами равно 320. В процессе

просмотра массива простых чисел последовательно вычисляются $k = (p_{i+1} - p_i) / 2$, а элемент $dist[k]$ увеличивается на единицу.

Однако для получения искомого ряда распределения нет необходимости в явном построении последовательности простых чисел. Достаточно просмотреть решётку *sieve*, последовательно определить расстояния между соседними булевыми единицами, непосредственно вычислить число k и увеличить на единицу элемент $dist[k]$.

Одним из важнейших результатов является то, что близнецы порядка 6 встречаются наиболее часто. Частота их появления примерно в два раза превышает частоту для обычных близнецов второго порядка и близнецов порядка 4. Результат описанных действий графически представлен на Рис. 1. Возле максимумов приведены соответствующие количества элементов выборки. Дополнительно произведена нормировка путём деления всех элементов ряда на его максимальное значение для $gap=6$. Очевидна периодичность положения максимумов; период равен 6. Несколько выбиваются из общего правила порядки $gap=72$ и $gap=204$. При $n < 5 \cdot 10^7$, например, $dist[35] > dist[36]$. Однако с увеличением предельного числа n неправильности в периодичности устраняются. Этот факт в данной статье не обосновывается; можно считать, что это одно из проявлений «тайной жизни чисел» [9].

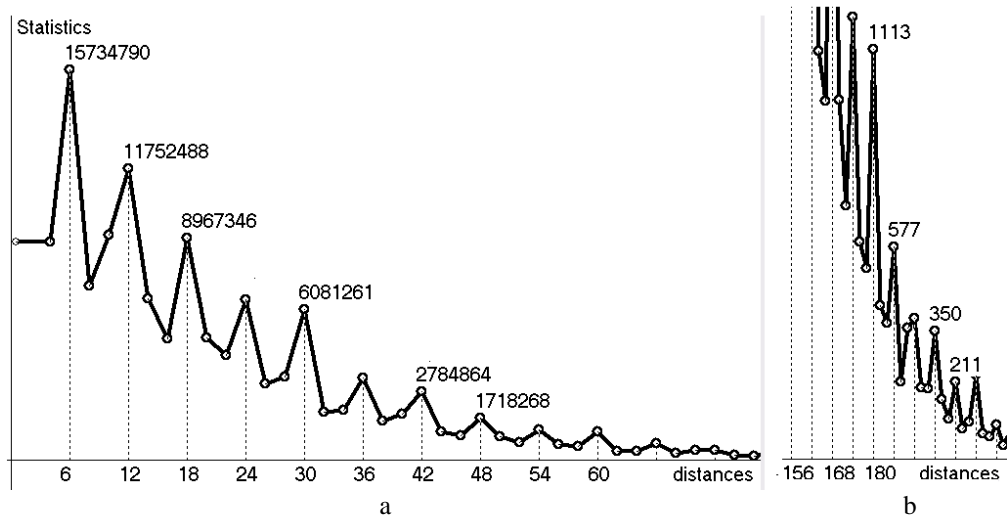


Рис.1. Ряд распределения расстояний между соседними простыми числами, меньшими $n = 2,85 \cdot 10^9$

4. Зависимость ряда распределения от предельного числа n

Наличие решета позволяет построить ряды распределения для любых заданных предельных чисел n . Разобьём последовательность простых чисел длины $m = 13756815$ на 100 интервалов длины $\delta = 1375681$ и построим массивы рядов распределения для последовательности количеств простых чисел

$m_i = i \cdot \delta, i = 1..100$. При графічному зображенні обмежимося частотами для локальних максимумів відповідуючих рядів розподілення. На Рис. 2а приведена отримана залежність частот максимумів від m_i . На Рис. 2б зображена аналогічна залежність приведених частот, т.е. відношень частот локальних максимумів до частоти появи пробою $gap=6$, вважаючи, що відповідуючому елементу масива частот $dist[3]$ сопоставляється сто відсотків. В розглянутих умовах (т.е. $p_i < n = 2,85 \cdot 10^9$) прослідковується збереження порядку підчиненості частот локальних максимумів. Зберігається ця особливість при неограниченному зростанні граничного числа n , – утвердити неможливо. Можливо спробувати визначити асимптотичні значення для окремих кривих на Рис. 2а, наприклад, по трьох рівноудалених точках на графіку, виходячи з гіпотези про експоненціальну залежність від кількості простих чисел. Однак наявність граничного значення, перевищуючого нуль, суперечить строго доведеної теоремі про прагнення цих величин до нуля [6].

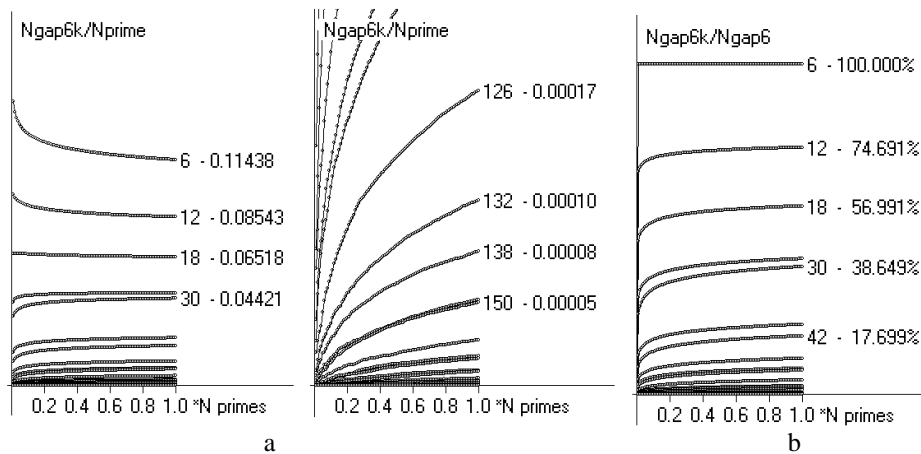


Рис.2. Залежність частот локальних максимумів рядів розподілення від довжини інтервала простих чисел при $Nprimes = 13756800$

a – частоти $dist[3i]/n_k, k = 1..100$;

b – приведені частоти $dist[3i]/dist[3]$ в процентному відношенні

5. Гіпотези про граничних значеннях частот

Розглянемо результати, приведені на рис. 2.б. Кількість точок на кожному графіку $v_g(m_k), k = 1..100, g = 6, 12, 18, \dots$ дорівнює 100. Нехай величина $delta$ має деяке значення порядку 1..25. По результатам статистичної обробки, описаної в п.4, для кожного порядку g визначимо величини $y_j = v_g(m_{100-j \cdot delta}), j = 0, 1, 2$. Візьмемо наступну гіпотезу: приведені частоти приблизно описуються експоненціальною залежністю:

$$v_g(x) \approx A_g + B_g \exp(-\lambda_g x). \quad (1)$$

При інтерполюванні оказується, що множитель λ_g отрицателен. Это значит, что для каждой из кривых Рис. 2b существует горизонтальная асимптота (вычисляемая по формуле Эйткена [10]):

$$v_g(x) \rightarrow A_g = \frac{(y_0 \cdot y_2) - (y_1 \cdot y_1)}{(y_0 + y_2) - (y_1 + y_1)}. \quad (2)$$

Выясняется, что в этом случае относительное расположение частот порядков g сохраняется для сколь угодно больших предельных чисел n .

Аналогичным образом проанализируем графики частот на Рис. 2a. Однако в качестве характерной кривой рассмотрим S_6 - сумму частот для порядков, кратных 6. Согласно гипотезе об экспоненциальной зависимости, приходим к выводу, что S_6 стремится к некоторой константе, превышающей одну треть, т.е. превалирование порядков, кратных шести, сохраняется при стремлении $n \rightarrow \infty$. Соответствующее графическое представление характера стремления к асимптотическому положению приведено на рис. 3.

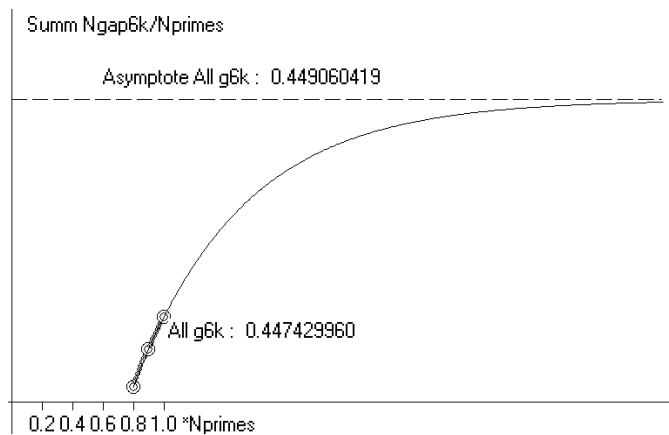


Рис.3. Стремление суммы частот S_6 к асимптотическому положению при $\delta = 10$

Предположим, каким-то образом установлена простота некоторого числа p , и требуется найти ещё одно простое число q . Этот вопрос является стандартным для задач несимметричного шифрования. Если рассмотренная гипотеза справедлива, то число q целесообразно искать среди таких, для которых разность $|p - q|$ делится на 6.

6. Одна задача о распределении шаров в ячейках

В теории вероятностей имеется ряд задач, никак не связанных с общей теорией чисел, для которых графическое представление результатов оказывается сходным с теми, которые описаны в п. 3. [11]. Рассмотрим задачу о

произвольном размещении t шаров в $n = 3n_0$ ячейках по одному, $n_0 > t$, причём заполняются лишь те ячейки, номера которых нечётны и не делятся на 3. Для каждого такого размещения составим ряд распределения расстояний между номерами соседних заполненных ячеек. На Рис. 4 представлен графически результат статистической обработки при $n_0 = 40 \cdot 10^6$, $n = 120 \cdot 10^6$, $m_1 = 4 \cdot 10^6$ (тонкая линия), $m_2 = n/6 = 20 \cdot 10^6$ (утолщённая линия). При реализации подобных размещений использован приём модификации, рассмотренный в п. 2. Возле максимумов в ряде распределения проставлены количества пар номеров ячеек, отличающихся на указанные величины пробелов для случая $m_1 = 4 \cdot 10^6$. Анализ полученных графиков приводит к мысли о правдоподобности нескольких гипотез, доказательство справедливости которых достаточно сложно, но несравненно проще, чем доказательство рассмотренных выше гипотез относительно распределения простых чисел, расстояний между соседними простыми и экстраполяции на большие значения предельных чисел.

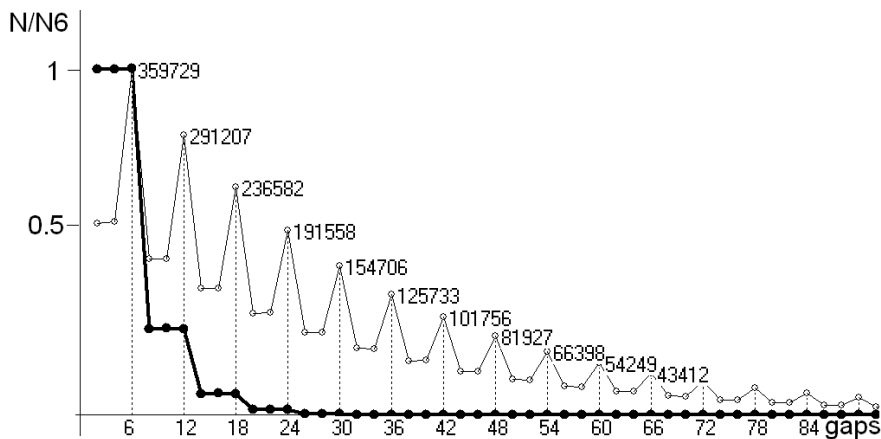


Рис.4. Ряды распределения расстояний между соседними заполненными ячейками при случайном заполнении шарами (не более одного в ячейке) при условии, что номера ячеек взаимно просты с числами 2 и 3

Например, имеются основания доказывать следующие утверждения:

- вероятности $p_{6k-2} = P(\text{gap} = 6k - 2)$ и $p_{6k-4} = P(\text{gap} = 6k - 4)$ равны между собой при любых допустимых соотношениях между n и m ;
- если $m \ll n$, то $p_{6k-2} = p_{6k-4} = 0.5 p_{6k}$;
- при $m = n/6$ вероятности появления следующих троек расстояний совпадают: $p_{6k-4} = p_{6k-2} = p_{6k}$;
- если $m < n/6$, то $p_{6k-4} = p_{6k-2} < p_{6k}$;
- если $m > n/6$, то $p_{6k-4} = p_{6k-2} > p_{6k}$;
- при $n \rightarrow \infty$ и $m \approx n_0$ распределение близко к экспоненциальному.

7. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Статистический подход при изучении структуры множества простых чисел обладает некоторой ограниченностью, поскольку не предполагает никаких априорных теоретических сведений и не позволяет в принципе строго обоснованную экстраполяцию. Но исследование статистических фактов позволяет определить возможные направления в теоретических исследованиях. Простейшим примером является круг вопросов, связанных с количеством простых чисел $\pi(x)$, меньших чем x . Прежде чем П. Л. Чебышевым была строго доказана основная теорема о простых числах: $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow \left(\frac{\pi(x) \ln x}{x} \rightarrow 1 \right)$, – её справедливость была предсказана по результатам статистики.

Некоторая уверенность в обоснованности результатов данной работы может быть получена путём изучения последовательностей простых чисел для значительно больших значений предельных чисел n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Введение в криптографию / ред. В. В. Яценко. – СПб, Питер, 2001. – 285 с.
2. Коблиц Н. Курс теории чисел и криптография, М.: ТВП, 2001. – 513 с.
3. Певнев В. Я. Методика построения псевдопростых чисел // Системы обработки інформації. Зб. наук. пр./ Х.: Харків. універ. Повітр. Сил, 2016. – С. 30-32.
4. Певнев В. Я. Генератор простых чисел // Каф. сист. інф. НАКУ ім. М. Є. Жуковського. Зб. наук. пр. – Х.: Тов. «Щ. садиба плюс», 2014. – С. 140-146.
5. G. G. Szpiro. Peaks and gaps: Spectral analysis of the intervals between prime numbers, *Physica A*, v. 384 (2), 2007, pp. 291–296.
6. Трост Э. Простые числа, – М.: Физ. Мат. Лит., 1959. – 136 с.
7. Прахар К. Распределение простых чисел, – М.: МИР, 1967. – 512 с.
8. Тарунин Е. Л. Возможности вычислительных методов в проблемах теории чисел // Вестник Перм. универ, Сб. науч. тр./Пермь: Изд. Перм.универ., 2010, вып. 2(2). – С. 15-28.
9. G. G. Szpiro. The Secrete Life of Numbers, – J. Henry Pr., Wash., 2006. – 210 p.
10. Чернышев Ю. К. Методы вычисления статистических параметров в событийном моделировании, – Х.: «Фактор», 2014. – 244 с.
11. Карлин С. Основы теории случайных процессов, – М.: «Мир», 1971. – 537 с.

CONTENTS

▪ V. A. Balabanov, N. N. Kizilova	5
Mathematical modeling and 3d visualization of binary trees with minimum self-intersections count	
▪ L. S. Globa, N. A. Gvozdetska, V. A. Prokopets, O. V. Stepurin	18
Energy-efficient approach to distributing tasks in a server cluster	
▪ V. I. Gnitko, Yu. V. Naumenko, E. A. Strelnikova	29
Discrete singularities method in problems of liquid vibrations in spherical tanks	
▪ G. Dolya, O. Lytvynova	38
Modeling of the light retroreflection properties by the lattice of tetrahedral retroreflectors	
▪ R. P. Moskalenko, V. V. Naumenko, E. A. Strelnikova	44
The discrete singularities method in the problem of mode and frequency simulation for hydro-turbine blades	
▪ V. V. Romanuke	52
Determination of probabilistic type intervals for constructing antagonistic game kernel defined on a hyperparallelepiped enclosed within the unit hypercube	
▪ M. V. Sidorov	58
Construction of two-sided approximations to positive solutions of semilinear Navier problem	
▪ Y. C. Chernyshev	67
The distribution of the differences between adjacent prime numbers	
CONTENTS	75

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 34

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О. О. Афанасьєва

Підписано до друку 27.10.2017 р.
Формат 70×108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. – 6,4.
Обл.– вид. арк. – 5,5.
Тираж 100 пр.
Ціна договірна

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна.
Видавництво

Надруковано: ХНУ імені В. Н. Каразіна
61022 м. Харків, майдан Свободи, 4,
тел.: 362-01-52
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09