

ISSN 2304–6201

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна



Серія

«Математичне моделювання.

Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління»

Випуск 30

Серія заснована 2003 р.

Харків
2016

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 8 від 24.06.2016 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),
д.ф.-м.н., академік НАН України, проф.,
ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна
Гандель Ю.В., д.ф.-м.н., проф., ФМІ
ХНУ імені В.Н. Каразіна
Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора),
д.т.н., проф. ФМІ ХНУ
імені В.Н. Каразіна
Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ
імені Б.І. Веркіна НАН України
Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна
Лазурик В.Т., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна
Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН
України, проф., фізико-енергетичний ф-т
ХНУ імені В.Н. Каразіна
Мищенко В.О. (заст. гол. редактора),
д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна
Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ
імені В. Н. Каразіна
Споров О.Є. (відповідальний секретар),
к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна
Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна
Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-
енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна
Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна
Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ
імені В.Н. Каразіна
Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний
технічний університет "ХПІ"
Стрельнікова О.О., д.т.н., проф. Ін-т
проблем машинобудування НАН України
Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра
прикладної інформатики, університет імені
Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)
Prof. **Harald Richter,** Dr.-Ing., Dr. rer. nat.
habil. Professor of Technical Informatics and
Computer Systems, Institute of Informatics,
Technical University of Clausthal, Germany
Prof. **Philippe Lahire,** Dr. habil., Professor of
computer science, Dep. of C. S., University of
Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6,
ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.
Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua .

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

© Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна, оформлення, 2016

ЗМІСТ

▪ D. A. Bulavin, E. V. Goncharenko, S. I. Shmatkov.	5
Structural model of the non-formal education system	
▪ А. Б. Брюховецкий, В. Е. Саваневич, С. В. Хламов.	14
Эвристический вычислительный метод обнаружения околонулевого видимого движения объектов на серии CCD-кадров	
▪ Н. В. Варламова, В. О. Мищенко.	27
Разнообразие личностных характеристик программистов как основа успешности программной диверсности	
▪ Я. П. Василенко, Л. П. Дмитроца, М. З. Олійник, М. В. Приймак.	36
Способи задання функцій зі змінним періодом та їх наближення	
▪ А. А. Гуржий, А. В. Шалденко.	48
Анализ вихрей Моффата внутри прямолинейного канала со вставками при малых числах Рейнольдса	
▪ V. T. Lazurik, G. F. Popov, Sawan Salah, Z. Zimek.	59
Methods of calculating the partial derivatives of the electron radiation dose measured with dosimetric wedge	
▪ Ю. В. Міхлін, К. Ю. Плаксіє.	69
Вимушені резонансні коливання дисипативної пружинно-маятникової системи	
▪ А. И. Силаков, М. Л. Угрюмов, А. С. Шмелев.	84
Моделирование технологических процессов и гидравлических сетей для обеспечения промышленной безопасности	
▪ А. В. Якунин.	93
Нестационарное течение в магистральном газопроводе при продольном сейсмическом воздействии	
▪ CONTENTS	109

Шановні читачі та автори цього збірника!

У зв'язку із завершенням підготовки останнього випуску 2015 р. редакційна колегія вважає за приємний обов'язок привітати Вас з успішною перереєстрацією нашого видання у Міністерстві юстиції та поділитися планами на наступний рік.

3 серпня 2015 р. за нашим збірником підтверджено його традиційну назву Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», але водночас його затверджено як самостійне університетське видання, яке не залежатиме надалі від свого материнського видання Вісника Харківського національного університету. Можна вважати це початком поступового руху до перетворення нашого періодичного видання в науковий журнал.

Таке перетворення не може відбутись без Вашої помочі, наші шановні читачі та автори!

Першою, хоча далеко не останньою вимогою до журналу є забезпечення 4-х повноцінних і своєчасно підготовлених випусків на рік. Чекатимемо на Вашу активну участь у формуванні та постійній підтримці відповідного портфелю редакції. Будь ласка, надсилайте Ваші власні статті та рекомендації до опублікування робіт Ваших колег та учнів!

Важливу роль у здійсненні наших планів відіграватиме зростання відсотку статей, що публікуються у збірнику англійською мовою. Надсилайте без вагань такі роботи до нашої редакції, якщо маєте впевненість не тільки в якості наукових результатів, але й готові до співробітництва в напрямку доведення тексту до якості, відповідної стандартам міжнародних видань. Зі свого боку редакційна колегія забезпечуватиме відповідну якість редагування всіх англійських анотацій та статей, написаних англійською мовою, виходячи протягом наступного року з того, що вони повинні складати до третини загального обсягу статей, які публікуватимуться.

Будемо також вдячні Вам, наші колеги і друзі, за пропозиції щодо можливої назви журналу (трьома мовами), на який у майбутньому має перетворитись наш збірник.

На завершення нагадаємо переважні наукові напрямки, за якими приймаються статті до нашого збірника. Фахові публікації у ньому повинні відповідати паспортам наступних спеціальностей (за номенклатурою, за якою зараз працюють в Україні спеціалізовані ради з захисту дисертацій):

з *фізико-математичних наук* – спеціальності:

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи,

01.02.05 – механіка рідини, газу та плазми,

01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем;

з *технічних наук* - спеціальності:

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи,

01.02.04 – механіка деформованого твердого тіла,

05.13.05 – комп'ютерні системи та компоненти,

05.13.06 – інформаційні технології,

05.13.21 – системи захисту інформації,

05.13.07 – автоматизація процесів керування.

З повагою, **Редакційна колегія.**

UDC 004.09

Structural model of the non-formal education system

D. A. Bulavin, E. V. Goncharenko, S. I. Shmatkov

V. N. Karazin Kharkov National University, Ukraine

The basic principles of creation of non-formal education systems are reviewed. Its structural model is proposed and grounded on the basis of the conducted analysis. Decomposition of the system structural model into the interconnected particular ones has been carried out. The basic interrelations between them are defined using the method of structural analysis. The conducted researches have allowed to allocate the purposes and problems of functioning for each structural element of the considered structure model.

Key words: *non-formal education system, information-communication technologies, structural model, decomposition.*

Рассмотрены основные принципы построения системы неформального образования. На основе проведенного анализа предложена и обоснована ее системная структурная модель. Проведена декомпозиция структурной модели на взаимосвязанные частные модели. С помощью метода структурного анализа определены основные взаимосвязи между ними. Проведенные исследования позволили выделить цели и задачи функционирования каждого структурного элемента рассматриваемой структурной модели.

Ключевые слова: *система неформального образования, подсистема, информационно-коммуникационные технологии, структурная модель, декомпозиция.*

Розглянуто основні принципи побудови системи неформальної освіти. На основі проведеного аналізу запропоновано і обґрунтовано її системна структурна модель. Проведена декомпозиція структурної моделі на взаємопов'язані приватні моделі. За допомогою методу структурного аналізу визначені основні взаємозв'язки між ними. Проведені дослідження дозволили виділити цілі та задачі функціонування кожного структурного елемента розглянутої структурної моделі.

Ключові слова: *система неформальної освіти, підсистема, інформаційно-комунікаційні технології, структурна модель, декомпозиція.*

1. Introduction

Currently, the society has entered a new phase of its development – the phase of global informatization.

Informatization is the process of society life-sustaining activity conversion based on continuous intensive use of reliable, comprehensive and timely knowledge in all key types of human activity, requiring creation of a system consisting of means for saving, storing, processing and transmitting information. [1]. Consequently, the information in this case is the most important public resource playing a leading role in education, economy and other fields.

Informatization of education must constitute an important part of the process of society informatization. Introduction of modern information technologies into the educational system will enhance the efficiency of the system and will ensure its full cycle of functionality. Ideas for creation and promotion of modern educational technologies, that are formed on the basis of the universal computerization and informatization of the educational system are determined by the following global trends [2]:

- development of the worldwide production infrastructure;
- informatization and automatization of all sectors;
- global changes in the occupational structure of society and in people's views regarding labor;
- informational integration of education into the world system.

Thus, the prospects of modern education are largely linked to the improvement of information and communication technologies, and to the creation of innovative teaching methods that are based on their implementation into one form of education – the non-formal education.

The aim of this research is the analysis of the basic principles of construction of the non-formal education system; justification of its structural system model, decomposition of system model into certain model subsystems and definition of processes that should be performed by each structural element.

2. Non-formal education system

The bill "About Amendments to Some Laws of Ukraine" dated 12.02.2015, has defined the traditional form of education and its two kinds: "non-formal" and "informal" (self-education) [4]. As a rule, formal education is organized in the classical form, with the use of information technologies to conduct classes traditionally as well as remotely. Non-formal education is independent of other educational programs and qualifications, i.e. it is an alternative or an addition to formal education, and should continue throughout trainee's career path.

Analyzing trends in the development of the information society, we shall note that non-formal education system can be characterized by the following key features:

1. Functioning in strong correlation with global information technologies development.
2. Tracking the opportunities and needs of each trainee due to his/her education individualization.
3. Focusing on results that will ensure high level of practical skills.
4. Creating of continuous education trends i.e. advanced training throughout one's life.

One more of the key features of non-formal education is its focus on practical applications. This pragmatic orientation of non-formal education and the opportunity to study remotely tends to attract adults rather than students of undergraduate age.

In this situation, education becomes individual-oriented, flexible and, most importantly, continuous. Educational activities of non-formal education are [3]:

- short-term group lessons;
- individual lessons with concentration on practical objectives;
- training courses.

Such educational activities are organized and conducted beyond the formal system of education using distant learning. The efficiency of this system, therefore, depends on the use of advanced information technologies.

The global objective for introduction of universal informatization into education is to improve its quality and ensure compliance with new requirements of the post-industrial society. Undoubtedly, such aim is multi-factorial and includes a plurality of sub-goals [5]:

- retraining learners for their effective employment within the information society;
- verification of quality of the education provided;
- expansion of the boundaries and the degree of access to education;
- informational integration of the non-formal education system into the world infrastructure.

In order to understand how informatization affects the entire system of non-formal education, it is necessary to develop its structural model and carry out decomposition of the model system into certain model subsystems and units.

3. Structural model of the non-formal education system and its decomposition.

A modern non-formal educational system, that is based on new information and communication technologies may include the following main interrelated subsystems: economic, pedagogical, technological, organizational, theoretical and methodological (Figure 1.) [1].

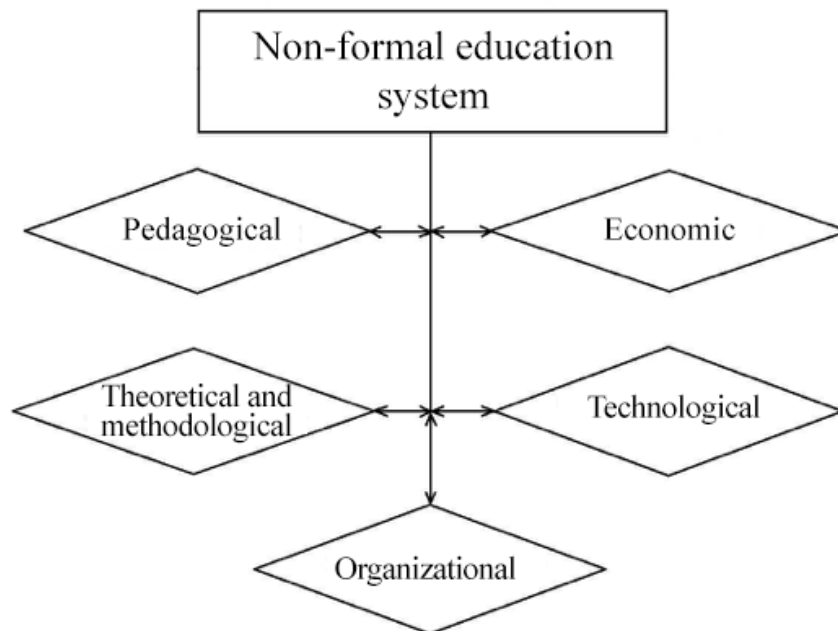


Fig.1. Structural model of the non-formal education system

Let's consider the subsystems included in the system of non-formal education, and formulate the main tasks solved by each subsystem.

The development of pedagogical subsystem can be divided into three generations. The first one is characterized by disciplinary-oriented approach where informational technologies of education are considered as a complete learning process based on the traditional content, forms and methods of teaching. It is supported by classical textbooks, problem-books and teaching editions. In this model, computer is used to represent acquired knowledge and to increase the control of its assimilation. An

important and distinctive feature of the traditional education system is its educational and disciplinary structure.

Thus, the first generation of information technologies proved to be unstable due to existing contradictions between the demands of traditional educational system and unused capacity of information systems.

The transitional approach belongs to the second generation. Here, educational information technologies are represented as contradictory educational compositions based on the traditional content, which, nevertheless, uses unsystematic combination of classic and advanced teaching forms and methods. It is supported by traditional textbooks, problem-books and teaching editions, as well as modern computer programs and educational environment, mainly oriented toward the comprehensive study of processes in the real world models. Second generation of the informational education technology is unstable since, according to its foundation, it is made for disciplinary-oriented system, but according to its add-on, it leans towards interdisciplinary object-oriented educational system. The presence of such educational technologies, however, shows that there is a natural "sprouting" of new object-oriented educational models.

The third generation includes a project-oriented approach. Here educational technology is regarded as a single educational process based on interdisciplinary non-traditional content, forms, methods, and tools of education. Information technologies of the third generation, according to its foundation and add-on, are designed for a project-oriented educational system, in the process of which it is important to not only control the amount of knowledge acquired but, above all, to insure the active use of such technologies creatively and within the educational process.

Information systems in this educational model are the most important composite elements, making it possible to not only form a person's figurative representations of reality around him, but also to participate actively in the creation of such systems.

The structural model of the pedagogical subsystem can have the following appearance (Figure 2). It is a set of blocks, which interacting with each other provide the non-formal education process for trainees.

The main elements of the pedagogical subsystem model of the non-formal education are the following blocks:

- "Subject and content of the course"- defines a set of knowledge and skills that can be mastered by the trainee;
- "Design and development of training courses"- provides tools for the implementation of all kinds of courses and monitoring the results of their design;
- "Delivery and presentation of courses" – uses the platform of distant learning and the computer network for communication;
- "Organization of educational process" – establishes and maintains the relations between all subjects involved in the educational process.

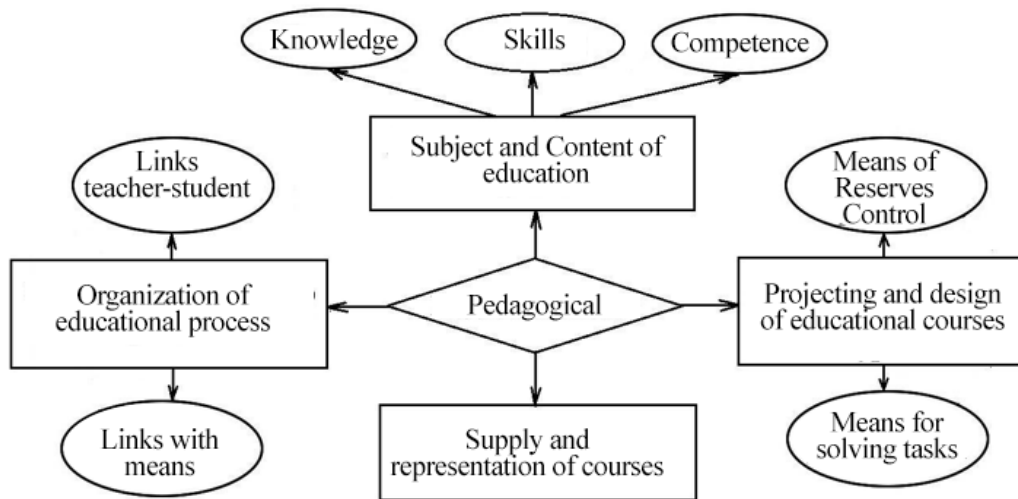


Fig.2. Pedagogical subsystem of non-formal education

At the moment, there are many distant learning platforms and database management systems (DBMS), which can be used in such subsystem. Each of these information technologies has its own advantages and disadvantages, so it is the paramount to solve the problem of the rational choice of appropriate information technologies.

The economic subsystem within the non-formal system of education provides the following functions: social and financial management, foreign economic relations, material and marketing services.

Thus, the economic subsystem architecture consists of eight blocks, which implement all of the functions described below (Figure 3).

The function of social and financial management is represented by units - "Financing of personnel", "Reward scheme provision" and "Payment system control". Automation of these functions can be implemented with the help of modern information technologies, namely by using an electronic billing system and an on-line banking system.

Provisioning of foreign economic functions is performed by the unit "Provision of foreign economic relations." With the help of this function the system interacts with universities and companies that specialize in the presented areas of training, as well as with coaches providing their services around the world.

The third function – material and marketing services – is aimed at ensuring the continued support of facilities, quality of services, and promotion of the system. This function is implemented in the form of 4 units: "Development of material and technical base", "Technical Means Control", "Service Quality Management" and "Marketing means".

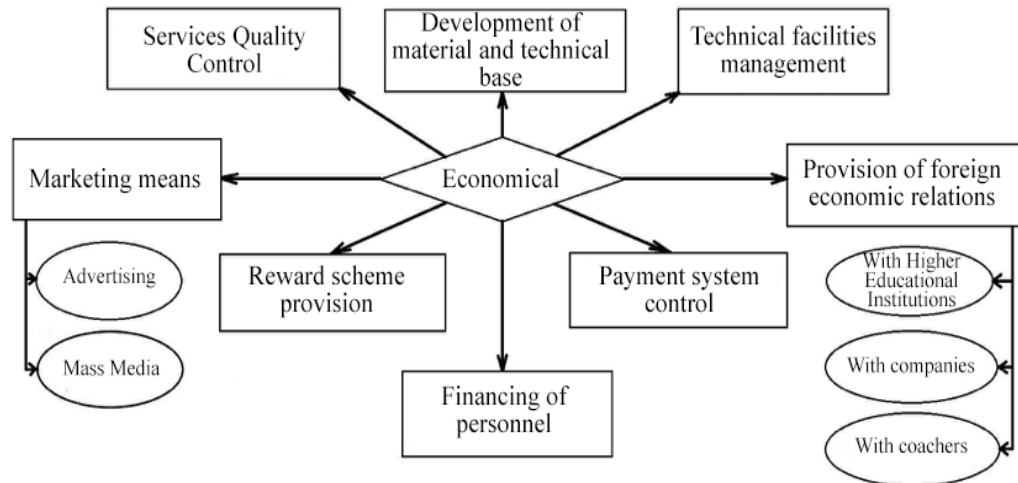


Fig. 3. Economic subsystem of non-formal education

Efficient work of this subsystem ensures the growth of the financial component of the whole system; so, it is necessary very thoroughly select the information technologies to be used for its implementation.

Organizational subsystem provides interconnection of all subsystems into a unified informational network, while using electronic documents management, databases and other computer technologies. During the research, this subsystem model was decomposed into blocks and tasks, which are displayed in Figure 4.

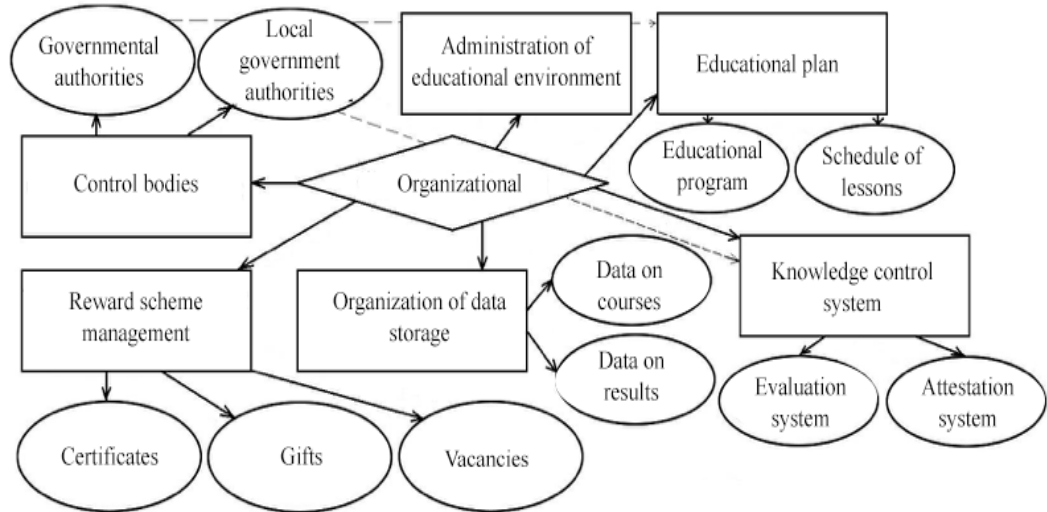


Fig. 4. Organizational subsystem of non-formal education

Organizational subsystem is linked to the economic subsystem by "Reward scheme management" block, and to the pedagogical subsystem by "Educational Plan", "Knowledge control system", and "Organization and of data storage" ones. Additionally, it has the separate direction – "Control bodies" – that provides automated exchange and approval of documentation for the provision of educational services.

The existence of non-formal education system is not possible without the presence of a methodological base, containing a well-written procedure of a variety of functions.

Offered here is a structural model of theoretical and methodological subsystem, based on several directions, that are shown using blocks (Figure 5.):

- "Databases of knowledge and materials" – is used by educational subsystem;
- "Methods of Data Representation" – is responsible for interaction with distant learning platforms for convenience of the trainees;
- "Methods of knowledge evaluation and control" and "Knowledge testing" – are used in the pedagogical subsystem using the tools of the technological subsystem;
- "Methods of knowledge accumulation" – provides methodological principles for organization of the training courses, implemented in the distant learning platform;
- "Methods and criteria for the selection of teachers" - implements the principles of appointment of course supervisors.

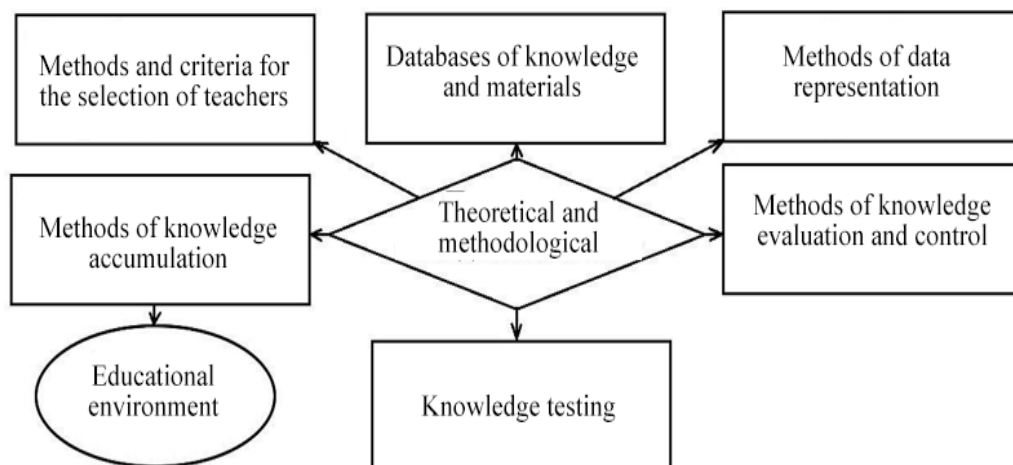


Fig. 5. Theoretical and methodological subsystem of non-formal education

The role of technological subsystem in the modernization of education lies in constant use of new informational technologies. At the same time, the development of the technological subsystem of education is accompanied by radical changes in all other subsystems: pedagogical, organizational and economic. It also significantly affects the theoretical and methodological foundations of the educational system. In other words, the development of technological subsystem results in the establishment of a radically new educational system that can ensure the delivery of educational services to millions of people, while reducing the educational unit cost.

The principal difference between non-formal education system and the formal one is complete dependence of the former on the technological subsystem. While the technological subsystem is barely implemented within the classical education, which is mainly based on "face-to-face" learning and printed materials, within non-formal education, it is the key basis for all the other subsystems. It organizes the work of all information technologies being used on all levels.

Thus, the development and application of information technology allows for the creation of a fundamentally new educational system.

The structural model of the technological subsystem, shown in Figure 6, represents blocks that provide the functionality for all subsystems of the non-formal part of education system.

Main elements of the technological subsystem of the non-formal education are the following:

- "Educational platform" – responsible for functionality of the distant learning platforms operating within educational subsystem;
- "Data storage area" – support of DBMS used in pedagogical, theoretical and methodological subsystems;
- "Ensuring of quality delivery channel" – computer network with a constant flow routing control;
- "Methods of communication (teacher-student)" – support of the on-line interaction between all subjects;
- "Knowledge control system" – interaction between theoretical and methodological, pedagogical and organizational subsystems in order to assess the quality of training;
- "Area of search and exchange of data and resources" – using of cloud technologies for storage, sharing and search of information;
- "Billing system" – technical implementation of the billing function – a key function in the economic subsystem.

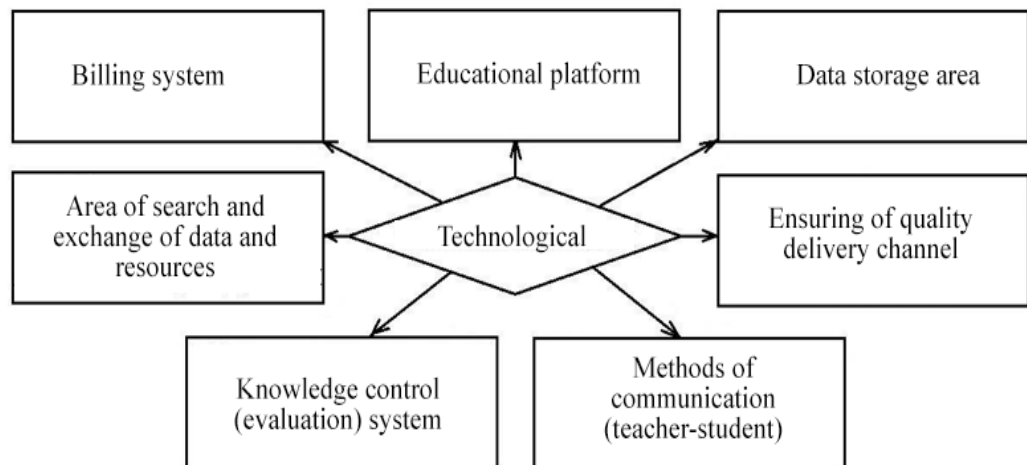


Fig. 6. Technological subsystem of non-formal education

4 Conclusions

Proposed in this article is the justified structural system model of the non-formal education system, based on analysis of such system principles. Using the basic principle of system analysis, we completed the decomposition of the system model into particular model subsystems. This allowed us to formulate the basic functional tasks for each structural element of the system. We also have shown that the technological subsystem is one of the key subsystems and, thus improving its efficiency will improve the functioning of the entire system.

Further research will focus on formalization of the model for the non-formal education system.

LITERATURE

1. Abaluev R. N., Astafieva N. G., Baskakov N. I. and other. Internet technologies in education: Teaching manual. P.3. – Tambov: Publishing House of TSTU, 2002. - 114 p.
2. Informatization of education: trends, tools, training / Under red.S.I.Maslova. - M.: MEI in 2004.
3. Development and using of web-resource as a teaching tool / D. Bulavin, O. Goncharenko, G. Polyakov // Scientific peer-reviewed journal. Belgorod State University. History. Political science. Economy. Computer science. - № 21 (192). - 2014 - Vol. 32/1. - P. 131-136.
4. The Law of Ukraine "On amendments to some laws of Ukraine (concerning the recognition of non-formal education)" [Electronic resource]. – Access mode: http://w1.c1.rada.gov.ua/pls/zweb2/webproc4_1?pf3511=54026.
5. Information and communication technologies in education: a monograph / Under. red.: Badarch Dendev - Moscow: UNESCO IITE, 2013. - 320 p.

УДК 519.23: 004.932.72'1

Эвристический вычислительный метод обнаружения околонулевого видимого движения объектов на серии CCD-кадров

А. Б. Брюховецкий¹, В. Е. Саваневич², С. В. Хламов³¹*Харьковское представительство генерального заказчика Государственного космического агентства Украины*²*Ужгородский национальный университет, Украина*³*Харьковский национальный университет имени радиоэлектроники, Украина*

В статье разработан эвристический вычислительный метод обнаружения околонулевого видимого движения объекта на серии CCD-кадров. Метод использует решающие правила обнаружения околонулевого видимого движения исследуемого объекта, которые в свою очередь учитывают основные особенности процесса формирования измерений видимого блеска и положения исследуемого объекта на серии CCD-кадров. С помощью разработанного эвристического вычислительного метода была обнаружена комета C/2012 S1 (ISON) — долгопериодическая околосолнечная комета, которая на момент открытия являлась объектом с околонулевым видимым движением.

Ключевые слова: серия CCD-кадров, эвристический метод обнаружения околонулевого видимого движения объекта, МНК-оценка параметров, астероиды, комета ISON, *t*-критерий Стьюдента, *F*-критерий Фишера.

У статті розроблено евристичний обчислювальний метод виявлення близьконульового видимого руху об'єкта на серії CCD-кадрів. Метод використовує вирішальні правила виявлення близьконульового видимого руху досліджуваного об'єкта, які в свою чергу враховують основні особливості процесу формування вимірювань видимого блиску та положення досліджуваного об'єкта на серії CCD-кадрів. За допомогою розробленого евристичного обчислювального методу була виявлена комета C/2012 S1 (ISON) – довгоперіодична навколосонячна комета, яка на момент відкриття була об'єктом з близьконульовим видимим рухом.

Ключові слова: серія CCD-кадрів, евристичний метод виявлення близьконульового видимого руху об'єкта, МНК-оцінка параметрів, астероїди, комета ISON, *t*-критерій Стьюдента, *F*-критерій Фішера.

In the paper, the authors discuss their own heuristic computational method for detection of near-zero apparent motion of objects on the series of CCD-frames. To detect such motion of the object, the method needs some special measurements of object magnitude and position to be done over the series of the CCD-frames. Then, the overriding rules are used, which take into account the main features of formation of these measurements. With the help of proposed heuristic computational method, the comet C/2012 S1 (ISON) was discovered. This comet is the long-period circumsolar one, and at the time when it was discovered, it represented an object with near-zero apparent motion.

Key words: CCD-measurements, near-zero apparent motion, OLS parameter estimation, asteroids, ISON comet, Student's *t*-test, *F*-test.

1. Введение

Проблематика астероидно-кометной опасности [1] является значимым направлением использования современных вычислительных методов в астрометрии, особенно в обработке результатов астероидных обзоров.

Объекты Солнечной системы (ССО), как правило, имеют ненулевую скорость видимого движения, а объекты, не принадлежащие Солнечной системе (звезды, галактики), имеют нулевую скорость видимого движения. Однако большое количество потенциально опасных объектов [2] могут являться астероидами и кометами с околонулевым видимым движением.

Актуальным является разработка эвристического метода обнаружения околонулевого видимого движения исследуемых объектов на серии CCD-кадров. Этот метод должен быть основан на решающих правилах обнаружения, которые используют критерии согласия для проверки значимости скорости видимого движения.

2. Цель работы

Целью статьи является разработка эвристического метода обнаружения околонулевого видимого движения объектов на серии CCD-кадров. Метод должен использовать решающие правила обнаружения околонулевого видимого движения исследуемого объекта, которые в свою очередь учитывают основные особенности процесса формирования серии CCD-кадров и измерений положения исследуемого объекта на них.

3. Постановка задачи

Считается, что предварительно в процессе внутрикадровой обработки [3] для всех N_{fr} кадров исследуемой серии (по одному на каждом кадре) выявлено изображение объекта. На основе данных изображений исследуемого объекта на всех N_{fr} кадров сформированы измерения, составляющие серию Ω_{set} [4], с координатами в системе координат (СК) одного из кадров серии, названного базовым.

В соответствии с заданным количеством N_{fr} кадров исследуемой серии определено количество N_{mea} измерений положения исследуемого объекта на серии кадров как $N_{mea} = 2N_{fr}$ (положение объекта задается двумя координатами x и y).

Сформированные измерения всех объектов, которые присутствуют на CCD-кадре, при выполнении ряда условий [5], используются для формирования внутреннего каталога (ВК) объектов, неподвижных на серии кадров (объектов с нулевым видимым движением) [6].

Необходимо отобрать среди объектов ВК такие объекты, которые имеют околонулевое видимое движение. Данные объекты могли попасть в ВК объектов, неподвижных на серии кадров, имея видимое движение, соизмеримое с ошибками измерения.

4. Анализ литературы

Известны вычислительные методы обнаружения движущихся объектов на серии CCD-кадров [4, 7, 8]. Они основаны на проверке гипотез о нулевом (H_0) и ненулевом (H_1) видимом движении исследуемого объекта.

Первая группа методов обнаружения видимого движения объектов основана на использовании критерия максимального правдоподобия [9] или какого-либо другого критерия байесовской группы [10, 11]. Методы рассматриваемой группы могут работать как при неизвестных значениях $x_k(\theta_x)$, $y_k(\theta_y)$ истинного положения исследуемого объекта на время τ_k привязки измерений, так и при неизвестных значениях дисперсии σ_x^2 , σ_y^2 оценок этого положения на кадрах. Для этого используются подстановочные решающие правила проверки гипотез [12, 13], называемые часто правилами обнаружения-измерения [14].

Вторая группа вычислительных методов обнаружения околонулевого видимого движения объекта в решающих правилах использует критерии согласия для проверки значимости скорости видимого движения как параметра регрессионной модели [15, 16]. Это покоординатные решающие правила проверки статистической значимости фактора скорости видимого движения объекта вдоль каждой координаты с использованием t-критериев Стьюдента. И двухкоординатное решающее правило проверки статистической значимости фактора общей скорости видимого движения объекта с использованием f-критерия Фишера.

Сравнительный анализ вычислительных методов обнаружения околонулевого видимого движения астероида выявил, что недостатком подстановочных методов [14], основанных на критерии максимального правдоподобия, является недостаточная обоснованность его использования в ситуации неопределённости с частью параметров функции правдоподобия. Кроме того, указанные методы не эффективны при незначительном (околонулевым) видимом движении объекта.

Таким образом, при разработке эвристического метода обнаружения околонулевого видимого движения исследуемых объектов на серии CCD-кадров используются вычислительные методы обнаружения, использующие критерии согласия для проверки значимости скорости видимого движения. В качестве используемого критерия согласия выбран f-критерий Фишера как наиболее эффективный.

5. Особенности эвристического вычислительного метода обнаружения околонулевой скорости видимого движения исследуемых объектов

Из-за особенностей процесса обнаружения-измерения [14, 15] возможно появление ситуации, когда у исследуемого объекта выявлено видимое движение, однако оценка модуля его скорости $\hat{V} = \sqrt{\hat{V}_x^2 + \hat{V}_y^2}$ будет близка или равна нулю ($\hat{V} = 0$, где \hat{V}_x и \hat{V}_y скорости видимого движения исследуемого объекта вдоль координат x и y). Для ликвидации самой возможности появления такого нонсенса предлагается устанавливать предел минимальной допустимой оценки скорости \hat{V}_{\min} видимого движения околонулевого видимого движения у исследуемого объекта. Использование данного предела улучшит показатели качества обнаружения околонулевого видимого движения у исследуемых объектов.

6. Эвристический вычислительный метод обнаружения околонулевой скорости видимого движения исследуемых объектов на серии ССD-кадров

Принятие решения об обнаружении околонулевой скорости видимого движения исследуемого объекта происходит, основываясь на следующей последовательности операций.

1. Выбор очередной серии Ω_{set} [4] из N_{mea} измерений исследуемого объекта с приведенными координатами к СК базового кадра после внутрикадровой обработки [3].

2. Если количество измерений положения исследуемого объекта N_{mea} меньше минимального допустимого количества измерений $N_{VK\min}$ для проведения исследования объекта на наличие у него околонулевого видимого движения, то измерения, принадлежащие данному объекту, не рассматриваются.

3. Для N_{mea} измерений очередной серии Ω_{set} производится следующая последовательность операций.

3.1. МНК-оценка положения \hat{x}_0 и \hat{y}_0 исследуемого объекта на момент τ_0 привязки базового кадра и скорости \hat{V}_x и \hat{V}_y его видимого движения (оценка параметров $\hat{\theta}_x$ и $\hat{\theta}_y$ видимого движения исследуемого объекта) вдоль каждой координаты с помощью следующих выражений [4, 7]:

$$\hat{x}_0 = \frac{D \cdot A_x - C \cdot B_x}{N_{mea} \cdot D - C^2}; \quad (1)$$

$$\hat{y}_0 = \frac{D \cdot A_y - C \cdot B_y}{N_{mea} \cdot D - C^2}; \quad (2)$$

$$\hat{V}_x = \frac{N_{mea} \cdot B_x - C \cdot A_x}{N_{mea} \cdot D - C^2}; \quad (3)$$

$$\hat{V}_y = \frac{N_{mea} \cdot B_y - C \cdot A_y}{N_{mea} \cdot D - C^2}, \quad (4)$$

где $A_x = \sum_{k=1}^{N_{mea}} x_k$; $A_y = \sum_{k=1}^{N_{mea}} y_k$; $B_x = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \Delta_{\tau k} x_k$; $B_y = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \Delta_{\tau k} y_k$;

$$C = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \Delta_{\tau k}; \quad D = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \Delta_{\tau k}^2;$$

$\Delta_{\tau k} = (\tau_k - \tau_0)$ – разница между временем привязки τ_0 базового кадра и временем τ_k кадра, на котором сформировано k -е измерение.

3.2. Определение интерполированных оценок координат \hat{x}_k и \hat{y}_k исследуемого объекта на моменты привязки всех кадрах исследуемой серии с помощью выражений [4, 7]:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k(\hat{\theta}_x) = \hat{x}_0(\hat{\theta}_x) + \hat{V}_x(\hat{\theta}_x) \cdot (\tau_k - \tau_0); \quad (5)$$

$$\hat{y}_k = \hat{y}_k(\hat{\theta}_y) = \hat{y}_0(\hat{\theta}_y) + \hat{V}_y(\hat{\theta}_y) \cdot (\tau_k - \tau_0) \quad (6)$$

3.3. Определение остаточных дисперсий $\hat{\sigma}_{resx}^2$ и $\hat{\sigma}_{resy}^2$ оценок координат x и y исследуемого объекта соответственно с помощью следующих выражений:

$$\hat{\sigma}_{resx}^2 = \sum_{k=1}^{N_{mea}} (x_k - \hat{x}_k(\hat{\theta}_x))^2; \quad (7)$$

$$\hat{\sigma}_{resy}^2 = \sum_{k=1}^{N_{mea}} (y_k - \hat{y}_k(\hat{\theta}_y))^2. \quad (8)$$

3.4. Определение суммарной остаточной дисперсии $\hat{\sigma}_{resxy}^2$ оценок координат x и y исследуемого объекта соответственно:

$$\hat{\sigma}_{resxy}^2 = \hat{\sigma}_{resx}^2 + \hat{\sigma}_{resy}^2. \quad (9)$$

3.5. Определение значений остаточных сумм R_0^2 и R_1^2 квадратов отклонений [17] положения исследуемого объекта в предположении истинности гипотез о нулевом (H_0) и околонулевом (H_1) видимом движении соответственно на данной серии измерений с помощью следующих выражений [4, 17]:

$$R_0^2 = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \left((x_k - \hat{x})^2 + (y_k - \hat{y})^2 \right); \quad (10)$$

$$R_1^2 = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \left((x_k - \hat{x}_k(\hat{\theta}_x))^2 + (y_k - \hat{y}_k(\hat{\theta}_y))^2 \right), \quad (11)$$

где $\hat{x} = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \hat{x}_k / N_{mea}$, $\hat{y} = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \hat{y}_k / N_{mea}$ – средние значения оценок координат неизменного положения объекта с нулевым видимым движением.

3.6. Определение значения f -критерия Фишера $f(\Omega_{set})$ значимости общей скорости видимого движения [4], используя выражения (10) и (11) для остаточных сумм R_0^2 и R_1^2 квадратов отклонений [17] положения исследуемого объекта соответственно:

$$\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2} \geq \frac{wf_{cr}}{N_{mea} - r}, \quad (12)$$

где w – количество исследуемых факторов линейной регрессионной модели (в исследуемом случае этим фактором является скорость видимого движения);

r – ранг матрицы частных производных F_x ($rang F_x = r \leq \min(m, N_{mea})$) [4, 17];

$m = 2$ – количество оцениваемых параметров видимого движения исследуемого объекта вдоль каждой координаты на серии измерений;

f_{cr} – предельно допустимое (критическое) табличное значение [18, 19] статистики распределения Фишера с $(w, N_{mea} - r)$ степенями свободы.

4. Проверка на наличие у объекта околонулевой скорости видимого движения производится (на блоки 5, 6, 7) если оценка модуля скорости \hat{V} его видимого движения больше заданного минимального предела допустимого модуля скорости \hat{V}_{\min} видимого движения:

$$\hat{V} > \hat{V}_{\min}. \quad (13)$$

5. Исследуемый объект считается объектом с околонулевой скоростью видимого движения (объектом Солнечной системы), если:

5.1. остаточная дисперсия $\hat{\sigma}_{resx}^2$ оценок положения исследуемого объекта по координате x из выражения (7) меньше, чем заданное предельно допустимое значение $\hat{\sigma}_{resx\max}^2$:

$$\hat{\sigma}_{resx}^2 < \hat{\sigma}_{resx\max}^2. \quad (14)$$

5.2. остаточная дисперсия $\hat{\sigma}_{resy}^2$ оценок положения исследуемого объекта по координате y из выражения (8) меньше, чем заданное предельно допустимое значение $\hat{\sigma}_{resy\max}^2$:

$$\hat{\sigma}_{resy}^2 < \hat{\sigma}_{resy\max}^2. \quad (15)$$

5.3. суммарная остаточная дисперсия $\hat{\sigma}_{resxy}^2$ оценок положения исследуемого объекта по координатам x и y из выражения (9) меньше, чем заданное предельно допустимое значение $\hat{\sigma}_{resxy\max}^2$:

$$\hat{\sigma}_{resxy}^2 < \hat{\sigma}_{resxy\max}^2. \quad (16)$$

5.4. значение f -критерия Фишера $f(\Omega_{set})$ значимости общей скорости видимого движения больше, чем его заданное предельно допустимое (критическое) значение f_{cr} :

$$f(\Omega_{set}) > f_{cr}. \quad (17)$$

6. Кроме того исследуемый объект считается объектом с околонулевой скоростью видимого движения (объектом Солнечной системы), если суммарная остаточная дисперсия $\hat{\sigma}_{resxy}^2$ оценок координат x и y исследуемого объекта будет меньше, чем заданное предельно допустимое значение $\hat{\sigma}_{resxy\max}^2$, умноженное на минимальный множитель дисперсии $k_{\sigma\min}$, а значение f -критерия Фишера значимости общей скорости видимого движения превышает минимальное допустимое значение f_{\min} :

$$\left[\hat{\sigma}_{resxy}^2 < \hat{\sigma}_{resxy\max}^2 \cdot k_{\sigma\min} \right] \& \& [f(\Omega_{set}) > f_{\min}]. \quad (18)$$

7. Также исследуемый объект считается объектом с околонулевой скоростью видимого движения (объектом Солнечной системы), если суммарная остаточная

дисперсія $\hat{\sigma}_{resxy}^2$ оценок координат x и y исследуемого объекта будет меньше, чем заданное предельно допустимое значение $\hat{\sigma}_{resxy\max}^2$, умноженное на максимальный множитель дисперсии $k_{\sigma\max}$, а значение f -критерия Фишера значимости общей скорости видимого движения превышает его максимальное допустимое значение f_{\max} :

$$\left[\hat{\sigma}_{resxy}^2 < \hat{\sigma}_{resxy\max}^2 \cdot k_{\sigma\max} \right] \& \& [f(\Omega_{set}) > f_{\max}]. \quad (19)$$

Исходя из содержания пунктов 4 ÷ 7 данного эвристического метода общий вид правила обнаружения околонулевой скорости видимого движения исследуемого объекта с использованием выражений (4) ÷ (11) может быть представлен:

$$\begin{aligned} & \left[\hat{V} > \hat{V}_{\min} \right] \& \& \left\{ \left(\left[\hat{\sigma}_{resx}^2 < \hat{\sigma}_{resx\max}^2 \right] \& \& \left[\hat{\sigma}_{resy}^2 < \hat{\sigma}_{resy\max}^2 \right] \& \& \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \& \& \left[\hat{\sigma}_{resxy}^2 < \hat{\sigma}_{resxy\max}^2 \right] \& \& [f(\Omega_{set}) > f_{cr}] \right) \right\} \parallel \\ & \quad \parallel \left(\left[\hat{\sigma}_{resxy}^2 < \hat{\sigma}_{resxy\max}^2 \cdot k_{\sigma\min} \right] \& \& [f(\Omega_{set}) > f_{\min}] \right) \parallel \\ & \quad \left. \left. \left(\left[\hat{\sigma}_{resxy}^2 < \hat{\sigma}_{resxy\max}^2 \cdot k_{\sigma\max} \right] \& \& [f(\Omega_{set}) > f_{\max}] \right) \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

Блок-схема разработанного метода обнаружения околонулевой скорости видимого движения исследуемого объекта представлена на рисунке 1.

7. Константы эвристического вычислительного метода обнаружения околонулевого видимого движения исследуемых объектов на серии ССД-кадров

При проведении исследований процесса обнаружения околонулевой скорости видимого движения объекта использовались следующие значения констант вычислительного метода.

Предельно допустимые значения остаточных дисперсий оценок координат x и y исследуемого объекта соответственно $\hat{\sigma}_{resx\max}^2 = \hat{\sigma}_{resy\max}^2 = 0.125$ пикселя. Предельно допустимое значение суммарной остаточной дисперсии оценок координат x и y исследуемого объекта $\hat{\sigma}_{resxy\max}^2 = 0.25$ пикселя.

Предельно допустимое значение $f_{cr} = 400$ для f -критерия Фишера $f(\Omega_{set})$ значимости общей скорости видимого движения, а также его максимальное $f_{\max} = 30000$ и минимальное $f_{\min} = 60$ допустимые значения.

Минимальный предел допустимого модуля скорости видимого движения исследуемого объекта $\hat{V}_{\min} = 0.5$ (пикс./кадр).

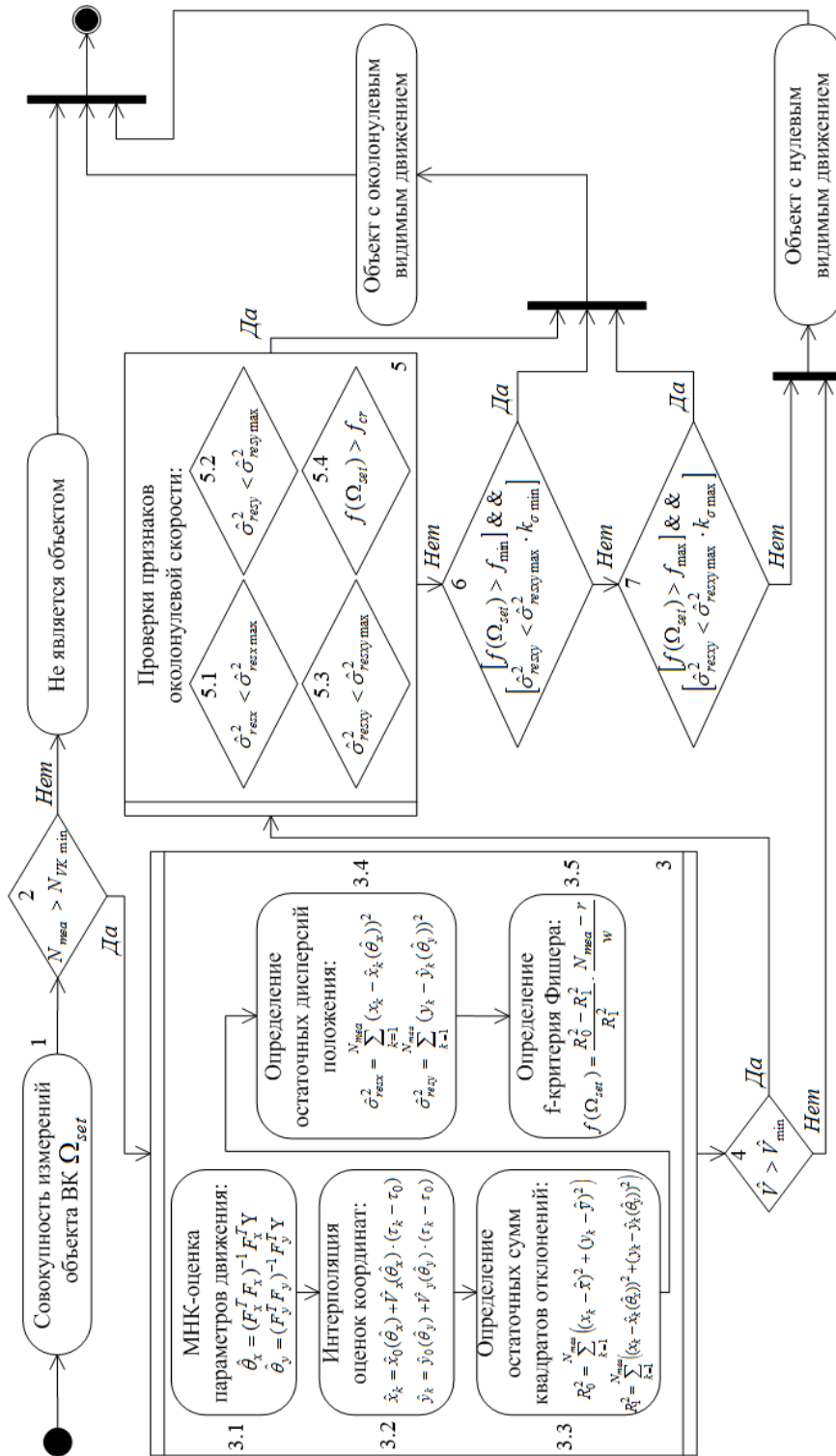


Рисунок 1. Блок-схема вычислительного метода обнаружения околонулевой скорости видимого движения

Радиус неподвижности для формирования ВК $R_{static} = 2$ пикселя.

Минимальный $k_{\sigma \min} = 0.5$ и максимальный $k_{\sigma \max} = 1.5$ множители для суммарной остаточной дисперсии оценок положения исследуемого объекта.

Минимальное допустимое количество $N_{VK \min}$ измерений положения исследуемого объекта ВК объектов, неподвижных на серии кадров, зависит от количества кадров и задается в одном из следующих форматов:

k/m – в m кадрах должно быть не менее k измерений объектов; например, 3/3, 4/4 и т.д.;

$k/(m \div \ell)$ – в серии от m до ℓ кадров должно быть не менее k измерений объектов; например, 5/(7÷9), 6/(10÷13) и т.д.;

$\chi_{VK} / > m$ – в серии от m кадров должно быть не менее $\chi_{VK} \cdot N_{fr}$ измерений объектов, где N_{fr} – количество кадров в серии; например, 0.5/>14 и т.д.

Описанные выше предельно допустимые (критические) значения констант вычислительного метода обнаружения околонулевой скорости видимого движения исследуемого объекта являются универсальными и не зависят от количества N_{mea} измерений объекта исследуемой серии Ω_{set} при условии, что $N_{mea} > N_{VK \min}$.

Опытная эксплуатация данных предельно допустимых (критических) значений констант проводилась в случае, когда количество измерений положения исследуемого объекта $N_{mea} = 4$.

8. Открытие долгопериодической околосолнечной кометы C/2012 S1 (ISON)

21 сентября 2012 года в обсерватории ISON-Kislovodsk Observatory (Russia) [код Центра Малых Планет «D00»] проекта ISON (International Scientific Optical Network – Международная Научная Оптическая Сеть) [20] была открыта долгопериодическая околосолнечная комета C/2012 S1 (ISON) [21].

Открытие было сделано Виталием Невским и Артёмом Новичонком с помощью программного комплекса CoLiTec [6] по серии кадров (рис. 1) 40-см телескопа Santel-400AN и CCD-матрицы [22] FLI ML09000-65 (3056×3056 пикселей, размер пикселя 12 мкм). Время экспозиции составляло 100 с.

Комета ISON была выделена блоком обнаружения объектов с околонулевым видимым движением программного комплекса CoLiTec [6]. В данном блоке использовался разработанный эвристический метод обнаружения околонулевого видимого движения исследуемого объекта на серии CCD-кадров. Данный метод был основан на решающем правиле, которое использует проверку значимости фактора общей скорости видимого движения исследуемого объекта с помощью f-критерия Фишера.

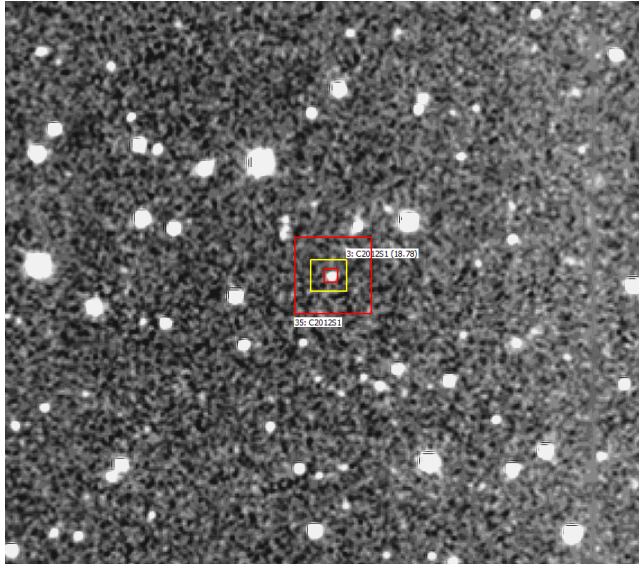


Рисунок 2. Комета ISON на момент открытiя в центре фрагмента CCD-кадра при масштабе 300%

На момент открытiя комета имела 18 звёздную величину и обладала комой диаметром 10 угловых секунд, что соответствует 50 тыс. км на расстоянии в 6,75 а. е.

Скорость видимого движения кометы ISON в момент открытiя составляла около 0,8 пикселя за кадр. Размер изображения кометы на кадре был около 5 пикселей (рисунок 3, размер клетки соответствует размеру пикселя в 2 угловые секунды).

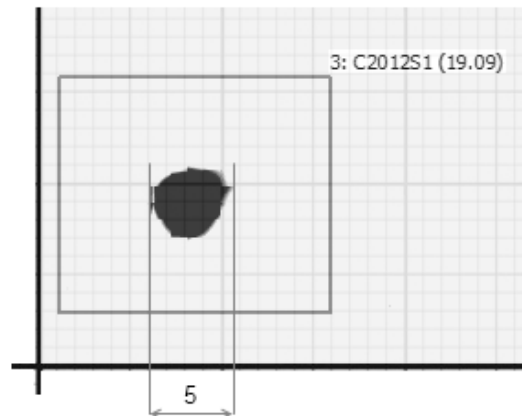


Рисунок 3. Размер изображения кометы ISON 5 пикселей

За 26 минут наблюдения на серии из 4 кадров комета ISON переместилась на 3 пикселя (рисунок 4).

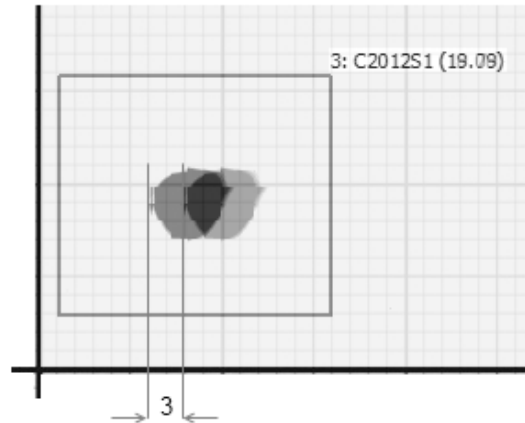


Рисунок 4. Изображение кометы ISON на 1-м и 4-м CCD-кадрах серии, на которой она была открыта, при масштабе 500%

Основой приведенных выше изображений являются инвертированные изображения кометы ISON на CCD-кадрах, используемых при её открытии. Дополнительно использовалась сетка, размер клетки которой равен размерам пикселя CCD-изображения, то есть двум угловым секундам.

9. Выводы

В статье были проанализированы известные вычислительные методы обнаружения околозвездного видимого движения исследуемого объекта на серии CCD-кадров [4, 7, 8].

Исходя из анализа в качестве основы разработанного эвристического метода были выбраны решающие правила обнаружения, использующие критерии согласия для проверки значимости скорости видимого движения. В качестве используемого критерия согласия был выбран f -критерий Фишера (12) как позволяющий учитывать ненулевое видимое движение объекта на плоскости, а не вдоль одной координаты.

В статье разработан эвристический метод обнаружения околозвездного видимого движения исследуемых объектов на серии CCD-кадров. Данный метод включает в себя следующие операции для каждой исследуемой серии измерений: МНК-оценка параметров движения и определение интерполированных оценок координат положения исследуемого объекта, расчёт критерия согласия (f -критерий Фишера (12)), проверка необходимых условий и принятие решения о наличии околозвездной скорости видимого движения у объекта, соответствующего исследуемой серии измерений. Разработанный метод также учитывает основные особенности процесса формирования измерений положения исследуемого объекта на серии CCD-кадров.

Разработанный эвристический метод был реализован в программном комплексе CoLiTec [6]. С его помощью была обнаружена комета C/2012 S1 (ISON) [21] — долгопериодическая околозвездная комета, на момент открытия являющаяся объектом с околозвездным видимым движением.

Дальнейшие исследования целесообразно сконцентрировать на определении показателей качества обнаружения околонулевого видимого движения исследуемого объекта на серии CCD-кадров методом статистического моделирования с применением разработанного эвристического метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. David, P. S. *Defending Against Asteroids and Comets* / P. S. David Dearborn, Paul L. Miller // Springer International Publishing. *Handbook of Cosmic Hazards and Planetary Defense* – 2014. – pp 1-18.
2. Kortencamp Steve. *Asteroids, Comets, and Meteoroids*. Mankato, MN: Capstone Press. – 2012.
3. V. E. Savanevych . A new method based on the subpixel Gaussian model for accurate estimation of asteroid coordinates. V. E. Savanevych; O. B. Briukhovetskyi; N. S. Sokovikova; M. M. Bezkrovny; I. B. Vavilova; Yu. M. Ivashchenko; L. V. Elenin; S. V. Khlamov; Ia. S. Movsesian; A. M. Dashkova; A. V. Pogorelov. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 2015 451 (3): 3287-3298.
4. Khlamov, S. V. Development of computational method for detection of the object's near-zero apparent motion on the series of CCD-frames [Текст] / Khlamov, S. V., Savanevych, V. E., Briukhovetskyi, O. B., Oryshych, S. S. // *EasternEuropean Journal of Enterprise Technologies*. – 2016. – Volume 2, Issue 9 (80). – pp. 41 - 48.
5. Саваневич В.Е. Метод формирования внутреннего каталога объектов, неподвижных на серии кадров / В.Е. Саваневич, Я.С. Мовсесян, Н.Ю. Дихтяр // *Системи обробки інформації*. – 2016. – Вип. 14(179). – С. 45 – 58.
6. Саваневич В. Е. Программа CoLiTec автоматизированного обнаружения небесных тел со слабым блеском [Текст] / В. Е. Саваневич, А. Б. Брюховецкий, А. М. Кожухов, Е. Н. Диков, В. П. Власенко // *Космічна наука і технологія*. – 2012. – Т. 18(1). – С. 39 – 46.
7. Кузьмин С.З. *Цифровая радиолокация. Введение в теорию* / С.З. Кузьмин – К.: Издательство КвіЦ, 2000. – 428 с.
8. Саваневич В. Е. Метод обнаружения астероидов, основанный на накоплении сигналов вдоль траекторий с неизвестными параметрами. / Саваневич В. Е., Брюховецкий А. Б., Кожухов А. М., Диков Е. Н. // *Системи оброб. інформації*.: Зб. наук. праць. Харків. 2011. Вип. 2. С. 137-144.
9. Myung, I. J. Tutorial on maximum likelihood estimation // *Journal of Mathematical Psychology*. – 2003. – Vol. 47. – P. 90–100.
10. Masson, M. E. J. A tutorial on a practical Bayesian alternative to null-hypothesis significance testing // *Behavior Reseach Methods*. – 2011. – Vol. 43. – P. 679–690.
11. Lee M.D. *Bayesian Cognitive Modeling: A Practical Course* / Lee, M.D., Wagenmakers, E.-J. // Cambridge University Press. – 2014. – P. 284.
12. Lehman, E. L. Romano J. P. *Testing Statistical Hypotheses* // Springer. – 3rd edition, – 2010. – P.768

13. Wagenmakers, E.-J. Simple relation between one-sided and two-sided Bayesian point-null hypothesis tests. / Wagenmakers, E.-J., Morey, R. D. // *Statistics Probability Letters*. – 2014. – Vol. 92. – P. 121–124.
14. Грифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.
15. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с фр. и предисловие А. И. Штерна.—М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— 488 с.
16. Draper N. R. Applied regression analysis / Norman Richard Draper N. R., Harry Smith // *Business & Economics*. – Vol. 1, 1998. – P. 706. – ISBN 0-471-17082-8.
17. Ермаков С.М. Математическая теория оптимального эксперимента / С.М. Ермаков, А.А. Жиглявский. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
18. Guy Mélard. On the accuracy of statistical procedures in Microsoft Excel 2010 / Guy Mélard // *Journal of Computational Statistics and Data Analysis*.– 2014, Volume 29, Issue 5, pp. 1095-1128.
19. Phillips, P. C. B. (1982) "The true characteristic function of the F distribution," *Biometrika*, 69: 261-264.
20. Молотов И.Е. Научная сеть оптических инструментов для астрометрических и фотометрических наблюдений. / И.Е. Молотов, В.М. Агапов, В.В. Куприянов и др. // *Известия Главной астрономической обсерватории в Пулковке*, 2009, № 219, вып. 1, с. 233–248.
21. Minor Planet Center, COMET C/2012 S1 (ISON). [Электронный ресурс] — Режим доступа : [www/URL: http://www.minorplanetcenter.org/mpec/K12/K12S63.html](http://www.minorplanetcenter.org/mpec/K12/K12S63.html) — Загл. с экрана.
22. Entrevue avec Vitali Nevski. Codécouvreur de la comète ISON // *Astro-nomie-Québec*. – Vol. 2, No. 4, Novembre/décembre 2013.

УДК 004.413:[159.923.3+519.252]

Разнообразие личностных характеристик программистов как основа успешности программной диверсности

Н. В. Варламова, В. О. Мищенко

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Украина

Одним из методов повышения надёжности программных систем (ПС), особенно перспективным в разработке систем критичных применений, является программная диверсность. Успех её использования зависит от удачного выбора исполнителей параллельно создаваемых версий. При равенстве профессиональной подготовки исполнителей этот выбор определяется их личностными особенностями. Это зависит от разнообразия таких характеристик в пределах коллектива, которому поручено реализовать данный проект. Эта проблема разнообразия исследована нами на основе статистических данных о распространении личностных характеристик среди разработчиков ПС по собственным и ранее публиковавшимся данным. Показано, что принимая дополнительно в качестве гипотезы некоторую модель механизма диверсности, можно получать более определённые прогнозы о её вероятной успешности.

Ключевые слова: разработка программных систем, надёжность, диверсность, характеристика личности, статистика распределения, математическая модель, прогноз.

Одним з методів підвищення надійності програмних систем (ПС), особливо перспективним у розробці систем критичних застосувань, є програмна диверсність. Успіх її використання залежить від вдалого вибору виконавців версій, що створюються паралельно. За умови рівної професійної підготовки виконавців цей вибір визначається їх персональними особливостями. Це залежить від різноманітності таких характеристик в межах колективу, якому доручено реалізувати даний проект. Ця проблема різноманітності досліджена нами на основі статистичних даних про поширення персональних характеристик серед розробників ПС за власними і раніше оприлюдненими даними. Показано, що приймаючи додатково в якості гіпотези певну модель механізму диверсності, можна отримувати більш певні прогнози про її ймовірну успішність.

Ключові слова: розробка програмних систем, надійність, диверсність, характеристика особистості, статистика розподілу, математична модель, прогноз.

One method of improving the reliability of software systems (PS), especially in the promising development of critical application systems, is software diversity. The success of its use depends on the successful choice of developers simultaneously create versions. At equality training developers this choice is determined by their personal characteristics. It depends on a variety of characteristics within the team tasked to implement the project. This issue of diversity was investigated by us on the basis of statistical data, both own and previously published, on the distribution of personal characteristics among the SS's developers. It is shown that taking further as some of the hypothesis model of diversity mechanism, you can get more definite forecasts about its likely success.

Key words: the development of software systems, reliability, diversity, personality characteristics, distributional statistics, mathematical model, forecast.

1 Введение

Одним из современных методов снижения уязвимости критического программного обеспечения (ПО) является программная диверсность [1-4]. Известно, что эффект диверсности зависит как от профессионализма IT-

специалистов, так и от средств разработки ПО. Актуальной проблемой является тот экспериментальный факт, что нередко разные разработчики, работая порознь, совершают одинаковые ошибки. Наиболее вероятное объяснение этому обстоятельству, наряду со стереотипами образования, - случайное совпадение личностных характеристик разработчиков, участвующих в параллельной реализации одного и того же задания, особенно при использовании одинаковых средств разработки ПО. В свою очередь, существующее многообразие средств и специализаций в разработке ПО наверняка отчасти обусловлено различиями в стиле выполнения работы личностями, которые имеют разные характеристики [5]. При этом само многообразие средств можно пытаться отчасти объяснить тем, что одни инструменты и подходы к программированию по душе, скажем, интровертам, другие - экстравертам. *Цель работы* – оценить возможность и дать метод прогноза успешности использования различий личностных характеристик исполнителей в диверсных проектах.

2 Постановка задачи и обзор используемых положений

Диверсность оправдывает себя при разработке критического ПО. Поэтому, документ [7], играющий роль фактического стандарта, создавался, прежде всего, для целей обоснования стратегий разработки систем управления объектами ядерной энергетики. Конечно, рекомендации [7] следует иметь в виду в любых проектах ПО, критичность которых оправдывает дополнительные затраты на поддержку диверсности.

Сказанное, относится и к «программной диверсности» (software diversity) [7,8], как одного из частных методов диверсности. То, насколько она может быть успешной, зависит от выбранного инструментария разработки ПО и квалификации разработчиков. При этом важным фактором успеха программной диверсности считается человеческий фактор [8]. Отметим, что в рассматриваемом случае он выступает как частный случай «субъектной диверсности» (human diversity), которая является самостоятельным общим направлением диверсности, имея и другие многочисленные применения.

В настоящей работе авторы исходят из концептуальной модели, которая ставит эффект программной диверсности в зависимость от соответствия средств разработки программного кода или компонент программной системы в зависимость от личностных характеристик разработчиков.

Характеристики личности сегодня чаще всего следуют классической типологии Юнга и Майерс-Бриггс [9,10]. Они имеют у профессиональных разработчиков ПО выраженные специфические отличия от средних показателей [11-18]. Признано, что учёт характеристик личности работников в области ИТ важен для успеха организации программистской, а также более общей инженерной и управленческой деятельности в данной отрасли [17,19-20].

Однако нужно иметь в виду недостаточность для исследуемой темы известных к настоящему времени фактов. Чаще всего они относятся к сферам профессиональной ориентации людей, управленческой деятельности или взаимодействия в профессиональном коллективе применительно к определённым этапам работ над проектами в области ИТ. Интересна постановка задачи статьи [17], в которой на основе теории типов Юнга-Майерс-Бриггс основным стадиям жизненного цикла (ЖЦ) ИТ проектов сопоставляются черты

личности, которые на этих стадиях сулят наибольший эффект. Однако альтернативные способы выполнения работ разными субъектами на одном этапе ЖЦ проекта при этом не рассматриваются. Наряду с эвристическими соображениями, основным средством обоснования суждений в упомянутых работах по роли типов личности в ИТ служит анализ статистических данных об особенностях распределения характеристик личности среди программистов (и других работников компьютеризированной информационной социосферы). Личностные типы выявляются опросником Майерс-Бриггс MBTI (Myers-Briggs Type Indicator) или родственными методами (напр., [21]). В то же время статистику по результатам труда в ИТ у лиц с разными типами найти не удастся. Отметим пример вытекающую отсюда трудность, на которую указывают исследователи [13,15,16]: распространённость определённых типов личности среди той или иной профессиональной группы не свидетельствует сама по себе о преимуществах этих типов в соответствующей деятельности. Такая распространённость с тем же успехом может говорить о том, что данный вид профессиональной деятельности всего лишь привлекает личности этого типа, не гарантируя им наилучшей карьеры, причём справедливость этой альтернативы иногда тоже подтверждается статистикой [16, С.213-214].

Указанные ограничения предыдущих работ показывают, что задача нашего исследования должна ставиться по-новому. В связи с этим ранее нами были сформулированы такие базовые гипотезы [23]:

1. Если профессиональные склонности у программистов разные, то следует ожидать у них, разных ошибок даже при использовании одного и того же средства, скажем, ЯП.
2. Если и средства разные, а разработчиков для применения этих средств подбирали так, чтобы их склонности максимально соответствовали факторам диверсности данных средств, то ожидается минимальность множества общих ошибок у этих разработчиков.

Мы полагаем [23-25], что важнейшую роль играют следующие факторы диверсности, каждый из которых может иметь те или иные возможные атрибутные значения:

1. Уровень абстракции: может быть «высокий» или «низкий»;
2. Архитектура-планирование: может быть «видение в целом» или «локально, ad hoc»;
3. Способ реализации: возможные значения - «логический вывод», «конкретика, образцы».

Напомним также, что согласно типологической системе Мейерс-Бриггс, личность описывается четырьмя атрибутами, каждый из которых имеет два «полюса» [9-11]:

1. Ориентация сознания (Е- на объекты, I- на субъекты),
2. Способ ориентировки в ситуации (S- на конкретную информацию, N- на обобщенную ситуацию),
3. Основа принятия решений (Т-рациональное взвешивание альтернатив, F- принятие решений на эмоциональной основе),

4. Способ подготовки решений (**J** — предпочтение планировать и заранее упорядочивать информацию, **P** — предпочтение ориентироваться по обстоятельствам.).

Сочетание значений по этим шкалам дает обозначение одного из 16 личностных типов.

Как мы уже отмечали, типы Мейерс-Бриггс используется в зарубежных странах для анализа проблем ИТ-отрасли, как правило, в связи с межличностным взаимодействием [5,12-21]. Работ, посвящённых выбору исполнителей диверсных проектов нет.

3 Общие черты распределений личностных типов «программистов» в мире

Данные в таблицах работ [5,13-21] свидетельствуют о том, что существует выраженная «специализация» типов личности у программистов (табл. 1, 2), подверженная, впрочем, действию социальных и этнических факторов (сравн., напр., США и Россию в табл. 1). Тем не менее, всегда существует не менее 4-х доминирующих типов (которые имеют частоты, не меньшие примерно 10%).

Табл.1 Основные типы личности у разработчиков ПС пяти стран мира

№	Подвыборка	Тип	% в подвыборке	% в общ. выборке	Страна
1	Инженеры ПО	ISTJ	24%	11,6%	США
		ESTJ	15%	8,7%	
		ISTP	8%	5,4%	
		ESTP	8%	4,3%	
		INTP	8%	3,3%	
2	Инженеры ПО	ISTJ	19,1%	14,3%	Бразилия
		INTP	13,2%	3,7%	
		ESTP	11,8%	6,7%	
		ESTJ	11,8%	23,1%	
3	ИТ-специалисты	INTP	16%	6,4%	Россия
		ISTJ	16%	14,5%	
		ENTP	14%	7,7%	
		ISTP	12%	4,9%	
		ESTJ	26%		
	Разработчики программных систем	ESTP	13%		Куба
		ISTJ	10%		
		ISFJ	7%		
		ENTJ	7%		
		ISTJ	14%		
	Разработчики программных систем				Пакистан

		ENTP	11%		
		ISFJ	9%		
		ESTJ	9%		
		INTP	8%		

К сожалению, не существует данных относительно распределения типов личности программистов по типологии Майерс-Бриггс в Украине. Поэтому, нашей важнейшей задачей был сбор статистических и анализ данных для оценки такого распределения

4 Результаты статистического исследования

В нашем исследовании участвовали 97 респондентов, примерно поровну профессиональные IT-специалисты и студенты computer science. Кроме этой методики, для профессиональных разработчиков нами совместно с А. Гаховым [24-25] создан и апробирован опросник о предпочтительных средствах и методах разработчика «Факторы диверсности».

Выявленное нашим исследованием распределение типов личности показывает, что можно выделить пять типов, находящихся на уровне >10% (табл. 2). Первые 3 из них совпадают с тройкой наиболее распространённых личностных типов у программных инженеров США, остальные 2 тоже входят в первые четвёрки типов, наблюдаемых среди представителей подобных профессий в США, Бразилии, России и стран третьего мира.

Табл. 2 Основные типы личности у разработчиков программных систем северо-востока Украины

№	Подвыборка	Тип	% в подвыборке	Страна
1	Инженеры ПО	ISTJ	21,6	Украина
		ESTJ	14,4	
		ISTP	14,4	
		ESTP	10,3	
		INTP	10,3	

Это значит, что в сравнительно небольшой группе IT-специалистов проекта с большой вероятностью можно выделить, как минимум, двух разработчиков с различными типами личности.

Следовательно, руководители проектов имеют принципиальную возможность при выборе исполнителей диверсных решений обеспечить реальную личностную диверсность.

5 Особенности распределения типов и логический подход к идентификации факторов диверсности

Следующая задача состоит в том, чтобы, зная тип личности по классификации Майерс-Бриггс, выявленный опросником MBTI [4], описать

профессиональные склонности программиста как значения следующих факторов диверсности:

F1 Уровень абстракции; F2 Архитектура-планирование; F3 Способ реализации.

Каждый фактор имеет 3 возможных значения: основные (полярно противоположные) π и σ и неопределённое – ρ . Мы предполагаем, что значения факторов у профессионального разработчика программных систем можно определить опросом. В простейшем случае, склонность к той или иной полярности по каждому фактору определится, если этот разработчик укажет своё согласие с одним и только одним из парных тезисов по каждому фактору. Например, (F_1, π) Базовые проектные решения следует принимать на основе должной абстракции требований с последующей декомпозиции общей задачи в согласии с логикой требований, стремясь получить корректно вспомогательные задачи, более простые, чем исходная.

(F_1, σ) Все проектные решения по разрабатываемой системе, в том числе начальные, необходимо принимать, исходя из условий её внедрения с учётом средств разработки, заботясь с самого начала о показателях эффективности работы будущей системы.

Статистика конкретных пар (психологический тип, факторы диверсности), позволяет строить отображение типов на факторы или зависимость значений факторов от элементов типа. Это задачи, родственные факторному и регрессионному анализу. Их лучше упростить. Построив отображение типов на факторы, следуя вначале неформальной логике, мы далее сможем перейти к проверке качества основанных на этом предсказаний. Приём «замены» чисто статистического подхода логическим ранее применялся в другой задаче исследования личностных черт программистов [5].

На основании этого мы выдвинули гипотезу: сопоставляя эти характеристики с характеристиками основных значений факторов F_i , логично предположить содействие определённых личностных черт этим факторам. Присутствие элемента N (интуитивность) в типе благоприятствует значениям π всех факторов, а элемента S (чувствительность) - значениям σ . Экстраверсия (E) и восприимчивость (P) содействуют проявлению обоих «сильных» значений первого фактора. Также восприимчивость благоприятствует значению π_2 , а – интроверсия (I) – π_3 . Организованность (J) благоприятствует значениям σ_2 и σ_3 . Представляется, что большего сказать по данному поводу нельзя. Эти соображения определяют отображение MBTI типов на факторы, если в случае неопределённости присваивать фактору неопределённое значение ρ . Это значение, т.о., на практике не обязательно указывает на «средний» стиль разработчика (в сравнении с крайне выраженными стилями), а, скорее, на то обстоятельство, что крайние значения прогнозировать только на основании информации MBTI не возможно.

Если такое соответствие между типами Майерс-Бриггс и факторами программной диверсности принять, то придём к таким важным выводам:

(!) Отображение 8-ми психологических типов на факторы диверсности не является сюръекцией на 8-ку факторов с полярными значениями. Больше того. Никакой из психологических типов не является самодостаточным в том смысле, что среди соответствующих ему значений факторов программной диверсности обязательно присутствует хотя бы одно неопределённое значение, за которым

скрываются черты, могущие существенным образом влиять на стиль разработчика.

(!!) Отображение психологических типов на факторы диверсности не является также инъективным. При этом имеется всего две пары типов с общим набором факторов диверсности.

(!!!) Большинство значений факторов (2 из 3-х) относятся к полярным только у типов ESJ, ENP, INP. Поэтому опросы пользователей инструментальных средств разработки систем с целью уточнения факторов диверсности, которые им соответствуют, выгодно проводить среди лиц с указанными типами. Правда, для большей полноты, к числу опрашиваемых следует привлекать и тип ESP, т.к. только он имеет по первому фактору значение σ . В то же время участие в таких опросах лиц с типами ENJ, ISP малопродуктивно в силу того, что все соответствующие им факторы имеют неопределённые значения.

6 Заключение

В работе на основе оценки распределения личностных признаков среди программистов показано, что в коллективах свыше 3 чел вероятность иметь двух исполнителей с разными типами личности превышает 60% и быстро возрастет с увеличением численности коллектива. Принимая гипотезу о факторах диверсности, прогноз успешности диверсного подхода к разработке ПС можно конкретизировать. Созданный для этого метод позволяет руководителю конкретного коллектива, который имеет достоверные данные о личностных характеристиках исполнителей, целенаправленно планировать назначение исполнителей разных версий и прогнозировать результат.

Понятно, что достоверность таких прогнозов будет повышаться по мере уточнения методов оценки факторов диверсности в личностных профилях разработчиков ПС и в характеристиках используемых ими средств. Это требует проведения соответствующих исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харченко В. С. Метрики диверсности: Классификация, анализ и применение для оценки надежности и безопасности компьютерных систем управления / В. С. Харченко, И. В. Пискачева, В. В. Скляр // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии.– Харьков: Нац. аэрокосмический ун-т «ХАИ».– 2001.– Вып. 9.– С. 194-214.
2. Скляр В. В. Анализ метрик многоверсионности программного обеспечения / В. В. Скляр // Электронное моделирование. – 2004. – Т. 26. – № 4. – С. 95-104.
3. Харченко В. С. Применение динамических радиальных метрических диаграмм для управления многоверсионными программными проектами / В. С. Харченко, О. М. Тарасюк, А. В. Волковой, Ю. А. Белый // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. - 2005. - № 2 (10). - С. 63-68.
4. Яновский М. Э. Оценка диверсности программного обеспечения с использованием косвенных метрик / М. Э. Яновский // Радіоелектронні і комп'ютерні системи, 2009, № 7 (41) . - С. 255-260.

5. Capretz L. F. Why do we need personality diversity in software engineering / L. F. Capretz, F. Ahmed // ACM SIGSOFT Software Engineering Notes. – ACM, 2010. – Vol. 35, № 2. – P. 1-11.
6. Avizienis A. The n-version approach to faulttolerant software / A. Avizienis // IEEE Transactions on Software Engineering. – 1985. – Vol. 11, № 12. – P.1491-1501.
7. Diversity Strategies for Nuclear Power Plant Instrumentation and Control Systems [Електр. ресурс] / NUREG/CR-7007, ORNL/TM-2009/302. - Office of Nuclear Regulatory Research :Feb 2010 // 17.01.2015. – Режим доступа <http://pbadupws.nrc.gov/docs/ML1008/ML100880143.pdf> . – Название с экрана.
8. Method for Performing Diversity and Defense-in-Depth Analyses of Reactor Protection Systems [Електр. ресурс] / NUREG/CR-6303 :December, 1994 // 17.01.2015. – Режим доступа. - <http://pbadupws.nrc.gov/docs/ML0718/ML071860536.pdf> . – Название с экрана
9. Jung C. G. Psychological Types / C. G. Jung. – [2nd.ed.] – Princeton University Press, 1971. – 608 p. – (Collected Works of C.G. Jung, Vol. 6)
10. Myers I. B. A Guide to the Development and Use of the Myers-Briggs Type Indicator / I. B. Myers, M. H. McCaulley, N. L. Quenk, A. L. Hammer. – [3rd.ed.] – Consulting Psychologists Press, 1998. – 420 p. – (MBTI Manual)
11. Keirse D. Please Understand Me: Character and Temperament Types / David Keirse, Marilyn Bates. – [5th.ed.] – Prometheus Nemesis Book Company, 1984. – 210 p.
12. Bush, C.M. In search of the perfect programmer / C. M. Bush, L. L Schkade //Datamation. – 1985. – Vol. 31, № 6. – P. 128-132.
13. Lyons, M.L. The DP psyche / Micael L. Lyons // Datamation. – 1985. – Vol. 31, № 16. – P. 103-110.
14. Buie, E. A., Psychological type and job satisfaction in scientific computer professionals / E. A. Buie // Journal of Psychological Type. – 1988. – Vol. 15. – P. 50-53.
15. Thomsett, R. Effective Project Teams: A Dilemma, a Model, a Solution / Rob Thomsett // American Programmer. – 1990. – July-August. – P. 25-35.
16. Teague J. Personality Type, Career Preference and Implications for Computer Science Recruitment and Teaching / Joy Teague // Proceedings of the 3rd Australasian conference on Computer science education, ACSE. – ACM, New York. – 1998. – P. 155-163.
17. Capretz, L. F. Personality types in software engineering / Luiz Fernando Capretz // Int. J. Human-Computer Studies. – 2003. – 58. – P. 207-214.
18. Varona D. / A multicultural comparison of software engineers / Daniel Varona, Luiz Fernando Capretz, Arif Raza // World Transactions on Engineering and Technology Education. – WIETE, 2013. – Vol. 11, № 1. – P. 31-35.
19. Kaluzniacky E. Managing Psychological Factors in Information Systems Work: An Orientation to Emotional Intelligence / E. Kaluzniacky. – Hershey-London: Information Science Publishing, 2004. – 276 p.
20. Kaluzniacky E. Psychologically Aware of IT Workers / E. Kaluzniacky / Encyclopedia of Communities of Practice in Information and Knowledge

- Management [editor Elaine Coakes]. – Hershey-London: Idear Group Reference, 2006. – P. 430-435
21. Абельская Е. Ф. Типоведческое исследование психического склада личности: автореф. дис.... канд. психол. наук / Е. Ф.Абельская . – Екатеринбург : Уральский госун-т им. А. М. Горького, 2006. – 25 с.
 22. Варламова Н., Гахов А., Мищенко В. Реализация вычислительных приложений и факторы программной диверсности. Труды XVII Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". – Харкв, Суми: 2015.- с.
 23. Варламова Н.В., Гахов А.В., Мищенко В.О. Успешность программной диверсности в разработке систем и персональные характеристики разработчика: концептуальная модель. Волинський математичний вісник. Серія «Прикладна математика», збірник наукових праць, 2015 вип.11 (20).- Ровно. - С. 190-206.
 24. Варламова Н. В. Пси-фактор успешности персональной диверсности и личностные характеристики программистов Северо-Востока Украины / Н. В. Варламова, В. О. Мищенко // «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях» (КМНТ-2016)

УДК 517.5:519.651

Способи задання функцій зі змінним періодом та їх наближення

Я. П. Василенко, Л. П. Дмитроца, М. З. Олійник, М. В. Приймак
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

В статті розроблено способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом і записані їх змінні періоди. Розглянута одна із задач наближення функцій тригонометричними рядами – розроблено метод визначення коефіцієнтів Фур'є функцій зі змінним періодом. Ортогональна тригонометрична система функцій із змінним періодом та її інтервал ортогональності узгоджені зі змінним періодом досліджуваної функції. Як приклад, для однієї із функцій записана відповідна система тригонометричних функцій зі змінним періодом, обчислені коефіцієнти Фур'є та побудований скінченний ряд Фур'є, аналіз якого підтверджує правильність отриманих в роботі результатів.

Ключові слова: функції зі змінним періодом, змінний період, коефіцієнти Фур'є функцій зі змінним періодом, ряд Фур'є функцій зі змінним періодом.

В статье разработаны способы аналитического задания функций с изменяющимся периодом и записаны их изменяющиеся периоды. Рассмотрена одна из задач приближения функций тригонометрическими рядами – разработан метод определения коэффициентов Фурье функций с изменяющимся периодом. Ортогональная тригонометрическая система функций с изменяющимся периодом и ее интервал ортогональности согласованы с изменяющимся периодом исследуемой функции. В качестве примера для одной из функций записана соответствующая система тригонометрических функций с изменяющимся периодом, вычислены коэффициенты Фурье и построен конечный ряд Фурье, анализ которого подтверждает правильность полученных в работе результатов.

Ключевые слова: функции с изменяющимся периодом, изменяющийся период, коэффициенты Фурье функций с изменяющимся периодом, ряд Фурье функций с изменяющимся периодом.

The ways of analytical definition of functions with variable period have been developed in the article. Their variable periods have been written as well. A problem of functions approximation by trigonometric series has been considered, namely, a method of definition of Fourier coefficients of functions with variable period has been developed. Orthogonal trigonometric system of functions with variable period and its orthogonality interval have been conformed with variable period of the function under research. As an example, for one of the functions the correspondent system of trigonometric functions with variable period has been written, Fourier coefficients have been calculated, a finite Fourier series have been constructed, which analysis has proved the obtained results.

Key words: functions with variable period, variable period, Fourier coefficients of functions with variable period, Fourier series of functions with variable period.

1. Вступ

Порівняно недавно був введений новий клас функцій – функцій зі змінним періодом [1]. Основною причиною їх появи була необхідність обґрунтувати модель емпіричних (за термінологією Лузіна – безформульних) функцій, характерною особливістю яких є періодичність, але при цьому період повторюваності вже не є постійним, а певним чином змінюється. Такими є

електрокардіограми, отримані під час чи після дії на пацієнта певних збудників спокою, наприклад, фізичного навантаження. Нагадаємо [1], що функція $f(x)$ дійсного аргументу $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ називається **функцією зі змінним періодом** (ФЗП), якщо існує така диференційовна функція $T(x) > 0$, що для всіх $x \in I$ таких, що $x + T(x) \in I$, виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)). \quad (1.1)$$

Функція $T(x)$ називається змінним періодом. Із (1.1) випливає, що при $T(x) = T = \text{const}$ функція $f(x)$ є періодичною з періодом T . Щодо області визначення $I = [a, b]$, то в кожному конкретному випадку вона повинна уточнюватися.

Раніше були отримані вагомі результати в окремих напрямках побудови теорії ФЗП і їх прикладного застосування. В [2-4] розглянуті приклади елементарних ФЗП у вигляді тригонометричних функцій

$$\sin x^\alpha, \cos x^\alpha, \alpha > 0, \alpha \neq 1, x \in I = [0, \infty).$$

Для цих функцій записані їх змінні періоди:

$$T(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, x \in [0, \infty),$$

$$T^-(x) = x - (x^\alpha - 2\pi)^{1/\alpha}, x \in [T(0), \infty).$$

Крім того в [2-4] побудована система тригонометричних функцій

$$\sin kx^\alpha, \cos kx^\alpha, x \geq 0, \alpha > 0, k = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

та показано, що вона є ортогональною на інтервалі $[x_0, x_0 + T(x_0)]$, $x_0 > 0$, із ваговою функцією $\rho_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Якщо врахувати, що для цієї системи її період $T(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$, інтервал ортогональності набуває вигляду $\left[x_0, (x_0^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha} \right]$. Із (1.2), а також із формули змінного періоду та виразу для інтервалу ортогональності видно, що при кожному фіксованому значенні параметра α ми отримуємо відповідно йому нову ортогональну систему.

Важливо наголосити, що систему функцій (1.2) можна узагальнити, якщо замість x^α , що входить в цю систему, взяти функцію $g(x)$. Ця функція повинна бути неперервною, строго зростаючою або спадною. Виявлення інших властивостей функції $g(x)$ та тригонометричної системи функцій $\sin kg(x), \cos kg(x)$, $k = 1, 2, \dots$, зокрема, яким буде змінний період цієї системи, вимагає окремого вивчення.

Маючи клас функцій зі змінним періодом, ортогональні системи тригонометричних ФЗП, виникає питання наступних кроків розвитку теорії та методів дослідження ФЗП. Звичайно, що тут цілком природно скористатися

досвідом вивчення функцій [5,6], в основі якого лежить «алгоритм наближення». Його суть в нашому випадку зводиться до заміни досліджуваної функції $f(x) \in F$, де F – клас функцій зі змінним періодом (клас наближуваних функцій), іншою функцією $g(x) \in G$, де G – множина наближуваних функцій зі змінним періодом. В нашому випадку процес створення «алгоритму наближення» може бути розбитий на декілька етапів. Ось деякі з них:

- ✓ побудова теорії тригонометричних рядів Фур'є ФЗП;
- ✓ розроблення на цій основі методів наближення ФЗП;
- ✓ дослідження наближуваних (отриманих в результаті наближення) ФЗП методами тригонометричних рядів Фур'є.

При розробці тих чи інших методів «алгоритму наближення» виникнуть питання їх перевірки з використанням для цього ФЗП, заданих аналітично. Однак методів аналітичного задання ФЗП, відмінних від найпростіших (тригонометричних) ФЗП, на даний час не існує.

2. Мета роботи та постановка задачі

Мета роботи – розробити способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом, записати вирази їх змінних періодів та розглянути питання знаходження їх коефіцієнтів Фур'є та побудови ряду Фур'є.

3. Способи задання періодичних функцій

Щоб розглянути питання розробки способів аналітичного задання ФЗП, спочатку проведемо аналіз існуючих способів задання періодичних функцій (з постійним періодом). Аналіз літературних джерел, зокрема [7-9], показує, що для цього в основному використовують три різновидності способів (методів, підходів). Це графічно-описові способи, аналітичні способи, метод «зсуву».

3.1 Графічно-описове задання періодичних функцій

Графічний спосіб в основному використовується в літературі технічного спрямування. Для прикладу такий спосіб знаходимо в [7, с.23], де показано графік функції, що має форму періодичних коливань прямокутної форми, та з якого видно, що на проміжку $[-T/2, 0)$ функція приймає значення -1 , на проміжку $[0, T/2)$ – значення 1 . При цьому вказується, що за межами інтервалу $[-T/2, T/2)$ графік функції продовжується періодично. Аналогічно задаються періодичні коливання пилоподібної та інших форм [8, с.25].

3.2 Аналітичні способи задання періодичних функцій

Методи аналітичного задання періодичних функцій – це певним чином побудована суперпозиція спеціально підібраних функцій. Серед функцій, що входять в суперпозицію, можуть бути тригонометричні функції, деякі елементарні функції, зокрема показникова і степенева функції. Широке використання знаходять також функції, що є простими на вигляд, але вже не відносяться до класу елементарних функцій. Це:

- а) **модуль** функції f , тобто $|f|$;
 б) **знак** (сигнум) функції: $\text{sign } f$;
 в) **дробова частина** функції: $\{f\} = f - [f]$, де $[f]$ – ціла частина.

Наведемо приклади аналітичного задання періодичних функцій, даючи їм для зручності відповідні назви.

- а) Тригонометричні функції $\sin x, \cos x, \text{tg } x, \text{ctg } x$. Найбільш використовують перші дві із цих функцій – $\sin x$ та $\cos x$ або їх узагальнення $A \sin(\omega x + \varphi)$ та $A \cos(\omega x + \varphi)$.
 б) Показникова $f(x) = a^{g(x)}$ або степенева $f(x) = (g(x))^a$ функції, де $a > 0$, $g(x)$ – тригонометрична функція, найчастіше $g(x) = \sin x$ або $g(x) = \cos x$.
 в) Модуль функції: $f(x) = |g(x)|$, де $g(x)$ – тригонометрична функція. В більш загальному випадку $f(x) = h(|g(x)|)$, $h(\bullet)$ є неперервна функція.
 г) Знак (сигнум) функції: $f(x) = \text{sign } g(x)$, $g(x)$ – тригонометрична функція.
 д) Дробова частина функції: $f(x) = g(\{x\})$, де $g(\bullet)$ – неперервна зростаюча (спадна) функція, $\{x\}$ – дробова частина числа x .

Приклади аналітичного задання періодичних функцій легко продовжити.

Періодичні функції можна також отримувати із вже побудованих шляхом їх певних перетворень. Це може бути розтяг чи стиснення вздовж осей Ox і Oy , та зсуву по осі Ox вправо чи вліво, по осі Oy – вгору, вниз. Розглянемо приклад та графік однієї із аналітично заданих періодичних функцій.

Приклад 1. Дробова частина від функції $g(x) = x$, $x \in (0, \infty)$, в степені $\alpha > 0$, тобто $f(x) = \{x\}^\alpha$. Графік функції $\{x\}^\alpha$ – це періодичні з періодом $T = 1$ коливання пилкоподібної форми, добре відомі в електро- та радіотехніці [8]. Для $\alpha = 2$ графік функції $\{x\}^2$ зображений на рис.1.

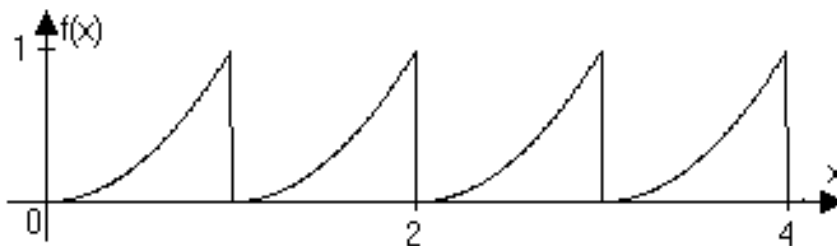


Рис.1. Графік функції $f(x) = \{x\}^2$.

3.3 Спосіб отримання періодичних функцій із використанням оператора зсуву.

Один із способів задання періодичних функцій – це графічний спосіб в поєднанні із оператором зсуву. Про цей спосіб йдеться в [9, с. 34]: для побудови графіка періодичної функції з періодом T достатньо провести побудову на відрізку $[0, T)$ і потім отриману криву **паралельно перенести** на віддаль nT , $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, вправо і вліво вздовж осі Ox . Зауважимо, що для реалізації цього способу чи не єдиним виходом є використання теорії рядів Фур'є [6, с. 29].

4. Способи задання функцій зі змінним періодом та їх змінні періоди

Подібно до основних способів задання періодичних функцій можуть бути розроблені способи задання функцій зі змінним періодом. Проте в цих випадках крім самих способів задання функцій важливим є питання задання їх змінних періодів. Основну увагу ми звернемо лише на способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом.

4.1. Приклади аналітичного задання функцій зі змінним періодом

a) Тригонометричні функції $\sin x^\alpha$, $\cos x^\alpha$, $tg x^\alpha$, $ctg x^\alpha$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

Найбільш використовують перші дві із цих функцій – $\sin x^\alpha$ та $\cos x^\alpha$ або їх узагальнення $A \sin(kx^\alpha + \phi)$ та $A \cos(kx^\alpha + \phi)$.

b) Показникова функція: $f(x) = a^{g(x)}$, де число $a > 0$, $g(x)$ – тригонометрична функція із змінним періодом, найчастіше $g(x) = \sin x^\alpha$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, або $g(x) = \cos x^\alpha$.

c) Степенева функція: $f(x) = (g(x))^a$, де число a та функція $g(x)$ такі ж, як і в пункті 3.2.

d) Модуль функції: $f(x) = |g(x)|$, $g(x)$ – тригонометрична функція зі змінним періодом.

e) Знак (сигнум) функції: $f(x) = \text{sign } g(x)$, $g(x)$ – тригонометрична функція із змінним періодом.

f) Дробова частина: $f(x) = \{g(x)\}^\alpha$, де $a > 0$, $\{\bullet\}$ – дробова частина, $g(x)$ – деяка нелінійна неперервна зростаюча (спадна) функція.

g) Трансформація функцій із змінним періодом.

Розглянуті вище способи отримання функцій із змінним періодом можуть бути узагальнені шляхом застосування до них певних перетворень. В першу чергу це стосується найпростіших перетворень – паралельного переносу та стиснення (розтягу) вздовж осей абсцис і ординат.

Як і у випадку з періодичними функціями, приклади аналітичного задання функцій із змінним періодом можна продовжити.

4.2. Графіки аналітично заданих функцій із змінним періодом.

Наведемо графіки деяких із функцій із змінним періодом та запишемо їх змінні періоди.

Приклад 2. Степенева функція $f(x) = \left(\sin x^{4/3} + \frac{1}{2} \right)^2$ (рис.2), її змінний

період $T(x) = -x + \left(x^{4/3} + 2\pi \right)^{3/4}$ (рис. 4, неперервний графік).

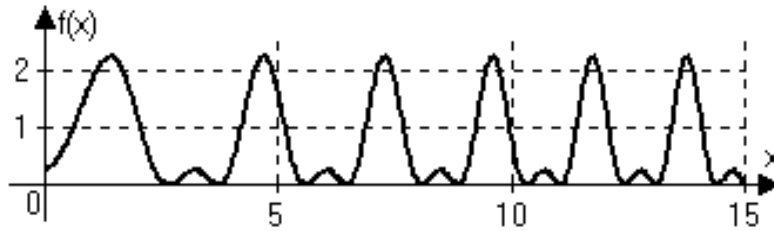


Рис. 2. Графік функції $f(x) = \left(\sin x^{4/3} + \frac{1}{2} \right)^2$.

Приклад 3. Суперпозиція степеневої функції та функції «дробова частина»:

$f(x) = \left\{ x^{3/5} \right\}^2$. Графік цієї функції – це коливання пилкоподібної форми (рис.3)

зі змінним періодом $T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 2\pi \right)^{5/3}$, графік якого зображений на рис. 4 (пунктирна лінія).

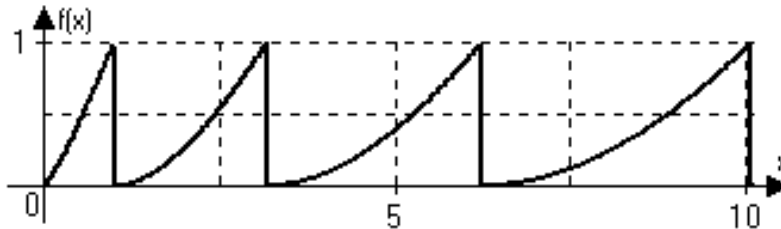


Рис.3. Графік функції $f(x) = \left\{ x^{3/5} \right\}^2$.

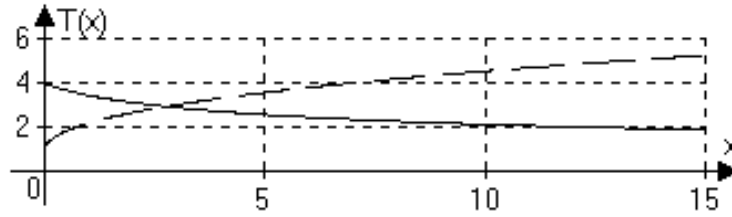


Рис.4. Графіки змінних періодів: $T(x) = -x + \left(x^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4}$ – суцільна лінія;

$$T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 2\pi\right)^{5/3} \text{ – пунктирна лінія.}$$

Приклад 4. Суперпозиція логарифмічної функції та функції «дробова частина»: $f(x) = \{\log_c x\}$, $x \geq 1, c > 1$. При $c = 3$ графік функції $f(x) = \{\log_3 x\}$ показаний на рис.5. Варто звернути увагу, що для цієї функції її змінний період $T(x) = x(c - 1)$, тобто є лінійною функцією з коефіцієнтом $k = c - 1$. Для функції, зображеної на рисунку 5, її змінний період $T(x) = 2x$.

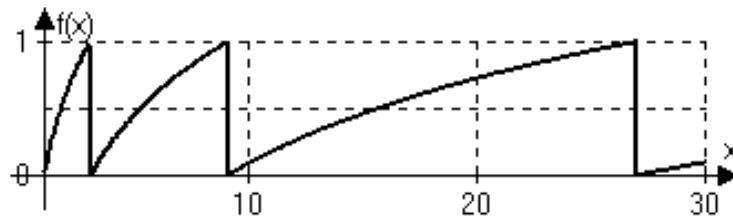


Рис.5. Графік функції $f(x) = \{\log_3 x\}$.

5. Коефіцієнти та ряди Фур'є функцій із змінним періодом

Наявність аналітично заданих функцій зі змінним періодом та їх змінних періодів, а також ортогональних тригонометричних систем ФЗП, дає можливість розглядати питання розробки теорії рядів Фур'є ФЗП. Важливо наголосити, що при цьому повинна виконуватися наступна умова: змінний період функції, для якої припускається будувати її ряд Фур'є та змінний період відповідної системи тригонометричних ФЗП повинні співпадати. Для деяких із наведених вище аналітично заданих ФЗП відповідні їм тригонометричні системи ФЗП є відомими. Не вдаючись до всебічного розгляду ряду питань, що стосуються теорії рядів Фур'є ФЗП, зупинимося лише на конкретному прикладі обчислення коефіцієнтів та побудови скінченного ряду Фур'є ФЗП. Для порівняння результатів обчислень будемо також розглядати паралельно із ФЗП «подібну» до неї функцію з постійним періодом. Необхідні розрахункові формули та додаткову інформацію для цього розмістимо в порівняльній таблиці 1.

Таблиця 1. Дані дослідження

Функція зі змінним періодом	Функція з постійним періодом
$f(x) = \left\{ x^{3/5} \right\}^2$	$f(x) = \{x\}^2$
Змінний період $T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 2\pi \right)^{5/3}$	Період $T = 1$
Ортогональна тригонометрична система функцій $\sin 2\pi k x^{3/5}, \cos 2\pi k x^{3/5}, k = 1, 2, \dots$ із змінним періодом $T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 2\pi \right)^{5/3}$	Ортогональна тригонометрична система функцій $\sin 2\pi k x, \cos 2\pi k x, k = 1, 2, \dots,$ із періодом $T = 1$
Для довільної точки $x_0 \geq 0$ інтервал ортогональності $[x_0, x_0 + T(x_0)] = \left[x_0, \left(x_0^{3/5} + 1 \right)^{5/3} \right]$	Для довільної точки $x_0 \geq 0$ інтервал ортогональності $[x_0, x_0 + 1]$
Скалярний добуток функцій на інтервалі $\left[x_0, \left(x_0^{3/5} + 1 \right)^{5/3} \right]$ із ваговою функцією $\rho(x) = \frac{3}{5} x^{-2/5} :$ $(f, g) = \int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5} + 1 \right)^{5/3}} \frac{3}{5} x^{-2/5} f(x) g(x) dx$	Скалярний добуток функцій $f(x)$ і $g(x)$ на інтервалі $[x_0, x_0 + 1]$ із ваговою функцією $\rho(x) = 1$: $(f, g) = \int_{x_0}^{x_0+1} f(x) g(x) dx$
Формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$: $a_0 = 2 \int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5} + 1 \right)^{5/3}} \frac{3}{5} x^{-2/5} f(x) dx,$	Формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$: $a_0 = 2 \int_{x_0}^{x_0+1} f(x) dx,$

$a_k = 2 \int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5} + 1\right)^{5/3}} \frac{3}{5} x^{-2/5} f(x) \cos 2\pi k x^{3/5} dx$ $b_k = 2 \int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5} + 1\right)^{5/3}} \frac{3}{5} x^{-2/5} f(x) \sin 2\pi k x^{3/5} dx$	$a_k = 2 \int_{x_0}^{x_0+1} f(x) \cos 2\pi k x dx,$ $b_k = 2 \int_{x_0}^{x_0+1} f(x) \sin 2\pi k x dx$
Ряд Фур'є $\frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos 2\pi k x^{3/5} + b_k \sin 2\pi k x^{3/5}$	Ряд Фур'є $\frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos 2\pi k x + b_k \sin 2\pi k x$
Квадрат норми функції: $\ f(x)\ ^2 = \int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5} + 1\right)^{5/3}} \frac{3}{5} \cdot x^{-2/5} f^2(x) dx$	Квадрат норми функції: $\ f(x)\ ^2 = \int_{x_0}^{x_0+1} f^2(x) dx$
Нерівність Бесселя: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \leq 2\ f(x)\ ^2$	Нерівність Бесселя: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \leq 2\ f(x)\ ^2$

Використовуючи наведені в таблиці 1 розрахункові формули, були знайдені коефіцієнти Фур'є для функцій $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$ і $f(x) = \{x\}^2$. Результати обчислень наведені в таблиці 2.

Таблиця 2. Коефіцієнти Фур'є

Функція	
$f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$	$f(x) = \{x\}^2$
Інтервал ортогональності	
$\left[5, \left(5^{3/5} + 1\right)^{5/3}\right] = [5, 8.560]$	$[0, 1]$

	Коефіцієнти Фур'є (з точністю до 10^{-4})			
	$a_k, k = \overline{0,10}$	$b_k, k = \overline{1,10}$	$a_k, k = \overline{0,10}$	$b_k, k = \overline{1,10}$
0	0.667		0.667	
1	0.101	-0.318	0.101	-0.318
2	0.025	-0.159	0.025	-0.159
3	0.011	-0.106	0.011	-0.106
4	0.006	-0.080	0.006	-0.080
5	0.004	-0.064	0.004	-0.064
6	0.002	-0.053	0.002	-0.053
7	0.002	-0.045	0.002	-0.045
8	0.001	-0.040	0.001	-0.040
9	0.001	-0.035	0.001	-0.035
10	0.001	-0.032	0.001	-0.032
	$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + b_k^2 = 0.391$		$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + b_k^2 = 0.391$	
	$2\ f(x)\ ^2 = 0.400$		$2\ f(x)\ ^2 = 0.400$	

Порівняння коефіцієнтів Фур'є для функцій $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$ і

$f(x) = \{x\}^2$ показує їх «практичне» співпадання. Деякі неузгодженості можна пояснити похибками обчислень а також, можливо, і програмним забезпеченням Advanced Grapher, яке крім побудови графіків на рисунках 1-7 використовувалося для інтегрування (при знаходженні коефіцієнтів Фур'є) та деяких обчислень.

Використовуючи наведені в таблиці 2 коефіцієнти $a_k, k = \overline{0,10}$ і $b_k, k = \overline{1,10}$, були обчислені значення, що входять в нерівність Бесселя $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \leq 2\|f(x)\|^2$. Виявилось, що $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + b_k^2 = 0.391$, $2\|f(x)\|^2 = 0.4$, тобто при заданій точності 10^{-4} вже при $n=10$ нерівність Бесселя переходить в рівність Парсеваля.

За значеннями коефіцієнтів Фур'є (таблиця 2) побудовані також ряди Фур'є. На рис.6 показано графік побудованого для функції $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$ її

скінченного ряду Фур'є $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^6 a_k \cos 2\pi k x^{3/5} + b_k \sin 2\pi k x^{3/5}$ та графік самої

функції. Порівняння графіків показує, що скінчений ряд Фур'є достатньо «добре» відтворює форму самої функції.

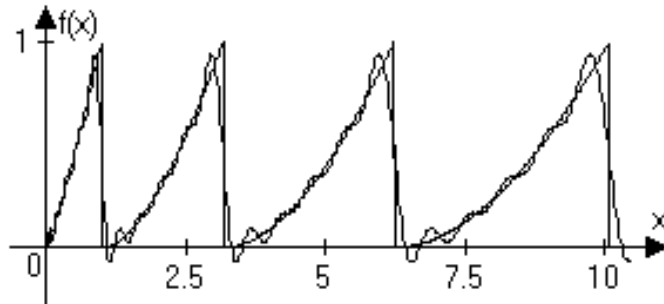


Рис.6. Ряд Фур'є (перші шість пар доданків) для функції $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$ (хвилястий графік) та графік самої функції.

Такі ж висновки можна зробити і щодо скінченного ряду Фур'є для функції $f(x) = \{x\}^2$, графік якого зображений на рис. 7.

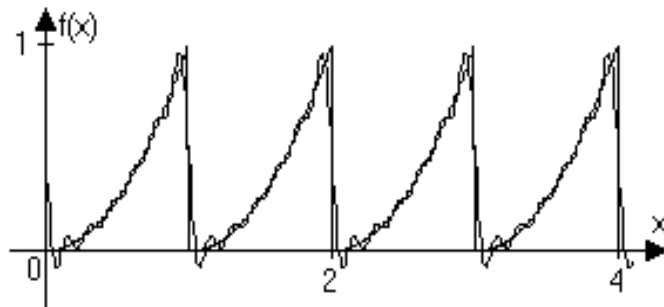


Рис.7. Ряд Фур'є (перші шість пар доданків) для функції $f(x) = \{x\}^2$ (хвилястий графік) та графік самої функції.

6. Висновки

Розроблені в роботі способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом є продовженням розвитку теорії цих функцій. Для однієї із таких функцій обчислені її коефіцієнти Фур'є, аналіз значень яких підтвердив попередньо зроблені припущення про можливість обчислення коефіцієнтів на довільно розміщеному інтервалі ортогональності відповідної системи тригонометричних функцій зі змінним періодом, аби тільки довжина інтервалу узгоджувалася із значенням змінного періоду. Побудований з використанням знайдених коефіцієнтів скінчений ряд Фур'є достатньо «добре» відтворює форму самої функції. Отримані результати можна розглядати як вагомий внесок в теорію рядів Фур'є функцій зі змінним періодом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т.10, №2. – С. 132-141.
2. Приймак М.В. Система тригонометричних функцій із змінним періодом та деякі їх властивості // International Conference on Functional Analysis dedicated to the 90-th anniversary of V.E.Lyantse. 17-21 November 2010. – Lviv. – С. 97-98.
3. Приймак М.В., Василенко Я.П., Дмитроца Л.П. Сигнали зі змінним періодом та їх модель // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка» – К.: Век+, 2013. – №59. – С. 116-121.
4. М.В.Приймак, Я.П.Василенко, Л.П.Дмитроца. Клас функцій зі змінним періодом // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. – №1105. – Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2014. – Випуск 24. – С. 21-32.
5. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: Гос. Изд-во технико-теоретической литературы, 1949. – 454 с.
6. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М.: Гос. изд-во физ. мат-й литературы, 1960. – 390с.
7. Ильин В.А., Садовничий В.А., СендовБл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. Под ред. А.Н.Тихонова. М.: Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.
8. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
9. Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для 9-10 кл. сред. шк. / Под ред. А.Н. Колмогорова. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 1987. – 335 с.

УДК 532.5

Анализ вихрей Моффата внутри прямолинейного канала со вставками при малых числах Рейнольдса

А. А. Гуржий, А. В. Шалденко

Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев, Украина

Рассмотрена задача о двухмерном течении вязкой несжимаемой жидкости внутри прямолинейного канала с системой вставок различной геометрии в приближении малых чисел Рейнольдса. Задача решена численно в терминах "функция тока - завихренность" на равномерной сетке с использованием простого явного метода с разностями против потока. Метод последовательной верхней релаксации был применен при решении уравнений Пуассона для функции тока и давления. Показано, что в течении перед вставками и за ними образуются циркуляционные зоны (вихри Моффата). Установлены количественная зависимость размеров и формы угловых вихревых структур от скорости осевого потока. Определены уровни потерь на давление, вызванные уменьшением эффективного сечения канала.

Ключевые слова: вихри Моффата, вязкая жидкость, ламинарное течение, прямолинейный канал, внутренние вставки.

Розглянуто задачу про двовимірну течію в'язкої нестисливої рідини всередині прямолінійного каналу з системою вставок різної геометрії в наближенні малих чисел Рейнольдса. Задача розв'язана чисельно в термінах "функція току – завихренність" на рівномірній сітці з використанням простого явного методу з різницями проти потоку. Метод послідовної верхньої релаксації був застосований при розв'язанні рівнянь Пуассона для функції току і тиску. Показано, що в течії перед вставками і за ними утворюються циркуляційні зони (вихори Моффата). Встановлено кількісна залежність розмірів і форми кутових вихрових структур від швидкості осьового потоку. Визначено рівні втрат на тиск, викликаний зменшенням ефективного перетину каналу.

Ключові слова: вихори Моффата, в'язка рідина, ламинарний плин, прямолінійний канал, внутрішні вставки.

The problem stated for two-dimensional flow of viscous incompressible fluid in a straight channel with a system of fittings having different geometry is considered using the approximation for the case of small Reynolds numbers. The problem is solved numerically in terms of "stream function - vorticity" on a uniform grid using a simple explicit method with upwind differences. The method of successive over-relaxation was applied for solving the Poisson equations for the function of stream and pressure. It is shown that the flow forms the circulating zones (Moffat's vortices) before fittings and after them. The quantitative dependence of the size and shape of the corner vortex structures on the axial velocity of the flow is determined. The pressure loss levels caused by decrease of the effective channel cross section are defined.

Key words: Moffat's vortices, viscous liquid, laminar flow, straight channel, internal fittings.

1. Введение

В последнее время в современной научной литературе отмечается повышенное внимание анализу проблемы формирования и взаимодействия локализованных вихревых структур различного масштаба. Их влияние на формирование течений, условия протекания различных вторичных эффектов сегодня уже не вызывают сомнений. Если работы начала прошлого столетия были в основном направлены на объяснение "вихревой теории материи" [1] на

основе взаимодействия инерционных эффектов и сил гравитации, то сегодня интерес к проблемам вихревой динамики (“сухожилий и мускулов течения жидкости” [2]) обусловлен новым пониманием преобладающего влияния вихревых структур на формирование течений различной природы, интенсивных процессов переноса скалярных полей в сплошных средах, образование неустойчивости потока и последующего перехода в турбулентность, генерацию вихревого звука и др. [3, 4].

Важной в понимании процесса образования вихрей явилась работа Моффата [5], в которой впервые были обнаружены локализованные вихревые структуры в угловых областях внутренних течений (двумерная прямоугольная полость с одной подвижной границей) при малых числах Рейнольдса. Автор аналитически показал, что в углах полости с неподвижными границами формируется локализованная область течения с ненулевой завихренностью. Она имеет форму треугольника, катеты которого примыкают к границам, а гипотенуза касается внешнего течения. В современной научной литературе [6-8] такие вихревые структуры получили название вихрей Моффата. Направление циркуляции в этих областях определяется направлением движения жидкости вдоль гипотенузы. Характерной особенностью вихрей Моффата является то, что модуль скорости внутри замкнутой циркуляционной зоны примерно на порядок меньше скорости внешнего потока.

Долгое время считалось, что образование застойных зон в угловых областях течений не оказывают существенного влияния на общее поведение потока вязкой жидкости во внутренних течениях [9] при малых числах Рейнольдса (приближение Стокса). Вихри Моффата часто использовались в качестве тестовых задач при разработке различных численных методов для решения уравнений движения сплошной среды. Сегодня имеется аналитическое обобщение этой задачи для трехмерных течений [10].

Недавние исследования [11,12,13] показали, что локализованные вихревые структуры в угловых зонах внутренних течений играют важную роль в формировании процессов переноса тепла в охладительных системах (микроканалы различной геометрии с системой перпендикулярных вставок) при малых числах Рейнольдса. Такие микроканалы применяются при охлаждении различных устройств радио-электронной аппаратуры (чипы, микропроцессоры) Медленное движение теплоносителя в угловых зонах течения приводит к ее нагреву за счет внешнего диффузионного потока. Было показано, что угловые циркуляционные зоны, по мере увеличения скорости течения, приобретают квазистационарность, которая приводит к периодическому колебательному движению границы, разделяющей вихри Моффата и внешний поток. При этом часть холодной жидкости из внешнего потока поступает в угловую область течения, и такой же объем теплоносителя выносится основным течением. В результате общий конвективный перенос тепла из внешней среды в канал существенно повышается при малых числах Рейнольдса.

Формирование вихрей Моффата во внутренних течениях уменьшает эффективное сечение каналов и приводит к соответствующему повышению усредненного градиента давления, необходимого для формирования течения с заданной скоростью. Анализ научной литературы показал, что этому вопросу

уделено мало внимания. Проблема влияния скорости течения на физические параметры угловых циркуляционных течений фактически не рассматривалась.

Целью работы является установление влияния скорости течения внутри прямолинейного канала с перпендикулярными вставками различной геометрии на размеры и форму циркуляционных областей в угловых зонах течения в приближении малых чисел Рейнольдса. Необходимо выяснить влияние размера и количества вихрей Моффта на разность давлений, прикладываемую к входу в выходу канала, для поддержания заданной скорости течения в канале.

2. Математическая постановка задачи

Движение однородной вязкой несжимаемой жидкости с постоянной плотностью ρ и коэффициентом кинематической вязкости ν описывается уравнением Навье-Стокса и уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{U}(U, V, W)$ – поле скорости, p – поле давления.

Наложение операции ротора на уравнение (1) позволяет получить уравнение переноса завихренности. В двухмерном случае поле завихренности имеет единственную компоненту ($\omega = \partial V / \partial x - \partial U / \partial y$), направленную перпендикулярно к плоскости течения. В этом случае уравнение переноса завихренности приобретает простой вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial U \omega}{\partial x} + \frac{\partial V \omega}{\partial y} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right\}, \quad (3)$$

Если ввести функцию тока, связанную с распределением поля скорости выражениями

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (4)$$

то можно получить уравнение Пуассона для функции тока

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega. \quad (5)$$

В дальнейшем, при необходимости, по заданному распределению поля скорости можно восстановить распределение поля давления, воспользовавшись уравнением Пуассона для давления

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\rho \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \right\}. \quad (6)$$

Поставленная задача должна быть дополнена начальными и граничными условиями. Граничными условиями являются (рис.1)

$$U|_{S1, S2} = 4U_0 y \left(\frac{1}{D} - \frac{y}{D^2} \right), \quad U|_{S3, S4} = 0, \quad V|_{S1, S2, S3, S4} = 0,$$

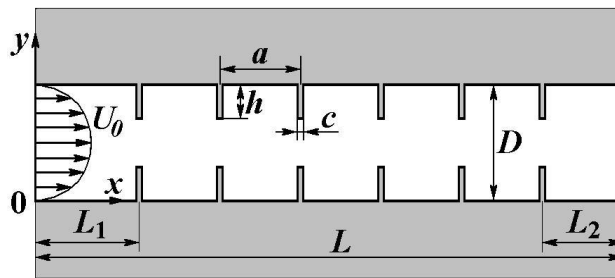


Рис. 1. Геометрия канала с системой симметричных вставок

$$\Psi|_{s1,s2} = \frac{4y^2U_0}{D} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{3D} \right), \quad \Psi|_{s3} = 0, \quad \Psi|_{s4} = \frac{2DU_0}{3}, \quad (7)$$

$$\omega|_{s1,s2} = \frac{4U_0}{D} \left(1 - \frac{2y}{D} \right), \quad p|_{s1} = p_0, \quad p|_{s2} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{s3,s4} = 0.$$

Здесь U_0 – максимальная скорость течения на входе канала.

Граничные условия для поля завихренности на твердых поверхностях будет определено далее.

В качестве начальных условий для полей скорости $U(x,y,0)$, $V(x,y,0)$ функции тока $\Psi(x,y,0)$ и завихренности $\omega(x,y,0)$ выбирается распределения полей, полученные в результате решения соответствующей стационарной задачи (3-5) с граничными условиями (7).

В дальнейшем поставленную математическую задачу удобно пронормировать на U_0 , D – ширину канала и ρ – плотность жидкости. В этом случае время будет отнесено к величине D/U_0 , поле завихренности будет пронормировано на отношение U_0/D , функция тока – на величину U_0D , а давление будет отнесено к величине ρU_0^2 . В этом случае можно ввести параметр течения – число Рейнольдса, равное отношению

$$\text{Re} = \frac{U_0D}{\nu}. \quad (8)$$

В дальнейшем будут при решении задачи и анализе полученных результатов используются только безразмерные переменные и величины.

3. Численная модель течения

Рассмотрим течение вязкой однородной жидкости внутри двумерного прямолинейного канала длиной $L = 18.0$ (рис.1) и шириной $D = 1.0$. Внутри канала расположена система перпендикулярных вставок шириной $c = 0.1$, высотой h , расположенные симметрично (и в шахматном порядке, несимметрично) на расстоянии a друг относительно друга. Начальный и конечный участки канала длиной $L_1 = L_2 = 2.0$ отведены для стабилизации течения жидкости, поступающей (выводимой) в канал. Течение жидкости направлено слева направо.

Задача решалась численно на равномерной сетке с пространственной дискретизацией $\delta = 0.05$ и временной дискретизацией Δ . Введем обозначения индексов узловых значений физических полей в рассматриваемой задаче следующим образом

$$\begin{aligned}\Psi(x, y, t) &= \Psi(i\delta, j\delta, n\Delta) = \Psi_{i,j}^n, & U(x, y, t) &= U(i\delta, j\delta, n\Delta) = U_{i,j}^n \\ V(x, y, t) &= V(i\delta, j\delta, n\Delta) = V_{i,j}^n, & \omega(x, y, t) &= \omega(i\delta, j\delta, n\Delta) = \omega_{i,j}^n.\end{aligned}\quad (9)$$

Уравнение переноса завихренности (3) решалось с использованием простого явного метода второго порядка точности по пространственным переменным и первого порядка точности по времени. Нелинейное конвективное слагаемое в численной схеме записано разностями первого порядка против потока. В конечном итоге получаем

$$\omega_{i,j}^{n+1} = (1-4\beta)\omega_{i,j}^n - \beta^*(A_{i,j}^n + B_{i,j}^n) + \beta(\omega_{i-1,j}^n + \omega_{i+1,j}^n + \omega_{i,j-1}^n + \omega_{i,j+1}^n), \quad (10)$$

где

$$A_{i,j}^n = \begin{cases} U_{i,j}^n \omega_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n \omega_{i-1,j}^n & \text{при } U_{i,j}^n \geq 0, \\ U_{i+1,j}^n \omega_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n \omega_{i,j}^n & \text{при } U_{i,j}^n < 0, \end{cases}$$

$$B_{i,j}^n = \begin{cases} V_{i,j}^n \omega_{i,j}^n - V_{i,j-1}^n \omega_{i,j-1}^n & \text{при } V_{i,j}^n \geq 0, \\ V_{i,j+1}^n \omega_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n \omega_{i,j}^n & \text{при } V_{i,j}^n < 0, \end{cases}$$

В приведенном выражении использовались обозначения

$$\beta = \frac{\Delta}{\delta^2}, \quad \beta^* = \frac{\Delta}{\delta^2 \text{Re}}. \quad (11)$$

Выражение (10) позволяет определить распределение поля завихренности во внутренних узлах расчетной области. На поверхностях S_1 и S_2 заданы граничные условия Дирихле, которые вносятся на произвольном временном слое. Граничные условия на поверхностях S_3 и S_4 получаются в результате разложения в ряд Тейлора распределения поля функции тока [14]

$$\omega|_{S_{3,S4}} = 2 \frac{\Psi_s - \Psi_{s+1}}{\delta^2}, \quad (12)$$

где индекс s обозначает слой на твердой поверхности канала, а индекс $s+1$ соответствует следующему слою в направлении, перпендикулярном к стенке.

Не смотря на свою простоту программной реализации, простой явный метод имеет существенный недостаток, связанный с устойчивостью вычислений. Схема имеет ограничение на шаг интегрирования по времени, выполнение которого обеспечивает сходимость итерационных вычислений. Некоторые подробности анализа этой численной схемы можно найти в [13,14].

Уравнение Пуассона для функции тока (5) и для поля давления (6) решалось с использованием метода последовательной верхней релаксации [14]

$$\Psi_{i,j}^{(k+1)} = (1-\lambda)\Psi_{i,j}^{(k)} + \frac{\lambda}{4}(\Psi_{i-1,j}^n + \Psi_{i+1,j}^n + \Psi_{i,j-1}^n + \Psi_{i,j+1}^n - S\delta^2). \quad (13)$$

В приведенном уравнении λ – параметр релаксации, значение которого выбирается в соответствии с рекомендациями [14]. Последнее слагаемое в уравнении (13) представляет собой источниковое слагаемое: в уравнении Пуассона для функции тока $S = -\omega$.

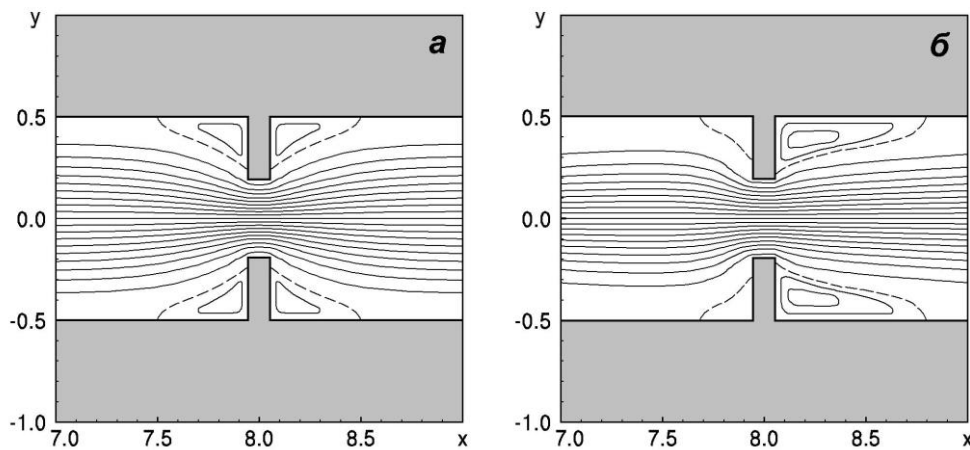


Рис.2. Распределение функции тока внутри канала с вставками $h = 0.3$, $a = 2.0$ при а) $Re = 40$, б) $Re = 100$

Аналогичное выражение использовалось при решении уравнения Пуассона для давления (6) с правой частью

$$S_{i,j} = \frac{1}{2\delta^2} [(U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n)(V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n) - (U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n)(V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n)]. \quad (14)$$

Численная схема решения поставленной задачи была протестирована на двумерной задаче течения вязкой несжимаемой жидкости внутри прямолинейного канала без вставок, которая имеет аналитическое решение [15]. Анализ численных результатов показал, что точность определения поля функции тока на пространственной дискретизации $\delta = 0.05$ составляет величину $E_\Psi \approx 10^{-5}$, а поля скорости – $E_U \approx 10^{-4}$ для чисел Рейнольда $Re < 650$. В тестовой задаче поле давления было определено с точностью $E_p \approx 10^{-4}$, поле завихренности – $E_\omega \approx 10^{-3}$. Можно сделать вывод, что численное решение найдено с хорошей точностью в указанном диапазоне чисел Рейнольдса для проведения последующих вычислений и анализа полученных результатов.

4. Численные результаты

Рассмотрим течение жидкости внутри прямолинейного канала с системой симметричных вставок высотой $h = 0.3$, расположенные на расстоянии $a = 2.0$. На рис.2 показано распределение функции тока $\Psi(x,y)$ в средней части канала, полученное при достижении течением стационарного режима, который контролировался изменением во времени профиля скорости на входе канала. На рисунке нанесены система линий тока с шагом дискретизации $\Delta\Psi = \Psi_{S_4}/20$. Циркуляционные зоны показаны штриховой линией, которая начинается и заканчивается на твердой поверхности. Линии тока внутри вихрей Моффата нанесены на рисунках с шагом дискретизации $\Delta\Psi = 0.001$.

По мере приближения потока к вставкам скорость течения увеличивается, что соответствует сгущению линий тока на рисунке. При малых значениях чисел

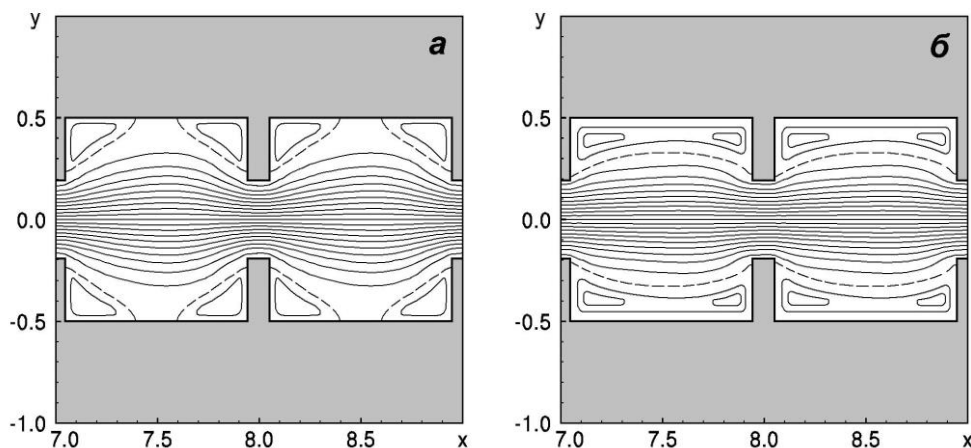


Рис.3. Распределение функции тока внутри канала с вставками $h = 0.3$, $a = 1.0$ при а) $Re = 40$, б) $Re = 100$

Рейнольдса (рис.2,а) до и после вставки образуются две симметричные циркуляционные зоны. Жидкости в верхних зонах, соответствующих вихрям Моффата, вращаются против часовой стрелки, а в нижних зонах – в противоположном направлении. При увеличении скорости течения (рис.2,б) симметрия нарушается: гидродинамический напор уменьшает размеры вихрей Моффата, расположенных до вставки. С другой стороны, движение жидкости по инерции способствует увеличению размеров угловых вихрей, расположенных за вставками. Можно заметить, что при увеличении скорости течения вихри Моффата за вставками увеличивают свою скорость вращения, в то время как вихри до вставок постепенно свою угловую скорость вращения уменьшают.

Аналогичная тенденция наблюдается при уменьшении расстояния между вставками. На рис.3. показано распределение функции тока $\Psi(x,y)$ при $h = 0.3$ и $a = 1.0$, выполненный в аналогичном стиле. При малых числах Рейнольдса распределение функции тока является симметричным относительно вставок. Сравнение рис.2,а и рис.3,а позволяет сделать вывод о том, что форма и размер угловых вихревых структур примерно одинаковы при малых скоростях течения основного потока. Вихри Моффата перед вставкой и за ней в первом приближении можно считать одинаковыми для разных значений расстояний a между вставками. При увеличении скорости осевого потока вихри Моффата вытягиваются вдоль границы и замыкаются (рис.3,б), образуя единую циркуляционную зону, отделяющую осевой поток от границ канала.

С увеличением скорости течения размер циркуляционных зон возрастает. На рис.4 показана зависимость площадей вихрей Моффата перед вставкой (S_1 , штриховая линия) и после вставок (S_2 , сплошная линия) для разных значений высот вставок. В диапазоне чисел Рейнольдса $Re < 40 \dots 50$ площади циркуляционных зон перед и после вставок примерно одинаковы. С увеличением скорости течения зоны после вставок существенно увеличиваются в размерах. Такая тенденция проявляется и для меньших вставок, $h = 0.2$. Для малых вставок ($h = 0.1$) площади циркуляционных зон оказываются малыми,

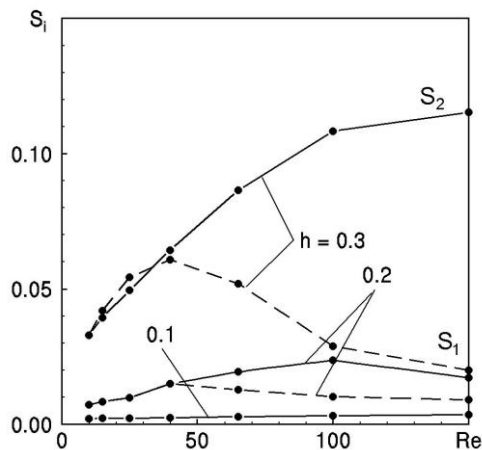


Рис.4. Зависимость площади циркуляционных зон от скорости осевого потока для вставок высотой $h = 0.3$

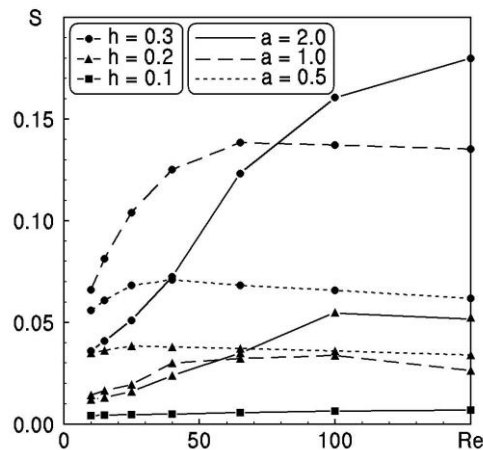


Рис.5. Зависимость общей площади циркуляционных зон от скорости осевого потока для $a = 0.5, 1.0$ и 2.0

причем их размеры остаются практически неизменными в области скоростей, соответствующих значениям $Re < 150$.

Рис.5 иллюстрирует зависимость общей площади ($S = S_1 + S_2$) вихрей Моффата, которая приходится на один сегмент канала между вставками, от скорости течения жидкости в канале с обозначениями, показанными на рисунке. Видно, что для каждого значения высоты вставок и значения расстояния между вставками, площади циркуляционных зон увеличиваются, затем, при некотором значении числа Рейнольдса Re , достигают максимума. Дальнейшее увеличение скорости потока приводит к уменьшению размеров вихрей Моффата. Однако, можно заметить общую тенденцию: большие размеры циркуляционных зон соответствуют большим значениям высот вставок и расстояний между ними для одинаковых значений скорости осевого потока жидкости.

Существенное усложнение структуры потока около вставок вызывает соответствующие изменения в поле давления. На рис.6 показано распределение поля давления около вставки ($h = 0.3, a = 1.0$) при $Re = 40$. Видно, что при замедлении потока осевой градиент поля давления уменьшается, в то время как за вставкой течение ускоряется, а осевой градиент поля давления увеличивается. Интересно заметить, что по распределению поля давления достаточно сложно выявить угловые вихревые структуры, что подтверждает фундаментальный вывод о том, что распределение давления явно в уравнении переноса завихренности не участвует [4].

На рис.7 показана зависимость разности приложенного к входу и выхода прямолинейного канала от скорости течения в нем при разных значениях высоты вставок ($h = 0.1 \dots 0.3$) и расстояния ($a = 0.5 \dots 2.0$) между ними. Обозначения кривых показаны на рисунке. Сплошной линией представлена зависимость для прямолинейного канала без вставок. Видно, что усредненный вдоль канала градиент давления прямо пропорционален скорости течения, что

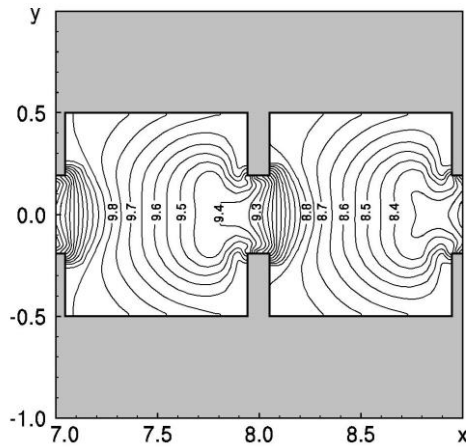


Рис.6. Распределение поля давления в канале с симметричными вставками

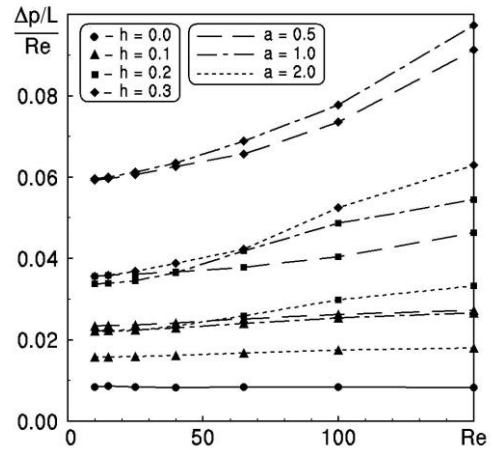


Рис.7. Зависимость приложенной к каналу разности давлений от скорости течения жидкости

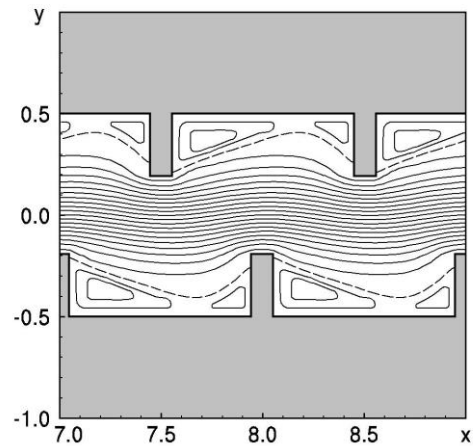
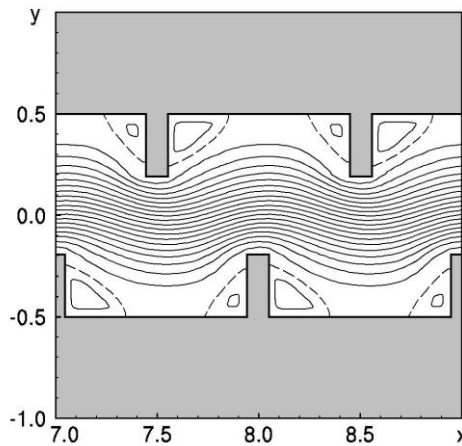


Рис.8. Распределение функции тока внутри канала с несимметричными вставками $h = 0.3$, $a = 1.0$ при а) $Re = 40$, б) $Re = 100$

согласуется с данными [13]. Численный анализ данных на рис.7 показал, что разность давлений, приложенных к каналу, определяется количеством вставок и их высотой. Вихревые структуры, формируемые около вставок, существенного влияния на величину Δp при малых числах Рейнольдса ($Re < 50 \dots 70$) не оказывают. При увеличении скорости осевого потока в канале энергия, необходимая на формирование вихрей Моффата становится соизмеримой с энергией потока, наклон кривой на рис.7 при числах Рейнольдса $Re > 100$ заметно возрастает.

При несимметричном расположении вставок, качественная структура вихрей Моффата совпадает со случаем симметричного распределения вставок (рис.8). Заметные отличия возникают только в форме границы, разделяющей циркуля-

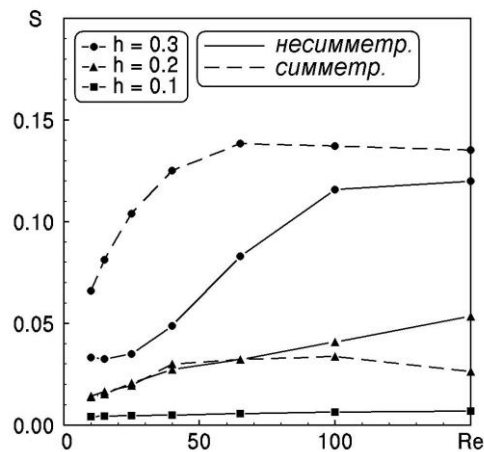


Рис.9. Залежність площі циркуляційних зон від швидкості осевого потоку для симметричних та несимметричних вставок висотою $h = 0.2$

ционну зону від зовнішнього потоку. Несимметричність потоку приводить до того, що циркуляційні зони перед вставкою стають менше за площі, оскільки потік, двигаясь по інерції, “придавлює” вихри Моффата до твердої поверхності. Цей же ефект сприяє збільшенню вихрей Моффата, які формуються після вставки (рис.9).

5. Висновки

Розглянуто задачу про двохмерне рух в'язкої несжимаємої рідини всередині прямолинійного каналу з системою симетричних та несиметричних вставок в наближенні малих чисел Рейнольдса. Задача розв'язувалась чисельно в термінах “функція току - завихренність” на рівномірній сітці з використанням простого явного методу з різницями проти потоку для розв'язання рівняння переносу завихренності та методу послідовної верхньої релаксації для розв'язання рівняння Пуассона для функції току та рівняння Пуассона для тиску.

Основне уваження в роботі уделено аналізу параметрів циркуляційних зон, утворених рухом в'язкої рідини навколо системи вставок. Показано, що вставки збільшують втрати на тиск, яке необхідно прикласти до входу та виходу каналу для досягнення заданої осевої швидкості каналу. Звуження каналу призводить до помітного підвищення втрат на тиск, викликане зменшенням ефективного сечення каналу не тільки в області розміщення вставок, але й звуженням каналу за рахунок циркуляційних зон, формуваних перед вставками та за ними.

Встановлено, що площа кутових вихрей Моффата збільшується з збільшенням швидкості осевого потоку, досягає максимального значення, і подальше збільшення швидкості течії призводить до поступового зменшення їх розмірів для певних значень висоти h вставок та відстані a між ними. Показано, що вихреві структури перед вставкою та за нею можуть при певних значеннях чисел Рейнольдса з'єднатися,

образує єдину вихреву структуру, відділяючу основне течіння від твердої границі.

Застосування системи перпендикулярних вставок в каналах охолоджуючих систем радіоелектронної апаратури дозволяє значительно інтенсифікувати процеси переносу тепла з зовнішньої середовища в рідкий теплоносітель при ламінарних режимах течіння. Вивчення впливу локалізованих кутових структур на процеси переносу скалярних полів представляє сьогодні одне з перспективних технічних напрямків, дозволяючих вирішити проблему контролюваного і управляемого теплоотвода в мікроелектроніці.

ЛИТЕРАТУРА

1. Silliman R.H. William Thomson: Smoke rings and nineteenth-century atomism // *ISIS*. – 1963. – Vol.54, N4. – p.461-474.
2. Saffman P.G., Baker G.R. Vortex interactions // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 1979. – Vol.11, N1. – p.95-121.
3. Бэтчелор Д. Введение в динамику жидкости.:М: Мир, 1973. – 758с.
4. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур // К: Наукова думка., 1993. – 280с.
5. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1964. – Vol.18, N1. – p.1-18.
6. Trueba J.L., Arrayás M. Vorticity field, helicity integral and persistence of entanglement in reaction-diffusion systems // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. – 2009. – Vol.42, N28. – p.282001.
7. Oliveira M.S.N., Rodd L.E., McKinley G.H., Alves M.A. Simulations of extensional flow in microrheometric devices // *Microfluidics and nanofluidics*. – 2008. – Vol.5, N6. – p.809-826.
8. Denn M.M. Fifty years of non-Newtonian fluid dynamics // *AIChE journal*. – 2004. – Vol.50, N10. – p.2335-2345.
9. Bajer K., Moffatt H.K.. *Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics* – London: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 384p.
10. Gomilko A.M., Malyuga V.S., Meleshko V.V. On steady Stokes flow in a trihedral rectangular corner // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2003. – Vol.476 – p. 159-177.
11. Roberts E.P.L., Mackley M.R. The simulation of stretch rates for the quantitative prediction and mapping mixing within a channel flow // *Chemical Engineering Science*, 1995. – V.50, N.23. – p.3727-3746.
12. Halpern D., Wei H.H. Electroosmotic flow in a microcavity with nonuniform surface charges // *Langmuir*. – 2007. – Vol. 23, N18. – p.9505-9512.
13. Гуржий А.А., Шалденко А.В. Анализ процессов теплопередачи в криволинейных микроканалах, заполненных вязкой несжимаемой жидкостью // *Восточно-европейский журнал передовых технологий*. – 2015. – Т.78, N.6/8. – с.41-49.
14. Роч П. Вычислительная гидромеханика / П.Роч. – М.: Мир, 1980. – 616с.

УДК: 004.942:519.6

Methods of calculating the partial derivatives of the electron radiation dose measured with dosimetric wedge

V. T. Lazurik*, G. F. Popov*, Sawan Salah*, Z. Zimek**

*V.N. Karasin Kharkiv National University 4 Svobody Sq., 61022, Kharkiv, Ukraine

**Institute of Nuclear Chemistry and Technology ul. Dorodna 16, 03-195, Warsaw, Poland

In the work, the numerical methods of determining the standard characteristics of the electron radiation depth-dose distribution by processing the measurement results are compared with the empirical formulas linking the same characteristics with the electrons energy. The comparison results allow authors to estimate the accuracy of methods used in radiation technologies to determine the characteristics of electron radiation energy.

Key words: *electron radiation, depth-dose distribution, numerical methods, semi-empirical model, empirical formulas.*

У роботі проведено порівняння чисельних методів обробки результатів вимірювань для визначення стандартних характеристик глибинних розподілів дози електронного випромінювання і емпіричних формул, що зв'язують ці характеристики з енергією електронів. Результати порівняння дозволяють оцінювати точність визначення характеристик енергії електронного випромінювання, методами, які використовуються в радіаційних технологіях.

Ключові слова: *випромінювання електронів, розподіл дози по глибині, чисельні методи, напів-емпірична модель, емпіричні формули.*

В работе проведено сравнение численных методов обработки результатов измерений для определения стандартных характеристик глубинных распределений дозы электронного излучения и эмпирических формул, связывающих эти характеристики с энергией электронов. Результаты сравнения позволяют оценивать точность определения характеристик энергии электронного излучения методами, которые используются в радиационных технологиях.

Ключевые слова: *излучение электронов, распределение дозы по глубине, численные методы, полу-эмпирическая модель, эмпирические формулы.*

Introduction

The necessity to improve existing and to develop new methods for determination and auditing radiation process parameters is associated with expansion of application of radiation technologies. The accuracy and informativeness of methods for determining parameters can be significantly increased due to development of software for processing the results of measurements, performed on existing equipment.

It should be noted, that improvement of accuracy and informativeness of computational methods is not possible without use of physical regularities in the computing algorithms. Therefore, study of possibilities to use empirical regularities for development of improved algorithms for processing the measurement results is an actual task.

The energy of electrons is one of actual parameters of electron beams radiation facility. In the standards [1,2], the formal procedures is discussed, which is intended for determining the most probable energy E_p of electron beam on basis of an

empirical relationship $E_p(R_p)$ and calculation of practical range R_p of electrons according to the relations:

$$R_p = x_p - \frac{D(x_p) - D_{rad}}{D'(x_p)} \quad x_p = \arg \max_{x \in [R_m, R_o]} (-D'(x)) \quad (1)$$

Here $D(x)$ and $D'(x)$ are dose distribution and derivative of dose with respect to depth, D_{rad} is the value of extrapolated dose of electron bremsstrahlung.

However, the results of measurements of electron depth-dose distribution by dosimetric wedge or stack, which are used in the radiation technological centers, are a set of discrete data. Therefore, the formal procedures for determination of energy of electrons require solutions of incorrect mathematical task – numerical differentiation of dose distribution of electrons.

Comparison of methods of electron radiation dose numerical differentiation, which use various approximations of discrete data sets, was reported in [3]. In this work, the values of both the first and the second derivatives were calculated by polynomial approximation methods and the fit of semi-empirical model to the results of numerical experiments.

The results of numerical experiments, which are used in this work, were obtained by RT-Office software [4] with a very small relative statistical error (<0.01%). The results show that methods of fitting the semi-empirical models or polynomial approximation of experimental data allow with sufficient accuracy to calculate values of the first derivative of dose distribution with respect to depth. However, the same computational methods are only suitable for estimates when it goes about determining values of the second derivative of depth-dose distribution.

It should be noted, that electron energy control procedure in the process of radiation treatment of objects is associated with the need to keep the energy of electrons in a certain range. This range of electron energy values in a beam is determined by conditions imposed on dose value distributed in the irradiated object.

For example, for radiation sterilization processes, such conditions include:

- the minimum dose value in the irradiated volume Ω should be greater than some certain predetermined value D_{st} (sterilization dose) required to perform radiation sterilization process

$$\min_{x \in \Omega} (D_M(x, E)) \geq D_{st} \quad (2)$$

- dose uniformity level in the irradiated volume Ω , which is defined as ratio of maximum to minimum dose in this volume, should not exceed a predetermined value DUR required for performing the radiation sterilization

$$\frac{\max_{x \in \Omega} (D_M(x, E))}{\min_{x \in \Omega} (D_M(x, E))} \leq DUR \quad (3)$$

Here $D_M(x, E)$ is the depth-dose distribution of electron radiation in material M resulted from electron irradiation with energy E.

The above conditions are used for determination of an electron beam energy boundaries allowed for irradiation process. At optimal planning of the irradiation process, the range of electron beam energy changes ΔE is determined by values $\Delta D(x_c)$ – uncertainty of dose measurements – in the critical spatial points x_c , which are the points of maximum and minimum of electron radiation dose.

Therefore, when planning radiation sterilization process, the permissible range of electron energies is defined as the actual parameters of radiation installations, and as characteristics of the objects to be sterilized. For small uncertainty of dose measurement results $\Delta D(x_c)$, the allowable energy range of electrons ΔE is determined by partial derivative of the doses $D_M(x, E)$ with respect to electron energy

$$\Delta E = \Delta D(x_c) \cdot \left(\frac{\partial D_M(x_c, E)}{\partial E} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Therefore, an actual task is development of computational methods for determining partial derivatives of electron radiation dose with respect to electron energy, based on results of measurements performed with standard methods in industrial sterilization centers.

Formulation of the problem

Unlike the measured depth-dose distribution in the irradiated object that can be used for numerical differentiation of dose with respect to depth, the experimental data of dose dependence on energy of electrons are not available in industrial sterilization centers. In this regard, one of the key tasks of computational dosimetry, is development of computational methods for determining the partial derivatives of the dose distribution with respect to energy of electron radiation.

In this paper, the authors evaluate the possibility to use a semi-empirical model of electron energy absorption in a substance for calculation of the partial derivative of the dose distribution with respect to electron radiation energy.

The methods of processing depth-dose distribution measured with dosimetric wedge for determining the partial derivatives of electron radiation dose were considered.

Particular attention was paid to the method of determining the acceptable changes in electron beam energy, based on results of measurements performed by standard methods in industrial sterilization centers.

Calculation of partial derivatives of dose with respect to energy of electrons

To determine the partial derivative of electron radiation dose in a substance with respect to electron energy, the authors have simulated the depth-dose distributions resulted from the substance irradiation by monoenergetic electron beams of various energies. Transport of electrons in the matter was simulated on the base of RT-Office

software [4] by the Monte Carlo method implemented in a detailed physical model using.

The energy values of monoenergetic electron beams used for this purpose represented two different sets: (4.95, 5, 5.5) and (9.9, 10, 10.1) MeV. The simulated distributions of depth-dose $D_M(x, E)$ absorbed in various irradiated materials, such as polyethylene, carbon, water, teflon, wood, aluminum, have shown small relative statistical error ($<0.03\%$).

In the parallel, the partial derivatives of electron radiation dose were calculated by the standard computational methods for electron energies $E = 5$ and 10 MeV.

It was shown that, if the simulation results have small relative statistical error, the partial derivative $\partial D_M(x, E)/\partial E$ can be calculated on the base of modeled depth-dose distributions using the standard computational methods like Monte Carlo method.

To illustrate this conclusion, Figure 1 shows the partial derivatives of electron radiation dose as depth function in polyethylene at electron energies 5 MeV (triangles), and 10 MeV (circles).

The values of partial derivatives of doses with respect to electron energy E – $\partial D_M(x, E)/\partial E$ – as a function of depth x of absorption energy of the electron radiation. To illustrate results, in Fig. 1 it is shown the derivatives of electron radiation dose as function depth in polyethylene for 5 and 10 MeV electron energies.

resulted from electron radiation of the studied substances and electrons energies, were calculated using a computer implementation [5] semi-empirical model

Calculations were performed in a semi-empirical model (solid lines) as well as by numerical differentiation of discrete data obtained by the Monte Carlo method (points). The vertical dotted lines mark the depths corresponding to the peaks of electron radiation dose derivatives. As can be seen in Fig. 1, at these depths, the dose values are close to the half value of the maximum dose in target.

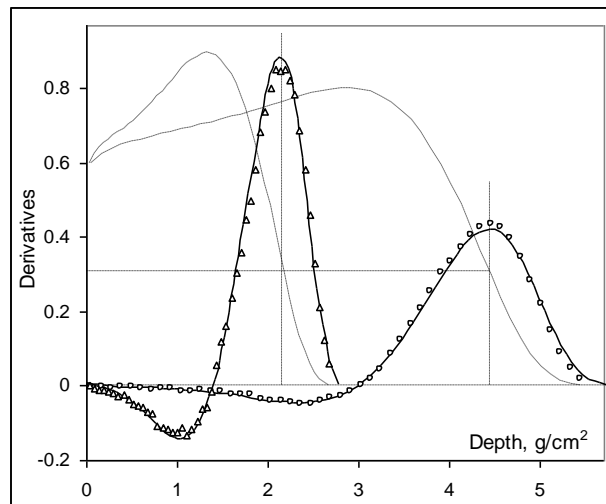


Fig.1. Partial derivatives of electron radiation dose as depth function in polyethylene target, for 5 MeV electron energies (triangles) and 10 MeV (circles).

Points represent calculations based on numerical differentiation of data obtained by the Monte Carlo method. Solid curves correspond to calculation based on semi-empirical model of absorption energy of electron radiation. Dashed curves show depth-dose distributions of electron radiation for the electron energies of 5 and 10 MeV.

Comparison of results calculated on basis of numerical differentiation of discrete data, obtained by the Monte Carlo method [4] having small statistical errors as well as on basis of computer realization [5] of semi-empirical models of electron radiation dose shows their good agreement. Thus, it was demonstrated that it is possible to calculate the partial derivative of electron radiation doses with respect to electron energy using a semi-empirical model of energy of electrons absorbed in the target.

Calibration symmetry of depth distribution for electron radiation dose

The conclusions presented in the paper [3] and in the previous section of this paper show the possibility to use a semi-empirical model of absorption of electron energy in the target for calculation not only the depth-dose distribution of electron radiation, but also the partial derivatives of dose with respect to depth target and the electrons energy.

However, these conclusions are based on those cases, when well established correlation between parameters of the semi-empirical model and parameters of the computational experiments are obtained with small statistical errors.

In practice of dosimetric control, the measurement results can have significant random errors and uncertainty in determination of model parameters of the process under control can have greater values. That is why it is interesting to consider the empirical regularities that appear in the distribution of electron radiation dose as a function of target depth and the electron energy in beam.

One of empirical regularities is the so-called calibration symmetry (scale symmetry) of the depth-dose of mono-energetic electron radiation distribution.

The substance of calibration symmetry is that selection of special units for depth in dependence on the electron energy results in good coincidence of dose values as depth function over the decrease (reduction) interval of electron radiation dose distribution.

Fig. 2 shows a set of depth-dose distributions in the polyethylene for mono-energetic electron fluxes with energy $E = 3, 5, 8, 10$ and 12 MeV. For each value E of energy of electrons, the value of target depth X is defined in terms of $R_{ex}(E)$ - extrapolated range of the electrons in the target material [1]. Depth-dose distributions for different electron energies were calculated at fixed values of integral flow of electrons at the target surface (constant fluency of electrons).

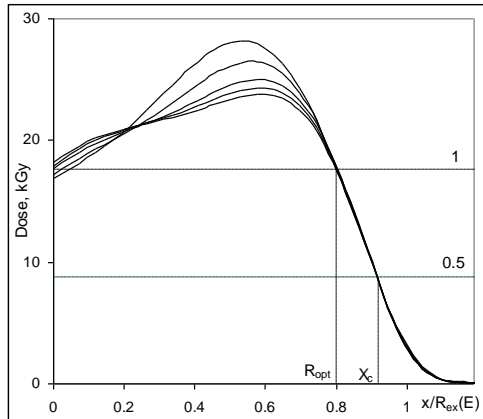


Fig. 2. Depth-dose distribution of the electron radiation dose in polyethylene for monoenergetic electron beams with energy $E = 3, 5, 8, 10, 12$ MeV.

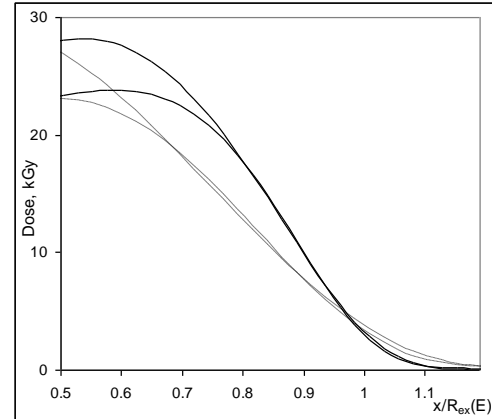


Fig. 3. Depth-dose distribution of the electron radiation dose in polyethylene (solid curves) and aluminum (dashed curves) for monoenergetic electron beams with energy $E = 3$ and 12 MeV

As can be seen from the Fig. 2, there is good agreement between the depth-dose distribution values over the depth range where the dose decreases moving away from the target surface (the horizontal dotted -1) up to $R_{ex}(E)$. A similar form have the dose distributions for substances (polyethylene, carbon, water, teflon, wood, aluminum), at irradiating by monoenergetic electrons with energies ranging from 3 MeV up to 12 MeV.

Fig. 3 presented dose distributions in polyethylene (solid curves) and aluminum (dashed lines) at the energy levels of 3MeV and 12MeV. Figure 3 shows, that the calibration symmetry is observed for various target substances and with increasing the effective atomic number of the target material dose rate of slope decreases.

As can be seen from Figs. 2 and 3, the area of depths, in which there is observed the calibration symmetry, has a relatively small size from 0.8 to 1.0. However, in this area the depth and size of dose is reduced greatly, and this area is of primary interest in the planning phase of radiation sterilization in determining the thickness of the object undergoing treatment. Exactly in this area is located critical point x_c of dose electron radiation, in which should be carried out calculations of allowed area the electrons energy ΔE , in accordance with (4).

At Figure 2 for processing objects made of polyethylene, it is marked the optimum thickness of the object R_{opt} (the point at which the magnitude of the dose is equal to the dose on the front target boundary) at one-sided irradiation and depth of critical point location X_c (the point at which the magnitude of the dose equal to half the dose values on the front boundary of the target) at two-sided irradiation facility.

Let us suppose that we have the following identities:

$$D_M(x, E) \equiv D_M^*(z(E)), \quad z(E) \equiv x/R_{ex}(E), \quad (5)$$

for the area depth x in which there is a calibration symmetry of the dose distribution.

Under this assumption, the partial derivatives of the dose distribution with respect to energy and depth, may be represented as:

$$\frac{\partial D_M(x, E)}{\partial E} = \frac{-x}{R_{ex}^2(E)} \cdot \frac{dD_M^*(z)}{dz} \cdot \frac{dR_{ex}(E)}{dE} \quad (6)$$

$$\frac{\partial D_M(x, E)}{\partial x} = \frac{1}{R_{ex}(E)} \cdot \frac{dD_M^*(z)}{dz} \quad (7)$$

From equations (6) and (7) follow the relationships between the partial derivatives

$$\frac{\partial D_M(x, E)}{\partial E} = -z(x, E) \cdot \frac{dR_{ex}(E)}{dE} \cdot \frac{\partial D_M(x, E)}{\partial x} \quad (8)$$

Equation (8) provides a great practical interest, since it allows to calculate the partial derivative of dose with respect to energy electrons $\frac{\partial D_M(x, E)}{\partial E}$ with use of

partial derivative of dose $\frac{\partial D_M(x, E)}{\partial x}$, which can be determined based on the measurement results performed by a dosimetry wedge [3].

For realization of relation (8) in the method of calculating the partial derivative of dose with respect to the electron energy, it should be determine the value of derivative extrapolated range of electrons with respect to the electron energy. The value of extrapolated range the electrons $R_{ex}(E)$ is well known [1] and there are empirical relationships to calculate the value of this quantity in various materials and for different electron energies.

It were calculated the values of extrapolated ranges of electrons $R_{ex}(E)$ in the following materials - polyethylene, carbon, wood, water, teflon, aluminum for electrons energies in the range from 2 up to 12 MeV, using the block "Analytics" in the software RT-Office [4]. Approximation of the extrapolated range with the use of linear functions on the electron energy has been implemented. The coefficients of linear functions $R_{ex}(E) = A_M \cdot E + B_M$ for various materials are shown in the Table 1.

Table 1. The coefficients of linear approximation for dependence extrapolated range of electron (in g/cm^2) on the electron energy (in MeV).

	Polyethylene	Carbon	Wood	Water	Teflon	Aluminum
A_M	0.5046	0.5626	0.5348	0.5086	0.5773	0.5431
B_M	- 0.0993	- 0.1568	- 0.1414	- 0.1379	- 0.185	- 0.205

Using the relation (8) and the assumption of a linear dependence of the extrapolated range on the electrons energy, we obtain the equation

$$\frac{\partial D_M(x, E)}{\partial E} = - \frac{x \cdot A_M}{A_M \cdot E + B_M} \cdot \frac{\partial D_M(x, E)}{\partial x} \quad (9)$$

As follows from the data given in the Table 1 for the electron energy from 5 to 10 MeV the contribution coefficient B_M to the value of the extrapolated range of electrons is not great, for all above materials.

Numerical verification of the relationship between the partial derivatives (9), was performed on the basis of data on the depth distribution of electron radiation dose, obtained using the Monte Carlo method and the semi-empirical model of the absorption energy of electrons.

Testing results of various calculation methods of derivatives doses with respect to electron energy for the polyethylene target irradiated by electrons with an energy of 5MeV and 10MeV, are shown in Figs.4 and 5, respectively.

Points - the derivatives of the electron energy dose calculated based on dose distributions which were obtained by the Monte Carlo method.

Unfilled circles - the results of numerical differentiation of a set of discrete data with respect to the electron energy. These results are consistent with those shown in Fig. 1.

Filled circles – the results based on numerical differentiation of dose distribution with respect to depth and the use of the relationship between the partial derivatives(9).

Solid curves - derivative of doses with respect to electron energy, derived with use semi-empirical model of electron dose.

These results were obtained by a numerical differentiation doses with respect to energy (the same as given in Fig. 1) and using the relation (9) based on the numerical differentiation of dose with respect to depth.

From the Figures it is clear, that significant differences in the results obtained by different methods are observed only in the field of violation of calibration symmetry dose distributions, that is, according to the data presented in Fig.2, to the depths

$x < 0.6 \cdot R_{ex}(E)$. Comparison dependencies shown in Fig.4 with similar to that in

Fig.5 shows that in area depths, where there is a calibration symmetry, the values of derivatives is inversely proportional to electron energy.

Using the expression (6) and the assumption of a linear dependence of extrapolated range on electron energy, the partial derivative of dose with respect to energy present in the form of:

$$\frac{\partial D_M(x_c, E)}{\partial E} = \frac{-z_c \cdot A_M}{A_M \cdot E + B_M} \cdot \frac{dD_M^*(z_c)}{dz}, \quad z_c = x_c / R_{ex}(E). \quad (10)$$

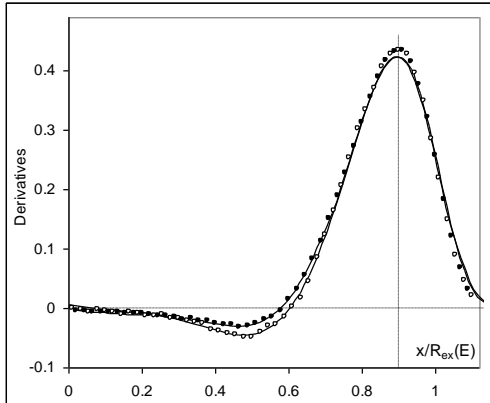


Fig. 4. Partial derivatives of electron radiation dose with respect to the electron energy, obtained by different computational methods for polyethylene target irradiated with 10 MeV electrons

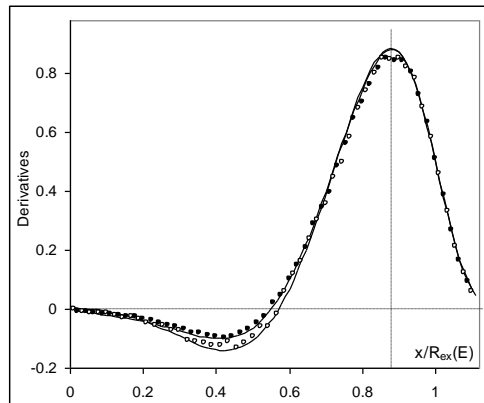


Fig. 5. The partial derivatives of electron radiation dose with respect to the electron energy, obtained by different computational methods for polyethylene target irradiated with 5 MeV electrons

It should be note that the value z_c of slightly varies with the electron energy and for electron energy range from 5 to 10 MeV into force $B_M \ll A_M \cdot E$ (see. Table 1), it can be assert, that the value $\eta_M(x_c, E)$ weakly depends on electrons energy

$$\eta_M(x_c, E) = E \cdot \frac{\partial D_M(x_c, E)}{\partial E}.$$

Whence it follows that the allowable relative change in the electron energy $\frac{\Delta E}{E}$ at the critical points z_c (see (4)) is determined by the target substance and is weakly dependent on electrons energy.

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta D(x_c)}{\eta_M(x_c, E)} \quad (11)$$

This conclusion was confirmed by a series of calculations.

Conclusions

By the numerical experiments, the method was demonstrated for calculating the partial derivative of the dose with respect to energy of electron radiation. The method is based on a semi-empirical model of absorption of electron energy in substance. This allows for solving optimization problems to obtain the necessary data within framework of semi-empirical models instead of simulation with Monte Carlo method, which works when statistical errors are small that significantly reduces the laboriousness for planning and monitoring of radiation-technological process.

On the basis of empirical regularities for depth-dose distributions of electron radiation, the relations between the partial derivative of the dose with respect to electron energy and the partial derivative of the dose with respect to depth were obtained. It was performed Verification of these relations was made on the basis of data on depth-dose distributions of electron radiation obtained by the Monte Carlo method and by semi-empirical model of electron energy absorption.

The verification results have allowed us to offer the method for calculating the derivatives of dose with respect to electron energy and evaluating the region of tolerance of electron energy changes during irradiation using the results of measurements performed by standard methods in industrial sterilization centers.

REFERENCES:

1. ICRU REPORT 35. Radiation dosimetry: electron beams with energies between 1 and 50MeV, 1984. – 160 p.
2. ISO/ASTM Standard 51649, Practice for dosimetry in an e-beam facility for radiation processing at energies between 300 keV and 25 MeV. Annual Book of ASTM Standards. Vol. 2005.12.02.
3. V. T. Lazurik, G. Popov, S. Salah, Z. Zimek. Evaluation of accuracy of the methods for obtaining spatial characteristics of electron radiation depth-dose distribution.// Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, –2015. –Series «Math. Modelling. Information Technology. Automated Control Systems», Issue 28. – p. 126-139.
4. V. T. Lazurik, V.M. Lazurik, G. Popov, Yu. Rogov, Z. Zimek. Information System and Software for Quality Control of Radiation Processing / IAEA: Collaborating Center for Radiation Processing and Industrial Dosimetry, Warsaw: Poland. 2011. – 220 p.
5. V. M. Lazurik, T. Tabata, V. T. Lazurik. A Database for Electron-Material Interactions // Radiation Physics and Chemistry. – 2001. – Vol.60. – P. 161-162.

УДК 534

Вимушені резонансні коливання дисипативної пружинно-маятникової системи

Ю. В. Міхлін, К. Ю. Плаксі́й

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Україна

Досліджується резонансна динаміка дисипативної пружинно-маятникової системи під впливом зовнішнього періодичного збурення. Аналіз проведений на основі узагальненої концепції нелінійних нормальних форм коливань Каудерера-Розенберга. Застосована трансформація до редукованої системи відносно енергії системи, арктангенса відношення амплітуд та різниці фаз шуканих розв'язків в резонансному околі. Виділено нові режими коливань, *перехідні нелінійні нормальні форми*, що реалізуються лише для окремих рівнів енергії. Отримано нові, актуальні для віброгасіння, результати щодо стійкості і біфуркацій нелінійних нормальних форм та їхньої взаємодії в околі резонансу. Чисельні експерименти підтверджують достовірність отриманих аналітичних результатів.

Ключові слова: *нелінійні нормальні форми, внутрішній резонанс, біфуркація, перехідна форма коливань.*

Исследуется резонансная динамика диссипативной пружинно-маятниковой системы под внешним периодическим воздействием. Анализ проведен на основе обобщенной концепции нелинейных нормальных форм колебаний Каудерера-Розенберга. Применена трансформация к редуцированной системе относительно энергии системы, арктангенса отношения амплитуд и разности фаз искомым решений в резонансной окрестности. Выделены новые режимы колебаний, *переходные нелинейные нормальные формы*, которые реализуются только для отдельных уровней энергии. Получены новые, актуальные для виброгашения, результаты относительно устойчивости и бифуркаций нелинейных нормальных форм и их взаимодействия в окрестности резонанса. Численные эксперименты подтверждают достоверность полученных аналитических результатов.

Ключевые слова: *нелинейные нормальные формы, внутренний резонанс, бифуркация, переходная форма колебаний.*

Resonance dynamics of the dissipative spring-pendulum system under periodic external excitation is studied. Analysis is based on the generalized concept of nonlinear normal vibration modes by Kauderer and Rosenberg. The transformation to the reduced system with respect to the system energy, an arctangent of the amplitudes ratio and a difference of phases of required solutions in the resonance vicinity is applied. New vibration regimes, *transient nonlinear normal modes*, which are realized only for the separate energy levels, are selected. New results, which are actual for vibration absorption, concerning stability and bifurcations of nonlinear normal modes and their interaction in the resonance vicinity are obtained. Numerical simulations confirm reliability of obtained analytical results.

Key words: *nonlinear normal modes, internal resonance, bifurcation, transient vibration mode.*

1. Вступ

Наявність зовнішніх та внутрішніх резонансів у нелінійних коливальних системах зазвичай приводить до небажаного росту амплітуд коливань на одній із координат. Постає актуальне питання про можливість гасіння таких коливань за допомогою використання віброгасника малої маси. Окрім того, резонанс може призводити до втрати стійкості встановленого режиму коливань та виникнення

нових режимів коливань, так званих біфуркацій [1]. Виникнення нових режимів коливань визначає динаміку системи в умовах резонансу, тому аналітичні дослідження резонансної динаміки коливальних систем є важливим етапом розв'язання багатьох прикладних задач механіки. Поява таких ефектів як одночасне існування кількох стійких режимів коливань в резонансному околі обумовлює виникнення режиму так званої перекачки енергії [2] між підсистемами нелінійної коливальної системи. Також постає питання про можливість локалізації [3] значної частини енергії коливань в одній із підсистем основної системи, що може бути як негативним для конструкції в цілому і призводити до її руйнування, так і бути успішно використаним в задачі віброгасіння. Наявність дисипації енергії у системі може як підвести систему до внутрішнього резонансу, так і відстроїти її від нього. Зовнішнє збурення може підтримувати певний режим коливань і суттєво впливати на стійкість і біфуркації. З огляду на це важливим постає розгляд саме неконсервативних систем.

Успіх аналітичного дослідження нелінійних систем в значній мірі визначається вибором розв'язків, які можна обрати за нульове наближення для побудови більш складних рухів. В якості таких розв'язків в багатьох випадках можна вибрати саме нормальні форми коливань, коли всі позиційні координати системи є однозначними функціями однієї з них (коливання в унісон). В роботі використовується концепція нелінійних нормальних форм коливань Каудерера-Розенберга [1-5], яка була вперше запропонована для консервативних систем. При наявності малої дисипації енергії, а також малого зовнішнього збурення залишається можливим розгляд рухів системи, що є подібні до нелінійних нормальних форм коливань відповідної консервативної системи. В даній роботі аналіз резонансної динаміки пружинно-маятникової дисипативної системи проведений з використанням узагальненої концепції нелінійних нормальних форм Каудерера-Розенберга.

Застосована при дослідженні *методика зведення до редукованої системи* відносно її повної енергії, арктангенса відношення амплітуд та різниці фаз розв'язків в околі резонансу [6] дозволяє успішно дослідити стійкість та біфуркації нелінійних нормальних форм в околі резонансу без повного аналітичного відшукування розв'язків. Дана методика узагальнена для випадків наявності дисипації енергії і зовнішнього збурення у коливальних системах [7-10].

Динаміка дисипативної нелінійної пружинно-маятникової системи досліджена для випадків зовнішнього резонансу на частоті коливання пружини та у випадку одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансів. Проаналізована можливість віброгасіння коливань.

Розглядається пружинно-маятникова система в умовах малого тертя та під впливом зовнішнього періодичного збурення, зображена на рис. 1.

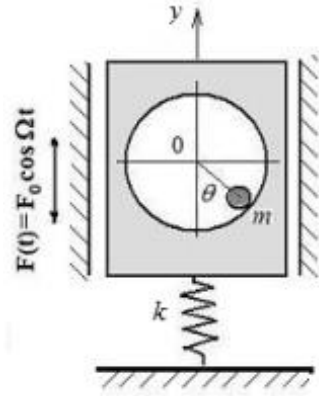


Рис.1. Пружинно-маятникова система.

Рівняння руху цієї суттєво нелінійної коливальної системи представляються у вигляді:

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_u^2 u + \eta_u \dot{u} - \mu(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) = f \cos \tau \\ \ddot{\theta} + \eta_\theta \dot{\theta} + p^2 \sin \theta - \ddot{u} \sin \theta = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де позначено $u = \frac{y}{R}$, $\tau = \Omega t$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$, $p^2 = \frac{g}{R\Omega}$, $\mu = m/(m+M)$, $\omega_u^2 = 1/\Omega^2$, $f = \frac{F_0}{(M+m)R\omega^2\Omega^2}$, $\eta_u = \frac{\beta_u}{(M+m)\Omega}$, $\eta_\theta = \frac{\beta_\theta}{m\Omega}$, β_x і β_θ - коефіцієнти тертя.

У системі (1) за відсутності тертя та зовнішнього збурення існують дві нелінійні нормальні форми коливань Каудерера-Розенберга [6], а саме: суто вертикальні коливання – так звана пружинна форма, або u -форма ($u = u(\tau)$, $\theta = 0$), що є локалізованою, та маятникова форма, або θ -форма, коли змінюються і вертикальна, і кутова координати ($u = u(\tau)$, $\theta = \theta(\tau)$), і яка є нелокалізованою. Зауважимо, що $u(\tau)$ – парна функція, а $\theta(\tau)$ – непарна.

В умовах малої дисипації енергії та малого збурення аналогічні узагальнені форми коливань системи (1) вже не будуть формами Каудерера-Розенберга, але будуть подібними до них. Такі узагальнені форми залишаються придатні для якісного аналізу поведінки системи.

2. Випадок зовнішнього резонансу на частоті коливань пружини

Застосуємо метод багатьох масштабів [11] для побудування розв'язків. Промасштабуємо координати $u \rightarrow \varepsilon u$, $\theta \rightarrow \varepsilon \theta$ і будемо шукати розв'язки у формі асимптотичного розкладення, утримуючи члени порядку $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{cases} \varepsilon u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \dots \\ \varepsilon \theta = \varepsilon \theta_0 + \varepsilon^2 \theta_1 + \dots \end{cases} \quad (2)$$

Будемо розглядати масштаби часу включно до членів порядку $O(\varepsilon^{-2})$:

$$T_0 + T_1 + T_2 = \tau + \varepsilon\tau + \varepsilon^2 + \dots \quad (3)$$

В такому разі перша та друга похідні набувають вигляду

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots, \quad (4)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_0} \dots \quad (5)$$

Підставимо (2), (3), (4) та (5) у рівняння коливань (1). Щоб дослідити резонансу поведінку системи, застосуємо методику зведення до редукованої системи. Щоб дослідити динаміку системи (1) в околі зовнішнього резонансу на частоті коливання пружини, введемо у систему (1) розлад між частотами у вигляді:

$$\omega_u^2 = 1 + \varepsilon\Delta. \quad (6)$$

Враховуючи, що для малих коливань $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$ з точністю до $O(\theta)$ та прирівнюючи відповідні члени при ε^1 та ε^2 , отримаємо рівняння у частинних похідних для першого та другого наближень:

$$\varepsilon^1: \begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0, \\ \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0^2} + p^2 \theta_0 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\varepsilon^2: \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -\Delta_1 u_0 - 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_1 \partial T_0} + \mu \left(\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0^2} \right) \theta_0 + \mu \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial T_0} \right)^2 - \eta_u \frac{\partial u_0}{\partial T_0} + \\ + \frac{f}{2} (e^{iT_0} + e^{-iT_0}), \\ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T_0^2} + p^2 \theta_1 = -2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_1 \partial T_0} + \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} \right) \theta_0 - \eta_\theta \frac{\partial \theta_0}{\partial T_0}. \end{cases} \quad (8)$$

Загальний розв'язок системи (7) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} u_0 = C_u(T_1)e^{iT_0} + \bar{C}_u(T_1)e^{-iT_0}, \\ \theta_0 = C_\theta(T_1)e^{piT_0} + \bar{C}_\theta(T_1)e^{-piT_0}. \end{cases} \quad (9)$$

Підставляючи розв'язок (9) у систему рівнянь (8) для відшукування других наближень розв'язків u_1 та θ_1 , приходимо до умови виключення вікових членів

у правих частинах системи (8). Покладаючи в умові виключення вікових членів $C_u = a_u e^{i\beta_u}$, $C_\theta = a_\theta e^{i\beta_\theta}$, запишемо систему рівнянь відносно амплітуд a_u , a_θ та фаз β_u , β_θ шуканих розв'язків:

$$\begin{cases} a'_u = -\frac{\eta_x}{2} a_x - \frac{f}{4} \sin \beta_u, \\ a'_\theta = -\frac{\eta_\theta}{2} a_\theta, \\ \beta'_u = \frac{\Delta}{2} - \frac{f}{4a_u} \cos \beta_u, \\ \beta'_\theta = 0. \end{cases} \quad (10)$$

У системі (10) введемо заміну змінних $a_u = \frac{\sqrt{\mu}}{2} K \cos \psi$, $a_\theta = K \sin \psi$, яка приводить до так званої редукованої системи відносно змінної повної енергії K , арктангенса відношення амплітуд ψ та фаз розв'язків:

$$\begin{cases} K' = -K \left(\frac{\eta_u}{2} \cos^2 \psi + \frac{\eta_\theta}{2} \sin^2 \psi \right) - \frac{f}{4} \sin \beta_u \cos \psi, \\ \psi' = \sin \psi \left(\frac{\eta_u - \eta_\theta}{2} \cos \psi + \frac{f}{4K} \sin \beta_u \right), \\ \beta'_u = \frac{\Delta}{2} - \frac{f}{4K \cos \psi} \cos \beta_u, \\ \beta'_\theta = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Зазначимо, що у випадку наявності зовнішнього збурення, повна редукція не можлива, адже не можна виділити різницю фаз розв'язків у правих частинах рівнянь системи (1), але можливо формально записати рівняння відносно різниці фаз, при цьому аналіз рівнянь редукованої системи залишається ефективним. Оскільки різниця фаз зв'язаних коливань системи (1) має вигляд $\varphi = \beta_u - 2\beta_\theta$, рівняння відносно різниці фаз запишеться наступним чином:

$$\varphi' = \Delta - \frac{f}{2K \cos \psi} \cos \beta_u. \quad (12)$$

Проаналізуємо його сукупно з першим та другим рівняннями системи (1) на положення рівноваги. Саме такі розв'язки редукованої системи за визначенням відповідають нелінійним нормальним формам системи (1), адже описують коливання в унісон.

Умова $\sin \psi \equiv 0$ відповідає коливанням лише однієї пружини, які є локалізованими. Локалізована форма коливань не потребує додаткової умови для фази, тому достатньо проаналізувати положення рівноваги лише рівняння відносно арктангенса амплітуд ψ . Друге рівняння системи (11) обертається за

цих умов на тотожність, отже ця форма коливань існує для будь-яких рівнів енергії K , та їй відповідає пряма $\psi = 0$ у просторі (ψ, φ) . Даній формі коливань відповідає рівняння енергії $K' = -K \frac{\eta_u}{2} \mp \frac{f}{4} \sin \beta_u$. Через наявність функції $\beta_u(K)$ у правій частині даного рівняння не можна однозначно сказати про стійкість локалізованих коливань пружини. Необхідним стає аналіз траєкторій у просторі (ψ, φ) .

Локалізація енергії на маятнику, очевидно, не можлива з міркувань конструкції системи (1). Аналітично вона б потребувала умови $\cos \psi = 0$.

Таким коливанням відповідала б пряма $\psi = \frac{\pi}{2}$ у просторі (ψ, φ) . Положення рівноваги другого рівняння системи (11) вимагало б у даному випадку рівності $\pm \frac{f}{4K} \sin \beta_u = 0$. Дана рівність можлива, якщо фаза $\beta_u = 0 + \pi n$. Також дана форма коливань могла б бути реалізована за умов досить високих енергій, які не розглядаються. Такій формі коливань відповідає функція енергії $K' = -\frac{\eta_\theta}{2} K$.

Енергія коливань у даному випадку буде спадаючою, отже такі коливання з локалізацією на маятнику будуть нестійкими в околі резонансу і така форма коливань не буде реалізована.

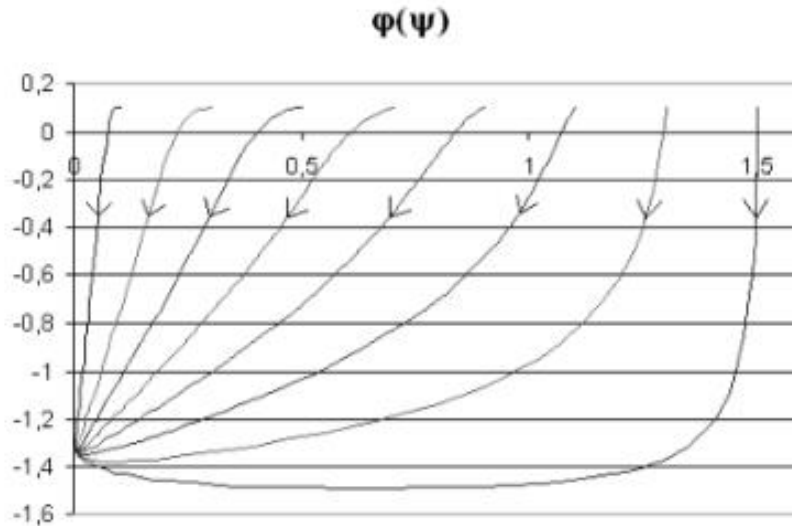
У випадку, коли $\cos \psi \neq 0$ та $\sin \psi \neq 0$ одночасно, можлива поява форми зв'язаних коливань системи (1). З другого рівняння редукованої системи (11) та рівняння (12) отримаємо умови існування даної форми:

$$\cos \psi = \pm \frac{f}{2K \sqrt{(\eta_u - \eta_\theta)^2 + \Delta^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta_u = \frac{\eta_\theta - \eta_u}{\Delta}.$$

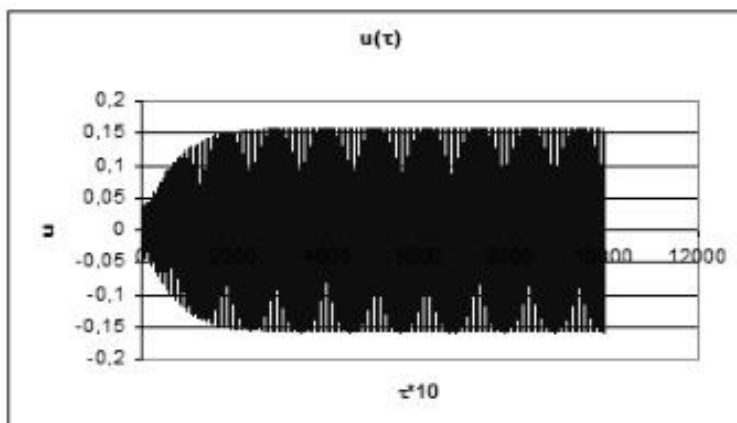
Як бачимо, умова існування даної форми залежить від рівня енергії. Для виявлення появи та визначення стійкості форми зв'язаних коливань в даному випадку необхідним стає аналіз траєкторій у просторі (ψ, φ) .

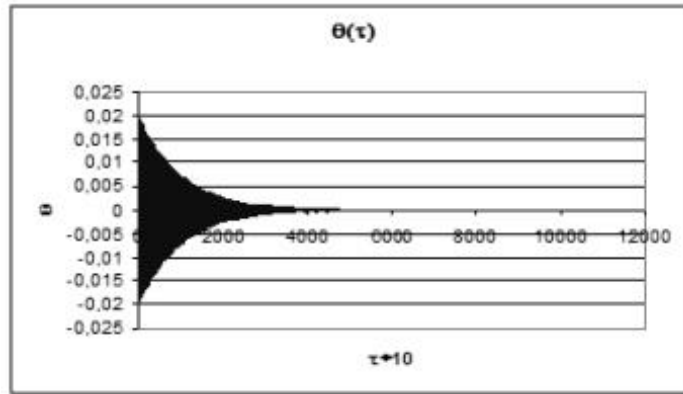
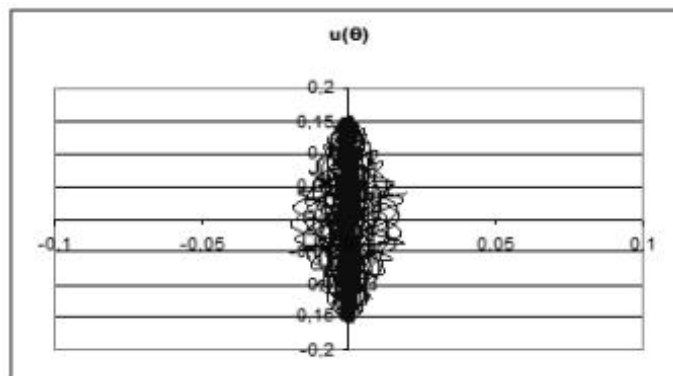
Для аналізу траєкторій у просторі (ψ, φ) проінтегруємо чисельно методом Рунге-Кутта 4-го порядку з кроком $h = 0,01$ редуковану систему (11), змінюючи значення арктангенса амплітуд на відрізку $0 \leq \psi(0) \leq \frac{\pi}{2}$ при початкових умовах $K(0) = 0,5$, $\Delta = 0,2$, $\eta_u = 0,4$, $\eta_\theta = 0,4$ та $f = 0,2$. На рис. 2 побудовані траєкторії в просторі (ψ, φ) .

Траєкторії на рис. 2 з плином часу наближаються до прямої $\psi = 0$, яка відповідає формі коливань з локалізацією енергії на пружині. Отже, аналіз траєкторій дозволяє зробити висновок, що дана форма коливань залишається стійкою в околі резонансу в той час, як не спостерігається появи стійких зв'язаних коливань системи.

Рис.2. Траєкторії в просторі (ψ, φ) .

Щоб проілюструвати поведінку пружинно-маятникової системи (1) в околі резонансу, проінтегруємо чисельно систему відносно амплітуд і фаз розв'язків (10) методом Рунге-Кутта 4-го порядку на відрізку $\tau \in [0; 100]$ з кроком $h = 0,01$ при початкових умовах $a_u(0) = 0,2$, $a_\theta(0) = 0,1$, $\beta_u(0) = 0,01$, $\beta_\theta(0) = 0,02$ та при $\eta_u = 0,3$, $\eta_\theta = 0,3$, $f = 0,5$, $\mu = 0,3$, $\Delta = 0,1$, $p = 1,7$. Перше наближення розв'язків може бути записане у вигляді $u_0 = 2a_u \cos(\tau + \beta_u)$, $\theta_0 = 2a_\theta \cos(p\tau + \beta_\theta)$. На рис. 3-5 представлені залежності координат від часу та залежність у конфігураційному просторі відповідно.

Рис.3. Залежність $u(\tau)$.

Рис.4. Залежність $\theta(\tau)$.Рис.5. Залежність $u(\theta)$.

Аналіз графіків 3-5 дозволяє зробити висновок, що форма локалізації енергії на пружині є стійкою в режимі резонансу, що підтверджує аналітичне дослідження за редукованою системою: відхилення траєкторій на рис. 5 від форми коливань пружини нехтовно менші за основні коливання, а самі траєкторії з плином часу згущуються вздовж прямої $\theta = 0$.

3. Випадок одночасного зовнішнього і внутрішнього резонансів

Для того, щоб розглянути рухи системи в околі внутрішнього та зовнішнього резонансу одночасно, введемо в рівняння (1) два параметри Δ_1 та Δ_2 , що характеризують розлади частот, наступним чином:

$$\omega_u^2 = 1 + \varepsilon\Delta_1, \quad (13)$$

$$p^2 = \frac{1}{4} + \varepsilon\Delta_2. \quad (14)$$

Умова (13) відповідає потраплянню в околі зовнішнього резонансу, а умова (14) в околі головного параметричного резонансу системи (1).

Застосовуючи аналогічні перетворення, рівняння для першого та другого наближень запишемо у вигляді:

$$\varepsilon^1: \begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0, \\ \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0^2} + \frac{1}{4} \theta_0 = 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\varepsilon^2: \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -\Delta_1 u_0 - 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_1 \partial T_0} + \mu \left(\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0^2} \right) \theta_0 + \mu \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial T_0} \right)^2 - \eta_u \frac{\partial x_0}{\partial T_0} + \\ + \frac{f}{2} (e^{iT_0} + e^{-iT_0}), \\ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T_0^2} + \theta_1 = -\Delta_2 \theta_0 - 2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_1 \partial T_0} + \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} \right) \theta_0 - \eta_\theta \frac{\partial \theta_0}{\partial T_0}. \end{cases} \quad (16)$$

Розв'язок системи (15) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} u_0 = C_u(T_1)e^{iT_0} + \bar{C}_u(T_1)e^{-iT_0}, \\ \theta_0 = C_\theta(T_1)e^{\frac{1}{2}iT_0} + \bar{C}_\theta(T_1)e^{-\frac{1}{2}iT_0}. \end{cases} \quad (17)$$

Підставляючи розв'язок (17) у систему рівнянь для відшукування других наближень розв'язків (16), аналогічно приходимо до виключення вікових членів у правих частинах системи (16). Покладаючи $C_u = a_u e^{i\beta_u}$, $C_\theta = a_\theta e^{i\beta_\theta}$, перейдемо від умови виключення вікових членів до системи рівнянь відносно амплітуд та фаз розв'язків:

$$\begin{cases} a'_u = \frac{\mu}{4} a_\theta^2 \sin(2\beta_\theta - \beta_u) - \frac{\eta_x}{2} a_x - \frac{f}{4} \sin \beta_u, \\ a'_\theta = a_u a_\theta \sin(2\beta_\theta - \beta_u) - \frac{\eta_\theta}{2} a_\theta, \\ \beta'_u = \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{4} \frac{a_\theta^2}{a_u} \cos(2\beta_\theta - \beta_u) - \frac{f}{4a_u} \cos \beta_u, \\ \beta'_\theta = \Delta_2 + a_u \cos(2\beta_\theta - \beta_u). \end{cases} \quad (18)$$

де $\varphi = \beta_u - 2\beta_\theta$ - різниця фаз розв'язків для форми зв'язаних коливань.

У системі (18) введемо заміну змінних $a_u = \frac{\sqrt{\mu}}{2} K \cos \psi$, $a_\theta = K \sin \psi$ та отримаємо редуковану систему відносно її повної енергії, арктангенса відношення амплітуд та фаз розв'язків:

$$\begin{cases} K' = -K \left(\frac{\eta_u}{2} \cos^2 \psi + \frac{\eta_\theta}{2} \sin^2 \psi \right) - \frac{f}{2\sqrt{\mu}} \sin \beta_u \cos \psi, \\ \psi' = \sin \psi \left(\frac{\sqrt{\mu}}{2} K \sin(2\beta_\theta - \beta_u) + \frac{\eta_u - \eta_\theta}{2} \cos \psi + \frac{f}{2\sqrt{\mu}K} \sin \beta_u \right), \\ \beta_u' = \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{2} \frac{K \sin^2 \psi}{\cos \psi} \cos(2\beta_\theta - \beta_u) - \frac{f}{2\sqrt{\mu}K \cos \psi} \cos \beta_u, \\ \beta_\theta' = \Delta_2 + \frac{\sqrt{\mu}}{2} K \cos \psi \cos(2\beta_\theta - \beta_u). \end{cases} \quad (19)$$

Як і раніше, у випадку наявності зовнішнього збурення, повна редукція не можлива, адже не можна виділити різницю фаз φ у правих частинах рівнянь системи (18), але ми запишемо рівняння відносно різниці фаз формально та проаналізуємо його сукупно з першим та другим рівняннями системи (19):

$$\begin{aligned} \varphi' = & \frac{\Delta_1}{2} - 2\Delta_2 + \sqrt{\mu}K \left(\frac{1}{2} \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} - \cos \psi \right) \cos(2\beta_\theta - \beta_u) - \\ & - \frac{f}{2\sqrt{\mu}K \cos \psi} \cos \beta_u. \end{aligned} \quad (20)$$

Будемо розглядати положення рівноваги другого рівняння редукованої системи (19) та рівняння (20). Умова $\sin \psi \equiv 0$, очевидно, відповідає коливанням самої тільки пружини. Оскільки така форма коливань є локалізованою, то не потребує додаткової умови для фази. Друге рівняння системи (19) обертається за цих умов на тотожність, отже ця форма коливань існує для будь-яких рівнів енергії K , та їй відповідає пряма $\psi = 0$ у просторі (ψ, φ) . Даній формі коливань відповідає рівняння енергії $K' = -K \frac{\eta_u}{2} \mp \frac{f}{2\sqrt{\mu}} \sin \beta_u$, через наявність

функції $\beta_u(K)$ у правій частині даного рівняння не можна однозначно сказати про стійкість коливань пружини. Необхідним стає аналіз траєкторій у просторі (ψ, φ) .

У випадку, коли $\cos \psi \neq 0$ та $\sin \psi \neq 0$ одночасно, можлива поява форми зв'язаних коливань системи (1). З другого рівняння редукованої системи (19) отримуємо одну з умов існування даної форми:

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{\mu}}{\eta_\theta - \eta_u} K \sin(2\beta_\theta - \beta_u) + \frac{f}{2\sqrt{\mu}K(\eta_\theta - \eta_u)} \sin \beta_u.$$

Очевидно, умова існування даної форми залежить від рівня енергії. Для виявлення форми зв'язаних коливань та визначення її стійкості в даному випадку необхідним стає аналіз траєкторій у просторі (ψ, φ) .

Побудуємо траєкторії в просторі (ψ, φ) , для чого проінтегруємо чисельно методом Рунге-Кутта 4-го порядку з кроком $h=0,01$ редуковану систему (19), змінюючи значення арктангенса амплітуд на відрізку $0 \leq \psi(0) \leq \frac{\pi}{2}$ та при початкових умовах $K(0)=0,5$, $\eta_u=0,3$, $\eta_\theta=0,2$, $\mu=0,4$, $\Delta_1=0,2$, $\Delta_2=0,1$, $f=0,35$. На рис. 6 представлені траєкторії у просторі (ψ, φ) для випадку одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансу.

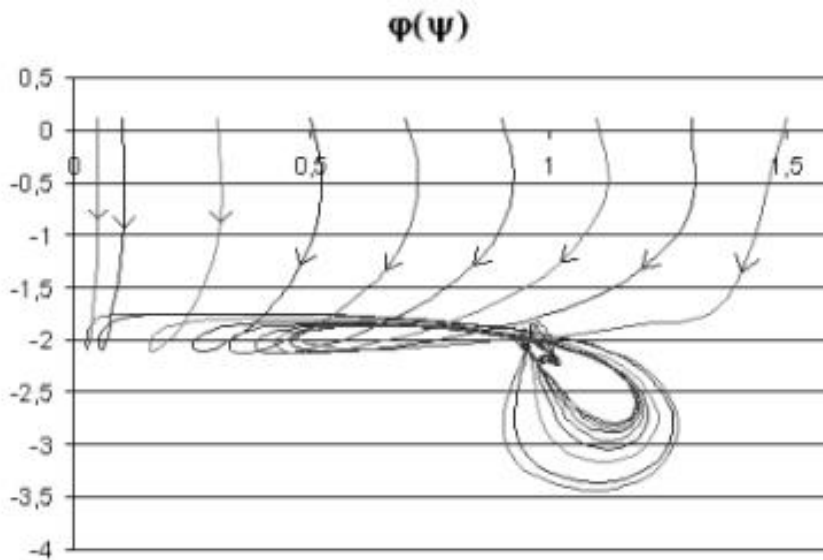


Рис.6. Траєкторії в просторі (ψ, φ) .

Кожна з траєкторій робить петлю навколо квазіположення рівноваги редукованої системи. Це положення рухається у просторі (ψ, φ) та відповідає *перехідній формі коливань*. *Перехідні форми коливань*, що були описані в [7-10], є формами коливань, що існують лише для окремих рівнів енергії системи, тобто лише в окремі моменти часу, що відповідають цим рівням енергії. Важливим є те, що *перехідні форми* притягують інші траєкторії руху. В околі значення часу, що відповідає появі *перехідної форми коливань*, рухи системи є близькими до неї. Далі на рис. 6 бачимо, що коли енергія спадає і *перехідна форма* зникає, траєкторії у просторі (ψ, φ) притягуються до положення рівноваги, що відповідає стійкій в резонансному околі нелінійній нормальній формі зв'язаних коливань системи. Зазначимо, що це положення рівноваги розташоване у просторі (ψ, φ) скоріш ближче до прямої $\psi = \frac{\pi}{2}$, яка відповідає локалізації коливань на маятнику, аніж до прямої $\psi = 0$, яка відповідає локалізованим коливанням пружини. Траєкторії на рис. 6 не залишаються поблизу прямої $\psi = 0$, що означає, що форма локалізованих коливань пружини не є стійкою у режимі резонансу.

Для ілюстрації поведінки пружинно-маятникової системи (1) в околі резонансу, проінтегруємо чисельно систему відносно амплітуд і фаз розв'язків (18) методом Рунге-Кутта 4-го порядку на відрізку $\tau \in [0; 5000]$ з кроком $h = 0,01$ при початкових умовах $a_u(0) = 0,05$, $a_\theta(0) = 0,01$, $\beta_u(0) = 0,1$, $\beta_\theta(0) = 0,2$ та при $\eta_u = 0,3$, $\eta_\theta = 0,2$, $f = 0,35$, $\Delta_1 = 0,2$, $\Delta_2 = 0,1$. Перше наближення розв'язків може бути записане у вигляді $u_0 = 2a_u \cos(\tau + \beta_u)$, $\theta_0 = 2a_\theta \cos(\frac{1}{2}\tau + \beta_\theta)$. На рисунках 7-8 представлені залежності координат від часу на інтервалах часу $\tau \in [0; 1000]$, рис. 9-11 демонструють залежність у конфігураційному просторі для проміжків часу $\tau \in [0; 100]$, $\tau \in [4800; 5000]$ та $\tau \in [0; 5000]$ відповідно.

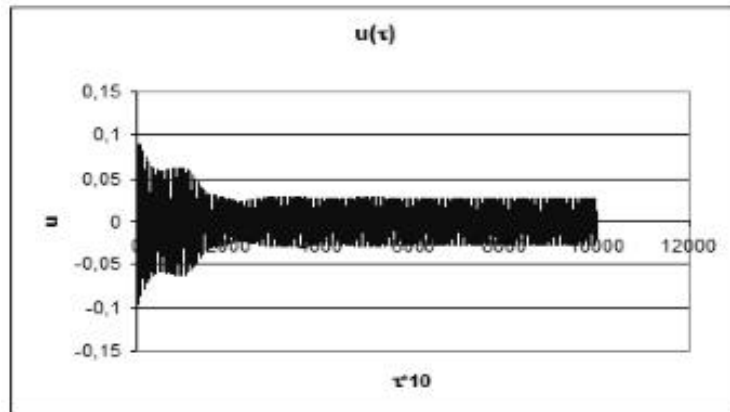


Рис.7. Залежність $u(\tau)$.

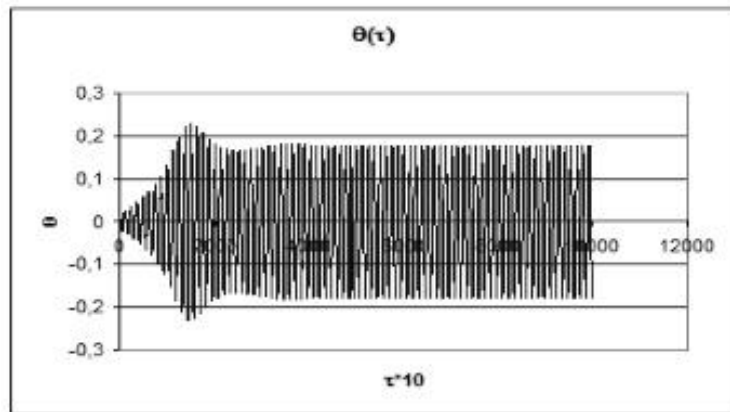
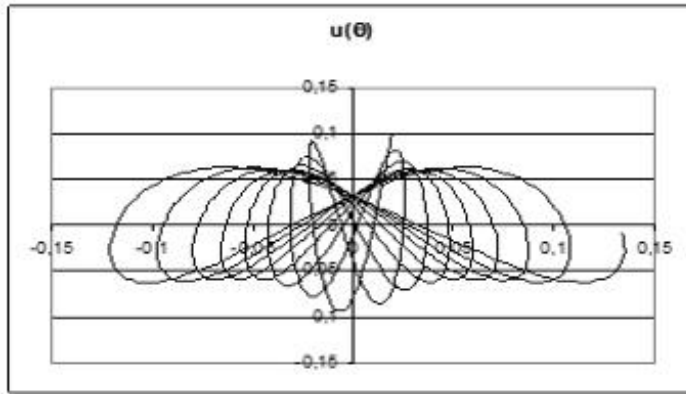
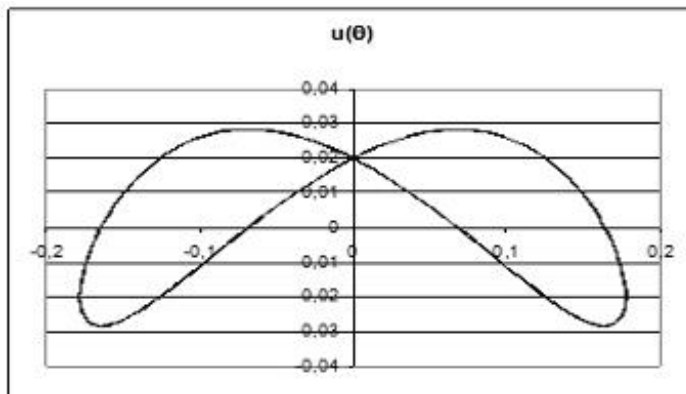
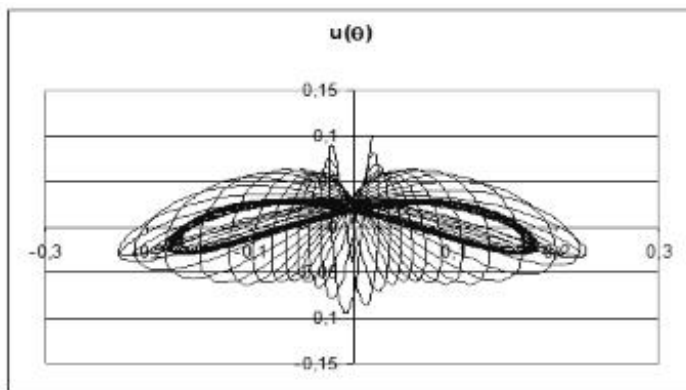


Рис.8. Залежність $\theta(\tau)$.

Рис.9. Залежність $u(\theta)$ при $\tau \in [0; 100]$.Рис.10. Залежність $u(\theta)$ при $\tau \in [4800; 5000]$.Рис.11. Залежність $u(\theta)$ при $\tau \in [0; 5000]$.

Сукупний аналіз рис. 7-11 дозволяє зробити наступні висновки щодо резонансної динаміки пружинно-маятникової системи (1): в околі одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансу з'являється *перехідна форма коливань*. На початку процесу руху системи є близькі до цієї форми, на графіках

залежностей у конфігураційному просторі дана форма має вигляд параболи з рогами, направленими вгору. *Перехідну форму* можна побачити на рис. 9, що демонструє початок процесу, та на рис. 11, на якому представлена залежність на всьому часовому проміжку, що розглядається. На рис. 9 бачимо, як траєкторії роблять рухи поблизу *перехідної форми* коливань, що є такою, що притягує в момент свого існування, а далі швидко розвивається її нестійкість. На рис. 11 бачимо весь процес в цілому – коли *перехідна форма* перестає існувати, траєкторії наближуються до постійно стійкої в околі резонансу формі зв'язаних коливань. Як бачимо, траєкторії на рис. 11 з плином часу згущуються на стійкій формі зв'язаних коливань, яка має дещо викривлену внаслідок дисипації та зовнішнього збурення форму у конфігураційному просторі. Коли перехідний процес закінчується, коливання системи стабілізуються і відбуваються в режимі стійкої форми, що демонструє рис. 10, де показаний кінець процесу. Сама стійка зв'язана форма коливань в даному випадку є досить близькою до локалізованої форми розкачки маятника, що може бути використано з ціллю віброгасіння коливань системи (1): вживаючи допоміжні засоби демпфування на маятнику, можна забезпечити відтік енергії з пружини. Таким чином, чисельно-аналітичний експеримент у повній мірі підтверджує результати аналітичного дослідження за методикою редукованої системи.

4. Висновки

Динаміка дисипативної пружинно-маятничової системи (1) під впливом зовнішнього періодичного збурення досліджена в околі зовнішнього резонансу на частоті коливання пружини та в околі одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансів. Аналіз резонансної динаміки проведений на основі концепції нелінійних нормальних форм Каудерера-Розенберга, що була узагальнена для систем з малою дисипацією енергії та при наявності малого зовнішнього збурення [7-10]. Застосована *методика зведення до редукованої системи* відносно енергії системи, арктангенса відношення амплітуд та різниці фаз розв'язків в околі резонансу, що була раніше поширена на системи з малою дисипацією енергії та в умовах зовнішнього збурення [7-10]. За допомогою даної методики були отримані наступні аналітичні результати: в околі зовнішнього резонансу на частоті коливання пружини локалізовані коливання пружини системи (1) залишаються стійкими, тоді як стійких зв'язаних коливань не виникає. В околі одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансу спостерігаються стійкі зв'язані коливання системи (1), локалізація ж енергії навпаки не відбувається. Окрім того під час перехідного процесу з'являється новий тип форм коливань - так звана *перехідна нелінійна форма коливань*. Таким чином, у системі (1) було виявлено появу нової нелінійної форми коливань. Оскільки така форма є такою, що притягує рухи системи під час свого існування, поява її під час перехідного процесу від нестійких коливань до стійких вносить додаткову нестабільність у систему і робить перехідний процес довшим. Таким чином, виявлення *перехідної форми коливань* є важливим результатом дослідження динаміки системи. Нові, актуальні для задач віброгасіння, результати щодо стійкості та біфуркацій форм коливань в режимі резонансу та залежності їх існування від часу отримані. Розглянуто еволюцію

положень рівноваги редукованої системи внаслідок дисипації енергії та глобальну поведінку траєкторій руху в околі резонансу. Особливості застосування *методики зведення до редукованої системи* обговорюються. Достовірність отриманих аналітичних результатів підтверджено за допомогою чисельно-аналітичних експериментів, реалізованих мовою C++.

ЛІТЕРАТУРА

1. Rosenberg R.M., Atkinson C.P. On the natural modes and their stability in nonlinear two-degree-of-freedom systems // *Journal of Applied Mechanics*. - 1959. - V. 26 – P. 377-385.
2. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. Нелинейная динамика упругих систем. Том 1. Модели, методы, явления - М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2010. – 704 с.
3. Vakakis A., Manevitch L., Mikhlin Yu., Pilipchuk V., Zevin A. Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems - New York: Wiley Interscience. - 1996. - 552~P.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика - М.: Иностран. литер., 1961. – 777 с.
5. Rosenberg R. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom // *Advances of Applied Mechanics*. - 1966. - V. 9. - P. 156–243.
6. Wang F., Bajaj A., Kamiya K. Nonlinear Normal Modes and Their Bifurcations for an Inertially-Coupled Nonlinear Conservative System // *Purdue university* - 2005. – 54 p.
7. Plakhsy K.Y., Mikhlin Yu.V., Dynamics of nonlinear dissipative systems in the vicinity of resonance // *Journal of Sound and Vibration*. - 2015. – V. 334. – P. 319-337.
8. Михлин Ю.В., Клименко А.А., Плаксий Е.Ю. Резонансные колебания в системе с ограниченным возбуждением, содержащей гаситель колебаний // *Вестник Запорожского национального университета «Математическое моделирование и прикладная механика»*. - 2015. - 2. - С. 135-141.
9. Plakhsy K.Y., Mikhlin Yu.V. Resonance behavior of the limited power-supply system coupled with the nonlinear absorber // *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*. - 2015. - V. 6, 3. - P. 475-495.
10. Плаксий К.Ю., Михлин Ю.В. Дослідження поведінки пружної коливальної системи з нелінійним віброгасником в околі резонансу // *Вісник Запорізького національного університету «Математичне моделювання і прикладна механіка»*. - 2014. - 2. – С. 116-125.
11. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М: Мир, - 1973. – 446 с.

УДК 004.942

Моделирование технологических процессов и гидравлических сетей для обеспечения промышленной безопасности

А. И. Силаков, М. Л. Угрюмов, А. С. Шмелев

*Харьковский национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

Проведен анализ существующих методов обнаружения дефектов в технологических процессах на промышленных предприятиях. Предложен метод поиска дефектов посредством моделирования технологического процесса и гидравлической сети. Разработана методика поиска решений для устранения обнаруженных дефектов, которая основана на анализе результатов численного моделирования. Качество полученных результатов напрямую зависит от количества начальных условий, заданных в моделирующую программу. Описана структура и возможности программного комплекса.

Ключевые слова: *безопасность, обнаружение дефектов, гидравлическая сеть, технологический процесс, математическое моделирование*

Проведено аналіз існуючих методів виявлення дефектів в технологічних процесах на промислових підприємствах. Запропоновано метод пошуку дефектів за допомогою моделювання технологічного процесу і гідравлічної мережі. Розроблено методику пошуку рішень для усунення виявлених дефектів, яка заснована на аналізі результатів чисельного моделювання. Якість отриманих результатів безпосередньо залежить від кількості початкових умов, заданих в моделюючу програму. Описано структуру та можливості програмного комплексу.

Ключові слова: *безпека, виявлення дефектів, гідравлічна мережа, технологічний процес, математичне моделювання.*

The analysis of existing methods of detecting defects in manufacturing processes at industrial plants has been carried out. A method has been proposed for finding defects by simulation of both technological process and hydraulic network. A technique based on the analysis of numerical simulation results has been developed to find solutions for elimination of detected defects. The quality of achieved results directly depends on the number of initial conditions specified for the simulating program. The structure and the features of the software package are described.

Keywords: *security, detection of defects, hydraulic network, technological process, mathematical modeling.*

Введение

Безопасное ведение процессов, протекающих на современном предприятии, является неотъемлемой и весьма сложной задачей в его функционировании. Задача безопасного управления химико-технологическими системами в условиях наличия высоких температур и давлений, использования опасных химических реагентов и усложнения технологических схем является актуальной.

Для современных аппаратов с их системами управления очень важно во время их работы точное соблюдение всех технологических параметров, отсутствие ошибок в управлении и своевременное адекватное реагирование на отклонения, поиск и устранение причин их возникновения [1].

Решению данной задачи способствует создание инженерных компьютерных систем, моделирующих технологический процесс, которые позволяют

произвести оценку качества работы технологической схемы в различных режимах работы.

Целями такого численного моделирования являются: анализ различных переменных состояния технологического оборудования для получения информации, позволяющей судить о безопасности предприятия в целом. Анализ при помощи моделирования физико-химических процессов и гидравлических сетей позволяет не только выделить «слабые места» на производстве, но и производить опрвление процессом таким образом, чтобы обеспечить максимальное количество целевого продукта, переработанного из сырья при минимальных затратах энергии.

Науко- и трудоемкость разработки моделирующих компьютерных программ сказывается как на длительности, так и на большой стоимости выполняемых проектов, что и объясняет причину низкой обеспеченности предприятий подобными программными комплексами.

Цель статьи – проанализировать существующие методы обеспечения безопасности на производстве, разработать архитектуру программного комплекса и методику поиска дефектов, а также их устранения.

1. Существующие методы поиска, анализа и устранения дефектов

Современные программно-инженерные комплексы (ПИК) для обеспечения безопасности на производстве делятся на два типа – использующие активные и пассивные методы поиска, анализа и устранения дефектов (рис. 1). ПИК, использующие активные методы – системы управления и системы противоаварийной защиты. ПИК, использующие пассивные методы – программные комплексы для проектирования технологического оборудования и моделирующие компьютерные системы для поиска дефектов, оптимизации и тонкой настройки техно-логического процесса.- гидравлическое сопротивление участка трубопровода (коэффициент, который рассчитывается исходя из геометрических особенностей участка трубы);



Рис. 1. Методы поиска, анализа и устранения Дефектов

Активные методы поиска и анализа дефектов используются в работающей технологической системе для контроля переменных состояния и настройки системы управления. Система управления (СУ) - группа технических и программных средств, предназначенных для автоматизации управления технологическим оборудованием на промышленных предприятиях [2]. В общем случае, система управления обеспечивает соответствие значений переменных состояния заданным путем тонкой подстройки регулирующих органов (PID-регуляторы), либо полным открытием, либо закрытием потоков (с использованием электродвигателей, отсекающих). Система противоаварийной защиты (СПАЗ) предназначена для предупреждения и предотвращения аварийных ситуаций, которые могут возникнуть во время работы технологической системы, как в результате влияния человеческого фактора, так и из-за сбоев в работе оборудования. Система противоаварийной защиты строится на специально сертифицированных для таких целей моделях программируемых контроллеров. Контроллеры имеют дублированную архитектуру, что в несколько раз повышает отказоустойчивость оборудования отвечающее за предотвращение аварийных ситуаций. Система противоаварийной защиты параллельно с основной системой управления следит за состояниями аварийных сигнальных датчиков, в случае срабатывания которых, СПАЗ разрывает управление задвижками и двигателями от основной СУ, в результате чего они останавливаются или закрываются [3].

Пассивные методы поиска и анализа дефектов – настройки СПАЗ и СУ, размеры, типы и виды аппаратов и трубопроводов, которые являются результатом работы программных комплексов для проектирования технологического оборудования и моделирования процесса. Данные методы позволяют как наладить работу технологического процесса, так и оптимизировать его, с учетом минимизации энерго- и ресурсозатрат, а также обеспечить поиск возможных дефектов и разработать решения по их устранению.

Процесс обеспечения безопасности на производстве начинается с его проектирования. Этап проектирования включает в себя как разработку отдельных аппаратов и трубопроводов, так и интеграцию разработанных дискретных модулей оборудования в общую технологическую схему производства. Затем рассчитываются прочностные характеристики используемых материалов, которые будут обеспечивать безопасность технологического процесса.

Настройки пуска, останова и рабочего режима технологического процесса производятся при помощи СУ, для которой рассчитаны поправочные коэффициенты, при помощи моделирующих компьютерных программ во время работ по проектированию и поиску дефектов.

В случае, когда необходимо внести изменения в уже существующий технологический процесс, необходимо произвести корректировочные расчеты для СУ и СПАЗ, которые позволят обеспечить безопасность процесса при новых значениях технологических параметров.

2. Математическое моделирование технологического процесса и гидравлической сети

Технологический процесс – это упорядоченная последовательность взаимосвязанных операций, выполняющихся с момента возникновения исходных данных до получения требуемого результата.

Технологическая схема – последовательное описание или графическое изображение последовательности технологических операций (процессов) и соответствующих им аппаратов, которые позволяют получить из сырья целевую продукцию. С помощью набора объектов технологической схемы создается графическая интерпретация – цифровой аналог производства. Моделирование технологических процессов структурно-сложных технологических схем невозможно без использования гидравлической сети. Гидравлическая сеть – двудольный граф, состоящий из ребер, узлов и вершин. В контексте технологической схемы элементы ориентированного графа олицетворяют следующие связи: вершина – объект технологической схемы, объем которого значительно больше объема трубопровода (резервуар, емкость и т. д.); узел – объект технологической схемы, объем которого сопоставим с объемом трубопровода (смеситель, коллектор и т. д.); ребро – объект технологической схемы, который соединяет узлы и ребра (трубопровод).

В процессе математического моделирования физико-химических процессов, протекающих в элементах структурно-сложных технологических систем, выполняются расчеты переменных состояния объектов технологической схемы с целью его детального изучения и дальнейшей корректировки СУ и СПАЗ. Процесс моделирования технологической схемы можно разделить на несколько этапов: создание технологической схемы, сбор и ввод исходной информации об объектах; автоматизированное формирование гидравлической сети на базе технологической схемы; идентификация математической модели сети трубопроводов; расчет переменных состояния объектов; управление расчетом.

Для того, чтобы создать математическую модель сети трубопроводов (гидравлической сети), необходимо построить ориентированный граф и матрицу связности его ребер, а также собрать полную информацию о геометрических особенностях труб, физико-химических свойствах веществ и смесей, которые проходят по ним.

Теория построения гидравлической сети представлена в работе [4]. Там же предложен метод и реализующая его информационная технология построения гидравлических сетей на базе технологических схем, которая исключает участие пользователя в формировании матрицы связности узлов, вершин и ребер. Обмен информацией между расчетными модулями в процессе моделирования гидравлической сети и технологического процесса происходит автоматически.

Входными данными для моделирования гидравлической сети являются:

- гидравлические сопротивления участков трубопровода (коэффициенты, которые рассчитываются исходя из геометрических особенностей участков трубопровода);
- плотность вещества, протекающего по участку трубопровода;
- эквивалентный диаметр участка трубопровода;
- степень открытия вентиля на участке трубопровода;

– давление источника и приемника (начальные приближения для решения системы уравнений);

– связность ребер, узлов и вершин.

Выходными данными – результатами моделирования гидравлической сети являются:

– расход смеси на каждом из участков трубопровода;

– давления в узлах трубопровода (точках смешения/деления потока)[5].

Гидравлическое сопротивление каждого участка трубопровода рассчитывается в зависимости от режима течения смеси, но в общем случае оно обусловлено как сопротивлением трения, так и местными сопротивлениями.

На рис. 2 представлены этапы работ, которые необходимо произвести с использованием разработанного программного комплекса для моделирования технологического процесса и гидравлической сети, для поиска, анализа и устранения дефектов, а также настройки технологического процесса на оптимальный режим.

Результаты моделирования технологического процесса и гидравлической сети, в зависимости от входных данных и внесенных возмущений, могут различаться. При этом модель должна обеспечивать минимальную погрешность, чтобы при переносе настроек на СУ и СПАЗ, результирующие параметры обеспечили безопасную работу производства[6].



Рис. 2 Алгоритм поиска дефектов

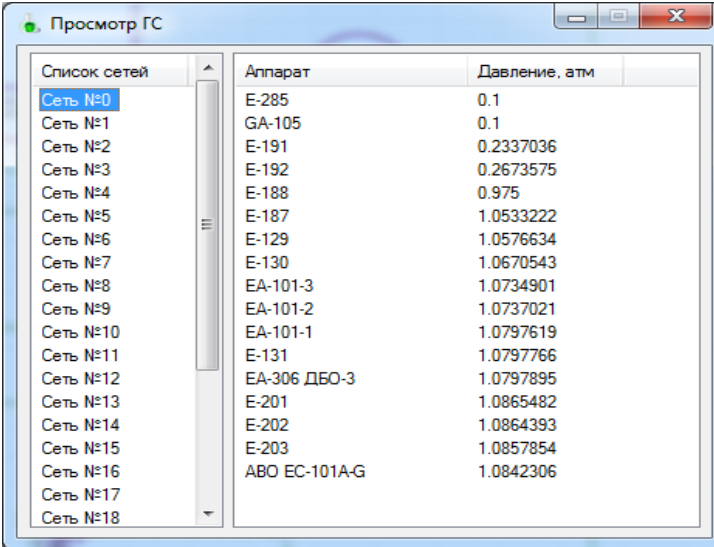
3. Результаты численного моделирования

Численное моделирование гидравлической сети и физико-химических процессов подразумевают расчет контролируемых переменных состояния при заданных начальных условиях. Например, необходимо оценить скорость снижения давления в аппарате при открытии предохранительного клапана и сравнить её с предельно допустимой. Для этого, необходимо задать геометрические параметры аппаратов и трубопроводов, состав смеси, начальные значения температур, давлений и т.д. Результатами расчета физико-химических процессов будут новые значения параметров смеси, скорости поступления и вытекания смеси из аппарата в аппарат, а также давления в узлах схемы.

На рис. 3 и рис. 4 представлены результаты численного моделирования гидравлической сети при аварийном сбросе вещества через клапан. Результаты численного моделирования показали, что линейная скорость выходящей из аппарата смеси равна 2,96 м/с. Паспортные данные аппарата допускают линейную скорость истечения до 70 м/с, на основе чего можно сделать вывод, что такой сброс является безопасным.

Модули расчета физико-химических процессов и гидравлической сети динамически обмениваются информацией после каждой итерации расчета посредством системы автоматической стыковки переменных. Результаты расчета одной итерации являются начальными приближениями для последующей.

На рис.5 представлены результаты моделирования физико-химических процессов, в данном случае – численные значения параметров, которые рассчитаны в моделях смешения, разделения веществ, поиска давления температуры и т.д.



Список сетей	Аппарат	Давление, атм
Сеть №0	E-285	0.1
Сеть №1	GA-105	0.1
Сеть №2	E-191	0.2337036
Сеть №3	E-192	0.2673575
Сеть №4	E-188	0.975
Сеть №5	E-187	1.0533222
Сеть №6	E-129	1.0576634
Сеть №7	E-130	1.0670543
Сеть №8	EA-101-3	1.0734901
Сеть №9	EA-101-2	1.0737021
Сеть №10	EA-101-1	1.0797619
Сеть №11	E-131	1.0797766
Сеть №12	EA-306 ДБО-3	1.0797895
Сеть №13	E-201	1.0865482
Сеть №14	E-202	1.0864393
Сеть №15	E-203	1.0857854
Сеть №16	ABO EC-101A-G	1.0842306
Сеть №17		
Сеть №18		

Рис. 3 Распределение давлений в узлах технологической схемы

Объект:С-3

Свойства потока	
Давление, атм	8.92641
Доля пара	0.99999999
Линейная скорость, м/с	2.96695555
Расход моль/с	198.099896
Расход тонн/час	55.6345334
Расход м³/с	0.83895139
Температура, °С	200

Рис. 4 Переменные состояния и скорость поступления смеси в аппарат

Давление жидкости, атм	9.0039
Давление, атм	8.89367
Масса смеси, Кг	11471.062
Молей всего	54227.4475
Степень заполн. жидкостью, %	18.6746111
Температура, °С	197.602
Уровень жидкости, м	1.12047667

Рис. 5 Переменные технологического процесса

Для того, чтобы определить возможные дефекты в технологической системе, необходимо внести возмущения в её работу и отследить рассчитанные значения, сравнив их с предельно допустимыми. В том случае, если какая-либо переменная выходит за пределы допустимых значений – необходимо на основе анализа результатов моделирования с помощью программного комплекса определить причины этих изменений, а также внести изменения в настройках СУ и СПАЗ, чтобы при произведенных воздействиях контролируемые переменные состояния не выходили за пределы допустимых значений.

4. Практическое применение численного моделирования

Для того, чтобы разработать надежную без-опасную технологическую систему, устойчивую к возмущениям, необходим анализ возможных дефектов и пересмотр возможных конфигураций для СУ и СПАЗ.

К наиболее важным преимуществам компьютерного моделирования технологических процессов относятся возможности:

- причинно-следственного анализа для выбора оптимального варианта технологического процесса, соответствующего поставленным целям;
- нахождения оптимальных режимов работы оборудования для получения желаемой производительности установок и желаемого качества продуктов;
- оценки влияния изменения характеристик сырья, сбоев в работе и остановки оборудования на безопасность, надежность и рентабельность установки;

- расчета и проверки параметров системы управления в режиме динамического моделирования;
- контроля состояния оборудования;
- оценки таких дефектов оборудования, как загрязнение теплообменников и захлебывание тарелок ректификационных колонн путем моделирования и мониторинга переменных состояния оборудования реальной установки.

Таким образом, разработка современных технологических процессов и оптимальная эксплуатация действующих производств невозможна без применения моделирующих компьютерных программ, обеспечивающих высокую точность определения переменных состояния технологических процессов и позволяющих без значительных материальных и временных затрат проводить анализ этих процессов. Такие численные исследования имеют огромное значение не только для проектирования с помощью САПР, но и для функционирования существующих производств, так как позволяют учесть влияние внешних факторов (изменение состава сырья, изменение требований к конечным и промежуточным продуктам и т.д.) на показатели действующих производств и разработать безопасную систему управления на основе моделирования процесса в режиме реального времени.

Обычно моделирующие компьютерные программы также называют симуляторами. В общем случае с применением современных симуляторов технологических процессов решаются следующие задачи:

- анализ, оптимизация и синтез технологических систем для проектируемых и действующих производств;
- исследование поведения технологических систем в режиме реального времени для синтеза систем управления и противоаварийной защиты с целью поиска возможных дефектов и повышения надежности этих систем.

Заключение

Современное развитие технологии производств и требования к безопасности стимулируют развитие систем компьютерного моделирования гидравлических сетей и технологических процессов.

Моделирование физико-химических процессов и гидравлических сетей в режиме реального времени позволяет не только проводить анализ переменных состояния технологического процесса производства, но и выявить дефекты, а также произвести необходимые расчеты по оценке эффективности возможных способов их устранения.

Разработан метод моделирования гидравлических сетей и технологических процессов, позволяющий определять и анализировать переменные состояния технологической системы, в том числе при наличии дефектов.

В дальнейшем планируется применение численного моделирования для создания компьютерных тренажерных комплексов, которые служат для обучения персонала производства в различных пред- и аварийных ситуациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ицкович Э.Л. Управление функционированием АСУ химико-технологическим производством / Э.Л. Ицкович, М.В. Левин, Т.Б. Потапова // Приборы и системы управления. – 1987. С. 28-33.
2. Кафаров В.В., Глебов М.Б. «Математическое моделирование основных процессов химических производств». Учеб. пособие для вузов / В.В. Кафаров, М.Б. Глебов. - М.: Высш. шк., 1991. - 400 с.
3. Поляков С.А. Математические модели и моделирование объектов машиностроительного производства: учебное пособие / С.А. Поляков. – Издательство Московского государственного открытого университета, 2011. – 104 с.
4. Силаков А.И. Формализация представления гидравлических сетей структурно-сложных технологических систем на основе элементной базы стандартных модулей / А.И. Силаков, М.Л. Угрюмов, А.С. Шмелев, В.Е. Стрелец // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. Сборник научных трудов. – 2015. – Выпуск 70. – С.93-101.
5. J. Ingham, I.J. Dunn, E. Heinzle, I.E. Prenosil, J.B. Snape, Chemical Engineering Dynamics, 2007. - pp. 79-91.
6. William L. Luyben, Process modeling simulation and control for chemical engineers Second edition, 2013. - pp. 89-91.

УДК 533.6.011 : 51

Нестационарное течение в магистральном газопроводе при продольном сейсмическом воздействии

А. В. Якунин

Харьковский национальный университет городского хозяйства имени А.Н. Бекетова, Украина

Рассматриваются нестационарные гидродинамические процессы в линейном участке магистрального газопровода, вызванные плоской продольной сейсмической волной, которая распространяется вдоль оси трубопровода, не приводя к ее смещению. Определяется распределение давления вдоль трассы при заданных его значениях на концах трубопровода. Предложено упрощенное приближенное аналитическое представление решения соответствующей модернизированной системы уравнений в частных производных на основе применения операционного исчисления и методов возмущений.

Ключевые слова: нестационарное течение, телеграфное уравнение, сингулярное возмущение, метод малого параметра, операционное исчисление.

Розглядаються нестационарні гідродинамічні процеси в лінійній ділянці магистрального газопроводу, викликані плоскою повздовжньою сейсмічною хвилею, яка поширюється вздовж осі трубопроводу, не приводячи до її зміщення. Визначається розподіл тиску вздовж траси при заданих його значеннях на кінцях трубопроводу. Запропоновано спрощене наближене аналітичне подання розв'язку відповідної модернізованої системи рівнянь у частинних похідних на основі застосування операційного числення і методів збурень.

Ключові слова: нестационарна течія, телеграфне рівняння, сингулярне збурення, метод малого параметра, операційне числення.

The nonstationary hydrodynamic processes in the linear part of main gas pipeline are considered that are caused by a flat longitudinal seismic wave, which propagates along the pipe axis without causing its displacement. Distribution of pressure along the piping line is defined by known pressure values at the ends of the pipeline. A representation of the simplified approximate analytical solution is proposed to the corresponding modernized system of equations in partial derivatives. The solution is based on application of operational calculus and perturbation methods.

Key words: nonstationary current, telegraph equation, singular perturbation, method of small parameter, operational calculus.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

При проектировании и эксплуатации сложных технических систем различного назначения встают проблемы расчета механики трубопроводов и течений сплошной среды в них [1 – 7]. Нестационарный поток в магистральном газопроводе (МГ) с развитой шероховатостью рассматривается как турбулентное течение с тонким пристеночным ламинарным слоем. Такой режим характерен для МГ с линейными участками (ЛУ) протяженностью порядка нескольких сотен километров, прокладываемыми по дну морей или через горные перевалы, когда установка промежуточных компрессорных станций технически невозможна, а при этом в начале каждого участка создается аномально высокое давление до $15 \div 25 \text{ МПа}$ [1]. Плотность транспортируемого

газа достигает значений $150 \div 200 \text{ кг/м}^3$, скорость звука в нем увеличивается до $500 \div 600 \text{ м/с}$, а амплитуда волн давления и разрежения может превышать 1 МПа , с чем необходимо считаться при проектировании и эксплуатации оборудования МГ. Даже если уровень пульсаций давления не представляет непосредственной опасности для стенок трубопровода, он может негативно повлиять на работу запорной арматуры и газоперекачивающих агрегатов, вызвать несанкционированное срабатывание систем контроля и автоматики.

Одной из причин нестационарных процессов в МГ может служить сейсмическое воздействие. Более чем на 10% территории бывшего Советского Союза наблюдаются сильные землетрясения (семь баллов и выше), в том числе на Прикарпатье и в Крыму. Среди всех видов сейсмических воздействий наибольшей силой обладают тектонические землетрясения, происходящие вследствие деформирования земной коры. Хотя часть выделенной энергии расходуется на преодоление трения, сцепления и на разрушение пород, но основным проявлением таких землетрясений служит распространение колебаний в окружающей упругой среде, что может вызвать серьезные нарушения штатной работы МГ.

2. Истоки исследования и цели работы

Основная цель исследований сейсмодинамики протяженных МГ состоит в выработке рекомендаций, которые позволят учесть особенности изменения напряженно-деформированного состояния стенок трубопровода и характер протекания гидродинамических процессов в газовом потоке. При этом они должны быть экономически целесообразными и согласованными с общей стратегией магистрального транспорта газа.

В общем случае, взаимодействие в системе «окружающая среда – трубопровод – транспортируемый газ» носит сложный трехсторонний обоюдный характер. В прикладных задачах, как правило, полагается, что движение среды (грунта) задано и не искажается другими компонентами системы. В частности, считается, что трубопровод не оказывает существенного влияния на механику грунта, однако сам вовлекается в движение и деформацию грунта. При этом трубопровод под внешним воздействием сейсмической волны рассматривается как тонкостенная оболочка, жестко впаянная в сплошную среду – внешний грунтовый массив. Колебания и деформации трубопровода вызывают пульсации внутреннего газового потока. В свою очередь, нестационарные процессы в транспортируемом газе становятся причиной динамических деформаций трубопровода. При расчетах эта обоюдность связей часто игнорируется, что упрощает постановку и решение соответствующих задач и во многих случаях позволяет получить практически приемлемые по точности результаты.

Среди обсуждаемых проблем особенную актуальность в последнее время приобрели вопросы гидроаэроупругости [2, 3], но и гидродинамические аспекты сохраняют свою злободневность [4 – 6]. В данной работе в одномерной постановке рассматриваются нестационарные гидродинамические процессы в длинном горизонтально расположенном линейном участке (ЛУ) МГ, вызванные

плоской продольной сейсмической волной, которая распространяется вдоль оси трубопровода, не приводя к ее смещению. Определяется распределение давления вдоль трассы ЛУ МГ при заданных его значениях на концах трубопровода. В отличие от работы [5], в предлагаемой модели учитывается сжимаемость перекачиваемой среды и диссипация энергии, связанной с движением газа. Обсуждаются расчетные процедуры и вопросы дискретизации непрерывного представления.

3. Постановка задачи и ее упрощение

Предполагается, что каждая точка x трубопровода движется с ускорением по одному и тому же закону, который задается акселерограммой сейсмического воздействия $d^2x/dt^2 = f$, где $f = f(t)$ – произвольная интегрируемая функция, t – время. Если ввести неинерционную систему отсчета, связанную с трубопроводом, то его движение с ускорением приведет к появлению нестационарных распределенных массовых сил, действующих на весь объем газа в трубопроводе. Неустановившееся изотермическое движение газа представляется как наложение стационарного режима (основной фон) и нестационарных возмущений и (с обычно вводимыми упрощениями [1, 7]) описывается одномерной квазилинейной системой уравнений в частных производных гиперболического типа с дополнительным членом, который учитывает действие внешних инерционных сил

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \frac{\partial q}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon a \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\lambda q^2}{2D\rho} + \varepsilon a p f = 0 \quad (1)$$

при начальных

$$0 \leq x \leq L: \quad q(x,0) = q_i(x); \quad p(x,0) = p_i(x) \quad (2)$$

и граничных

$$t > 0: \quad p(0,t) = p_{b0}(t); \quad p(L,t) = p_{b1}(t) \quad (3)$$

условиях. Здесь $p = p(x,t)$ – давление; $q = q(x,t)$ – удельный массовый расход; $\rho = \rho(x,t)$ – плотность; c – скорость звука в газе, $c = \sqrt{zRT}$; T – температура, $T = T_0 = const$; R – газовая постоянная; z – коэффициент сжимаемости, $z = const$; L и D – длина и диаметр трубопровода; λ – коэффициент гидравлического сопротивления, $\lambda = const$; a – постоянный положительный коэффициент, $a = \sqrt{\lambda L / (2D)}$; $q_i(x)$, $p_i(x)$ и $p_{b0}(t)$, $p_{b1}(t)$ – функции, определяющие соответственно начальные и граничные условия; ε – малый положительный параметр, который отражает второстепенный характер воздействия на течение газа внутренних и внешних инерционных факторов, $\varepsilon = \sqrt{2D / (\lambda L)}$.

Опираясь на методы возмущений [8], краевая задача (1)–(3) допускает расщепление решения по малому параметру ε .

Используя уравнение состояния реального газа в форме $p = z\rho RT$, можно исключить из дифференциальной системы (1) плотность газа и представить ее в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \frac{\partial q}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon a \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\lambda c^2 q^2}{2D p} + \varepsilon \frac{apf}{c^2} = 0. \quad (4)$$

Пусть $t_v = L/c$ – время распространения волны по длине трубопровода. Если ввести безразмерные переменные $\bar{p} = p/p_c$; $\bar{q} = q/q_0$; $\bar{x} = x/L$; $\bar{t} = t/t_v = ct/L$ и представить начальные и граничные условия как

$$0 \leq \bar{x} \leq 1 : \bar{q}(\bar{x}, 0) = \bar{q}_i(\bar{x}) = 1 + \varepsilon \bar{q}_i^{(1)}(\bar{x}); \quad \bar{p}(\bar{x}, 0) = \bar{p}_i(\bar{x}) = \bar{p}_0(\bar{x}) + \varepsilon \bar{p}_i^{(1)}(\bar{x}); \quad (5)$$

$$\bar{t} > 0 : \bar{p}(0, \bar{t}) = \bar{p}_{b0}(\bar{t}) = \bar{p}_0(0) + \varepsilon \bar{p}_{b0}^{(1)}(\bar{t}); \quad \bar{p}(1, \bar{t}) = \bar{p}_{b1}(\bar{t}) = \bar{p}_0(1) + \varepsilon \bar{p}_{b1}^{(1)}(\bar{t}), \quad (6)$$

где первые слагаемые соответствуют основному стационарному фону, а вторые слагаемые отражают его возмущения, причем [1, 7]

$$\bar{q}_0 = 1; \quad \bar{p}_0^2(1) = \bar{p}_0^2(0) - 2a^2; \quad \bar{p}_0(\bar{x}) = \sqrt{\bar{p}_0^2(0) - (\bar{p}_0^2(0) - \bar{p}_0^2(1))\bar{x}}, \quad (7)$$

тогда можно получить краевую задачу для уравнений неразрывности и движения в безразмерной форме

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}} = 0; \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \varepsilon a \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{t}} + \varphi \bar{q} + \varepsilon b \bar{p} \bar{f} = 0 \quad (8)$$

при начальных и граничных условиях (5), (6). Здесь $p_0 = p_0(x)$, $q_0 = const$ – значения давления и удельного массового расхода при основном стационарном режиме; $p_c = c q_0$ – некоторое характерное давление; b – постоянный коэффициент, $b = aL/c^2$; φ – переменный коэффициент, $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{t}) = a^2 \bar{q} / \bar{p}$; $\bar{f} = \bar{f}(\bar{t}) = f(L\bar{t}/c)$. Причем учтено, что $\bar{q}_0 = 1$.

Для упрощения записей в дальнейших выкладках знак черты над переменными опущен.

От гидродинамической системы (8) можно перейти к одному телеграфному уравнению относительно давления. Продифференцировав первое уравнение (8) по t , а второе – по x и исключив саму переменную q и ее производные $\frac{\partial q}{\partial x}$ и

$\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t}$, можно получить

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \varepsilon a \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} - \varepsilon \frac{a}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial t} - \varepsilon \frac{b}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot fp - \varphi \frac{\partial p}{\partial t} + \varepsilon \frac{bf}{\varphi} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Согласно [7] функция $\varphi = \varphi(x, t)$ имеет малую крутизну по x , т.е. $\partial \varphi / \partial x \sim \varepsilon$. Тогда уравнение (9) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \varepsilon a \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{a}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{a^2}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{ab}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot fp - \varphi \frac{\partial p}{\partial t} + \varepsilon \frac{bf}{\varphi} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Используя асимптотические разложения по малому параметру

$$p(x,t) = p^{(0)}(x) + \varepsilon p^{(1)}(x,t) + \dots; \quad q(x,t) = q^{(0)} + \varepsilon q^{(1)}(x,t) + \dots; \quad (11)$$

$$\varphi(x,t) = \varphi^{(0)}(x) + \varepsilon \varphi^{(1)}(x,t) + \dots, \quad \varphi^{(0)} = a^2 q^{(0)} / p^{(0)}, \quad (12)$$

где в качестве нулевого приближения приняты параметры основного стационарного режима

$$p^{(0)} = p_0(x) \text{ и } q^{(0)} = 1, \quad (13)$$

можно получить рекуррентную последовательность краевых задач для $p^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$. Из практических соображений достаточно ограничиться расчетом до первого приближения

$$p = p^{(0)}(x) + \varepsilon p^{(1)} = p_0(x) + \varepsilon p^{(1)}. \quad (14)$$

4. Построение интегрально-разностной модели распределения давления с учетом продольного сейсмического воздействия

При $q_0 > 0$ стационарное давление $p_0(x)$ – монотонно убывающая функция. Для упрощения в уравнении (10) можно сделать замену $x \rightarrow u$, где $u = (p_0(x))^{3/2}$. Тогда, обозначая $u_0 = (p_0(0))^{3/2}$, $u_1 = (p_0(1))^{3/2}$ и выражая производную dp_0/dx из стационарного уравнения движения [1, 7] (в принятых безразмерных переменных) $dp_0/dx + a^2/p_0 = 0$, можно получить

$$p^{(0)} = p_0(x) = u^{2/3}; \quad x = \frac{p_0^2(0) - p_0^2(x)}{p_0^2(0) - p_0^2(1)} = \frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}}; \quad (15)$$

$$\frac{dp_0}{dx} = -\frac{a^2}{p_0} = -a^2 u^{-2/3}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial p_0} \cdot \frac{dp_0}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial u} = -\frac{3}{2} a^2 u^{-1/3} \cdot \frac{\partial}{\partial u}; \quad (16)$$

$$\frac{d\varphi^{(0)}}{dx} = -\frac{a^2}{p_0^2} \cdot \frac{dp_0}{dx} = -\frac{a^2}{u^{4/3}} \cdot (-a^2 u^{-2/3}) = a^4 u^{-2}. \quad (17)$$

В результате уравнение (10) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \varepsilon \frac{4u^{2/3}}{9a^3} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{4u^{2/3}\varphi}{9a^4} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} - \varepsilon \frac{a}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial p}{\partial u} - \varepsilon \frac{a}{3u} \cdot \frac{\partial p}{\partial u} - \\ - \varepsilon \frac{2bu^{1/3}}{3a^2\varphi} \cdot \frac{\partial p}{\partial u} \cdot f + \varepsilon^2 \frac{2bu^{1/3}}{3a\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot fp - \varepsilon^2 \frac{2u^{1/3}}{3\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где введением множителя ε учтена также малость пятого слагаемого.

Из уравнения (18) для первого приближения следует

$$\frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial u^2} - \frac{4u^{2/3}}{9a^4} \cdot \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{4}{9a^2} \cdot \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \frac{2au^{-4/3}}{9} - \frac{4bu^{2/3}f}{9a^4} = 0. \quad (19)$$

Следует подчеркнуть, что в соотношении (19) оставлен малый член со второй производной по времени $\partial^2 p^{(1)}/\partial t^2$, который отражает волновой характер исследуемого процесса. Его отбрасывание соответствует сингулярному возмущению исходного уравнения – переходу от гиперболического типа к параболическому, что нарушает корректность учета быстро осциллирующих внешних воздействий $f = f(t)$ и не позволяет адекватно описать принципиально важный начальный период времени протекания процесса, приводя к неустойчивым при $t \rightarrow 0$ вычислительным процедурам.

Усредняя малый коэффициент при этом дополнительном члене, уравнение (19) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial u^2} - a_1^2 \cdot \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial t^2} - a_2 \cdot \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + a_3 u^{-4/3} - a_4 u^{2/3} f = 0, \quad (20)$$

где постоянные положительные коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 определяются выражениями

$$a_1^2 = \left(\frac{4u^{2/3}}{9a^4} \right)_{cp} = \frac{4}{9a^4} \cdot \frac{1}{u_0 - u_1} \cdot \int_{u_1}^{u_0} u^{2/3} du = \frac{4(u_0^{5/3} - u_1^{5/3})}{15a^4(u_0 - u_1)};$$

$$a_2 = \frac{4}{9a^2}; \quad a_3 = \frac{2a}{9}; \quad a_4 = \frac{4b}{9a^4}.$$

Начальные и граничные условия для первого приближения

$$u_1 \leq u \leq u_0: \quad p^{(1)}(u, 0) = p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right); \quad \frac{\partial}{\partial t} p^{(1)}(u, 0) = \frac{3a^2}{2u^{1/3}} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial u} q_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right); \quad (21)$$

$$t > 0: \quad p^{(1)}(u_0, t) = p_{b0}^{(1)}(t); \quad p^{(1)}(u_1, t) = p_{b1}^{(1)}(t). \quad (22)$$

Преобразуя уравнение (20) по Лапласу [9] по времени с учетом начальных условий (21), можно построить его операторное изображение

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}(u, s)}{\partial u^2} - a_1^2 s^2 P^{(1)}(u, s) + a_1^2 s p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) + \frac{3a^2 a_1^2}{2u^{1/3}} \frac{\partial}{\partial u} q_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) -$$

$$- a_2 s P^{(1)}(u, s) + a_2 p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) + a_3 u^{-4/3} / s - a_4 u^{2/3} F(s) = 0, \quad (23)$$

где $P^{(1)}(u, s)$ и $F(s)$ – изображения соответственно давления и внешних инерционных воздействий; s – параметр преобразования Лапласа.

Для учета волнового характера течения достаточно ограничиться наличием в уравнении (23) только второго слагаемого, а третье и четвертое, как менее

значительные, отбросить (они частично отражают затухающее с течением времени влияние начальных условий). В результате получается операторное уравнение

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}(u, s)}{\partial u^2} - \gamma^2 P^{(1)}(u, s) + 2G(u, s) = 0, \quad (24)$$

где $\gamma = a_1 \sqrt{s(s+2\alpha)}$; $\alpha = (1/2)a_2/a_1^2$;

$$G(u, s) = \frac{a_2}{2} P_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) + \frac{a_3 u^{-4/3}}{2s} - \frac{a_4}{2} u^{2/3} F(s).$$

Решение уравнения (24) без учета граничных условий (22) можно представить в следующей нетрадиционной симметричной форме

$$P^{(1)}(u, s) = A(s) \cdot \exp(-\gamma(u_0 - u)) + B(s) \cdot \exp(-\gamma(u - u_1)) + \\ + \int_{u_1}^u \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma(u - \theta)) G(\theta, s) d\theta + \int_u^{u_0} \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma(\theta - u)) G(\theta, s) d\theta, \quad (25)$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой. К выражению (25) можно прийти с помощью метода вариации произвольных постоянных. Соотношение (25) определяет решение операторного уравнения (24) без использования гиперболических функций. Такая форма записи изображения позволяет получить достаточно простые оригиналы.

Здесь $A(s)$ и $B(s)$ – произвольные функции, оригиналы которых $a(t)$ и $b(t)$ принимаются за вспомогательные так называемые волновые переменные [10]. Для их нахождения используются граничные условия (22):

$$A(s) + B(s) \cdot \exp(-\gamma(u_0 - u_1)) + \int_{u_1}^{u_0} \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma(u_0 - \theta)) G(\theta, s) d\theta = P_{b_0}^{(1)}(s); \quad (26)$$

$$A(s) \cdot \exp(-\gamma(u_0 - u_1)) + B(s) + \int_{u_1}^{u_0} \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma(\theta - u_1)) G(\theta, s) d\theta = P_{b_1}^{(1)}(s), \quad (27)$$

где $P_{b_0}^{(1)}(s)$ и $P_{b_1}^{(1)}(s)$ – изображения заданных граничных условий.

Используя табличный оригинал [9]

$$\frac{\exp(-h\sqrt{s(s+2\alpha)})}{\sqrt{s(s+2\alpha)}} \bullet = \exp(-\alpha t) \cdot I_0(\alpha\sqrt{t^2 - h^2}) \cdot \eta(t-h)$$

непосредственно и дифференцируя его по параметру h с учетом равенства $dI_0(t)/dt = I_1(t)$, а также применяя интеграл свертки оригиналов, можно в уравнениях (25) – (27) перейти во временную область и получить рекуррентные интегрально-разностные соотношения для давления и волновых переменных:

$$p(u, t) = u^{2/3} + \varepsilon R(t, a_1(u_0 - u)) a(t - a_1(u_0 - u)) + \varepsilon R(t, a_1(u - u_1)) \times$$

$$\begin{aligned} & \times b(t - a_1(u - u_1)) + \varepsilon \eta(t - a_1(u_0 - u)) \int_0^{t - a_1(u_0 - u)} S(t - \tau, a_1(u_0 - u)) a(\tau) d\tau + \\ & + \varepsilon \eta(t - a_1(u - u_1)) \int_0^{t - a_1(u - u_1)} S(t - \tau, a_1(u - u_1)) b(\tau) d\tau + \\ & + \varepsilon \frac{a_2}{2} \int_{\theta_1(u, t)}^{\theta_2(u, t)} T(t, a_1 | u - \theta |) p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - \theta^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) d\theta + \varepsilon \frac{a_3}{2} \int_{\theta_1(u, t)}^{\theta_2(u, t)} V(t, a_1 | u - \theta |) \theta^{-4/3} d\theta - \\ & - \varepsilon \frac{a_4}{2} \int_{u_1}^{u_0} \theta^{2/3} d\theta \int_{a_1 | u - \theta |}^t T(\tau, a_1 | u - \theta |) f(t - \tau) d\tau; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} a(t) &= p_{b0}^{(1)}(t) - R(t, a_1(u_0 - u_1)) b(t - a_1(u_0 - u_1)) - \eta(t - a_1(u_0 - u_1)) \times \\ & \times \int_0^{t - a_1(u_0 - u_1)} S(t - \tau, a_1(u_0 - u_1)) b(\tau) d\tau - \frac{a_2}{2} \int_{\theta_1(u_0, t)}^{u_0} T(t, a_1(u_0 - \theta)) p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - \theta^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) d\theta - \\ & - \frac{a_3}{2} \int_{\theta_1(u_0, t)}^{u_0} V(t, a_1(u_0 - \theta)) \theta^{-4/3} d\theta + \frac{a_4}{2} \int_{u_1}^{u_0} \theta^{2/3} d\theta \int_{a_1(u_0 - \theta)}^t T(\tau, a_1(u_0 - \theta)) f(t - \tau) d\tau; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} b(t) &= p_{b1}^{(1)}(t) - R(t, a_1(u_0 - u_1)) a(t - a_1(u_0 - u_1)) - \eta(t - a_1(u_0 - u_1)) \times \\ & \times \int_0^{t - a_1(u_0 - u_1)} S(t - \tau, a_1(u_0 - u_1)) a(\tau) d\tau - \frac{a_2}{2} \int_{u_1}^{\theta_2(u_1, t)} T(t, a_1(\theta - u_1)) p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - \theta^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) d\theta - \\ & - \frac{a_3}{2} \int_{u_1}^{\theta_2(u_1, t)} V(t, a_1(\theta - u_1)) \theta^{-4/3} d\theta + \frac{a_4}{2} \int_{u_1}^{u_0} \theta^{2/3} d\theta \int_{a_1(\theta - u_1)}^t T(\tau, a_1(\theta - u_1)) f(t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (30)$$

причем $a(t) = 0$ и $b(t) = 0$ при $t \leq 0$.

Вспомогательные функции $\theta_1(h, t)$, $\theta_2(h, t)$, $R(t, h)$ и ядра интегральных операторов $S(t, h)$, $T(t, h)$, $V(t, h)$ определяются выражениями

$$\theta_1(h, t) = \max\{u_1, h - t/a_1\}; \quad \theta_2(h, t) = \min\{u_0, h + t/a_1\}; \quad (31)$$

$$R(t, h) = \exp(-\alpha h) \eta(t - h); \quad S(t, h) = \frac{\alpha h \exp(-\alpha t)}{\sqrt{t^2 - h^2}} I_1\left(\alpha \sqrt{t^2 - h^2}\right); \quad (32)$$

$$T(t, h) = \frac{1}{a_1} \exp(-\alpha t) I_0\left(\alpha \sqrt{t^2 - h^2}\right) \eta(t - h); \quad (33)$$

$$V(t, h) = \int_0^t T(\tau, h) d\tau = \frac{1}{a_1} \eta(t - h) \int_h^t \exp(-\alpha \tau) I_0\left(\alpha \sqrt{\tau^2 - h^2}\right) d\tau. \quad (34)$$

Здесь $\eta(t)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда: $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$;

$I_0(t)$ и $I_1(t)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков.

Обращение преобразования Лапласа применением интеграла свертки оригиналов позволяет избежать разложения изображений в бесконечные ряды, что значительно упрощает математические выкладки и существенно уменьшает объем вычислений.

Интегрально-разностная модель (28) – (30) служит обобщением известного решения волнового уравнения в форме суперпозиции прямой и обратной волн, которые в отсутствии трения сохраняют свои амплитуды при распространении по трубопроводу. Наличие гидравлического сопротивления приводит к тому, что каждая из волн испытывает искажения в результате затухания и многократных отражений, однако не изменяет величины ее запаздывания при распространении по трубопроводу. Указанные искажения учитываются в соотношениях (28) – (30) с помощью интегралов свертки, которые представляют собой непрерывные суммы отраженных волн, образуемых не только на концах, но и в промежуточных сечениях трубопровода под влиянием гидравлического сопротивления.

Предложенная интегрально-разностная модель позволяет определить давление в любой точке ЛУ МГ в произвольный момент времени. В правые части выражений (28) – (30) искомые величины входят с запаздыванием. Расчеты сводятся к последовательному интегрированию. Вычисление квадратур можно осуществить стандартными методами.

5. Упрощение расчетных соотношений

Система равенств (28) – (34) определяет распределение давления вдоль трассы ЛУ МГ до возмущений первого порядка включительно при произвольных начальных и граничных условиях и произвольном виде акселерограммы $d^2x/dt^2 = f$. Однако эти соотношения являются довольно сложными, что затрудняет проведение оперативных расчетов. Учет особенностей постановки задачи и процесса синтеза результирующей модели – аппроксимационный характер исходной системы уравнений в частных производных, принятые в ходе ее трансформации усреднения коэффициентов, пренебрежение в рамках метода возмущений величинами второго и выше порядков малости, кратковременность внешних инерционных воздействий – позволяет, практически не снижая точности получаемых результатов, значительно упростить расчетные формулы и повысить быстродействие вычислений.

Условиям моделируемых процессов отвечают малые значения безразмерного времени t . Поэтому при $t \rightarrow 0$ в области оригиналов и, соответственно, при $s \rightarrow \infty$ в области изображений можно использовать приведенные ниже соотношения (громоздкие промежуточные выкладки опущены). Они основаны на приближенной замене соответствующей функции-изображения $F(r, \beta)$, где

$r = s + \alpha$ и $\beta = \alpha^2$, частной суммой ее ряда Тейлора по второму аргументу β : $F(r, \beta) \approx F(r, 0) + (\partial F(r, 0) / \partial \beta) \cdot \beta$, в которой оставлены члены до первого порядка по β включительно. Из вида рассматриваемых функций $F(r, \beta)$ вытекает, что полученные приближения тем точнее, чем меньше отношение $\alpha / (s + \alpha)$.

$$\sqrt{s(s+2\alpha)} = \sqrt{(s+\alpha)^2 - \alpha^2}; S(t, h) \doteq \exp\left(-h\sqrt{(s+\alpha)^2 - \alpha^2}\right) - \exp(-h(s+\alpha)) \approx \\ \approx \exp(-\alpha h) \cdot \exp(-hs) \cdot \frac{\alpha^2 h}{2} \cdot \frac{1}{s+\alpha} \doteq \frac{\alpha^2 h}{2} \cdot \exp(-\alpha t) \cdot \eta(t-h); \quad (35)$$

$$T(t, h) \doteq \frac{\exp\left(-h\sqrt{(s+\alpha)^2 - \alpha^2}\right)}{\sqrt{(s+\alpha)^2 - \alpha^2}} \approx \exp(-\alpha h) \cdot \exp(-hs) \cdot \left(\frac{1}{s+\alpha} + \frac{\alpha^2 h}{2} \cdot \frac{1}{(s+\alpha)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{1}{(s+\alpha)^3}\right) \doteq \exp(-\alpha t) \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{4}(t^2 - h^2)\right) \cdot \eta(t-h); \quad (36)$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{(s+\alpha) - \alpha} = \frac{1}{s+\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \alpha/(s+\alpha)} \approx \frac{1}{s+\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{s+\alpha} + \frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2}\right); \quad (37)$$

$$V(t, h) \doteq \frac{1}{s} \cdot \frac{\exp\left(-h\sqrt{(s+\alpha)^2 - \alpha^2}\right)}{\sqrt{(s+\alpha)^2 - \alpha^2}} \approx \frac{1}{s+\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{s+\alpha} + \frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2}\right) \cdot \exp(-\alpha h) \times \\ \times \exp(-hs) \cdot \left(\frac{1}{s+\alpha} + \frac{\alpha^2 h}{2} \cdot \frac{1}{(s+\alpha)^2} + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{1}{(s+\alpha)^3}\right) \approx \exp(-\alpha h) \cdot \exp(-hs) \times \\ \times \left(\frac{1}{(s+\alpha)^2} + \frac{\alpha(2+\alpha h)}{2} \cdot \frac{1}{(s+\alpha)^3} + \frac{3\alpha^2}{2} \cdot \frac{1}{(s+\alpha)^4}\right) \doteq \frac{1}{4} (t-h) \exp(-\alpha t) \times \\ \times (4 + \alpha(2 + \alpha t)(t-h)) \cdot \eta(t-h). \quad (38)$$

Итоговые выражения (35)–(38) для ядер $S(t, h)$, $T(t, h)$, $V(t, h)$ интегральных операторов не содержат вычислительно затратных операций извлечения квадратного корня и определения значений функций Бесселя. Их также можно получить, используя разложения модифицированных функций Бесселя в степенные ряды [9].

Исходя из упрощенных формул (35)–(38) и изменяя порядок интегрирования в повторных интегралах, можно преобразовать и аналитически вычислить отдельные составляющие соотношений (28)–(30):

$$\int_{\theta_1(u,t)}^{\theta_2(u,t)} V(t, a_1 | u - \theta |) \theta^{-4/3} d\theta = \frac{3}{4} \exp(-\alpha t) \cdot \left\{ (1/5) \alpha (2 + \alpha t) a_1^2 \left(\theta_2^{5/3}(u,t) - \theta_1^{5/3}(u,t) \right) - \right. \\ \left. - \alpha (2 + \alpha t) a_1^2 u \left(\theta_2^{2/3}(u,t) - \theta_1^{2/3}(u,t) \right) - (2 + \alpha (2 + \alpha t) t) a_1 \times \right. \\ \left. \times \left(\theta_1^{2/3}(u,t) + \theta_2^{2/3}(u,t) - 2u^{2/3} \right) - 2(2 + \alpha (2 + \alpha t) t) a_1 u \left(\theta_1^{-1/3}(u,t) + \theta_2^{-1/3}(u,t) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2u^{-1/3} \right) - \left[4t + \alpha (2 + \alpha t) (t^2 + a_1^2 u^2) \right] \left(\theta_2^{-1/3}(u,t) - \theta_1^{-1/3}(u,t) \right) \right\}; \quad (39)$$

$$\int_{u_1}^{u_0} \theta^{2/3} d\theta \int_{a_1 | u - \theta |}^t T(\tau, a_1 | u - \theta |) f(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) \exp(-\alpha \tau) d\tau \int_{\theta_1(u,\tau)}^{\theta_2(u,\tau)} \left(1 + (\alpha^2/4)(\tau^2 - \right. \\ \left. - a_1^2(u - \theta)^2) \right) \theta^{2/3} d\theta = \frac{3}{4} \int_0^t f(t - \tau) \exp(-\alpha \tau) \left((1/5)(4 + \alpha^2 \tau^2 - \alpha^2 a_1^2 u^2) \theta^{5/3} + \right. \\ \left. + (1/4) \alpha^2 a_1^2 u \theta^{8/3} - (1/11) \alpha^2 a_1^2 \theta^{11/3} \right) \Big|_{\theta_1(u,\tau)}^{\theta_2(u,\tau)} d\tau; \quad (40)$$

$$\int_{\theta_1(u_0,t)}^{u_0} V(t, a_1 (u_0 - \theta)) \theta^{-4/3} d\theta = \frac{3}{4} \exp(-\alpha t) \cdot \left\{ (1/5) \alpha (2 + \alpha t) a_1^2 \left(u_0^{5/3} - \theta_1^{5/3}(u_0,t) \right) + \right. \\ \left. + (2 + \alpha (2 + \alpha t) (t - a_1 u_0)) a_1 \left(u_0^{2/3} - \theta_1^{2/3}(u_0,t) \right) - \right. \\ \left. - \left(4(t - a_1 u_0) + \alpha (2 + \alpha t) (t - a_1 u_0)^2 \right) \left(u_0^{-1/3} - \theta_1^{-1/3}(u_0,t) \right) \right\}; \quad (41)$$

$$\int_{u_1}^{u_0} \theta^{2/3} d\theta \int_{a_1 (u_0 - \theta)}^t T(\tau, a_1 (u_0 - \theta)) f(t - \tau) d\tau = \frac{3}{4} \int_0^t f(t - \tau) \exp(-\alpha \tau) \left((1/5)(4 + \alpha^2 \tau^2 - \right. \\ \left. - \alpha^2 a_1^2 u_0^2) \theta^{5/3} + (1/4) \alpha^2 a_1^2 u_0 \theta^{8/3} - (1/11) \alpha^2 a_1^2 \theta^{11/3} \right) \Big|_{\theta_1(u_0,\tau)}^{u_0} d\tau; \quad (42)$$

$$\int_{u_1}^{\theta_2(u_1,t)} V(t, a_1 (\theta - u_1)) \theta^{-4/3} d\theta = \frac{3}{4} \exp(-\alpha t) \cdot \left\{ (1/5) \alpha (2 + \alpha t) a_1^2 \left(\theta_2^{5/3}(u_1,t) - u_1^{5/3} \right) - \right. \\ \left. - (2 + \alpha (2 + \alpha t) (t + a_1 u_1)) a_1 \left(\theta_2^{2/3}(u_1,t) - u_1^{2/3} \right) - \right. \\ \left. - \left(4(t + a_1 u_1) + \alpha (2 + \alpha t) (t + a_1 u_1)^2 \right) \left(\theta_2^{-1/3}(u_1,t) - u_1^{-1/3} \right) \right\}; \quad (43)$$

$$\int_{u_1}^{u_0} \theta^{2/3} d\theta \int_{a_1 (\theta - u_1)}^t T(\tau, a_1 (\theta - u_1)) f(t - \tau) d\tau = \frac{3}{4} \int_0^t f(t - \tau) \exp(-\alpha \tau) \left((1/5)(4 + \alpha^2 \tau^2 - \right.$$

$$-\alpha^2 a_1^2 u_1^2 \theta^{5/3} + (1/4)\alpha^2 a_1^2 u_1 \theta^{8/3} - (1/11)\alpha^2 a_1^2 \theta^{11/3} \Big|_{u_1}^{\theta_2(u_1, \tau)} d\tau. \quad (44)$$

С учетом (39) – (44) и (31) – (34) интегрально-разностные соотношения (28) – (30) принимают упрощенный вид:

$$\begin{aligned} p(u, t) = & u^{2/3} + \varepsilon \exp(-\alpha a_1(u_0 - u)) \eta(t - a_1(u_0 - u)) a(t - a_1(u_0 - u)) + \\ & + \varepsilon \exp(-\alpha a_1(u - u_1)) \eta(t - a_1(u - u_1)) b(t - a_1(u - u_1)) + \\ & + \varepsilon \frac{a_1}{2} \eta(t - a_1(u_0 - u)) \alpha^2 (u_0 - u) \int_0^{t - a_1(u_0 - u)} \exp(-\alpha(t - \tau)) a(\tau) d\tau + \\ & + \varepsilon \frac{a_1}{2} \eta(t - a_1(u - u_1)) \alpha^2 (u - u_1) \int_0^{t - a_1(u - u_1)} \exp(-\alpha(t - \tau)) b(\tau) d\tau + \\ & + \varepsilon \frac{a_2}{2} \exp(-\alpha t) \int_{\theta_1(u, t)}^{\theta_2(u, t)} \left(1 + (1/4)\alpha^2 (t^2 - a_1^2 (u - \theta)^2) \right) \eta(t - a_1 | u - \theta |) \times \\ & \times p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - \theta^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) d\theta + \varepsilon \frac{3a_3}{8} \exp(-\alpha t) \cdot \left\{ (1/5)\alpha(2 + \alpha t) a_1^2 \left(\theta_2^{5/3}(u, t) - \theta_1^{5/3}(u, t) \right) - \right. \\ & - \alpha(2 + \alpha t) a_1^2 u \left(\theta_2^{2/3}(u, t) - \theta_1^{2/3}(u, t) \right) - (2 + \alpha(2 + \alpha t)t) a_1 \times \\ & \times \left(\theta_1^{2/3}(u, t) + \theta_2^{2/3}(u, t) - 2u^{2/3} \right) - 2(2 + \alpha(2 + \alpha t)t) a_1 u \left(\theta_1^{-1/3}(u, t) + \theta_2^{-1/3}(u, t) - \right. \\ & \left. - 2u^{-1/3} \right) - \left[4t + \alpha(2 + \alpha t) \left(t^2 + a_1^2 u^2 \right) \right] \left(\theta_2^{-1/3}(u, t) - \theta_1^{-1/3}(u, t) \right) \Big\} - \\ & - \varepsilon \frac{3a_4}{8} \int_0^t f(t - \tau) \exp(-\alpha \tau) \left((1/5)(4 + \alpha^2 \tau^2 - \alpha^2 a_1^2 u^2) \theta^{5/3} + \right. \\ & \left. + (1/4)\alpha^2 a_1^2 u \theta^{8/3} - (1/11)\alpha^2 a_1^2 \theta^{11/3} \right) \Big|_{\theta_1(u, \tau)}^{\theta_2(u, \tau)} d\tau; \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(t) = & p_{b0}^{(1)}(t) - \exp(-\alpha a_1(u_0 - u_1)) \eta(t - a_1(u_0 - u_1)) b(t - a_1(u_0 - u_1)) - \\ & - \frac{a_1}{2} \eta(t - a_1(u_0 - u_1)) \alpha^2 (u_0 - u) \int_0^{t - a_1(u_0 - u_1)} \exp(-\alpha(t - \tau)) b(\tau) d\tau - \\ & - \frac{a_2}{2} \exp(-\alpha t) \int_{\theta_1(u_0, t)}^{u_0} \left(1 + (1/4)\alpha^2 (t^2 - a_1^2 (u_0 - \theta)^2) \right) \eta(t - a_1(u_0 - \theta)) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - \theta^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) d\theta - \frac{3a_3}{8} \exp(-\alpha t) \cdot \left\{ (1/5)\alpha(2 + \alpha t)a_1^2 \left(u_0^{5/3} - \theta_1^{5/3}(u_0, t) \right) \right\} + \\
& \quad + (2 + \alpha(2 + \alpha t)(t - a_1 u_0)) a_1 \left(u_0^{2/3} - \theta_1^{2/3}(u_0, t) \right) - \\
& \quad - \left(4(t - a_1 u_0) + \alpha(2 + \alpha t)(t - a_1 u_0)^2 \right) \left(u_0^{-1/3} - \theta_1^{-1/3}(u_0, t) \right) \Big\} + \\
& \quad + \frac{3a_4}{8} \int_0^t f(t - \tau) \exp(-\alpha \tau) \left((1/5)(4 + \alpha^2 \tau^2 - \right. \\
& \quad \left. - \alpha^2 a_1^2 u_0^2) \theta^{5/3} + (1/4)\alpha^2 a_1^2 u_0 \theta^{8/3} - (1/11)\alpha^2 a_1^2 \theta^{11/3} \right) \Big|_{\theta_1(u_0, \tau)}^{u_0} d\tau; \quad (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(t) &= p_{b1}^{(1)}(t) - \exp(-\alpha a_1(u_0 - u_1)) \eta(t - a_1(u_0 - u_1)) a(t - a_1(u_0 - u_1)) - \\
& \quad - \frac{a_1}{2} \eta(t - a_1(u_0 - u_1)) \alpha^2 (u_0 - u) \int_0^{t - a_1(u_0 - u_1)} \exp(-\alpha(t - \tau)) a(\tau) d\tau - \\
& \quad - \frac{a_2}{2} \exp(-\alpha t) \int_{u_1}^{\theta_2(u_1, t)} \left(1 + (1/4)\alpha^2(t^2 - a_1^2(\theta - u_1)^2) \right) \eta(t - a_1(\theta - u_1)) \times \\
& \quad \times p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - \theta^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) d\theta - \frac{3a_3}{8} \exp(-\alpha t) \cdot \left\{ (1/5)\alpha(2 + \alpha t)a_1^2 \left(\theta_2^{5/3}(u_1, t) - u_1^{5/3} \right) \right\} - \\
& \quad - (2 + \alpha(2 + \alpha t)(t + a_1 u_1)) a_1 \left(\theta_2^{2/3}(u_1, t) - u_1^{2/3} \right) - \\
& \quad - \left(4(t + a_1 u_1) + \alpha(2 + \alpha t)(t + a_1 u_1)^2 \right) \left(\theta_2^{-1/3}(u_1, t) - u_1^{-1/3} \right) \Big\} + \\
& \quad + \frac{3a_4}{8} \int_0^t f(t - \tau) \exp(-\alpha \tau) \left((1/5)(4 + \alpha^2 \tau^2 - \right. \\
& \quad \left. - \alpha^2 a_1^2 u_1^2) \theta^{5/3} + (1/4)\alpha^2 a_1^2 u_1 \theta^{8/3} - (1/11)\alpha^2 a_1^2 \theta^{11/3} \right) \Big|_{u_1}^{\theta_2(u_1, \tau)} d\tau. \quad (47)
\end{aligned}$$

6. Построение дискретного аналога интегрально-разностной модели

Оперирование с предложенными соотношениями (45)–(47) средствами компьютерной техники предполагает применение численных методов. Формальное использование стандартных вычислительных алгоритмов может привести к неоправданным затратам и в ряде случаев затруднит физическую интерпретацию полученных результатов. Более продуктивным представляется непосредственное построение дискретного аналога полученной непрерывной модели нестационарных течений в трубопроводе с учетом специфики задачи. Такой подход позволяет упростить вычислительный процесс, повысить его

быстродействие и сформировать целостную картину сеточного распределения давления в ЛУ МГ.

В работах [11, 12] предлагается строить дискретное представление нестационарных гидродинамических процессов в трубопроводе сначала в области изображений, а затем использовать дискретное преобразование Лапласа и теорию импульсных систем. Однако переход от исходной непрерывной системы с распределенными параметрами к эквивалентной импульсной системе, во-первых, требует проведения сложных расчетов для получения передаточных функций. Во-вторых, допускает замену операции интегрирования суммированием с использованием лишь квадратурной формулы прямоугольников, что в ряде случаев приводит к значительным погрешностям, поскольку не позволяет охватить пиковую амплитуду переходных процессов с резко изменяющимися параметрами газового потока. Кроме того, необходимость обеспечения заданной точности расчетов при невысоком порядке приближения по формуле прямоугольников вынуждает задавать малый шаг дискретизации. Поскольку решение уравнений дискретной модели определяется в узлах сетки, то это требует значительных затрат памяти и проведения больших вычислений.

Для построения дискретного отображения полученной непрерывной модели нестационарных течений более предпочтительным является подход, базирующийся на использовании сеточной аппроксимации интегрального уравнения свертки оригиналов [13, 14]. Преимущество указанного метода состоит в том, что он позволяет синтезировать дискретное представление гидродинамических процессов в трубопроводе без построения промежуточных дискретных изображений искомым функций, а также дает возможность при обращении преобразования Лапласа отказаться от использования бесконечных рядов. Что особенно важно, он позволяет повысить качество моделирования за счет выбора для численного интегрирования более эффективных вычислительных процедур, в частности, квадратурной формулы Симпсона [9]. Существенным недостатком метода [13, 14] является необходимость решения систем неявных сеточных алгебраических уравнений. Однако предложенные соотношения (45) – (47), описывающие распределение давления по трассе ЛУ МГ, разрешены относительно искомым величин, что позволяет обойти указанную проблему.

Связь непрерывного безразмерного времени t ($t \geq 0$) с дискретным n ($n = 0, 1, 2, \dots$) задается в виде $t = n \Delta t$. Здесь шаг дискретизации Δt определяется формулой $\Delta t = 2t_v / N$, где $t_v = 1$ – безразмерное время распространения волны по длине трубопровода, N – произвольное натуральное число. Шаг дискретизации Δu по безразмерной пространственной координате задается независимо от выбора временного шага Δt в виде соотношения $\Delta u = (u_0 - u_1) / M$, M – произвольное четное натуральное число. Переходя к сеточным представлениям искомым функций

$$p(m, n) = p(u_1 + m\Delta u, n\Delta t); \quad a(n) = a(n\Delta t); \quad b(n) = b(n\Delta t) \quad (m = 0, 1, 2, \dots, M),$$

в результате замены операции непрерывного интегрирования (как по времени, так и по пространственной координате) суммированием по методу Симпсона [9] соотношения (45) – (47) принимают соответствующий дискретный вид.

7. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Предложенная интегрально-разностная модель позволяет определить давление в любой точке МГ в произвольный момент времени в условиях продольных сейсмических воздействий. Вычисление квадратур можно осуществить стандартными методами [15]. Однако учет специфики задачи позволяет значительно упростить вычислительный процесс и повысить его быстродействие.

Преимущество разработанного подхода – возможность рассчитать нестационарные гидродинамические процессы, возникающие в ЛУ МГ, без перехода в область дискретных изображений, а также осуществлять обращение преобразования Лапласа на основе теоремы свертки без нахождения корней характеристического уравнения, что упрощает математические вкладки, а также исключает из решения бесконечные ряды.

Следует подчеркнуть, что предложенный подход позволяет заменить операцию непрерывного интегрирования суммированием, пользуясь не только методом прямоугольников, но и более точными квадратурными формулами. Процедуры оперирования с разработанной интегрально-разностной моделью легко реализуются в любом развитом пакете компьютерной математики, в частности, в среде Matlab [16].

В дальнейшем предполагается уточнить описание реакции газового потока на инерционные воздействия, принимая во внимание изменения линейной скорости течения по длине трубопровода и его наклон к горизонту.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье М.В. Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа / М.В. Лурье. – Москва : Нефть и газ, 2003. – 335 с.
2. Paidoussis M.P. Fluid-structure interactions. Slender structures and axial flow / M.P. Paidoussis. – San Diego, London: Academic Press, 1998. – 574 p.
3. Рукавишников В.А. Численный анализ математической модели гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе / В.А. Рукавишников, О.П. Ткаченко // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 1. – С. 51 – 64.
4. Яскеляин А.В. Исследование гидравлического удара в жидкости при колебаниях трубопровода / А.В. Яскеляин // Проблемы прочности и пластичности. – 2008. – Вып. 70. – С. 62 – 70.
5. Брунеткин А.И. Нестационарное движение жидкости в трубе (глухой) при произвольном продольном инерционном воздействии / А.И. Брунеткин, М.В. Максимов // Вісник Харківського національного університету.. – 2012. – № 1015. – С. 49 – 54.

6. Ширяев А.М. Построение математической модели волнового процесса в упругом подземном нефтепроводе, подверженном сейсмическому воздействию / А.М. Ширяев, М.И. Валиев, В.В. Жолобов, Е.И. Тарновский // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2014. – № 3(15). – С. 54 – 62.
7. Грачев В.В. Сложные трубопроводные системы / В.В. Грачев, М.А. Гусейнзаде, Б.И. Ксенз, Е.И. Яковлев. – Москва : Недра, 1982. – 256 с.
8. Verhulst F. Methods and Applications of Singular Perturbations. Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics / F. Verhulst. – Berlin : Springer – Verlag, 2005. – 328 p.
9. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука, 1984. – 832 с.
10. Складаров Ю.С. Интегрально-разностные уравнения нестационарного режима магистрального газопровода / Ю.С. Складаров, В.В. Костюков // Методы и модели интенсификации производства. – Киев : УМК ВО, 1988. – С. 43–49.
11. Мамедов А.И. Методы расчета неустановившихся режимов работы сложных магистральных трубопроводов / А.И. Мамедов. – Москва : ВНИИОЭНГ. – 1986. – 38 с.
12. Мамедов А.И. Методы расчета переходных процессов в магистральных нефтепроводах / А.И. Мамедов, И.К. Алиев, В.С. Мирзоев. – Баку : Чашыоглы, 1999. – 200 с.
13. Юсубов Ч.А. Численное определение нестационарных процессов в магистральных газопроводах / Ч.А. Юсубов // Проблемы энергетики. – 2003. – № 2. – С. 62 – 65.
14. Ахмедов С.Ф. Моделирование динамических процессов в нефтегазопромысловом газосборном коллекторе / С.Ф. Ахмедов // Вестник Азербайджанской Инженерной Академии. – 2010. – Т. 2, № 1. – С. 38 – 49.
15. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – Москва : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632 с.
16. Ануфриев И.Е. MATLAB 7 / И.Е. Ануфриев, А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнова. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.

CONTENTS

▪ D. A. Bulavin, E. V. Goncharenko, S. I. Shmatkov.	5
Structural model of the non-formal education system	
▪ O. B. Briukhovetskyi, V. E. Savanevych, S. V. Khlamov.	14
Heuristic computational method for detecting near-zero apparent motion of objects on the series of CCD-frames	
▪ N. V. Varlamova, V. O. Mishchenko.	27
A variety of personal characteristics of the programmers as the basis of success of the program diversity	
▪ Y. Vasylenko, L. Dmytrotsa, M. Olijnyk, M. Pryjmak	36
Ways of functions with variable period definition and their approximation	
▪ A. A. Gourjii, O. V. Shaldenko.	48
Analysis of Moffat's vortices in the straight channel with fittings at low Reynolds numbers	
▪ V. T. Lazurik, G. F. Popov, Sawan Salah, Z. Zimek.	59
Methods of calculating the partial derivatives of the electron radiation dose measured with dosimetric wedge	
▪ Y. V. Mikhlín, K. Y. Plaksiy.	69
Forced resonance vibrations of the dissipative spring-pendulum system	
▪ A. I. Silakov, M. L. Ugryumov, A. S. Shmelev	84
Modeling of technological processes and hydraulic networks for industrial safety	
▪ A. V. Yakunin.	93
Nonstationary current in a main gas pipeline at longitudinal seismic influence	
CONTENTS	109