

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна



Серія

«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 31

Харків
2016

ISSN 2304–6201

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна



Серія

«Математичне моделювання.

Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління»

Випуск 31

Серія заснована 2003 р.

Харків
2016

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 13 від 31.10.2016 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),
д.ф.-м.н., академік НАН України, проф.,
ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна
Гандель Ю.В., д.ф.-м.н., проф., ФМІ
ХНУ імені В.Н. Каразіна
Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора),
д.т.н., проф. ФМІ ХНУ
імені В.Н. Каразіна
Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ
імені Б.І. Веркіна НАН України
Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна
Лазурик В.Т., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна
Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН
України, проф., фізико-енергетичний ф-т
ХНУ імені В.Н. Каразіна
Мищенко В.О. (заст. гол. редактора),
д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна
Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ
імені В. Н. Каразіна
Споров О.Є. (відповідальний секретар),
к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна
Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна
Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-
енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна
Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна
Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ
імені В.Н. Каразіна
Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний
технічний університет "ХПІ"
Стрельнікова О.О., д.т.н., проф. Ін-т
проблем машинобудування НАН України
Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра
прикладної інформатики, університет імені
Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)
Prof. **Harald Richter,** Dr.-Ing., Dr. rer. nat.
habil. Professor of Technical Informatics and
Computer Systems, Institute of Informatics,
Technical University of Clausthal, Germany
Prof. **Philippe Lahire,** Dr. habil., Professor of
computer science, Dep. of C. S., University of
Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6,
ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.
Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua .

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

© Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна, оформлення, 2016

ЗМІСТ

▪ И. А. Баранов.	5
Метод построения базиса краевой задачи Дирихле для использования вариационных методов	
▪ A. A. Gourjii, G. J. F. van Heijst, L. Zannetti	16
Two-dimensional vortex pair interaction with the wedge	
▪ G. M. Dolya, O. S. Lytvynova.	38
Modeling of speckle metrology technique of detecting the medium acoustic oscillations	
▪ А. А. Заставенко, А. Ю. Пилипенко, М. А. Скулиш.	47
Метод выбора контейнера для миграции виртуальной машины в облачном хранилище данных	
▪ С. В. Колосова, В. С. Луханін.	59
Про додатні розв'язки однієї задачі з гетеротонним оператором та про побудову послідовних наближень	
▪ Б. В. Паршенцев, Е. Г. Толстолужская.	73
Анализ методов построения деревьев решений	
▪ Н. С. Подцькин.	82
Математическая модель профилактики сложной технической системы	
▪ В. А. Поляков, Н. М. Хачапуридзе.	94
Моделирование процесса тяги магнитолевитирующего поезда	
▪ CONTENTS	103

Шановні читачі та автори цього збірника!

3 серпня 2015 р. за нашим збірником підтверджено його традиційну назву Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», але водночас його затверджено як самостійне університетське видання, яке не залежатиме надалі від свого материнського видання Вісника Харківського національного університету. Можна вважати це початком поступового руху до перетворення нашого періодичного видання в науковий журнал.

Таке перетворення не може відбутись без Вашої помочі, наші шановні читачі та автори!

Першою, хоча далеко не останньою вимогою до журналу є забезпечення 4-х повноцінних і своєчасно підготовлених випусків на рік. Чекатимемо на Вашу активну участь у формуванні та постійній підтримці відповідного портфелю редакції. Будь ласка, надсилайте Ваші власні статті та рекомендації до опублікування робіт Ваших колег та учнів!

Важливу роль у здійсненні наших планів відіграватиме зростання відсотку статей, що публікуються у збірнику англійською мовою. Надсилайте без вагань такі роботи до нашої редакції, якщо маєте впевненість не тільки в якості наукових результатів, але й готові до співробітництва в напрямку доведення тексту до якості, відповідної стандартам міжнародних видань. Зі свого боку редакційна колегія забезпечуватиме відповідну якість редагування всіх англійських анотацій та статей, написаних англійською мовою, виходячи протягом наступного року з того, що вони повинні складати до третини загального обсягу статей, які публікуватимуться.

Будемо також вдячні Вам, наші колеги і друзі, за пропозиції щодо можливої назви журналу (трьома мовами), на який у майбутньому має перетворитись наш збірник.

На завершення нагадаємо переважні наукові напрямки, за якими приймаються статті до нашого збірника. Фахові публікації у ньому повинні відповідати паспортам наступних спеціальностей (за номенклатурою, за якою зараз працюють в Україні спеціалізовані ради з захисту дисертацій):

з *фізико-математичних наук* – спеціальності:

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи,

01.02.05 – механіка рідини, газу та плазми,

01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем;

з *технічних наук* - спеціальності:

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи,

01.02.04 – механіка деформованого твердого тіла,

05.13.05 – комп'ютерні системи та компоненти,

05.13.06 – інформаційні технології,

05.13.21 – системи захисту інформації,

05.13.07 – автоматизація процесів керування.

З повагою, **Редакційна колегія.**

УДК 519.6

Метод построения базиса краевой задачи Дирихле для использования вариационных методов

И. А. Баранов

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Украина

В работе представлен метод построения базиса для аппроксимации функций, удовлетворяющих однородному условию Дирихле на границе двумерной области на основе кубических В-сплайнов. Новый базис состоит из В-сплайнов, если их носители принадлежат замыканию рассматриваемой области и граничных базисных элементов, которые учитывают граничные условия и стыковку со стандартным базисом внутри области. На примере модельной задачи показано, что граничные базисные элементы не ухудшают аппроксимационной способности стандартного базиса кубических сплайнов.

Ключевые слова: базис краевой задачи Дирихле, вариационные методы, численное решение.

У роботі представлено метод побудови базису для апроксимації функцій, що задовольняють однорідній умові Діріхле на межі двовимірної області на основі кубічних В-сплайнів. Новий базис складається з В-сплайнів, якщо їх носії належать замиканню області, що розглядається, і граничних базисних елементів, які враховують граничні умови і стикування зі стандартним базисом всередині області. На прикладі модельної задачі показано, що граничні базисні елементи не погіршують апроксимаційної здатності стандартного базису кубічних сплайнів.

Ключові слова: базис крайової задачі Діріхле, варіаційні методи, чисельний розв'язок.

This paper presents some method, with which a basis for approximation of functions that satisfy the homogeneous Dirichlet condition over the two-dimensional domain boundary can be constructed based on the cubic B-splines. This new basis consists of B-splines, if their supports lie in the closure of the said domain and boundary basic elements, which match the boundary conditions and fit with the standard basis inside the domain. It is shown that boundary basic elements do not degrade the approximation properties of the standard cubic spline basis.

Key words: basis of the Dirichlet boundary value problem, variations method, numerical solution.

Вариационные методы математической физики [1-3] представляют собой эффективный математический аппарат решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Сюда относятся метод наименьших квадратов, метод Рунге, метод Бубнова-Галеркина и др. В этих методах решение краевой задачи для дифференциальных уравнений сводится к минимизации некоторого функционала. Однако удовлетворение краевым условиям задачи часто представляет серьезную проблему и обычно осуществляется за счет выбора координатных функций. Для построения координатных функций, которые удовлетворяют краевым условиям задачи, разработан метод R-функций [4,5]. Краевую задачу в общем виде можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} Au(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ L_i u(x) \Big|_{\partial\Omega_j} = \varphi_i(x), & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M, \end{cases} \quad (1)$$

где A и L_i – некоторые операторы, действующие внутри области Ω и на участках ее границы $\partial\Omega_j$ соответственно, $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ – известные функции, $u(x)$ – искомая функция, которая может быть скаляром, вектором или тензором, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Структурой решения, учитывающей краевые условия задачи (1), называется формула $u = B(\Phi)$, если $L_i B(\Phi) \Big|_{\partial\Omega_j} = \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, где Φ – элемент некоторого функционального множества \mathbf{M} , B – некоторый оператор: $B: \mathbf{M} \rightarrow X(\Omega)$, $X(\Omega)$ – множество функций, определенных в области Ω .

Структура решения краевой задачи с условием Дирихле $u(x) \Big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ называется структурой Канторовича [4,6]. Данная структура имеет вид

$$u(x) = \omega(x)\Phi(x) + \varphi(x), \quad (2)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\omega(x): \omega(x) = 0, x \in \partial\Omega, \omega(x) > 0, x \in \Omega$, $\Phi(x)$ – неопределенная компонента структуры, которая выбирается из условия точного или приближенного удовлетворения уравнению $Au(x) = f(x)$. Неопределенная

компонента обычно представляется в виде ряда $\Phi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i(x)$, где $\{\varphi_i(x)\}$ –

полная система базисных функций, $\{c_i\}$ – неизвестные коэффициенты, которые нужно определить.

Функцию $\omega(x): \omega(x) = 0, x \in \partial\Omega, \omega(x) > 0, x \in \Omega$ можно строить с использованием R-операций [4]. Существуют различные системы R-операций [4,7,8], обладающие различными свойствами (гладкости, нормализованности и т.д.).

В работе [9] разработана структура гладких решений краевой задачи Дирихле для областей с негладкой границей, которая обладает более высокой аппроксимационной способностью, по сравнению с классической структурой Канторовича с использованием различных R-операций, в случае, если искомая функция является гладкой вплоть до границы области.

Все описанные подходы к построению координатных функций, удовлетворяющих некоторым краевым условиям, основаны на изменении некоторого стандартного базиса. В этом случае изменяются все элементы стандартного базиса под воздействием оператора структуры решения. Кроме того, весовые функции $\omega(x): \omega(x) = 0, x \in \partial\Omega, \omega(x) > 0, x \in \Omega$, построенные с использованием R-операций, которые входят в структуру решения, для достаточно сложных областей являются очень громоздкими, причем их размер растет по показательному закону. Таким образом, каждый элемент базиса становится сложной и громоздкой функцией, что снижает скорость расчетов.

Целью данной работы является построение базиса краевой задачи с однородным условием Дирихле на границе двумерной области на основе кубических В-сплайнов. Новый базис состоит из В-сплайнов [10-12] и граничных базисных элементов, которые учитывают граничные условия и стыковку со стандартным базисом внутри области. Такой подход для одномерного случая был предложен и реализован в работе [13] и развит в работах для широкого класса граничных условий в работах [14-16].

Поскольку обеспечение быстрых и точных расчетов всегда являлось важной и востребованной задачей, то данная работа является актуальной.

Рассмотрим задачу построения базиса однородной задачи Дирихле в двумерной области Ω . Новый базис состоит из В-сплайнов, если их носители принадлежат замыканию области Ω , и элементов, определяющих поведение функции в окрестности границы области, которые далее будем называть граничными базисными элементами. В-сплайны, носители которых принадлежат замыканию области Ω , обеспечивают аппроксимацию в некоторой области, которая принадлежит области Ω , а граничные базисные элементы удовлетворяют краевым условиям задачи, а также учитывают стыковку с базисными элементами внутри области. Таким образом, метод построения базиса сводится к построению граничных базисных элементов.

Пусть область аппроксимации задачи Ω , для которой $\partial\Omega$ – гладкая граница области, описывается неравенством $\omega(x, y) > 0$, где $\omega(x, y) \in C^2(\overline{\Omega})$, $\omega(x, y)|_{\partial\Omega} = 0$, $0 < \nabla\omega(x, y)|_{\partial\Omega} < \infty$. Рассмотрим базис, состоящий из кубических В-сплайнов $\{\varphi_i\}$, $i = 0, \dots, N$. Пронумеруем базисные элементы следующим образом: элементы φ_i , $i = 0, \dots, n$ – это элементы, носители которых пересекают границу области Ω , а элементы φ_i , $i = n+1, \dots, N$ – это элементы, носители которых принадлежат множеству $\overline{\Omega}$.

Рассмотрим следующие разложения функций $\omega^k(x, y)$, $k = 0, \dots, 3$ в области Ω : $\omega^k(x, y) \approx \sum_{i=0}^N c_{i,k} \varphi_i$, $k = 0 \dots 3$, например, с использованием метода наименьших квадратов.

$$\text{Положим } \delta_k(x, y) = \sum_{i=0}^n c_{i,k} \varphi_i, \quad k = 0 \dots 3.$$

Пусть некоторая область $\Omega' \subset \Omega$: $\text{supp} \varphi_i \cap \Omega' = \emptyset$, $i = 0, \dots, n$ описывается уравнением $\omega'(x, y) < 0$, для которого $\partial\Omega' \in C^2$ – граница области Ω' , $\omega'(x, y)|_{\partial\Omega'} = 0$, $\omega'(x, y) \in C^2(\overline{\Omega'})$, $0 < \nabla\omega'(x, y)|_{\partial\Omega'} < \infty$.

$$\text{Положим } \omega_2(x, y) = \begin{cases} \omega'(x, y), & (x, y) \in (\Omega/\Omega'); \\ 0, & (x, y) \in \Omega'. \end{cases}$$

Рассмотрим функции $\theta_k(x, y) = \frac{\omega_2^3(x, y) \left(\sum_{i=0}^N c_{i,k} \varphi_i - \omega^k(x, y) \right)}{\omega^k(x, y) + \omega_2^3(x, y)}$, $k = 0 \dots 3$.

Положим $\delta^*_k(x, y) = \delta_k(x, y) - \theta_k(x, y)$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \delta^*_k(x, y) &= \sum_{i=0}^n c_{i,k} \varphi_i - \frac{\omega_2^3(x, y) \left(\sum_{i=0}^N c_{i,k} \varphi_i - \omega^k(x, y) \right)}{\omega^k(x, y) + \omega_2^3(x, y)} = \\ &= \frac{\left(\omega^k(x, y) + \omega_2^3(x, y) \right) \sum_{i=0}^n c_{i,k} \varphi_i - \omega_2^3(x, y) \left(\sum_{i=0}^N c_{i,k} \varphi_i - \omega^k(x, y) \right)}{\omega^k(x, y) + \omega_2^3(x, y)} = \\ &= \frac{\left(\omega^k(x, y) + \omega_2^3(x, y) \right) \sum_{i=0}^n c_{i,k} \varphi_i - \omega_2^3(x, y) \left(\sum_{i=0}^n c_{i,k} \varphi_i \right) - \omega_2^3(x, y) \left(\sum_{i=n+1}^N c_{i,k} \varphi_i \right)}{\omega^k(x, y) + \omega_2^3(x, y)} + \\ &+ \frac{\omega^k(x, y) \omega_2^3(x, y)}{\omega^k(x, y) + \omega_2^3(x, y)}; \\ \delta^*_k(x, y) &= \frac{\omega^k(x, y) \sum_{i=0}^n c_{i,k} \varphi_i - \omega_2^3(x, y) \sum_{i=n+1}^N c_{i,k} \varphi_i + \omega^k(x, y) \omega_2^3(x, y)}{\omega^k(x, y) + \omega_2^3(x, y)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Функции $\delta^*_k(x, y) \in C^2(\Omega)$, $k = 0, \dots, 3$.

Утверждение.

$$\frac{\partial^i \delta^*_k(x, y)}{\partial n^i} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad i = 0, \dots, k-1, \quad k = 1, \dots, 3.$$

Доказательство.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \delta^*_k(x, y) &= \frac{\omega^k(x, y) \sum_{i=0}^n c_{i,k} \varphi_i - \omega_2^3(x, y) \sum_{i=n+1}^N c_{i,k} \varphi_i + \omega^k(x, y) \omega_2^3(x, y)}{\omega^k(x, y) + \omega_2^3(x, y)} = \\ &= \frac{\omega^k(x, y) \sum_{i=0}^n c_{i,k} \varphi_i}{\omega^k(x, y) + \omega_2^3(x, y)} - \frac{\omega_2^3(x, y) \sum_{i=n+1}^N c_{i,k} \varphi_i}{\omega^k(x, y) + \omega_2^3(x, y)} + \frac{\omega^k(x, y) \omega_2^3(x, y)}{\omega^k(x, y) + \omega_2^3(x, y)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\partial^i \delta^*_{k(x,y)}}{\partial n^i} = \frac{\partial^i \left(\frac{\omega^k(x,y) \sum_{i=0}^n c_{i,k} \varphi_i}{\omega^k(x,y) + \omega_2^3(x,y)} \right)}{\partial n^i} - \frac{\partial^i \left(\frac{\omega_2^3(x,y) \sum_{i=n+1}^N c_{i,k} \varphi_i}{\omega^k(x,y) + \omega_2^3(x,y)} \right)}{\partial n^i} + \frac{\partial^i \left(\frac{\omega^k(x,y) \omega_2^3(x,y)}{\omega^k(x,y) + \omega_2^3(x,y)} \right)}{\partial n^i}.$$

Вычислим каждое слагаемое правой части правой части данного равенства:

$$\frac{\partial^i \left(\frac{\omega^k(x,y) \omega_2^3(x,y)}{\omega^k(x,y) + \omega_2^3(x,y)} \right)}{\partial n^i} = 0, \quad i = 0, \dots, k-1, \quad k = 1, \dots, 3 \quad \text{для } (x,y) \in \partial\Omega, \quad \text{так как}$$

функция $\frac{\omega_2^3(x,y)}{\omega^k(x,y) + \omega_2^3(x,y)} \Big|_{\partial\Omega}$ – ограничена;

$$\frac{\partial^i \left(\frac{\omega_2^3(x,y) \sum_{i=n+1}^N c_{i,k} \varphi_i}{\omega^k(x,y) + \omega_2^3(x,y)} \right)}{\partial n^i} = 0, \quad i = 0, \dots, k-1, \quad k = 1, \dots, 3 \quad \text{для}$$

аналогично,

$(x,y) \in \partial\Omega$, так как функция $\frac{\omega_2^3(x,y)}{\omega^k(x,y) + \omega_2^3(x,y)} \Big|_{\partial\Omega}$ – ограничена, а

$$\frac{\partial^i \left(\sum_{i=n+1}^N c_{i,k} \varphi_i \right)}{\partial n^i} = 0, \quad \forall i;$$

$$\frac{\partial^i \left(\frac{\omega^k(x,y) \sum_{i=0}^n c_{i,k} \varphi_i}{\omega^k(x,y) + \omega_2^3(x,y)} \right)}{\partial n^i} = 0, \quad i = 0, \dots, k-1, \quad k = 1, \dots, 3 \quad \text{для } (x,y) \in \partial\Omega, \quad \text{так как}$$

функция

$$\left. \frac{\sum_{i=0}^n c_{i,k} \varphi_i}{\omega^k(x,y) + \omega_2^3(x,y)} \right|_{\partial\Omega} - \text{ограничена.}$$

$$\text{Таким образом, } \left. \frac{\partial^i \delta_k^*(x,y)}{\partial n^i} \right|_{\partial\Omega} = 0, i=0, \dots, k-1, k=1, \dots, 3.$$

Утверждение доказано.

Положим

$$\psi_i^k(x,y) = \frac{\varphi_i(x,y) \delta_k^*(x,y)}{\sum_{i=0}^n \varphi_i(x,y)}, \quad i=0, \dots, n, \quad k=0, \dots, 3. \quad (4)$$

Функции $\psi_i^k(x,y)$ можно взять в качестве элементов базиса.

Пусть есть разложение некоторой функции $F(x,y)$ в области Ω

$$F(x,y) \approx \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i + \sum_{i=n+1}^N c_i \varphi_i.$$

Данную функцию можно разложить по новому базису

$$F(x,y) \approx \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 \tilde{c}_{i,k} \psi_i^k + \sum_{i=n+1}^N c_i \varphi_i.$$

Потребуем, чтобы функция $F(x,y)$ удовлетворяла однородному граничному

$$\text{условию Дирихле } \left. F(x,y) \right|_{\partial\Omega} \approx \left(\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 \tilde{c}_{i,k} \psi_i^k + \sum_{i=n+1}^N c_i \varphi_i \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Элементы $\{\varphi_i\}$, $i=n+1, \dots, N$ очевидно удовлетворяют данному условию.

Рассмотрим функции

$$\psi_i^k(x,y) = \frac{\varphi_i(x,y) \delta_k^*(x,y)}{\sum_{i=0}^n \varphi_i(x,y)}, \quad i=0, \dots, n.$$

$$\text{Имеем } \left. \psi_i^k(x,y) \right|_{\partial\Omega} = \left. \varphi_i(x,y) \delta_k^*(x,y) \right|_{\partial\Omega}, \quad i=0, \dots, n.$$

$$\text{Кроме того, } \left. \varphi_i(x,y) \right|_{\partial\Omega} < \infty, \quad i=0, \dots, n.$$

$$\text{По утверждению 1 } \left. \delta_k^*(x,y) \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad k=1, \dots, 3.$$

Тогда $\left(\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 \tilde{c}_{i,k} \psi^k + \sum_{i=n+1}^N c_i \varphi_i \right) \Big|_{\partial\Omega} = \sum_{i=0}^n \tilde{c}_{i,0} \psi^0 \Big|_{\partial\Omega}$.

Из условия $\left(\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 \tilde{c}_{i,k} \psi^k + \sum_{i=n+1}^N c_i \varphi_i \right) = 0$ следует, что $\sum_{i=0}^n \tilde{c}_{i,0} \psi^0 \Big|_{\partial\Omega} = 0$.

Так как функции $\psi^0_i(x, y) \Big|_{\partial\Omega} > 0$, то $\tilde{c}_{i,0} = 0, \quad i = 0, \dots, n$.

Таким образом, функции вида $\left\{ \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^3 \tilde{c}_{i,k} \psi^k + \sum_{i=n+1}^N c_i \varphi_i \right\}$ удовлетворяют

однородному условию Дирихле.

Рассмотрим представленную методику построения базисных элементов на следующем примере:

$$\begin{cases} \Delta u = 25x^2 \sin(5xy)(x^2 + y^2 - 1) - 40xy \cos(5xy) - 4 \sin(5xy) + \\ + 25y^2 \sin(5xy)(x^2 + y^2 - 1); \\ u \Big|_{x^2 + y^2 = 1} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Аналитическим решением данной задачи является функция

$$u = \sin(5xy)(1 - x^2 - y^2) \quad (6)$$

На рисунке 1 представлено аналитическое решение задачи (5).

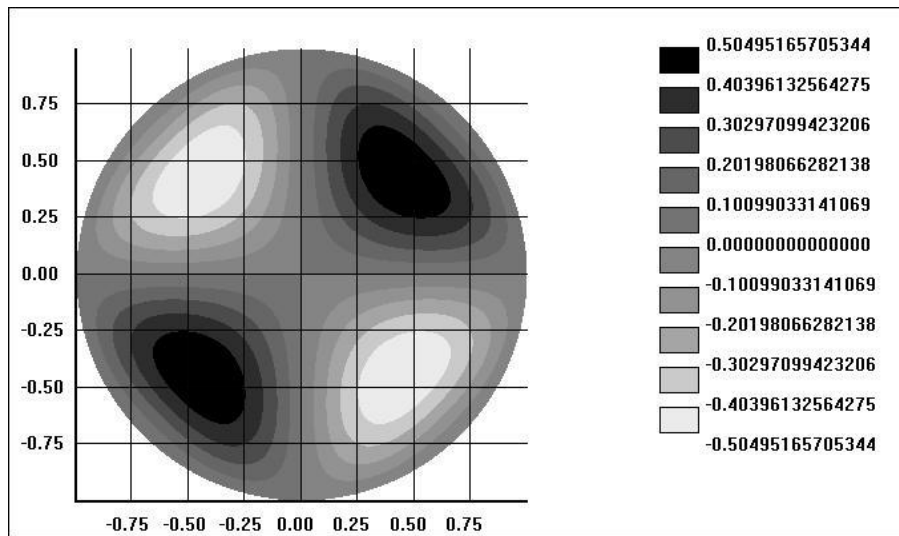


Рис. 1. График аналитического решения краевой задачи (5) в виде линий постоянного уровня на плоскости xOy

На рисунках 2 – 4 представлены графики функций $\delta^*_k(x, y)$, $k = 1, 2, 3$ для краевой задачи (5). На рисунках 5, 6 представлены результаты численных

расчетов с использования метода наименьших квадратов для случая сетки 19×19 В-сплайнов, построенной для квадрата $[-1,1] \times [-1,1]$.

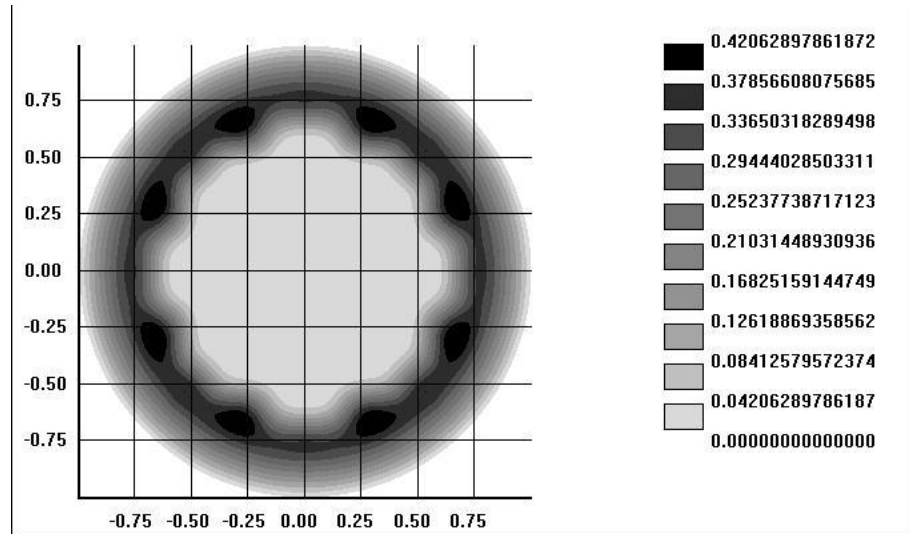


Рис. 2. График функции $\delta_1^*(x, y)$ для краевой задачи (5) в виде линий постоянного уровня на плоскости xOy

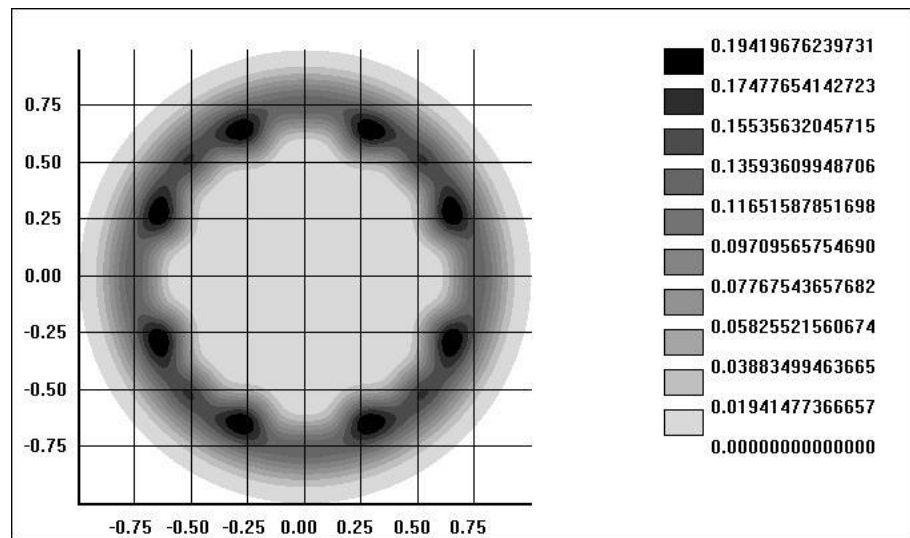


Рис. 3. График функции $\delta_2^*(x, y)$ для краевой задачи (5) в виде линий постоянного уровня на плоскости xOy

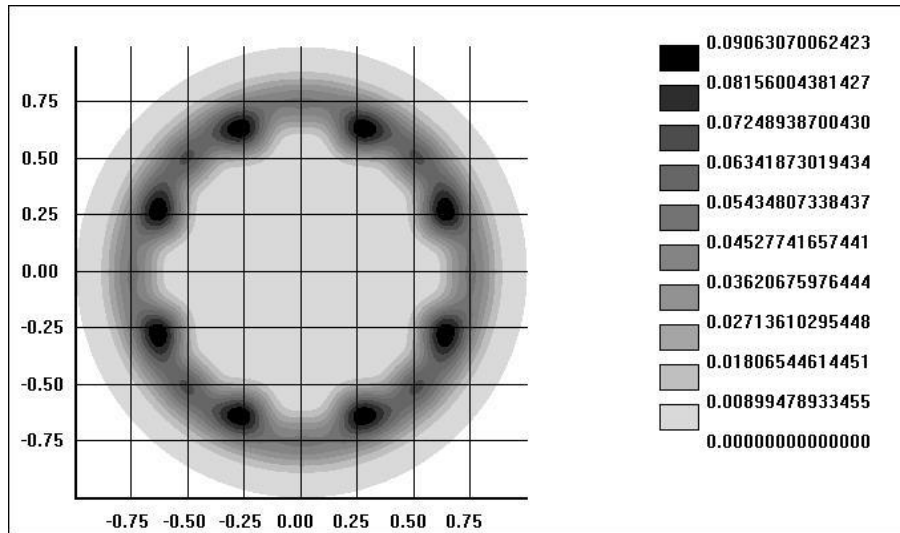


Рис. 4. График функции $\delta^*(z(x, y))$ для краевой задачи (5) в виде линий постоянного уровня на плоскости xOy

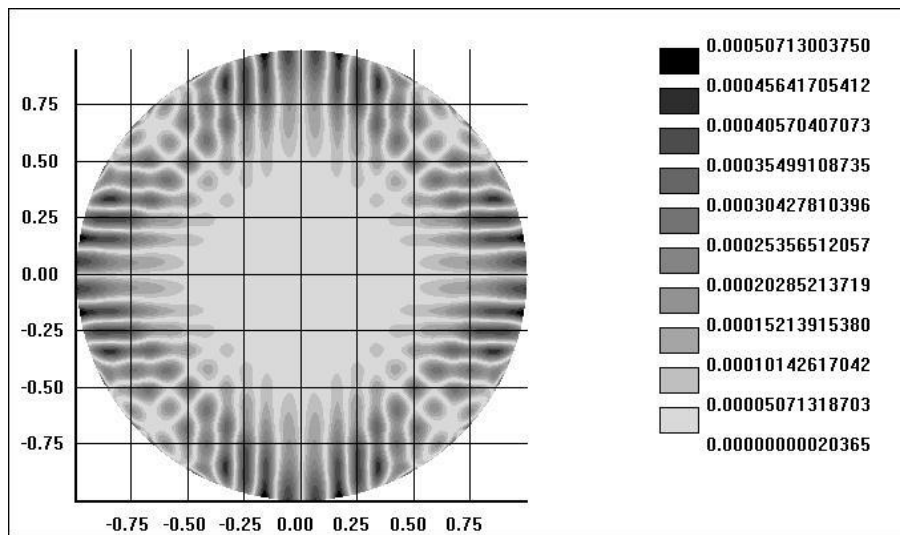


Рис. 5. График функции модуля разности аналитического решения задачи (5) и решения задачи аппроксимации функции (6) методом наименьших квадратов

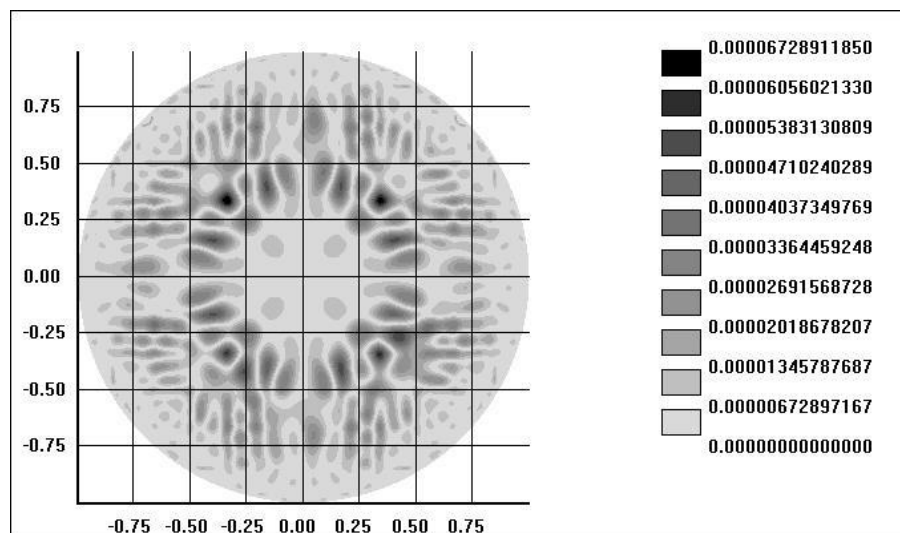


Рис. 6. Графік функції модуля різниці аналітичного і численного рішення задачі (5) з використанням пропонуваного підходу методом найменших квадратів

Выводы

В работе предложен метод построения базиса на основе кубических В-сплайнов для приближения функций, удовлетворяющих однородному условию Дирихле в двумерной области с гладкой границей. На примере модельной краевой задачи для уравнения Пуассона с однородным условием Дирихле показано, что построенный базис не ухудшает аппроксимационной способности стандартного базиса кубических сплайнов, а даже улучшает его. Улучшение можно объяснить тем, что максимальная погрешность аппроксимации искомой функции достигается на границе области, ввиду наибольшей кривизны в этих точках, а полученное решение на основе нового базиса удовлетворяет точно однородному условию Дирихле, поэтому максимальные погрешности отсутствуют. Внутри же области погрешность имеет один порядок.

При решении краевых задач с использованием вариационных методов таких, как метод наименьших квадратов, метод Рунге и др. возникает необходимость нахождения элементов матрицы СЛАУ, которые являются интегралами. В этих интегралах подинтегральная функция зависит от базисных элементов и оператора краевой задачи. При использовании в качестве базисных элементов стандартных В-сплайнов, для дифференциальных уравнений, оператор которых представляет линейную комбинацию самой функции и ее различных производных, элементы матрицы СЛАУ, будут повторяться и их можно будет вычислить точно. Поэтому, применение базиса, состоящего из стандартных В-сплайнов и граничных базисных элементов, позволяет сократить время счета и уменьшить накопление погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

2. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов/ С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432 с.
3. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. – М.: Мир, 1985. – 590 с.
4. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения./ В.Л. Рвачев. – К.: Наук. Думка, 1982. – 552 с.
5. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К.В. Максименко-Шейко. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.
6. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В.Канторович, В.И. Крылов. – М.-Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
7. Баранов И.А. Новые R-операции различного класса гладкости для построения базисов краевых задач / И.А. Баранов // Вестник Запорожского национального университета, серия физико-математические науки. – Запорожье: ЗНУ, 2011. - №2. - С.13-28.
8. Литвин О.Н. Формула В.Л. Рвачева в случае областей с угловыми точками / О.Н. Литвин // Украинский математический журнал. – 1972. – №2. – С. 240-246.
9. Баранов И.А. Построение гладких базисов краевой задачи Дирихле для областей с негладкой границей/ И.А. Баранов // Вестник Запорожского национального университета, серия физико-математические науки. – Запорожье: ЗНУ, 2012 - №1 - С.19-38.
10. Алберг Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. – М.: Мир, 1972. – 320 с.
11. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
12. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М. Наука, 1984. – 352 с.
13. Баранов И.А. Построение базиса смешанной краевой задачи для применения вариационных методов / И.А. Баранов // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – Харьков: ХНУ, 2010. – №925. – С. 5–12.
14. Баранов И.А. Метод построения базиса краевых задач дифференциальных уравнений для применения вариационных методов / И.А. Баранов // Компьютерная математика. – Киев: И-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2011. – №1. – С. 122 – 129.
15. Баранов И.А. Базис краевых задач с граничными условиями широкого класса для использования вариационных методов / И.А. Баранов // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – Харьков: ХНУ, 2011. – №977. – С.25–34.
16. Баранов И.А. Метод построения базиса краевых задач для широкого класса граничных условий / И.А. Баранов // Тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов. Современные проблемы машиностроения. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2011. – С.28.

UDC 532.5

Two-dimensional vortex pair interaction with the wedge

A. A. Gourjii *, G. J. F. van Heijst **, L. Zannetti ***

*National Technical University of Ukraine "KPI", Kyiv, Ukraine

**Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands

***Politecnico di Torino, Torino, Italy

Рассмотрена задача о взаимодействии двухмерных локализованных вихревых диполей с острым клином, двигающихся с начальный момент времени перпендикулярно к одной из поверхностей клина. Экспериментальные исследования показали, что вихревые диполи при приближении к твердой поверхности разделяются и двигаются в противоположные стороны. Вихревая структура при взаимодействии с острой кромкой генерирует вторичные вихри, которые могут образовывать новые вихревые диполи. Сформирована численная модель взаимодействия вихревых диполей с острым клином, основанная на модели точечных вихрей в приближении идеальной несжимаемой жидкости. Для избегания бесконечных значений скорости на острой кромке используется условие Кутта-Жуковского, которое адекватно описывает процесс формирования вторичной завихренности около острой кромки. Сравнительный анализ процессов переноса жидкости, формирующей в начальный момент "атмосферу вихря", свидетельствует о хорошем соответствии численных результатов и экспериментальных данных.

Ключевые слова: вихревой диполь, двухмерное течение, острая кромка, условие Кутта-Жуковского, численное моделирование, экспериментальные исследования.

Розглянуто задачу про взаємодію двомірних локалізованих вихрових диполів з гострим клином, що рухаються з початковий момент часу перпендикулярно до однієї з поверхонь клина. Експериментальні дослідження показали, що вихрові диполі при наближенні до твердої поверхні розділяються і рухаються в протилежні сторони. Вихрова структура при взаємодії з гострою кромкою генерує вторинні вихори, які можуть утворювати нові вихрові диполі. Сформована чисельна модель взаємодії вихрових диполів з гострим клином, заснована на моделі точкових вихорів в наближенні ідеальної нестисливої рідини. Для уникнення нескінченних значень швидкості на гострій кромці використовується умова Кутта-Жуковського, яка адекватно описує процес формування вторинної завихренности біля гострої кромки. Порівняльний аналіз процесів переносу рідини, яка формує в початковий момент "атмосферу вихора", свідчить про гарну відповідність чисельних результатів і експериментальних даних.

Ключові слова: вихровий диполь, двомірна течія, гостра кромка, умова Кутта-Жуковського, чисельне моделювання, експериментальні дослідження.

The problem of interaction of two-dimensional localized vortex dipole with an edge of the wedge, which moving perpendicular to one of the wedge surfaces at the initial moment is considered. Experimental studies have shown that the vortex dipoles at the approach to the solid surface are separated, and vortices moved in opposite directions. Vortex structure, when interacting with a sharp edge, generates secondary vortices that may form new vortex dipoles. The numerical model for the interaction of vortex dipole with an edge of the wedge, based on the model of point vortices in the approximation of an ideal incompressible fluid is formed. To avoid infinite velocities at the sharp edge model used Kutta-Zhukovsky condition, which adequately describes generating process of the secondary vorticity near the sharp edge. Comparative analysis of transferring processes of fluid forming at the initial moment "vortex atmosphere" shows good agreement of numerical results and experimental data.

Key words: vortex dipole, two-dimensional flow, sharp edge, Kutta-Zhukovsky condition, numerical modelling, experimental investigation.

1. Introduction

Recently, in the world literature on fluid mechanics have been formed quite clearly a tendency associated with an increasing in the practical interest of many researchers to solve problems that have a real practical application [1,2]. Among solution methods for these problems one can be identified experimental studies, and analytical or numerical-analytical methods. In many cases, experimental researches meets a number of difficulties caused by the complexity both of experimental setting, result processing, and the high cost of experimental equipment for investigation. Researchers often use analytical methods or direct numerical methods that deal with introducing a certain number of assumptions, forming mathematical models of the flow, which can significantly limit the application ranges of the achieved results [1,3,4].

From this point of view, the problem of large-scale vortex interaction with solid surfaces is the most significant. It is known that the kinetic energy of the fluid flow near a solid surface generates wall vortex motion of various sizes [5-7]. Subsequent energy dissipation of this motion in the cascade of wave-number leads to the formation of large-scale vortex structures in the boundary layer. This process leads both to an intensification in vortex motion and eventually to the separation from the solid surface. In the absence of the stabilizing effects these large-scale vortex structures can intensify heat and mass transferring and destruct the boundary layer [5,7-9]. That is why, the analysis of vortex generation processes, vortex interaction with solid surfaces, as well as processes of heat and mass transfer in vortex flows has a certain practical and scientific interest.

It is known that two vortices with opposite intensities can form a vortex pair, which is called dipolar vortex [10-12]. This structure can move in fluid translationally with fixed self-induced velocity. If two vortices have not equal intensities, then vortices start the rotational motion with constant angular velocity relative to one another. There is an interesting problem deals with an explanation of the dipolar vortex behaviour near a solid boundary. This type of interaction occurs when large-scale atmospheric vortices approaching to mountain ranges, oceanic vortices move near the peninsula, dams, seawalls, etc. Preliminary discussion of this problem we can found, for example, in [13,14] and references therein.

Solution of the evolution problem of large-scale vortex flows is reduced to the calculation of the velocity field distribution in time. It is very difficult to achieve an analytical solution of the vorticity field in real flows [15]. This way meets a number of difficulties, which in most cases deals with insuperable difficulties (details of the problem and discussion we can found, for example, in [10-12,16]).

One of the more widely used methods for solving the problem of large-scale vortex motion is a numerical method based on the direct numerical simulation of generating and transferring of vorticity field [17-20]. Despite the universality of certain numerical schemes and methods for solving problems of vortex dynamics, the direct numerical simulation of the vorticity transport equation requires considerable computing resources, and analysis of the results (actually, that is a data filed) becomes problematic. Another method, which is also often used in the studying of coherent structure evolution, deals with the separation of small volume of fluid in which the vorticity field is concentrated. Physical parameters in these elementary volumes are chosen from the condition that the induced velocity field is equal to the velocity field induced by distributed vorticity in the space around the point in the consideration [10-

12,21,22]. Such methods of solution called in the modern literature as discrete vortex methods in many cases of practical importance is quite effective both to solve problems of vortex dynamics, and to analyze processes of heat and mass transfer in real fluid flows. It is important that these numerical methods for the solution do not require large computational capacities, and achieved results are quite simple for the interpretation and subsequent analysis [11,23,24].

However, the transition from the continuous distribution of vorticity, observed in the real flow, to a discrete analogue is not always equivalent, especially during an analysis of small-scale fluctuations of the velocity field. Moreover, in some cases, discrete analogues during computation can lead to numerical instability elimination which requires using of special numerical algorithms or computational methods. A detailed analysis of this problem we can found in [25-28]. Nevertheless, the question on ranges of applicability of discretization methods of distributed vorticity field remains open for today and requires further detailed comparison between numerical results and experimental data.

Often the method of conformal mappings [22,25,29] applied for analytic solutions of the problem mentioned before. In this case the construction of the solution is based on the transformations, which allow satisfying the boundary conditions on the solid surface or on some part of this surface. Despite the fact that the method conformal transformation is not always possible to adapt for different geometries of the flows, which has some practical interest, this method has certain flexibility and gives a number of advantages both for achieving an analytical solution and for following analysis of results.

Forming analytical and numerical solutions of the problem on the interaction of coherent vortex structures with wedge solid surface we assume that the vorticity field is a number of localized vortex structures coming into the external flow. To describe the separation process the discrete methods of vortex dynamics analyse the motion of the single vortex structure, the intensity of which suppose equal to the integral of the vorticity coming to the flow for some time interval [23,25,30]. The number of these vortex structures is not fixed in this problem.

General scale analysis shows that it is necessary to take into account only the inertia of the fluid flow near edges of surfaces, viscosity effect has much more small effect on the process of vortex generation at the edges [8,9,31]. In particular, parameters of discrete vortices in the flow near the sharp edges are determined from Kutta-Zhukovsky condition, which does not allow the formation of an infinitely large velocity of the flow at the edges themselves. This condition allows us to determine the intensity of the corner vortex, which describes in the first approximation the processes of vortex generation at the sharp edge in the real viscous flows. Sometimes the mapping function of conformal transformations has a singularity on a sharp edge. In this case, it is necessary to apply Kutta-Zhukovsky conditions on the image plane. The adequacy problem of such a solution to the real flow is the question that still remains controversial problem among many researchers [1,2]. To find the answer for this question we would like to carry out a detailed comparison of the numerical simulation results and data of a laboratory experiment.

It is known [12,32,33], that the vortex pair during own motion involves in own motion the part of surround fluid, forming a so-called “vortex cloud” or “atmosphere”.

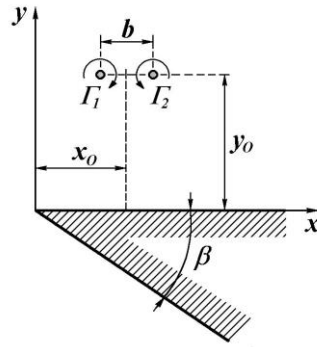


Fig.1. Geometry of the problem

The form of this fluid region is very close to an ellipse, and a stationary vortex pair (vortex dipole) does not change its shape and, therefore, the volume. The interaction of vortices with a wedge breaks the stationary motion of the vortex pair. As a result, the distance between vortices changes in the pair. This process leads to changing the size of the vortex cloud that results in more intensive regimes of stirring and mixing processes of various scalar fields in the flow [33-37].

The main purpose of this paper is identifying the main peculiarities of motion of the vortex pair near the edge of the wedge, and determining of general characteristics of the mixing process of passive fluid during an interaction of vortex pair with the solid surface.

2. Mathematical method

Consider the motion associated with a point vortex pair near a wedge, as indicated in the definition sketch of fig.1. The initial vortex dipole with intensities $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$ and distance b between vortices moves perpendicular to the half-plane. We suppose that the geometrical centre of the dipole placed at the point (x_0, y_0) .

We define the z -plane as the physical plane. The mapping

$$z = \zeta^\tau \quad (1)$$

with $\tau = 2\beta/\pi$, maps the exterior region of a wedge in the z -plane onto the upper half-plane of the ζ -plane (fig.2).

The complex potential $w(\zeta)$ in the z -plane due to N vortices is

$$w(\zeta) = -i \sum_{j=1}^N \Gamma_j \ln \left(\frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta - \zeta_j^*} \right), \quad (2)$$

where $\zeta_j = \xi_j + i \eta_j$ represents the position of vortex number j with constant intensity Γ_j , and $*$ denotes the complex conjugation. The flow defined by the complex potential $w(\zeta)$ in the ζ -plane corresponds with a flow in the physical z -plane given by the complex potential $W(z) = w(\zeta(z))$.

Hence, the complex velocity $u - iv$ in the physical z -plane is

$$u - iv = \frac{dW}{dz} = -\frac{i}{(dz/d\zeta)} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_j} - \frac{1}{\zeta - \zeta_j^*} \right) \quad (3)$$

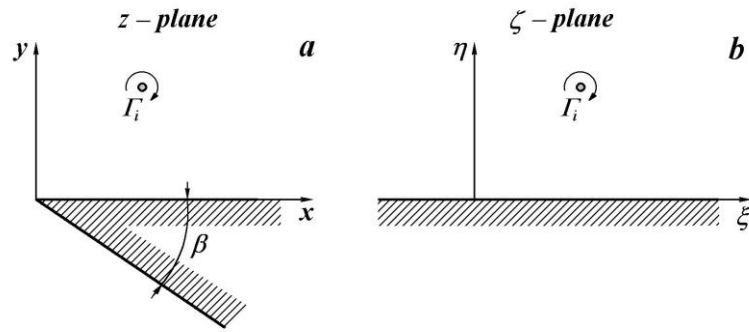


Fig.2. Conformal mapping: physical z -plane (a) and transformed ζ -plane

The indices $j = 1, 2$ are pertinent to the vortex pair, while $j > 2$ refers to other vortices that can be present in the flow field. Index $j = N$ refers to a vortex whose intensity depends on time and which is determined by satisfying the Kutta-Zhukovsky condition

$$\frac{dw}{d\zeta} = 0 \quad \text{at} \quad \zeta = 0. \quad (4)$$

The governing equation is normalized by using as reference length the distance b between the vortex pair vortices at initial time $t = 0$, and as reference velocity the translation speed $U = \gamma/(2\pi b)$ of the vortex pair, where γ is (absolute) strength of the individual vortices. Hence, the reference time is b/U . Thus, in equations (2), (3) the strengths are $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1.0$.

The velocity of a vortex with constant circulation Γ_j ($j \neq N$) is given by:

$$\frac{d\zeta_j^*}{dt} = \left[-i \sum_{l=1, l \neq j}^N \Gamma_l \frac{1}{\zeta_j - \zeta_l} + i \sum_{l=1}^N \Gamma_l \frac{1}{\zeta_j - \zeta_l^*} + \frac{i\Gamma_j}{2} \frac{d}{d\zeta} \left(\ln \frac{dz}{d\zeta} \right) \right] \frac{1}{|dz/d\zeta|^2}, \quad (5)$$

while, according to the zero force model the vortex with time dependent circulation Γ_N ($j = N$) moves with velocity

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_N^*}{dt} = & \left[-i \sum_{l=1, l \neq j}^N \frac{\Gamma_l}{\zeta_N - \zeta_l} + i \sum_{l=1}^N \frac{\Gamma_l}{\zeta_N - \zeta_l^*} + \frac{i\Gamma_N}{2} \frac{d}{d\zeta} \left(\ln \frac{dz}{d\zeta} \right) \right] \frac{1}{|dz/d\zeta|^2} - \\ & - z^*(\zeta_N) \frac{1}{\Gamma_N} \frac{d\Gamma}{dt} \frac{1}{(dz/d\zeta)^*} \end{aligned} \quad (6)$$

with

$$\Gamma_N = - \left(\sum_{j=1}^{N-1} \Gamma_j \frac{\eta_j}{\xi_j^2 + \eta_j^2} \right) / \left(\frac{\eta_N}{\xi_N^2 + \eta_N^2} \right)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_N} \frac{d\Gamma_N}{dt} = & \frac{\xi_N^2 + \eta_N^2}{\Gamma_N \eta_N} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\Gamma_j}{(\xi_j^2 + \eta_j^2)^2} \left[2\eta_j \xi_j \frac{d\xi_j}{dt} - (\xi_j^2 - \eta_j^2) \frac{d\eta_j}{dt} \right] - \\ & - \frac{1}{\eta_N (\xi_N^2 + \eta_N^2)^2} \left[-2\eta_N \xi_N \frac{d\xi_N}{dt} + (\xi_N^2 - \eta_N^2) \frac{d\eta_N}{dt} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Equations (5), (6) are integrated by a fourth-order Runge-Kutta algorithm. The simulation is started with $N = 3$, that is the vortex pair in its initial position and a

Kutta-satisfying vortex placed close to the tip of the wedge, in $z = -0.02$. The *Kutta vortex* is released when its circulation is $|\Gamma_N| > 0.01$. When $|\Gamma_N|$ reaches close to the tip of the wedge a maximum, the $j = N$ vortex is set as a constant circulation vortex, N is increased to $N + 1$ and a new *Kutta vortex* is placed in $z = -0.02$.

It is well known [33] that vortex structures may entrain ambient fluid while they move around. For example, a vortex pair consisting of two point vortices with equal but oppositely-signed circulations translates steadily along a straight line and carries a certain amount of fluid within the separatrix region. The shape of “vortex atmosphere” is closely approximated by an ellipse with axes $1.73b$ and $2.09b$, where b is the distance between the vortices for a given moment. For the case of different vortex intensities (in absolute sense), the pair translates steadily along a circular trajectory, again carrying an “atmosphere” of trapped fluid along.

When approaching a solid boundary, the distance between the vortices changes, leading to changes in the size and the shape of the atmosphere. This usually results in entrainment of ambient fluid into the atmosphere and/or detrainment of atmosphere fluid. The ratio of the amounts of entrained and detrained fluid depends on the type of vortex interaction. The advection characteristics of non-stationary point vortex constellations can be adequately studied by applying the so-called “contour kinematics” technique [34,39]. According to this method, a contour is described by a large set of passive fluid particles (markers). Each marker moves with the locally induced fluid velocity, and the spatial position of the specific contour at any time is determined by the positions of its markers, connected appropriately. In order to calculate their displacements in time, each marker can be interpreted as a point vortex with zero circulation. Hence, its change in position can be obtained directly from equation (5), namely

$$\frac{d\zeta_m^*}{dt} = \left[i \sum_{l=1}^N \frac{\Gamma_l}{\zeta_m - \zeta_l} - i \sum_{l=1}^N \frac{\Gamma_l}{\zeta_m - \zeta_l^*} \right] \frac{1}{|dz/d\zeta|^2}, \quad (8)$$

where $\zeta_m = \xi_m + i\eta_m$ is the position of the m -th marker, $m = 1, \dots, M$, and M is the number of markers necessary to describe the contour with a given precision.

Locally, contours may show strong deformations in time. While some segments of the contour may undergo substantial stretching and deformation, other parts may hardly deform at the same time. The description of stretched and deformed segments of the contour by a fixed number of markers obviously causes difficulties and implies locally a poor resolution. Just increasing the initial number of markers on the contour does not solve this problem adequately, because the exact locations of intensively deformed contour segments are not known in advance.

To overcome this difficulty, we can apply the PSI (piece spline-interpolation) method [38], which uses a variable number of markers to describe the spatial position of the contour. If the distance between two adjacent markers becomes larger than some critical value, then the stretched part of the contour is interpolated by functions $\zeta(L)$ and $\eta(L)$, where L is the length of the contour, starting from some marker with index, for example, $m = 1$. Then the position of an additional marker (or markers) of the contour is defined by this interpolation. Hence, the total number of markers M used in calculations varies in time. Likewise, if the distance between two markers

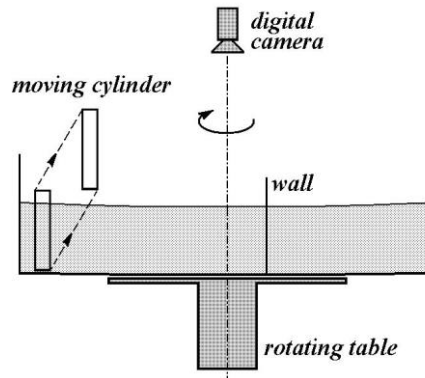


Fig.3. Schematic drawing of the experimental set-up

becomes smaller than some specified minimum value, the number of markers can be reduced.

This numerical “contour kinematics” method has been used successfully in studies of vortex-induced advection of tracer material for a number of different vortex-vortex interactions [39].

3. Experimental set-up and dye visualisation

Laboratory experiments were carried out in a rectangular container (horizontal dimensions 100 cm x 150 cm) filled with tap water to a depth $H = 20$ cm. This tank is mounted on a turntable that rotates at a constant angular velocity $\Omega = 0.70$ rad/s. Prior to each experiment, the fluid was allowed to reach a state of solid-body rotation during at least 45 min, which is much longer than the Ekman spin-up timescale $T_E = H/(\nu\Omega)^{1/2} \approx 4$ min. In order to avoid any topographic effects associated with the parabolic free-surface shape [35], a specially designed parabolic bottom plate was mounted in the tank [40].

A dipolar vortex is conveniently created by dragging an open, thin-walled cylinder (diameter 6 cm) horizontally along a straight line through the fluid while simultaneously lifting it slowly out of the fluid. For this purpose a guiding rail was mounted above the rotating tank (fig.3).

For properly chosen translation speed, the flow in the wake of the cylinder was observed to become organized in a columnar dipolar vortex – its axial alignment conform the Taylor-Proudman theorem. This dipole generation technique was also applied by [35]. A solid obstacle was placed beforehand at some specified position in the fluid. In the experiment described here, a flat plate with a sharp edge was used, i.e. a sharp wedge with apex angle $\beta = 0^\circ$.

In a number of experiments the flow evolution was visualized by adding fluorescent dye to the fluid, both to the fluid inside the translating cylinder and to the fluid adjacent to the plate. Quantitative information about the flow was obtained by using High-resolution Particle Velocimetry. The working fluid was seeded with small tracer particles with a diameter of 250 μm , with a density somewhat smaller than that of the fluid. The floating particles were illuminated by four slide projectors, and their motion was recorded by a corotating digital camera mounted above the container.

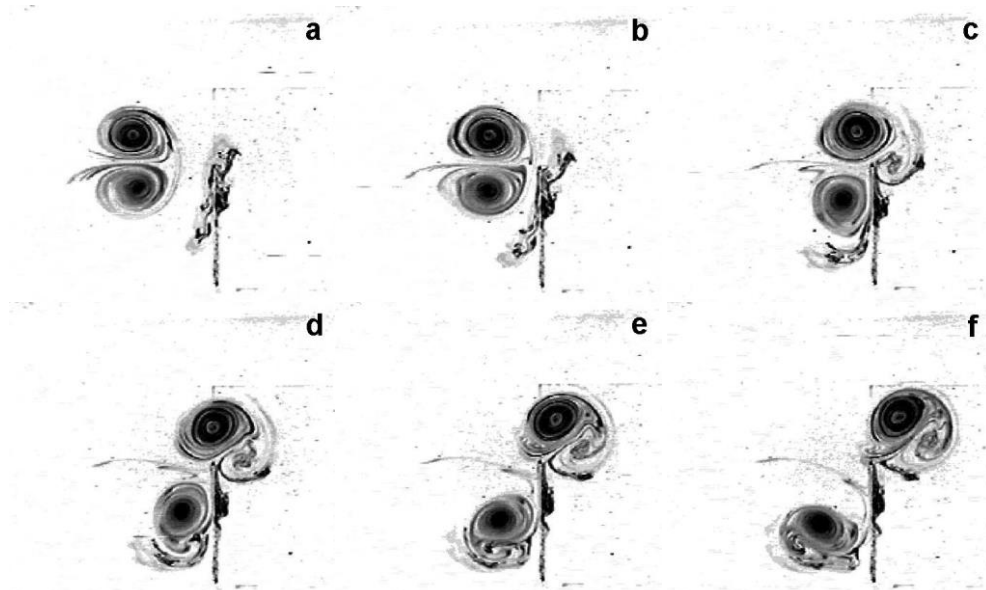


Fig.4. Dye-visualisation of a dipolar vortex colliding against a flat plate with a sharp edge, with off-set

An example of a dye experiment is shown in fig.4. In this experiment, the dipole was initially aligned with the edge of the plate, i.e. with an off-set distance $\delta \approx 0$ (fig.4). In the photographs the dye-visualised dipole is seen to approach the plate from the left (fig.4b) and the irregular dye patches on either side of the plate have been introduced to visualize the formation of any secondary vortices near the plate. As the dipole gets closer to the plate, it is observed to split. A secondary vortex (with negative circulation) forms behind the plate edge (fig.4c), which subsequently combines with the positive-vorticity part of the dipole, thus forming a new dipole that moves away. Because this dipole is a-symmetric (the vortex produced at the edge is weaker than the original dipole half) it moves along a curved trajectory.

On the “frontal” side of the plate, the flow associated with the negative vorticity part of the dipole induces a viscous boundary layer, owing to the no-slip condition at the wall. The vorticity in the boundary layer is of opposite sign, i.e. positive (fig.4d). This positive vorticity patch is advected by the flow induced by the negative half of the dipole (fig.4e), and is seen to roll up into a single positive vorticity patch that pairs with the negative half of the initial dipole (fig.4f). This newly formed dipole is a-symmetric too, and also moves along a curved path. This latter behaviour is very similar to what has been found by [14] in his study of a vortex dipole colliding against a flat solid wall.

4. Results

In this section we will discuss results obtained with the point-vortex model of the vortex dipole moving close to the tip of the solid wedge, showing the vortex trajectories for different initial off-set values. Also, the strengths and paths of the vortices generated at the wedge tip will be considered. Next, experimental results will be discussed and a direct comparison with the point-vortex results will be made.

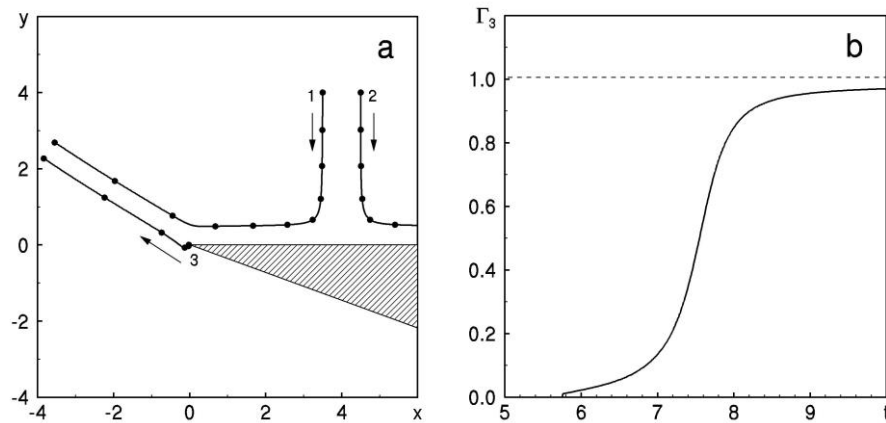


Fig.5. Interaction of the vortex pair with a wedge, $x_0 = 4.0$:
 a) trajectories of vortices, b) the circulation of the third vortex

4.1. Vortex trajectories

Let us consider interaction of a vortex pair with a wedge of $\beta = 20^\circ$. There are two vortices with circulation $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = -1.0$, which have initial coordinates $x_1^0 = x_0 - b/2$, $x_2^0 = x_0 + b/2$ and $y_1^0 = y_2^0 = y_0$ according to fig.1. The sign of circulations is chosen in such a way that the self-induced velocity of vortex pair be directed to the solid surface. We can analyse features of vortex pair interaction with wedge for values x_0 changing in a sufficiently large range and for fixed value y_0 . Let $b = 1.0$ and $y_0 = 4.0$. It means that vortex pair at the initial moment is far enough from wedge surfaces, and it is possible to suppose that surfaces do not essentially influence the initial phase of vortex motion.

First we consider the case $x_0 = 4.0$. The vortex trajectories is shown in fig.5,a. Circles in the figure show spatial positions of vortices at equidistant moments $t_n = n\Delta t$, where $\Delta t = 1.0$. Arrows specify directions of vortex motion. At the initial stage vortices 1 and 2 move to the negative values of axis Oy perpendicularly to the solid surface. When $t \approx 4.0$, vortices have come close enough to the surface that begins to influence vortex trajectories: distance between vortices increases. As vortex pair is far enough from the vertex of wedge, vortex trajectories develop symmetrically. Then vortex 1 moves to the wedge, while vortex 2 moves in the positive values of axis Ox . The symmetry in trajectories has lost.

When vortex 1 achieves the vertex of wedge, $t \approx 7.0-8.0$. The vortex moving near the vertex generates an angular vortex. Fig.5,b shows changes in circulation of new vortex in time. It is shown that the circulation of vortex 3 achieves value $|\Gamma_1|$. It results in formation of a new vortex pair with equal circulation (by module). Vortex 2 moves together with vortex 3 in the negative direction of axis Ox , forming a vortex pair leaving the wedge surfaces.

The analogous interaction of vortex pair with the wedge can be seen in fig.6 with $x_0 = 0.0$. Here and later we use analogous notations in figures. In this case vortex 1

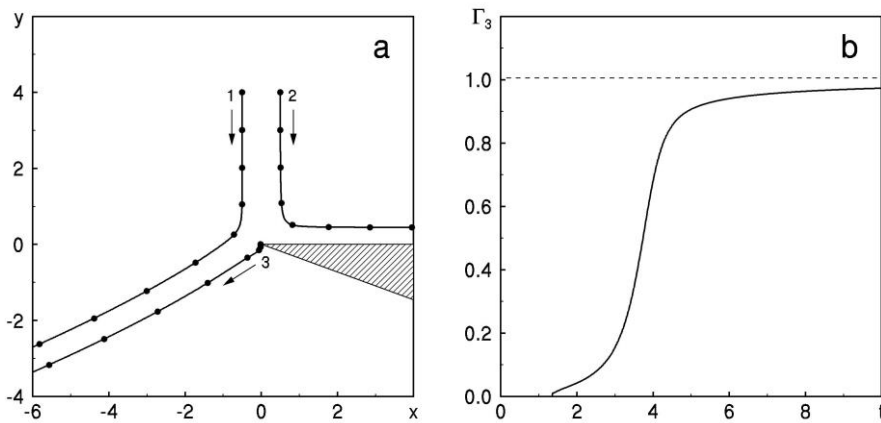


Fig.6. Interaction of the vortex pair with a wedge, $x_0 = 0.0$:
 a) trajectories of vortices, b) the circulation of the third vortex

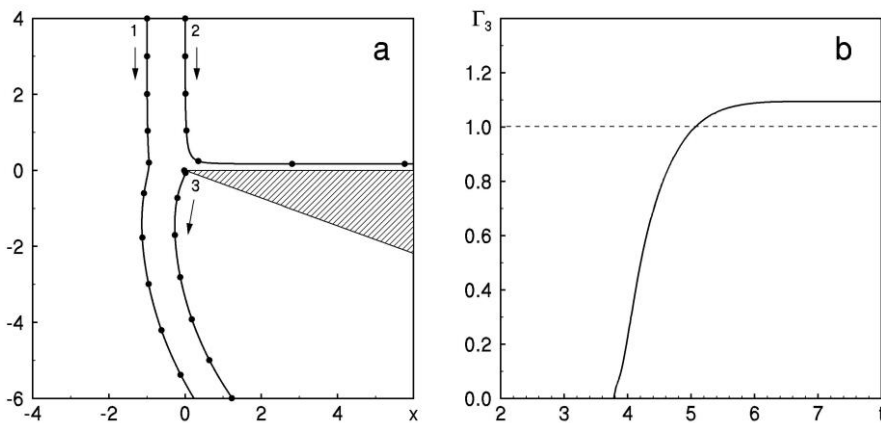


Fig.7. Interaction of the vortex pair with a wedge, $x_0 = -0.5$:
 a) trajectories of vortices, b) the circulation of the third vortex

comes closer to the vertex wedge compared to the case considered before. This position results in fast growth of circulation of the angular vortex 3 (fig.6,b). When the formation process is over, new vortex pair with vortices 1 and 3 leaves the sharp edge but with another direction in comparison with case considered before, while the trajectory of vortex 2 is similar one. Note that the circulation of vortex 3 increases in both cases at the moments when the initial vortex 2 moves close to the wedge.

The case $x_0 = -0.5$ is shown in fig.7. Vortex 1 passes in greater distance from the wedge compared to the previous cases. Therefore vortex trajectories are barely different. On the other hand vortex 1 goes in the direction to the vertex of the wedge and causes the occurrence of a new vortex 3, its circulation growing quickly enough (see fig.7,b) and achieving the value $|\Gamma_3| > |\Gamma_1|$. The following evolution of vortex system has an analogous tendency. It is necessary to note that new pair has vortices with non-equal circulation. Vortex pair 1+3 has a slight rotation in counter-clockwise

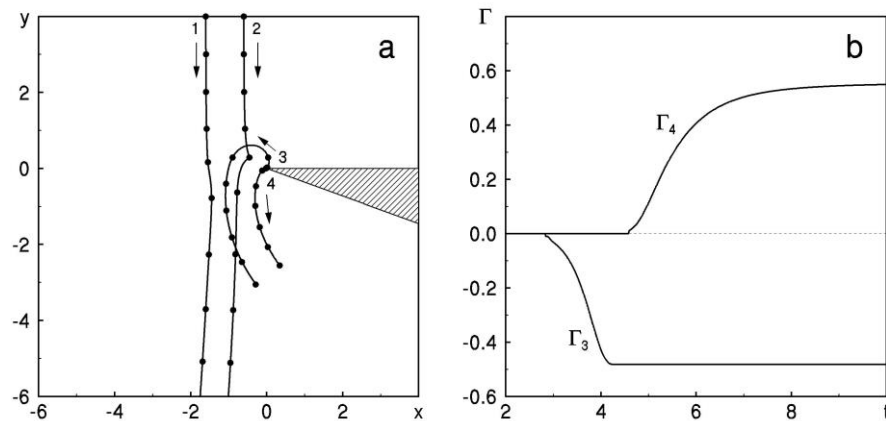


Fig.8. Interaction of the vortex pair with a wedge, $x_0 = -1.1$:
 a) trajectories of vortices, b) the circulation of the third vortex

direction and, therefore, moves closer to the bottom surface of the wedge (fig.7,a).

We can find more differences in the interaction of vortex pair with the wedge at $x_0 = -1.1$, presented in fig.8. In this case vortex 2 strongly influences the formation process of angular vortex, vortex 2 gets to the vertex at $t \approx 4.0$. The circulation of vortex 3 grows quickly enough. However, in this case the sign of circulation coincides with circulation of vortex 1 (fig.8,b). Distance between new vortices and wedge increasing, and vortices moves to the initial vortex pair. New vortex induces a velocity field, which even stops vortex 2. The existence of two vortices (with numbers 2 and 3) near the vertex a wedge results in generation of another vortex 4), its circulation having the opposite sign to that of vortex 3. Thus, there are four vortices in considered system. New vortices push out vortex 2 in the direction of vortex 1, while vortices 3 and 4 form new vortex pair, their circulations being a little bit smaller compared to the initial vortex pair.

Finally, the further displacement, $x_0 = -2.0$, leads to the case, then the initial vortex pair passes the wedge at large enough distance (fig.9). At the moment when vortex 2 is situated close to the vertex of wedge, induced velocity results in formation of vortex 3 with negative circulation. Now this vortex, leaving the wedge, forms vortex 4. Fig.9,b shows changes of vortex circulations in time. New vortex pair has two vortices with small enough circulations, therefore this vortex pair moves away from the wedge with small enough self-induced velocity.

The analysis of vortex interactions for other parameters x_0 shows that there is some critical value x_{cr} at which the type of point vortex interaction changes. The exchange interaction occurs at $x_0 > x_{cr}$. In this case vortex 1 when approaching the wedge forms a vortex pair together with the angular vortex and this pair leaves the wedge region. The vortex 2 goes along a solid surface in the direction of positive values of x -axis. If $x_0 < x_{cr}$ the initial vortex pair generates two angular vortices, which move independently from the wedge. The shorter the distance between initial vortex pair and

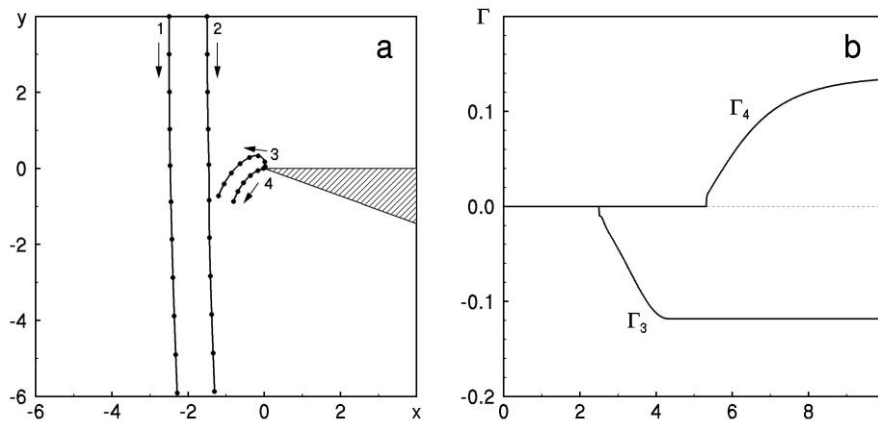


Fig.9. Interaction of the vortex pair with a wedge, $x_0 = -2.0$:
 a) trajectories of vortices, b) the circulation of the third vortex

wedge vertex, the lower the intensity of new vortex pair. Research shows that the critical parameter x_{cr} is in range $-1.0 < x_{cr} < -0.9$ and depends on the value β .

4.2. Comparison point vortex model with an experimental data

The experimental research was carried out for interaction of vortex pair with a plate, $\beta = 0^\circ$. Vortex pair was formed at a sufficient distance from the plate, therefore the influence of solid surface on a dipole generation and on an initial motion are minimal. Fig.10 shows contour plots during interaction with a wedge for case $x_0 = -1.4$. The time interval between figures is $\Delta t = 5.0$ s. Initial distance between vortices in the dipole is $b = 100$ mm, and vortex intensities have $|\Gamma_1| = |\Gamma_2| = 1.8 \cdot 10^4$ mm²/s. In this case self-induced velocity of vortex dipole is $U_s \approx 30$ mm/s. During generation process the intensity of vortices is not equal and the dipole is not moving perpendicularly to the wall. Therefore initial offset x_0 is defined at the following moment of approaching of vortex dipole to the plate when intensity of vortices become approximately equal and dipolar vortex goes perpendicularly to the solid surface.

The initial vorticity distribution is shown in fig.10,a. This moment corresponds to $t = 0$ s. Hereinafter contours for negative vorticity are plotted by dashed lines, and contours for positive volumes are shown by continuous lines. Moving nearer to the edge the dipolar vortex generates an angular vortex with positive vorticity, $t = 5.0$ s. The angular vortex begins to leave the wedge, however it appears that intensity of angular vortex is not enough to influence the forward motion of the initial vortex dipole (fig.10,c). As a result, the vortex dipole has passed the region of the edge without essential changes in the trajectory, and the angular vortex stopped at a distance of about 100 mm from the vertex of the wedge. The vorticity distribution for the moment $t = 15$ s is shown in fig.10,d.

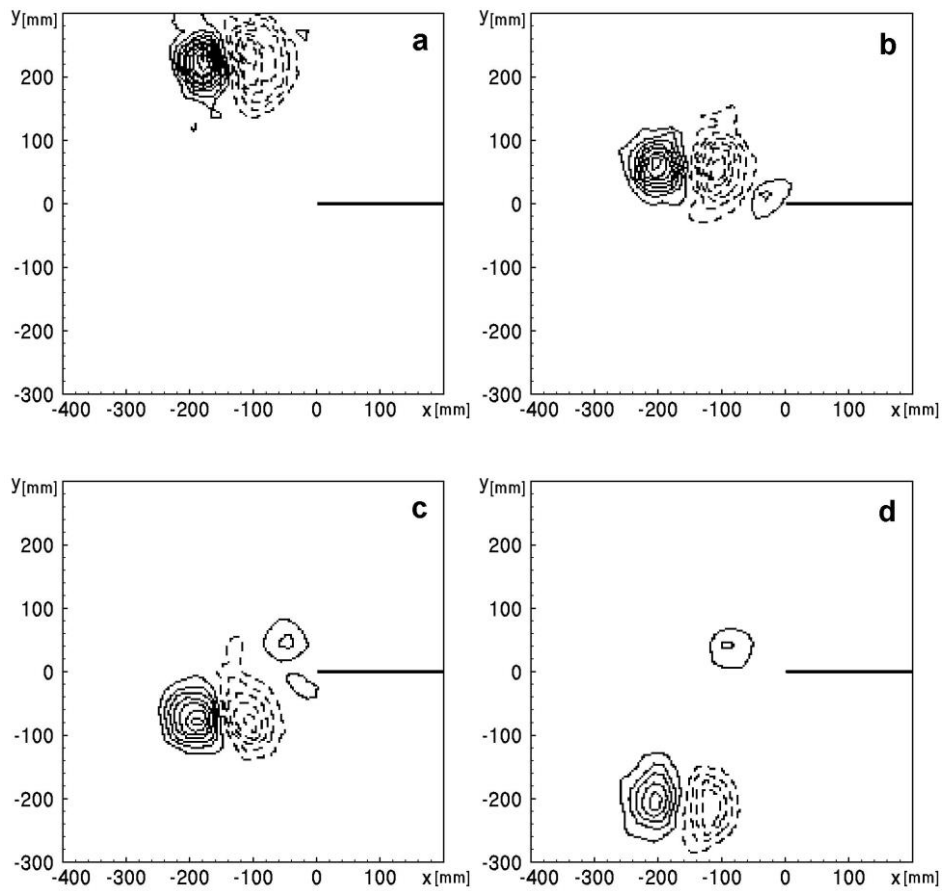


Fig.10. Interaction of the dipolar vortex with a wedge, $x_0 = -1.4$ (experiment) at:
 a) $t = 0$ s, b) $t = 5.0$ s, c) $t = 10.0$ s, d) $t = 15.0$ s.

Consider an advection process of a passive fluid in a velocity field of vortex pair interacting with a wedge for case considered before, $x_0 = -1.4$. Let vortex pair at the initial moment is inside the marked circular region of radius $r_0 = 1.1$ with the centre in a point (x_0, y_0) . Here we apply notation in fig.1. The size of circular region exceeds a little the dimension of a vortex atmosphere.

Initial vortex position and the region of passive fluid under investigation is shown in fig.11. Initial distance between vortices in the pair $b = 1.0$, the vortex intensity are $|\Gamma_1| = |\Gamma_2| = 1.0$. As before $y_0 = 4.0$. Filled circles in figures indicates vortex position through equidistant moments $\Delta t = 1.0$. When vortex pair passes the wedge peak, the angular vortex 3 is formed. The vortex positions and atmosphere of vortex pair is shown in fig.11,b for moment $t = 3.0$. When initial vortex pair passes the edge, a new angular vortex is generated. As a result, the angular vortex pair is formed. This moment is shown in fig.11,c. New pair has no influence on the trajectory of initial vortex pair, but angular vortices have certain effect on the structure of vortex atmosphere. Final vortex positions that correspond to fig.10,d, is shown in fig.11,d. It

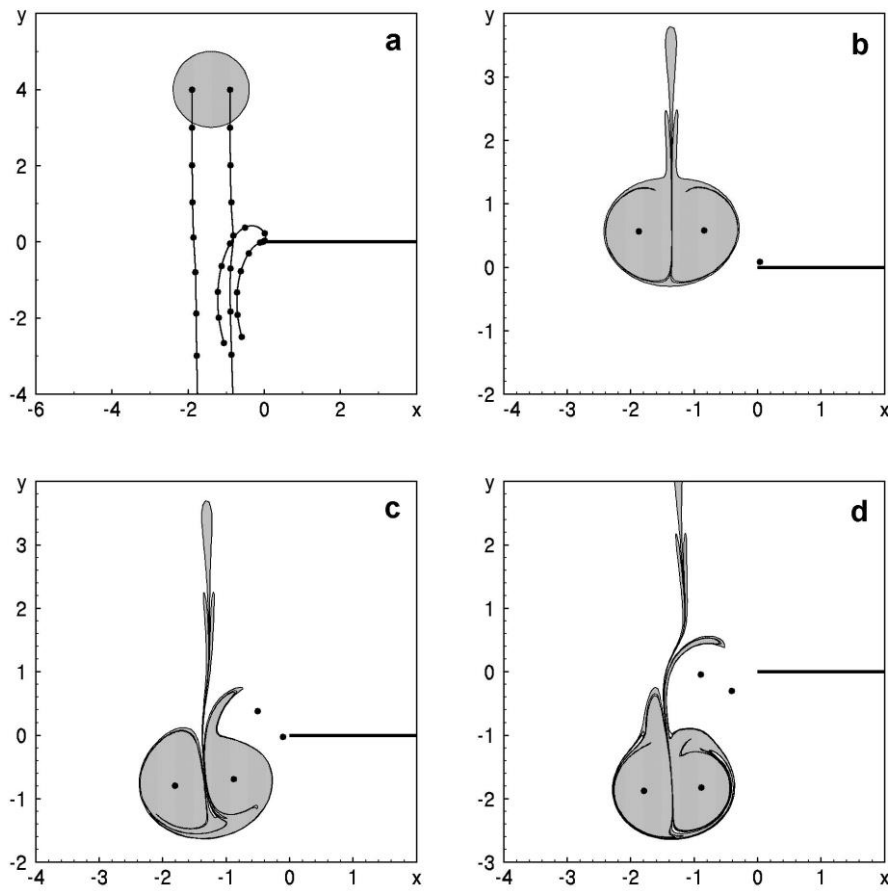


Fig.11. Interaction of the vortex pair with a wedge, $x_0 = -1.4$:
 a) trajectories of vortices at moments $t_n = n\Delta t$, $\Delta t = 1.0$, b) atmosphere at $t = 3.0$,
 c) atmosphere at $t = 6.0$, d) atmosphere at $t = 9.0$.

is visible that vortex pair continues its own motion, while the angular vortex pair moves with smaller self-induced velocity. The comparison fig.10 and fig.11 allows to conclude that numerical and experimental data agree.

Exchange interaction of initial vortex pair with an angular vortex takes place for $x_0 = -0.5$. This case is shown in fig.12 with notations introduced above. Approaching of vortex pair to the wedge results in forming of an angular vortex with rather high intensity (fig.12,b). As a result, the vortex pair, in which one vortex is replaced by an angular vortex, is formed. Then the vortex pair leaves the region of the edge. Vorticity distribution for typical moment $t = 15$ s is shown in fig.12,c. On the other hand, the right vortex from dipole with positive vorticity meets solid surface. The influence of a border results in displacement of the vortex in the positive direction of x -axis. Note that the close solid border results in generation of a secondary (negative) vorticity, which surrounds a moving initial vortex. The final distribution of vorticity field is shown in figure with index "d".

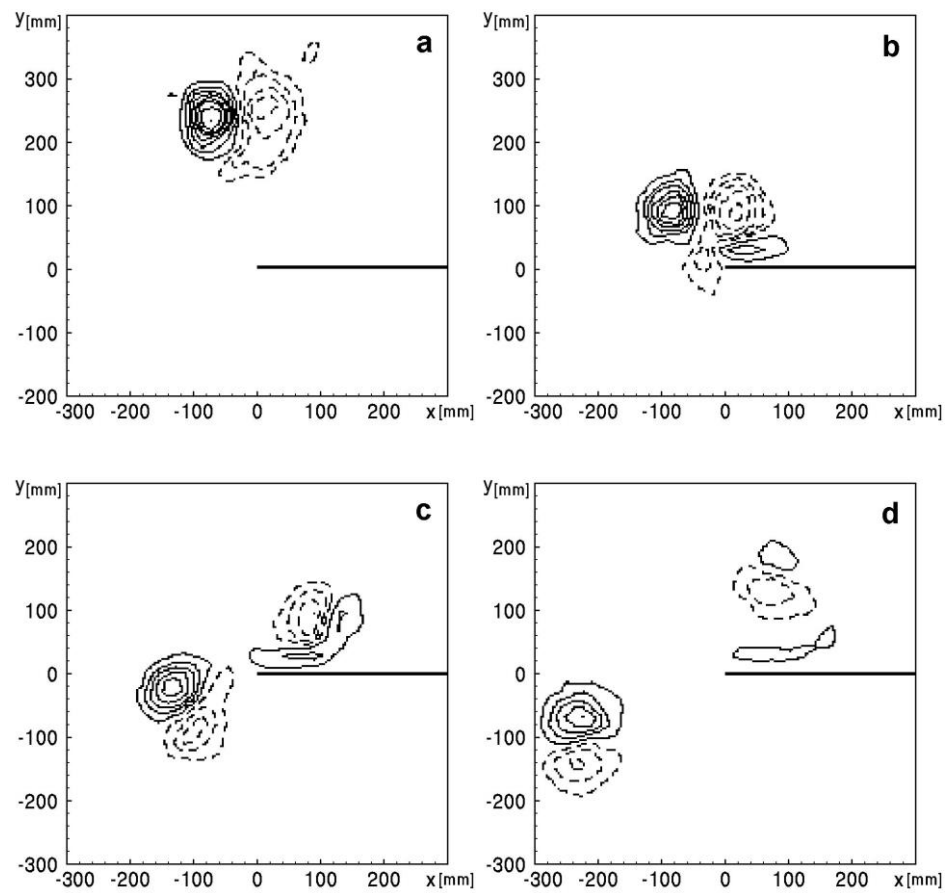


Fig.12. Interaction of the dipolar vortex with a wedge, $x_0 = -0.5$ (experiment) at:
 a) $t = 0$ s, b) $t = 5.0$ s, c) $t = 10.0$ s, d) $t = 15.0$ s.

Advection of a passive fluid is shown in fig.13 for case $x_0 = -0.5$. The size and shape of vortex atmosphere at the initial stage of approaching of vortex pair to the solid surface does not practically differ from the case considered before. The intensive generation of the angular vortex results in intensive rotation of the contour, which is involved in a velocity field of angular vortex (fig.13,c). Then, new vortex pair is formed with the vortex atmosphere consisting as from both dyed and fresh fluid accompanied by angular vortex. The comparison of advection processes allows to conclude that the growth rate of intensity of an angular vortex have strong influence on the advection process of passive fluid.

Let's now consider interaction of the vortex dipole with the wedge for $x_0 = 1.0$, which is shown in fig.14. At the initial moment both vortices in dipole interact with the flat surface. The induced velocity field results in division of vortices in dipole and they start motion in the opposite directions. It is interesting to note that both vortices also form region of secondary vortices positioned between initial vortices and solid surface. In time, the left vortex gets to the wedge vertex and generates a new angular

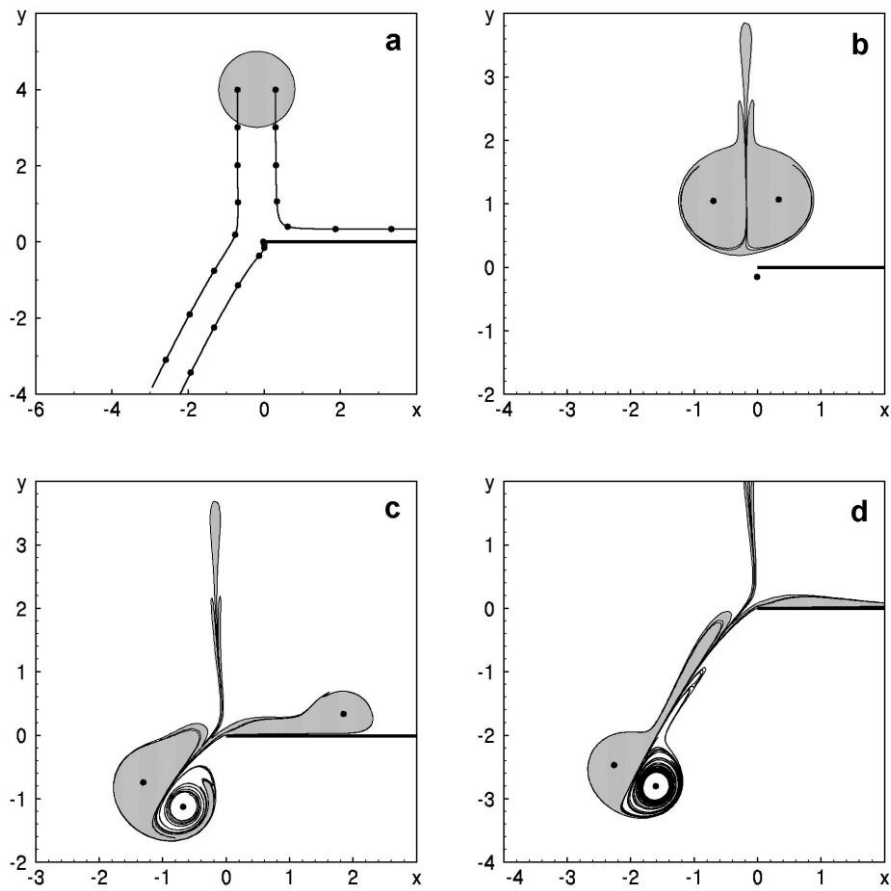


Fig.13. Interaction of the vortex pair with a wedge, $x_0 = -0.5$:
 a) trajectories of vortices at moments $t_n = n\Delta t$, $\Delta t = 1.0$, b) atmosphere at $t = 3.0$,
 c) atmosphere at $t = 6.0$, d) atmosphere at $t = 9.0$.

vortex. As a result, a new vortex pair moving away from the wedge is formed. As the intensity of the initial vortex appears a little bit less compared to intensity of the angular vortex, the pair goes under some angle to the surface. The final vortex distribution is shown in fig.14,d.

If $x_0 = 1.0$, the vortex pair interacts at the initial stage with one of the flat surfaces of the wedge (see also fig.4, then vortex 1 passes near the vertex forming an intensive angular vortex). The advection process in this case is presented in fig.15. By analogy with previous cases the initial position of vortices, circular dyed region of passive fluid, and vortex trajectories are shown in figure with an index "a". Small filled circles show positions of vortices in equidistant time intervals $t_n = n\Delta t$, where $\Delta t = 1.0$.

Position of the marked fluid region under investigation at the moment $t = 3.0$ is shown in fig.15,b. We can see that vortex pair approaches a flat surface and forms a vortex atmosphere, the shape of which represents an ellipse with major axis in horizontal direction. As the initial marked region slightly exceeds sizes of vortex

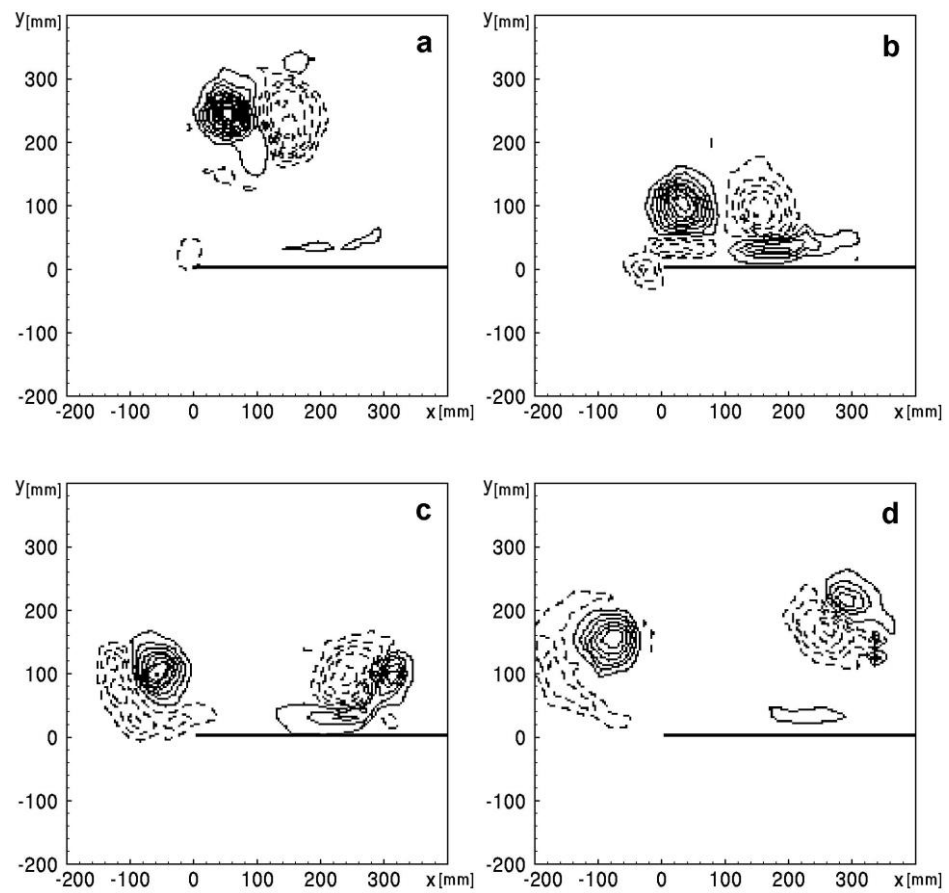


Fig.14. Interaction of the dipolar vortex with a wedge, $x_0 = 1.0$ (experiment) at:
 a) $t = 0$ s, b) $t = 5.0$ s, c) $t = 10.0$ s, d) $t = 15.0$ s.

atmosphere, “excess” fluid leaves the vortex pair from the stern part, forming a typical vortex tail.

The further motion of vortices along the surface results in division of the vortex atmosphere on two approximately equal parts. If evolution of vortex 2 does not undergo any changes, vortex 1 coming nearer to a vertex of the wedge, forms an intensive angular vortex, which partially involves a part of the dyed fluid. The formation process of vortex pair atmosphere is well shown in fig.15,d. Note, that the left part of this atmosphere rotates around vortex 1 and contains mainly the dyed fluid, while other part rotating around the vortex 3, consists of fresh fluid. Here the dyed fluid occupies only a thin part of a peripheral zone of vortex atmosphere. It is interesting to note that there is a typical tail behind the new vortex pair.

Dependencies of relative change of contour length in time for different interactions of vortex pair with the wedge are shown in fig.16 for a typical value x_0 . It is shown that intensive stretching of investigated contour takes place in cases when the right vortex in vortex pair passes in minimal distance from the wedge. In these cases two additional angular vortices are formed. In some cases, vortex generation occurs inside

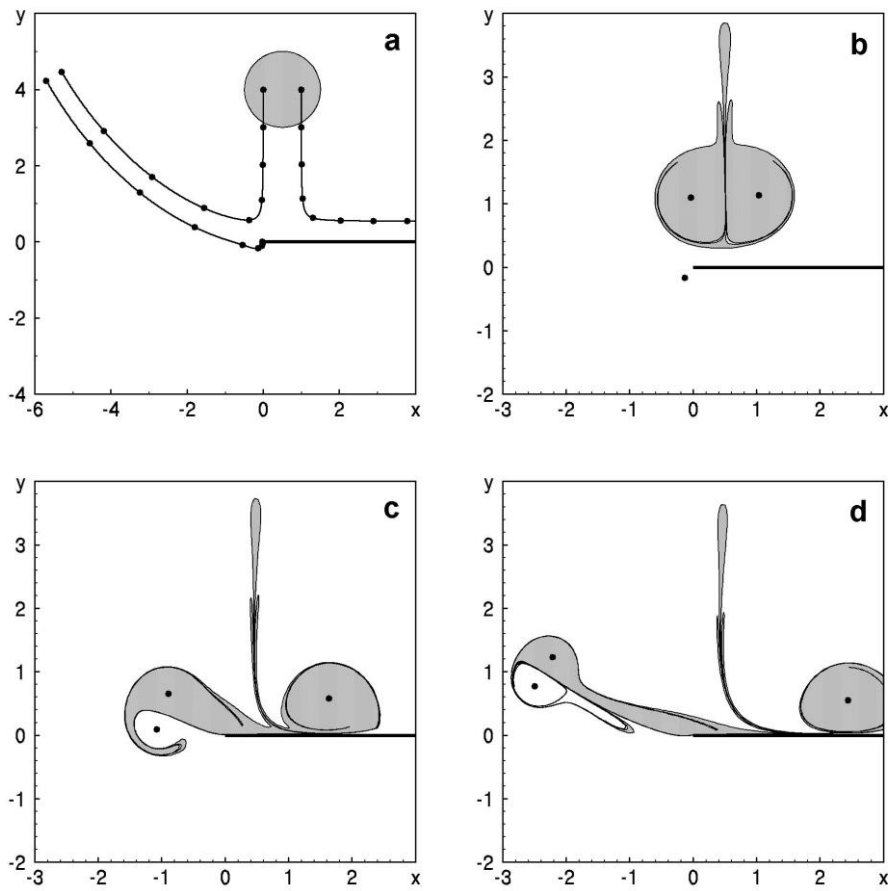


Fig.15. Interaction of the vortex pair with a wedge, $x_0 = 1.0$:

- a) trajectories of vortices at moments $t_n = n\Delta t$, $\Delta t = 1.0$, b) atmosphere at $t = 3.0$,
 c) atmosphere at $t = 6.0$, c) atmosphere at $t = 9.0$.

the initial atmosphere of vortex pair. This fact, probably, is the main reason of intensive stirring process of passive fluid during interaction of vortex pair with the wedge.

6. Conclusions

The interaction of the two-dimensional vortex pair with a wedge formed by two half-planes was investigated. The main type of evolution of large-scale vortex structures and advection processes in the velocity field induced by vortices in the region adjacent to the edge of the wedge was studied both theoretically and experimentally. The numerical model based on the dynamics of point vortices is formed, which are tested according to the results of a laboratory experiment.

In the experiment, a dipolar vortex was generated by raising a circular cylinder, which has been initially filled with fluid, from the tank rotating at a constant angular velocity. Studies have shown that there are at least three possible types of interaction between the vortices. If the dipolar vortex moves at a sufficiently large (in relation to

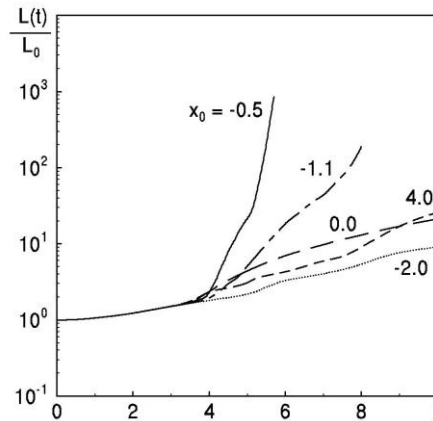


Fig.16. Relative contour length changes in time for various x_0

the distance between the initial vortices) distance, vortex dipole remain in an undisturbed state and does not interact with a sharp edge of the wedge. This interaction occurs at $x_0 > 1.5$ (fig.1). Another type of vortex motion associated with the interaction in which the closest vortex to the edge loses some intensity during generation of secondary vorticity field that is formed near the top solid surface. This process leads to a curvature of the trajectory of dipolar vortex after passing through a region containing the edge. This interaction is observed in the experiment for values $0.5 < x_0 < 1.5$. When the displacement is $-1.0 < x_0 < 0.5$, the initial dipolar vortex generates two new dipoles. These vortices move away from the wall along asymmetric trajectories. Finally, if $x_0 < -2.0$, then two vortices in the formed dipolar structure are symmetrical.

Analysis of the interaction of two point vortices with a sharp wedge was carried out numerically in the approximation of an ideal incompressible fluid. To eliminate the infinite velocity at the sharp edge and to satisfy Kutta-Zhukovsky condition we add the corner point vortex to the system under consideration. Its intensity is determined by the boundary conditions at the top of the two-dimensional angle. However, in contrast to the classical method [8,23,29] in our research we propose to use only one corner vortex, located near the edge of the surface. If the influence of the induced velocity field from vortex pair is small, then corner vortex does not leave the region with the edge. In this case, the corner vortex has the sufficiently small intensity and does not have an influence both on the flow near the solid surfaces, and on the moving vortex pair. However, the vortex pair approached to the edge can increase (by module) of the intensity of the corner vortex. In this case, we need to take into account the variable intensity of the corner vortex and to determine the value of its intensity for each moment in time. When, for various reasons, the additional vortex leaves the angular region, we have to introduce again another corner vortex to the system under consideration. Intensity of this vortex is determined by Kutta-Zhukovsky condition. At this moment, the intensity of the previous corner vortex is fixed. During the calculation of the amount of angular vortices introduced into the system is not limited.

During an evolution the vortex pair engages in own motion the part of the nearby fluid, forming so-called “vortex atmosphere”. This cloud at the steady motion of vortex pair has an elliptical shape, and the size of the cloud does not change over time. The interaction of vortices with the corner region disturbs the stationary motion of the vortex pair. As a result, the fluid mixing process occurs with different modes in fluid velocity field induced system point vortices near the edge of the solid surface.

The exchange interaction of the vortex pairs with a corner vortex leads to quite intense mixing process of passive fluid moved initially inside the vortex cloud. Studies show that the corner vortex stimulates more intensive mixing process compared with same process induced by formed vortex pairs. These results are confirmed by laboratory experiment.

These studies are dedicated to the memory of our colleague (G.J.F. van Heijst, L.Zannetti) and teacher (A.Gourjii) prof. Slava Meleshko (Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine) tragically died in 2011. He was the initiator of this research, carried out a significant part of a coordination work and actively participated in the writing initial versions of this paper.

REFERENCES

1. Mechanics of the 21-st crntury // ed. by Gutkowski W., and Kowalewski T., Proceeding of the 21-st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Warsaw, Poland, 15-21 August 2004. – Amsterdam: Springer-Verlag, 2005. – 422p.
2. Tubes, sheets and singularities in fluid dynamics // ed. by Bayer K., and Moffatt H.K., Proceeding of the NATO ARW held in Zakopane, Poland, 2-7 September 2001. – London: Kluwer Acad. Publ., 2002. – 384p.
3. Anderson J.D.Jr. Computational fluid dynamics / J.D.Anderson Jr., Degroote J., Degrez G., at al. // Berlin: Springer-Verlag, 2009. – 332p.
4. Truesdell C. The kinematics of vorticity / C.Truesdell // Bloomington: Indiana Univ., 1954 – 232p.
5. Schlichting H. Boundary-layer theory / H. Schlichting // New York: McGraw-Hill, 1979. – 817p.
6. Robinson S.K. Coherent motions in the turbulent boundary layer / S.K.Robinson // Annual. Review of Fluid Mechanis. – 1991. – V.23. – p.601-639.
7. Casciola C.M. Vorticity generation on a flat surface in 3D flows / C.M.Casciola, R.Piva, P.Bassanini // Journal of Computational Physics. – 1996. – V.129. – p.345-356.
8. Belotserkovsky S.M. Separated and unseparated overflow around thin wings by an ideal fluid / S.M. Belotserkovsky, Nisht M.I. // Moscow: Nauka, 1978. – 352p. (*Russian*) *Original text*: Белоцерковский С.М. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью / С.М.Белоцерковский, М.И.Ништ // М.: Наука. 1978. – 352с.
9. Leonard A. Vortex simulation of forced/unforced mixing layers / A.Leonard, A.Inoue // AIAA journal. – 1987. – V.288. – p.1-19.
10. Lamb H. Hydrodynamics / H.Lamb // Cambridge: Cambridge university press, 1932. – 755p.

11. Meleshko V.V. Dynamics of vortex structures / V.V.Meleshko, M.Yu.Konstantinov // Kiev: Dumka, 1993. – 279p. (*Russian*) *Original text*: Мелешко В.В. Динамика вихревых структур / В.В.Мелешко, М.Ю.Константинов // Киев: Наукова думка, 1993. – 279с.
12. Villat H. Vortex theory / H/Villat // Moscow: ONTI, 1936. – 238p. (*Russian*) *Original text*: Вилля Г. Теория вихрей / Г.Вилля // Л.,М.: ОНТИ, 1936. – 238с.
13. Barker S.J. The motion of two-dimensional vortex pairs / S.J.Barker, S.C.Crow // Journal of Fluid Mechanics. – 1977. – V.82. – p.659-671.
14. Orlandi P. Vortex dipole rebound from a wall / P.Orlandi // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. – 1990. – Vol.2, N.8. – p.1429-1436.
15. van Dyke M. An album of fluid motion / M. van Dyke // Stanford: Parabolic press, 1982, – 180p.
16. Landau L.D. Hydrodynamics / L.D.Landau, E.M.Lifshits // Moscow^ Nauka, 1986. – 736p. (*Russian*) *Original text*: Ландау Л.Д. Гидродинамика. Т.6 / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц // М.: Наука, 1986. – 736с.
17. Rouch P. Computational fluid dynamics / P.Rouch // Moscow: Mir, 1980. – 616p. (*Russian*) *Original text*: Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П.Роуч // М.: Мир. 1980. – 616с.
18. Fletcher C.A.J. Computational techniques for fluid dynamics. V.1 / C.A.J.Fletcher // Berlin: Springer-Verlag, 1988. – 409с.
19. Baker A.J. Finite element computational fluid mechanics / A.J.Baker // New York: McGraw-Hill. – 482p.
20. Peyret R. Computational methods for fluid flow / R.Peyret, T.D.Taylor // Berlin: Springer, 1983. – 548p.
21. Goodman J. Convergence of the point vortex method for the 2D Euler equations / J.Goodman, T.Y.Hou, J.Lowengrub // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1990. – V.43. – p.415-430.
22. Sarpkaya T. Computational methods with vortices / T.Sarpkaya // Journal of Fluid Mechanics. – 1989. – V.11. – p.15-52.
23. Saltanov N.V. Vortex structures in fluid: analytical and numerical solutions / N.V.Saltanov, V.A.Gorban // Kiev: Naukova Dumka, 1993. – 244p. (*Russian*) *Original text*: Салтанов Н.В. Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения / Н.В.Салтанов, В.А.Горбань // К: Наукова Думка, 1993. – 244с.
24. Sethian J. Validation study of vortex methods / J.Sethian, A.Ghoniem // Journal of Computational Physcs. – 1984. – V.54. – p.425-456.
25. Cottet G.-H. Vortex methods: theory and practice / G.-H.Cottet, P.D.Koumoutsakos // Cambridge: Cambridge Univ. Press. 2000. – 314p.
26. Brackbill J. FLIP: a method for low-dissipation particle in cell method for fluid flow / J.Brackbill, D.Khote // Journal of Computer Physics Communications. – 1986. – V.48. – p.25-38.
27. Christiansen J.P. Numerical solution of hydrodynamics by the method of point vortices / J.P.Christiansen // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1973. – V.13. – p.363-379.
28. Perlman M. On the accuracy of vortex methods / M.Pperlman // Journal of Computational Physics. – 1985. – V.59. – p.200-223.

29. Conlisk A.T. Modelling of vortex-corner interaction using point vortices / A.T.Conlisk, D.Rockwell // *Physics of Fluids*. – 1981. – V.24. – p.2133-2142.
30. Belotserkovsky S.M Mathematical modelling of separated flow of plane bodies / S.M.Belotserkovsky, V.N.Kotovskiy, Nisht M.I. // Moscow: Nauka, 1988. – 232p. (*Russian*) *Original text*: Белоцерковский С.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / С.М.Белоцерковский, В.Н.Котовский, М.И.Ништ // М.: Наука. 1988. – 232p.
31. Chorin A.J. Numerical study of slightly viscous flow / A.J.Chorin // *Computers & Fluids*. – 1973. – V.17. – p.397-410.
32. Prandtl L. Hydro- und aeromechanik. V.1 / L.Prandtl, O.Tietjens // Berlin: Springer-Verlag, 193. – 224p.
33. Meleshko V.V. Stirring of an inviscid fluid by interacting point vortices / V.V.Meleshko, A.A.Gourjii // In "Modelling of Oceanic Vortices" (ed. by G.J.F. van Heijst), Proceeding Colloquium Royal Netherlands Academy of Arts and Science, Amsterdam, Noth-Holland, 1994. – p.271-281.
34. Krasnopolskaya T.S. Laminar stirring of fluids. Part 1. Methodological aspects of investigation / T.S.Krasnopolskaya, V.V.Meleshko // *Applied Hydromechanics*. – 2004. – Vol.4. – p.45-58.
35. Velasco Fuentes O.U. Experimental study of dipolar vortices on a topographic β -plane / O.U. Velasco Fuentes, van Heijst G.J.F. // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1994. – Vol.259. – p.79-106.
36. Meleshko V.V. Advection of a vortex pair atmosphere in a velocity field of point vortices / V.V.Meleshko, M.Yu.Konstantinov, A.A.Gurzhi, T.P.Konovaljuk // *Physics of Fluids*. – 1992. – V.A4, N.12. – p.2779-2797.
37. Ottino J.M. The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport / J.M.Ottino // Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – XXXp.
38. Gourjii A.A. Method of piece spline interpolation in the advection problem of passive impurity in known velocity field / A.A.Gourjii, V.V.Meleshko, G.J.F. van Heijst // *Reports of AS of Ukraine*. – 1996. – N.8. – p.48-54 (*Ukraine*) *Original text*: Гуржій О.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Метод кускової сплан-інтерполяції в задачі про адвекцію пасивної домішки у відомому полі швидкості / О.А.Гуржій, В.В.Мелешко, Г.Я.Ф.ван Хейст // *Доповеди АН України*. – 1996. – N8. – с.48-54.
39. Meleshko V.V. On Chaplygin's investigations of two-dimensional vortex structures in an inviscid fluid / V.V.Meleshko, van Heijst G.J.F.// *Journal of Fluid Mechanics*. – 1994. – V.272. – p.157-182.
40. Trieling R.R. Monopolar vortices in an irrotational annular shear flow / R.R. Trieling, A.H. Linssen, G.J.F. van Heijst // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1998. – Vol.360. – p.273-294.

UDC 535.42, 004.94

Modeling of speckle metrology technique of detecting the medium acoustic oscillations

G. M. Dolya, O. S. Lytvynova

V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

To describe the speckle metrology technique of detecting the medium acoustic oscillations, the acousto-optic modulator circuit was assembled. It is based on the process of double laser beam propagation through a medium with regular phase changes induced by the acoustic wave. Spectral analysis of photocurrent, obtained by direct photodetection of the laser radiation, allows us to detect frequency of acoustic oscillations in the medium. According to presented scheme the computer model is developed. The simulation results, obtained for the various parameters of the acoustic wave, are described. The case of excitation of two acoustic waves with different frequencies is partially considered.

Key words: *speckle metrology, acoustic oscillations, retro-reflector, phase transparent.*

Для опису спеклометричного методу виявлення акустичних коливань середовища було зібрано схему акустооптичного модулятора. Він заснований на процесі дворазового поширення лазерного випромінювання крізь середовище з регулярними змінами фаз під дією акустичної хвилі. Спектральний аналіз фотоструму, отриманого шляхом прямого фотодетектування лазерного випромінювання, дозволяє визначити частоту акустичних коливань середовища. Згідно представленої схеми розроблено комп'ютерну модель. Описано результати моделювання, отримані для різних параметрів акустичної хвилі. Частково розглянуто випадок збудження двох акустичних хвиль з різними частотами.

Ключові слова: *спеклометрія, акустичні коливання, ретрорефлектор, фазовий транспарант.*

Для описания спеклометрического метода обнаружения акустических колебаний среды была собрана схема акустооптического модулятора. В его основе лежит процесс двукратного прохождения лазерного излучения через среду с регулярными изменениями фаз, вызванными действием акустической волны. Спектральный анализ фототока, полученного путем прямого фотодетектирования лазерного излучения, позволяет определить частоту акустических колебаний среды. Согласно представленной схеме разработана компьютерная модель. Описаны результаты моделирования, полученные для различных параметров акустической волны. Частично рассмотрен случай возбуждения двух акустических волн с разными частотами.

Ключевые слова: *спеклометрия, акустические колебания, ретрорефлектор, фазовый транспарант.*

1. Introduction

Methods of studying medium acoustic oscillations by means of light beams were widely used before the invention of lasers [1]. Acousto-optic interaction theory [2] and its application in various fields of technology [3] relate to a situation where the acoustic wavelength is much smaller than the diameter of the associated optical beam. As a result, in that case, the light diffraction effect by ultrasonic waves arises. In the opposite situation, when the diameter of light beam is less than the acoustic wavelength, the diffraction effect does not occur. Therefore, it is necessary to use other physical phenomenon to study the properties of acoustic waves (their amplitude,

frequency, etc.). One of such approaches is based on analysis of the speckle image resulting from the laser beam passing through the acoustic barrier and scattering on the rough surface.

Speckle metrology, i.e. the spatial structure analysis of laser light scattered on the rough surface and its time history, is currently commonly used tool for a wide range of applications. For example, using this method is carried out measuring local deformations and displacements of objects [4, 5]. Laser speckle velocimeters allow us to measure the lateral objects velocity against the beam direction [6, 7]. By means of analysis of the speckles change dynamics in space the vibration of local areas of objects surface can be measured [8, 9].

One of the significant limitations when using the speckle measurement method is a wide angular spectrum of the laser light scattered on the rough object surface. This leads to a rapid decrease in power of the received radiation with an increase of measurement range. By covering the object surface with retro-reflecting arrays (RRA) a significant increase of spatial concentration of the scattered radiation can be achieved. These coatings are currently widely used, for example, to enhance the visibility of the road signs, clothing, vehicles, etc. They consist of a large number of glass microspheres or microprisms [10] with characteristic dimensions ranging from tens to hundreds of micrometers and disposed on a substrate in random manner (microspheres) or relatively regular (microprisms). When the laser radiation falls on such surface, the light field is transformed in accordance with the laws of beam pass in each element of the RRA. The transformed radiation propagates in the direction of the laser source within a small angle of a few degrees. That process creates the speckle image within the receiving plane as a result of interference of waves re-emitted by each element. Use of RRA significantly increases the laser radiation capacity observed in a receiver plane. That allows us to increase observation distance and precision of measurements. In some applications, such devices are called retro-reflective laser sensors (RRLS) [11].

The possibility of using RRA in speckle metrology techniques are discussed, for example, for vibrometry [12] and speckle velocimetry [13] issues solving. The analysis of dynamics of the speckle pattern allows us not only to determine the behavior of the object surface, but also to detect changes in the state of the environment of the laser radiation between the laser and the object. For example, a technology of detecting random phase distortions generated from the heat source using the previously described method is discussed in [14]. The phase inhomogeneities of medium may be a random, caused by atmospheric turbulence, and regular, caused by acoustic oscillations of the acoustic generator. The paper [15] shows how random and regular variations in density of air can be detected by direct detection of scattered laser radiation. This spatial heterogeneity of the scattered laser light in the plane of observation (speckle pattern) is a key factor. Devices built on this principle can be called ARRLS (acoustic retro-reflective laser sensors).

Regular medium density fluctuations are created due to the excitation of a acoustic wave in the direction perpendicular to the laser beam crossing it, together with an acousto-optical interaction. The effectiveness of this interaction depends on several factors: the radiation power, the aspect ratio of the beam and acoustic wavelength, the location of the beam along its path, etc. The study of such characteristics of this

acousto-optical interaction type is conveniently carried out using the method of computer simulation.

2. Detector description

The simulation was performed for the conditions corresponding to the experimental setup (fig. 1) as described in [15].

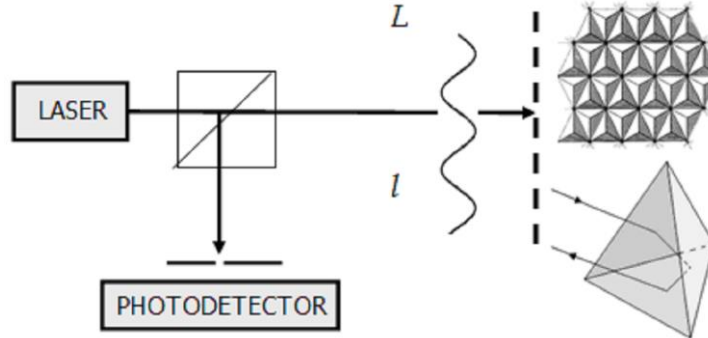


Fig.1. Acousto-optic modulator diagram.

It consists of the laser, the beam splitter, the phase transparent created by the travelling acoustic wave at a distance l from the laser. Laser beam diameter is d . The acoustic wavelength is Λ .

The RRA is situated behind the phase transparent, created by acoustic wave. It consists of tetrahedral retro-reflectors with characteristic dimension of element - σ . Photodetector with a square aperture of side D detects the scattered radiation.

3. Theoretical formulation

The initial structure of the beam was set in the form of a plane wave with a Gaussian distribution of the amplitude (1)

$$E_1(x, y, 0) = A_{light} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\omega^2}\right). \quad (1)$$

It shall be noted that the approach to creating a computer model is described in [14]. There the phase transparent is formed by turbulent layer with a random two-dimensional phase distribution. In this paper, one-dimensional sinusoidal phase grating with phase distribution described by equation (2) was used as a phase transparent

$$\psi_{ac}(y) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi y}{\Lambda} - \Delta\phi\right), \quad (2)$$

where A is an amplitude of the acoustic wave, $\Delta\phi$ is a phase shift, which provides a simulation of a change of a travelling acoustic wave.

Thus, the structure of the field of laser radiation passing through this transparent is calculated by:

$$E_2(x, y, l) = E_1(x, y, l) T_{ac}(y), \quad (3)$$

where $T_{ac}(y) = e^{i\psi_{ac}(y)}$ is the transmission function of the phase transparent.

Since conditions of modeling assumed that $d \gg \Lambda$ patterns of change in amplitude and phase in the area from transparent to RRA determined by the laws of geometrical optics, which do not change the phase ratio within the light beam.

The transformation behavior of the amplitude-phase distribution of the light wave in the RRA is described by a function $K_{\text{RRA}}(x, y)$. Detailed description of the method of its calculation can be found in [14]. In calculating this function we take into account the reflection features from each of the three faces of the elementary retro-reflector, which lead to a change in amplitude, phase, and direction of propagation of the beam.

The light wave with an amplitude-phase distribution described by (4), propagates onto the opposite direction:

$$E_3(x, y, L) = E_2(x, y, L) K_{\text{RRA}}(x, y). \quad (4)$$

At the same time as a result of diffraction the light wave described by (5) is ensued in the phase transparent plane:

$$E_4(x, y, l) = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ik(L-l)}}{(L-l)} \int_{S'} E_3(x', y') \exp\left\{\frac{ik[(x-x')^2 + (y-y')^2]}{2(L-l)}\right\} dx' dy'. \quad (5)$$

Repeated passage of the light wave through a phase transparent with a transmission function $T_{\text{ac}}(y)$ changes its structure.

Further, the light wave propagates in the direction of the laser and forms a light wave, defined by (6) in the receiving plane.

$$E_5(x, y, 0) = E_4(x, y, l) T_{\text{ac}}(y). \quad (6)$$

There is carried out the photodetection of the obtained intensity distribution, and its integration within the receiving aperture with dimensions D (fig. 2).

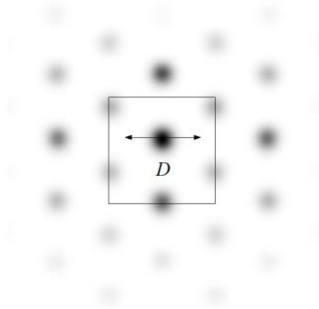


Fig.2. Receiving aperture.

4. Simulation results and analysis

Simulation data represents that the travelling acoustic wave leads to the harmonic displacement of the diffraction pattern formed in the receiving plane in accordance with the laws of the changes of the acoustic wave. Since the diaphragm is fixed, at the photodetector output harmonic oscillations of the photocurrent are generated.

Spectral analysis of these fluctuations shows the adequacy of the laws of changes in air density in the acoustic wave.

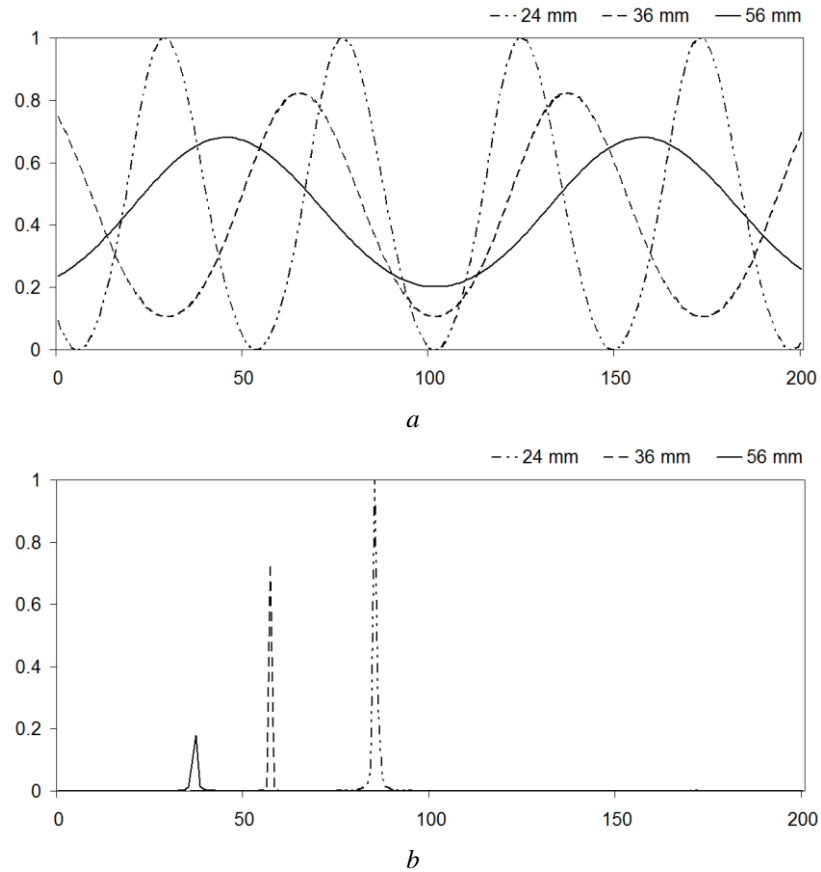


Fig.3. Photocurrent fluctuations.

Fig. 3(a) shows the trend in the photocurrent when the acoustic wave values Λ equal to 24mm, 36mm and 56mm. Spectral analysis of these fluctuations is shown in fig. 3(b). It illustrates the presence of monochromatic components, which corresponds to changes in sound frequency. It also shows that the oscillation amplitude of the photocurrent varies. It increases with decreasing the acoustic wavelength.

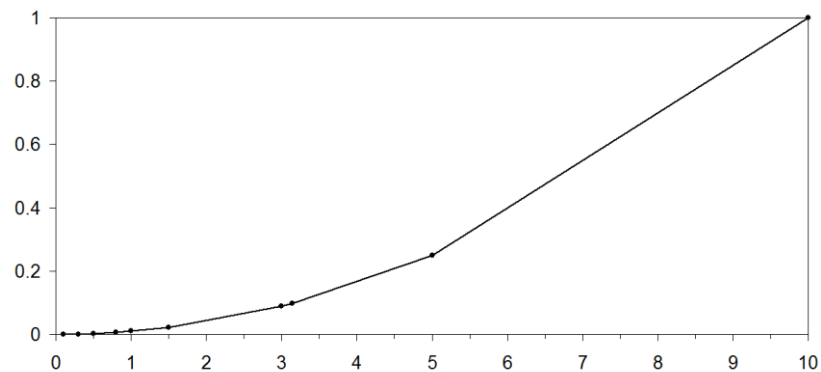


Fig.4. Dependence of photocurrent amplitude on the acoustic wave amplitude.

Fig. 4 shows the trend of change in the amplitude of the photocurrent oscillations when the amplitude of the acoustic wave A is changed. This dependence shows a monotonic increase in the oscillation amplitude with increasing power of the sound.

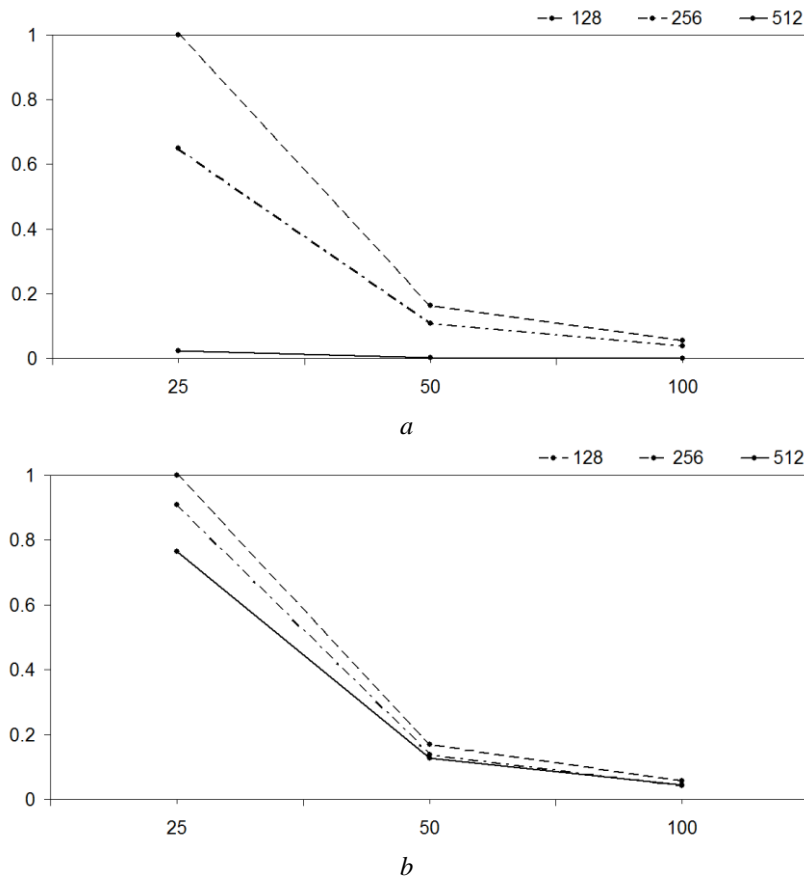


Fig.5. Dependence of photocurrent oscillation amplitude on the acoustic wavelength for different detection aperture.

Fig. 5(a) and 5(b) show the photocurrent oscillation amplitude changes depending on the acoustic wavelength Λ and the detection area size of D . The dependencies are shown for different phase transparent location on the propagation path of the beam. Fig. 5(a) corresponds to $l = 1\text{m}$, fig. 5(b) - $l = 2\text{m}$.

These curves show that the effectiveness of this method of detecting acoustic oscillations considerably depends on the ratio of the beam diameter d , and the acoustic wavelength Λ . The greater acoustic wavelength is, the lower sensitivity of method is.

It can also be noted that the closer phase transparent is located to RRA (larger l), the less difference between amplitudes of oscillations is expressed for all wavelengths of acoustic waves and the integration area size D .

It may also be noted that a very important parameter in determining the efficiency of detection of oscillations is the size of detection region defined by the value D (fig. 5(a) and 5(b)).

From the analysis of dependencies in fig. 5, we can conclude that the value D is more significant in the case where an acoustic wave is located close to the radiation source. The value of D is less significant as approaching the acoustic transparent to the RRA.

Results obtained with two excitation airborne acoustic waves at different frequencies are also interesting. The simulation results showed that under the same vibration amplitudes $A_{1,2} = 1$ the superposition principle holds, i. e. there is no interference of one wave to another and vibrations can be detected independently for each frequency.

The photocurrent obtained by integrating the light power within the receiving aperture (fig. 2) contains constant and variable components. The constant component is not information, as opposed to the variable one, which is of interest to detect vibrations in the medium.

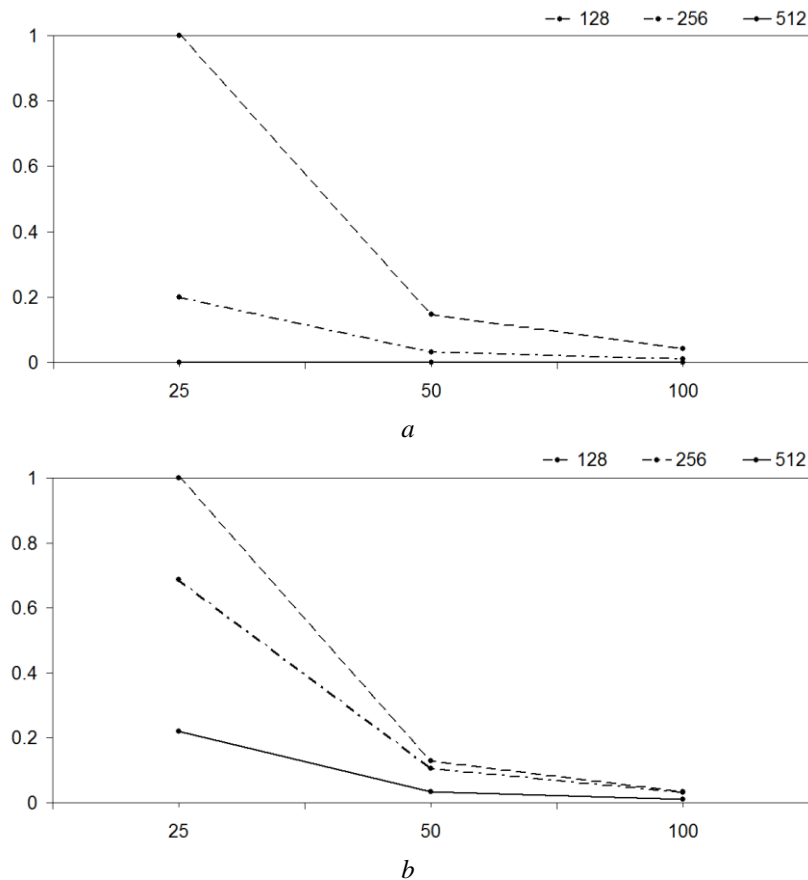


Fig. 6. Dependence of variable and constant photocurrent components.

Fig. 6(a) and 6(b) show the ratio dependence of variable component to the constant one for different acoustic wavelengths and sizes of the integration range for two cases, the transparent location on the track: $l = 1$ m (fig. 6(a)) and $l = 2$ m (fig. 6(b)). These diagrams determine the following: the relative value of a useful variable component increases with decreasing the acoustic wavelength. This is obviously a result of a

significant change in air density with changes in the acoustic wavelength, which leads to considerable shifts of the diffraction pattern in the receiving plane. It may also be noted that the ratio of the constant and variable components increases with decreasing the detection area. This causes, apparently, a reduction in the constant component, which is determined by the average power of laser radiation that is detected.

The simulation results for the case of detecting the amplitude of two acoustic waves $A_1 = A_2 = 1$ at different frequencies f_1 and f_2 are also of interest. The results are shown in fig. 7.

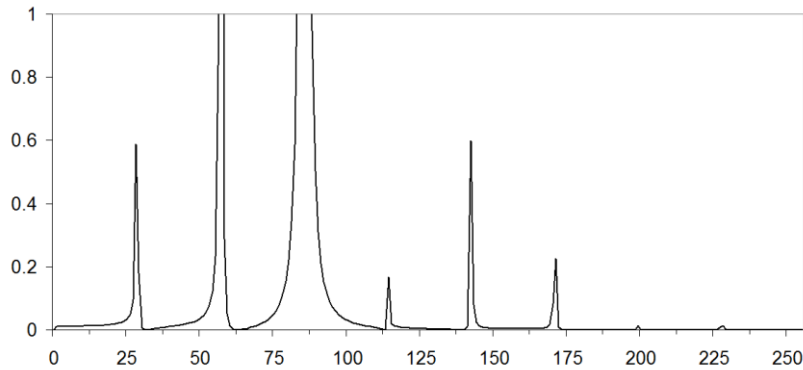


Fig.7. Computer spectral analysis of two superimposed acoustic waves.

The figure, in addition to reference frequencies, clearly shows the detection results of frequency components that are harmonics of the reference frequency $2f_1$, $2f_2$, and combination frequencies $(f_2 - f_1)$ and $(f_2 + f_1)$. The presence of such spectral components in the variable component of photocurrent is evident of the nonlinearity of acousto-optical interaction of this mode. This non-linearity is the subject of further research.

5. Conclusion

A computer simulation model of the speckle metrology method of detection of medium acoustic oscillations was created. It is based on the propagation of the laser beam through a medium with acoustic oscillations, on reflection from a RRA, on the back-propagation and direct photodetection of the laser radiation. Spectral analysis of photocurrent allows us to detect the frequency of acoustic oscillations in the medium.

The simulation shows that the effectiveness of this type of interaction rises with an increase of the sound power, decreases depending on the wavelength and decreases according to the detection area to a size comparable to speckle size. The amplitude also increases as the phase transparent, generated by the acoustic wave, nearing the receiving plane.

At large amplitudes of acoustic oscillations in the case of excitation of two acoustic waves in the photocurrent spectrum the harmonics of the fundamental frequency and combination frequencies appears.

The latter circumstance requires further additional research.

REFERENCES

1. Bergmann L. *Ultrasonics and Their Scientific and Technical Applications*, - London: G. Bell and Sons Ltd, 1938.
2. Korpel A. *Acousto-Optics, Second Edition*, - Technology & Engineering, CRC Press, 1996.
3. Magdich L.N. *Acoustooptic Devices and Their Applications*, - Technology & Engineering, CRC Press, 1989.
4. Sirohi R.S. Ed. *Speckle Metrology*, - Technology & Engineering, CRC Press, 1993.
5. Jones R., Wykes C. *Holographic and Speckle Interferometry*, - Cambridge University Press: Cambridge, 1989.
6. Kowalczyk M. Laser speckle velocimetry. // *Proc. SPIE 2729, Optical Velocimetry*. - 1996. - P. 139.
7. Aliverdiev A., Caponero M. Speckle velocimeter for a self-powered vehicle. // *Technical Physics*. - 2002. - V. 47. - P.1044-1048.
8. Bianchi S. Vibration detection by observation of speckle patterns. // *Appl. Opt.* - 2014. - V. 53. - P. 931-936.
9. Presnyakov Yu.P., Shchepinov V.P. Use of the speckle effect to analyze vibrations of rough surface. // *Technical Physics*. - 1997. - V. 67. - P. 71-75.
10. Lloyd J. A Brief History of Retroreflective Sign Face Sheet Materials. <http://www.rema.org.uk/pub/pdf/history-retroreflective-materials.pdf>.
11. *Sensors and Machine Vision Systems for Factory Automation*. Keyence America. <http://www.keyence.com/topics/sensors/lv/reflect.php>.
12. Dolya G.N., Zhyvchuk V. The appreciation of the influence of exactness of focusing on the work of the laser homodyne method of measuring the parameters of vibration. // *Proc. SPIE*. - 2004. - V. 5582. - P. 45-52.
13. Dolya G.N., Katunin A.N., Nad O.A., Bulay A.N. Laser speckle velocimetry for running objects with light reflective surface. // *Systems of information processing*. - Kharkiv: KhUAF, 2015. - 1(126). P. 23-26.
14. Litvinova E.S., Dolya G.N. Modeling of fluctuations of laser radiation scattered on the reflector array in a turbulent atmosphere. // *Proceedings of 11th International Conference on Laser & Fiber-Optical Networks Modeling*. - 2011. - P. 108-111.
15. Dolya G.N., Katunin A.N., Sadovy K.V., Karmanny E.V. Observation of phase heterogeneties of the medium by the interferometry method. // *Proceedings of 8-th International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling*. - 2006. - P. 88-90.

УДК 004.043

Метод выбора контейнера для миграции виртуальной машины в облачном хранилище данных

А. А. Заставенко, А. Ю. Пилипенко, М. А. Скулиш
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина

В данной статье описан механизм балансировки нагрузки для облачного хранилища данных. Описана архитектура системы миграции, простой и сложный алгоритмы многомерной оптимизации системы. Приводятся: метод выбора физического сервера, на который будет осуществляться миграция виртуальной машины на основе оценки потребляемых ресурсов, алгоритм статистического метода выбора контейнера для миграции и метод контроля достаточности ресурсов системы для обработки входной нагрузки, который позволяет исследовать и прогнозировать динамику использования ресурсов. Проведены эксперименты по исследованию свойств предложенного метода.

Ключевые слова: облачный сервис, умная миграция, масштабирование информационных систем, Platform-as-Infrastructure, кластеризация.

У даній статті описано механізм балансування навантаження для хмарного сховища даних. Описана архітектура системи міграції, простий і складний алгоритми багатовимірної оптимізації системи. Наводяться: метод вибору фізичного сервера, на який буде здійснюватися міграція віртуальної машини на основі оцінки використовуваних ресурсів, алгоритм статистичного методу вибору контейнера для міграції та метод контролю достатності ресурсів системи для обробки вхідного навантаження, який дозволяє досліджувати і прогнозувати динаміку використання ресурсів. Проведено експерименти з дослідження властивостей запропонованого методу.

Ключові слова: хмарний сервіс, розумна міграція, масштабування інформаційних систем, Platform-as-Infrastructure, кластеризація.

This paper presents some mechanism of load balancing for cloud data storage. The architecture of the migration system is described, as well as two algorithms of the system multidimensional optimization: the simple and the complex ones. The article provides a method for selecting physical server the virtual machine will migrate to; a statistical method algorithm for choosing container; and a method of monitoring the adequacy of system resources to process the input load, which allows exploring and predicting the dynamics of resource usage. The experiments aimed to study the proposed method properties have been conducted.

Key words: cloud service, smart migration, scaling information systems, Platform-as-Infrastructure, clustering.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Облачное хранилище данных – модель онлайн-хранилища, в котором данные хранятся на многочисленных распределённых в сети серверах, предоставляемых в пользование клиентам. Данная модель используется рядом компаний для размещения программного обеспечения с использованием облачной инфраструктуры с целью масштабирования информационных систем, а также решения проблем пиковых нагрузок и простаивающих ресурсов. Она должна

обеспечивать автоматическую балансировку нагрузки физических серверов, не допуская при этом перегрузку одного сервера и нехватку ресурсов для другого.

Объектом исследования является процесс балансировки нагрузки серверов облачного хранилища данных. Предмет исследования составляют методы выбора серверов для миграции виртуальных машин с целью оптимизации работы системы. Цель работы: повышение эффективности процесса автоматической балансировки нагрузки серверов для решения проблемы пиковых нагрузок и простаивающих ресурсов.

Одним из способов масштабирования информационных систем является использование облачного хостинга. На сегодняшний день существует большое количество компаний, которые предоставляют пользователям услуги для размещения базового программного обеспечения с использованием облачной инфраструктуры и увеличения объема ресурсов системы. При этом обеспечивается автоматическое распределение ресурсов, в зависимости от нагрузки, что позволяет решить проблему пиковых нагрузок и простаивающих ресурсов.

Обеспечение и организация работы кластеров, их размещение на физическом оборудовании ложится на плечи компании предоставляющей облачный сервис. При этом должны быть решены ряд вопросов:

- интерактивное распределение задач клиентов между виртуальными машинами, которые расположены в одном или нескольких кластерах. Эта задача с одной стороны задача балансировки нагрузки, а с другой – задача обеспечения надежности обслуживания клиентов;

- контроль и управление работой кластера. Ресурсов кластера должно всегда быть достаточно всем виртуальным машинам, одновременно работающим на всех серверах кластера.

Таким образом, возникает проблема идентификации момента, когда группа виртуальных машин, которые одновременно обслуживаются на ограниченном физическом ресурсе кластера, создаст нагрузку большую, чем допустимая.

Platform-as-Infrastructure представляет собой изолированный кластер, состоящий из группы серверов и сервисов, которые взаимодействуют как целостная система, предоставляя возможность удобно разворачивать, тестировать, поддерживать и масштабировать систему [2]. Необходимо обеспечивать автоматическую балансировку нагрузки физических серверов, не допуская при этом перегрузку одного сервера и нехватку ресурсов для другого.

Данная система должна обеспечивать:

- непрерывность работы приложений, при этом конечный пользователь не должен знать, каким способом она это делает, а лишь получать качественный сервис без каких-либо перегрузок;

- процесс миграции должен быть целенаправленным и обеспечивать оптимизацию состояния кластера;

- при планировании миграции нужно учитывать, что два контейнера одного окружения не будут располагаться на одном физическом сервере, поэтому она должна поддерживать высокую доступность;

- одним из важных требований к миграции является минимальное время ее выполнения, так как длительная миграция может негативно повлиять на состояние системы;

- система должна обеспечивать защиту от заикливания, то есть от бесконечной миграции одного и того же пакета;

- должна обеспечиваться защита от сбоев и работа в кластерном режиме, что особенно важно при множественных миграциях.

Таким образом, задачей исследования является отследить загрузку контейнеров и не допустить потерь производительности виртуальных машин связанных с недостатком физических ресурсов принимающего контейнера

2. Обзор существующих методов

Настоящая работа опирается на метод [1-3] живой миграции виртуальных машин, обеспечивающий балансировку нагрузки серверов облачного хранилища данных.

Живая миграция виртуальных машин в основном состоит из передачи его изображения памяти с исходного сервера на сервер назначения. Гипервизор предварительно копирует страницы памяти виртуальной машины к месту назначения, не прерывая ОС или любое из ее приложений. Процесс копирования страницы повторяется в многократных раундах, на которых непрерывно передаются грязные страницы. Обычно, есть ряд страниц, которые модифицируются так часто, что виртуальная машина должна быть остановлена на некоторое время, пока этот ряд полностью не будет передан к месту назначения. Впоследствии виртуальная машина может быть восстановлена на новом сервере.

Живая миграция виртуальных машин позволяет осуществлять движение рабочей нагрузки с почти нулевым прикладным временем простоя. Тем не менее, производительность запущенного приложения будет меньше во время процесса миграции из-за предварительного копирования, вызванного последовательными повторениями памяти. Поскольку продолжительность дополнительных циклов центрального процессора процесса предварительного копирования потребляется и на источнике и на серверах назначения. Дополнительная сумма сетевой полосы пропускания потребляется также, потенциально затрагивая живой отклик интернет-приложений. Кроме того, так как виртуальная машина возобновляется после миграции, ожидается замедление из-за разогрева кэша в месте назначения.

Кроме того, время простоя и производительность приложения, вероятно, будут изменяться по-разному из-за переменных использований памяти и шаблонов доступа. Предыдущие исследования обнаружили, что фактическое время простоя может варьироваться в пределах от 60 мс до 3 с.

3. Описание алгоритма живой миграции

Кластер состоит из физических серверов, на которых размещены виртуальные изолированные контейнеры, выделенные под пользовательские окружения, и управляющее сервера для внутренних системных сервисов [4-7]. Вычислительный контейнер является базовым элементом платформы. Он

представляет собой отдельную виртуальную машину, в которой работает один из компонентов системы (приложение, база данных, балансировщик нагрузки и т.д.). Такое распределение обеспечивает хорошую изоляцию и масштабирование каждого компонента независимо от другого. Все контейнеры являются типизированными и взаимодействуют с ядром по определенному протоколу.

Каждый вид контейнера оптимизируется под доступный объем оперативной памяти, что наиболее актуально для баз данных, так как они изначально настроены на потребление небольшого объема памяти. Из виртуальных контейнеров строится окружение, каждый компонент которого находится в отдельной виртуальной машине. Все компоненты распределяются по разным физическим серверам для обеспечения высокой доступности и надежности. Таким образом, выход из строя одного из серверов не влияет на работу системы, так как имеется его дубликат.

Если система требует большого количества памяти и на текущем физическом сервере наблюдается нехватка ресурсов, наиболее загруженные контейнеры перемещаются на более свободные сервера. Такой процесс называется «умная живая миграция», он позволяет избежать нерационального использования ресурсов сервера.

Существует набор сервисов (резервирование, биллинг, сбор статистических данных, безопасность), которые доступны пользователям на верхнем уровне [8]. Все эти услуги подключаются к сервисной шине. Различают три типа веб-клиентов:

- веб-клиенты, работающие с платформой через конкретного хостинг-провайдера;
- веб-клиенты конечного пользователя;
- веб-клиент для администратора платформы.

На нижней ступени архитектуры находятся физические серверы, которые подлежат виртуализации и разделению на виртуальные машины. Также имеется точка входа в платформу, через которую проходят все запросы пользователей к приложениям. Система мониторинга следит за состоянием физических серверов, инфраструктурных контейнеров, веб-приложений и т.д. Если наблюдаются какие-то неполадки в работе системы, она уведомляет об этом администраторов платформы.

Развертывание платформы происходит на наборе физических серверов. Сама платформа кластеризована, каждый структурный компонент работает на отдельной виртуальной машине. Кроме этого, существует второй дублирующий сервер, на котором находятся такие же контейнеры для обеспечения защиты от сбоев.

Недостаток существующих систем живой миграции состоит в том, что при обновлении платформы пользователи, которые работают с ней в этот момент, чувствуют некоторую задержку в работе системы. Такие задержки в основном возникают во время обновления базы данных, так как при изменении структуры базы данных блокируется доступ к ее таблицам.

Решение проблемы состоит в том, чтобы обновление БД производилось итеративно, при этом специальный менеджер обновления должен обеспечивать правильный порядок выполнения обновлений. Все обновления должны быть

обратно совместимыми. Таким образом, для избегания блокировки БД на длительное время используется кластерный режим обновления. Суть этого процесса состоит в следующем: есть два физических сервера, на каждом из которых находится копия платформы, то есть, много контейнеров, работающих одновременно и не мешающих друг другу; когда необходимо обновить платформу, один сервер переходит в состояние “maintenance” и начинает обновляться, при этом экземпляры базы данных реплицируются друг с другом. После обновления запускается синхронизация и обновляется второй сервер, затем оба сервера поднимаются.

Platform-as-Infrastructure должна обеспечивать вертикальное масштабирование (вверх и вниз). Это означает, что виртуальная машина в процессе работы потребляет столько памяти, сколько ей нужно без предварительного резервирования ресурсов. В связи с этим возникает проблема: в случае, если какая-то из виртуальных машин захочет получить максимально необходимое количество ресурсов, возможна ситуация, когда весь ресурс физического устройства память (весь жесткий диск) будет потребляться этой машиной и другие виртуальные машины не смогут расти.

Платформа состоит из большого количества связанных между собой компонент, которые имеют сложную конфигурацию и нуждаются в постоянном управлении. Управлением конфигурацией распределенной системы занимается система автоматизации (рис. 1), которая тиражирует эту конфигурацию на разные площадки.



Рис.1 Структура системы автоматизации

Система автоматизации занимается установкой физических и виртуальных серверов и общих приложений (система аналитики, система мониторинга). Все эти компоненты называются классами. Экземпляры классов называются объектами. Задача системы автоматизации состоит в том, чтобы описать структуру и принцип работы класса и создать несколько его экземпляров с конкретными параметрами. Такая система производит установку и обновление платформы.

Архитектура системы миграции состоит в том, что имеется информация о статистике работы физических серверов и виртуальных машин (контейнеров). Эти данные периодически считываются и формируются в метрики, которые

хранятся в определенном хранилище. Таким образом, обратившись к этому хранилищу, можно в любой момент времени получить информацию о динамике потребления ресурсов по физическому серверу или виртуальному контейнеру. Также имеется информация о количестве ресурсов, которыми располагают физические сервера.

Решение о необходимости миграции, а также о том, что и куда должно мигрировать принимает блок управления. После выбора кандидатов для миграции они помещаются в распределенную очередь, которая обрабатывается специальным процессом. Этот процесс анализирует информацию о количестве элементов в очереди и на основе этой информации выбирает элемент, подлежащий миграции. Процесс физической миграции является синхронным без каких-либо разрывов или возвратов, при этом существует специальный механизм, который следит за тем, чтобы не было ошибок и задержек. Основная задача процесса состоит в том, чтобы обеспечить выбор кандидата для миграции и осуществить его перемещение на определенный физический сервер таким образом, чтобы оптимизировать состояние системы. Таким образом, имеет место задача многомерной оптимизации. Существует несколько алгоритмов решения данной задачи.

Простой алгоритм:

1. Ищется наиболее загруженный сервер (память в приоритете).

2. На сервере выбирается самый оптимальный с точки зрения количества потребляемой памяти (RAM, CPU) и использования жесткого диска контейнер. Оптимальным является контейнер, потребляющий больше всего памяти и меньше всего дискового пространства (для осуществления процесса миграции за минимальное время).

3. Перемещение контейнера.

Данный алгоритм удобный в применении, однако, при большом количестве физических серверов алгоритм является недостаточно оптимальным. Для таких случаев нужно использовать более сложный алгоритм. Его суть состоит в следующем. Определяются специальные правила, которым должно удовлетворять оптимальное решение. Существуют жесткие правила, которые не могут быть нарушены ни при каких обстоятельствах и мягкие правила, которыми можно пренебречь в некоторых случаях. Кроме этого определяются типы решений задачи:

- возможные решения – решения, которые достигаются с нарушением жестких правил (плохие решения);
- осуществимые решения – решения, которые не нарушают жестких условий, но не выполняют часть мягких;
- оптимальные решения – решения, которые выполняю оба типа условий;
- лучшие решения – это оптимальные решения, рассчитанные за минимальное время.

Для решения задачи с помощью сложного алгоритма необходимо предварительно определить мягкие и жесткие ограничения.

Жесткие ограничения:

1. Количество ресурсов системы должно быть достаточным для перемещения контейнера. Кроме этого нужно учитывать, что памяти должно быть больше, чем требуется контейнеру.
2. Контейнер не может мигрировать на собственный физический сервер.
3. На одном физическом сервере не должны размещаться контейнеры одного и того же типа. Это условие гарантирует, что в случае сбоя системы будет потеряно минимальное количество данных.

Мягкие ограничения:

1. Мигрировать должны наиболее загруженные с точки зрения оперативной памяти и процессора контейнеры.
2. Мигрировать должны наиболее легкие контейнеры (контейнеры, которые потребляют меньше всего жесткого диска).
3. Целевой физический сервер должен быть наименее загруженным.

Основным недостатком данного алгоритма является отсутствие инструментов учета тенденций изменения скорости потребления ресурсов различными контейнерами. Было проведено исследование эффективности учета статистических данных в процессе выбора контейнера для миграции, а также сервера, на который будет осуществляться миграция.

Для того чтобы правильно подобрать сервер, на который будет осуществляться миграция необходимо оценить тренд изменения динамики использования ресурсов выбранного сервера с учетом нагрузки которую создаст мигрирующий контейнер.

4. Описание метода выбора контейнера для миграции

Для определения момента включения дополнительного технического средства (сервера) необходимо с заданным интервалом времени оценивать текущую статистику загрузки ресурсов, построить тренд, или линейную аппроксимацию, собранных данных о количестве обслуживаемых заявок. На основании тренда, сделать оценку вероятности того, что обслуживание контейнеров расположенных на исследуемом сервере превысит допустимый объем памяти, жесткого диска или загрузку процессора. Миграция необходима в том случае, если хотя бы один ресурс оказывается в дефиците.

На загрузку ресурсов физического сервера одновременно влияет изменение загрузки ресурсов отдельных контейнеров, количество которых более 250. Состояние загрузки ресурсов физического контейнера - это случайная величина, которая согласно Центральной предельной теореме имеет нормальное распределение, так как является суммой большого количества случайных величин.

Таким образом, на основе текущей статистики нагрузки, создаваемой суммой виртуальных контейнеров абонентскими заявкам на тарификацию; оценки верхней границы количества заявок, которые одновременно могут обрабатываться на мощностях доступных серверов будет определена вероятность того, что в течение заданного времени количество поступивших заявок не превысит допустимого значения.

Метод контролю достаточности ресурсов системы для обработки входной нагрузки:

Входные данные:

- 1) интервал T_1 – интервал времени, в течение которого будет проводиться анализ статистики;
- 2) интервал dt – интервал дискретизации времени (малый интервал);
- 3) данные системы мониторинга о количестве потребляемых ресурсов (табл. 1);

Таблица 1. Данные системы мониторинга

t	$t_0 - dt$	$t_0 - 2dt$	$t_0 - 3dt$...	T_1
X	x(t)	x(t)	x(t)		

- 4) интервал времени между проверками на необходимость миграции;
- 5) Максимально допустимое количество исследуемого ресурса, которое доступно для обслуживания виртуальных машин на сервера.

На рис. 2 x_0 – количество ресурса потребляемое в момент времени t_0 , $x = at + b$ – прямая построенная на основе данных статистики на основе метода наименьших квадратов; точки тренда – это возможные значения требуемого ресурса для обслуживания системы на протяжении последующего времени T . Задача оценить вероятность того, что случайный процесс выйдет за пределы допустимого для системы ресурса M .

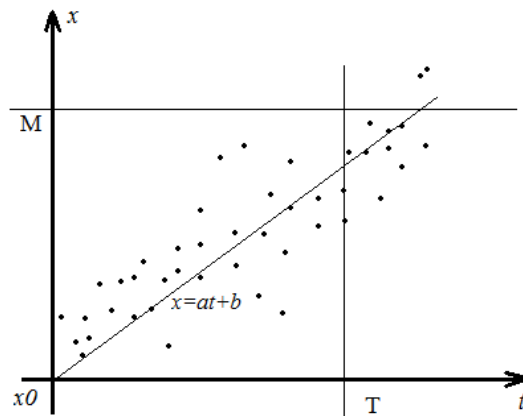


Рис. 2. Прогнозирование динамики использования ресурсов.

Алгоритм метода включает в себя три основных шага:

1. Анализ статистических данных за время $(t_0 - T_1)$, где t_0 - текущее время, для которого выполняется расчет. На основе статистических данных системы мониторинга для пары значений (t, x) по методу наименьших квадратов рассчитывается оценка коэффициента a для прямой, аппроксимирующей значения входного нагрузки с табл. 1 $x = at + b$

2. Оценить вероятность P_T того, что в течение заданного времени T количество требуемого ресурса превысит имеющийся ресурс M . Оценка вероятности рассчитывается по формуле (1)

$$P_T = P(\bar{x}_T + 3\sigma > M) \quad (4.1)$$

Среднеквадратическое отклонение определяется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.2)$$

x_i – текущая нагрузка на систему,

\bar{x} – среднее значение занятости ресурса,

На основании полученной оценки принять управляющее решение.

Статистический выбор контейнера для миграции:

ШАГ 1. Методом наименьших квадратов рассчитывается \hat{a}_i – оценка значения коэффициентов для прямых вида $x = \hat{a}_i t + b_i$, которые выражает зависимость количества ресурса (например, оперативной памяти) потребляемого i -м сервером от времени.

ШАГ 2. Из всех доступных для миграции серверов, сервер на котором находится копия мигрирующего контейнера не является доступным, выбрать три физических сервера, для которых значения коэффициентов \hat{a}_i , найденных на шаге 1, имеют минимальное значение.

ШАГ 3. Для каждого из трёх выбранных физических серверов сложить поточечно тренды входящей нагрузки сервера и тренды использования ресурсов контейнера, отобранного для миграции. Для каждого нового тренда построить линейную аппроксимацию методом наименьших квадратов и найти соответствующие коэффициенты $\{\hat{a}'_1, \hat{a}'_2, \hat{a}'_3\}$, где \hat{a}'_i – оценка для параметра определяющего угол наклона прямой отражающей динамику загрузки i -го сервера, исходя из предположения, что в течение оцениваемого периода мигрирующий контейнер обслуживался i -м сервером. Если хотя бы для одного i значение $\hat{a}'_i < 0$, тогда остановка: для миграции выбирается сервер для которого \hat{a}'_i – минимально, иначе переход на шаг 4.

ШАГ 4. Методом контроля достаточности ресурсов оценивается вероятность того, что тренды динамики изменения нагрузки, найденные на шаге 3, не выйдут за установленные пределы допустимой нагрузки каждого i -го физического сервера. В результате выбор останавливается на том физическом сервере, для которого оценка верхней границы вероятности P_T превышения допустимого значения потребляемых ресурсов будет минимальной.

5. Проведение эксперимента для оценки эффективности предложенного метода

С целью подтверждения эффективности предложенного метода, метода выбора контейнера для миграции виртуальной машины, было проведено

моделирование работы пяти контейнеров, которые обслуживали 10 клиентских виртуальных машин. Работа каждой виртуальной машины была продублирована на двух контейнерах. Задача заключалась в том, чтобы, отслеживая загрузку оперативной памяти контейнеров, своевременно выявить возможность перегрузки и принять меры по миграции виртуальной машины.

Моделирование проводилось с помощью пакета GPSS. Для каждого контейнера задавался пул ресурсов, который занимался и освобождался в соответствии с требованиями виртуальных машин, которые были закреплены за контейнерами. Работа виртуальной машины эмитировалась как многоканальное обслуживающее устройство (количество каналов большое, время обслуживания распределено по закону Пуассона), на которое подавался поток заявок, также распределенный по закону Пуассона. На время обслуживания каждой заявки осуществлялось занятие ресурса на заданную величину, то есть из пула соответствующего контейнера вычиталась некоторая заданная величина, ресурс считался полностью занятым, если значение пула равнялось нулю. Если ресурса не хватало заявки отбрасывались. Таким образом обеспечивалась имитация случайного процесса занятия оперативной памяти.

Значения занятости ресурсов контейнеров фиксировались через заданный интервал времени. Для этих статистических данных строился тренд зависимости занятости ресурса от времени, а точнее по методу наименьших квадратов рассчитывался коэффициент наклона аппроксимирующей прямой (3), где (x_k, t_k) , $k = \overline{1, n}$ – значение занятости ресурса контейнера и время, когда это значение зафиксировано. А именно, было создано 5 таблиц, в которые каждую секунду вносились данные о занятости ресурсов соответствующих контроллеров, т.е. значение разницы между исходно заданным значением пула и текущим остатком, и соответствующее показание времени моделирования. Расчёт коэффициента аппроксимирующей прямой производился каждые 5 минут на основании статистики трёхсот последних значений загрузки контейнера ($n=300$), для каждого контейнера отдельно.

$$\hat{a} = \frac{\sum (x_k - \bar{x})(t_k - \bar{t})}{\sum (x_k - \bar{x})^2} \quad (5.1)$$

На основании информации о предельно возможном значении пула ресурсов, статистики трёхсот последних значений загрузки контейнера, а также текущей загрузки ресурсов по формуле (2) рассчитывалось значение σ .

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{300} \sum_{i=1}^{300} (x_i - \bar{x})^2}$$

Тогда исходя из формулы (1)

$$P_T = P(\bar{x}_T > M - 3\sigma)$$

Если при пересчете значение $P_T > 0$, тогда осуществлялось перераспределение виртуальных машин между контейнерами.

Кроме статистики занятия пула ресурсов для каждой виртуальной машины также ведётся статистика занятости ресурса. Исходя из условий модели, каждая из 10-ти виртуальных машин дублируется на двух контейнерах, то есть в процессе работы виртуальной машины ресурс забирается одновременно из пула двух контейнеров. Поэтому после того как расчетное значение $P_T > 0$ для одного из контейнеров, необходимо было выбрать виртуальную машину для миграции, а так же контейнер на который осуществлялась миграция. Для этого из всех виртуальных машин контейнера, где была зафиксирована перегрузка, была выбрана та виртуальная машина, для которой значение оценки коэффициента \hat{a} , рассчитанной на основе статистической таблицы потребления ресурсов, было максимально.

После того как виртуальная машина для миграции была выбрана, необходимо выбрать из трёх контейнеров тот, в котором нет дубликата данной виртуальной машины. Для этого осуществляется суммирование значений статистических таблиц мигрирующей виртуальной машины и контейнера, для которого осуществляется оценка. Для результирующей статистической таблицы рассчитывается значение оценки коэффициента \hat{a} . Из всех контейнеров выбирается тот, для которого коэффициент \hat{a} суммарной статистической таблицы будет минимальным.

После миграции в процессе работы виртуальной машины ресурсы занимались из пула того контейнера, куда была осуществлена миграция.

Моделирование показало следующие результаты:

1. Процент потерянных заявок при работе системы без процедуры миграции до 4%.
2. Процент потерянных заявок при работе системы с процедурой миграции до 0,5 %.

6. Выводы по результатам и практическое применение предложенного метода

В данной статье рассматривается способ масштабирования информационных систем с помощью облачного хостинга, что обеспечивает автоматическое распределение ресурсов системы, в зависимости от нагрузки и позволяет решить проблему пиковых нагрузок и простаивающих ресурсов. Были рассмотрены основные задачи, которые должны решать компании, предоставляющие облачный сервис и способы решения этих задач. Был описан метод автоматической балансировки нагрузки физических серверов («умная миграция»), который, не допускает перегрузку одного сервера и нехватку ресурсов для другого.

Для определения момента включения дополнительного сервера необходимо с заданным интервалом времени оценивать текущую статистику загрузки ресурсов. Метод контроля достаточности ресурсов системы для обработки входной нагрузки, предложенный в данной статье позволит принять решение о включении дополнительного сервера на основе данных системы мониторинга о количестве ресурсов, потребляемых системой. Кроме этого, в работе предложен алгоритм статистического метода выбора контейнера для миграции, который

позволяет выбрать наиболее подходящую с точки зрения использования ресурсов виртуальную машину для перемещения на дополнительный сервер.

Предложенный в статье метод выбора контейнера для миграции позволит выбрать наиболее подходящую машину с учетом текущей статистики загрузки ресурсов, и данных о количестве обслуживаемых заявок. Это поможет справиться с проблемой дефицита ресурсов физического сервера. Данная задача может решаться как для системы в целом, когда оценивается статистика количества заявок на тарификацию поступающих в системы онлайн тарификации, так и подсистем, когда оценивается статистика заявок-обращений к подсистемам, системы тарификации. Выбор точки применения метода зависит от выбранной архитектуры привлечения серверов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ye K., Jiang X., Huang D. Live Migration of Multiple Virtual Machines with Resource Reservation in Cloud computing - IEEE International Symposium, 2013. – pp. 267-274.
2. Pahl C., Xiong H. Migration to PaaS clouds – Migration process and architectural concerns – IEEE International Symposium, 2013. – pp.86-91.
3. Jinkyu J. Sung-Hun K., Hwanju K. Analysis of virtual machine live-migration as a method for power-capping. // The Journal of Supercomputing. – 2013. – vol. 66, no 3. – pp. 1629-1655.
4. R. Chu A clustering model for memory resource sharing in large distributed system / Chu R., Xiao N., Lu X. - IEEE, pp. 1-8, 2007.
5. B. Cohen New opportunities for Cloud Application Development / Cohen B. – IEEE International Symposium, 2013. – pp.97-100.
6. I.K.Sawas On Resource Clustering Techniques for Grid Resource Discovery /Sawas I.K – IEEE International Symposium, 2007. – pp.302-307.
7. Скулиш М. А. Організація роботи групи серверів для забезпечення потреб розподіленої системи тарифікації послуг // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2014. – №5(33). – С. 56-64.
8. Скулиш М. А. Метод складання розкладу залучення ресурсів для високонавантажених інформаційних систем // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2014. – №6(34). – С. 65-70.
9. Скулиш. М. А., Заставенко А. А. Метод розподілу ресурсів сервера оператора мобільного зв'язку // Вісник НТУУ "КПІ". Серія Радіотехніка, Радіоапаратобудування. – 2015. – № 60 (2015). – С. 96-106.

УДК 519.713

Про додатні розв'язки однієї задачі з гетеротонним оператором та про побудову послідовних наближень

С. В. Колосова, В. С. Луханін

Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна

В роботі розглядаються питання існування, єдиності та побудови двосторонніх наближень до додатного рішення однієї нелінійної еліптичної крайової задачі. Дослідження проводилося методами теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах. Отримано умови, які пов'язують параметри, для існування та єдиності додатного рішення, а також для побудови двосторонніх наближень. Результати обчислень представлено у вигляді таблиці, графіків поверхні наближення, ліній рівня та у розрізі. Вони були порівняні із результатами, отриманими за допомогою методу квазіфункцій Гріна.

Ключові слова: *функція Гріна, квазіфункція Гріна, двосторонні наближення, сильно інваріантний конусний відрізок, псевдоогнутість, гетеротонний оператор.*

В работе рассматриваются вопросы существования, единственности и построения двусторонних приближений к положительному решению одной нелинейной эллиптической краевой задачи. Исследование этой задачи проводилось методами теории операторных уравнений в полуупорядоченных пространствах. Получены условия, связывающие параметры, для существования и единственности положительного решения, а также для построения двусторонних приближений. Результаты вычислений представлены в виде таблицы, графиков поверхности приближения, линий уровня и в сечении. Они были сравнены с результатами, полученными с помощью квазифункций Грина.

Ключевые слова: *функция Грина, квазифункция Грина, двусторонние приближения, сильно инвариантный конусный отрезок, псевдоогнутость, гетеротонный оператор.*

In this paper, the existence, uniqueness and possibility of constructing of two-sided approximations to the positive solution of the nonlinear elliptic boundary problem are considered. An investigation of the problem is based on methods of operator equations theory in half-ordered spaces. Conditions that link the parameters in order to ensure the existence and uniqueness of the positive solution are obtained as well as conditions needed for construction of two-sided approximations. The results of the computational experiment are presented as a table, plots of approximate solution surface, level lines and a cross section. They are compared with the results obtained by Green's quasifunction method.

Key words: *Green's function, Green's quasifunction, two-sided approximations, strongly invariant cone segment, pseudoconvexity, heterotone operator.*

1. Загальна постановка задачі та її актуальність

В сучасній науці спостерігається велика зацікавленість у процесах, що відбуваються в нелінійних середовищах. Математичними моделями таких процесів зазвичай є нелінійні крайові задачі математичної фізики вигляду

$$-\Delta u = f(\lambda, u) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset R^n, \quad (1.1)$$

$$u > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.2)$$

де λ – числовий параметр.

Багато змістовних задач зводяться до рівняння (1.1). Наприклад:

а) різноманітні задачі теорії пружності, де в якості параметра виступає навантаження;

б) задачі про розподіл температури при пропусканні через тіло електричного струму (параметр – величина струму);

в) задачі про автоколивання (параметр – невідомий період) тощо.

Більш конкретно, якщо $f(u) = e^{-u}$, то задача (1.1), (1.2) є математичною моделлю течії провідного середовища в циліндрі з непроникними стінками [1]; при $f(u) = \lambda e^u$ рівняння (1.1) є стаціонарним рівнянням теорії теплового самозаймання хімічно активної суміші газів у судині [2-5], задачу (1.1), (1.2) в цьому випадку називають задачею Ліувілля-Гельфанда; якщо $f(u) = u^p$, $p > 0$, то маємо математичну модель задачі про розподіл густини газу в зорях (рівняння з такою правою частиною називається рівнянням Лане-Емдена) [6]; задача вибору моделі міграції популяції в генетиці приводить до задачі (1.1), (1.2) з $f(u) = \lambda(1+u)^q$ [7]; задачі вигляду (1.1), (1.2) з $f(u) = \lambda + u^p$, $f(u) = \lambda u^q + u^p$, $f(u) = \lambda(e^u + e^{\gamma u})$ розглядалися в [8, 9]; в роботі [10] $f(u) = au^{-q} + bu^p$, $a > 0$, $b > 0$, $q > 0$, $p > 0$ тощо.

Відомо, що задача (1.1), (1.2) у класі функцій з $C(\Omega)$ еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\lambda, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (1.3)$$

де $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функція Гріна оператора Лапласа для першої крайової задачі в області Ω , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$. Рівняння (1.3) перепишемо у вигляді

$$u = Tu,$$

тут

$$Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\lambda, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}$$

– оператор з областю визначення $D(T) = K$, K – конус невід’ємних в $C(\Omega)$ функцій.

Природно очікувати, що питання існування та єдиності розв’язку рівняння (1.3), а, отже, і задачі (1.1), (1.2), суттєво залежать від властивостей оператора T і, відповідно, від вигляду функції $f(\lambda, u)$. Випадки, коли Tu є монотонним та антитонним оператором, розглянуто в [11-13].

В даній роботі розглянемо задачу

$$-\Delta u = au^{-q} + bu^p \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset R^n, \quad (1.4)$$

$$u > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.5)$$

де сталі $a > 0$, $b > 0$, $q \in (0, 1)$, $p \in (0, 1)$ [10]. Далі ми покажемо, що відповідний цій задачі оператор Tu є гетеротонним. Для дослідження розглядуваної задачі ми використовуємо методи теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах, які дозволяють довести існування розв’язку рівняння (1.3) та

побудувати двосторонні наближення, які беруть розв'язок у «виделку», і, таким чином, отримати зручну апостеріорну оцінку похибки наближень.

Усю термінологію, яка використовується у даній роботі, можна знайти в [14].

2. Дослідження існування додатного розв'язку

Вводимо у розгляд наступні оператори

$$Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [bu^p(\mathbf{s}) + au^{-q}(\mathbf{s})] d\mathbf{s}, \quad (2.1)$$

$$\hat{T}(v, w) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [bv^p(\mathbf{s}) + aw^{-q}(\mathbf{s})] d\mathbf{s}.$$

Оператор $\hat{T}(v, w)$ називають супутним оператору Tu , при цьому маємо $\hat{T}(u, u) = Tu$.

Дослідимо їх властивості.

1) Оператор $\hat{T}(v, w)$ зростає за змінною v та спадає за змінною w , тобто Tu – гетеротонний оператор.

2) Будуємо сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, тобто такий, що виконуються нерівності

$$\begin{cases} \hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0, \\ \hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0. \end{cases}$$

Нехай $v_0 = \varepsilon$, $w_0 = \beta$. Тоді

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \hat{T}(v_0, w_0) \geq \varepsilon, \\ \hat{T}(w_0, v_0) \leq \beta, \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [b\varepsilon^p + a\beta^{-q}] d\mathbf{s} \geq \varepsilon, \\ \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [b\beta^p + a\varepsilon^{-q}] d\mathbf{s} \leq \beta, \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} (b\varepsilon^p + a\beta^{-q}) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \geq \varepsilon, \\ (b\beta^p + a\varepsilon^{-q}) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta, \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} (b\varepsilon^p + a\beta^{-q}) \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \geq \varepsilon, \\ (b\beta^p + a\varepsilon^{-q}) \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta, \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b\varepsilon^p + a\beta^{-q} \geq \frac{\varepsilon}{M}, \\ b\beta^p + a\varepsilon^{-q} \leq \frac{\beta}{M}, \end{cases} \quad (2.2)$$

де $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$. Нерівності (2.2) встановлюють зв'язок між сталими ε ,

β та параметрами задачі p, q .

3) Дослідимо гетеротонний оператор (2.1) на псевдоугнутість, для цього доведемо виконання умови

$$\begin{aligned} \hat{T}\left(\tau v, \frac{w}{\tau}\right) &\geq \tau \hat{T}(v, w), \quad \tau \in (0,1): \\ \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[b(\tau v(\mathbf{s}))^p + a\left(\frac{w(\mathbf{s})}{\tau}\right)^{-q} \right] ds - \tau \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [b(v(\mathbf{s}))^p + a(w(\mathbf{s}))^{-q}] ds = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[b\tau^p (v(\mathbf{s}))^p - \tau b(v(\mathbf{s}))^p + \frac{a\tau^q}{(w(\mathbf{s}))^q} - \frac{\tau a}{(w(\mathbf{s}))^q} \right] ds = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[b(v(\mathbf{s}))^p (\tau^p - \tau) + \frac{a}{(w(\mathbf{s}))^q} (\tau^q - \tau) \right] ds \geq 0. \end{aligned}$$

Нерівність буде виконуватися, якщо

$$\begin{aligned} b(v(\mathbf{s}))^p (\tau^p - \tau) + \frac{a}{(w(\mathbf{s}))^q} (\tau^q - \tau) &> 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \tau^p - \tau > 0, \\ \tau^q - \tau > 0, \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \tau(\tau^{p-1} - 1) > 0, \\ \tau(\tau^{q-1} - 1) > 0, \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \tau^{p-1} > 1, \\ \tau^{q-1} > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Звідси можна отримати обмеження, яким мають задовольняти параметри p та q , щоб останні нерівності виконувалися, а саме, $p \in (0,1)$, $q \in (0,1)$. Це означає, що їх в постановці задачі вказувати немає необхідності, і можна зробити про це висновок на даному кроці.

Крім того, щоб оператор T був псевдоугнутим, необхідно ще показати, що виконується умова: $\forall v, w \in K$ існують додатні числа α^* , β^* такі, що $\alpha^* u_0 \leq \hat{T}(v, w) \leq \beta^* u_0$, $u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$.

Розглянемо ліву нерівність:

$$\alpha^* u_0 \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [bv^p(\mathbf{s}) + aw^{-q}(\mathbf{s})] ds,$$

$$\alpha^* \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [bv^p(\mathbf{s}) + aw^{-q}(\mathbf{s})] ds.$$

Оскільки $v > v_0 = \varepsilon$, $w > w_0 = \varepsilon$, $v < w_0 = \beta$, $w < w_0 = \beta$, то маємо

$$\alpha^* u_0 \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[b\varepsilon^p + \frac{a}{\beta^q} \right] ds \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[bv^p + \frac{a}{w^q} \right] ds,$$

звідки

$$\alpha^* \leq b\varepsilon^p + \frac{a}{\beta^q}.$$

Розглянемо тепер праву нерівність:

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [bv^p(\mathbf{s}) + aw^{-q}(\mathbf{s})] ds \leq \beta^* u_0.$$

Маємо

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[bv^p + \frac{a}{w^q} \right] ds \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[b\beta^p + \frac{a}{\varepsilon^q} \right] ds,$$

звідки

$$b\beta^p + \frac{a}{\varepsilon^q} \leq \beta^*.$$

4) Дослідимо оператор T на u_0 -псевдоугнутість. Для цього треба показати, що існує $\eta(v, w, \tau) > 0$ така, що

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{w}{\tau}\right) \geq [1 + \eta(v, w, \tau)] \tau \hat{T}(v, w),$$

якщо $v, w \in K(u_0)$, $\tau \in (0, 1)$, або що

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{w}{\tau}\right) - [1 + \eta] \tau \hat{T}(v, w) \geq 0,$$

звідки маємо

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[b\tau^p (v(\mathbf{s}))^p + \frac{a\tau^q}{(w(\mathbf{s}))^q} - (1 + \eta) \left(\tau b (v(\mathbf{s}))^p + \frac{\tau a}{(w(\mathbf{s}))^q} \right) \right] ds \geq 0.$$

Для виконання цієї нерівності необхідно, щоб вираз у квадратних дужках був невід'ємним, а для цього необхідно, щоб

$$\begin{cases} \tau^p - (1 + \eta)\tau \geq 0, \\ \tau^q - (1 + \eta)\tau \geq 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau^{p-1} - 1 - \eta \geq 0, \\ \tau^{q-1} - 1 - \eta \geq 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta \leq \tau^{p-1} - 1, \\ \eta \leq \tau^{q-1} - 1. \end{cases}$$

Оскільки, $\tau \in (0,1)$, $p \in (0,1)$, $q \in (0,1)$, то потрібно, щоб $0 < \eta \leq \min\{\tau^{p-1} - 1, \tau^{q-1} - 1\}$, тобто така функція η існує.

Якщо

$$f(\mathbf{x}, u) = g(\mathbf{x})u^{-q} + h(\mathbf{x})u^p,$$

$$\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = g(\mathbf{x})w^{-q} + h(\mathbf{x})v^p,$$

де $g(\mathbf{x}) > 0$ та $h(\mathbf{x}) > 0$ – деякі неперервні та обмежені в Ω функції і

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} h(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{x} \in \Omega} h(\mathbf{x}),$$

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{x}),$$

нерівності (2.2) приймають вигляд

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} h(\mathbf{x})\varepsilon^p + \max_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{x})\beta^{-q} \geq \frac{\varepsilon}{M}, \\ \max_{\mathbf{x} \in \Omega} h(\mathbf{x})\beta^p + \max_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{x})\varepsilon^{-q} \leq \frac{\beta}{M}. \end{cases}$$

Із виконання властивостей 1) – 4) випливає існування та єдиність додатного розв'язку у задачі (1.4), (1.5) [14].

Послідовні наближення для розв'язання задачі (1.4), (1.5) мають вигляд

$$v_{n+1}(\mathbf{x}) = \hat{T}(v_n, w_n),$$

$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \hat{T}(w_n, v_n).$$

За цією схемою маємо:

$$\tau u^* = v_0 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq \mathbf{x}^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_0 = \frac{u^*}{\tau},$$

де u^* – точний розв'язок, $\tau \in (0,1)$.

3. Результати обчислювального експерименту

Проведемо обчислювальний експеримент у крузі та півкрузі.

1) Розглянемо область

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}. \quad (3.1)$$

Задаємо наступні значення параметрів $a = 4$, $b = 2$, $q = 0,1$, $p = 0,7$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 2,5$, крім того маємо $M \approx 0,248$. Такі значення задовольняють умовам (2.2).

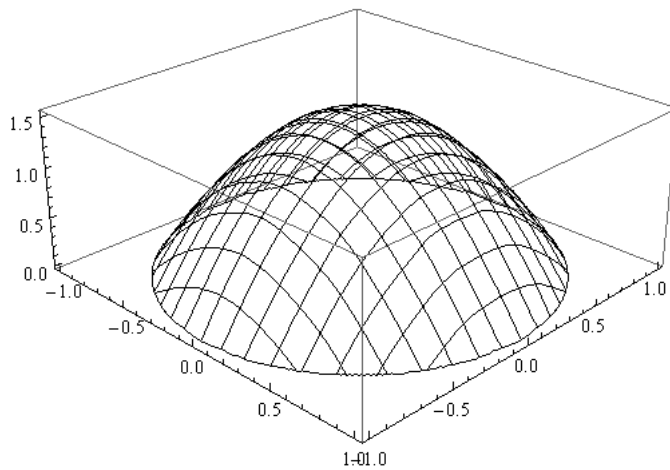
В таблиці 1 наведено значення для наближень $v_7(\mathbf{x})$ та $w_7(\mathbf{x})$ у точках області Ω з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$.

Табл.1. Значення для наближень $v_7(\mathbf{x})$ та $w_7(\mathbf{x})$ у крузі.

φ		ρ			
		0,2	0,4	0,6	0,8
$\frac{\pi}{10}$	w_7	1,466900	1,278620	0,961526	0,528012
	v_7	1,466890	1,278610	0,961519	0,528008
$\frac{\pi}{5}$	w_7	1,466910	1,277790	0,959488	0,526069
	v_7	1,466900	1,277780	0,959481	0,526065
$\frac{3\pi}{10}$	w_7	1,466920	1,276890	0,957789	0,523992
	v_7	1,466910	1,276880	0,957782	0,523989
$\frac{2\pi}{5}$	w_7	1,466940	1,277270	0,958597	0,524694
	v_7	1,466930	1,277260	0,958590	0,524690
$\frac{\pi}{2}$	w_7	1,467020	1,282540	0,969812	0,536952
	v_7	1,467010	1,282520	0,969805	0,536948

На рисунках 1 та 2 представлені поверхні та лінії рівня для наближення $w_7(\mathbf{x})$ відповідно.

На рисунку 3 зображено наближення $v_i(0, x_2)$ (штрихова лінія) та $w_i(0, x_2)$ (суцільна лінія), $i = \overline{1,3}$.

Рис.1. Поверхня для наближення $w_7(\mathbf{x})$.

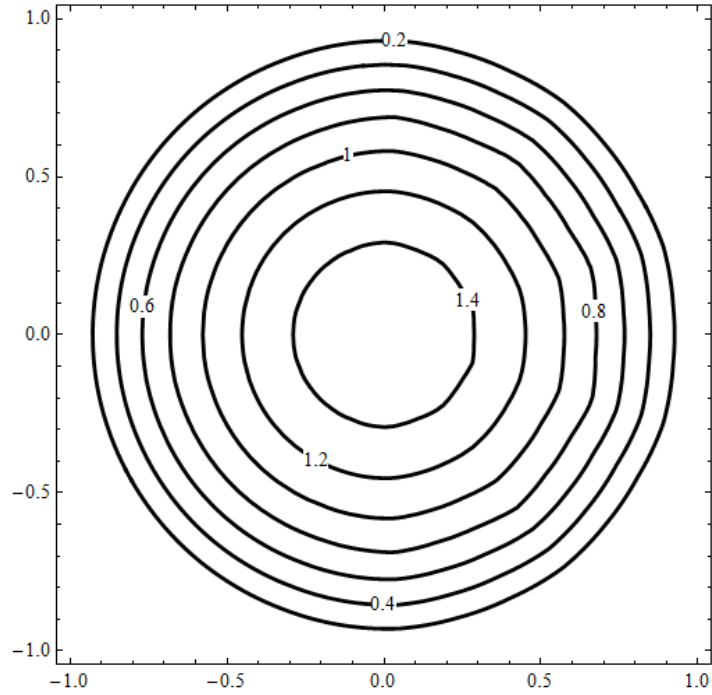


Рис.2. Лінії рівня для наближення $w_7(\mathbf{x})$.

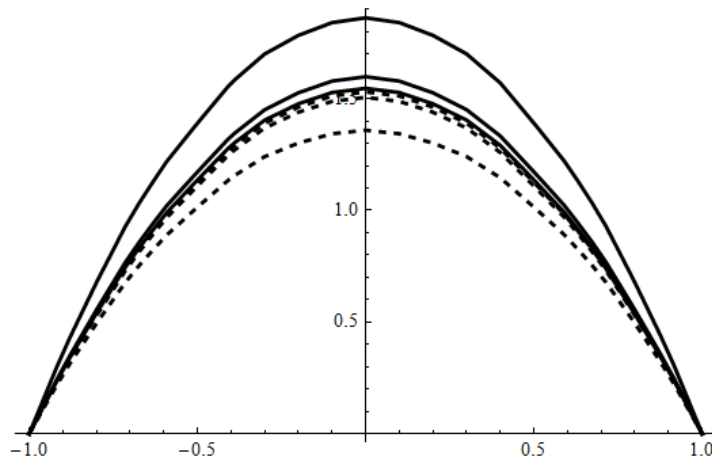


Рис.3. Значення наближень $v_i(0, x_2)$ (штрихова лінія) та $w_i(0, x_2)$ (суцільна лінія), $i = \overline{1,3}$.

2) Розглянемо область

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 < 1\} \quad (3.2)$$

і наступні значення параметрів $a = 8$, $b = 4$, $q = 0,1$, $p = 0,7$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 2,5$, $M \approx 0,098$. Такі значення задовольняють умовам (2.2).

В таблиці 2 наведено значення для наближень $v_7(\mathbf{x})$ та $w_7(\mathbf{x})$ у точках області Ω з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$.

Табл.2. Значення для наближень $v_7(\mathbf{x})$ та $w_7(\mathbf{x})$ у півкрузі.

φ		ρ			
		0,2	0,4	0,6	0,8
$\frac{\pi}{10}$	w_7	0,266472	0,463016	0,517101	0,378678
	v_7	0,266471	0,463016	0,517101	0,378677
$\frac{\pi}{5}$	w_7	0,481274	0,776343	0,806670	0,543475
	v_7	0,481273	0,776342	0,806669	0,543474
$\frac{3\pi}{10}$	w_7	0,634196	0,974721	0,969572	0,627974
	v_7	0,634195	0,974719	0,969570	0,627973
$\frac{2\pi}{5}$	w_7	0,724959	1,084010	1,054390	0,670615
	v_7	0,724957	1,084010	1,054390	0,670614
$\frac{\pi}{2}$	w_7	0,754978	1,118730	1,080410	0,683393
	v_7	0,754977	1,118730	1,080410	0,683392

На рисунках 4 та 5 представлені поверхні та лінії рівня для наближення $w_7(\mathbf{x})$ відповідно. На рисунку 6 зображено наближення $v_i(0, x_2)$ (штрихова лінія) та $w_i(0, x_2)$ (суцільна лінія), $i = \overline{1,3}$.

3) Знання функції Гріна дозволяє від нелінійної задачі (1.1), (1.2) перейти до еквівалентного на класі функцій $C(\Omega)$ інтегрального рівняння (1.3). Однак побудова функції Гріна у замкнутому вигляді можлива лише для деяких достатньо простих областей. Якщо функція Гріна невідома або має доволі складний вигляд, пропонуємо наближений метод розв'язання задачі (1.1), (1.2), який використовує квазіфункцію Гріна [15]. Цей метод полягає у тому, що

вихідна задача (1.1), (1.2) на класі функцій $W_2^1(\Omega)$ зводиться до нелінійного інтегрального рівняння

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) f(\lambda, u(\xi)) d\xi + \int_{\Omega} u(\xi) K(\mathbf{x}, \xi) d\xi, \quad (3.3)$$

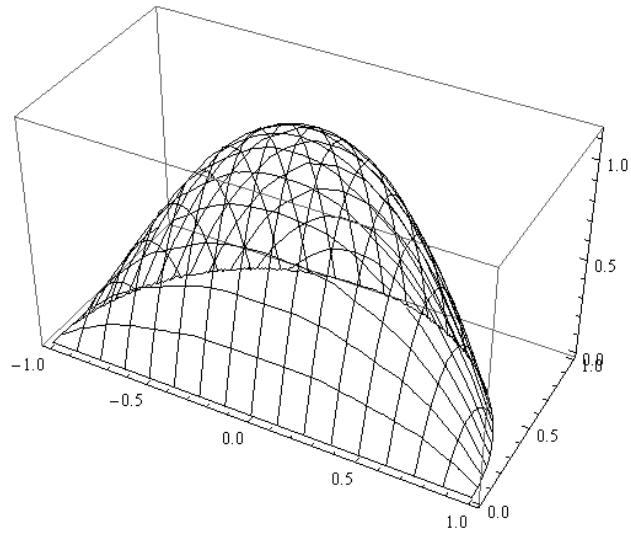


Рис.4. Поверхня для наближення $w_7(\mathbf{x})$.

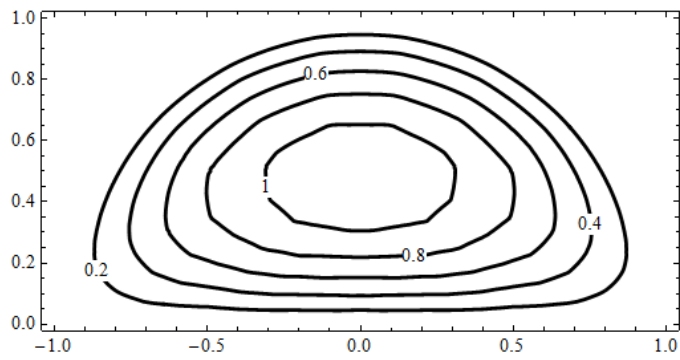


Рис.5. Лінії рівня для наближення $w_7(\mathbf{x})$.

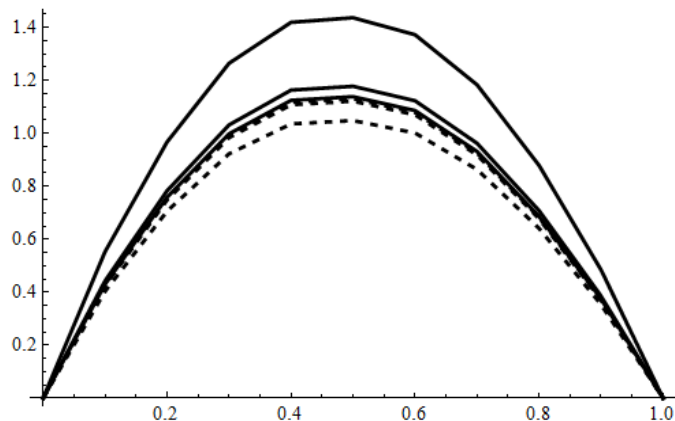


Рис.6. Значення наближень $v_i(0, x_2)$ (штрихова лінія) та $w_i(0, x_2)$ (суцільна лінія), $i = \overline{1,3}$.

де

$$G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{r} - \psi(\mathbf{x}, \xi) \right], \quad \psi(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2} \ln \left[r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\xi) \right],$$

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - \xi_i)^2}, \quad K(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\xi} \psi(\mathbf{x}, \xi), \quad \Omega \subset R^2,$$

$\omega = 0$ – нормалізоване до першого порядку рівняння межі $\partial\Omega$, $\omega > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$,

$W_2^1(\Omega)$ – простір функцій, що дорівнюють нулю на $\partial\Omega$ та мають квадратично сумовні в Ω узагальнені похідні першого порядку.

Відомо [15], що у крузі (3.1) рівняння (3.3) зводиться до рівняння (1.3), тому в цьому випадку результати, отримані методом квазіфункцій Гріна, співпадатимуть із результатами, отриманими методом функцій Гріна.

Розглянемо рівняння (3.3) у півкрузі (3.2). Зводимо його до послідовності лінійних інтегральних рівнянь, застосувавши метод послідовних наближень [16]

$$u_{m+1}(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} u_{m+1}(\xi) K(\mathbf{x}, \xi) d\xi = \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) \left(a u_m^{-q}(\xi) + b u_m^p(\xi) \right) d\xi, \quad m = 1, 2, \dots$$

Застосовуючи метод Бубнова-Гальоркіна [17], шукаємо наближений розв'язок у вигляді

$$u_{m,k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k c_{m,i} \varphi_i(\mathbf{x}),$$

де $\varphi_i(\mathbf{x})$ – координатна послідовність, а $c_{m,i}$ ($i = \overline{1, k}, m = 2, 3, \dots$) – розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^k c_{2,i} \left[\int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \xi) \varphi_i(\xi) \varphi_j(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x} \right] =$$

$$= \int_{\Omega} \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) \left(a u_1^{-q}(\xi) + b u_1^p(\xi) \right) \varphi_j(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x}, \quad j = \overline{1, k},$$

$$\sum_{i=1}^k c_{m,i} \left[\int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \xi) \varphi_i(\xi) \varphi_j(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x} \right] =$$

$$= \int_{\Omega} \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) \left(a u_{m-1,k}^{-q}(\xi) + b u_{m-1,k}^p(\xi) \right) \varphi_j(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x}, \quad j = \overline{1, k}, \quad m = 3, 4, \dots$$

В якості першого наближення візьмемо

$$u_1(\mathbf{x}) = 0,05.$$

Нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega$ має вигляд

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (1 - x_1^2 - x_2^2) x_2 = 0.$$

В якості координатної послідовності оберемо

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) P_{i_1}(x_1) P_{i_2}(2x_2 - 1), \quad i_1 = \overline{0, 2}, \quad i_2 = \overline{0, 2 - i_1}, \quad i = \overline{1, k},$$

де $k = 6$, $P_m(z)$ – поліноми Лежандра

$$P_m(z) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dz^m} \left[(z^2 - 1)^m \right].$$

В таблиці 3 наведено значення для наближення $u_{5,6}(\mathbf{x})$ у точках області Ω з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$.

На рисунках 7 та 8 представлені поверхні та лінії рівня для наближення $u_{6,6}(\mathbf{x})$ відповідно.

Табл.3. Значення для наближення $u_{6,6}(\mathbf{x})$ у півкрузі.

φ	ρ			
	0,2	0,4	0,6	0,8
$\frac{\pi}{10}$	0,269723	0,448701	0,489529	0,352223
$\frac{\pi}{5}$	0,487426	0,769360	0,796433	0,544760
$\frac{3\pi}{10}$	0,643866	0,973798	0,966411	0,636174
$\frac{2\pi}{5}$	0,737047	1,084210	1,047640	0,674798
$\frac{\pi}{2}$	0,767881	1,118770	1,071330	0,685467

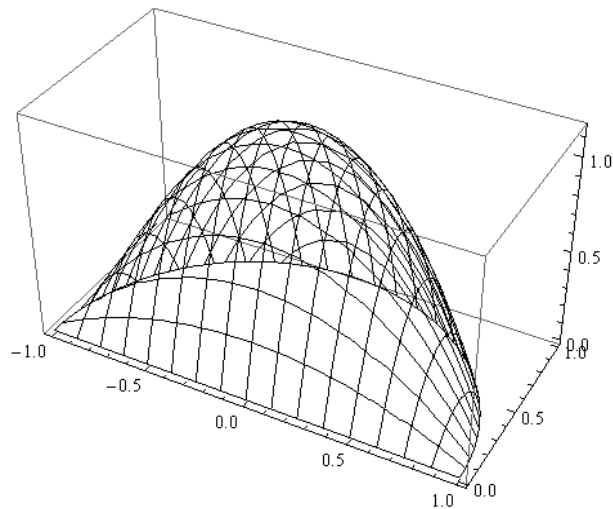


Рис.7. Поверхня для наближення $u_{6,6}(\mathbf{x})$.

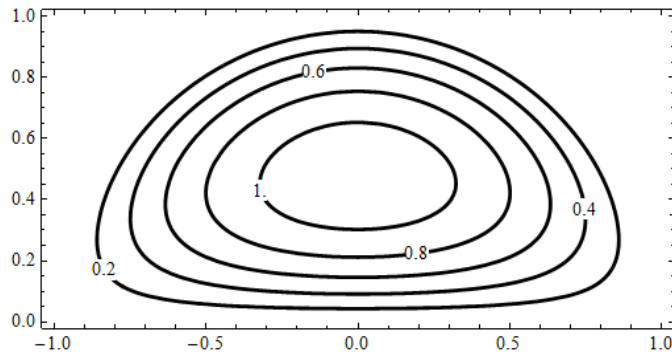


Рис.8. Лінії рівня для наближення $u_{6,6}(\mathbf{x})$.

4. Висновки

У роботі було досліджено можливість побудови двосторонніх наближень до додатного розв'язку задачі (1.4), (1.5) та отримано умови (2.2), які гарантують збіжність ітераційного процесу.

Крім того, нам вдалося зв'язати умовою фактично чотири параметри a, b, p, q розглядуваної задачі, при яких існує єдиний додатний розв'язок.

Побудувавши конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, ми отримали апіорну оцінку шуканого розв'язку, оскільки маємо $v_0 \leq u^* \leq w_0$. Отримані двосторонні наближення до розв'язку задачі дають можливість робити апостеріорні висновки.

Однією з переваг цього методу у порівнянні з іншими є відносна простота реалізації алгоритму, що в свою чергу вимагає менше обчислювальних ресурсів.

Крім того, було показано застосування методу квазіфункцій Гріна, який може використовуватися у випадках, коли функція Гріна невідома або має складний вигляд.

Розглянутий метод може бути використаний для відшукування розв'язків прикладних задач, математичними моделями яких є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 183 с.
2. Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. – Долгопрудный: Интеллект, 2008. – 408 с.
3. Dong Ye, Feng Zhou. A generalized two dimensional Emden-Fowler equation with exponential nonlinearity // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. – 2001. – 13 (2). – P.141-158.
4. Bozhkov Yuri. Noether Symmetries and Critical Exponents // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2005. – 1 (022). – P.1-12.

5. Рвачев В.Л., Слесаренко А.П., Сафонов Н.А. Математическое моделирование теплового самовоспламенения для стационарных условий методом R-функций // Доклады академии наук Украины. – 1992. – №12. – С.24-27
6. Галахов Е.И. Положительные решения квазилинейного эллиптического уравнения // Математические заметки. – 2005. – Т.78, вып. 2. – С.202-211.
7. M. Matinfar, K. Nemati. A numerical extension on a convex nonlinear elliptic problem // International Mathematical Forum. – 2008. – 3 (17). – P.811-816.
8. A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems // J. Funct. Anal. – 1994. – 122. – P.519-543.
9. S. Baraket, Dong Ye. Singular limit solutions for two-dimensional elliptic problems with exponentially dominated nonlinearity // Chinese Annals of Mathematics. Series B. – 2001. – 22 (03). – P.287-296.
10. Junping Shi, Miaoxin Yao. Positive solutions for elliptic equations with singular nonlinearity // Electronic Journal of Differential Equations. – 2005. – 04. – P.1-11.
11. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2013. – № 1. – С.35-42.
12. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2015. – № 3. – С.107-120.
13. Луханін В.С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі з експоненціальною мажорантою // Радіоелектроніка та інформатика. – 2015. – № 2 (69). – С.16-18.
14. Опойцев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Труды Моск. матем. общества. – 1978. – Т. 36. – С.237-273.
15. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
16. Свирский И.В. Методы типа Бубнова-Галеркина и последовательных приближений. – М.: Наука, 1968. – 199 с.
17. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

УДК 004.02

Анализ методов построения деревьев решений

Б. В. Паршенцев, Е. Г. Толстолужская

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

Применение гибридных методов технологии Data Mining позволяет эффективно использовать их при решении задач, которые направлены на автоматический анализ и выявление закономерностей в большом объеме данных. В данной статье рассматриваются вопросы структуры и практического применения наиболее распространенных алгоритмов деревьев принятия решений и основные алгоритмы построения деревьев решений. Основное внимание уделено задачам регрессии и сравнения алгоритмов построения дерева решений для данного класса задач.

Ключевые слова: *дерево принятия решений, узел, лист, CART, регрессия, алгоритм, C4.5, Random Forest.*

Застосування гібридних методів технології Data Mining дозволяє ефективно використовувати їх при вирішенні завдань, які спрямовані на автоматичний аналіз і виявлення закономірностей у великому обсязі даних. У даній статті розглядаються питання структури і практичного застосування найбільш поширених алгоритмів дерев прийняття рішень і основні алгоритми побудови дерев рішень. Основна увага приділена завданням регресії і порівняння алгоритмів побудови дерева рішень для даного класу задач.

Ключові слова: *дерево прийняття рішень, вузол, лист, CART, регресія, алгоритм, C 4.5, Random Forest.*

The hybrid methods of Data Mining technology can be effectively used to solve problems, which are aimed at the automatic analysis and identification of patterns in large amounts of data. This article focuses on the practical application and the structure of the most common algorithms used in decision trees and basic algorithms of decision trees construction. The main attention is paid to regression problems and comparison of decision tree construction algorithms for the mentioned above class of problems.

Key words: *decision tree, a node, a leaf, CART, regression algorithm, C4.5, Random Forest.*

Введение

1. Постановка проблемы

Data Mining – это процесс обнаружения в "сырых" данных ранее неизвестных нетривиальных практически полезных и доступных интерпретации знаний, необходимых для принятия решений в различных сферах человеческой деятельности. Data Mining является одним из шагов Knowledge Discovery in Databases. Информация, найденная в процессе применения методов Data Mining, должна быть нетривиальной и ранее неизвестной, например, средние продажи не являются таковыми. Знания должны описывать новые связи между свойствами, предсказывать значения одних признаков на основе других и т.д. Найденные знания должны быть применимы и на новых данных с некоторой степенью достоверности. Полезность заключается в том, что эти знания могут приносить определенную выгоду при их применении. Знания должны быть в понятном для пользователя не математика виде. Например, проще всего воспринимаются человеком логические конструкции "если ... то ...". Более того,

такие правила могут быть использованы в различных СУБД в качестве SQL-запросов. В случае, когда извлеченные знания непрозрачны для пользователя, должны существовать методы постобработки, позволяющие привести их к интерпретируемому виду. Алгоритмы, используемые в Data Mining, требуют большого количества вычислений. Раньше это являлось сдерживающим фактором широкого практического применения Data Mining, однако сегодняшний рост производительности современных процессоров снял остроту этой проблемы. Теперь за приемлемое время можно провести качественный анализ сотен тысяч и миллионов записей.

2. Анализ литературы

Одним из часто используемых методов автоматического анализа данных являются деревья решений. Первые идеи создания деревьев решений восходят к работам Ховленда (Hoveland) и Ханта (Hunt) конца 50-х годов XX века [1]. Однако, основополагающей работой, давшей импульс для развития этого направления, явилась книга Ханта (Hunt, E.B.), Мэрина (Marin J.) и Стоуна (Stone, P.J) "Experiments in Induction" увидевшая свет в 1966 г. [1].

Деревья решений – это способ представления правил в иерархической, последовательной структуре, где каждому объекту соответствует единственный узел, дающий решение [1]. Под правилом понимается логическая конструкция, представленная в виде "если ... то ...". На рис. 1 представлен пример дерева решений для задачи выдачи банковского кредита [1].



рис. 1. Пример дерева решений

Область применения деревьев решений в настоящее время широка, но все задачи, решаемые этим аппаратом, могут быть объединены в следующие три класса:

- Описание данных: Деревья решений позволяют хранить информацию о данных в компактной форме, вместо них можно хранить дерево решений, которое содержит точное описание объектов.
- Классификация: Деревья решений отлично справляются с задачами классификации, т.е. отнесения объектов к одному из заранее известных классов. Целевая переменная должна иметь дискретные значения.
- Регрессия: Если целевая переменная имеет непрерывные значения, деревья решений позволяют установить зависимость целевой переменной от независимых (входных) переменных. Например, к этому классу относятся задачи численного прогнозирования (предсказания значений целевой переменной) [3].

Деревья решений являются прекрасным инструментом в системах поддержки принятия решений, интеллектуального анализа данных (data mining). В состав многих пакетов, предназначенных для интеллектуального анализа данных, уже включены методы построения деревьев решений. В областях, где высока цена ошибки, они послужат отличным подспорьем аналитика или руководителя [7].

Деревья решений успешно применяются для решения практических задач в следующих областях:

- Банковское дело. Оценка кредитоспособности клиентов банка при выдаче кредитов;
 - Промышленность. Контроль за качеством продукции (выявление дефектов), испытания без разрушений (например, проверка качества сварки) и т.д.;
 - Медицина. Диагностика различных заболеваний;
 - Молекулярная биология. Анализ строения аминокислот;
- К преимуществам использования деревьев решений относятся:
- быстрый процесс обучения;
 - генерация правил в областях, где эксперту трудно формализовать свои знания;
 - извлечение правил на естественном языке;
 - интуитивно понятная классификационная модель;
 - высокая точность прогноза, сопоставимая с другими методами (статистика, нейронные сети);
 - построение непараметрических моделей.

Проблемы бизнес анализа формулируются по-иному, но решение большинства из них сводится к той или иной задаче Data Mining или к их комбинации. Например, оценка рисков – это решение задачи регрессии или классификации, сегментация рынка – кластеризация, стимулирование спроса – ассоциативные правила. Фактически, задачи Data Mining являются элементами, из которых можно собрать решение подавляющего большинства реальных бизнес задач. Для решения вышеописанных задач используются различные

методы и алгоритмы Data Mining. Большую популярность получили следующие методы Data Mining: нейронные сети, деревья решений, алгоритмы кластеризации, в том числе и масштабируемые, алгоритмы обнаружения ассоциативных связей между событиями и т.д.

3. Формулирование цели статьи

Целью статьи является исследование деревьев решений и выбор алгоритма построения дерева решений для решения задачи регрессии.

Основной материал

1. Алгоритм построения дерева решений

Идею построения деревьев решений из множества T , впервые высказанную Хантом, приведем по Р. Куинлену (R. Quinlan) [3]. Пусть задано некоторое обучающее множество T , содержащее объекты (примеры), каждый из которых характеризуется m атрибутами, причем один из них указывает на принадлежность объекта к определенному классу.

Пусть через $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ обозначены классы (значения метки класса), тогда существуют три ситуации [4]:

1. Множество T содержит один или более примеров, относящихся к одному классу C_k (тогда дерево решений для T – это лист, определяющий класс C_k);

2. Множество T не содержит ни одного примера, т.е. пустое множество (тогда это снова лист, и класс, ассоциированный с листом, выбирается из другого множества отличного от T , скажем, из множества, ассоциированного с родителем);

3. Множество T содержит примеры, относящиеся к разным классам.

В последнем случае следует разбить множество T на некоторые подмножества. Для этого выбирается один из признаков, имеющий два и более отличных друг от друга значений O_1, O_2, \dots, O_n . T разбивается на подмножества T_1, T_2, \dots, T_n , где каждое подмножество T_i содержит все примеры, имеющие значение O_i для выбранного признака [5]. Эта процедура будет рекурсивно продолжаться до тех пор, пока конечное множество не будет состоять из примеров, относящихся к одному и тому же классу.

Вышеописанная процедура лежит в основе многих современных алгоритмов построения деревьев решений, этот метод известен еще под названием разделения и захвата (divide and conquer). Очевидно, что при использовании данной методики, построение дерева решений будет происходить сверху вниз. Поскольку все объекты были заранее отнесены к известным нам классам, такой процесс построения дерева решений называется обучением с учителем (supervised learning) [6]. Процесс обучения также называют индуктивным обучением или индукцией деревьев (tree induction).

На сегодняшний день существует значительное число алгоритмов, реализующих деревья решений: CART, C4.5, NewId, ITrule, CHAID, CN2 и т.д. [6]. Но наибольшее распространение и популярность получили следующие два:

- CART (Classification and Regression Tree) – это алгоритм построения бинарного дерева решений – дихотомической классификационной модели.

Каждый узел дерева при разбиении имеет только двух потомков. Как видно из названия алгоритма, он решает задачи классификации и регрессии.

- C4.5 – алгоритм построения дерева решений, в котором принято, что количество потомков у узла не ограничено. Алгоритм C4.5 не умеет работать с непрерывным целевым полем и, поэтому, решает только задачи классификации.

Большинство из известных алгоритмов являются "жадными алгоритмами". Если один раз был выбран атрибут, и по нему было произведено разбиение на подмножества, то алгоритм не может вернуться назад и выбрать другой атрибут, который дал бы лучшее разбиение. Таким образом, на этапе построения нельзя сказать даст ли выбранный атрибут, в конечном итоге, оптимальное разбиение.

При построении деревьев решений особое внимание уделяется следующим вопросам: выбору критерия атрибута, по которому пойдет разбиение, остановки обучения и отсечения ветвей.

Для построения дерева на каждом внутреннем узле необходимо найти такое условие (проверку), которое бы разбивало множество, ассоциированное с этим узлом на подмножества. В качестве такой проверки должен быть выбран один из атрибутов [6]. Общее правило для выбора атрибута можно сформулировать следующим образом: выбранный атрибут должен разбить множество так, чтобы получаемые в итоге подмножества состояли из объектов, принадлежащих к одному классу, или были максимально приближены к этому, т.е. количество объектов из других классов ("примесей") в каждом из этих множеств было как можно меньше.

Алгоритм C4.5 (усовершенствованная версия алгоритма ID3, Iterative Dichotomize) использует теоретико-информационный подход. Для выбора наиболее подходящего атрибута, предлагается следующий теоретико-информационный критерий:

$$Gain(X)=Info(T)-Info_X(T), \quad (1)$$

где $Info(T)$ – энтропия множества T , а

$$Info_X(T)=\sum_{i=1}^n |T_i|/|T| * Info(T_i), \quad (2)$$

Множества T_1, T_2, \dots, T_n получены при разбиении исходного множества T по проверке X . Выбирается атрибут, дающий максимальное значение по критерию (1). Впервые эта мера была предложена Р. Куинленом в разработанном им алгоритме ID3 [6]. Кроме вышеупомянутого алгоритма C4.5, есть еще целый класс алгоритмов, которые используют этот критерий выбора атрибута.

Алгоритм CART использует статистический критерий (так называемый индекс Gini, названный в честь итальянского экономиста Corrado Gini), который оценивает "расстояние" между распределениями классов.

$$Gini(c)=1-\sum_j p_j^2, \quad (3)$$

Где c – текущий узел, а p_j – вероятность класса j в узле c .

В дополнение к основному методу построения деревьев решений были предложены следующие правила:

- Использование статистических методов для оценки целесообразности дальнейшего разбиения, так называемая "ранняя остановка" (prepruning). В конечном счете "ранняя остановка" процесса построения привлекательна в плане экономии времени обучения, но здесь уместно сделать одно важное предостережение: этот подход строит менее точные классификационные модели и поэтому ранняя остановка крайне нежелательна. Признанные авторитеты в этой области Л. Брейман и Р. Куинлен советуют следующее: "Вместо остановки используйте отсечение".

- Ограничение глубины дерева. Остановить дальнейшее построение, если разбиение ведет к дереву с глубиной, превышающей заданное значение.

- Разбиение должно быть нетривиальным, т.е. получившиеся в результате узлы должны содержать не менее заданного количества примеров.

Очень часто алгоритмы построения деревьев решений дают сложные деревья, которые "переполнены данными", имеют много узлов и ветвей. Такие "ветвистые" деревья очень трудно понять. К тому же ветвистое дерево, имеющее много узлов, разбивает обучающее множество на все большее количество подмножеств, состоящих из все меньшего количества объектов [7]. Гораздо предпочтительнее иметь дерево, состоящее из малого количества узлов, которым бы соответствовало большое количество объектов из обучающей выборки. Наиболее очевидным решением было бы построить все возможные варианты деревьев, соответствующие обучающему множеству, и из них выбрать дерево с наименьшей глубиной. Однако эта задача является NP-полной, что было показано Л. Хайфилем (L. Huafill) и Р. Ривестом (R. Rivest). Как известно, этот класс задач не имеет эффективных методов решения. Для решения вышеописанной проблемы часто применяется так называемое отсечение ветвей (pruning) [7]. Пусть под точностью (распознавания) дерева решений понимается отношение правильно классифицированных объектов при обучении к общему количеству объектов из обучающего множества, а под ошибкой – количество неправильно классифицированных. Предположим, что нам известен способ оценки ошибки дерева, ветвей и листьев. Тогда, возможно использовать следующее простое правило:

- построить дерево;
- отсечь или заменить поддеревом те ветви, которые не приведут к возрастанию ошибки.

В отличие от процесса построения, отсечение ветвей происходит снизу вверх, двигаясь с листьев дерева, отмечая узлы как листья, либо заменяя их поддеревом [7]. Хотя отсечение не является панацеей, но в большинстве практических задач дает хорошие результаты, что позволяет говорить о правомерности использования подобной методики.

Рассмотрим более детально алгоритмы CART, Random forest и Stochastic Gradient Boosting.

CART (англ. Classification and regression trees — Классификационные и регрессионные деревья) был первым из методов, придуманным в 1983 четверкой

известных ученых в области анализа данных: Leo Breiman, Jerome Friedman, Richard Olshen and Stone. Суть этого алгоритма состоит в построении дерева принятия решений [8]. На первой итерации строятся все возможные (в дискретном смысле) гиперплоскости, которые разбивали бы пространство на два. Для каждого такого разбиения пространства считается количество наблюдений в каждом из подпространств разных классов. В результате выбирается такое разбиение, которое максимально выделило в одном из подпространств наблюдения одного из классов. Соответственно, это разбиение будет корнем дерева принятия решений, а листьями на данной итерации будут два разбиения. На следующих итерациях берется один худший (в смысле отношения количества наблюдений разных классов) лист и проводится та же операция по его разбиению. В результате этот лист становится узлом с каким-то разбиением, и двумя листьями [8]. Процесс продолжается пока не будут достигнуты ограничения по количеству узлов, либо от одной итерации к другой перестанет улучшаться общая ошибка (количество неправильно классифицированных наблюдений всем деревом). Однако полученное дерево будет “переобучено” (будет подогнано под обучающую выборку) и, соответственно, не будет давать нормальные результаты на других данных. Для того, чтобы избежать “переобучения”, используют тестовые выборки (либо кросс-валидацию) и, соответственно, проводится обратный анализ (так называемый *pruning*), когда дерево уменьшают в зависимости от результата на тестовой выборке [8].

CART – относительно простой алгоритм, в результате которого получается одно дерево принятия решений. За счет этого, он удобен для первичного анализа данных, к примеру, чтобы проверить на наличие связей между переменными [8]. К достоинствам данного алгоритма относятся:

- быстрое построение модели;
- легкая интерпретируемость (из-за простоты модели, можно легко отобразить дерево и проследить за всеми узлами дерева).

Недостатком алгоритма CART является то, что он часто сходится на локальном решении (к примеру, на первом шаге была выбрана гиперплоскость, которая максимально делит пространство на этом шаге, но при этом это не приведет к оптимальному решению) [8].

Метод, придуманный после CART Leo Breiman в соавторстве с Adele Cutler – Random forest (Случайный лес), в основе которого лежит использование комитета (ансамбля) деревьев принятия решений [8]. Суть алгоритма заключается в том, что на каждой итерации делается случайная выборка переменных, после чего, на этой новой выборке запускают построение дерева принятия решений. При этом производится “*bagging*” – выборка случайных двух третей наблюдений для обучения, а оставшаяся треть используется для оценки результата. Такую операцию проделывают сотни или тысячи раз [8]. Результирующая модель будет результатом “голосования” набора полученных при моделировании деревьев.

Достоинства метода Random forest:

1. Высокое качество результата, особенно для данных с большим количеством переменных и малым количеством наблюдений.

2. Возможность применения параллельной обработки.
3. Не требуется тестовая выборка.

Недостатками метода являются:

1. Каждое из деревьев огромное, в результате модель получается огромная.
2. Долгое построение модели, для достижения хороших результатов.
3. Сложная интерпретация модели (сотни или тысячи больших деревьев сложны для интерпретации).

Метод анализа данных Stochastic Gradient Boosting (Стохастическое градиентное добавление), представленный Jerome Friedman в 1999 году, и представляющий собой решение задачи регрессии (к которой можно свести классификацию) методом построения комитета (ансамбля) “слабых” предсказывающих деревьев принятия решений. На первой итерации строится ограниченное по количеству узлов дерево принятия решений. После чего считается разность между тем, что предсказало полученное дерево, умноженное на learnrate (коэффициент “слабости” каждого дерева) и искомой переменной на этом шаге. $Y_{i+1} = Y_i - Y_i * \text{learnrate}$ [8]. И уже по этой разнице строится следующая итерация. Так продолжается, пока результат не перестанет улучшаться. Т.е. на каждом шаге пытаемся исправить ошибки предыдущего дерева. Однако здесь лучше использовать проверочные данные (не участвовавшие в моделировании), так как на обучающих данных возможно переобучение [8].

Метод Stochastic Gradient Boosting обладает достоинствами:

1. Высокое качество результата, особенно для данных с большим количеством наблюдений и малым количеством переменных.
2. Сравнительно (с предыдущим методом) малый размер модели, так как каждое дерево ограничено заданными размерами.
3. Сравнительно (с предыдущим методом) быстрое время построение оптимальной модели.

Недостатки данного метода:

1. Требуется тестовая выборка (либо кросс-валидация).
2. Невозможность хорошего распараллеливания.
3. Относительно слабая устойчивость к ошибочным данным и переобучению.
4. Сложная интерпретация модели (так же, как и в Random forest).

Выводы

Анализ литературы показывает, что в настоящее время возникло противоречие между быстро возросшим объемом данных, которые необходимо анализировать и возможностями экспертов по их обработке. Благодаря этому в последние годы большое внимание уделяется разработке методов автоматического исследования (анализа) данных. Одним из широко используемых методов автоматического анализа данных являются деревья решений. Анализ основных алгоритмов построения деревьев решений C4.5, CART, Random forest и Stochastic Gradient Boosting позволил выявить их достоинства и недостатки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики / С.А. Айвазян, В.С Мхитарян, М. Юнити — М.: Изд. дом «Вильямс», 1998. - 450 с.
2. Барсегян А. А. Технологии анализа данных. Data Mining, Visual Mining, Text Mining, OLAP / А. А. Барсегян, М. С. Куприянов, В. В. Степаненко, И. И. Холод — Спб.: БХВ-Петербург, 2009. — 512 с.
3. Хайкин С. Нейронные сети : Полный курс, второе издание / Саймон Хайкин. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2006 — 185 с.
4. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. / К. Шеннон – М. Иностранная литература, 1963. - 270 с.
5. W. Buntine. A theory of classification rules. 1992 Edition (Statistical Associates Blue Book Series 24) – Kindle Edition, 1992. – 232 с.
6. S.Murthy. Automatic construction of decision trees from data: A Multi-disciplinary survey.1997 Paperback, 1997 – 254 с.
7. J. Ross Quinlan. C4.5: Programs for Machine learning. Morgan Kaufmann Publishers 1993. Paperback, 1993 – 320 с.
8. Коршунов Ю. М.. Математические основы кибернетики / Ю.М. Коршунов — М.: Энергоатомиздат, 1987 - 140 с.

УДК 517.977.5

Математическая модель профилактики сложной технической системы

Н. С. Подцыкин

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Україна

Рассмотрена задача оптимизации уровня надежности и работоспособности сложной технической системы. Сложная система составлена из конечного числа простых подсистем, функционирующих независимо друг от друга для достижения общей цели. Каждая простая подсистема в процессе работы изнашивается, надежность уменьшается, вероятность отказа увеличивается. В построенной модели уровень надежности подсистемы характеризуется состоянием, определяемым по значениям контролируемых параметров. Изменение состояния определяется в модели случайным процессом. Обновление подсистем происходит в результате применения управлений в плановые моменты контроля. Выбор управления из множества допустимых зависит от наблюдаемого состояния и стратегии управления. Решение задачи состоит в определении периода контроля сложной системы и стратегии управления для каждой простой подсистемы, обеспечивающие оптимальный уровень надежности.

Ключевые слова: математическая модель, сложная система, износ технической системы, работоспособность системы, стратегия управления, состояние системы.

Розглянута задача оптимізації рівня надійності і працездатності складної технічної системи. Складна система складена з кінцевого числа простих підсистем, що функціонують незалежно один від одного для досягнення спільної мети. Кожна проста підсистема в процесі роботи зношується, надійність зменшується, вірогідність відмови збільшується. У побудованій моделі рівень надійності підсистеми характеризується станом, визначуваним по значеннях контрольованих параметрів. Зміна стану визначається в моделі випадковим процесом. Оновлення підсистем відбувається в результаті застосування управлінь в планові моменти контролю. Вибір управління з множини допустимих залежить від спостережуваного стану і стратегії управління. Рішення задачі полягає у визначенні періоду контролю складної системи і стратегії управління для кожної простої підсистеми, що забезпечують оптимальний рівень надійності.

Ключові слова: математична модель, складна система, знос технічної системи, працездатність системи, стратегія управління, стан системи.

The problem of optimization of reliability level and operability of the composite technical system is discussed. The composite system is considered as a finite set of the simple subsystems that aim to achieve a common goal, but operate independently of each other. In the course of work, each simple subsystem wears out, its reliability decreases raising the probability of failure. In the constructed model, the reliability level of a subsystem is characterized by its state described by the values of some controlled parameters. This state changes are determined in the model by some stochastic process. The subsystems are updated by control actions (managements) taken during the routine monitoring at the planned moments of time. The choice of management from a set of admissible ones depends on the identified state and the management strategy. The task is to find such monitoring period for the given composite system and the management strategy for each simple subsystem that provide the optimum level of reliability.

Keywords: mathematical model, complex system, deterioration of the technical system, operation system, management strategy, the state of the system.

1. Введение

Всякая техническая система в процессе эксплуатации изнашивается, качество выходного продукта снижается, вероятность отказа увеличивается. Если предполагается использовать систему неограниченно долго, то обычно периодически в определенные моменты времени проводится профилактическое обслуживание. Оно необходимо для уменьшения вероятности отказа, обновления системы. Как правило, на практике доступны несколько видов профилактических обслуживаний, отличающихся степенью обновления системы и, соответственно, стоимостью. Чем дороже обслуживание, тем степень обновления системы глубже, тем период его применения больше. Существующая система планирования профилактик основывается на статистической информации функционирования целого класса однотипных систем. Понятно, что особенности отдельной системы при этом не учитываются. Модель, которая позволит обоснованно выбирать управления в зависимости от состояния системы, очевидно, повысит эффективность ее функционирования. Решение задачи профилактики с использованием состояния системы находится в рамках нового перспективного направления в моделировании надежности и работоспособности технических систем.

В некоторых случаях адекватность модели можно повысить, если рассматриваемая система является сложной, то есть, составлена из нескольких подсистем, объединенных одной целью и, возможно функционально связанных. Модель, которая учитывает особенности изменения надежности и работоспособности во времени каждой подсистемы, может существенно увеличить эффективность управления рассматриваемой сложной системой.

Считать систему простой или сложной решает аналитик на основе экспертных суждений. Рассмотрим метод построения модели сложной системы для оптимизации ее надежности. В зависимости от особенностей сложной системы можно выделить два подхода к моделированию. Первый подход, приводящий к более простой модели, возможен в том случае, если подсистемы в смысле надежности не взаимосвязаны, но имеют одну цель функционирования. Вторым подходом приводит к значительно более сложной модели, и он необходим в случае взаимосвязанных в смысле надежности подсистем. Рассмотрим подробно построение модели сложной системы для первого случая. Будем предполагать, что сложная система контролируется через равные промежутки времени (период контроля). В моменты контроля, в зависимости от наблюдаемого состояния и выбранной стратегии управления, применяется одно из возможных управлений.

Ниже будет построена модель профилактики сложной системы, в основу которой положено состояние. Для этой модели будет предложен оптимизационный алгоритм, который позволит оптимизировать как общий период контроля системы, так и стратегии управления каждой подсистемой.

Модель сложной системы включает модели всех простых подсистем. Подробное построение модели простой системы, основанной на состоянии,

рассмотрено в [1,2]. Для удобства приведем далее основные элементы, определяющие модель простой системы.

2. Модель простой системы.

Формально систему считаем простой, если ее состояние можно определить скалярной величиной. В противном случае – система сложная. Напомним, что считать рассматриваемую систему простой или сложной решает аналитик перед построением модели. Для этого он оценивает зависимость эффективности ее функционирования - от одного или нескольких показателей.

Предположим, что методами теории распознавания образов определены контролируемые параметры, содержащие информацию об уровне работоспособности и надежности рассматриваемой простой системы. Скалярный интегральный показатель этого уровня формально определяет случайный процесс, который описывает эволюцию надежности простой системы. Обозначим этот процесс через $X(t)$, $t \in T$, T - рассматриваемый интервал времени. Не уменьшая общности, можно считать, что множество состояний этого процесса $E = [0,1]$. Положим, что состоянию $x=0$ - соответствует новая система с минимальной вероятностью отказа и максимальной производительностью. Состоянию $x=1$ - полностью изношенная система с единичной вероятностью отказа на любом интервале времени. Состояние системы определяется степенью ее износа, поэтому траектории процесса $X(t)$ монотонно не убывают и приближаются к единице при неограниченном возрастании t .

Не уменьшая общности, можно считать, что траектории процесса имеют следующий вид:

$$x_t = x + (1-x) \frac{\gamma t}{\gamma + 1}, \quad t \geq 0, \quad \gamma \in [0, \infty),$$

где: x - начальное состояние, значение γ определяет траекторию процесса.

Обозначим плотность распределения вероятностей на множестве траекторий процесса через $f_\gamma(s|x)$, $s \in [0, \infty)$, x - начальное состояние.

Поддержание уровня надежности и работоспособности системы на приемлемом уровне на практике осуществляется с помощью регулярно проводимых профилактических обслуживаний и ремонтов. Примем этот подход при построении модели. Далее для удобства профилактические обслуживания и ремонты будем называть управлениями. Управления различаются по объему обновления системы, необходимости проведения восстановительных работ после отказа, по стоимости. Обозначим через Y конечное множество всех возможных управлений.

Пусть в момент контроля наблюдалось состояние $x \in E$. Применение управления $y \in Y$ в этом состоянии приводит к переходу процесса в новое состояние $z \in [0, x] \subset E$ и определяет величину среднего дохода $w(x, y)$ от эксплуатации системы на периоде до следующего момента контроля. Эта

величина кроме прибыли учитывает стоимость управления и простоя системы при реализации управления. Плотность распределения вероятностей состояния z сосредоточена на интервале $[0, x]$. Обозначим эту плотность через $f_\gamma(s|x)$, $s \in [0, x]$. Величина “обновления” системы $\theta = x - z$.

Обозначим через ξ случайное время, которое проходит от начала траектории процесса до отказа системы. Пусть x - начало траектории. Плотность распределения вероятностей до отказа системы обозначим через $f_\xi(t|x, \gamma)$, $t \geq 0$, $x \in E$, $\gamma \in [0, \infty)$. Известно [3], что нестареющие системы имеют экспоненциальный тип распределения времени до отказа, а стареющие – как правило, аппроксимируется распределением Вейбулла. Интервал времени ζ между двумя последовательными моментами контроля назовем реальным периодом. Положим $\zeta = \min(\xi, \tau)$, где τ - заданный планируемый детерминированный период контроля. Заметим, что период ζ случаен и его распределение зависит от траектории процесса.

Для оптимизации правила выбора управлений в моменты контроля выберем модель марковского процесса принятия решений [4]. Марковский процесс принятия решений определяется набором следующих объектов: $\{E, Y, Q, W, \pi\}$, где E - конечное множество состояний, Y - конечное множество управлений, Q - переходная функция, заданная на множестве $E \times E$, W - функция непосредственных доходов, заданная на $E \times Y$, π - стратегия управления, определяющая правило выбора управлений в каждый момент контроля. Все эти объекты будут ниже определены.

Построенный случайный процесс восстановления не является марковским. Однако легко определить вложенную марковскую цепь $Z(t)$, выделив состояния исходного процесса в моменты времени перед применением управлений. Полученная марковская цепь содержит всю необходимую информацию для решения оптимизационной задачи.

Выбранный подход требует проведения дискретизации множества E состояний процесса. Будем допускать, что в момент отказа множество допустимых управлений Y_1 не обязательно совпадает со всем множеством Y . Это потребует формально различать состояния, в котором произошел отказ и рабочие состояния. Подмножеству $I_k = \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) \subset E$ поставим в соответствие состояние x_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$. Если в соответствующем подмножестве I_k отказ системы не произошел, то считаем, что элемент $x_k \in E_0$, иначе считаем, что $x_k \in E_1$. Каждое из полученных множеств E_0 и E_1 составлено из N элементов. Обозначим $\hat{E} = E_0 \cup E_1$. Множества допустимых управлений Y_0 и Y_1 в состояниях E_0 и E_1 , вообще говоря, не совпадают. Не

уменьшая общности можно считать, что они не пересекаются, $Y = Y_0 \cup Y_1$, $Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$.

Для построения переходной функции вложенной марковской цепи введем необходимые определения и обозначения. Пусть в начале периода в исходном процессе $X(t)$ наблюдалось состояние $x_i \in \hat{E}$. Применение управления $u \in Y$ в состоянии x_i приведет при необходимости к восстановлению системы из отказа, если $x_i \in E_1$, и затем к улучшению состояния системы за счет перехода процесса в $x_k \in E_0$. Это состояние случайно и имеет плотность распределения $f_y(s|x_i)$. Поэтому положим, что вероятность перехода процесса $Z(t)$ из состояния x_i в состояние x_k под действием управления u происходит с

вероятностью $P_y(x_k|x_i) = \frac{\frac{i-k}{N}}{\frac{i-k-1}{N}} \int f_y(s|x_i) ds$ для $k < i$. В остальных случаях

положим: $P_y(x_0|x_0) = 1$, $P_y(x_k|x_i) = 0$, $k \geq i$, $k \neq 0$.

Время реализации управления, в течение которого подсистема простаивает, обозначим через τ_y .

Эволюция процесса $X(t)$ происходит по некоторой траектории, определяемой параметром γ . Положим, что все траектории, начинающиеся в состоянии x_k , приводящие исходный процесс в момент времени t в подмножество $\left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right) \subset E$ определяет переход вложенной цепи $Z(t)$ из состояния x_k в состояние x_j . Если $f_\gamma(s|x_k)$ - плотность распределения вероятностей на множестве траекторий и $f_\xi(t|x_k, \gamma)$ - плотность распределения вероятностей времени до отказа для траектории с параметром γ , то вероятность перехода процесса $Z(t)$ из состояния $x_k \in E_0$ через плановый период τ в состояние x_j равна

$$P_\eta(x_j|x_k) = \int_{\frac{j-k}{\tau(N-j)}}^{\frac{j-k+1}{\tau(N-j-1)}} \int f_\gamma(s|x_k) f_\xi(t|x_k, \gamma) ds dt, \quad j \geq k, x_j \in E_0.$$

Вероятность перехода процесса $Z(t)$ из состояния $x_k \in E_0$ в состояние $x_j \in E_1$ в момент отказа равна

$$P_{\eta}(x_j|x_k) = \int_0^{\tau} \int_{\frac{j-k}{t(N-j)}}^{\frac{j-k+1}{t(N-j-1)}} f_{\gamma}(s|x_k) f_{\xi}(t|x_k, \gamma) ds dt, \quad j \geq k, \quad x_j \in E_1.$$

Зафіксуємо стан $x_i \in \hat{E}$ в момент контролю перед застосуванням управління і стан в наступний момент контролю $x_j \in \hat{E}$. Перехідна ймовірність $x_i \rightarrow x_j$ за період ζ може бути обчислена за формулою

$$Q(x_j|x_i, y) = \sum_{k=0}^{\min(i, j)} P_y(x_k|x_i) P_{\eta}(x_j|x_k).$$

Отобразимо $g: \hat{E} \rightarrow Y$ назовемо розв'язуючою функцією. Розв'язуючою функцією g поставимо в відповідь матрицю перехідних ймовірностей $Q(g)$ з елементами $Q(x_j|x_i, g(x_i))$. Ця матриця має $2N$ рядків і $2N$ стовпців.

Розділимо її на 4 рівні підматриці розмірності $N \times N$: $\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$. Елемент

$Q(x_j|x_i, g(x_i))$ підматриці I_{11} визначає ймовірність переходу з $x_i \in E_0$ в $x_j \in E_0$, підматриці I_{12} визначає ймовірність переходу з $x_i \in E_0$ в $x_j \in E_1$, підматриці I_{21} визначає ймовірність переходу з $x_i \in E_1$ в $x_j \in E_0$, підматриці I_{22} визначає ймовірність переходу з $x_i \in E_1$ в $x_j \in E_1$. Послідовність $\pi = (g_0, g_1, \dots)$ розв'язуючих функцій назовемо стратегією. Стратегію $\pi = g^{(\infty)} = (g, g, \dots)$ назовемо стаціонарною. В наступному стаціонарну стратегію $g^{(\infty)}$ будемо позначати також як і розв'язуючу функцію через g .

З кожної розв'язуючої функції g пов'язаний вектор-стовпець безпосередніх доходів $W(g)$ з компонентами $W(x_i, g(x_i))$, де першим N компонентам відповідають стани з E_0 і наступним N компонентам – стани з E_1 .

Компоненти вектора W можна обчислити за формулою:

$$W(x_i, y) = \frac{1}{\tau + \tau_y} \left\{ \int_0^{x_i} \int_0^\tau \int_0^\tau v \left(x_k + (1-x_k) \frac{st}{st+1} \right) f_\gamma(s|x_k) f_\xi(t|x_k, s) dt ds f_y(x_k|x_i) dx_k + \right. \\ \left. + \int_0^{x_i} \int_0^\tau \int_0^\tau v \left(x_k + (1-x_k) \frac{s\tau}{s\tau+1} \right) f_\gamma(s|x_k) f_\xi(t|x_k, s) dt ds f_y(x_k|x_i) dx_k \right\}.$$

В правой части последней формулы используются значения уровня состояния из $[0,1]$. Например, состоянию x_i соответствует уровень $\frac{i}{N}$.

Стационарной стратегии $\pi = g^{(\infty)}$ поставим в соответствие вектор $\varphi(\pi)$, компоненты которого определяют величину среднего дохода в единицу времени, зависящего, в общем случае, от начального состояния

$$\varphi(\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(g)W(g).$$

Далее считаем, что марковская цепь $Z(t)$ регулярна [4] для любой стационарной стратегии π . Известно [4], что в этом случае вектор $\varphi(\pi)$ имеет равные по величине компоненты.

Стратегия π^* называется оптимальной, если для любой стратегии π выполнено неравенство $\varphi(\pi^*) \geq \varphi(\pi)$. На практике чаще используется ε -оптимальная стратегия. Стратегия π_ε называется ε -оптимальной, если для любой стратегии π выполнено неравенство $\varphi(\pi) - \varphi(\pi_\varepsilon) \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

3. Метод оптимизации простой системы.

Рассмотрим метод оптимизации, основанный на принципе сжатых отображений [4,5]. Пусть заданы все элементы марковского процесса принятия решений. На множестве векторов V , размерность которых совпадает с количеством состояний, введем полунорму равенством $\|v\|_p = \max_i v_i - \min_i v_i$, где v_i - i -я компонента вектора v . Пусть $M = \{v : \|v\|_p = 0\}$. Тогда на факторпространстве $V' = V/M$ определенная выше полунорма является нормой [5]. Введем на V следующие операторы.

$$F(g)v = W(g) + Q(g)v, \\ Uv = \max_{g \in G} F(g)v.$$

Здесь G - множество всех решающих функций.

В условиях сделанных предположений о процессе $Z(t)$ оператор U на V' является сжимающим [4,5]. Это свойство положено в основу рекуррентного метода оптимизации стратегии управления [4]. Правило остановки алгоритма определяет следующее утверждение.

Утверждение 1[6]. Пусть $v \in V'$, $\|Uv - v\| = \varepsilon$ и $Uv = F(g)v$. Тогда

1. Стратегия $\pi = g^{(\infty)}$ является ε -оптимальной.
2. $\min_x (Uv - v)(x) \leq \varphi^* \leq \max_x (Uv - v)(x)$,

где φ^* - величина среднего дохода в единицу времени, которая соответствует оптимальной стратегии.

Алгоритм нахождения ε -оптимальной стратегии состоит в выполнении следующих действий.

1. Задать $\varepsilon > 0$.
2. Выбрать произвольно вектор $v_0 \in V'$.
 k -ый шаг алгоритма.
3. Вычислить $v_k = Uv_{k-1} = F(g_k)v_{k-1}$, $v_k \in V'$.
4. Проверить неравенство $\|v_k - v_{k-1}\| < \varepsilon$.

Если оно выполнено, то стратегия $\pi = g_k^{(\infty)}$ является ε -оптимальной.

Если не выполнено, то выполнить $k + 1$ -й шаг алгоритма.

За конечное число шагов будет достигнута ε -оптимальная стратегия.

Замечание. Для определенности удобно выбирать из класса смежности фактор-пространства V' представителя v_k с нулевой первой компонентой.

4. Метод оптимизации сложной системы.

Пусть сложная система состоит из L простых подсистем. Подсистемы независимы друг от друга в смысле надежности и функционируют для достижения общей цели. Система контролируется через равные промежутки времени (плановый период контроля). Любая из подсистем может отказать до момента планового контроля. Отказавшая подсистема простаивает до момента очередного контроля. В момент контроля, в зависимости от наблюдаемого состояния, стратегия определяет управление для применения в каждой подсистеме. Задача состоит в оптимизации периода планового контроля и стратегии управления каждой подсистемой.

Введем следующие обозначения для i -ой подсистемы, $i = 1, \dots, L$. Положим, что для каждого шага алгоритма k , $k = 0, 1, 2, \dots$, и параметра p , $p = 0, 1, 2, \dots$, вектор $v_{k,p}^{(i)}$ - есть некоторый представитель класса смежности из V' с нулевой

первой компонентой. Положим, далее, для $k=1,2,\dots$ $v_{k,0}^{(i)} = v_{k-1,p}^{(i)}$, и для $k=0,1,2,\dots$ $v_{k,1}^{(i)} = Uv_{k,0}^{(i)}$, $v_{k,2}^{(i)} = Uv_{k,1}^{(i)}$, ..., $v_{k,p}^{(i)} = Uv_{k,p-1}^{(i)}$.

Операторы U и F для фиксированного значения τ обозначим через $U^{(\tau)}$ и $F^{(\tau)}$. Пусть $U^{(\tau)}v_{k,p}^{(i)} = F^{(\tau)}(g_k^{(i)})v_{k,p}^{(i)}$,

$$\varphi_{k,\max}^{(i)}(\tau) = \max_x \left((U^{(\tau)}v_{k,p}^{(i)})(x) - v_{k,p}^{(i)}(x) \right).$$

Длину интервала I будем обозначать через $\Delta(I)$.

Рассмотрим один из возможных методов оптимизации периода контроля сложной системы и стратегии управления каждой подсистемой. Метод будет основан на последовательном вычислении векторов $v_{k,p}^{(i)}$, $k=0,1,2,\dots$, для каждой подсистемы $i=1,\dots,L$ [4].

Пусть (a,b) - интервал возможных значений периода контроля сложной системы. Его следует выбрать исходя из экспертных суждений. Обозначим $\delta = \frac{1}{4}(b-a)$. Выберем для проверки следующие пять значений периода: $\tau_j = a + (j-1)\delta$, $j=1,\dots,4$, $\tau_5 = b$. Множество значений τ для анализа на k -м шаге алгоритма обозначим через T_k , в частности, $T_1 = \{\tau_j, j=1,\dots,5\}$. Будем предполагать, что минимальное значение, на которое можно изменить величину планируемого периода, равно δ_0 .

Предлагается следующий метод оптимизации, основанный на принципе сжатых отображений [4] с использованием утверждения 1.

Выберем точность решения задачи $\varepsilon > 0$.

Для каждого $i=1,\dots,L$ положим $v_{0,0}^{(i)}(\tau)$ равным нулевому вектору.

Первый шаг метода ($k=1$).

Положим $p=1$. Для каждого $\tau_j \in T_1$, вычислим последовательно $v_{1,1}^{(i)}(\tau_j) = U^{(\tau_j)}v_{0,0}^{(i)}(\tau_j) = F^{(\tau_j)}(g_1^{(i)})v_{0,0}^{(i)}(\tau_j)$, $\varphi_{1,\min}^{(i)}(\tau_j)$, $\varphi_{1,\max}^{(i)}(\tau_j)$. Положим $\varphi_{1,\min}(\tau_j) = \sum_{i=1}^L \varphi_{1,\min}^{(i)}(\tau_j)$, $\varphi_{1,\max}(\tau_j) = \sum_{i=1}^L \varphi_{1,\max}^{(i)}(\tau_j)$ и образуем интервалы $(\varphi_{1,\min}(\tau_j), \varphi_{1,\max}(\tau_j))$ для каждого $\tau_j \in T_1$. Выберем период τ_l из условия $\varphi_{1,\max}(\tau_l) = \max_j \varphi_{1,\max}(\tau_j)$. Сформируем множество значений периодов T_2 для анализа на втором шаге алгоритма. Для каждого $\tau_j \in T_1$ проверим условие:

$$(\varphi_{1,\min}(\tau_j), \varphi_{1,\max}(\tau_j)) \cap (\varphi_{1,\min}(\tau_l), \varphi_{1,\max}(\tau_l)) \neq \emptyset. \quad (4.1)$$

Если оно выполнено и τ_j не равно a или b , то значения $\tau_j, \tau_j - \frac{\delta}{2}, \tau_j + \frac{\delta}{2}$ включаются в множество T_2 . Если для τ_j выполнено условие (4.1) и $\tau_j = a$, то значения $\tau_j, \tau_j + \frac{\delta}{2}$ включаются в T_2 , а если выполнено (4.1) и $\tau_j = b$, то в T_2 включаются $\tau_j, \tau_j - \frac{\delta}{2}$. Все значения периодов в T_2 должны быть различными. Если некоторое значение периода встречается дважды, то одно из них следует исключить.

k-й шаг метода.

Положим $p = k$. Для каждого $\tau_j \in T_k$, вычислим последовательно $v_{k,1}^{(i)}(\tau_j) = U^{(\tau_j)} v_{k,0}^{(i)}(\tau_j), \dots, v_{k,p}^{(i)}(\tau_j) = U^{(\tau_j)} v_{k,p-1}^{(i)}(\tau_j) = F^{(\tau_j)}(g_k^{(i)}) v_{k,p-1}^{(i)}(\tau_j), \varphi_{k,\min}^{(i)}(\tau_j), \varphi_{k,\max}^{(i)}(\tau_j)$. Положим $\varphi_{k,\min}(\tau_j) = \sum_{i=1}^L \varphi_{k,\min}^{(i)}(\tau_j), \varphi_{k,\max}(\tau_j) = \sum_{i=1}^L \varphi_{k,\max}^{(i)}(\tau_j)$ и образуем интервалы $(\varphi_{k,\min}(\tau_j), \varphi_{k,\max}(\tau_j))$ для каждого $\tau_j \in T_k$. Выберем период τ_l из условия $\varphi_{k,\max}(\tau_l) = \max_j (\varphi_{k,\max}(\tau_j))$. Сформируем множество T_{k+1} значений периода. Для каждого $\tau_j \in T_k$ проверим условие:

$$(\varphi_{k,\min}(\tau_j), \varphi_{k,\max}(\tau_j)) \cap (\varphi_{k,\min}(\tau_l), \varphi_{k,\max}(\tau_l)) \neq \emptyset. \quad (4.2)$$

Если оно выполнено и τ_j не равно a или b , то значения $\tau_j, \tau_j - \frac{\delta}{k}, \tau_j + \frac{\delta}{k}$ включаются в множество T_{k+1} . Если для τ_j выполнено условие (4.2) и $\tau_j = a$, то значения $\tau_j, \tau_j + \frac{\delta}{k}$ включаются в T_{k+1} , а если выполнено (4.2) и $\tau_j = b$, то в T_{k+1} включаются $\tau_j, \tau_j - \frac{\delta}{k}$. Множество T_{k+1} не пусто, оно обязательно содержит элемент τ_l . Пусть Q_k - множество элементов T_{k+1} , для которых выполнено условие (4.2). Обозначим интервал $I_k = \bigcup_{\tau_j \in Q_k} (\varphi_{k,\min}(\tau_j), \varphi_{k,\max}(\tau_j))$.

Длина этого интервала $\Delta(I_k)$. Если $\Delta(I_k) < \varepsilon$ и $\frac{\delta}{k} < \delta_0$, то цель достигнута, любой планируемый период $\tau_j \in Q_k$ и стратегии управления подсистемами $g_k^{(i)}$, $i = 1, \dots, L$, обеспечивают ε -оптимальную стратегию управления сложной системой.

В противном случае выполнить $(k+1)$ -й шаг.

За конечное число шагов будет достигнута ε -оптимальная стратегия управления сложной системой. Заметим, что, вообще говоря, при увеличении δ_0 необходимое число шагов уменьшается.

5. Заключение.

Рассмотренный метод моделирования стареющей технической системы “по состоянию” может обеспечить выбор существенно более эффективной стратегии управления, чем обычно применяемый для этих целей метод моделирования “по времени”. Применение стратегии управления, реализация которой учитывает состояние системы, позволяет поддерживать оптимальный уровень работоспособности конкретной системы, а не некоторой усредненной, построенной в модели “по времени”.

Модель сложной системы, предложенная выше, основывается на моделях простых подсистем. Простой системой считаем такую, надежность и работоспособность которой можно определить скалярной величиной. Считать систему простой или сложной определяет аналитик, оценивая зависимость ее надежности и работоспособности от одного или нескольких интегральных показателей. Подробное построение модели простой системы, основанной на состоянии, приведено в [1,2].

При построении сложной системы было предположено, что она составлена из простых подсистем, работа которых направлена на достижение общей цели. Система контролируется через заданный период времени для оценки состояния каждой подсистемы. В зависимости от наблюдаемого состояния имеющаяся стратегия управления определяет управляющее воздействие, направленное на обновление подсистемы и, при необходимости, на восстановление ее из отказа. Допускается, что любая подсистема может отказать в любой момент времени и простаивать до момента контроля. Отказ любой подсистемы не влияет на вероятности отказов других подсистем. Целью моделирования является оптимизация планового периода контроля сложной системы и стратегий управления каждой простой подсистемой. При построении модели сложной системы не учитывалось такое маловероятное событие как отказ всех подсистем до момента планового контроля. Перенос для такого случая момента контроля в момент отказа всех подсистем не даст заметного выигрыша в оптимальности, но заметно усложнит модель. Заметим, что при необходимости такой перенос момента контроля в модели можно учесть без принципиальных трудностей.

Предложенный метод оптимизации позволяет найти плановый период контроля и стратегии управления подсистемами, которые обеспечивают ε -оптимальность управления всей сложной системой. Следует заметить, что метод предполагает выполнение вогнутости среднего дохода φ от периода τ . Обычно это условие выполнено в реальных системах. В сомнительных случаях метод необходимо дополнить очевидными изменениями в правило формирования множеств T_k .

Можно предположить, что в реальных условиях статистической информации о поведении простых подсистем может быть недостаточно, либо она может отсутствовать. В этом случае, при построении моделей простых подсистем,

можно предложить байесовский подход в статистике для оценки вероятностных распределений в процессе наблюдений за состояниями подсистем [7,8,9].

Следующим шагом в обобщении модели сложной системы можно считать наличие и учет зависимости в смысле надежности каждой подсистемы от некоторых других подсистем. Эти соединения могут быть следующих видов: простое (последовательное), резервирование (параллельное) и смешанное [3]. Допускается, что все эти три вида могут быть представлены в одной сложной системе. В этом случае в модели следует учесть возможность отказа всей системы до момента контроля, так как, вообще говоря, может существовать одна подсистема, вероятность отказа которой не мала, но она приводит к отказу всей сложной системы. Цель моделирования такой системы может быть той же, что и в рассмотренном случае, однако сама модель будет существенно сложнее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подцыкин Н. С. Математическая модель надежности восстанавливаемой технической системы. // Автоматизовані системи управління та прилади автоматики, вип. 149, 2009р., с. 4-8.
2. Подцыкин Н. С. Дискретная модель надежности восстанавливаемой системы. Автоматизовані системи управління та прилади автоматики, вип. 129, 2004 р., с.14-18.
3. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М.: Книжный дом Либроком, 2013. – 584с.
4. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. – М.: Наука, 1977. – 175с.
5. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. – 443с.
6. Подцыкин Н. С. Оптимизация периода наблюдений в марковском процессе принятия решений. Вісник ХНУ, №629, Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління", Випуск 3, Харків, 2004., с.25-32.
7. Подцыкин Н. С. Адаптивная модель надежности и работоспособности технической системы. // Автоматизовані системи управління та прилади автоматики, вип. 150, 2010р., с.54-60.
8. Горелик А. Д., Скрипкин В.А. Методы распознавания, М.: Высшая школа, 2004. – 262с.
9. Н.С. Подцыкин Метод оптимизации надежности технической системы в условиях ограниченной информации // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. АСУ", Харків, 2013, № 1089, с.134-144.

УДК 629.439

Моделирование процесса тяги магнитолевитирующего поезда

В. А. Поляков, Н. М. Хачапуридзе

Институт транспортных систем и технологий НАН Украины, Украина

Моделируется динамика процесса тяги магнитолевитирующего поезда. Проанализированы свойства имеющихся версий модели этого процесса. Синтезирована гибридная холистическая парадигма, ассимилирующая преимущества традиционных подходов, но свободная от их дефектов. Построена версия модели, свободная от недостатков её предыдущих версий. Приведен пример использования созданных парадигмы и модели. Их работоспособность подтверждена результатами анализа этого примера.

Ключевые слова: магнитолевитирующий поезд, линейный синхронный двигатель, реализация тяги, гибридная холистическая парадигма исследования, математическая модель.

Модельюється динаміка процесу тяги магнітолевітуючого поїзда. Проаналізовано властивості наявних версій моделі цього процесу. Синтезовано гібридну холистичну парадигму, що асимілює переваги традиційних підходів і не має їхніх дефектів. Побудовано версію моделі, вільну від недоліків її попередніх версій. Наведено приклад використання створених парадигми і моделі. Їхня працездатність підтверджена результатами аналізу цього прикладу.

Ключові слова: магнітолевітуючий поїзд, лінійний синхронний двигун, реалізація тяги, гібридна холистична парадигма дослідження, математична модель.

Dynamics of the traction process for a magnetically levitated train is under modeling. The properties of the existing versions of this process model are analyzed. A hybrid holistic paradigm, which assimilates the advantages of traditional approaches, but is free from their defects, has been synthesized. The version of the model is constructed, from which the drawbacks of previous versions are eliminated. The example of created paradigm and model using is given. Their operability has been confirmed by the results of this example analysis.

Keywords: magnetically levitated train, linear synchronous motor, traction realization, hybrid holistic research paradigm, mathematical model.

Введение в проблему

Во многих случаях для целей тяги магнитолевитирующих поездов (МЛП) целесообразно использовать линейные синхронные двигатели (ЛСД) [1, 12, 13]. Процессы, протекающие в их различных элементах, взаимосвязаны и являются частями единого суперпроцесса электромагнитно-механического энергопреобразования. Существенная сложность таких процессов побуждает исследователей к поиску путей сепаратного изучения их отдельных компонентов, ключевым из которых является электромагнитный. Его составляющие порознь с успехом могут изучаться [2, 14, 15] в рамках теорий электрических цепей, либо электромагнитного поля. Поэтому, различные версии математической модели (ММ) процесса тяги (ПТ) ЛСД МЛП строились [3, 4, 16] исходя из указанных автономных парадигмам его моделирования.

Анализ свойств имеющихся версий ММ ПТ ЛСД МЛП свидетельствует о том, что каждая из них обладает как преимуществами, так и недостатками. Версии модели, исходящие из теории электрических цепей, достаточно

функціональні. Но основным недостатком их уравнений является нестационарность коэффициентов, вызываемая переменностью значений взаимных индуктивностей контуров фаз якоря, как между собой, так и с контурами возбуждения, при изменении положения муфтера (подвижных частей ЛСД). Это снижает ценность версий, поскольку затрудняет моделирование [5]. Версии же модели, базирующиеся на теории поля, менее ресурсоёмки, однако и менее практичны – вследствие ограниченности их общности, вызываемой недостаточной адекватностью предположений построения этих версий.

Задача исследования

Изложенные соображения свидетельствуют об актуальности создания ММ ПТ ЛСД МЛП, ассимилирующей достоинства имеющихся версий такой модели, но свободной от их недостатков [5, 6]. Синтез такой модели является основной задачей настоящей работы.

Методика исследования

Тяга ЛСД является результатом взаимодействия, неподвижных друг относительно друга, магнитных полей токов его индуктора и якоря. Поэтому, при построении искомой ММ ПТ, в качестве его паттерна должен быть принят элементарный акт такого взаимодействия, который может быть описан выражением закона Ампера [7]:

$$f_{\lambda\chi} = l_{\lambda\chi} \cdot i^{\lambda} \cdot B_{\lambda\chi} \cdot \sin \alpha_{\lambda\chi}, \quad (1)$$

где $f_{\lambda\chi}$ – сила, взаимодействия полей, создаваемых токами, текущими в цепях χ -го прямолинейного элемента λ -го контура индуктора двигателя и его якоря; $l_{\lambda\chi}, i^{\lambda}, B_{\lambda\chi}, \alpha_{\lambda\chi}$ – длина упомянутого элемента, ток в нём, индукция (условно однородного – в пределах элемента) магнитного поля, в котором элемент находится, а также угол между \vec{i}^{λ} и $\vec{B}_{\lambda\chi}$.

Расчётные схемы обмоток возбуждения и якоря двигателя приняты, соответственно, в виде набора гальванически не связанных токопроводящих прямоугольных рамок, соответствующих контурам криомодулей, и трёхфазной электрической сети, каждой фазе которой соответствует отдельный контур. Тогда, в произвольный момент времени, тяга двигателя определима как векторная сумма величин $\vec{f}_{\lambda\chi} \forall \lambda \in [1, N], \chi \in [1, 4]$, каждая из которых, – это результат взаимодействия поля тока в одном из упомянутых прямолинейных элементов контуров возбуждения с полем, создаваемым токами якорной обмотке. В последнем выражении, N – число контуров возбуждения двигателя.

Электродинамика двигателя может быть описана уравнениями второго закона Кирхгофа [7]. Подсистема “контур возбуждения – якорная обмотка”, как правило, вырождена [8] – ёмкостные показатели её элементов пренебрежимо низки. Потому, в инерциальной системе отсчёта $Qi^{\nu} \forall \nu \in [A, B, C, M]$, указанным уравнениям может быть придан вид [7]:

$$u_{\rho} = L_{\rho} \cdot \frac{d}{dt} i^{\rho} + L_{\rho\mu} \cdot \frac{d}{dt} i^{\mu} + r_{\rho} \cdot i^{\rho} \quad \forall \rho, \mu \in [A, B, C, M], \quad (2)$$

где $u_{\rho}, L_{\rho}, L_{\rho\mu}, r_{\rho} \forall \rho, \mu \in [A, B, C, M]$ – электродвижущие силы (э. д. с.) источников, собственные и взаимные индуктивности, а также омические сопротивления элементов описываемой парциальной подсистемы;

$i^{\rho} \forall \rho \in [A, B, C, M]$ – токи в контурах якоря и возбуждения;

A, B, C, M – индексы, соответствующие этим контурам;

t – текущее время.

Поскольку муфта ЛСД движется относительно его статора, то многие из величин $L_{\rho\mu} \forall \rho, \mu \in [A, B, C, M]$ имеют переменные во времени значения. Это, в свою очередь, приводит к нестационарности коэффициентов уравнений (2) и, как отмечено, существенно снижает практическую ценность версии модели. С целью устранения указанного недостатка, ПТ ЛСД следует рассматривать относительно координатной системы, в которой обмотки двигателя условно взаимно неподвижны. В таком качестве, удобнее всего принять [5] отсчётную систему $C_{\alpha} \eta^{\lambda} \forall \lambda \in [\overline{1,3}]$, жёстко связанную с α -тым контуром обмотки возбуждения двигателя. Инерциальной $C_{\alpha} \eta^{\lambda} \forall \lambda \in [\overline{1,3}]$, в общем случае, не является. В то же время, весьма желательно [9], чтобы уравнения, описывающие динамику электрической подсистемы ЛСД в координатах $\eta^{\lambda} \forall \lambda \in [\overline{1,3}]$, имели тензорный характер. Такие уравнения могут быть получены [10], из равенств типа (2), путём замены в них локальных производных $\frac{d}{dt}$ абсолютными $\frac{D}{dt}$, а также перехода в этих равенствах к координатам $\eta^{\lambda} \forall \lambda \in [\overline{1,3}]$. По отношению к произвольной координате η^{β} , соотношение между упомянутыми производными, как известно, имеет вид [10]:

$$\frac{D}{dt} \eta^{\beta} = \frac{d}{dt} \eta^{\beta} + e_{\beta\kappa\nu} \cdot \omega_{\kappa} \cdot \eta^{\nu}, \quad (3)$$

где $e_{\beta\kappa\nu}, \omega_{\kappa}$ – символ Леви-Чивита, а также вектор угловой скорости вращения $C_{\alpha} \eta^{\lambda} \forall \lambda \in [\overline{1,3}]$.

После осуществления указанной замены производных, соотношения, полученные из (2), приобретают тензорный характер. Поэтому, в частности, их форма становится инвариантной по отношению к координатам, в которых они записаны. Переход же к координатам $\eta^{\lambda} \forall \lambda \in [\overline{1,3}]$ выполняется согласно выражениям:

$$\eta^\lambda = g_\rho^\lambda \cdot i^\rho \quad \forall \rho \in [A, B, C, M]; \lambda \in [\overline{1, 3}], \quad (4)$$

где g_ρ^λ – матрица преобразования координат:

$$g_\rho^\lambda = \frac{\partial \eta^\lambda}{\partial i^\rho} \quad \forall \rho \in [A, B, C, M]; \lambda \in [\overline{1, 3}]. \quad (5)$$

В свою очередь, выражения для связей вида

$$\eta^\lambda = \eta^\lambda(i^\rho) \quad \forall \rho \in [A, B, C, M]; \lambda \in [\overline{1, 3}] \quad (6)$$

могут быть получены исходя из того, что [5], в процессе описываемого координатного преобразования, одним из его инвариантов являются, в частности, амплитудные значения токов, протекающих в рассматриваемых контурах.

С помощью же матрицы

$$g_\lambda^\rho = \frac{\partial i^\rho}{\partial \eta^\lambda} = (g_\rho^\lambda)^T \quad \forall \rho \in [A, B, C, M]; \lambda \in [\overline{1, 3}], \quad (7)$$

осуществимо обратное преобразование

$$i^\rho = g_\lambda^\rho \cdot \eta^\lambda \quad \forall \rho \in [A, B, C, M]; \lambda \in [\overline{1, 3}]. \quad (8)$$

После описанных преобразований, уравнения (2) приобретают вид

$$\begin{aligned} u_\lambda = L_\lambda \cdot \left(\frac{d}{dt} \eta^\lambda + e_{\lambda\alpha\nu} \cdot \omega_\alpha \cdot \eta^\nu \right) + \\ + L_{\lambda\zeta} \cdot \left(\frac{d}{dt} \eta^\zeta + e_{\zeta\alpha\sigma} \cdot \omega_\alpha \cdot \eta^\sigma \right) + r_\lambda \cdot \eta^\lambda \\ \forall \lambda, \nu, \zeta, \sigma \in [\overline{1, 3}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, уравнения (9) имеют постоянные коэффициенты, являются тензорными и описывают электродинамику ЛСД в координатах $\eta^\lambda \quad \forall \lambda \in [\overline{1, 3}]$. После их (как правило – численного) разрешения относительно переменных $\eta^\lambda \quad \forall \lambda \in [\overline{1, 3}]$, последние, с использованием соотношений (8), могут быть преобразованы в координаты $i^\rho \quad \forall \rho \in [A, B, C, M]$, значения которых определяют реальные токи в контурах двигателя.

Магнитная цепь ЛСД предполагается ненасыщенной [3]. Поэтому она может считаться условно-линейной подсистемой и, следовательно, к ней применим принцип аддитивности. Исходя из этого, результирующее поле фазы якорной обмотки двигателя в любой точке геометрического пространства $O\Xi_\chi \quad \forall \chi \in [\overline{1, 3}]$, в котором реально движется муфтер относительно статора,

может описываться как сумма полей, создаваемых в этой точке отдельными катушками такой фазы:

$$B_{\alpha q} = B_{\alpha \kappa q} \cdot e^{\kappa}; e^{\kappa} = 1 \forall \kappa \in [\overline{1, n_p}], q \in [\overline{1, 3}], \quad (10)$$

где n_p – число прямоугольных катушек [1], включённых в каждую из фаз якоря; $B_{\alpha q}, B_{\alpha \kappa q} \forall \kappa \in [\overline{1, n_p}]; q \in [\overline{1, 3}]$ – пространственные компоненты индукции поля, создаваемого всей обмоткой фазы α якоря, а также её отдельными катушками в рассматриваемой точке этого пространства.

В свою очередь, значения величин $B_{\alpha \kappa q} \forall \kappa \in [\overline{1, n_p}]; q \in [\overline{1, 3}]$ определимы согласно выражениям [11]:

$$B_{\alpha \kappa 1} = -\frac{i^*}{4 \cdot \pi} \cdot \left\{ \left[F_{12}(k_1', \varphi', \eta) + F_{12}(k_3', \varphi', \eta) \right]_{\varphi_1' = x_0 - l}^{\varphi_2' = x_0 - l - d} - \right. \\ \left. - \left[F_{12}(k_2', \psi', \eta) + F_{12}(k_4', \psi', \eta) \right]_{\psi_1' = x_0 + l}^{\psi_2' = x_0 + l + d} \right\} \begin{cases} \eta_2 = z_0 - h \\ \eta_1 = z_0 + h \end{cases}; \\ B_{\alpha \kappa 2} = -\frac{i^*}{4 \cdot \pi} \cdot \left\{ \left[F_{12}(k_1, \varphi, \eta) + F_{12}(k_4, \varphi, \eta) \right]_{\varphi_1' = x_0 + l}^{\varphi_2' = x_0 + l + d} - \right. \\ \left. - \left[F_{12}(k_2, \psi, \eta) + F_{12}(k_3, \psi, \eta) \right]_{\psi_1 = y_0 + a}^{\psi_2 = y_0 + a + d} \right\} \begin{cases} \eta_2 = z_0 - h \\ \eta_1 = z_0 + h \end{cases}; \\ \left\{ F_{12}(k, \varphi, \eta) \right\}_{\eta_1 = z_0 + h}^{\eta_2 = z_0 - h} = \left\{ \eta \cdot \operatorname{arctg} \frac{k \cdot \varphi - \eta^2}{\eta \cdot \sqrt{(k + \varphi)^2 + \varphi^2 + \eta^2}} - \right. \\ \left. - \varphi \cdot \operatorname{arsh} \frac{k + \varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \eta^2}} - \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arsh} \frac{k + 2 \cdot \varphi}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot \eta^2}} \right\}_{\eta_1 = z_0 + h}^{\eta_2 = z_0 - h}; \\ B_{\alpha \kappa 3} = -\frac{i^*}{4 \cdot \pi} \cdot \left\{ \left[f_3^0(k_1, \varphi, \eta) + f_3^0(k_4, \varphi, \eta) \right]_{\varphi_1 = y_0 - a}^{\varphi_2 = y_0 - a - d} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left[f_3^0(k_2, \psi, \eta) + f_3^0(k_3, \psi, \eta) \right]_{\psi_1=y_0+a}^{\psi_2=y_0+a+d} + \\
& + \left[f_{31}(k_1', \varphi', \eta) + f_{31}(k_3', \varphi', \eta) \right]_{\varphi_1'=x_0-l}^{\varphi_2'=x_0-l-d} - \\
& - \left[f_{31}(k_2', \psi', \eta) + f_{31}(k_4', \psi', \eta) \right]_{\psi_1'=x_0+l}^{\psi_2'=x_0+l+d} \left. \begin{array}{l} \eta_2=z_0-h \\ \eta_1=z_0+h \end{array} \right\} \forall \kappa \in [1, n_p]
\end{aligned}$$

$$f_{31}(k, \varphi, \eta) = -\eta \cdot \operatorname{arsh} \frac{k + \varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \eta^2}} +$$

$$+ \varphi \cdot \operatorname{arctg} \frac{(k + \varphi) \cdot \eta}{\varphi \cdot \sqrt{(k + \varphi)^2 + \varphi^2 + \eta^2}};$$

$$f_{32}(k, \varphi, \eta) = \sqrt{2} \cdot \eta \cdot \operatorname{arsh} \frac{k + 2 \cdot \varphi}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot \eta^2}} -$$

$$- k \cdot \operatorname{arctg} \frac{(k + 2 \cdot \varphi) \cdot \eta}{k \cdot \sqrt{(k + \varphi)^2 + \varphi^2 + \eta^2}};$$

$$f_3^0(k, \varphi, \eta) = f_{31}(k, \varphi, \eta) + f_{32}(k, \varphi, \eta);$$

$$k_1' = -k_1 = [(y_0 - a) - (x_0 - l)];$$

$$k_2' = -k_2 = [(y_0 + a) - (x_0 + l)];$$

$$k_3' = k_3 = -[(y_0 + a) + (x_0 - l)];$$

$$k_4' = k_4 = -[(y_0 - a) + (x_0 + l)], \quad (11)$$

где i^* – плотность тока на единицу площади сечения обмотки катушки;

$2 \cdot h, d$ – высота и толщина её обмотки;

$2 \cdot l, 2 \cdot a$ – розміри її же внутрішнього пространства;

x_0, y_0, z_0 – координати точки пространства, в якій описується поле.

В вираженнях (11), крім того:

$$i^* = 0,5 \cdot i \cdot w \cdot (h \cdot d)^{(-1)}, \quad (12)$$

де w – число витків катушки.

Далі, в (12), замість i , послідовно підставляються значення фазових токів якоря $i^\rho \forall \rho \in [A, B, C]$ і, згідно (11) і (10), знаходяться компоненти $V_{\rho q} \forall \rho \in [A, B, C], q \in [\overline{1, 3}]$ індукції поля, створюваного кожним з них.

Пространство системи $O\Xi_\chi \forall \chi \in [\overline{1, 3}]$ – евклідово. Тому миттєве значення модуля вектора повної індукції поля, створюваного током ρ -ої фази якоря, може бути визначено вираженням

$$V_\rho = \sqrt{V_{\rho q}^{(2)} \cdot e^q}; \quad e^q = 1 \forall \rho \in [A, B, C], q \in [\overline{1, 3}]. \quad (13)$$

Кожне з значень V_α пропорційно породжує його i^α , змінюючись косинусоїдально. Тому індукція повного поля якоря в цілому змінюється [5] згідно закону

$$V_{res} = 1,5 \cdot V_{max} \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot t); \quad j^{(2)} = -1, \quad (14)$$

де V_{max}, ω – амплітуда і частота зміни індукції поля одного з токів $i^\rho \forall \rho \in [A, B, C]$.

Результат дослідження, верифікуючий його коректність

На основі синтезованої ММ ПТ ЛСД МЛП, була побудована відповідна комп'ютерна модель. В якості прикладу результатів функціонування останньої, на рис. 1 наведено отриману осцилограму сили тяги двигача в режимі розгону МЛП. Аналіз цього результату свідчить про спроможність моделей, а отже – об їх придатності, після верифікації і необхідної адаптації к вимогам конкретних практичних завдань, к використанню в процесі досліджень динаміки МЛП, оснащених ЛСД.

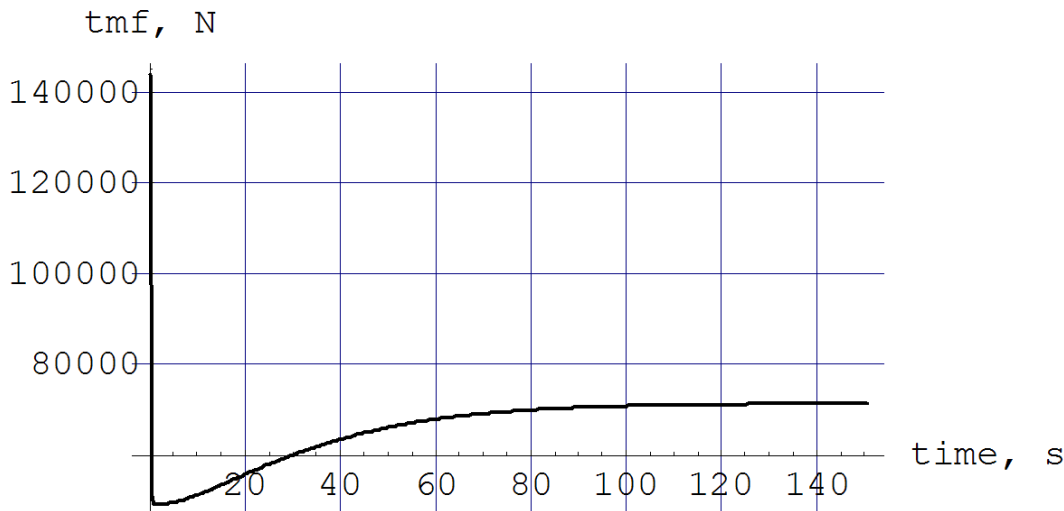


Рис. 1 Сила тяги ЛСД МЛП

Научная новизна и практическая значимость исследования

Научная новизна исследования усматривается в приоритетности создания интегративной холистической парадигмы, ассимилирующей преимущества теорий электрических цепей и магнитного поля, а также соответствующей версии модели РТ двигателя.

Практическая значимость создания указанных парадигмы и модели состоит, очевидно, в возможности существенного повышения эффективности динамических исследований МЛП, на фоне неповышения их ресурсоёмкости, при использовании в их процессе созданных парадигмы и модели.

Вывод

Создана версия ММ ПТ ЛСД МЛП, ассимилирующая достоинства версий модели, созданных в рамках автономных парадигм теорий цепей и поля, но свободная от недостатков таких версий. Этим исчерпывающе решена задача настоящей части исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Высокоскоростной магнитный транспорт с электродинамической левитацией / Дзензерский В. А., Омеляненко В. И., Васильев С. В., Матин В. И., Сергеев С. А. – К.: Наук. думка, 2001. – 479 с.
2. Вольдек А.И. Электрические машины. – Л.: Энергия, 1984 – 832 с.
3. Поляков В. А., Хачапуридзе Н. М. Динамика тяговой электромагнитной подсистемы магнитолевитирующего поезда // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління” – 2012. Вып. 19. № 1015. – С. 268 - 273.
4. Поляков В. А., Хачапуридзе Н. М. Динамика тяговой подсистемы магнитолевитирующего поезда (полевая парадигма исследования) //

- Науковий вісник Херсонської морської академії – 2013. – № 1 (8). С. 258 - 266.
5. Сипайлов Г. А., Кононенко Е. В., Хорьков К. А. Электрические машины (специальный курс) – М.: Высш. шк., 1987. – 287 с.
 6. Копылов И. П. Математическое моделирование электрических машин. – М.: Высш. шк., 2001. – 327 с.
 7. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. – М.: Высш. шк., 1996. – 578 с.
 8. Львович А. Ю. Электромеханические системы. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. – 296 с.
 9. Крон Г. Применение тензорного анализа в электротехнике. – М., Л.: Госэнергоиздат, 1955. – 275 с.
 10. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 644 с.
 11. Бирюков В. А. Магнитное поле прямоугольной катушки с током // Журнал технической физики. – 1961. – Т. XXXI, № 4. – С. 428 - 435.
 12. Azukizava T. Optimum linear synchronous motor design for high speed ground transportation // IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems. – 1983. – V. Pas-102, № 10. – P. 3306 - 3314.
 13. Fujiwara S. Superconducting maglev and its electromagnetic characteristics // SAE Technical Paper Series. – 1995. – SAE 95-1922. – P. 1 - 6.
 14. Lakhavani S. T., Davson G. E. Study of a liner synchronous motor for high speed transport applications // 34th Vehicular Technol. Conf. – Pittsburg, 1984. – P. 220 - 225.
 15. Matsuoka K. Multi-phase current-fed inverter-driven linear motor and its application to the guided ground transportation system // The Proc. IPEC. – Tokyo, 1990. – V. 1. – P. 604 – 611.
 16. Wang, Xudong, Yuan, Shiyang, Wang, Zhaoan Three Dimensional Electromagnetic Field Equations and General Problems with Definitive Solution in Linear Motor Anisotropic Media // Transacti. of China Electrotechn. Soc., Vol 21, No.6, 2006, pp. 59-64

CONTENTS

▪ I. A. Baranov	5
The method of constructing of Dirichlet boundary value problem basis for variational methods	
▪ A. A. Gourjii, G. J. F. van Heijst, L. Zannetti	16
Two-dimensional vortex pair interaction with the wedge	
▪ G. M. Dolya, O. S. Lytvynova	38
Modeling of speckle metrology technique of detecting the medium acoustic oscillations	
▪ A. A. Zastavenko, A. Yu. Pilipenko, M. A. Skulysh	47
Method of choosing a container for migration of virtual machine in the cloud data store	
▪ S. V. Kolosova, V. S. Lukhanin	59
On positive solutions of one problem with heterotone operator and the construction of successive approximations	
▪ B. V. Parshentsev, E. G. Tolstoluzhskaya	73
Analysis of decision trees methods	
▪ N. S. Podtcikin	82
The model of optimization of strategy of preventive maintenance of technical systems	
▪ V. A. Polyakov, N. M. Khachapuridze	94
Magnetically levitated train's traction process modeling	
CONTENTS	103

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 31

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О. О. Афанасьєва

Підписано до друку 31.10.2016 р.
Формат 70×108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. – 7,9.
Обл.– вид. арк. – 9,2.
Тираж 100 пр.
Ціна договірна

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна.
Видавництво

Надруковано: ХНУ імені В. Н. Каразіна
61022 м. Харків, майдан Свободи, 4,
тел.: 362-01-52
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09