

ISSN 2304–6201

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна



Серія

«Математичне моделювання.

Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління»

Випуск 29

Серія заснована 2003 р.

Харків
2016

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 5 від 25.04.2016 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),
д.ф.-м.н., академік НАН України, проф.,
ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Гандель Ю.В., д.ф.-м.н., проф., ММФ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора),
д.т.н., проф. ММФ ХНУ імені
В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ
імені Б.І. Веркіна НАН України

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН
України, проф., фізико-енергетичний ф-т
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мищенко В.О. (заст. гол. редактора),
д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ
імені В. Н. Каразіна

Споров О.Є. (відповідальний секретар),
к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н.
Каразіна

Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-
енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ММФ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний
технічний університет "ХПІ"

Стрельнікова О.О., д.т.н., проф. Ін-т
проблем машинобудування НАН України

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра
прикладної інформатики, університет імені
Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat.
habil. Professor of Technical Informatics and
Computer Systems, Institute of Informatics,
Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of
computer science, Dep. of C. S., University of
Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6,
ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua .

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

© Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна, оформлення, 2016

ЗМІСТ

▪ AV Borovinsky, AV Gakhov, VO Mishchenko.	5
Energy Metrics: an experience in assessment of programs developed within a mathematical package	
▪ Д. Б. Буй, Е. В. Шишацкая, S. Fabunmi, K. Mohammed.	19
Математические основания алгоритмов линеаризации: рефлексивно-транзитивные замыкания бинарных отношений	
▪ В. А. Дзюба	34
Побудова комбінованого чисельно-аналітичного методу підвищеної точності для розрахунку задач оболонкових конструкцій	
▪ В. М. Куклин, А. В. Приймак, В. В. Яновский.	41
Влияние памяти на эволюцию популяций	
▪ A. I. Silakov, M. L. Ugryumov, A. S. Shmelev.	67
Mathematical modeling of hydraulic networks of structurally complex technological schema	
▪ Д. И. Черний.	78
Математическая модель течения в мелководной акватории	
▪ О. В. Масєвський, О. В. Мацюк, М. В. Приймак, О. М. Приймак.	87
Пуассонівські періодичні кусково стаціонарні потоки та оцінка їх інтенсивності	
▪ М. А. Хайленко, О. В. Хайленко, Ю. К. Чернышев	100
Имитационное моделирование системы газ-поршень при высоких степенях сжатия	
▪ CONTENTS	108

Шановні читачі та автори збірника!

Тринадцять років тому цей науковий періодичний збірник був започаткований, і побачив світ його перший випуск. Поряд з науковцями Харківського національного університету велику роль в успішному старті нового видання відіграв видатний математик і вихователь молоді Іван Кузьмич Ліфанов, який на той час очолював кафедру вищої математики у Військово-повітряній академії імені Ю.А.Гагаріна (Москва). Зрозуміло, що успіх щойно започаткованої серії Віснику ХНУ цілком залежав від того, чи направлятимуть туди свої статті визнані науковці. Іван Кузьмич не лише доправив до нашої редколегії свою статтю «Развитие метода дискретных вихрей и обобщённые функции», але рекомендував 7 авторитетним авторським колективам з академії імені Гагаріна, з ЦАГІ та Інституту парашутобудування розмістити у першому номері роботи за їхніми останніми дослідженнями у галузі методів дискретних вихорів. В подальшому І.К. Ліфанов, його колеги та учні продовжили публікації у Віснику.

Нажаль, 5 березня цього року І. К. Ліфанов пішов з життя.

ЛІФАНОВ Іван Кузьмич професор, засновник нового напрямку в прикладній математиці, засновник міжнародної наукової школи в галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, доктор фізико-математичних наук, професор, заслужений діяч науки Російської Федерації, головний науковий співробітник ІВМ РАН, завідувач кафедри вищої математики, почесний професор Військово-повітряної інженерної академії ім. М. Є. Жуковського, професор кафедри обчислювальних технологій і моделювання факультету ВМиК МГУ, професор кафедри теоретичної фізики Орловського державного університету, почесний доктор Одеської національної академії зв'язку ім. Попова, запрошений лектор у Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна. Він також член Московського математичного товариства, член Американського математичного товариства, член редакційних колегій наукових журналів Диференціальні рівняння, Електромагнітні хвилі і електронні системи, Зарубіжна радіоелектроніка, Успіхи сучасної радіоелектроніки. Він провідний організатор і незмінний співголова міжнародних симпозіумів "Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики". Автор понад 260 наукових робіт, з них 10 монографій (в тому числі англійською, російською та українською мовами). Керівник головної наукової школи з математики в РФ, яка була підтримана грантом Президента РФ. Керівник і учасник проєктів РФФД.

Іван Кузьмич - один із найактивніших закордонних співробітників провідних українських математичних центрів в Харкові, Києві, Одесі, Дніпропетровську, співголова традиційних зимових шкіл для молодих вчених з України та Росії в Орлі. Безпосередньо підготував 6 докторів і 25 кандидатів наук. Важко навіть підрахувати, скільком молодим обдаруванням з Росії, України та деяких інших пострадянських країн він дав путівку в життя як працедавець, офіційний опонент або дружній порадник.

У ті скорботні березневі дні своє співчуття родині, друзям і учням І. К. Ліфанова надіслали його українські друзі, науковці Юрій Гандель, Станіслав Довгий, Дмитро Черній, Віктор Міщенко, Андрій Бомба, Олег Буланчук, Галина Буланчук, Віктор Ванін, Олександр Гуржій, Олексій Лебідь, Віктор Ляшенко, Михайло Макасеєв, Олександр Приходько, Дмитро Редчиц, Олександр Шеховцов. Редколегія Віснику приєднується до них.

Редакційна колегія.

UDC 004.412.2:(004.94+004.438)

Energy Metrics: an experience in assessment of programs developed within a mathematical package

AV Borovinskiy¹, AV Gakhov², VO Mishchenko¹¹*V. Karazin Kharkiv National University, Ukraine*²*ferret go GmbH, Germany*

The Energy Analysis for software systems is a complex of static analysis methods aimed to assess software reliability, complexity and benefits. It is based on a range of consistent thermodynamic analogies and uses experience from successes and failures of M. Halstead metrics. An important feature of this direction is that it can be applied to various forms of programming calculations. However, every new form requires to re-define the primitive characteristics needed for evaluation of meaningful metrics, and such definitions are already known for some traditional programming languages. In this work we have investigated XML format of PTS Mathcad and defined such its primitives as length, vocabulary and potential volume

Key words: *software quality metrics, static methods, Energy Analysis, computer algebra systems, Mathcad, XML, energy balanced software.*

Енергетичний аналіз програм - комплекс методів статичного аналізу, націлених на оцінку надійності, складності та переваг програмних систем. Він створений на основі послідовних термодинамічних аналогій, виходячи з досвіду удач і невдач метрик М. Холстеда. Важливою рисою цього напрямку є те, що він може застосовуватись при різних формах програмування обчислень. Однак для будь-якої нової форми потрібно заново визначити примітивні характеристики, необхідні для оцінювання змістовних метрик. Такі визначення відомі для деяких традиційних мов програмування. У роботі досліджено XML формат пакету PTS Mathcad і визначено такі примітиви як довжина, словник і потенційний об'єм.

Ключові слова: *метрики якості ПЗ, статичні методи, енергетичний аналіз, математичні пакети, Mathcad, XML, енергетично збалансована програма.*

Энергетический анализ программ – комплекс методов статического анализа, нацеленных на оценку надёжности, сложности и преимуществ программных систем. Он создан на основе последовательных термодинамических аналогий, исходя из опыта удач и неудач метрик М. Холстеда. Важной чертой этого направления является то, что он применим при разных формах программирования вычислений. Однако для всякой новой формы нужно заново определять примитивные характеристики, необходимые для оценивания содержательных метрик. Такие определения известны для некоторых традиционных языков программирования. В работе исследован XML формат пакета PTS Mathcad и определены примитивы длины, словаря и потенциального объёма.

Ключевые слова: *метрики качества ПО, статические методы, энергетический анализ, математические пакеты, Mathcad, XML, энергетически сбалансированная программа.*

1 Introduction

The Energy Analysis for software systems is a branch of software quality control [1] that consists of static analysis methods aimed to assess the reliability, complexity and benefits of such systems. These methods can be considered as the modern development of M. Halstead's Software Science ideas [2]. The direction of such evolution has been inspired by the theoretical thermodynamics [3]. Along with this, the Energy Analysis is based on the experience gained from investigation and usage of

M. Halstead's metrics (e.g. [4-6]) as well as metrics of the Energy Analysis itself [7-11].

The important advantage of both the Halstead's metrics and the Energy Analysis one is their independency of the software representation, whichever it is - textual, hierarchical, or even graphical. The downside is that, for each programming system, there is a need to develop (or even strictly define) a set of primitive characteristics to base metrics on. It is not a trivial problem even for "classical" procedural programming languages, mainly because of certain level of solution uncertainty. So, for new programming languages, the definitions have to be coordinated with already developed ones. This task has been solved for early-generation programming languages (60's-70's of the last century) and for modern languages, such as Ada, C++, Fortran, and Java [2, 4, 12-14, 11, 10]. Recently, such methods have been developed for such modeling languages as UML [15], but they are not ready for practical applications at this stage. For the XML-based sources, the Energy Analysis metrics have not been applied yet, but such problem has already raised for Android applications [10]. In [16] and [17], Halstead's metrics were used to evaluate projects that contained XML sources, however, in the first work, its authors concluded that such metrics are inappropriate for their use case; and in the second work, the metrics were used for the non-XML sources only.

Some custom forms of programming could also be found in popular general-purpose computer algebra systems. In this article we consider one of such systems - PTS Mathcad 14 [18] that offers a WYSIWYG interface and the ability to utilize a total user experience in the form of a file that contains both the program and the results of calculations.

The main goal of the current research is to develop ways for the automatic evaluation of Mathcad programs in order to estimate costs of creation, risks of programming errors, understandability, and forecast the maturity level. Note, that the one-file form of the Mathcad programs simplifies formulas for the energy metrics and makes some of them close to Halstead's metrics.

As the metrics which help to achieve our goal, we've selected the following: "difficulty measure" and "volume" (both are introduced by M. Halstead), "development difficulty", "programming work" (in this case they are just a rectification of the Halstead's metrics "difficulty" and "effort"), "specification energy" (evaluated from the Halstead's "approximation effort", but in case of Mathcad isn't equal to it), and, finally, "energy balance", that is specific for the Energy Analysis.

To estimate such metrics, we use the generic estimation schemes from the Energy Analysis [1, 3, 4] together with specific methods for Mathcad programs to define primitive characteristics (or simply - *primitives*).

- The first from such primitives is the *observed program length* [5] or simply *length* N - number of used semantic atoms counting all their occurrences. Halstead called such atoms as *tokens*. The second - *program vocabulary* or simply *vocabulary* η - the alphabet of unique programming symbols. The third (but last in sense of its importance) primitive is the differentiation of the units and the vocabulary to the sum of *operators* and *operands*. Such differentiation was very native in Halstead's times, but nowadays it quite often hits contradictions that is reported by many researches [1,3,4]. Finally, the fourth (but the most important one) – *architecture*

temperature, that can be seen as the Halstead's *potential volume* in such a few cases when it can be defined uniquely [1-4]. In most cases, we call the architecture temperature as a *potential volume* and define as V^* just to keep the continuity of the terminology.

- According to our goal, the main tasks of the research can be formulated as follows:
- to develop methods for estimation of the primitives for Mathcad programs;
- to develop a way for automatic calculation of the energy metrics for Mathcad programs;
- to check if the expected regularities for Halstead's and energy metrics are fulfilled on samples of programs from different authors and sources.

2 Application domains and regularities related to the metrics

We start by refreshing the well-known definitions of the Halstead's metrics - *volume*, *difficulty* and *effort*:

$$V = N \log_2 \eta \quad \text{or} \quad B = V/V_0, \quad (V_0 = 3000 \text{ bit} \cdot \text{sym}), \quad (2.1)$$

$$\hat{D} = \frac{N_2 \cdot \eta_1}{\eta_2 \cdot \eta_1^*}, \quad (\eta_1^* - \text{is a constant equals to } 2 \text{ bit} \cdot \text{sym}) \quad (2.2)$$

$$\hat{A} = \hat{D} \cdot V, \quad (2.3)$$

where N, N_2 - number of tokens and operands in the program (or program module);
 η, η_1, η_2 - vocabularies of tokens, operators, operands.

Note, that there is no standard selection for names and denotations of the Halstead's metrics. In our work we use names from IEEE [5], but denotations are taken from [2, 4]. In (2.1) the alternative dimensionless metric *number of errors* B is the only metric in the strictest sense, but at the same time the Halstead's volume is playing an important role in definitions for other metrics, therefore, we can assume that (2.1) defines 2 different forms of the same metric.

M. Halstead introduced the following elementary primitives:

$$N, N_1, N_2, \eta, \eta_1, \eta_2 \quad (2.4)$$

but there are only 4 functionally independent among them. However, how it was discovered by Halstead and confirmed by other researchers on many examples, such primitives have another, statistical, connection - there is a correlation between N and the value that the standard [5] calls *estimated program length*:

$$\hat{N} = \hat{N}(\eta_1, \eta_2) = \eta_1 \log_2 \eta_1 + \eta_2 \log_2 \eta_2. \quad (2.5)$$

In many experiments performed in 70's of the last century with samples of programs written in Algol, Fortran, PL/1, etc., it was observed a close statistical relationship between N and \hat{N} . For instance, on samples of 10-20 [2] the values of the correlation coefficient were around 0.95 and more. As reported by another researcher in [4], with the large sample (about $1.6 \cdot 10^3$) the relative difference between these values for average-sized modules was less than 6%. Therefore, in experiments one

shouldn't use more than 3 different Halstead's metrics, based on the primitives (2.4), at the same time.

As a guide to clarify the primitives' definitions for new languages could be used the fulfilment of the Halstead's program length equation [15]. However, as it followed from the English prose example [2], in a general case the *Halstead's program length equation* should be considered in the following generic form:

$$\exists k \forall S : \text{Corr}(N, \hat{N}(\eta_1, \eta_2); S) > 0.5, \quad (2.6)$$

where S – a large sample of programs (modules) writing on a some language (at least 20 modules, according to [2]);

$\text{Corr}(x, y, S)$ - correlation coefficient between x, y on sample S ;

(Note, that the universal quantifier \forall is considered here not literally, but in the sense that for any random sample of different modules it's unlikely that this condition will be violated). At the same time, it's appropriate to estimate the Halstead's *redundancy factor* k [2] by minimizing the average error $U(k)$ of the module's length prediction over its estimation for the base sample S :

$$U(k) = \underset{S}{\text{Avr}} \left\{ \frac{|\hat{N}(k\eta_1, k\eta_2) - N|}{N} \right\} \xrightarrow{k} \min. \quad (2.7)$$

where Avr – the sample's average.

In complex software systems that consist of many modules the Halstead's volume has to be corrected according to the intermodule connections and order of their development. Such correction could be achieved by introducing metric *volume of development*. The *program difficulty* metric becomes problematic in this case because it was proposed [2] in assumption of the module's self-sufficiency, thus, in the Energy Analysis it's considered as an alternative value to avoid errors in module's difficulty analysis (the *effort*, that derive from this metric, is totally ignored by us). In such cases when programs on the certain programming language can't be multi-module, then the importance (2.2) for control purposes is increasing, but the metric (2.3) isn't considered anyway during the energy analysis, except technical needs.

Finally, the last primitive characteristic - the *potential volume*:

$$V^* = \eta^* \log_2(\eta^*) \quad , \quad (2.8)$$

or, up to evident mathematical transformation, η^* – the number of the block's formal operators, that in the Energy Analysis is defined as:

$$\eta^* = 2 + p_1 + p_2 + \sqrt{j_1 \cdot j_2} \quad , \quad (2.9)$$

where p_1 – number of configuration parameters;

p_2 – number of calling parameters (incl. output of the function, if any);

j_1 – number of I/O operations;

j_2 – number of files used by I/O operations.

The correctness of such definition opens the way to use in practice of the Energy Analysis the formula of M. Halstead's "theoretical" metric of difficulty:

$$D = W/V^* \quad , \quad (2.10)$$

where W – development volume for the module (equal to V , if only 1 module exists).

The *programming effort* metric implements the Halstead's idea that the programmer's effort related on the difficulty of the program understanding multiplied by the potential number of programming errors it may contain:

$$A = D \cdot W \quad (2.11)$$

The *specification energy* for a single module with many non-grouped blocks (as it takes place in Mathcad) can be found as:

$$E = \begin{cases} (V^*)^3 / \lambda^2 & \text{when } m < 5 \\ (V^*)^3 / \lambda^2 (\frac{m}{9} + 0.5)^2 & \text{when } m \geq 5 \end{cases} \quad (2.12)$$

где m – the number of non-grouped blocks of the module;
 λ – the language level by Halstead.

As soon as everything above is calculated, we can estimate the most important metric in the Energy Analysis, the *energy balance*:

$$q = \frac{E - A}{\max(E, A)} \quad , \quad (2.13)$$

This metric provides the prediction of the balance between architecture design process and the process of design implementation in the code during the software development. Particularly, in the decimal representation of the metric (2.13) the first significant digit should be different from 9 for the well-balanced case.

An important regularity can be seen on random samples of programs that are developed in the same language (sometimes with additional external restrictions, e.g. also developed for the same application domain) – values (2.13) are randomly scattered around zero, however, with significant deviations. Such regularity was noticed, in fact, by M. Halstead for single-module programs without internal blocks [2]. However, he had hypothesized the value $(V^*)^3 / \lambda^2$ as an approximation to effort estimation that wasn't confirmed afterwards [4]. Similarly, to the program length equation in form of (2.6), such regularity, in general, requires a normalization constant. As such constant we can use λ (2.12), however, then its value may be different from the Halstead's language level [19], that is evaluated on the basis of other considerations.

3 Estimation of elementary primitives

The concept of *tokens* in the source codes has been introduced by M. Halstead [2] to define alternative choices available to the software developer on each step of the development. For classical programming languages, as candidates on such role could be considered keywords and operation signs (incl. inseverable combinations), numerical literals, simple identifiers, etc. However, there are additional nuances for software development using general-purpose computer algebra systems (or simply, mathematical packages). Such development process could be followed by the

immediate interpretation of inserted commands, simultaneous results output, it could also use graphics (mostly, produced by the developer and don't consist of sequences of some limited alphabet, but also could contain complex mathematical formulas). A natural representation of such structure is a hierarchy. The developer of a computing program for some mathematical package usually consequently selects tokens to put into the program, and, in fact, decides at each step whether to continue putting them at the current hierarchical level, create a new (deeper) level, or to finish the current layer (and maybe some other existing layers as well). Hierarchical structures can be mapped into some sequential text, for instance, using such mapping formats as XML and JSON. A Mathcad program is stored in .xmcd file that contains the XML representation, included a metadata for its execution in the Mathcad environment and the logic of the programmed calculations. The choice between the alternatives during the running process of Mathcad calculations is hard to describe formally, but it can be compared with the choice which would have to make the developer while building the logical part of .xmcd file for the developed program manually instead of using the Mathcad environment. We *hypothesize* that these two development processes (real and imaginary) are equivalent in terms of quality characteristics reflected in energy metrics (assuming that imaginary process is performed by a person, who also is imaginary and is as good in .xmcd files arrangement, as the real developer is in Mathcad).

Based on this hypothesis, we have built a projection of the “full” language for .xmcd files on such its part that is responsible for calculations by user's algorithm, that also allows us to transform .xmcd files into a hierarchically structured text. According to the hypothesis, such the algorithm's representation is the formalized Mathcad program. The process of obtaining such representation we call the .xmcd *cleaning*. It includes deleting all tags and attributes that are additional to computation itself, such as XML metadata, references to colors, images positions, etc. The adapted file must consist only of constructions of the following types, which contain exactly one token:

$$\langle \text{regions} \rangle \textit{ text} \langle / \text{regions} \rangle \quad , \quad (3.1)$$

$$\langle \mathbf{ml} : \text{keyword} \{ \text{ml-option} \} \rangle \textit{ text} \langle / \mathbf{ml} : \text{keyword} \rangle , \quad (3.2)$$

$$\langle \text{result} \rangle \textit{ text} \langle / \text{result} \rangle \quad , \quad (3.3)$$

$$\langle \mathbf{ml} : \textit{ operator} \rangle \quad , \quad (3.4)$$

where elements written in italics are not parts of the tokens and added only to explain the token usage. It must be clear that *text* may consist of the same or “other” lexemes of the formal language of adapted.xmcd files. The mentioned “other” tokens include such token kinds as

$$\textit{ identifies} , \textit{ integer numbers} , \textit{ real-number} , \textit{ strings} , \quad (3.5)$$

and also:

1) the keywords that enter the **ml**-tags by pairs, such as

$$\textit{ define} , \textit{ id} , \textit{ real} , \textit{ function} , \textit{ boundVars} , \quad (3.6)$$

and dozens of other;

2) ml-options such as

xml:space="preserve" , symbol=*string* , [*prefix-*]algorithm=*string* , (3.7)

and others (specific to the **ml**-tag's keywords);

3) some prefixes and postfixes of some ml-options, e.g.

auto- (ethe prefix of the last option, which shown in (3.7)) ; (3.8)

4) ml-operators such as

plus/ , div/ , neg/ , pow/ , greaterThan/ , (3.9)

and many others.

For example, consider such .xmcd file:

```
<region region-id="5" left="12" top="50.25" width="55.5" height="27.75" align-
x="47.25" align-y="66" show-border="false" show-highlight="false" is-
protected="true" z-order="0" background-color="inherit" tag="">
  <math optimize="false" disable-calc="false">
    <ml:define xmlns:ml="http://schemas.mathsoft.com/math30">
      <ml:id xml:space="preserve">lambda</ml:id>
      <ml:apply>
        <ml:div/>
        <ml:real>1</ml:real>
        <ml:real>10</ml:real>
      </ml:apply>
    </ml:define>
  </math>
  <rendering item-idref="5"/>
</region>
```

The result of its cleaning will be a text file that contains:

```
<ml:define>
  <ml:id xml:space="preserve">lambda</ml:id>
  <ml:apply>
    <ml:div/>
    <ml:real>1</ml:real>
    <ml:real>10</ml:real>
  </ml:apply>
</ml:define>
```

The cleaning process is implemented in EA_XMCD_Analyzer, developed by us in PHP that has useful features for such tasks [20]. To calculate elementary primitives (2.4) we use SAX-parser [21] (Simple API for XML), from the libxml library included as an extension in PHP and enabled by default. For instance, to search opening and closing tags corresponding to programming symbols-operators, we use built-in function *xml_set_element_handler*, and to search symbols-operands we use *xml_set_character_data_handler*.

4 Estimation of potential volumes

The adapted code in a file of some Mathcad program is the only module of this program, but its internal architecture is usually nontrivial. Blocks could be represented by such constructions as functions, integrals, derivatives, etc. For instance, the construction below defines a block - the function, that returns a value and one explicit parameter:

```
<ml:function>
  <ml:id xml:space="preserve">Init_Array</ml:id>
  <ml:boundVars>
    <ml:id xml:space="preserve">sep</ml:id>
  </ml:boundVars>
</ml:function>
<ml:program>
  ....
  <ml:return>
    <ml:id xml:space="preserve">vec</ml:id>
  </ml:return>
</ml:program>
```

There are 2 formal parameters for this block: the first is defined by the tag `<ml:boundVars>`, and the second – by the output. We also use PHP to find such structures and calculate all their parameters.

It's more complex question how to deal with files and input/output operators, because the Mathcad semantics differs from the traditional procedural programming languages. In early versions of EA_XMCD_Analyzer we didn't consider such case at all.

First of all, in the adapted .xmcd files we can consider as input/output operators the structures of assignments and calls, that were used by the developer to set values for constants and variables in Mathcad. As an example, review the following XML:

```
<ml:define>
  <ml:id xml:space="preserve"> a0 </ml:id>
  <ml:real> 1.0 </ml:real>
</ml:define>
```

Such structures could be also found inside of functions:

```
<ml:localDefine>
  <ml:id xml:space="preserve"> max </ml:id>
  <ml:apply>
    <ml:absval/>
    <ml:apply>
      <ml:indexer/>
      <ml:id xml:space="preserve"> v </ml:id>
      <ml:id xml:space="preserve"> c </ml:id>
    </ml:apply>
  </ml:apply>
</ml:localDefine>
```

The lexeme/paired tags `<result> text </result>` is to be considered as the output statement because they are generated in Mathcad source code when the program developer writes “`<variable> =`”, having in mind to output the current value of a variable.

In the second version of the program `EA_XMCD_Analyzer`, the input/output operations were covered by the identification of constructions that are similar to described above. That made possible to calculate the value j_1 required in the formula (2.9), while the value of j_2 is chosen of 2, 1 or 0 depending on the presence or absence of constructions for keyboard input or display output.

5 Calculation

In the preceding sections, we have described the developed methods; and further we explain how they constitute the technology of automated assessment of the energy metrics (Fig. 1).

At the beginning, the selected (uploaded) text file `progrname.xmcd` (where `progrname` is the analyzed file's name) is subjected to the purification procedure described in section 3. The resulting `adapted_xmcd-progrname.xml` file with a Mathcad computing program is the source of data for two processes. The first process calculates the elementary primitives (2.4) and dumps them into a text file `tokens_xmcd-progrname.txt`. The second - finds formal parameters of blocks and calculates the potential volume. Data contained in the two files allow (Fig. 5.1) to calculate all Halstead's (2.1)-(2.3) and energy (2.10)-(2.13) metrics discussed above.

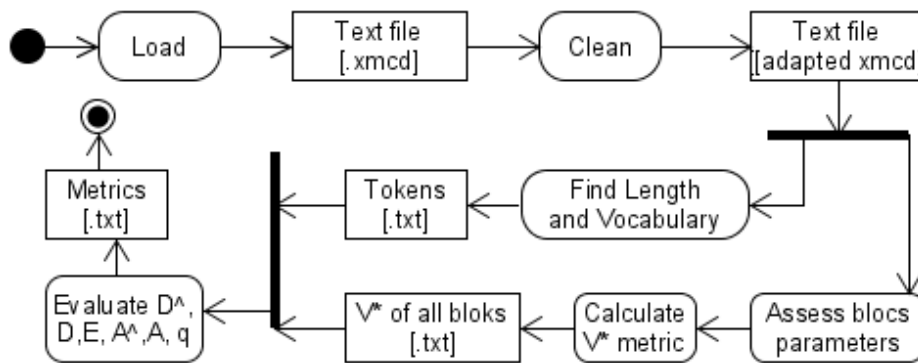


Fig. 5.1 The energy metrics assessment bases on .xmcd file

Out of these results we build the file `sss_xmcd-progrname.txt`.

6 Check expected regularities for the metrics on an experimental sample

Despite the fact that for the Energy Analysis purposes splitting of specific program lexemes into statements and operands does not matter, it is interesting to compare the lexical features of different programs using the Halstead's length equation. We have selected those programs, which implement different computational methods. Table. 1 illustrates the results of primitives assessment (2.4) for the sample S23 of 23 Mathcad programs, selected from sources [18-21]. The table shows characteristics obtained for programs with the maximum and minimum length, as well as the average for the

sample (an asterisk marks the average values defined as medians; in all other cases they are the arithmetic average).

We have been noticed the systematic and meaningful violation of the length equation (in its original form) for almost every considered Mathcad program (see the 2nd column in the Table 1), but the requirement (2.6) has been met.

Table.1 Reference values for the Mathcad programs in sample S23

The case	N/N^{\wedge}	N_k^{\wedge}/N	B	D^{\wedge}	λ^{\wedge}	λ^*	λ	q_{λ}
<i>max values</i>	3.00	3.69	38.2	230	300.1	1073	4.36	0.96
<i>avr values</i>	0.68	0.85	7.5	69	2.19*	128,2*	0,53*	-0.98
<i>min values</i>	0.19	0.24	0.7	10	0.49	0,18	0.12	-0.26

The length N_k^{\wedge} (the 3rd column in the Table 1) is obtained for the redundancy factor that was found from the condition (2.7):

$$\text{Corr}(N, \hat{N}; S23) = 0.51, \quad k = 1.2 \quad (U(k) = 0.63) \quad . \quad (6.1)$$

Thus, in this case we deal not with the redundancy, but with the lack of the alphabet; and the average N by N_k^{\wedge} "prediction" error is 63%, which is worse than the 40% of the worst cases for the procedural languages [4] . We want to note that if to swap the roles of N and N_k^{\wedge} in (2.7), the best value will be different: $k = 2.12$ (average error equals 60%).

It is also valuable to find out how big is the difference between assessment of difficulty classes in terms of metric (2.2) and the reference values calculated long time ago (1979) for the completely different language (PL/S). For the sample S23 we've obtain:

$$\text{Avr}(N_2/n_2) + \text{Std}(N_2/n_2) = 7.52, \quad \text{Avr}(n_1) = 27.87, \quad \text{Std}(n_1) = 9.90, \quad (6.2)$$

where $\text{Avr}(x)$ is the average value of the sample x ;

$\text{Std}(x)$ - is the standard error of the same sample.

Then, following the known procedure, detailed in [4], it's possible to calculate the boundaries separating the difficulty classes, both standard and optional [9] (for comparison, in brackets are given the known estimations for such boundaries calculated for the language PL/S [4, 5, 9]):

$$D_1 = 105 (115), \quad D_2 = 142 (160), \quad D_3 = 216 (250), \\ D_4 = 291 (340), \quad D_5 = 365 (430) \quad . \quad (6.3)$$

We can see that there is no fundamental difference between the obtained assessments for Mathcad programs and the corresponding known values. Also, 91% of the programs in the sample S23 belong to the difficulty class 0, only one - to the class 1, and the most difficult program belongs to the class 3. This is in contrast to the known examples of program modules written in universal procedural languages (e.g. [9]). It could happen that we chose mostly simple programs, but also it is possible that Mathcad is not intended for complex calculations more typical for universal procedural languages. If the result is not just a coincidence, we can expect that the

majority of the programs in the sample, being simple, were well-thought-out by their authors and, hence, they are energetically balanced.

Let us try to find out the energy balance metrics distribution over our experimental sample. The values of language level λ lay in the range from 1.0 to 2.0 for high-level languages and for low-level ones between 0.5 and 1.0 [2]. For the Mathcad language we would expect $\lambda \approx 1.0$, but its estimation obtained over the sample $S23$ by the standard assessment method ($\hat{\lambda} \approx 2.2$) [4] and, especially, by the Halstead's "theoretical" method ($\lambda^* \approx 128$) are suspiciously big (Table 1). Assuming that $S23$ is representative with respect to the language level and reflects a regularity for the metric q (2.13) mentioned at the end of Section 2, it makes sense to consider for all programs such expression

$$\lambda = \sqrt{E(1)/A} , \quad (6.4)$$

where $E(\lambda)$ is an estimation of (2.12), in which language level λ is indicated in parentheses (e.g. 1 in (6.4)). If to take for the language level the median of these values, then exactly the half of the programs will have $q > 0$, and for another half $q < 0$, which is unlikely. We performed a different (subjectively selected) procedure: to exclude 20% of the biggest and smallest values obtained by (6.4). The rest gave a fairly reliable first interval approximation to the expected language level:

$$0.314 < \lambda < 1.385 . \quad (6.5)$$

Unfortunately, this range is too wide. Let us consider its center $\lambda_1 = 0.849$; then – the widest range of λ variations, in which the deviation from λ_1 in both directions (bigger or smaller) doesn't change the interrelation between the signs of metrics q in our sample. This is our "satisfactory" but rather hypothetical interval approximation:

$$0.845 < \lambda < 0.93 . \quad (6.6)$$

(Note, when it's necessary to use a particular value, it makes sense to take the center - 0.89).

Such choice of the language level has reduced the number of energetically unbalanced programs to just 2 out of 23, that is consistent with the assumption of maturity of most programs in the sample. Also, 39% of the programs has $q_\lambda > 0$ that shows the effect of metrics values scatter around zero. If we choose for the level any value of the interval (6.5), the most of programs stay balanced. Let us note that if assume $\lambda = \hat{\lambda}$ then only two programs (9%) will have $q > 0$, and the half of programs will be marked as unbalanced (12). This hardly meets our expectations, but the reliable conclusion about the language level requires much more statistical data to be processed.

7 Conclusion

In this article we have shown that for programs developed in Mathcad it is possible to create an accurate definition of Halstead's primitives that follows common practice of Halstead's definitions and the definition of the potential volume from the Energy Analysis. The research has been done under the hypothesis about correspondence between XML-oriented representation of the program and its interactive development process in Mathcad.

Furthermore, we have demonstrated the possibility to estimate the primitives in an automatic mode and, consequently, to create a program solution for the developed assessment method.

The test of the method on an experimental sample for Mathcad programs gave preliminary conclusions about relatively weak manifestation of the regularity known as Halstead's length equation in such case. It makes sense to consider such regularity in the form (2.7) including redundancy factor that has been estimated by us at the level of 1.2 (or 2.12 in case of another choice criterion). Note, the value bigger than 1.0 indicates the "insufficiency" of the alphabet in the Halstead's sense [2].

The tendency of Mathcad programs to be "in average" energy balanced is detectable for any language level chosen according to our "semi-heuristic" estimation from the range (6.5).

In the article we have presented a new halstead-like estimation method for primitive characteristics of the programming process in a mathematical package environment.

For the first time, the Energy Analysis' methods have been implemented for a formal language, which is based on XML and reflects the calculation logic of the Mathcad package. In addition, these methods are developed in PHP and they allow, in principle, to provide estimation online services.

REFERENCES

1. Мищенко В. О. Математическая модель стиля Software Science для метрического анализа сложных наукоёмких программ / В. О. Мищенко // Вісник Харківського національного університету: Зб. наук. праць. – Х., 2004. – № 629. – С. 70–85. – Title in English : Mishchenko, V. O. (2004) The Mathematical Model in Software Science Style for Measurement of Complex Scientific Software. – Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems», 629, 3.
2. Halstead, M.H. Elements of Software Science / Halstead, Maurice H. Elsevier Publications, N-Holland, 1977. // Operating and programming systems series. – NY : Elsevier Science Inc. New York. – ISBN:0444002057.
3. Мищенко В. О. CASE–оценка критических программных систем. Том 3. Оценка качества / В. О. Мищенко, О. В. Поморова, Т. А. Говорущенко ; под ред. Харченко В. С. – Х : Нац. аэрокосмический ун–т «Харьк. авиац. ин–т», 2012. – 201 с. . – Title in English : Mishchenko, V. O., Pomarova, OV, Govorushchenko, TA (2012) Case-assessment of critical software systems. Volume 1. Quality, ed. Charchenko, VS, Kharkiv: Natonal Aerospace University named after N.E.Zhukovsky "KhAI".
4. Shen V. Y. Software Science Revisited: A Critical Analysis of the Theory and Its Empirical Support / V. Y. Shen, S. D. Conte, H. E. Dunsmore // IEEE Transactions on Software Engineering. – 1983. – Vol. SE–9, № 2. – P. 155-165.
5. 982.2-1988 - IEEE Guide for the Use of IEEE Standard Dictionary of Measures to Produce Reliable Software. - Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1989.

6. Al Qutaish. An Analysis of the Design and Definitions of Halstead's Metrics / Proceedings of the 15th International Workshop on Software Measurement (IWSM'05), Montréal, Québec, Canada, 2005, pp. 337-352.
7. В. М. Годунко В. М. Качество транслятора шаблонов динамических html страниц для Ada WEB серверов / В. М. Годунко, В. О. Мищенко, М. М. Резник, Д. В. Штефан // Радиоелектронні і комп'ютерні системи. – 2012. – № 5. – С. 225-229. . – Title in English : V.M. Godunko, V.O. Mishchenko, M.M. Reznik, D.V. Shtefan. Dynamic generation html pages for ada web server Radioelectronic And Computer Systems, 2012, 5.
8. Мищенко В. О. Моделі та характеристики обчислювального кластера, які допомагають визначати напрямки його подальшого розвитку / В. О. Мищенко // Вісник Харк. нац. ун-ту., – 2013. – № 1058. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип. 21. – С. 122-131. – Title in English : Mishchenko, V. O. (2013) Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, – 2013. – Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems», 1058, 21.
9. Мищенко В. О. Метрики трудности в оценке надёжности инструментальных библиотек и фреймворков / В. О. Мищенко Вісник Харк. нац. ун-ту., – 2014. – № 1133. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип. 25. – С. 126-147. . – Title in English : Mishchenko, V. O. (2014) Difficulty metrics in assessing the reliability of tool libraries and frameworks. Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems», Issue 1131, 25.
10. Мищенко В. О. Использование энергетических метрик при анализе качества Android приложений / В. О. Мищенко, А. Ю. Уваренко // Труды XVII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (DSMMPH-2015), 2015. – Харьков-Сумы: изд. Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, 2015, С. 173-176. . – Title in English : Mishchenko, V. O., Uvarenko, A Yu. (2015) Proceedings of the XVII International Symposium "Discrete singularities methods in mathematical physics", Kharkov-Sumy.
11. Мищенко В. О. Преимущества, затраты и риски модификации реализаций методов дискретных особенностей с целью оптимизации / В. О. Мищенко, В. Паточкин // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна серія Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління, 2015. – вып. 28. – С. 69–76. . – Title in English : Mishchenko, V. O., Patochkin, V. V. (2015) Optimization of the methods of discrete singularities: the benefits, costs and risks of implementation modifications. Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems», 2015, 28.
12. nag_metrics - NAGWare Fortran Tools - f77 Tools [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.lrz.de/services/software/programmierung/toolpack/nag_metrics.html.

13. Miller D. M. A software science counting strategy for the full Ada language / D. M. Miller, R. S. Maness, J. W. Howatt, W. H. Shaw // *ACM SIGPLAN Notices*. 1987. – Vol. 22, № 5. – P. 32–43.
14. Mishchenko V. O. Does The Different Definitions Of Ada Program Tokens Have Significant Difference? / V. O. Mishchenko // *Radioelectronic And Computer Systems*. – 2008. – № 7 (34) – С. 103–106.
15. Годунко В. М. Особенности энергетических метрик UML диаграмм / В. М. Годунко, В. О. Мищенко, А. В. Пасека // *Вестник Харк. нац. ун-та.*, – 2013. – № 1058. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 21. – С. 13-19. . – Title in English : Godunko V. M., The features of the energy metrics of UML diagrams / Godynko V. M., Mishchenko V. O., Paseka A. V. (2013) *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University*, – 2013. – Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems», 1058, 21.
16. Lassila, Matti. Comparison of two XML query languages from the perspective of learners / Lassila, Matti; Junkkari, Marko; Kekalainen, Jaana // *Journal of Information Science*, 2015. – Vol 41. – N 5. – P. 584-59.
17. Ming-Chang Lee. Software Quality Factors and Software Quality Metrics to Enhance Software Quality Assurance Comparison of two XML query languages from the perspective of learners / Ming-Chang Lee // *British Journal of Applied Science & Technology*, 2014. – N. 4(21). – P. 3069-3095.
18. PTC Mathcad [Электронный ресурс] : Режим доступа: <http://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad>.
19. Мищенко В. О. Компьютерное моделирование характеристик схем программных систем / В. О. Мищенко // *Радиоэлектронные и компьютерные системы*. – Харьков, 2010. – № 5 (46). – С. 158–164. – Title in English : Mishchenko, V. O. Computer Modeling Of Software System Schemes Characteristics. *Radioelectronic And Computer Systems*, 2010, 5.
20. PHP: Hypertext Preprocessor [Электронный ресурс] : Режим доступа: <http://php.net>. – Заголовок с экрана.
21. PHP: XML Parser functions [Электронный ресурс] / Mehdi Achour, Friedhelm Betz, Antony Dovgal, Nuno Lopes, Hannes Magnusson, Georg Richter, Damien Seguy, Jakub Vrana, et al. - ed. Peter Cowburn // *PHP Documentation Group*. - <http://php.net/manual/en/ref.xml.php>.
22. PTC Community: Electrical Engineering [Электронный ресурс] : Режим доступа : https://www.ptcusercommunity.com/community/mathcad/electrical_engineering/content.

УДК 004.652

Математические основания алгоритмов линеаризации: рефлексивно-транзитивные замыкания бинарных отношений

Д. Б. Буй, Е. В. Шишацкая, S. Fabunmi, K. Mohammed

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина

Работа посвящена математическим основаниям алгоритмов линеаризации – одного из методов разрешения конфликта имен, возникающего при множественном наследовании в объектно-ориентированных языках программирования. Основным объектом исследования выступает рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения. Приведен критерий того, что оно является частичным порядком; само замыкание является монотонным, возрастающим (по теоретико-множественному включению) и идемпотентным оператором. Приведены два неявных представления рассматриваемого замыкания, полученные исходя из его свойств, и еще одно – в виде наименьшего решения характеристического уравнения (при этом установлена структура множества всех решений этого уравнения).

Ключевые слова: *объектно-ориентированный язык программирования, разрешение конфликта имен, алгоритмы линеаризации, рефлексивно-транзитивное замыкание.*

Робота присвячена математичним основам алгоритмів лінеаризації – одного з методів розв'язання конфлікту імен, що виникає при множинному успадкуванні в об'єктно-орієнтованих мовах програмування. Основним об'єктом дослідження є рефлексивно-транзитивне замикання бінарного відношення. Наведений критерій для перевірки, чи воно є частковим порядком; замикання як таке є монотонним, зростаючим (за теоретико-множинним включенням) та ідемпотентним оператором. Для розглянутого замикання наведено два його неявних вирази, отримані виходячи з його властивостей, і ще один - у вигляді найменшого рішення характеристичного рівняння (при цьому встановлено структуру множини всіх рішень цього рівняння).

Ключові слова: *об'єктно-орієнтована мова програмування, розв'язання конфлікту імен, алгоритми лінеаризації, рефлексивно-транзитивне замикання.*

The paper is devoted to mathematical foundations of linearization algorithms – one of the methods of the names conflict resolution that occurs in object-oriented programming languages, which support multiple inheritance. The main object of the study is a reflexive-transitive closure of a binary relation. The criterion for such a closure to be the partial order is presented; the closure itself is monotone, increasing (in terms of the set-theory inclusion) and idempotent operator. Two implicit representations of the closure were derived from its properties and one more representation was obtained in the form of the least solution of some characteristic equation (together with this, the structure of the set of all solutions to this equation is found).

Key words: *Object-oriented programming language, names conflict resolution, linearization algorithms, reflexive-transitive closure.*

Введение

В объектно-ориентированных языках программирования, которые поддерживают множественное наследование (multiple inheritance), возможен конфликт имен (conflict of names). Такая ситуация возникает, когда один и тот же метод (либо поле), имея различную реализацию, присутствуют в нескольких родительских классах данного класса.

Существует два основных подхода к разрешению конфликта имен [1]. Во-первых, конфликт разрешается тривиально с помощью явного указания одного соответствующего родительского класса из нескольких возможных (такой подход реализован, например, в языке C++). Во-вторых, применяется специальный алгоритм для выбора нужного родительского класса, что реализовано, например, в языках CLOS, LOOPS, Python, Perl, Dylan [2-5]). Основное преимущество второго подхода заключается в разрешении конфликта имен при выполнении программы, т.е. динамически.

По сути, основная идея второго подхода заключается в линеаризации всех предков класса (для которого надо разрешить конфликт имен), т.е. в линейном упорядочении всех предков с последующим выбором первого (в том или ином смысле) требуемого предка. По существу речь идет об алгоритмах обхода ациклического подграфа, построенного по иерархии классов (подробности см., например, в [6]).

Несмотря на то, что алгоритмы линеаризации были предложены еще в начале 90-х годов XX столетия, они (алгоритмы), строго говоря, на сегодняшний день не имеют формального математического обоснования, т.е. алгоритмы формально не верифицированы.

Предлагаемая работа посвящена математическим основам линеаризации: в ней представлен фрагмент математической теории бинарных отношений, касающийся в основном рефлексивно-транзитивных замыканий (остальной материал носит вспомогательный характер), так как именно такие замыкания и применяются при построении соответствующего частичного порядка на классах по иерархии классов.

Теория бинарных отношений занимает важное место в математике вообще, и в дискретной математике, в частности; мы упомянем только не очень известные фундаментальные классические работы [7, 8] (отметим, что [7] – перевод, который вышел из печати в 1963 г., оригинальной работы, напечатанной в Бюллетене французского математического общества в 1948 г.), не потерявшие и сейчас свою актуальность.

В предлагаемой статье получены такие основные результаты: установлены свойства двух вспомогательных операций (инверсии бинарного отношения и произведения бинарных отношений), а также рефлексивно-транзитивного замыкания бинарного отношения. Для указанного замыкания: (1) установлен критерий быть частичным порядком; (2) замыкание является оператором замыкания относительно теоретико-множественного включения; (3) замыкание является наименьшим (относительно теоретико-множественного включения) рефлексивным и транзитивным отношением, содержащим исходное отношение; (4) замыкание является множеством, порожденным диагональю на универсуме в построенной частичной алгебре всех пар; (5) замыкание U^* является наименьшим решением параметрического характеристического уравнения $X = \Delta_D \cup X \cup U \circ X$, где Δ_D – диагональ на универсуме, а \circ – произведение бинарных отношений (а также наименьшим решением более простого параметрического уравнения $X = \Delta_D \cup U \circ X$), (6) установлена структура множества всех решений указанного уравнения. Отметим, что в перечисленных

выше результатах (3)-(5) речь идет о неявных (денотативных) заданиях рефлексивно-транзитивного замыкания.

Все стандартные понятия для бинарных отношений понимаются в смысле [9], для замкнутости изложения и удобства читателя приведены основные определения.

Зафиксируем универсум D , элементы которого обозначим x, y, z, \dots ; бинарные отношения на D обозначим U, V, \dots . Всюду далее символ ■ обозначает конец формулировки утверждения и доказательства, а символ □ – конец логической части доказательства.

2. Вспомогательные операции инверсии и произведения бинарных отношений

В следующем предложении приведены нужные далее свойства инверсии бинарного отношения, которое вводится стандартно: $U^{-1} = \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in U\}$. Ниже $U \circ V = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z (\langle x, z \rangle \in U \wedge \langle z, y \rangle \in V)\}$ – обычное произведение отношений U и V (в указанном порядке).

Предложение 1 (свойства инверсии). Выполняются следующие утверждения:

1) $U \subseteq V \Rightarrow U^{-1} \subseteq V^{-1}$ (монотонность инверсии относительно теоретико-множественного включения);

2) $\Delta_D^{-1} = \Delta_D$, где $\Delta_D = \{\langle x, x \rangle \mid x \in D\}$ – диагональ на D (диагональ – неподвижная точка для инверсии¹);

3) $\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)^{-1} = \bigcup_{i \in I} U_i^{-1}$ (дистрибутивность инверсии относительно объединений);

4) $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$ (инверсия произведения отношений);

5) $(U^{-1})^{-1} = U$ (инверсия инверсии). ■

Доказательство проводится непосредственно. ■

Отметим, что инверсия является дистрибутивной и относительно пересечений.

В следующем предложении приведены необходимые далее свойства произведения отношений.

Предложение 2 (свойства произведения). Выполняются следующие утверждения:

1) $U \subseteq V \wedge U' \subseteq V' \Rightarrow U \circ U' \subseteq V \circ V'$ (монотонность относительно теоретико-множественного включения по каждому аргументу²);

¹ Это утверждение можно усилить: все неподвижные точки инверсии и только они имеют вид поддиагоналей – Δ_L , где $L \subseteq D$.

² А, значит, и по совокупности аргументов.

2) $\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \circ \left(\bigcup_{j \in J} V_j\right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} U_i \circ V_j$ (дистрибутивність относительно объединений по каждому аргументу);

3) $\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) \circ \left(\bigcap_{j \in J} V_j\right) \subseteq \bigcap_{i \in I, j \in J} U_i \circ V_j$ (верхняя оценка произведения пересечений³);

4) $U \circ \Delta_D = \Delta_D \circ U = U$ (диагональ Δ_D – правая (левая) единица по произведению). ■

Доказательство проводится непосредственно. ■

3. Вспомогательные результаты: рефлексивность, антисимметричность и транзитивность

Рефлексивность бинарного отношения понимается стандартно:

$$U \text{ – рефлексивно} \Leftrightarrow \forall x (\langle x, x \rangle \in U).$$

Очевидно, что $U \text{ – рефлексивно} \Leftrightarrow \Delta_D \subseteq U \Leftrightarrow \Delta_D \subseteq U^{-1}$.

Первая эквивалентность очевидна, а вторая вытекает из очевидной эквивалентности $\Delta_D \subseteq U \Leftrightarrow \Delta_D \subseteq U^{-1}$ (надо применить монотонность инверсии (п. 1 предложения 1), а также пп. 2, 5 предложения 1).

Ниже понятие антисимметричности отношения понимается стандартно:

$$U \text{ – антисимметрично} \Leftrightarrow \forall xy (\langle x, y \rangle \in U \wedge \langle y, x \rangle \in U \Rightarrow x = y).$$

Ниже приведен критерий антисимметричности без использования предметных переменных.

Предложение 3 (критерий антисимметричности). Выполняется эквивалентность:

$$U \text{ – антисимметрично} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} \subseteq \Delta_D. \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $U \text{ – антисимметрично}$. Рассмотрим $\langle x, y \rangle \in U \cap U^{-1}$, тогда $\langle x, y \rangle \in U$ и $\langle x, y \rangle \in U^{-1}$. Таким образом, $\langle x, y \rangle \in U$ и $\langle y, x \rangle \in U$, т.е., ввиду антисимметричности U , $x = y$, следовательно, $\langle x, y \rangle \in \Delta_D$. □

Достаточность. Пусть $\langle x, y \rangle \in U$ и $\langle y, x \rangle \in U$, т.е. $\langle x, y \rangle \in U$, а $\langle x, y \rangle \in U^{-1}$. Отсюда $\langle x, y \rangle \in U \cap U^{-1} \subseteq \Delta_D$. □ ■

Простые примеры показывают, что заменить включение на равенство в правой части эквивалентности из предложения 3 нельзя.

Включение из правой части эквивалентности предложения 3 переходит в равенство в точности для рефлексивных и антисимметричных отношений.

³ Другими словами, произведение не является, вообще говоря, дистрибутивным относительно пересечений.

Следствие 1 (критерий антисимметричности и рефлексивности). Выполняется эквивалентность:

$$U \text{ – антисимметрично и рефлексивно} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} = \Delta_D. \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость. Пусть U – антисимметрично и рефлексивно. По предложению 3 $U \cap U^{-1} \subseteq \Delta_D$ и остается показать обратное включение. Ввиду рефлексивности U выполняются включения $\Delta_D \subseteq U$, $\Delta_D \subseteq U^{-1}$, из которых и вытекает требуемое включение $\Delta_D \subseteq U \cap U^{-1}$. \square

Достаточность. Пусть $U \cap U^{-1} = \Delta_D$. Ввиду предложения 3 U антисимметрично. Кроме того, очевидно, что $\Delta_D \subseteq U$ (а также $\Delta_D \subseteq U^{-1}$) т.е. U и рефлексивно. \square

Переходим к транзитивности отношений, которое понимается стандартно:

$$U \text{ – транзитивно} \Leftrightarrow \forall xyz (\langle x, y \rangle \in U \wedge \langle y, z \rangle \in U \Rightarrow \langle x, z \rangle \in U).$$

Ниже приведен критерий транзитивности без использования предметных переменных. Далее $U^2 = U \circ U$.

Предложение 4 (критерий транзитивности). Выполняется эквивалентность:

$$U \text{ – транзитивно} \Leftrightarrow U^2 \subseteq U. \blacksquare$$

Доказательство проводится непосредственно. \blacksquare

Отметим, простые примеры показывают, что заменить в правой части эквивалентности из предложения 4 включение на равенство, вообще говоря, нельзя.

Действительно, пусть $U = \{\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle, \langle x, z \rangle\}$, где элементы x, y, z попарно различны (см. рис. 1).

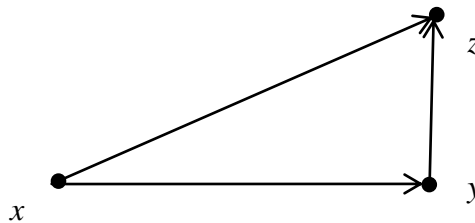


Рис. 1. Пример транзитивного отношения, такого, что $U \not\subseteq U^2$

Очевидно, что $U^2 = \{\langle x, z \rangle\}$, т.е. U – транзитивно; при этом $U \not\subseteq U^2$, таким образом, равенство $U = U^2$ не выполняется.

Включение из правой части эквивалентности предложения 4 переходит в равенство для рефлексивных отношений.

Следствие 2 (критерий транзитивности и рефлексивности). Выполняется эквивалентность:

$$U \text{ – транзитивно и рефлексивно} \Leftrightarrow U^2 = U \wedge \Delta_D \subseteq U. \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость. Пусть U – транзитивно и рефлексивно. По определению рефлексивности $\Delta_D \subseteq U$. Ввиду предложения 4 $U^2 \subseteq U$ и остается установить обратное включение. Действительно, $U \subseteq U$ и $\Delta_D \subseteq U$, откуда в силу монотонности произведения (п. 1 предложения 2) и п. 4 предложения 2 (Δ_D – единица по произведению) получаем включение $U \circ \Delta_D = U \subseteq U^2$. $\square \blacksquare$

Достаточность вытекает из определения рефлексивности и предложения 4 (критерий транзитивности). $\square \blacksquare$

Ниже приведен критерий частичного порядка (рефлексивного, транзитивного и антисимметричного отношения) без использования предметных переменных.

Предложение 5 (критерий частичного порядка). Выполняется эквивалентность:

$$U \text{ – частичный порядок} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} \subseteq \Delta_D \wedge \Delta_D \subseteq U \wedge U^2 \subseteq U. \blacksquare$$

Доказательство вытекает из определения рефлексивности и критериев антисимметричности (предложение 3) и транзитивности (предложение 4). \blacksquare

Упростим правую часть эквивалентности предложения 5, учитывая рефлексивность частичного порядка.

Следствие 3 (критерий частичного порядка). Выполняется эквивалентность:

$$U \text{ – частичный порядок} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} = \Delta_D \wedge U^2 = U. \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость вытекает из критериев антисимметричности и рефлексивности (следствие 1) и транзитивности и рефлексивности (следствие 2). \square

Достаточность также вытекает из этих же критериев. $\square \blacksquare$

4. Рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения

Переходим к основному понятию работы – рефлексивно-транзитивному замыканию отношения U , которое имеет следующее явное определение:

$$U^* = \bigcup_{i=0,1,2,\dots} U^i, \text{ где } U^0 = \Delta_D, U^1 = U, U^{i+1} = U \circ U^i, i = 1, 2, \dots$$

Предложение 6 (свойства рефлексивности и транзитивности рефлексивно-транзитивного замыкания). U^* – рефлексивно и транзитивно. \blacksquare

Доказательство. Рефлексивность очевидна ($U^0 = \Delta_D$), проверим транзитивность U^* . Для этого ввиду предложения 4 (критерий транзитивности) достаточно проверить включение $U^* \circ U^* \subseteq U^*$ (из-за рефлексивности U^* на самом деле будет установлено равенство). Имеем цепочку равенств:

$$(U^*)^2 = \left(\bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \right) \circ \left(\bigcup_{j=0,1,\dots} U^j \right) = \bigcup_{i=0,1,\dots; j=0,1,\dots} U^{i+j} = \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \cup \bigcup_{i=0,1,\dots; j=1,2,\dots} U^{i+j} = U^*.$$

Здесь воспользовались дистрибутивностью произведения относительно объединений (п. 2 предложения 2) и очевидным включением $\bigcup_{i=0,1,\dots; j=1,2,\dots} U^{i+j} \subseteq U^*$. \blacksquare

Таким образом, чтобы быть частичным порядком рефлексивно-транзитивному замыканию необходимо и достаточно обладать антисимметричностью. Соответствующий критерий в терминах исходного (замыкаемого) отношения без использования предметных переменных приведен в следующем предложении.

Предложение 7 (критерий антисимметричности для рефлексивно-транзитивного замыкания). Выполняется эквивалентность:

$$U^* - \text{антисимметрично} \Leftrightarrow \forall i, j = 1, 2, \dots U^i \cap (U^{-1})^j \subseteq \Delta_D. \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость. Пусть U^* – антисимметрично, тогда по критерию антисимметричности (предложение 3) $U^* \cap (U^*)^{-1} \subseteq \Delta_D$. Распишем левую часть этого включения:

$$U^* \cap (U^*)^{-1} = \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \cap \left(\bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \right)^{-1} = \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \cap \bigcup_{i=0,1,\dots} (U^{-1})^i = \bigcup_{i=0,1,\dots; j=0,1,\dots} U^i \cap (U^{-1})^j.$$

В указанных переходах, наряду с общезначимыми теоретико-множественными равенствами, воспользовались дистрибутивностью инверсии относительно объединений (второй переход) и инверсией произведения (последний переход) – пп. 3 и 4 предложения 1. Итак, имеем:

$$\bigcup_{i=0,1,\dots; j=0,1,\dots} U^i \cap (U^{-1})^j = U^* \cap (U^*)^{-1} \subseteq \Delta_D. \quad \text{Отсюда и вытекает, что}$$

$$U^i \cap (U^{-1})^j \subseteq \Delta_D \quad \text{для всех } i, j = 1, 2, \dots \square$$

Достаточность. Ввиду критерия антисимметричности (предложение 3) достаточно установить включение $U^* \cap (U^*)^{-1} \subseteq \Delta_D$.

Используем представление левой части этого включения, приведенное выше при доказательстве необходимости. Имеем:

$$\begin{aligned} U^* \cap (U^*)^{-1} &= \bigcup_{i=0,1,\dots; j=0,1,\dots} U^i \cap (U^{-1})^j = \\ &= \bigcup_{i=1,2,\dots; j=1,2,\dots} U^i \cap (U^{-1})^j \cup \bigcup_{j=0,1,\dots; i=0} \Delta_D \cap (U^{-1})^j \cup \bigcup_{i=0,1,\dots; j=0} U^i \cap \Delta_D \subseteq \\ &\subseteq \Delta_D \cup \Delta_D \cup \Delta_D = \Delta_D. \end{aligned}$$

□■

Отметим, что в правой части эквивалентности предложения 7 можно расширить область действия связанных переменных $i, j = 0, 1, 2, \dots$

Теперь можно сформулировать один из основных результатов.

Теорема 1 (критерий частичного порядка для рефлексивно-транзитивного замыкания). Выполняется эквивалентность:

$$U^* - \text{частичный порядок} \Leftrightarrow \forall i, j = 1, 2, \dots U^i \cap (U^{-1})^j \subseteq \Delta_D. \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость вытекает из критерия антисимметричности для рефлексивно-транзитивного замыкания U^* (предложение 7), а достаточность – из того же критерия и предложения 6. ■

Именно этот результат важен для алгоритмов линеаризации, когда по иерархии классов, удовлетворяющей по сути условию отсутствия циклов в соответствующем индуцированном графе на классах, строится частичный порядок на множестве классов (требование $\forall i, j = 1, 2, \dots U^i \cap (U^{-1})^j \subseteq \Delta_D$ и говорит по существу о отсутствии циклов).

5. Рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения: характеристические денотативные свойства

Переходим к свойствам рефлексивно-транзитивного замыкания, важным для внутренней проблематики теории бинарных отношений. Будут представлены два задания рефлексивно транзитивного отношения в терминах его свойств.

5.1. Рефлексивно-транзитивное замыкание как наименьшее рефлексивное и транзитивное отношение, содержащее исходное отношение

Рассмотрим следующее семейство отношений для зафиксированного отношения U :

$$F_U = \{V \mid V - \text{рефлексивно и транзитивно} \wedge U \subseteq V\}.$$

Это семейство непустое: оно содержит, например, U^* (ввиду предложения 6) и универсальное отношение $D \times D$ на домене.

Предложение 8 (свойство замкнутости F_U относительно пересечений). Семейство F_U замкнуто относительно произвольных пересечений. ■

Доказательство. Пусть $\hat{V} = \bigcap_{i \in I} V_i$, где $V_i \in F_U$ для всех индексов $i \in I$.

Покажем, что для пересечения выполняется принадлежность $\hat{V} \in F_U$.

Рефлексивность \hat{V} и включение $U \subseteq \hat{V}$ очевидны. □

Покажем транзитивность \hat{V} . Ввиду критерия транзитивности (предложение 4) для этого достаточно проверить включение $\hat{V} \circ \hat{V} \subseteq \hat{V}$. Действительно, имеем цепочку равенств и включений:

$$\hat{V} \circ \hat{V} = \left(\bigcap_{i \in I} V_i \right) \circ \left(\bigcap_{j \in I} V_j \right) \subseteq \bigcap_{i \in I; j \in I} V_i \circ V_j \subseteq \bigcap_{i \in I} V_i \circ V_i = \bigcap_{i \in I} V_i = \hat{V}.$$

В этих переходах использовали верхнюю оценку произведения пересечений (второй переход, п. 3 предложения 2) и равенство $V_i^2 = V_i$ (предпоследний переход; использовали то, что отношение V_i рефлексивно и транзитивно, далее по следствию 2). □■

Из предложения 8 вытекает, что семейство F_U является муровским по терминологии [10] и центрированным по терминологии [11].

Теорема 2. Выполняется равенство $U^* = \bigcap_{V \in F_U} V$. ■

Доказательство. Обозначим $V_0 = \bigcap_{V \in F_U} V$. Так как $U^* \in F_U$, то $V_0 \subseteq U^*$ и остается показать обратное включение. \square

Зафиксируем произвольное $V \in F_U$ и индукцией по $k = 0, 1, \dots$ проверим включение $U^k \subseteq V$.

Базис индукции. $U^0 = \Delta_D \subseteq V$ ввиду рефлексивности V . \square

Индуктивный шаг. Пусть $U^k \subseteq V$, домножим обе части включения на U справа; тогда, ввиду монотонности произведения (п.1 предложения 2), включение сохранится: $U^k \circ U = U^{k+1} \subseteq V \circ U$. Остается учесть включение $V \circ U \subseteq V \circ V = V$ (использована та же монотонность произведения, включение $U \subseteq V$, свойства рефлексивности и транзитивности V и соответствующий критерий – следствие 2). \square

Итак, $U^k \subseteq V$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$, т.е. $U^* \subseteq V$. Отсюда ввиду произвольности $V \in F_U$ и вытекает требуемое включение $U^* \subseteq \bigcap_{V \in F_U} V = V_0$. \square

Таким образом, замыкание U^* – наименьшее (относительно теоретико-множественного включения) рефлексивное и транзитивное отношение, содержащее отношение U . Это и есть первое денотативное задание рефлексивно-транзитивного замыкания.

Отсюда вытекает следующее следствие.

Следствие 4 (описание неподвижных точек оператора $U \mapsto U^*$). Имеет место:

$$U \text{ – рефлексивно и транзитивно} \Leftrightarrow U^* = U. \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 2, а достаточность – из предложения 6. \blacksquare

Предложение 9 (свойства оператора $U \mapsto U^*$). Выполняются следующие утверждения:

- 1) $U \subseteq V \Rightarrow U^* \subseteq V^*$ (монотонность относительно теоретико-множественного включения);
- 2) $U \subseteq U^*$ (возрастаемость относительно теоретико-множественного включения);
- 3) $(U^*)^* = U^*$ (идемпотентность). \blacksquare

Доказательство. П. 1 вытекает из монотонности произведения (п. 1 предложения 2) и теоретико-множественного объединения. \square

П. 2 очевиден ($U^1 = U$). \square

Для проверки п. 3 надо применить предложение 6 (U^* – рефлексивно и транзитивно) и следствие 4 (о неподвижных точках оператора $U \mapsto U^*$). \square

Ниже понятие оператора замыкания используется в смысле [12]. Следующее следствие является просто краткой формулировкой предыдущего предложения 9.

Следствие 5. Оператор $U \mapsto U^*$ является оператором замыкания относительно теоретико-множественного включения. ■

Доказательство непосредственно вытекает из предложения 9. ■

5.2. Рефлексивно-транзитивное замыкание как подалгебра, порожденная диагональю в специальной алгебре всех пар

Рассмотрим следующую унарную параметрическую операцию над парами:

$$\xrightarrow{x,y} : D \times D \xrightarrow{\sim} D \times D, \text{ dom } \xrightarrow{x,y} = D \times \{x\}, \left(\langle z, x \rangle \right) \xrightarrow{x,y} = \langle z, y \rangle$$

(используем постфиксную форму записи). Всюду далее $[U] \xrightarrow{x,y}$ – полный образ отношения U относительно операции $\xrightarrow{x,y}$ (также используем постфиксную форму записи; по поводу общезначимой теоретико-множественной конструкции полного образа множества относительно отношения см. работу [13]).

Основные свойства этой операции приведены в следующем предложении.

Предложение 10. Выполняются следующие утверждения:

- 1) $\langle z, x \rangle \in U \wedge \langle x, y \rangle \in V \Rightarrow \left(\langle z, x \rangle \right) \xrightarrow{x,y} \in U \circ V$;
- 2) $\langle x, y \rangle \in V \Rightarrow [U] \xrightarrow{x,y} \subseteq U \circ V$;
- 3) $\langle x, y \rangle \in U \circ V \Rightarrow \exists z (\langle x, z \rangle \in U \wedge \langle z, y \rangle \in V \wedge \langle x, y \rangle = \left(\langle x, z \rangle \right) \xrightarrow{z,y})$;
- 4) $U \circ V = \bigcup_{\langle x,y \rangle \in V} [U] \xrightarrow{x,y}$. ■

Доказательство. П. 1 вытекает из определений операции $\xrightarrow{x,y}$ и произведения отношений. □

П. 2 вытекает из п. 1 и определения полного образа. □

П. 3 вытекает из определений операции $\xrightarrow{x,y}$ и произведения отношений. □

П. 4. Включение правой части в левую вытекает из доказанного п. 2 предложения 10, а обратное включение – из уже доказанного п. 3 этого же предложения. ■

Следствие 6 (свойства операции $\xrightarrow{x,y}$). Выполняются следующие утверждения:

- 1) $U^{k+1} = \bigcup_{\langle x,y \rangle \in U} [U^k] \xrightarrow{x,y}$, для всех $k = 0, 1, 2, \dots$;
- 2) $[U^k] \xrightarrow{x,y} \subseteq U^{k+1}$, для всех $\langle x, y \rangle \in U$ и $k = 0, 1, 2, \dots$;
- 3) U^* замкнуто относительно любой операции вида $\xrightarrow{x,y}$, где $\langle x, y \rangle \in U$. ■

Доказательство. П. 1. Ввиду п. 4 предложения 10 и определения произведения отношений имеем цепочку равенств:

$$U^{k+1} = U^k \circ U = \bigcup_{\langle x,y \rangle \in U} [U^k] \xrightarrow{x,y}. \square$$

П. 2 вытекает из п. 1. □

П. 3. Пусть $\langle x, y \rangle \in U$, имеем цепочку равенств и включений:

$$[U^*] \xrightarrow{x,y} = \left[\bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \right] \xrightarrow{x,y} = \bigcup_{k=0,1,\dots} [U^k] \xrightarrow{x,y} \subseteq \bigcup_{k=0,1,\dots} U^{k+1} = \bigcup_{k=1,2,\dots} U^k \subseteq U^*.$$

Во втором переходе была использована дистрибутивность полного образа относительно объединений (см. [13]), а в третьем – доказанный п. 2 следствия 6. Итак, для полного образа $[U^*] \xrightarrow{x,y} \subseteq U^*$, что и означает замкнутость U^* относительно операции $\xrightarrow{x,y}$, где $\langle x, y \rangle \in U$. ■

Зафиксируем отношение U и рассмотрим частичную параметрическую алгебру всех пар $A_U = \langle D \times D, \Omega_U \rangle$, где $\Omega_U = \left\{ \xrightarrow{x,y} \mid \langle x, y \rangle \in U \right\}$ – сигнатура.

Далее $[\Delta_D]_{\Omega_U}$ – подалгебра алгебры A_U , порожденная диагональю Δ_D (по поводу подалгебр и порождающих совокупностей см., например, [гл. I, § 1, п. 1.3, 14]).

Теперь можно сформулировать утверждение о втором денотативном представлении рефлексивно-транзитивного замыкания.

Теорема 3 (рефлексивно-транзитивное замыкание как замыкание в алгебре пар). Выполняется равенство $U^* = [\Delta_D]_{\Omega_U}$. ■

Доказательство. В силу п. 3 следствия 6 выполняется $[\Delta_D]_{\Omega_U} \subseteq U^*$ (ведь носитель рассматриваемой подалгебры – наименьшее множество, содержащее диагональ и замкнутое относительно всех сигнатурных операций, а U^* содержит диагональ и замкнуто относительно всех сигнатурных операций в силу упомянутого п. 3 следствия 6) и остается установить обратное включение. □

Для этого индукцией по $k = 0, 1, 2, \dots$ покажем, что $U^k \subseteq [\Delta_D]_{\Omega_U}$.

Базис очевиден, так, как $U^0 = \Delta_D$. □

Индуктивный шаг. В силу п. 1 следствия 6, индуктивного предположения и монотонности полного образа (см. [13]) имеем цепочку: $U^{k+1} = \bigcup_{\langle x,y \rangle \in U} [U^k] \xrightarrow{x,y} \subseteq \bigcup_{\langle x,y \rangle \in U} [\Delta_D]_{\Omega_U} \xrightarrow{x,y} \subseteq [\Delta_D]_{\Omega_U}$. В последнем переходе воспользовались очевидными свойствами замкнутости (относительно операций $\xrightarrow{x,y}$ для $\langle x, y \rangle \in U$) замыкания $[\Delta_D]_{\Omega_U}$. ■

Таким образом, рефлексивно-транзитивное замыкание U^* порождается диагональю в алгебре пар вида A_U . Это и есть второе денотативное задание рефлексивно-транзитивного замыкания.

6. Рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения как наименьшее решение характеристического уравнения

Дадим третью денотативную характеристику рефлексивно-транзитивного замыкания, а именно как наименьшего решения соответствующего естественного уравнения.

Зафіксуємо відношення U і розглянемо параметричне рівняння відносно змінної $X \in 2^{D \times D}$:

$$X = \Delta_D \cup X \cup U \circ X. \quad (1)$$

Теорема 4 (рефлексивно-транзитивне замикання як найменше рішення рівняння). Рефлексивно-транзитивне замикання U^* є найменшим (по теоретико-множественному включенню) рішенням рівняння (1). ■

Доказательство. Покажемо спочатку, що U^* є рішенням рівняння (1). Маємо ланцюжок рівностей (во другому переході використали дистрибутивність добутку відносно об'єднання (п. 2 пропозиції 2)):

$$\begin{aligned} \Delta_D \cup U^* \cup U \circ U^* &= \Delta_D \cup \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \cup U \circ \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i = \Delta_D \cup \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \cup \bigcup_{i=0,1,\dots} U^{i+1} = \\ &= \Delta_D \cup \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \cup \bigcup_{i=1,2,\dots} U^i = \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i = U^*. \quad \square \end{aligned}$$

Нехай тепер V – довільне рішення рівняння (1). Очевидно, що тоді виконуються включення

$$\Delta_D \subseteq V, \quad U \circ V \subseteq V. \quad (2)$$

Індукцією по $k = 0, 1, 2, \dots$ покажемо, що виконується включення $U^k \subseteq V$.

Базис. $U^0 = \Delta_D$, залишається застосувати перше включення з (2). □

Індуктивний крок. Нехай $U^k \subseteq V$, домножимо обидві частини включення на U зліва. В силу монотонності добутку включення збережеться: $U \circ U^k = U^{k+1} \subseteq U \circ V \subseteq V$ (використали друге включення з (2)). □

Отже, $U^k \subseteq V$ для всіх $k = 0, 1, 2, \dots$, т.е. $U^* = \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \subseteq V$. □■

Аналогічно, як в теоремі 4, можна показати, що рефлексивно-транзитивне замикання U^* є найменшим (по теоретико-множественному включенню) рішенням більш простого в порівнянні з (1) рівняння $X = \Delta_D \cup U \circ X$.

Далі встановимо структуру множини всіх рішень рівняння (1), для чого знадобиться лема, узагальнююча друге включення з (2).

Лема 1 (властивості рішення рівняння (1)). Якщо V – рішення рівняння (1), то виконується включення

$$U^k \circ V' \subseteq V \quad (3)$$

для всіх $k = 0, 1, 2, \dots$ і $V' \subseteq V$. ■

Доказательство проведемо індукцією по $k = 0, 1, 2, \dots$

Базис проводиться очевидним чином з використанням того, що Δ_D – одиниця по добутку (п. 4 пропозиції 2). □

Індуктивний крок проводиться аналогічно доказу теоремі 4 (індуктивний крок для встановлення включення $U^k \subseteq V$) з використанням другого включення з (2). □■

Теорема 5 (структура множества всех решений уравнения (1)). Отношение вида $U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V$ для любого отношения V является решением уравнения

(1). Любое решение имеет указанный вид (для подходящего отношения V). ■

Доказательство. Пусть V – произвольное отношение. Покажем, что отношение вида, указанного в теореме 5, является решением уравнения (1). Имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} & \Delta_D \cup \left(U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V \right) \cup U \circ \left(U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V \right) = \\ & = \Delta_D \cup U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^{k+1} \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^{k+1} \circ V = \\ & = \Delta_D \cup U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V \cup \bigcup_{k=1,2,\dots} U^k \cup \bigcup_{k=1,2,\dots} U^k \circ V = U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V. \end{aligned}$$

Во втором переходе воспользовались дистрибутивностью произведения относительно объединений (п. 2 предложения 2). □

Пусть теперь \hat{V} – произвольное решение уравнения (1). Покажем, что оно имеет вид, указанный в доказываемой теореме; т.е. найдем отношение V , такое, что $\hat{V} = U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V$. Положим $V = \hat{V} \setminus U^*$ и установим требуемое

равенство. Имеем цепочку равенств (учтем, что U^* наименьшее решение уравнения (1) согласно теореме 4):

$$U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ (\hat{V} \setminus U^*) \stackrel{(1)}{=} U^* \cup \hat{V} \setminus U^* \cup \bigcup_{k=1,2,\dots} U^k \circ (\hat{V} \setminus U^*) \stackrel{(4)}{=} \hat{V} \cup \bigcup_{k=1,2,\dots} U^k \circ (\hat{V} \setminus U^*)$$

Таким образом, выполняются два включения $\hat{V} \subseteq \hat{V} \cup \bigcup_{k=1,2,\dots} U^k \circ (\hat{V} \setminus U^*) \subseteq \hat{V}$

(последнее включение вытекает из включения (3) в лемме 1), из которых и вытекает требуемое представление решения \hat{V} . □■

Отметим, что вместо уравнения (1) можно рассматривать уравнение вида $X = \Delta_D \cup X \cup X \circ U$. При этом аналоги теорем 4-5 имеют место. Отметим также, что относительно простая структура множества всех решений уравнения (1) (теорема 5), вероятно, связана с возрастаемостью оператора, соответствующего правой части этого уравнения.

7. Основные результаты и выводы

В заключение кратко сформулируем основные результаты и выводы, которые они позволяют сделать. В работе на основе свойств инверсии и произведения бинарных отношений (предложения 1, 2) установлены следующие свойства рефлексивно-транзитивного замыкания бинарного отношения:

1) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения U является частичным порядком тогда и только тогда, когда $\forall i, j = 1, 2, \dots U^i \cap (U^{-1})^j \subseteq \Delta_D$ (теорема 1);

2) оператор построения по отношению его рефлексивно-транзитивного замыкания является монотонным, возрастающим (относительно теоретико-множественного включения) и идемпотентным (предложение 9);

3) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения является наименьшим (по теоретико-множественному включению) рефлексивным и транзитивным отношением, содержащим исходное отношение (теорема 2);

4) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения порождается диагональю в частичной параметрической алгебре пар вида A_U (теорема 3);

5) рефлексивно-транзитивное замыкание U^* является наименьшим (по теоретико-множественному включению) решением параметрического уравнения $X = \Delta_D \cup X \cup U \circ X$ (теорема 4);

6) все решения уравнения из предыдущего пункта имеют вид $U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V$ для подходящих отношений V ; любое отношение такого вида

является решением указанного уравнения (теорема 5).

Из указанных результатов следуют выводы:

1) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения является частичным порядком тогда и только тогда, когда граф этого отношения является ациклическим;

2) оператор построения по отношению его рефлексивно-транзитивного замыкания является оператором замыкания относительно теоретико-множественного включения (следствие 5);

3) наряду с явным заданием рефлексивно-транзитивного замыкания имеются и три неявных (денотативных): во-первых, как наименьшего рефлексивного и транзитивного отношения, содержащего исходное отношение (теорема 2); во-вторых, как замыкания диагонали в построенной алгебре пар (теорема 3); в-третьих, как наименьшего решения уравнения (теорема 4) (отметим, что поскольку левая часть характеристического уравнения разрешена относительно переменного, то, по сути, речь идет о наименьшей неподвижной точке оператора, соответствующего правой части этого уравнения, – $X \mapsto \Delta_D \cup X \cup U \circ X$).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, M.L. Mugnier. Proposal for a Monotonic Multiple Inheritance Linearization // OOPSLA '94 Proceedings of the ninth annual conference on Object-oriented programming systems, language, and applications. – 1994. – P. 164-175.
2. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, M.L. Mugnier. Monotonic conflict resolution mechanisms for inheritance // Proceeding OOPSLA '92 conference proceedings on Object-oriented programming systems, languages, and applications. – 1992. – P.16-24.
3. Michele Simionato. The Python 2.3 Method Resolution Order. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.python.org/download/releases/2.3/mro/>.

4. Guido van Rossum. Method Resolution Order – [Електронний ресурс]. – Режим доступа: <http://python-history.blogspot.com/2010/06/method-resolution-order.html>.
5. Par Gaël Pegliasco. Python Tutorial: Understanding Python MRO – Class search path. – [Електронний ресурс]. – Режим доступа: <http://makina-corporus.com/blog/metier/2014/python-tutorial-understanding-python-mro-class-search-path>.
6. D. Buy, J. Karam, S. Kompan, S. Polyakov. Linearization algorithms CLOS and LOOPS of the classes in programming languages: the formal definitions // 13th International Scientific Conference on Informatics. – Poprad, Slovakia, 18-20 Nov., 2015. – P. 63-66 (Print ISBN: 978-1-4673-9867-1, DOI 10.1109/Informatics.2015.7377809).
7. Риге Ж. Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа // Кибернетический сборник: Сборник переводов. – Москва: Иностранная литература, 1963. – Вып. 7. – С. 129-185.
8. Вагнер В.В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения (Сборник статей). – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1965. – Вып. 1. – С. 3-178.
9. Общая алгебра. Т. 1 / О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков и др. Под общей редакцией Л.А. Скорнякова. – Москва: Наука, 1990. – 592 с.
10. Биркгоф Г. Теория решеток. – Москва: Наука, 1984. – 568 с.
11. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. – Москва: Мир, 1970. – 416 с.
12. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. – Москва: Наука, 1982. – 159 с.
13. Буй Д.Б. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження / Д.Б.Буй, Н.Д.Кахута // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232-240.
14. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – Москва: Наука, 1986. – 368 с.

УДК 539.3

Побудова комбінованого чисельно-аналітичного методу підвищеної точності для розрахунку задач оболонкових конструкцій

В. А. Дзюба

Черкаський національний університет імені Б. Хмельницького, Україна

В роботі наведений новий підхід до розрахунку з підвищеною точністю механічних характеристик оболонок змінної товщини. Запропонований метод зводиться до розв'язання СЛАР із використанням сплайнів та комбінованих ітераційних методів. Наукова новизна дослідження полягає у використанні сплайнів у ітераційній процедурі. Побудовано чисельно-аналітичний метод, що дає змогу отримати результати обчислень з підвищеною точністю. Проведена оцінка запропонованого методу на тестовому прикладі, модель точного розв'язку якого відома. Збіжність побудованої ітераційної процедури проілюстрована графічно.

Ключові слова: крайова задача, апроксимація, сплайн, ітераційна схема, метод прогонки.

В работе приведен новый подход к расчету с повышенной точностью механических характеристик оболочек переменной толщины. Предложенный метод сводится к решению СЛАУ с использованием сплайнов и комбинированных итерационных методов. Научная новизна исследования заключается в использовании сплайнов в итерационной процедуре. Построен численно-аналитический метод, который позволяет получить результаты вычислений с повышенной точностью. Проведена оценка предложенного метода на тестовом примере, модель точного решения которого известна. Графически проиллюстрирована сходимость построенной итерационной процедуры.

Ключевые слова: крайовая задача, аппроксимация, сплайн, итерационная схема, метод прогонки.

This article represents a new approach, with which mechanical characteristics of the shells having variable thickness can be calculated with high accuracy. The proposed method reduces the problem to solving SLAE using splines and combined iterative methods. The iterative procedure uses splines, and this is the scientific novelty of the research. Numerical and analytical method that was intentionally developed makes it possible to obtain calculation results of high accuracy. The proposed method was assessed with the test example, having the known model of exact solution. The convergence of the constructed iterative procedure is illustrated graphically.

Key words: boundary problem, approximation, spline, iterative scheme, tridiagonal matrix algorithm.

1. Актуальність дослідження. Огляд публікацій по даній темі

При розв'язанні прикладних задач у різноманітних галузях техніки, можна спостерігати, що все частіш для потреб сучасної науки постають розрахунки пов'язані з великим об'ємом інформації, яка потребує опрацювання [1]. Зосередимо свою увагу на актуальності розробки розрахункових схем та обчислювального методу підвищеної точності для теорії оболонок.

У процесі створення новітніх конструкцій оболонки забезпечують високу міцність, жорсткість, теплоізоляційні характеристики. Питання дослідження обчислювальних методів теорії оболонок можна знайти у роботах Х. М. Муштарі, О. Т. Беккера, А. Т. Василенка, Я. М. Григоренка, П. О. Стеблянка,

Дж. Кемпнера, А. В. Беляєва, Н. Я. Цимбельмана. Разом з цим виникають математичні та обчислювальні труднощі при виконанні граничних умов з достатньою точністю.

Прогресивні дослідження науковців в напрямі побудови ефективних методів обчислення механічних характеристик пластин та оболонок тісно пов'язані з розвитком сучасних ЕОМ [2, 3]. При підході до вибору методу розв'язання задач теорії оболонок, можливими варіантами є аналітичні та чисельні методи. Кожен з яких, в конкретній задачі, має свої переваги та недоліки, що обмежує його застосування. Використання чисельних методів не завжди ефективне, тому що їх розв'язання зводиться до розв'язання систем лінійних рівнянь великого порядку. Тому виникає необхідність до розробки чисельно-аналітичних методів для розв'язання задач оболонкових конструкцій [5].

2. Мета статті

Розробити комбінований метод на основі кінцево-різницевої апроксимації похідних із залученням сплайнів для проведення розрахунку підвищеної точності задач оболонкових конструкцій змінної товщини.

3. Виклад основного матеріалу дослідження

Пропонується дослідити наступну систему диференціальних рівнянь у загальному вигляді

$$\begin{cases} U' = f_1(U, V) \\ V' = f_2(U, V) \end{cases} \quad (1)$$

із заданими крайовими умовами

$$\begin{aligned} U(0) &= U_* \\ V(L) &= V_* \end{aligned} \quad (1^*)$$

Відомо, що систему (1) можна записати у різницевому вигляді з використанням класичних формул двоточкової апроксимації похідної. У цьому випадку ітераційну схему можна виконати за наступними розрахунковими формулами

$$\begin{aligned} x=0 & \quad U_1^k = hf_{10}^{k-1} + U_0^{k-1} \\ x=x_1 & \quad U_2^k = 2hf_{11}^{k-1} + U_0^{k-1} \\ x=x_2 & \quad U_3^k = 2hf_{12}^{k-1} + U_1^{k-1} \\ & \dots \dots \dots \\ x=x_i & \quad U_{i+1}^k = 2hf_{1i}^{k-1} + U_{i-1}^{k-1} \\ & \dots \dots \dots \\ x=x_{N-2} & \quad U_{N-1}^k = 2hf_{1N-2}^{k-1} + U_{N-3}^{k-1} \\ x=x_{N-1} & \quad U_N^k = 2hf_{1N-1}^{k-1} + U_{N-2}^{k-1} \\ x=x_N=L & \quad U_N = h \left(f_{1N-1} + \frac{1}{2} f_{1N} \right) + \frac{U_{N-2} + U_{N-1}}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

З метою покращення розрахунків звернемося до сплайн-апроксимації [4]. Відомі формули при фіксованих значеннях коефіцієнтів

$$\begin{aligned}
n_0 = 8; k_0 = 1; k_1 = 11; k_2 = 18; k_3 = 9; k_4 = 2; k_5 = 3; k_6 = 6 \\
\frac{1}{6h}[-k_1 U_0 + k_2 U_1 - k_3 U_2 + k_4 U_3] = f_{10}; \\
\frac{1}{6h}[-k_4 U_0 - k_5 U_1 + k_6 U_2 - k_0 U_3] = f_{11}; \\
\frac{1}{12h}[-k_0 (U_4 - U_0) + n_0 (U_3 - U_1)] = f_{12}; \\
\text{.....} \\
\frac{1}{12h}[-k_0 (U_{i+2} - U_{i-2}) + n_0 (U_{i+1} - U_{i-1})] = f_i; \\
\frac{1}{12h}[-k_0 (U_N - U_{N-4}) + n_0 (U_{N-1} - U_{N-3})] = f_{1N-2}; \\
\frac{1}{6h}[k_0 U_{N-3} - k_6 U_{N-2} + k_5 U_{N-1} + k_4 U_N] = f_{1N-1}; \\
\frac{1}{6h}[-k_4 U_{N-3} + k_3 U_{N-2} - k_2 U_{N-1} + k_1 U_N] = f_{1N};
\end{aligned} \tag{3}$$

Користуючись виразами (3) виведемо розрахункові формули для організації ітераційної процедури в методі прогонки. Аналізуючи формули (3), бачимо, що для кінцевої точки $x = x_N = L$ існує два способи обчислення U_N , із врахування цих міркувань складемо лінійну комбінацію останніх двох формул, приймаючи $\alpha + \beta = 1$, матимемо

$$\begin{aligned}
k_4 U_N + k_5 U_{N-1} - k_6 U_{N-2} + k_0 U_{N-3} &= 6hf_{1N-1} \quad (\times \alpha) \\
k_1 U_N - k_2 U_{N-1} + k_3 U_{N-2} - k_4 U_{N-3} &= 6hf_{1N} \quad (\times \beta) \\
[\alpha k_4 + (1-\alpha)k_1]U_N + [\alpha k_5 - (1-\alpha)k_2]U_{N-1} + [-\alpha k_6 + (1-\alpha)k_3]U_{N-2} + \\
+ [\alpha k_0 - (1-\alpha)k_4]U_{N-3} &= 6h[\alpha f_{1N-1} + (1-\alpha)f_{1N}]
\end{aligned} \tag{4}$$

Введемо позначення, та знайдемо можливі проміжки значень для α

$$\begin{aligned}
A_1 &= \alpha k_4 + (1-\alpha)k_1 = 2\alpha + (1-\alpha)11 = 11 - 9\alpha, A_1 \in [11; 2] \\
A_2 &= \alpha k_5 - (1-\alpha)k_2 = 3\alpha - (1-\alpha)18 = -18 + 21\alpha, A_2 \in [-18; 3] \\
A_3 &= -\alpha k_6 + (1-\alpha)k_3 = -6\alpha + (1-\alpha)9 = 9 - 15\alpha, A_3 \in [9; -6] \\
A_4 &= \alpha k_0 - (1-\alpha)k_4 = \alpha - (1-\alpha)2 = -2 + 3\alpha, A_4 \in [-2; 1]
\end{aligned}$$

Знайдемо допустимий діапазон значень α для стійкого розрахунку в ітераційній схемі Зейделя

$$\begin{aligned}
\text{а) } |A_1| > |A_2| &\Rightarrow 11 - 9\alpha \geq 18 - 21\alpha, 12\alpha \geq 7, \alpha \geq \frac{7}{12} \\
\text{б) } |A_1| > |A_3| &\Rightarrow 11 - 9\alpha \geq -9 + 15\alpha, 20 \geq 24\alpha, \alpha \leq \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

$$в) |A_1| > |A_4| \Rightarrow 11 - 9\alpha \geq -2 + 3\alpha, 13 \geq 12\alpha, \alpha \leq \frac{13}{12}$$

Виконавши обрахунки, приходимо до висновку, що для проведення стійкого розрахунку в ітераційній схемі Зейделя допустимим діапазоном для величини α є проміжок $0,58(3) \leq \alpha \leq 0,83(3)$.

Знайдемо оптимальне значення для α , коли $|A_2| = |A_3| \Rightarrow 18 - 21\alpha = -9 + 15\alpha, 27 = 36\alpha, \alpha = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} = 0,75$, отже оптимальним значенням є $\alpha = 0,75$. Таким чином, при підстановці знайденого значення α у вираз (4), отримаємо кінцеву формулу для U_N

$$U_N = \frac{6}{17}h[3f_{1N-1} + f_{1N}] + \frac{9}{17}[U_{N-1} + U_{N-2}] - \frac{1}{17}U_{N-3}. \quad (5)$$

Беручи до уваги формули (3), (5) запишемо розрахункові формули для прямого ходу методу прогонки для системи (1), (1*)

$$U_0 = U_*$$

$$U_1^k = \frac{1}{k_2}(6hf_{10}^{k-1} + k_1U_0 + k_3U_2^{k-1} - k_4U_3^{k-1})$$

$$U_2^k = \frac{1}{k_6}(6hf_{11}^{k-1} + k_4U_0 + k_5U_1^{k-1} + k_0U_3^{k-1})$$

$$U_3^k = \frac{1}{k_6}(6hf_{12}^{k-1} + k_4U_1^{k-1} + k_5U_2^{k-1} + k_0U_4^{k-1})$$

$$\dots\dots\dots$$

$$U_i^k = \frac{1}{k_6}(6hf_{i-1}^{k-1} + k_4U_{i-2}^{k-1} + k_5U_{i-1}^{k-1} + k_0U_{i+1}^{k-1}); i = 2, 3, \dots, N-1 \quad (6)$$

$$U_{i+1}^k = \frac{12h}{n_0}f_{ii}^{k-1} + U_{i-1}^{k-1} + \frac{k_0}{n_0}(U_{i+2}^{k-1} - U_{i-2}^{k-1}); i = 2, 3, \dots, N-2$$

$$U_N^k = \frac{6}{17}h(3f_{1N-1}^{k-1} + f_{1N}^{k-1}) + \frac{9}{17}(U_{N-1}^{k-1} + U_{N-2}^{k-1}) - \frac{1}{17}U_{N-3}^{k-1}$$

Виведемо формули для зворотного ходу методу прогонки для цього скористаємося формулами (3). Проводячи аналогічні до прямого ходу міркування, стає зрозуміло, що обчислити V_0 можна двома способами, у зв'язку з цим складемо лінійну комбінацію перших двох рівнянь (3) за умови, що $\alpha + \beta = 1$

$$-k_1V_0 + k_2V_1 - k_3V_2 + k_4V_3 = 6hf_{20} \quad (\times\alpha)$$

$$-k_4V_0 - k_5V_1 + k_6V_2 - k_0V = 6hf_{21} \quad (\times\beta)$$

$$-V_0[\alpha k_1 + k_4(1-\alpha)] + V_1[\alpha k_2 - k_5(1-\alpha)] + V_2[-\alpha k_3 + k_6(1-\alpha)] + V_3[\alpha k_4 - k_0(1-\alpha)] = 6h[\alpha f_{20} + f_{21}(1-\alpha)] \quad (7)$$

Оптимальним значенням для стійкого розрахунку в ітераційній схемі Зейделя буде $\alpha = \frac{1}{4}$. Підставивши значення α у вираз (7) матимемо кінцеву формулу для обчислення V_0

$$V_0 = -\frac{6}{17}h[f_{20} + 3f_{21}] + \frac{9}{17}(V_1 + V_2) - \frac{1}{17}V_3. \quad (8)$$

На основі формул (3), (8) запишемо формули зворотного ходу методу прогонки для системи (1) з крайовими умовами (1*)

$$V_0^k = -\frac{6}{17}h[f_{20}^{k-1} + 3f_{21}^{k-1}] + \frac{9}{17}(V_1^{k-1} + V_2^{k-1}) - \frac{1}{17}V_3^{k-1}$$

$$V_{j-1}^k = \frac{1}{n_0}(-12hf_{2j}^{k-1} - k_0(V_{j+2}^{k-1} - V_{j-2}^{k-1}) + V_{j+1}^{k-1}); j = 2$$

$$V_j^k = \frac{1}{k_6}(-6hf_{2j+1}^{k-1} + k_0V_{j-1}^{k-1} + k_5V_{j+1}^{k-1} + k_4V_{j+2}^{k-1}); j = N-2; N-3; \dots; 3, 2 \quad (9)$$

$$V_{N-2}^k = \frac{1}{k_6}(-6hf_{2N-1}^{k-1} + k_0V_{N-3}^{k-1} + k_5V_{N-1}^{k-1} + k_4V_N^{k-1})$$

$$V_{N-1}^k = \frac{1}{k_2}(-6hf_{2N}^{k-1} - k_4V_{N-3}^{k-1} + k_3V_{N-2}^{k-1} + k_1V_N^{k-1})$$

$$V_N = V_*$$

У статті запропонований новий варіант чисельно-аналітичного методу дослідження моделей для задач оболонкових конструкцій. Запропонована теорія розрахунку будується на основі детального аналізу поставленої задачі, із врахуванням крайових умов, властивостей системи, що знаходиться під дією навантаження, та здатністю системи зберігати початкові дані.

Перевага даного методу полягає в тому, що ми отримуємо явні розрахункові формули, так як система може бути громіздкою в залежності від кількості кроків по x , то відшукування її розв'язку добре відомими методами може викликати труднощі, оскільки не вдається знайти обернену матрицю.

4. Результати та їх обговорення

Для дослідження оцінки запропонованого нами методу проведення розрахунків, використаємо тестову задачу, модель точного розв'язку якого є відомою.

$$y'(x) = \frac{x}{z(x)}; z'(x) = -\frac{x}{y(x)}, 0 \leq x \leq 1 \quad (10)$$

$$y(0) = 1, z(1) = 1$$

Якщо припустити, що $y(x, \alpha), z(x, \alpha)$ – розв'язки задачі Коші, то

$$y'(x, \alpha) = \frac{x}{z(x, \alpha)}; z'(x, \alpha) = -\frac{x}{y(x, \alpha)}, y(0, \alpha) = 1, z(0, \alpha) = \alpha.$$

Точний розв'язок матиме вигляд $y(x, \alpha) = e^{\frac{x^2}{2\alpha}}, z(x, \alpha) = 2\alpha e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$.

На малюнку наведені чисельні результати для системи (10) та їх порівняння з точним розв'язком

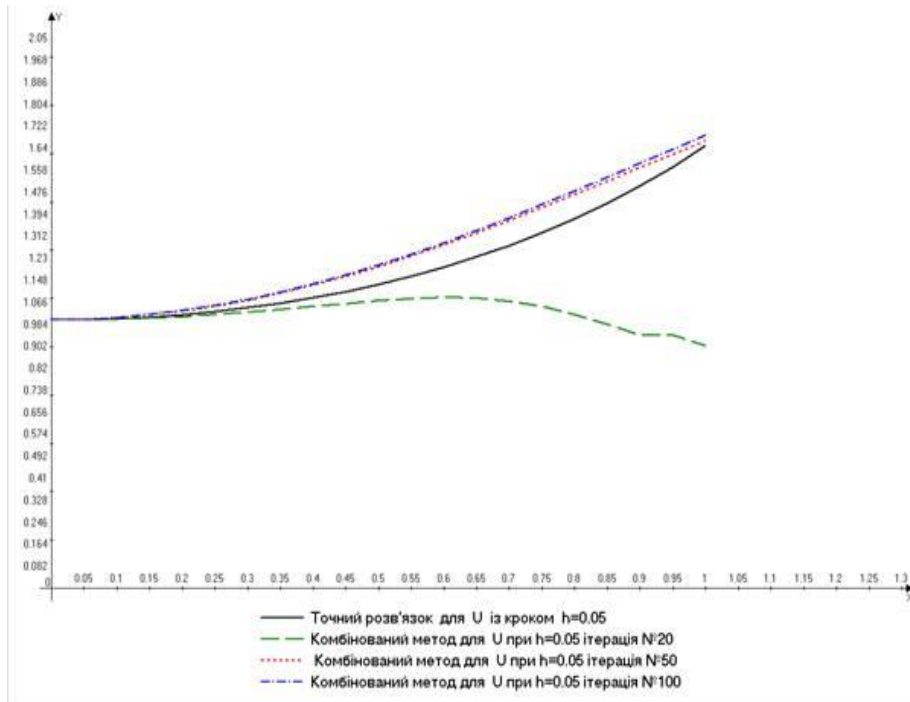


Рис.1. Порівняння отриманих розв'язків для U

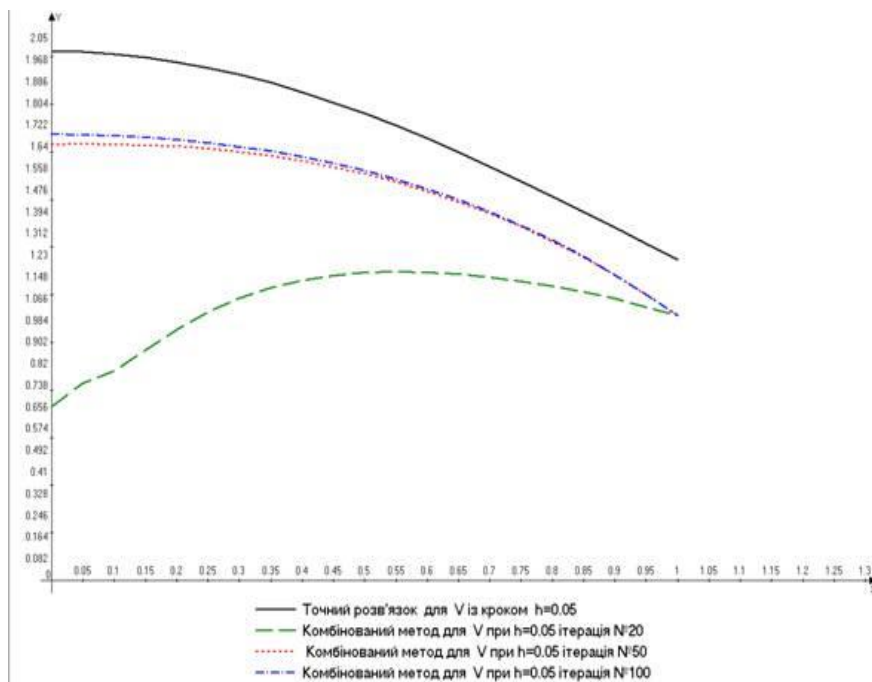


Рис.2. Порівняння отриманих розв'язків для V

Проведені модельні дослідження показали, що організована нами ітераційна процедура з використанням сплайнів є успішною у використанні та збігається з допустимою максимально відносно похибкою.

Математичне моделювання задач оболонкових конструкцій та вдало підібраний обчислювальний метод з його успішною реалізацією відкриває можливість проведення чисельних експериментів для розробки нових технічних рішень.

5. Наукова новизна

У статті показано використання комбінованого підходу до побудови обчислюваного методу, метод побудований ітераційно на основі сплайн-функцій, що дає змогу проводити обчислення з підвищеною точністю, такого роду підхід, а саме використання сплайнів у ітераційній процедурі застосовується вперше.

6. Висновки

Наведений новий підхід до побудови обчислюваного методу для задач теорії оболонок, що дає змогу проводити розрахунки підвищеної точності за рахунок використання сплайнів та комбінованих ітераційних методів. Показана реалізація запропонованого методу на тестовому прикладі, з відомим точним розв'язком, наведені візуальні графіки отриманих розв'язків, доведено, що метод збігається та є ефективним у використанні. Виникає теоретичний та практичний інтерес до подальшого дослідження запропонованого у статті чисельно-аналітичного методу, що, в свою чергу, розширить спектр його застосування у тій чи іншій галузі промисловості.

ЛІТЕРАТУРА

1. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.
2. Рудаков К. М. Чисельні методи аналізу в динаміці та міцності конструкцій. – К: Навч. Посібник. – К.: НТУУ «КПІ», 2007. – 379 с.: іл.
3. Стеблянка П.А., Дзюба А.П., Сафронов О.О. Использование сплайн-аппроксимаций для решения задачи расчета цилиндрической оболочки с переменной жесткостью // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. – Випуск 15. – Дніпропетровськ, 2011. – С. 170–182.
4. Стеблянка П. О. Методи розщеплення в просторових задачах теорії пластичності. – Київ: Наукова думка, 1998. – 304 с.
5. V.A. Dzyuba, P.O. Steblyanko, J. Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences, II(4) No 32, 41(2014).

УДК 519.6, 51-76

Влияние памяти на эволюцию популяций

В. М. Куклин, А. В. Приймак, В. В. Яновский

Харьковский национальный университет

имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61000, Харьков, Украина

Институт монокристаллов, Национальная

Академия Наук Украины, пр. Науки, 60, 61001 Харьков, Украина

В рамках обобщенной «дилеммы заключенных» рассмотрена эволюция популяции с полным набором стратегий поведения, ограниченных только глубиной памяти. Каждое последующее поколение популяции последовательно утрачивает наиболее невыгодные стратегии поведения предыдущего поколения. Показано, что увеличение памяти в популяции эволюционно выгодно. Победители эволюционного отбора неизменно относятся к агентам с максимальной памятью. Вводится понятие сложности стратегии. Показано, что стратегии, побеждающие в естественном отборе, имеют максимальную или близкую к максимуму сложность.

Ключевые слова: дилемма заключенного, эволюция, популяция, стратегии, сложность, кооперация.

В рамках узагальненої «дилеми ув'язнених» розглянута еволюція популяції з повним набором стратегій поведінки, обмежених тільки глибиною пам'яті. Кожне наступне покоління популяції послідовно втрачає найбільш невідгідні стратегії поведінки попереднього покоління. Показано, що збільшення пам'яті в популяції еволюційно вигідно. Переможці еволюційного відбору незмінно виявляються агентами з максимальною пам'яттю. Вводиться поняття складності стратегії. Показано, що стратегії, які перемагають в природному відборі, мають максимальну або близьку до максимуму складність.

Ключові слова: дилема ув'язнених, еволюція, популяція, стратегія, складність, кооперация.

The evolution of the population that possesses the full range of behavioral strategies and is limited only by the depth of memory has been considered within the framework of the generalized "Prisoners' Dilemma". Each successive generation in this population consistently loses the most disadvantageous behavior strategies pertained to the previous generation. Increase of memory depth is shown to be evolutionarily advantageous for the population. The winners in evolutionary selection always have the maximum memory. The concept of the strategy complexity has been introduced. It is shown that the strategies, which win in natural selection, have the maximum or almost maximum complexity.

Key words: prisoner's dilemma, evolution, population, strategy, complexity, cooperation.

1. Введение

Понимание природы возникновения кооперативного поведения в разных системах интересует исследователей уже на протяжении нескольких десятилетий. Эволюционная теория игр [1]-[3] обеспечивает гибкие основания и эффективные методы для изучения появления сотрудничества. Среди многих игровых моделей, которые используются для объяснения кооперативного поведения, особое место занимают игры, которые можно рассматривать как обобщение дилеммы заключенных [4], [5]. Выбор матрицы выплат (выигрышей) в этом случае определяется простым практическим соображением. Кооперация всегда требует дополнительных затрат ресурсов по сравнению с отказом от

кооперації. Склонность к экономии ресурсов или усилий проявляется в матрице выплат. Полагается, что при каждом отдельном взаимодействии индивидуальный выигрыш при отказе от кооперации превышает выигрыш при согласии на кооперацию. На каждом этапе процесса эволюции (или поколения) популяция отказывается от применения наименее успешных стратегий предыдущего поколения.

Эти игры служат в качестве парадигмы, которая привела к открытию механизма кооперативного поведения, как в теории, так и экспериментальных наблюдениях. Начиная с работы Новак и Мей [7], эволюционные игры были широко изучены в структурированных популяциях, в том числе на регулярных решетках [8]-[13] и сложных сетях [14]-[23]. Используя такой подход, можно выяснить появление множества разнообразных свойств у эволюционирующих популяций. Под эволюционными популяциями, следуя Дарвину, будем понимать множество объектов, которые подчиняются следующим принципам. Это 1) принцип наследственности, 2) принцип изменчивости и 3) естественного отбора.

В этой работе мы проанализируем влияние памяти на процесс эволюции. Если действие объекта зависит не только от наблюдаемой ситуации, а и от предшествующих событий, то будем считать, что объект обладает памятью. В этом смысле большинство биологических объектов обладают памятью. Основной вопрос, который мы будем обсуждать в работе, это насколько выгодно для популяции увеличивать память в процессе эволюции и к каким следствиям это приводит. Естественно, глубина памяти объектов популяции и определяет число всех возможных стратегий, доступных популяции. Важным элементом работы является конкуренция в исходной популяции всех возможных стратегий с ограниченной сверху памятью.

Второй вопрос, который затрагивается в работе, связан с обсуждением свойств конкурирующих стратегий, приводящих к изменению доминирующих стратегий популяции в процессе эволюции. В качестве характеристики стратегий вводится и используется их сложность. Основной вопрос сводится: является ли сложность стратегий эволюционно выгодной? На интуитивном уровне ответы на эти вопросы кажутся очевидными. При моделировании взаимодействия стратегий использовалось одночастичное приближение, при котором все агенты популяции, исповедующие одну из возможных стратегий, объединялись в единый кластер. Взаимодействие осуществлялось между кластерами или стратегиями. Другими словами, взаимодействуют именно стратегии. При этом каждая стратегия взаимодействует с каждой, включая себя. Рассмотрено 3 типа популяций. Популяции без памяти (0), популяции с глубиной памяти 0 и 1, а также 0; 1 и 2.

В каждом случае в начальной популяции присутствуют все стратегии с памятью, не превышающей указанную. Так, например, при глубине памяти 2 присутствуют все стратегии с памятью 2, 1 и 0. В результате численного моделирования показано, что увеличение памяти в популяции эволюционно выгодно. Победители эволюционного отбора неизменно относятся к агентам с максимальной памятью. Стратегии, побеждающие в естественном отборе, имеют максимальную или близкую к максимуму сложность. Попутно

обнаружено, что в таких популяциях победившие стратегии относились к «добропорядочным» стратегиям, склонным к кооперации, то есть такие, в которых акты кооперации превалируют над отказами сотрудничать. В определенном смысле можно сказать, что кооперативное поведение в таких случаях устанавливается самопроизвольно. Можно ожидать, что в этом и состоит универсальная тенденция. В популяциях с конечной ограниченной сверху памятью конкуренция всех возможных стратегий в начальной популяции приводит к доминированию в ходе эволюции «добропорядочных» стратегий. Дальнейшее увеличение глубины памяти приводит к новой проблеме, когда число агентов популяции окажется меньше числа возможных стратегий. Последствия этого также обсуждаются в заключении этой работы.

2. Описание стратегий с памятью

Рассмотрим все стратегии, которые используют память. Введем пространство таких стратегий. Стратегия это правило, по которому определяется ход по известным значениям ходов противника. Для их классификации используем глубину памяти. Под глубиной памяти будем понимать число предыдущих ходов, которые использует стратегия для выполнения хода. Начнем с простейших стратегий, которые не используют память. Это означает, что такие стратегии осуществляют ход, основываясь только на наблюдаемом ходе противника. В этом случае возможный наблюдаемый ход это 0 или 1 (0 = отказ, 1 = кооперация). Соответственно, для описания отдельной стратегии нам нужно описать определенное правило ответа на эти хода. Начнем со способа записи некоторой стратегии при глубине памяти 0. Ясно, что такую стратегию можно задать следующей таблицей

Возможный ход противника	0	1
	↓	↓
Ответ стратегии	0	0

Легко понять, что если договориться о порядке записи возможных значений ходов противника, например, в лексикографическом порядке (как в таблице в верхней строке), то для описания правил действия стратегии достаточно знать нижнюю строку или последовательность нулей и единиц. В приведенном выше примере это последовательность «00». Так как каждой стратегии соответствует определенная последовательность, то ее можно использовать и в качестве имени соответствующей стратегии. В этом случае имя и определяет правило действия стратегии. Таким образом, стратегии с нулевой глубиной памяти определяются 0,1-последовательностями из двух элементов. Тогда имя каждой стратегии с нулевой глубиной памяти определяется двоичным числом с двумя знаками.

Ясно, что имена всех стратегий при отсутствии памяти это числа от 00 до 11, откуда очевидно, что таких стратегий 4 (00, 01, 10, 11). В качестве примера приведем стратегию с именем 10, которая действует по следующим правилам

Возможный ход противника	0	1
	↓	↓

Ответ стратегии	1	0
-----------------	---	---

Среди стратегий с нулевой глубиной памяти две тривиальные. Это крайне агрессивная стратегия 00 и бездумно соглашательская 11. Остается только обсудить выбор первого хода, который осуществляется не по указанным выше правилам. Его выбор происходит из двух вариантов. Первый ход может быть 1 или 0. Поэтому удобно включить первый ход в описание стратегии. Для этого укажем его в скобках перед именем стратегии. Например, имя [1]10 и [0]10 означает, что первый ход соответственно 1 и 0, и дальнейшие действия осуществляются согласно стратегии 10. Удобно рассматривать каждую стратегию с указанием первого хода как отдельную стратегию. Тогда при отсутствии памяти число всех стратегий равно 8.

Рассмотрим теперь все стратегии с памятью об одном предыдущем ходе. Такие стратегии для определения хода должны учитывать два хода противника. Предыдущий и наблюдаемый. Снова расположим все возможные пары ходов противника в лексикографическом порядке:

Возможный ход противника	00	01	10	11
	↓	↓	↓	↓
Ответ стратегии

Для описания стратегии каждой паре ходов противника нужно сопоставить 0 или 1. Другими словами, заменить точки в таблице на символы 0 или 1. Снова при фиксированном порядке записи возможных ходов противника каждая стратегия определяется теперь 0,1-последовательностью, но теперь из 4 элементов. Имя стратегии удобно выбрать совпадающим с правилом ее действия. Таким образом, имена стратегий с глубиной памяти 1 совпадают с двоичным числом с 4 знаками, или с 0,1-последовательностью с 4 элементами.

Тривиальная агрессивная стратегия называется 0000. Всего таких стратегий снова столько, сколько чисел от 0000 до 1111. Другими словами их 16. Абсолютно аналогично можно определить стратегии с глубиной памяти k . Такие стратегии будут определяться двоичным числом с 2^{k+1} знаками. Таким образом, пространство стратегий с глубиной памяти k составляют 0,1-последовательности 2^{k+1} элементов.

Однако приведенное выше описание стратегий с глубиной памяти $k \geq 1$ не является полным. Причина в том, что после первого хода противника мы знаем только одно наблюдаемое значение и отсутствует значение предыдущего хода. Поэтому нет данных для применения указанных правил стратегии. Таким образом, мы должны указать правило, как делать ход при неполноте данных. Для этого естественно использовать одну из стратегий с памятью 0. Другими словами, следует указать стратегию, не использующую память, которую будем применять, прежде чем появится информация о предыдущем ходе противника. Тогда полное число стратегий естественно увеличивается и меняется имя стратегии. В имени мы должны указать сначала стратегию определения первого хода при отсутствии данных о предыдущем ходе (т.е. имя стратегии с памятью 0) а затем имя стратегии с памятью 1. Таким образом, название (и правила)

стратегии с памятью об одном предыдущем ходе противника выглядит, например, как [01]01110. Первые две цифры в скобках это имя (и правила) стратегии с памятью 0, а четыре последующие - правила ходов игрока с памятью об одном ходе противника. Для удобства стратегии с меньшей памятью будем приписывать слева и заключать в квадратные скобки. Рассматривая каждое такое правило как отдельную стратегию, можно легко вычислить число таких стратегий. Следовательно, общее число стратегий с памятью об одном предыдущем ходе противника равно $2^2 \times 2^4$. Кроме этого каждая стратегия может начинать игру с некоторого первого хода. Другими словами, она может начать с 0 или с 1. Удобно рассматривать стратегии, совершающие разные первые хода 0 или 1 как разные стратегии. Тогда число стратегий увеличится вдвое $2 \times 2^2 \times 2^4 = 128$. Имя таких стратегий будет выглядеть, например, как [0][01]0111, эта стратегия начнет игру с хода 0. В частности, известная стратегия «око за око» в этих обозначениях соответствует стратегии [1][01]0011. Следует отметить, что при знании глубины памяти, в данном случае равной $k = 1$, можно даже не использовать скобки. Даже при их отсутствии по известной записи стратегии однозначно устанавливается правило действия стратегий.

Абсолютно аналогично перечисляются все стратегии с памятью о двух ходах противника, или в общем случае с памятью о k ходах противника. Важно подчеркнуть, что число стратегий $N_k = 2 \times 2^2 \times 2^3 \dots 2^{2^{k+1}} = 2^{(2^{k+2}-1)}$ растет сверх экспоненциально с увеличением глубины памяти k .

Вернемся к рассмотрению стратегий с глубиной памяти 1. Обратим внимание, что среди этих стратегий присутствуют стратегии с нулевой глубиной памяти. Действительно, если стратегия действует одинаково при различных предыдущих ходах противника, то она фактически не использует информацию о предыдущем ходе или теряет память о предыдущем ходе. Соответственно, такие стратегии совпадают со стратегиями с нулевой глубиной памяти. Правила действий стратегий эквивалентных стратегиям с нулевой памятью определяются следующей таблицей

Возможный ход противника	00	01	10	11
	↓	↓	↓	↓
Ответ стратегии	x_1	x_2	x_1	x_2

Где x_1 и x_2 принимают значения $\{0,1\}$. Легко заметить из таблицы, что такие стратегии действуют независимо от предыдущего хода противника. Это означает, что стратегии $x_1x_2x_1x_2$ эквивалентны стратегиям с нулевой памятью x_1x_2 . Таким образом, среди стратегий с именами четырехзначных двоичных чисел присутствуют стратегии эквивалентные всем стратегиям с отсутствием памяти. Так стратегии 0000 ~ 00, 0101 ~ 01, 1010 ~ 10 и 1111 ~ 11. Следовательно, при записи имен стратегий четырехзначными двоичными числами среди них присутствуют все стратегии с глубиной памяти меньше или равной 1. Легко понять, что это удобное свойство сохранится и при описании

стратегий с большей глубиной памяти. Так имена стратегии с глубиной памяти k содержат все стратегии эквивалентные стратегиям с глубиной памяти $k-1, \dots, 0$. Это свойство следует учитывать при проведении игр между стратегиями. Таким образом, мы определили и перечислили все стратегии с определенной конечной глубиной памяти. Поэтому далее, если говорится о стратегиях с глубиной памяти k , то будем помнить, что в них включены все стратегии с меньшей глубиной памяти. Среди этих стратегий присутствуют как примитивные, так и сложные стратегии. Теперь обсудим более детально понятие сложности стратегий.

3. Сложность стратегий

В предыдущем разделе было показано, что стратегии описываются 0,1-последовательностями определенной длины или содержащими определенное число членов. Так для глубины памяти 0 таких последовательностей 4, а для глубины памяти k их $N_k = 2^{2^{k+1}}$, длина имен таких стратегий равна 2^{k+1} . Разумеется, среди этих стратегий присутствуют стратегии эквивалентные всем стратегиям с меньшей глубиной памяти. Число таких стратегий также определяется их глубиной памяти. Для последующих целей обсудим такое свойство 0,1-последовательностей как сложность. Это исключительно глубокое понятие, которое находит важные применения в физике и математике. В частности, понятие хаотичности тесно связано с понятием сложности (см. например [24]). В современной литературе существует множество различных определений сложности [25]. Однако большинство из них основаны на трех общих идеях: 1) как сложно объект описать, 2) как сложно его создать и 3) как сложно он организован.

В работе используем подход к описанию сложности конечных 0,1-последовательностей, который основан на сравнительной сложности функций, в частности многочленов. В основе лежит понимание, что многочлены более высокой степени сложнее, чем более низкой степени.

Для более последовательной формулировки сложности используем, следуя [26], теорию монад. Под монадой будем понимать конечное множество M и отображение A этого конечного множества в себя. Другими словами, каждой точке этого конечного множества сопоставляется другая его точка. Монадам сопоставляется граф, вершины которого конечное множество M , а ориентированные ребра связывают вершины в соответствии с их отображением A . Из каждой вершины x в этом графе выходит ровно одно ребро, и оно ведет в вершину Ax .

В нашем случае точками являются стратегии или 0,1-последовательности конечной длины $n = 2^{k+1}$. Тогда множество M таких последовательностей, можно представлять как множество вершин единичного n -мерного куба. Так, например, стратегии с нулевой памятью являются вершинами единичного квадрата.

0,1-последовательности $x = x_1x_2\dots x_n$ можно рассматривать и как функцию, которая сопоставляет целочисленному значению i значение $x_i \in \{0,1\}$. Как правило, при записи последовательности мы не будем использовать в качестве разделителя запятую. При выбранном бинарном алфавите это не приводит к недоразумениям. Введение сложности функций восходит еще к идеям Ньютона. Для этого он предложил использовать разности функций. В нашем случае определим такое отображение разностным оператором $A: M \rightarrow M$

$$y = Ax,$$

где элементы последовательности $y = y_1y_2\dots y_n$ определяются разностями

$$y_i = x_{i+1} - x_i.$$

Здесь $i = 1, 2, \dots, n$ номер элемента в последовательности. При вычислении элементов последовательности y будем использовать условие цикличности последовательности x , считая $x_{n+1} = x_1$. Другими словами, можно говорить о периодических последовательностях периода n . Таким образом, приходим к монаде стратегий. Стратегия x отображается в стратегию y . Рассмотрим графы стратегий, начиная с малой глубины памяти. Главное свойство этих графов состоит в том, что из каждой вершины выходит только одно ребро. Для последовательностей длины n граф содержит 2^n вершин. Начнем с нулевой глубины памяти $k = 0$. Такие стратегии совпадают с последовательностями двух элементов $n = 2^{0+1}$. Граф стратегий, соответствующий этому случаю, приведен на Рис.1. Здесь в целях компактности вершины показаны окружностями, внутри которых закодированы в десятичной системе исчисления имена стратегий. Так последовательность 00 обозначена как 0, вершина 01 как 1, вершина 10 как 2 и, наконец, 11 как 3.

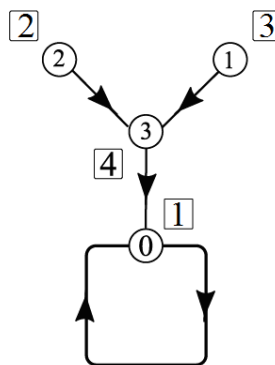


Рис.1. Граф стратегий с нулевой памятью (в кружках закодированы имена стратегий, в квадратах - их места при соревновании в первом поколении).

Характерной особенностью этого графа является наличие цикла единичной длины. Длина цикла равна числу вершин, входящих в цикл. Обозначение для этого графа $O_1 * T_4$ используем в соответствии с [26]. Где O_1 означает цикл

єдиничної довжини, а T_4 - бінарне дерево з 4 вершинами. Можна довести, що граф стратегій буде мати лише один цикл O_1 .

Вернемося тепер до спостереження Ньютона, яке полягало в тому, що якщо функція константа, то перші різниці будуть нулями. Якщо перші різниці будуть константою, то функція буде многочленом першої ступеня. А якщо другі різниці константа, то не більше другої... Це спостереження дозволяє сформулювати складність, як відстань вершин графа від кореня дерева або циклу [26]. Чим далі вершина від кореня дерева, тим складніше стратегія. Таким визначенням складності ми будемо користуватися в цій роботі.

Відповідно до цього серед стратегій з нульовою пам'яттю найпростішою стратегією є найагресивніша стратегія 00 (див. Рис.1). Ця стратегія відповідає постійній функції аргумента i , яка приймає нульове значення. Більш складною стратегією 11 - бездумно погоджувальна стратегія. Ця стратегія збігається з постійною функцією аргумента i , яка приймає значення 1. «Диференціювання» А в цій функції переводить її в функцію, яка приймає 0 значення. Стратегії 01 і 10 визначають лінійні функції. Насправді, стратегія 01 відповідає лінійній функції $x(t) = (t + 1) \bmod 2$, а стратегія 10 лінійній функції $x(t) = t \bmod 2$. Легко перевірити, наприклад, що значення функції $x(t) = t + 1 \bmod 2$ при цілих t дає періодичну послідовність з періодом 2 і $x_1 = x(1) = 0$, $x_2 = x(2) = 1$. Аналогічно легко перевірити, що послідовність 10 відповідає значенням $x(t) = t \bmod 2$ в цілих точках $x_1 = x(1) = 1$, $x_2 = x(2) = 0$. Це збігається з інтуїтивно зрозумілим висновком, що постійні функції простіші лінійних. Лінійні функції - окремий випадок многочленів ступеня менше p . Як було доведено ще Ньютоном, якщо функція задовольняє $A^p x = 0$, то x многочлен ступеня менше p . Це властивість ми будемо використовувати, нижче для визначення многочленів, що відповідають більш складним стратегіям.

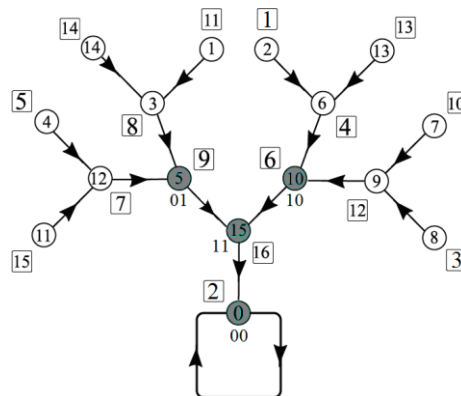


Рис.2. Граф стратегій з глибиною пам'яті 1 і 0 (в кружках закодировані імена стратегій, в квадратах - їх місця при сорівнованні в першому поколенні).

Перейдем теперь к монаде стратегий с глубиной памяти 1. Ее граф приведен на Рис.2. Вершины графа имеют имена от 0000 до 1111. Легко заметить, что структура графа соответствует $O_1 * T_{16}$. Обсудим расположение на этом графе стратегий, эквивалентных стратегиям с нулевой глубиной памяти. Эти стратегии на Рис.2 показаны вершинами, закрашенными серым цветом. Рядом с ними серым цветом напечатаны имена эквивалентных им стратегий с нулевой памятью. Таким образом, эти стратегии являются самыми простыми в этой монаде. Это в точности совпадает с тем, что сложность стратегий как функций i возрастает по мере удаления от корня графа. Остальные стратегии удалены от корня дальше и, соответственно, более сложные. Можно убедиться, что следующий уровень графа соответствует многочленам степени 2, а верхний многочленам степени 3. Действительно, действуя на вершину 5-го уровня $x^{(5)}$ оператором A по определению, перейдем в вершину 4-го уровня $Ax^{(5)} = x^{(4)}$. Это очевидное следствие устройства дерева. Аналогично вершина $x^{(4)}$ под действием A спустится на уровень ниже $Ax^{(4)} = x^{(3)}$. Снова повторяя действие, перейдем на уровень ниже $Ax^{(3)} = x^{(2)}$ и, наконец, получим $Ax^{(2)} = x^{(1)} = 0$. Объединяя эти равенства, получим $A^4 x^{(5)} = 0$. Можно сказать, что 0 является аттрактором движений на графе, индуцированных отображением A . Тогда в соответствии с доказательством Ньютона вершина пятого уровня $x^{(5)}$ совпадает с многочленом степени меньше 4.

Теперь обсудим граф монады, соответствующий стратегиям с глубиной памяти k . В этом случае длина 0,1-последовательности, определяющей стратегии равна $n = 2^{k+1}$. Общее число таких стратегий $N_k = 2^{2^{k+1}}$. Можно доказать, что при $n = 2^{k+1}$ структура графа стратегий совпадает с $O_1 * T_{2^{k+1}}$.

Естественно, у корня по-прежнему располагаются стратегии, эквивалентные стратегиям с нулевой глубиной памяти. Выше располагаются стратегии с глубиной памяти 1, и так до уровня, соответствующего последнему уровню графа стратегий с глубиной $k-1$, т.е. $O_1 * T_{2^{2^k}}$. Таким образом, число стратегий, использующих глубину памяти k , равно $2^{2^{k+1}} - 2^{2^k} = 2^{2^k} (2^{2^k} - 1)$. По мере удаления от корня стратегии становятся все более сложными и соответствуют многочленам все более высокой степени. В качестве примера на Рис.3 приведем граф соответствующий стратегиям длины $n = 2^3 = 8$ ($k = 2$), который совпадает с $O_1 * T_{256}$. Таким образом, сложность стратегий можно определять по значению уровня графа, которому принадлежит вершина, соответствующая этой стратегии.

Важно отметить, что число возможных стратегий с ростом памяти увеличивается сверхэкспоненциально. Это приводит к глубоким вычислительным трудностям при исследовании взаимодействия таких стратегий, которые связаны с недостатком ресурсов. Кроме этого интересно отметить, что количество реализуемых стратегий в конечных системах

ограничено скорее количеством участников, а не числом возможных стратегий. Другими словами, в конечных системах в процессе эволюции всегда может появиться и использоваться новая стратегия. Жизнь полна новыми идеями. Этот вывод играет важную роль при численном моделировании взаимодействия конечного числа объектов популяции.

4. Взаимодействие стратегий

Жизнь в популяции и ее эволюция в определенной степени определяется характером взаимодействия стратегий объектов популяции. Наиболее простой случай это парное взаимодействие стратегий. Существует много вариантов осуществления такого взаимодействия. Самый простой вариант - это каждая стратегия взаимодействует с каждой, включая себя. Этот вариант взаимодействия можно осуществить при относительно небольшом числе объектов. Причина этого в конечности времени жизни объекта популяции.

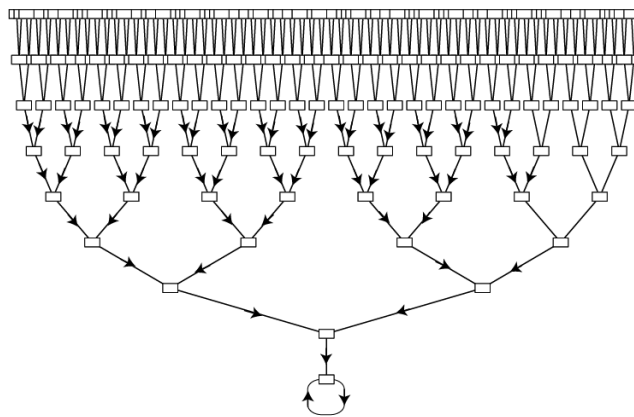


Рис.3. Граф стратегий с глубиной памяти 2.

Действительно, на взаимодействие пары стратегий затрачивается некоторое характерное время Δt и, соответственно, на взаимодействие n стратегий друг с другом будет затрачено время $n^2 \Delta t$. При увеличении n время $n^2 \Delta t$ может превысить время жизни объекта. Другой способ парного взаимодействия, когда противник выбирается случайным образом среди всего множества стратегий, предполагая их равновероятными. Еще один общий способ, не использующий случайность, можно осуществить, используя сеть взаимодействий. В графе этой сети будут соединены взаимодействующие стратегии. Ее можно обобщить, учитывая взаимодействия удаленных вершин с некоторым весом, включая вероятностный. Можно также учитывать пространственное структурирование популяций [2], [8], [12], в этом случае в пространстве могут возникать геометрические структуры сотрудничества [7]. Еще одно важное обстоятельство, которое влияет на характер взаимодействия стратегий, уже отмечалось ранее. Это конечность множества объектов, составляющих популяцию. В этом случае количество стратегий может значительно превышать количество объектов общества. Тогда взаимодействие может происходить

только между частью стратегий. В этой работе будем предполагать, что объект в процессе жизни не меняет стратегию и взаимодействует с каждой стратегией популяции включая себя. Другими словами, можно сказать, что рассматривается одночастичное приближение взаимодействия стратегий - без учета числа носителей стратегии.

Для того чтобы установить результат взаимодействия стратегий, определим матрицу выплат.

Напомним, что дилемма заключенного двух игроков состоит в том, что каждый игрок может выбрать между сотрудничеством (1) или отказом (0). В зависимости от стратегии соперника, выбранный игрок получает a_{11} , если оба сотрудничают; a_{22} - если оба отказываются; a_{12} - если выбранный сотрудничает и противник отказывается; и a_{21} - если выбранный отказывается а противник сотрудничает, где $a_{21} > a_{11} > a_{22} > a_{12}$ и $2a_{11} > a_{21} + a_{12}$. В работе мы используем значения матрицы выплат Аксельрода M_1 [27],

A\B	кооперация	отказ
кооперация	3,3	0,5
отказ	5,0	1,1

Таким образом, результат взаимодействия стратегий будет определяться этой матрицей. Используя взаимодействие между всеми стратегиями с конечной глубиной памяти, установим, прежде всего, получают ли стратегии с большей памятью эволюционное преимущество. Кроме этого интересно изучить, как влияет сложность стратегий на эволюционные преимущества стратегий. Другими словами, есть ли причина усложнения систем.

Ниже смоделируем процесс эволюции стратегий с памятью. Для простоты принцип изменчивости учтем в простом варианте, предполагая, что в популяции реализованы все стратегии с глубиной памяти меньше или равной k . Так как в этом случае учтены все стратегии, то в процессе эволюции не будут появляться другие стратегии. Принцип наследственности будет состоять в передаче выигрышных стратегий потомкам. Принцип естественного отбора реализуем исключением или уничтожением проигрышных стратегий. Естественно, такой упрощенный вариант эволюции можно усложнить многими способами. Некоторые из них обсудим позже.

Естественный отбор реализуем следующим образом. Пусть все стратегии взаимодействуют друг с другом по круговой системе в соответствии с итерированной игрой с дилеммой заключенных. Число взаимодействий двух стратегий в одном поколении выберем одинаковым для всех, равным n . Собственно выбор большого числа взаимодействий между двумя стратегиями призван исключить влияние первого хода. В результате такого соревнования стратегии набирают очки в соответствии с приведенной выше матрицей выплат. После этого проигравшая стратегия, а возможно и несколько стратегий, набравших минимальное число очков, выбывают из следующего поколения. Далее очки эволюционных преимуществ обнуляются, и проводится следующий

круг взаимодействий между оставшимися стратегиями, соответствующий формированию стратегий нового поколения.

5. Мир без памяти

Начнем с взаимодействия стратегий с глубиной памяти 0 в рамках одного поколения. Другими словами, стратегии не появляются и не исчезают в этом поколении. Исходно в популяции присутствуют все возможные стратегии, не использующие память. Пусть каждая стратегия взаимодействует с другой стратегией $n = 100$ раз в рамках итерированной дилеммы заключенных. Набор очков определяется матрицей выплат, приведенной выше, и суммируется. Каждая стратегия в одной игре отвечает на первый ход выбранного противника, а в другой начинает, делая первый ход в игре с тем же противником. В тех играх, которые она начинает, есть две возможности сделать первый ход - это выбрать 0 или 1. Стратегия, делающая определенный первый ход, рассматривается как отдельная стратегия (см. раздел 2). После проведения игр между всеми такими стратегиями, включая себя, стратегии распределяются по занятым местам в соответствии с набранными очками. Первое место занимает стратегия, набравшая самую большую сумму очков. Далее можно исключить влияние первого хода, усредняя результаты стратегии, отличающиеся только первым ходом. Полученное среднее значение приписывается соответствующей стратегии. По этим средним данным устанавливается число очков, набранных каждой стратегией с глубиной памяти 0. Распределение стратегий по местам показано на Рис.1 в квадратиках возле каждой вершины графа. Согласно данным численного моделирования среди стратегий без памяти в первом поколении побеждает самая простая и агрессивная стратегия 00. Последнее место занимает бездумно сотрудничающая стратегия 11, имеющая большую сложность, чем стратегия 00. Самые сложные стратегии 10 и 01 в этой категории (см. Рис.1) занимают соответственно 2 и 3 места.

Увеличение числа взаимодействий между стратегиями до $n = 500$ не влияет на распределение мест (см. Рис.4).

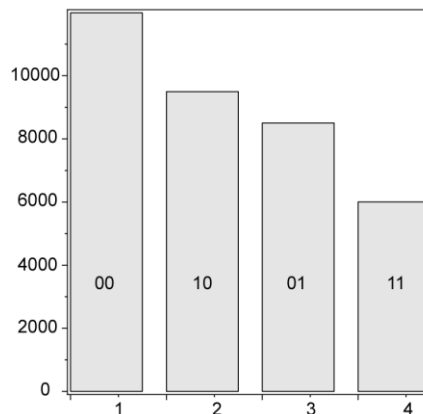


Рис.4. Набор очков в первом поколении для стратегий с нулевой памятью при $n = 500$ (имя стратегии указано в соответствующей колонке гистограммы).

Таким образом, в мире без памяти в первом поколении самая выгодная стратегия - это самая примитивная и самая агрессивная. Смоделированное взаимодействие стратегий описывает набор очков эволюционных преимуществ в течение одного поколения. Следующее поколение будет определяться естественным отбором, который приводит к «вымиранию» проигравшей стратегии. Выбор проигравшей стратегии можно осуществить по-разному. Можно отбраковывать стратегии с учетом первого хода или отбрасывать стратегии 11 независимо от первого хода. В последнем варианте уменьшается число поколений в процессе эволюции до выхода на доминирующую стратегию популяции. Начнем с отбрасывания проигравших стратегий без учета первых ходов. Тогда во второе поколение после репликации перейдут в силу естественного отбора только 3 стратегии 00, 10 и 01. Другими словами, отбраковываются стратегии [0]11 и [1]11. Теперь аналогичная игра будет проводиться между этими оставшимися стратегиями. Набранные очки предыдущего поколения зануляются. Набор очков эволюционных преимуществ во втором поколении распределяются следующим образом

Стратегия	Очки	Сложность
00	1399.5	0
01	1101.5	2
10	905.5	2

Во втором поколении по-прежнему выгодна самая агрессивная и примитивная стратегия. Естественный отбор отбраковывает проигравшую стратегию 10 и в третье поколение передаст только две стратегии. Снова результат соревнования этих стратегии 3-го поколения определяется набором очков эволюционных преимуществ этими оставшимися стратегиями. Результат соревнований приведен в таблице ниже.

Стратегия	Очки
01	651.5
00	409.5

Замечательным результатом набора очков эволюционных преимуществ в этом поколении является проигрыш самой примитивной и агрессивной стратегии. Это означает, что в четвертое поколение естественный отбор передаст наиболее сложную стратегию 01 (см. Рис.1), которая оказывается и добропорядочной. Эту стратегию можно назвать «око за око» среди стратегий с нулевой глубиной памяти. Таким образом, даже в мире без памяти эволюция приводит к выживанию наиболее сложной и добропорядочной стратегии. В определенном смысле это неожиданное следствие эволюции. Далее стадии, на которых в популяции присутствует самая примитивная и агрессивная стратегия, будем называть агрессивным состоянием популяции. Интересно отметить, что агрессивное состояние популяции, когда побеждала самая агрессивная и примитивная стратегия, заняло 3/4 доли всего времени эволюции до выхода на стационар с одной стратегией.

Обсудим влияние на эволюцию первого хода. Кажется естественным, что его влияние с увеличением числа ходов при соревновании двух стратегий

уменьшается. Действительно, суммарный выигрыш S_n при числе ходов n состоит из двух вкладов s_0 - это число очков, получаемых после первого хода, и набора очков уже с использованием стратегии. Пусть стратегия, начиная со второго хода, в среднем за ход набирает \bar{q} очков. Тогда суммарный выигрыш равен $S_n = s_0 + \bar{q}(n-1)$ и при больших $n \gg 1$ получаем

$$\frac{S_n}{n} = \frac{s_0 - \bar{q}}{n} + \bar{q} \tag{1}$$

Учитывая, что s_0 может принимать конечное значение, легко заметить, что вклад первого хода в среднее значение выигрыша за один ход должен быть мал. На Рис.5 показана зависимость от n среднего выигрыша за один ход худшей и лучшей стратегий с глубиной памяти 0. Точками показаны значения, полученные численно. Исходя из этих наблюдений можно считать, что с ростом n влияние первого хода исчезает. Для стратегий с нулевой глубиной памяти уже при $n \sim 100$ этим влиянием можно пренебречь. Следует ожидать, что по аналогичной причине влияние первых ходов будет незначительным и для больших глубин памяти.

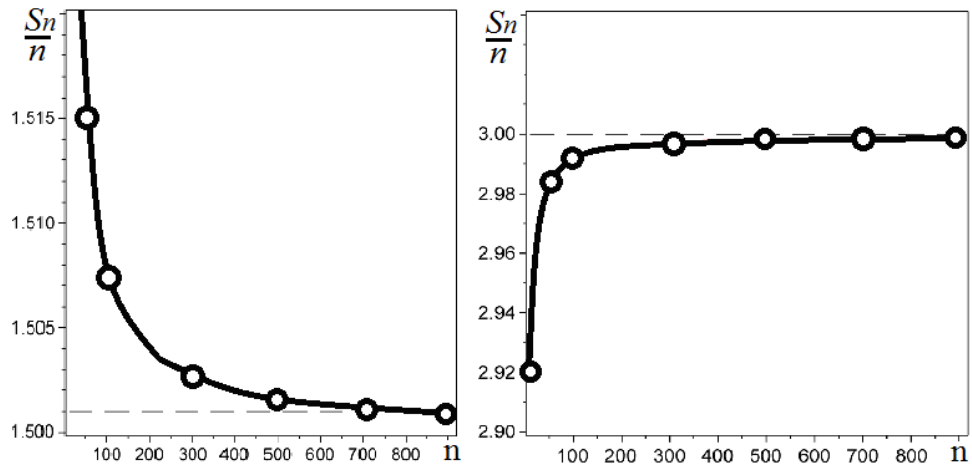


Рис.5. Зависимость от n выигрыша (1) для худшей стратегии I1 с $\bar{q} = 1.500$ и $s_0 - \bar{q} = 0.8$ (слева) и лучшей стратегии O1 с $\bar{q} = 3.00$ и $s_0 - \bar{q} = -0.8$ (справа).

Интересно отметить, что в мире без памяти характер эволюции стратегий не зависит от выбора матрицы выплат и носит универсальный характер. Так сохраняется распределение стратегий по эволюционным очкам в каждом поколении, а соответственно и порядок их выбывания для других матриц выплат. Численное моделирование эволюции, например, с M_2

A\B	кооперация	отказ
кооперация	2,2	0,3
отказ	3,0	1,1

и с матрицей выплат M_3

A\B	кооперация	отказ
кооперация	4,4	0,7
отказ	7,0	1,1

приводят к совпадающим с описанной выше эволюцией. Естественно, при взаимодействии стратегий отличие состоит только величинах набранных очков.

Вернемся теперь к рассмотрению эволюции с отбраковкой стратегий с учетом первых ходов. Другими словами, после набора эволюционных очков отбраковывается одна стратегия с учетом первого хода. Пусть набор очков определяется матрицей выплат M_3 . В первом поколении минимальное число очков набирает стратегия [1]11. Именно ее и отбракует естественный отбор. После репликации во втором поколении остается 7 стратегий, и конкуренция начинается между ними. Набор очков в этом поколении указан в таблице

место	стратегия	очки	сложность
1	[0][00]	2500	0
2	[1][00]	2487	0
3	[0][10]	2250	2
4	[1][01]	1950	2
5	[0][01]	1655	2
6	[1][10]	1545	2
7	[0][11]	1213	1

Таким образом, в третьем поколении исчезает стратегия [0][11]. В четвертом поколении исчезает [1][10]. В пятом поколении естественный отбор отбраковывает стратегию [0][10], в шестом самую примитивную и агрессивную стратегию [0][00], в седьмом [1][00] и, наконец, в 8 исчезает [0][01]. Соответственно, в мире без памяти эволюцию выигрывает стратегия «око за око» [1][01]. Сложность, выигравшей стратегии максимальна в этом классе стратегий. Рассматривая ход эволюции при такой реализации естественного отбора, можно заметить, что характер эволюции не изменился. Просто удвоилось число поколений в соответствии с числом стратегий. В остальном все протекает по прежнему сценарию. Следовательно, можно использовать более быструю отбраковку проигравших стратегий без учета различия в первых ходах, по среднему набору очков каждой стратегией. Для стратегий с большой памятью это значительно сокращает требуемые для моделирования ресурсы.

6. Мир с глубиной памяти 1

Перейдем теперь к анализу эволюции стратегий с минимальной глубиной памяти 1. Всего таких стратегий 128. Разумеется, в их число входят и 8 стратегий, эквивалентные стратегиям с глубиной памяти 0 (см. Рис.2). Пусть матрица выплат будет M_1 . В первом поколении распределение очков эволюционных преимуществ имеет следующий вид

Табл.1. Распределение стратегий в первом поколении.

место	стратегия	очки	сложность
1	0010	39372.0	4
2	0000	38208.0	0
3	1000	36755.0	4
4	0110	32308.5	3
5	0100	31347.0	4
6	1010	29684.0	2
7	1100	29665.5	3
8	0011	27934.5	3
9	0101	27916.0	2
10	0111	27351.5	4
11	0001	27181.0	4
12	1001	25291.5	3
13	1101	25014.5	4
14	1110	23912.5	4
15	1011	19466.5	4
16	1111	19392.0	1

В крайней правой колонке таблицы приведена сложность соответствующей стратегии (см. раздел 3). Легко заметить, что сложность победившей стратегии в этом поколении максимальна. Проигравшая стратегия имеет малую сложность. На Рис.2 показаны в квадратных рамках места, занимаемые соответствующими стратегиями в первом поколении. Величина сложности совпадает с уровнем дерева, на котором располагается соответствующая стратегия. Стратегии, имеющие сложность меньше или равную 2, совпадают со стратегиями с нулевой глубиной памяти. Легко заметить, что при возникновении памяти самая примитивная и агрессивная стратегия 0000 не является победителем даже в первом поколении. Она занимает 2 место. Однако, как и при отсутствии памяти, последнее место занимает бездумно соглашательская стратегия 1111. Даже такая известная стратегия как «око за око» занимает всего 9 место. Победителем является стратегия максимальной сложности в рассматриваемой категории стратегий. Следует подчеркнуть, что среди отстающих стратегий присутствуют стратегии такой же сложности. Другими словами, сложность стратегии сама по себе еще не гарантирует высокий рейтинг по эволюционным очкам.

Влияние первых ходов на суммарный набор очков с увеличением числа ходов n уменьшается по гиперболическому закону

$$\frac{S_n}{n} = \frac{c}{n} + \bar{q} \quad (2)$$

где c - постоянная, учитывающая вклад 2 первых ходов. На Рис.6 показано сравнение зависимостей, полученных численно с теоретической зависимостью (2). Легко заметить, что именно первый ход определяет значение c . Приведенный характер зависимости на Рис.6 указывает на влияния малого числа ходов n на занимаемые места стратегий. Так, при сравнении итоговых мест всех 256 стратегий для разного числа ходов $n = 100$ и $n = 200$ места отличаются у

более чем половины стратегий. Причина этого эффекта состоит в том, что ряд стратегий набирают близкие значения, и добавление числа ходов приводит к осцилляциям значений в окрестности среднего значения. С увеличением n такая зависимость уменьшается. Например, при $n = 700$ и $n = 900$ занимаемые места отличаются у 22 стратегий.

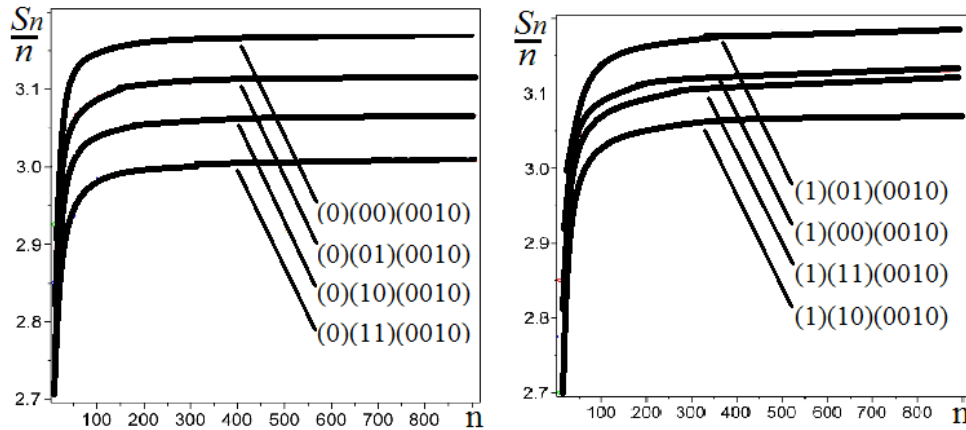


Рис.6. Зависимость от n выигрыша (2) для стратегии, имеющей $c = 3$ (слева) и $c = 5$ (справа).

Далее, как и в предыдущем разделе, эволюция отбраковывает проигравшую стратегию и в новое поколение переходят все стратегии кроме нее. Новое поколение вступает в соревнование за очки эволюционного отбора с нуля. На протяжении шести поколений стратегия 0000 удерживает второе место. Ситуация меняется в седьмом поколении, где 10 оставшихся стратегий располагаются в следующем порядке по набору эволюционных очков.

место	стратегия	очки	сложность
1	0010	18554	4
2	0011	15659.5	3
3	0101	15590	2
4	0110	15013.5	3
5	0111	15001	4
6	0000	14576	0
7	1000	14333.5	4
8	0100	13272	4
9	1010	13038	2
10	0001	12954	4

Из результатов численного моделирования следует, что первое место сохраняется за стратегией максимальной сложности, когда стратегия 0000 скатывается на 6 место среди 10 оставшихся стратегий. Агрессивность в этом поколении снижается. Продолжая эволюционный отбор, получим в 10 поколении

место	стратегия	очки	сложность
1	0011	11215.5	3
2	0101	11174.0	2
3	0010	10809.0	4
4	0111	10735.0	4
5	0110	10639.0	3
6	0100	7755.5	4
7	0000	5892.0	0

Другими словами, в 11 поколении исчезает самая агрессивная и примитивная стратегия 0000. В 15 поколении остаются только 2 стратегии, которые набирают одинаковое число очков эволюционного отбора, и изменение стратегий популяции прекращается. Снова можно сказать, что агрессивная стадия развития популяции с глубиной памяти 1 занимает 11/15 времени эволюции до выхода в стационарное состояние. Интересно заметить, что при появлении памяти стадия агрессивности популяции занимает меньшую часть времени эволюции.

место	стратегия	очки	сложность
1	0011	3600.0	3
2	0110	3600.0	3

Победителями естественного отбора оказались стратегии достаточно сложные, но не имеющие максимальную сложность. Эти стратегии имеют глубину памяти 1. Среди победивших стратегий присутствует стратегия «око за око» [1][01]0011. Стратегия 0011 относится к добропорядочным. Это можно установить, анализируя ее реакцию на ходы противника. Действие стратегии 0110 сомнительной добропорядочности. Следует подчеркнуть, что в результате естественного отбора вымерли все стратегии с нулевой глубиной памяти, не выдержав конкуренции со стратегиями, имеющими память. Кроме этого, можно заметить, что победившие стратегии занимали 4 и 8 места в соревновании первого поколения. Это демонстрирует сложность предсказания стратегий победителей эволюционного отбора на ранних стадиях эволюции. Ниже мы рассмотрим эволюцию стратегий с большей глубиной памяти и проверим, какие выводы сохраняются с ростом глубины памяти.

Обсудим влияние выбора числа игр n между двумя стратегиями. Интересно отметить наличие специфического механизма чувствительности к n , который связан с наличием осцилляций по n , занимаемых мест некоторыми группами стратегий, в частности их парами. Так суммарный набор при $n = 200$ в 12 поколении стратегий 0101 и 0011 равен 18200.0 и 18199.0, соответственно. Разница составляет всего 0.0055%. Ясно, что при увеличении n такой тонкий баланс может разрушиться. Для выбранной матрицы выплат период такого баланса наблюдается от $n = 1000$ до $n = 1011$. Различия на этапе 12 от n , которые обсуждались выше, тем не менее, не сказываются на списке победителей и проигравших в результате эволюции.

Перейдем теперь к обсуждению влияние выбора матриц выплат. Для этого снова смоделируем эволюцию, используя матрицу выплат M_2 . В первом поколении стратегии распределяются по местам следующим образом

Табл.2. Распределение мест в первом поколении.

место	стратегия	очки	сложность
1	0010	25512.0	4
2	0000	25472.0	0
3	1000	23171.0	4
4	0100	21634.0	4
5	0110	21539.0	3
6	0001	19453.0	4
7	0011	19200.0	3
8	0101	19200.0	2
9	1010	19200.0	2
10	1100	19200.0	3
11	0111	18947.0	4
12	1001	16861.0	3
13	1101	16766.0	4
14	1110	15229.0	4
15	1111	12928.0	1
16	1011	12888.0	4

Сравнивая таблицу 1 и 2 можно отметить, что победитель сохраняется, но проигравшей оказывается другая стратегия. Другими словами, могут происходить изменения между некоторыми стратегиями, набирающими близкое число очков с некоторой матрицей выплат. Первые два места удерживаются стратегиями 0010 и 0000 до седьмого поколения. В восьмом поколении стратегия 0000 переходит на 6 место, а 0010 продолжает лидировать. В девятом поколении самая агрессивная и примитивная стратегия занимает последнее место

место	стратегия	очки	сложность
1	0111	8810.0	4
2	0101	8792.0	2
3	0011	8791.0	3
4	0010	8466.5	4
5	0110	8361.5	3
6	0001	7456.5	4
7	0100	7169.5	4
8	0000	6544.0	0

Таким образом, самая примитивная и агрессивная стратегия исчезает уже в 10 поколении. Соответственно, стадия агрессивности популяции занимает $\frac{10}{15}$ долю эволюции до стационарного состояния. Можно считать, что выбор

матрицы выплат может влиять на время существование агрессивной стадии популяции. В 15 поколении остаются две стратегии со следующим набором очков

место	стратегия	очки	сложность
1	0011	2400.0	3
1	0110	2400.0	3

Хотя оставшиеся стратегии в точности совпадают с оставшимися стратегиями в этом поколении при матрице выплат M_1 . Однако, в следующее поколение перейдут обе стратегии как набравшие одинаковое число очков эволюционных преимуществ. В этом смысле стационарное состояние будет состоять из двух стратегий. Разумеется, такой тонкий баланс может разрушаться многими способами. Рассмотрим теперь эволюцию стратегий с глубиной памяти 1 с матрицей выплат M_3 . В первом поколении побеждает та же стратегия 0010, а 0000 занимает второе место. Стратегия 0000 исчезает в 11 поколении, и, следовательно, доля агрессивности популяции такая же, как и при матрице выплат M_1 . В 15 поколении выходят те же стратегии, что и при других значениях матриц выплат

место	стратегия	очки	сложность
1	0011	4800.0	3
1	0110	4800.0	3

Снова стационарное состояние состоит из этих двух стратегий. Основной вывод из моделирования эволюции с разными матрицами выплат состоит в универсальности победивших стратегий, среди которых присутствует стратегия «око за око». Все победившие стратегии имеют максимальную глубину памяти 1 среди участвующих в эволюции стратегий и большую сложность 3 близкую к максимальной.

7. Мир с глубиной памяти 2

Перейдем к случаю стратегий с большей глубиной памяти, достигающей 2. Напомним, что среди всех этих стратегий, как отмечалось ранее, присутствуют стратегии с памятью 2 и стратегии эквивалентные стратегиям с глубиной памяти 1 и 0. Рассмотрим, какие изменения в эволюции стратегий будут наблюдаться в этом случае. Число стратегий с такой глубиной памяти с учетом первого и второго хода составляет 32768 стратегий. Рассмотрим результат численного моделирования соревнований первого поколения, в котором участвуют все стратегии. При подсчете очков эволюционного отбора используем матрицу выплат M_1 , а число ходов при взаимодействии двух стратегий $n = 100$. Каждая стратегия взаимодействует со всеми стратегиями, включая себя. В первом поколении побеждает не самая агрессивная стратегия 00000000, а менее агрессивная 00001000. Самая агрессивная и примитивная стратегия 00000000 в этом поколении занимает уже 10 место по эволюционным очкам. Таким образом, с увеличением памяти в популяциях примитивность и агрессивность

утрачивает преимущества. Стратегия 00001000 удерживает первенство до 75 поколения эволюции. Далее происходит смена победителя стратегией 00001010, которая удерживается на первом месте до 200-го поколения. Далее победителя сменяет стратегия 01111101. Интересно отметить увеличение числа единиц в названиях побеждающих стратегий в процессе эволюции. В определенном смысле это говорит о росте кооперативности таких стратегий. Самая примитивная и агрессивная стратегия исчезает из популяции в 136 поколений. Можно сказать, что агрессивная стадия развития популяции заканчивается в 136 поколений. Учитывая, что эволюция до стационарного состояния занимает 256 поколений, то агрессивная стадия популяции занимает уже $\frac{136}{256} \approx 0.53$ часть

времени эволюции популяции. В результате эволюции в 254 поколения побеждает стратегия 11010001, выигрывая по эволюционным очкам у стратегии 01111111. Выигравшая в ходе эволюции стратегия вполне добропорядочная стратегия. Только один ход отвечает на предложение кооперации отказом и то после предварительного отказа от нее противником.

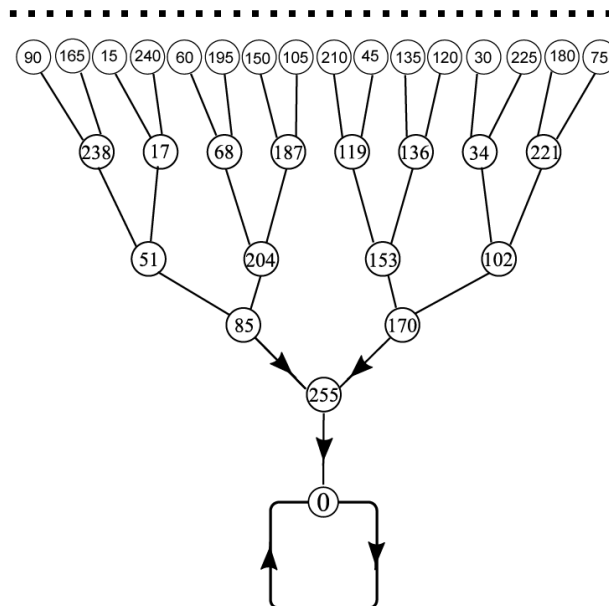


Рис.7. Пять нижних уровней графа (полный граф показан на Рис.3).

Перейдем теперь к обсуждению сложности победивших стратегий, которая определяется уровнем графа (см. Рис.7). Согласно графу стратегий (см. Рис.3), победившая стратегия имеет сложность равную 7. Другими словами, выигрывает в эволюции стратегия, имеющая сложность 7 - близкую к максимальной, но не максимальную. Среди этого класса стратегий максимальная сложность равна 8. Примитивных стратегий, участвующих в эволюции, было 4. Это 00000000, имеющая 0 сложность, одна стратегия

11111111 имеющая 1 сложность, и две стратегии 01010101 и 10101010 сложности 2. В четвертом поколении исчезла стратегия 11111111, следующей исчезла в 62 поколении стратегия 10101010, а затем в 136 поколении 00000000 и, наконец, стратегия 01010101 исчезла в 232 поколении. Эта стратегия, несмотря на свою малую сложность, равную 2, долго удерживалась в популяции. Следует ожидать, что при увеличении глубины памяти эта стратегия будет исчезать раньше. Интересно отметить, что стратегия 00110011, эквивалентная стратегии «око за око», исчезла в 216 поколении и ни в одном поколении не являлась победителем. Таким образом, при достаточной глубине памяти больше 2 стратегия «око за око» не является эволюционно выгодной. Возможно, по этой причине она редко встречается в природных популяциях. На Рис.8 показаны сложности стратегий, победивших на каждом этапе эволюции. Интересно отметить, что сложность выигравших стратегий в каждом поколении не ниже 6 в подавляющем числе поколений. Это соответствует стратегиям, обладающим в точности памятью 2. Стратегии, обладающие памятью глубиной не более 1, имеют сложность меньшую или равную 4. Другими словами, победители в подавляющем числе поколений имеют большую сложность, близкую к максимальной или равную ей.

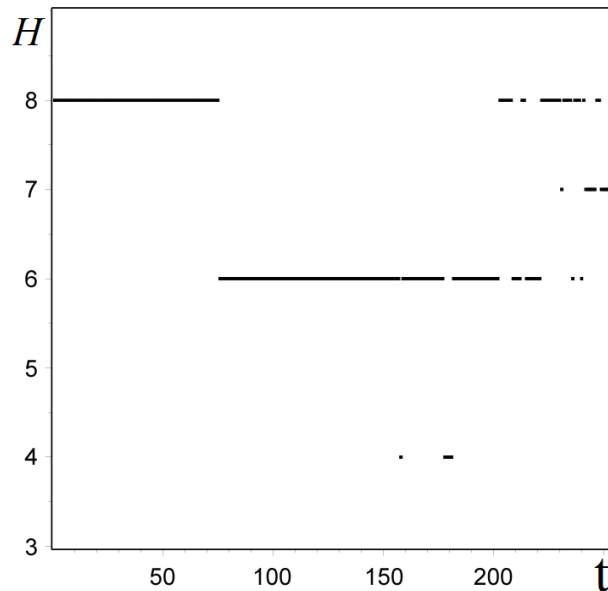


Рис.8. Сложность выигравшей стратегии в поколении t .

Основной вывод состоит в том, что эволюционно выгодные стратегии в любом поколении имеют близкую к максимуму или равную ему сложность.

Рассмотрим теперь влияние выбора матриц выплат на характер эволюции стратегий с глубиной памяти 2. При выборе матрицы выплат M_2 в процессе эволюции выигрывает стратегия 00111101, которая имеет максимальную сложность 8. Примитивные стратегии исчезают в следующем порядке: 11111111 в 7 поколении, 10101010 в 59 поколении, 00000000 в 142 и поколении 01010101

в 230 поколении. Порядок исчезновения примитивных стратегий совпадает с предыдущим случаем. Агрессивная стадия популяции занимает несколько большую долю $\frac{142}{256} \approx 0.56$ времени эволюции. Стратегия 00110011 «око за око» исчезает в 227 поколении и также ни в одном поколении не является победителем. Характер эволюции сложности выигрывающих стратегий в разных поколениях показан на Рис.9 для матриц выплат M_2 и M_3 . В обоих случаях победившая в эволюции стратегия имеет максимальную сложность 8.

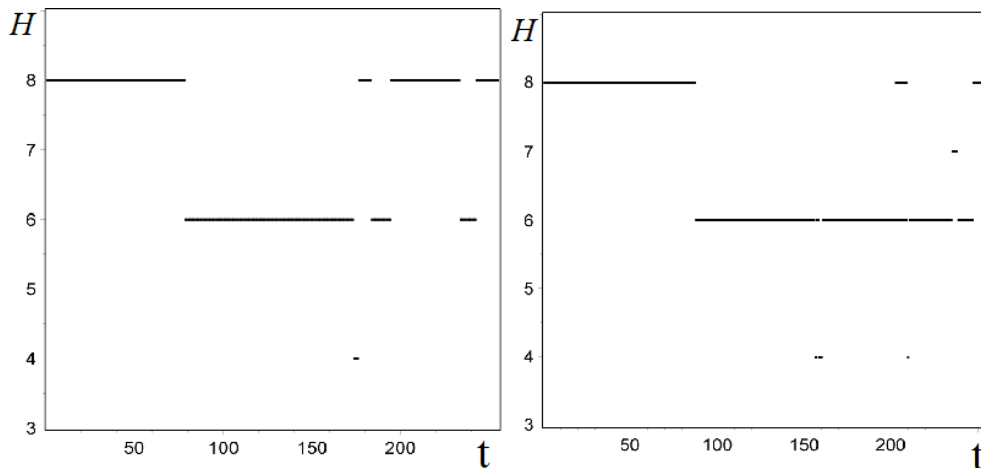


Рис.9. Сложность выигравшей стратегии в поколении t для матрицы выплат M_2 (слева) и M_3 (справа).

Аналогично происходила эволюция стратегий и при матрице выплат M_3 . Примитивные стратегии исчезали в том же порядке: 11111111 в 4 поколении, 10101010 в 67 поколении, 00000000 в 131 и поколении 01010101 в 236 поколении. Другими словами, характер эволюции стратегий популяции сохраняется прежним (см. Рис.9). Побеждает в эволюции стратегия 00111101, имеющая максимальную сложность. Примитивные стратегии были победителями всего в 0.02 доле поколений при M_1 , в 0.012 при M_2 и в 0.16 при M_3 .

8. Выводы

Таким образом, несмотря на признание того, что выигрыш при отказе от кооперации превышает выигрыш при согласии на кооперацию, универсальным правилом эволюции популяций является доминирование сложных стратегий с максимальной глубиной памяти. Причем, как показано выше, эти выигравшие конкурентную борьбу стратегии оказываются в большой степени «добропорядочными» стратегиями, склонными к сотрудничеству, где акты кооперации явно преобладают над отказами. Конкурентная борьба здесь

проявляється в тому, що на кожному етапі еволюції (или в кожному поколенні) популяція відмовляється від застосування стратегій, вигоди яких в наступному поколенні виявилися мінімальними.

В роботі розглянуті еволюції популяцій з стратегіями з трьома значеннями глибини пам'яті 0; 1 і 2. В цих випадках в еволюції можуть брати участь в першому поколенні всі можливі стратегії, включаючи і примітивні, причому деякі примітивні стратегії здатні існувати в таких популяціях тривале час, порівнюване з часом еволюції популяції. Більше того, при глибині пам'яті 2 в $0.01 \div 0.02$ частках поколінь вони навіть перемагають на проміжних стадіях еволюції популяції (див. Рис.8, Рис.9). Зрозуміло, складність цих відносно примітивних стратегій не настільки мала і дорівнює 4, що все-таки відповідає максимальній складності при глибині пам'яті 1. Найпростіші стратегії в таких популяціях з складностями 0; 1; 2 відсутні як переможці в усіх пізніх поколіннях.

Цікаво зауважити, що подібне явище спостерігається і при еволюції стратегій з глибиною пам'яті не вище 1. В цьому випадку серед переможців в різних поколіннях виживають стратегії з максимальною складністю 4 і 3. Однак в невеликій кількості поколінь на проміжній стадії еволюції, тим не менше, присутні примітивні стратегії складності 2, які при глибині пам'яті 0 мали максимальну складність. В частності, для матриці M_2 частка поколінь, в яких перемагає примітивна стратегія з складністю 2, становить 0.08.

З збільшенням глибини пам'яті кількість поколінь, в яких домінують примітивні стратегії, зменшується. Зауважимо також, що інтервал поколінь на початковій стадії еволюції, в яких в популяції присутня абсолютно агресивна стратегія, з зростанням глибини пам'яті помітно скорочується.

Крім того, проведене дослідження поставило і нові питання. Це означає, що природа забезпечує домінування «добропорядкових» і достатньо складних стратегій поведінки суб'єктів, схильних в більшій мірі пам'ятати про свої успіхи і невдачі в минулому. Зрозуміло, що це здатно привертати увагу суб'єктів до стратегій з більшою пам'яттю. Таким чином, пам'ять повинна збільшуватися в процесі еволюції. З збільшенням глибини пам'яті кількість можливих стратегій зростає експоненціально, що призводить до нестачі ресурсів для моделювання еволюції таких стратегій. Крім цього, для кінцевих популяцій кількість стратегій, починаючи з певної глибини пам'яті, заздалегідь перевищить кількість особин популяції. Тому для таких глибин пам'яті стратегії популяції фактично втрачають замкнутість. В процесі еволюції в популяції можуть виникати нові стратегії, відсутні в перших поколіннях. Такі популяції стають відкритими системами, в яких крім «стока» стратегій, який забезпечує еволюційний відбір, присутній і джерело, що призводить до «введення» в популяцію нових стратегій. Таким чином, стаціонарний стан таких популяцій визначається суттєво не рівноважними процесами. Серед фізичних прикладів таких не рівноважних стаціонарних станів можна назвати

турбулентность, в которой стационарное состояние возникает в результате баланса источника энергии в крупномасштабной области и стока в мелкомасштабной [28]. Моделирование эволюции таких популяций требует других подходов и поэтому будет рассмотрено отдельно.

Заметим в заключении, что универсальная тенденция к доминированию в процессе эволюции сложных стратегий требует столь же универсального объяснения. В определенном смысле возникает своеобразная стрела времени. Возникает открытый вопрос: это та же энтропийная стрела времени или другая?

ЛИТЕРАТУРА

1. Weibull J.W. *Evolutionary Game Theory* / J.W.Weibull.- MIT Press, Cambridge, MA, 1993. – 265pp.
2. Nowak M.A. *Evolutionary Dynamics* / M.A.Nowak. - Cambridge, MA, 2006. - 363pp.
3. Claussen J.C. Discrete stochastic processes, replicator and Fokker-Planck equations of coevolutionary dynamics in finite and infinite populations / J.C.Claussen // *Banach Center Publications*. - 2008. - v.80. - P.17–31.
4. Traulsen A., Claussen J.C., Hauert C. Coevolutionary dynamics: From finite to infinite populations / A.Traulsen, J.C.Claussen, C.Hauert // *Phys. Rev. Lett.*-2005. -95, P.238701.
5. Nowak M.A., May R.M. The spatial dilemmas of evolution / M.A.Nowak, R.M.May// *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* - 1993. - 3, P.35.
6. Nowak M.A., Sigmund K. A strategy of win-stay, lose-shift that outperforms tit-for-tat in Prisoner's Dilemma / M.A.Nowak, K. Sigmund//, *Nature*. - 1993. - 364, P.56.
7. Nowak M.A., May R.M. Evolutionary games and spatial chaos / M.A.Nowak, R.M.May // *Nature*. - 1992. 359, P.826 – 829.
8. Szab'o G., Hauert C., Phase transitions and volunteering in spatial public goods games / G.Szab'o, C.Hauert // *Phys. Rev. Lett.* -2002. - v.89, P.118101.
9. Perc M. Chaos promotes cooperation in the spatial prisoner's dilemma game / M.Perc // *Europhys. Lett.*-2006. - 75 (6), P.841–846.
10. Perc M., Szolnoki A., Szab'o G. Restricted connections among distinguished players support cooperation / M.Perc, A.Szolnoki, G.Szab'o // *Phys. Rev. E* -2008. - 78, P.066101(6).
11. Baek S.K., Kim B.J. Intelligent tit-for-tat in the iterated prisoner's dilemma game / S.K.Baek, B.J.Kim // *Phys.Rev.E*. - 2008. - 78, P.011125.
12. Szolnoki A., Perc M. Reward and cooperation in the spatial public goods game / A.Szolnoki, M.Perc // *EPL*. - 2010. - 92, P.38003.
13. Szolnoki A., Perc M. Conditional strategies and the evolution of cooperation in spatial public goods games / A.Szolnoki, M.Perc // *Phys.Rev.E*.-2012. 85, P.026104(7).
14. Szab'o G., F'ath G. Evolutionary games on graphs / G.Szab'o, G.F'ath // *Phys Rep.*-2007. - 446, P.97–216.

15. Ohtsuki H., Hauert C., Lieberman E., Nowak M.A. A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks / H.Ohtsuki, C.Hauert, E.Lieberman, M.A.Nowak// *Nature*. - 2005. - 441, P.502.
16. Santos F.C., Pacheco J.M. Scale-Free Networks Provide a Unifying Framework for the Emergence of Cooperation / F.C.Santos, J.M.Pacheco// *Phys.Rev.Lett.*-2005.- 95, P.098104.
17. Chen X., Fu F., Wang L. Interaction stochasticity supports cooperation in spatial Prisoner's dilemma / X.Chen, F.Fu, L.Wang, // *Phys.Rev.E* .-2008.- 78, P.051120.
18. Perc M. Evolution of cooperation on scale-free networks subject to error and attack / M. Perc // *New J. Phys.*-2009.- 11, P.033027.
19. Fu F., Wang L., Nowak M.A., Hauert C., Evolutionary dynamics on graphs: Efficient method for weak selection / F.Fu, L.Wang, M.A.Nowak, C.Hauert // *Phys. Rev. E*.-2009.- 79, P.046707.
20. Wang W.X., Yang R., Lai Y.C. Cascade of elimination and emergence of pure cooperation in coevolutionary games on networks / W.X.Wang, R.Yang, Y.C.Lai // *Phys. Rev. E*.-2010.- 81 P.035102(R).
21. J.Ren, W.X.Wang, F.Qi, Randomness enhances cooperation: A resonance-type phenomenon in evolutionary game / J.Ren, W.X.Wang, F.Qi // *Phys.Rev.E* . - 2007. - 75, P.045101(R).
22. Rong Z, Yang H X and Wang W X, Feedback reciprocity mechanism promotes the cooperation of highly clustered scale-free networks / Z.Rong H.X.Yang and W.X.Wang // *Phys. Rev. E* . - 2011. - 82, P.047101.
23. Poncela J., Gomez-Gardens J., Moreno Y. Cooperation in Scale-free networks with limited associative capacities / J.Poncela, J.Gomez-Gardens, Y.Moreno// *Phys.Rev. E*.-2011. - 83, P.057101.
24. Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия «количество информации» / А.Н.Колмогоров // *Проблемы передачи информации*. – 1965.- т.1, No.1. - С. 3-11.
25. Lloyd S. Measures of Complexity: A Nonexhaustive List / S.Lloyd // *IEEE Cont. Syst. Mag.* – 2001. - v. 21, № 4. - P.7–8.
26. Арнольд В.И. Экспериментальное наблюдение математических фактов / В.И.Арнольд. - М.: МЦНМО, 2006. - 120 с.
27. R.Axelrod. The evolution of cooperation, Basic Books, New York (1984).
28. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности / А.С.Монин, А.М.Яглом. - М.: Наука, 1965. - 640с.

УДК 004.942

Mathematical modeling of hydraulic networks of structurally complex technological schema

A. I. Silakov, M. L. Ugryumov, A. S. Shmelev

National aerospace university "Kharkiv aviation Institute", Ukraine

The paper analyzes some methods and means of hydraulic network simulation. A method for calculating parameters of such a network is developed. The method is based on the system of differential equations written for the network nodes. The proposed model can be applied for both designing the new piping systems (hydraulic networks) and virtual testing the existing systems under "stress" or emergency conditions.

Keywords: *hydraulic network modeling, system of equations, coefficient of hydraulic resistance, pressure, node.*

Анализируются методы и средства моделирования гидравлических сетей. Предлагается метод расчета параметров гидравлических сетей, разработанный на основе системы дифференциальных уравнений узлов. Предложенная модель позволяет, как проектировать новые системы трубопроводов (гидравлические сети), так и производить оценку работы уже существующих систем в «стрессовых» или аварийных условиях работы.

Ключевые слова: *гидравлическая сеть, моделирование, система уравнений, коэффициент гидравлического сопротивления, давление, узел.*

Аналізуються методи і засоби моделювання гідравлічних мереж. Пропонується метод розрахунку параметрів гідравлічних мереж, розроблений на основі системи диференціальних рівнянь вузлів. Запропонована модель дозволяє як проектувати нові системи трубопроводів (гідравлічні мережі), так і робити оцінку роботи вже існуючих систем в «стресових» або аварійних умовах роботи.

Ключові слова: *гідравлічна мережа, моделювання, система рівнянь, коефіцієнт гідравлічного опору, тиск, вузол.*

1. The problem description and statement

Simulation of hydraulic network (HN) is an important part of the processes of setting up the new as well as operating the existing complex pipeline system. Models that describe a multi-section hydraulic network deal with the high dimension systems of nonlinear equations. Constantly growing complexity of real objects together with problems related to designing the new and to effective controlling the operating ones require to improve existing and develop new modeling and calculating techniques [1].

Pipelines are the complex dynamic systems whose characteristics are not constant, and the law, which governs the changes of these characteristics during the system operation, is not known in advance. Inaccuracies in piping construction embodiment and unsteady conditions of their operation cause significant deviation of actual resistance coefficients from those planned by design. These wrong coefficients are then embedded in equations solving the direct problem of flow distribution. Together with operation loads, which are known only approximately, this leads to unacceptable errors in the mentioned distribution calculations. Hence, the necessity to solve the inverse problems arises. One of such problems is refinement of resistance coefficients of piping network sections. The problems of this kind become even more essential

when one has to pass from the pipeline system design to such a system management. The huge amount of hydraulic networks, which already have been built and now are in operation, brings to the fore the task of effective control of existing pipeline networks.

Hydraulic resistance, by definition, is the irreversible loss of fluid energy density (which transforms into heat a cause of the fluid viscous friction [2]) in different parts of hydraulic system (piping, hydraulic drive system, etc.).

To obtain reliable results needed for designing the new as well as for modeling the existing systems, one has to perform the long-term calculations based on measuring of angles between the pipeline sections, their lengths, crosssections, etc., but the known models of hydraulic networks have insufficient accuracy while their calculation methods are not as fast as necessary.

The main objective of this study is to develop an efficient calculation method that beats the challenges of design and control of big and complicated pipe systems.

2. A method for hydraulic network modeling

In order to create a mathematical model of a system of pipelines (hydraulic network), it is necessary to build corresponding directed graph together with the matrix of its edges connectedness. Besides that, full information is required on geometric features of used pipes as well as on physicochemical properties of substances and mixtures that flow inside.

The theory of constructing hydraulic networks is presented in [3]. Also, this article proposes a method founded on said theory and an information technology that implements the method. This technology is based on technological schemes that has allowed eliminating any user's participation in formation of the connectedness matrix for nodes, vertices and edges. When modeling a hydraulic network and its technological process, different computing modules exchange information automatically.

The input data for hydraulic network modeling are the following:

- piping section hydraulic resistances (hydraulic resistance is a coefficient that can be calculated based on pipe geometrical features);
- density of the substance that passes through the piping section;
- the piping section equivalent diameter;
- the degree of opening of the piping section valve;
- the source and the receiver pressure (initial approximation for solving the system of equations);
- connectedness of edges, nodes, and vertices.

The output data (the results of hydraulic network simulation) are:

- the mixture flow rate for each piping section;
- pressure in piping nodes (points of flow mixing/separation).

Evaluation of hydraulic resistance of the piping section depends on mixture flow mode, but in general case it is determined by both the frictional losses and the local losses.

Various local resistances cause changes of flow velocity direction and/or value. This induces (in addition to frictional) the extra energy (head) losses as result of bumps, local turns, etc. (Figure 1).

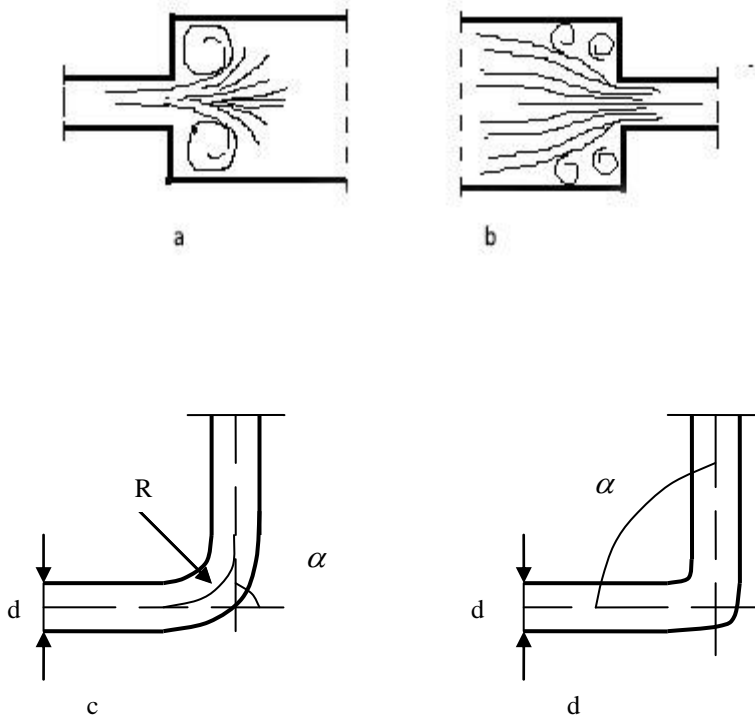


Fig. 1. Some local resistances: a - sudden expansion; b - sudden contraction; c - a smooth 90° turn (a branch); d - a sharp 90° turn (elbow).

The head losses due to local resistances as well as frictional losses are expressed as fractions of velocity head. The ratio of the head drop in a given local resistance $h_{m.c.}$ to the velocity head $\frac{w^2}{2g}$ is called the coefficient of local resistance and is designated as $\xi_{m.c.}$.

So, the expression for each of the local resistances is $h_{m.c.} = \xi_{m.c.} \cdot \frac{w^2}{2g}$, and for the total their sum:

$$h_{m.c.} = \sum \xi_{m.c.} \cdot \frac{w^2}{2g},$$

where $\xi_{m.c.}$ is an experimental value that could be found in handbooks.

The head loss h_n is:

$$h_n = \left(\lambda \cdot \frac{L}{d} + \sum \xi_{m.c.} \right) \cdot \frac{w^2}{2g} = \left(\zeta_{mp} + \sum \xi_{m.c.} \right) \frac{w^2}{2g}.$$

Consequently, the pressure loss across a pipeline section is:

$$\Delta P_n = h_n \rho g = \left(\lambda \cdot \frac{L}{d} + \sum \xi_{m.c.} \right) \cdot \frac{\rho w^2}{2} = \left(\zeta_{mp} + \sum \xi_{m.c.} \right) \frac{\rho w^2}{2}, \text{ N/m}^2 \text{ [4].}$$

From the viewpoint of mathematical modeling, a network scheme is a graph. In other words, it is a structure comprised of a number of points (nodes) and connecting them segments (arcs, edges). In terms of hydraulic networks, the graph elements have a very clear meaning: the nodes represent feeders, consumers, wells, etc., while edges are pipes. In some cases, it is necessary to introduce additional nodes in those points where the measurement equipment is installed, as it can change the pipeline diameter, or influence the flow in other way. Since the direction of mixture movement through the network is determined, the nodes winding order at a given time is strictly determined too. Thus, the above graph is oriented.

The Fig. 1 illustrates the principle of nodes and flow rates naming. All nodes are numbered (named) randomly. Then the flow rate in the pipeline connecting the nodes i and j is denoted as Q_{ij} . Withdrawal from the node i is denoted as q_i . Any of hydraulic calculations deal with equations of two types: the equations reflecting the balance of mixture rates (conservation) in the network nodes and those for mechanical energy balance in network sections (edges) [5].

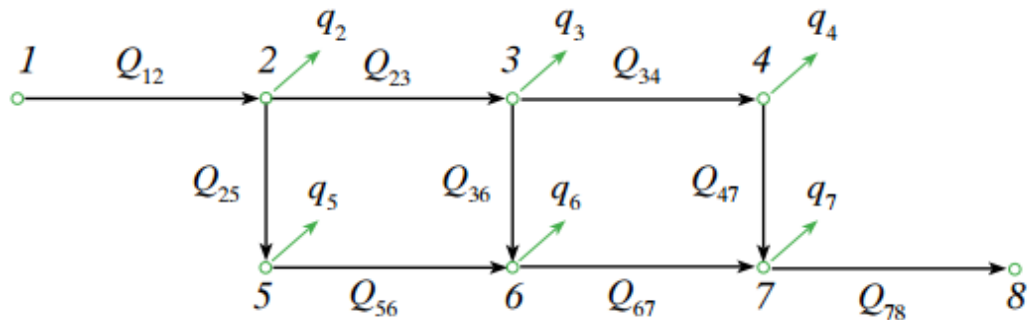


Fig. 2. The principle of naming the hydraulic network graph elements

In terms of hydraulic network, this means that the sum of mixture flow rates that enter a node equals the sum of the effluent mixture flow rates. For example, for node № 3 in Fig. 2, we have:

$$Q_{23} = Q_{36} + Q_{34} + q_3.$$

Condition of mechanical energy balance must be written for each pipeline. According to the Bernoulli's equation for the pipeline, wherein the mixture moves from node i to node j , neglecting the velocity heads, one has:

$$\frac{p_i}{\rho g} + z_i = \frac{p_j}{\rho g} + z_j + \Delta h_{w,ij},$$

where $\Delta h_{w,ij}$ is the head loss between the nodes i and j ; $z_{j,i}$ are the vertical coordinates of the central points of crosssections that are perpendicular to the flow velocity vectors; $\frac{P_i}{\rho g}$ is the hydraulic head.

The total number of equations that describe a network operation can reach several hundreds or even thousands. The system of these equations is nonlinear in flow rates, and this creates the major difficulties when solving it.

In the case of an arbitrary law of hydraulic resistance and unknown steady flow rates in pipes, the system of corresponding equations looks as follows:

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n &= q_1, \\ \dots \\ c_{k1}x_1 + \dots + c_{kn}x_n &= q_k, \\ c_{k+11}s_1|x_1|^{\beta_1-1}x_1 + \dots + c_{k+1n}s_n|x_n|^{\beta_n-1}x_n &= h_1, \\ \dots \\ c_{n1}s_1|x_1|^{\beta_1-1}x_1 + \dots + c_{nn}s_n|x_n|^{\beta_n-1}x_n &= h_{n-k}, \end{aligned} \quad (1)$$

where

x_i is the flow rate in the pipe i ;

coefficients $c_{ij} = 1, -1, 0$ must be found from the first or second Kirchhoff's laws. In the first case, the influent flow in some point determines the coefficient value equal to 1, and the value -1 corresponds to the effluent flow. In the case of the second Kirchhoff's law and nonlinear equations, the values of coefficients c_{ij} can be either +1, -1 (depends on the winding order) if the section j is included into the calculation cycle, which corresponds to the i^{th} nonlinear equation, or $c_{ij} = 0$;

h_i is the sum of all productive heads in all edges of i^{th} contour;

q_i - inflow into (withdrawal from) a node;

β_j is the degree in the law that determines dependence of the head drop on discharge.

The matrix A comprised of coefficients of equations listed in (1) is the matrix of the hydraulic network graph. The system (1) can be represented in vector form:

$$Ax = Q. \quad (2)$$

Adding the matrix of circuits B , we obtain the compact form of second Kirchhoff's law for the whole scheme:

$$BSX = H, \quad (3)$$

where

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & \ddots & 0 \\ 0 & & s_n \end{bmatrix} \text{ and } X = \begin{bmatrix} |x_1|^{\beta_1-1} & \ddots & 0 \\ 0 & & |x_n|^{\beta_n-1} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Let us introduce new variables to refer to the matrix and vector in the right part of the nonlinear system of equations:

$$F(X) = \begin{bmatrix} A \\ BSX \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} Q \\ H \end{bmatrix}, \quad (5)$$

then the system of equations (1) in vector form looks like

$$F(X)x = G. \quad (6)$$

From the fact that (1) is built in accordance with Kirchhoff's laws for the hydraulic circuits, the following theorem follows.

Theorem: Let x is a vector solution of the system of nonlinear equation (1) composed for the flow rates calculation problem, let x is such that each its component x_i is not zero. If $F(x)$ is the system matrix then this x is the unique solution of the equation $F(x)x = G$.

The new method to solve the system (6) was developed based on modified successive approximation method proposed by R.T. Faizullin together with K.V. Loginov.

Solution to the problem is sought as the limit of iterations of the following form:

$$x^{(k+\frac{1}{2})} = \alpha x^{(k)} + (1-\alpha)x^{(k-\frac{1}{2})}, \quad (7)$$

$$F(x^{(k+\frac{1}{2})})x^{(k+1)} = G,$$

where F is the system (6) matrix; $x^{(k)}$, $x^{(k+1)}$ are the approximate solutions obtained in the steps k and $k+1$, correspondently; $x^{(k-\frac{1}{2})}$, $x^{(k+\frac{1}{2})}$ are some intermediate solutions; $\alpha \in (0,1)$. For example, in the case of quadratic law of resistance, $\alpha = 0.5$. The node pressure values were taken as the initial approximation.

This is such a modification of simple iteration method, each step of which is preceded by averaging of some extremum values and followed by finding new extremums based on approximation obtained at this step. This is necessary because the simple iteration method does not converge: at some iteration, the approximation oscillates in several areas.

$$\sum Q_{ik} < \varepsilon_q, \quad (8)$$

$$|x_{ik} - x_{ik-1}| < \varepsilon_x, \quad (9)$$

$$x_i = \frac{x_{i_{\min}} + x_{i_{\max}}}{2}. \quad (10)$$

The aim of iteration process is to approximate the values of pressure in network nodes to use them further as parameters in the system of equations. The flow material balance expressions written for nodes (8) and the minimum difference (with a given accuracy) between pressure values in each node i obtained at iterations k and $k - 1$ (9) are used as conditions to obtain solution. The method algorithm is the following. The maximum pressure $x_{i_{\max}}$ for a node i is obtained as the highest pressure in the set of all nodes connected to i^{th} one; correspondently, the minimum pressure $x_{i_{\min}}$ is the lowest one. Before the next iteration, the averaging (10) is performed for each node. Then goes the iteration calculation. This done, new maximum and minimum values are obtained.

One of advantages of the proposed method is that it converges in a broad region. Also, the rate of this convergence is close to the square one, as is implied by the following statement.

Statement: *If, upon the iteration method (7) application, the Degree of Nonlinearity in the law of hydraulic resistance for each section is β , the parameter that determines the next iteration approximation $\alpha = \frac{1}{\beta}$, and the linear part residual at each iteration is equal to 0, then the modified method of successive approximation is equivalent to the Newton's method.*

This fact allows stating that the method converges provided there is a sufficiently good initial approximation. Unfortunately, the strong evidence of convergence without good initial approximation has not been achieved for general case. The proof is complicated by the fact that in general the operator $F^{-1}(x)H$ is not limited. However, analysis of the problem when its dimension was small (2 and 3) has shown that we can prove the convergence of our method under certain conditions. This as well as numerous experiments and practical application of the method confirm that the convergence takes place without requirement of good initial approximation [6-11].

3. Algorithms and data exchange in hydraulic networks simulation

Prior to the numerical modeling of hydraulic networks, one needs to prepare the input data. An algorithm for this preparation is shown in the Fig. 3.

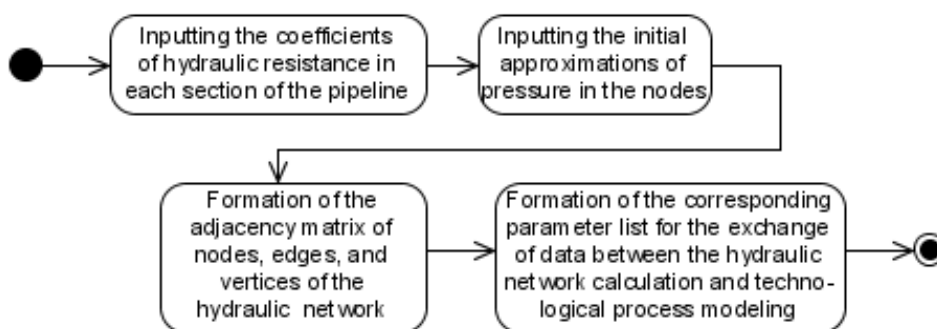


Fig. 3. An algorithm of input data preparation for hydraulic net simulation

To form the system of equations, one must have the connectedness matrix for edges, nodes, and vertices. The method to fill such matrix is described in [3].

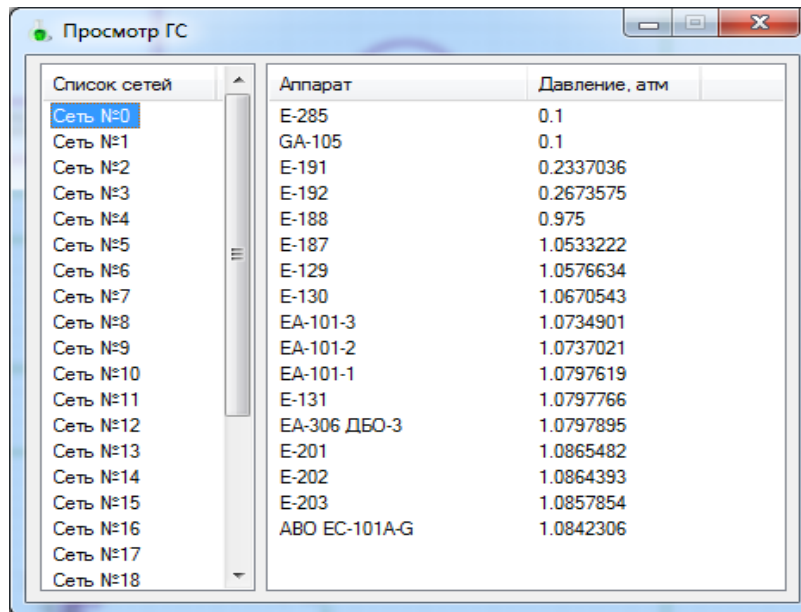
Modeling of Hydraulic network and physicochemical processes inside it includes the dynamic analysis of processes in structurally complex systems. This requires to create a table of parameter compliance necessary for information exchange between calculations of two types. The data needed for numerical simulation of hydraulic networks (physical and chemical properties of the mixtures and the state of opening of valves along the flow way) are transferred from the technological model to the model of hydraulic network, and the data needed for numerical modeling of physicochemical processes (pressures and flow rates in the piping system sections obtained as solution of described above system) are passed in the opposite direction.

So, the data transfer is carried out by means of parameter compliance table. Then the cycle starts to process the hydraulic network nodes, which are pre-determined and are present in the connectedness matrix. The total number of nodes is n . Each node i connects k edges. In a loop over the edges of a given node, the equations reflecting the balance of flows in it are solved. The equations have been solved and balance achieved, the results are transferred to the module that simulates physicochemical processes. Then the iteration is repeated. In this way the continuous sequential modeling of the hydraulic network and internal physicochemical processes proceeds taking into account the external effects (valves and dampers control, changes in boundary conditions, etc.).

4. The numerical simulation results

Numerical simulation of a hydraulic network assumes solving a system of equations under condition of the balance convergence for each network node. When the proposed method is applied in the case of a new piping system, the needed resistance coefficients are calculated based on geometry of pipes and type of mixture that will run inside. In the case of a training system creation or testing some known network under altered boundary conditions (the system stress test), one can use the simplified formulas (sometimes even fitting method) because the sum of pressure drops along the edges is already known. In the last case (the coefficients are fitted based on pressure drop), the computation results would not be that accurate, but still they would quantitatively reflect the system behavior under some external impact.

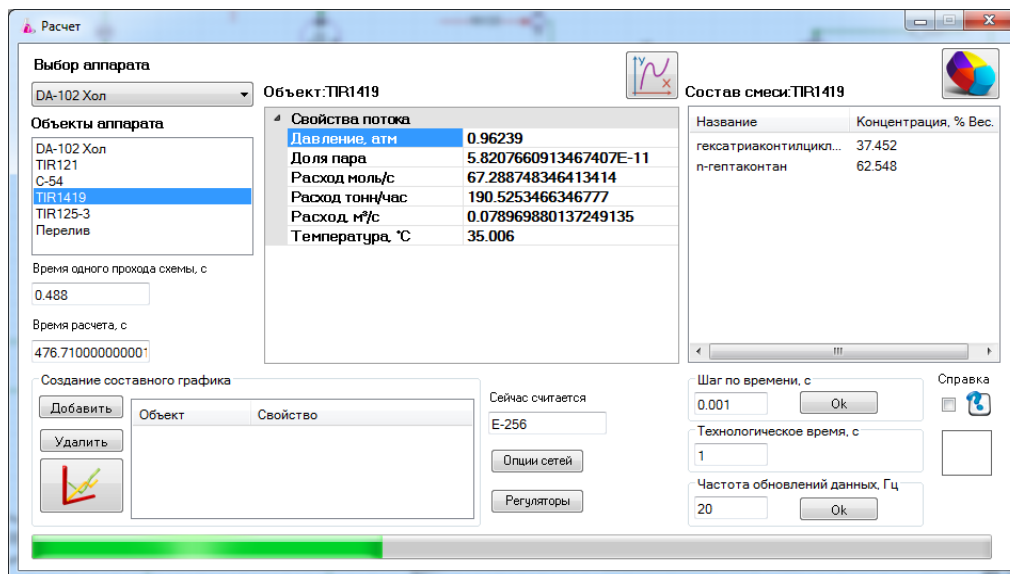
The Fig. 4 shows the results of computation of pressure values in the hydraulic network nodes, which, in their turn, are the elements of devices of some technological scheme.



Список сетей	Аппарат	Давление, атм
Сеть №0	E-285	0.1
Сеть №1	GA-105	0.1
Сеть №2	E-191	0.2337036
Сеть №3	E-192	0.2673575
Сеть №4	E-188	0.975
Сеть №5	E-187	1.0533222
Сеть №6	E-129	1.0576634
Сеть №7	E-130	1.0670543
Сеть №8	EA-101-3	1.0734901
Сеть №9	EA-101-2	1.0737021
Сеть №10	EA-101-1	1.0797619
Сеть №11	E-131	1.0797766
Сеть №12	EA-306 ДБО-3	1.0797895
Сеть №13	E-201	1.0865482
Сеть №14	E-202	1.0864393
Сеть №15	E-203	1.0857854
Сеть №16	ABO EC-101A-G	1.0842306
Сеть №17		
Сеть №18		

Fig. 4. The results of computation of pressure values in the hydraulic network nodes

The Fig. 5 represents the information window, which outputs one of hydraulic network calculation results, namely the mixture rate along the flow, which can be shown in different units depending on the mixture physicochemical properties.



Выбор аппарата
 DA-102 Хол

Объекты аппарата
 DA-102 Хол
 TIR121
 C-54
TIR1419
 TIR125-3
 Перелив

Время одного прохода схемы, с
 0.488

Время расчета, с
 476.7100000000001

Создание составного графика
 Добавить
 Удалить

Объект **Свойство**

Сейчас считывается
 E-256

Опции сетей
 Регуляторы

Свойства потока
 Давление, атм 0.96239
 Доля пара 5.8207660913467407E-11
 Расход моль/с 67.288748346413414
 Расход тонн/час 190.5253466346777
 Расход м³/с 0.078969880137249135
 Температура, °C 35.006

Состав смеси: TIR1419

Название	Концентрация, % Вес.
гексатриаконтилцикл...	37.452
п-гептаконтан	62.548

Шаг по времени, с 0.001 Ok

Технологическое время, с 1

Частота обновлений данных, Гц 20 Ok

Fig. 5 Flow rate

5. Results and conclusions

Production technologies evolution and safety requirements stimulate the development of computer modeling of hydraulic networks and technological processes.

The method and process have been developed that allow computing the mixture flow rate in each of the pipeline sections and pressure in its nodes (points of flow mixing/separation), including those cases when the system has some defects.

Calculations performed using this technique have shown simulation results close to the real manufacturing parameters in both cases: when hydraulic resistance coefficients of the pipeline sections are known exactly or fitted.

In the future, the authors plan to improve and automate the process of fitting the coefficients for the case of existing pipeline network, as well as to optimize the algorithm of solving systems of equations due to reduction of the number of internal iterations for systems with the large number of nodes.

REFERENCES

1. Поляков С.А. Математические модели и моделирование объектов машиностроительного производства: учебное пособие / С. А. Поляков. – Издательство Московского государственного открытого университета, 2011. – 104 с. – Title in English : Polyakov, S. A. (2011) Mathematical models and modeling of objects of mechanical engineering. Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo otkrytogo universiteta, 104.
2. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям/ Под ред. М. О. Штейнберга.-3-е изд., перераб. и доп. – М.; Машиностроение, 1992. – 672с: ил. – Title in English : Idel'chik, I. E. (1992) Handbook of hydraulic resistance. М.: Mashinostroenie, 672.
3. Силаков А. И. Формализация представления гидравлических сетей структурно-сложных технологических систем на основе элементной базы стандартных модулей / А. И. Силаков, М. Л. Угрюмов, А. С. Шмелев, В. Е. Стрелец // сбор. Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии №70. – ХАИ : 2015. – с.93-101. – Title in English : Silakov, A. I., Ugriumov, M. L. , Shmelev, A. S., et. al. (2015)
4. Штеренлихт Д. В. Гидравлика. В 2 кн. Кн. 1. / Д. В. Штеренлихт. – М. : Энергоатомиздат, 1991. – 351 с. – Title in English : Shterenliht, D. V. (1991) Hydraulics. М.: Energoatomizdat, 351.
5. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. Пер. с англ. - М.: Мир,1981. - 328 с. – Title in English : Maynika, E. (1981) Optimization Algorithms for Networks and Graphs. М.: Mir, 328.
6. Кафаров В. В., Глебов М. Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств. Учеб. пособие для вузов. - М.: Высш. шк. , 1991. - 400 с. – Title in English : Kafarov, V. V., Glebov, M. B. (1991) Mathematical Modeling of Basic Chemical Productions Processes. Vyssh. sk, 400.

7. Абрамов Н. Н. Водоснабжение: учебник для вузов. / Н. Н. Абрамов. 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Стройиздат, 1974. – 480 с. – Title in English : Abramov N. N. (1974) Water Supply. M.: Stoyizdat, 480.
8. Говиндан Ш., Вальски Т., Кук Д. Решения Bentley Systems: гидравлические модели. Помогая принимать лучшие решения // САПР и графика. 2009. – № 4. – С. 36-38. – Title in English : Govindan, Sh., Walski T., Cook, J. (2009) Bentley Systems Decisions: Hydraulic Models. Helping You Make Better Decisions. SAPR i grafika, 4, 36-38.
9. Myznikov A. M., Flow distribution control in heating networks // Information technologies in modeling and management, Voronezh: Scientific Book 2005 Vol. N4 (22), pp. 618-623.
10. Myznikov A. M., Evaluation of resistance coefficients for sections of complex heating networks based on the limited number of measurements // Problems of Theoretical and Applied Mathematics: Proceedings of the 36 th Regional Youth Conference. Ekaterinburg, Ural Branch of Russian Academy of Sciences, 2005, p. 87 - 91.
11. Vinnichuk SD linear convolution method for the calculation of the distribution network. // Modeling and diagnostics of complex processes and systems: Coll. scientific. tr. - Kiev: IPME NAS of Ukraine, 1997. - p. 71-79.

УДК 532.5:519.6

Математическая модель течения в мелководной акватории

Д. И. Черний

*Институт телекоммуникаций и глобального информационного пространства НАН
Украины*

Киевский национальный университет им. Т.Г.Шевченко, Украина

Рассматривается течения в мелководной акватории. Акватория представлена в виде плоского канала со сложной формой границ (берегов). Глубина канала считается малой. Течение предполагается вязким и слоистым. Модель основана на аналитическом решении уравнений Навье-Стокса для частного случая слоистого течения (для которого течение Хил-Шоу является предельным случаем) с учетом конвективных слагаемых и нестационарности. Задача сводится к определению течения между ограничивающими подвижными поверхностями с заданным распределением параметров.

Ключевые слова: *Сингулярные интегральные уравнения, математическая модель, течение.*

Розглядається течія в мілководній акваторії. Акваторія представлена у вигляді плоского каналу зі складною формою кордонів (берегів). Глибина каналу вважається малою. Течія передбачається в'язкою та шаруватою. Модель заснована на аналітичному рішенні рівнянь Нав'є-Стокса для окремого випадку шаруваті течії (для якої течія Хіл-Шоу є частковим випадком) з урахуванням конвективних доданків і нестационарності. Завдання зводиться до визначення течії між обмежують рухливими поверхнями із заданим розподілом параметрів

Ключові слова: *Сингулярні інтегральні рівняння, математична модель, течія.*

The flow in the shallow water area. The water area is represented in the form of a flat channel with a complex shape boundaries (coasts). The depth of the channel is considered to be low. Over the estimated viscous and layered. The model is based on an analytical solution of the Navier-Stokes equations for the particular case of the layered flow (for which for the Hele-Shaw is pridelnynh case), taking into account the convective terms and unsteadiness. The problem is reduced to the determination of the flow between the movable limiting surface with a given distribution of the parameters.

Key words: *Singular integral equations, mathematical model, flow.*

1 Введение

Наибольшую потребность в прогнозе эволюции таких процессов, как распространение загрязнений в атмосфере и массоперенос (с учетом загрязнений) в ограниченных акваториях под воздействием изменяющихся гидрологических и атмосферных условий испытывают службы, призванные оперативно предупреждать развитие природных и техногенных катастроф и уменьшать/предотвращать их воздействие на окружающую среду.

Инструментом для прогнозирования эволюции широкого спектра процессов в области гидрологии, метеорологии, экологии и геодинамики являются компьютерные системы. Эффективность системы прогнозирования определяется эффективностью используемых математических моделей.

Построение математических моделей гидрологических процессов в акваториях на основе 3D уравнений Навье-Стокса [5] сопряжено с математическими проблемами, вычислительными трудностями и значительными затратами машинного времени для самого процесса

моделирования. Это при том, что наиболее важным фактором для обеспечения оперативного реагирования является минимизация времени для определения тенденций развития посткатастрофического процесса (время на моделирование, время на рассмотрение возможных «сценариев» развития процессов и принятие решений). Именно оперативность является необходимым условием для обеспечения возможных упреждающих и спасательных мероприятий. Причем, в подавляющем большинстве случаев, достаточной информацией является структура поверхностных течений (визуально контролируемых процессов), либо осредненных по глубине (по толщине слоя, расходных) характеристик течений.

Использование упрощенных математических моделей (без существенных потерь адекватности) для компьютерных систем уменьшит время экспресс прогнозирования, что повысит оперативность принятия решения спасательными службами при оптимизации действий, направленных на локализацию и ликвидацию последствий техногенных катастроф.

Целью работы является расширение применимости метода дискретных особенностей на спектр гидрологических (русловых задач) путем построения анизотропно-вязкой (точнее, «стратифицировано идеальной») модели потока жидкости, для которой возможно применение теории потенциала, а значит и метода дискретных особенностей.

2 Постановка проблемы

Рассматривается течение (в плоском канале с криволинейной боковой границей) вязкой несжимаемой жидкости, которое описывается уравнениями Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{V}^2 + \frac{p}{\rho} + U \right) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) = \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{V} \quad (1)$$

$$\nabla \vec{V} = 0, \quad (2)$$



Рис.1
Фото течения в акватории

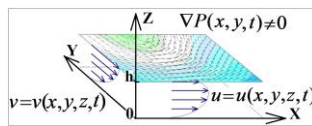


Рис.2
Схема течения в слое

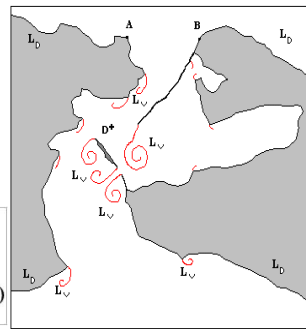


Рис.3
Схема течения в плоском в канале

Предполагается, что течение в канале является слоистым (Рис.2, компонента скорости перпендикулярная плоскости OXY полагается равной нулю: $w(x, y, z, t) \equiv 0$), а для компонент скорости $u(x, y, z, t)$ и $v(x, y, z, t)$ при любых z и

t существует непрерывно дифференцируемая функция $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ такая, что справедливо:

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t) \equiv 0. \quad (3)$$

Тогда для уравнения Навье-Стокса (1), с учетом уравнения неразрывности (2), получается интегральное представление вида

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, z, t) + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, z, t) \right)^2 \right) + \\ & + \frac{P(x, y, t)}{\rho} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi(x, y, z, t) = q(z, t) \end{aligned} \quad (4)$$

Что позволяет сформулировать начально-краевые задачи для нахождения функции $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ и $\vec{V}(x, y, z, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z, t), \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, z, t), 0 \right)$.

Последнее слагаемое в правой части (4) может трактоваться как вклад «вязкой анизотропии» течения с существующим потенциалом для каждого отдельного слоя «идеальной жидкости». Проблема состоит в нахождении решения для такого течения.

3. «Расщепление течений» для «анизотропно-вязкой» жидкости.

Для «анизотропно-вязкого» течения возможны постановки задач в терминах z, t (x, y – являются параметрами):

Задача1 (для $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \left\{ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{P(x, y, t)}{\rho} - q(z, t) \right\} \quad (5)$$

С краевыми условиями на граничных слоях (при $z = 0; h$):

$$\varphi(x, y, 0, t) = \Phi_0(x, y, t), \quad (6)$$

$$\varphi(x, y, h, t) = \Phi_h(x, y, t), \quad (7)$$

И с начальными условиями, при $t = 0$:

$$\varphi(x, y, z, 0) = \Phi(x, y, z). \quad (8)$$

Задача2 (для $\vec{V}(x, y, z, t)$):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} - \nabla_{xy} \left\{ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{P(x, y, t)}{\rho} - q(z, t) \right\} \quad (9)$$

С краевыми условиями на граничных слоях (при $z = 0; h$):

$$(u, v) \Big|_{z=0} = \nabla_{xy} \varphi(x, y, 0, t) = V_0(x, y, t), \quad (10)$$

$$(u, v)|_{z=h} = \nabla_{xy} \varphi(x, y, h, t) = \vec{V}_h(x, y, t), \quad (11)$$

и с начальными условиями, при $t = 0$:

$$\vec{V}(x, y, z, 0) = \vec{V}(x, y, z). \quad (12)$$

Решение любой из задач (5)-(8) или (9)-(12) в переменных (z, t) , определяет φ и \vec{V} как функции координаты z (т. е., по толщине слоя, Рис.2,) и времени t . Эти решения можно получить методом разделения переменных (методом Фурье) при уже заданных значениях функций φ и \vec{V} (в виде $\Phi_0, \Phi_h, V_0, \vec{V}_h$) на граничных слоях (6),(7) и (10),(11). Зависимости от x и y считаются "замороженными".

4. Завершение построения математической модели, которая позволит использовать метод дискретных особенностей для численного моделирования на компьютере

Для «анизотропно идеальной», т.е. для послойной моделей течения «идеальной жидкости» необходимая информация о $\varphi, \vec{V}, \Phi_0, \Phi_h, V_0, \vec{V}_h$ может быть получена из решения задачи о течении «идеальной жидкости» в слое – в плоском канале (Рис. 3), задачи для определения функции $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$, как функции от переменных x, y , (при фиксированном параметре z):

Задача 3 (для $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ и $\vec{V} = \nabla \varphi$, при фиксированном параметре z):

$$\Delta \varphi = 0, \text{ в } D^+ \quad (13)$$

с краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{L_d=AB} = W_n \text{ на входе в канал} \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{L_d} = W_n = 0 \text{ на боковых стенках канала } L_d, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} \right|_{L_v} = \left. \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} \right|_{L_v} \text{ на свободной границе } L_v, \quad (16)$$

$$\left[\varphi \right]_{\vec{r}_v}^+ = \Gamma(\vec{r}_v) = Const|_{\vec{r}_v} \text{ на свободной границе } L_v, \quad (17)$$

с начальными условиями:

$$t = t_0 : L_d(t_0) = L_{od}, L_v(t_0) = L_{ov}, \varphi^+|_{t=t_0} = \varphi_0^+. \quad (18)$$

Краевая задача (13)-(18), с условиями Неймана (14),-(16) и Дирихле (17) на разных ее частях, является (нелинейной) задачей со свободной (подвижной (16), (17)) границей.

Разыскивается ее решение, которое определено в классе функций:

$$|\nabla \varphi^+| < \infty. \quad (19)$$

Решение математической задачи (13)-(19) для эллиптического уравнения в деформирующейся области с частично неизвестными границами и нестационарными, смешанными краевыми условиями, в пространственно-двумерном случае имеет (в качестве математической модели) интегральное представление (в терминах комплексной переменной $z = x + iy$ и аппарата аналитических функций). Такая математическая модель, при заданных значениях подинтегральных функций $f(\omega, t)$ и заданных форме, взаиморасположении и законе изменения границ $L_d(t)$ и $L_v(t)$ определяет численные значения неизвестных функций φ и \bar{V} .

Интегральные представления на ограниченном контуре

$$L(t) = L_d(t) + L_v(t):$$

$$\Phi(z, t) = \varphi + i\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} f(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} f(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + Const \quad (20)$$

$$\bar{V}(z, t) = u + iv = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{f(\omega, t)}{z - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t)}{z - \omega} d\omega, \quad (21)$$

рассматриваются в смысле главного значения.

Для определения значений $f(\omega, t)$ и их изменения на подвижных границах $L_d(t)$, $L_v(t)$ уравнения (20), (21) требуют ещё, чтобы удовлетворялись интегральные соотношения (22), полученные из краевых условий (14), (15), а также следующее за ними уравнение (23), роль которого аналогична краевым условиям (16), (17):

На $L_d(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \omega_d(t) \in L_d, \quad t \geq t_0: \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\} = W_n - \operatorname{Re} \left\{ \bar{V}_\infty n(\omega_d) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\}, \quad (22) \\ \int_{L_{d_j}} f(\omega_d, t) d\omega_d = - \int_{L_{v_j}(t)} f(\omega_v, t) d\omega_v + C_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

На $L_v(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \omega_v(t) \in L_v(t), \quad t > t_0 : \\ \frac{d\bar{\omega}_v(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(\omega_v - \omega)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(\omega_v - \omega)}, \\ \omega_v = \omega_d \Rightarrow f(\omega_v, t) = f(\omega_d, t), \\ t = t_0 : \\ L_v(t_0) = L_{v0} \end{array} \right. \quad (23)$$

Задача (22),(23) может быть решена численно (например, МДО- методом дискретных особенностей [3,4]), для чего производится разбиение кусочно-

гладкой границы на совокупность граничных элементов $L = \sum_{j=1}^M L_j$, где

$\omega_{0j} \in L_j$, так, что справедливы тождества

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \ln(z - \omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right) d\omega, \quad (25)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{z - \omega} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})} \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})} \int_{L_j} f(\omega) \left(\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right)^{-1} - 1 \right) d\omega, \quad (26)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) \left(\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right)^{-n} - 1 \right) d\omega \quad (27)$$

В силу того, что для точки z , вне покрытия границы $L = \sum_{j=1}^M L_j$ системой

окружностей (каждая из которых покрывает свой граничный элемент L_j), по

отношению ко всем элементам L_j , справедливо $\left| \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}} \right| \leq \frac{\Delta}{\rho_0} = \varepsilon < 1$, то для

последних слагаемых правых частей (25)-(27) справедливы оценки:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left(\ln^2\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right) + \left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right)^2 \right)^{1/2} \quad (28)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})} \int_{L_j} f(\omega) \left(\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right)^{-1} - 1 \right) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi\rho_0} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left(\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right)^{-1} - 1 \right) \quad (29)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) \left(\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right)^{-n} - 1 \right) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi\rho_0^n} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left(\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right)^{-n} - 1 \right) \quad (30)$$

В силу чего справедливо

Утверждение[6]:

Пусть аналитическая по z функция допускает одно из интегральных представлений вида (25)-(27), где функция f определена и непрерывна на конечной жордановой кривой L , тогда для $\forall z: \min_{\omega \in L} |z - \omega| = \rho_{\min} > \rho_0 > 0$,

$\exists M$ (число), $\exists E, E_0$ (согласованное разбиение кривой L), что справедливы оценки:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \ln(z - \omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left(\ln^2 \left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0} \right) + \left(\frac{\Delta}{\rho_0} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (31)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega) d\omega}{z - \omega} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi i (z - \omega_{0j})} \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi \rho_0} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left(\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0} \right)^{-1} - 1 \right) \quad (32)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega) d\omega}{(z - \omega)^n} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi i (z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi \rho_0^n} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left(\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0} \right)^{-n} - 1 \right) \quad (33)$$

При выполнении условий (31)-(33) допускается замена интегральных представлений (20)-(21) квадратурными, что является в плоском случае основой для МДО-метода дискретных особенностей [1,3,4,6-8]:

$$\Phi(z, t) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i} \text{Ln}(z - \omega_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^p}{2\pi i} \text{Ln}(z - \omega_{0i}^p) + O(\varepsilon), \quad (34)$$

$$\bar{V}(z, t) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z - \omega_{0j})} + \sum_p \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^p}{2\pi i (z - \omega_{0i}^p(t))} + O\left(\frac{\varepsilon}{\rho_0}\right) \quad (35)$$

5. Результаты моделирования

Ниже представлены результаты численного моделирования, лабораторного эксперимента и спутниковые фото Керченского пролива (Рис.4-Рис.7).

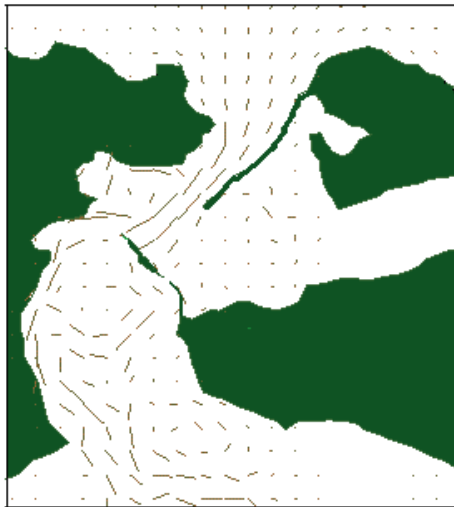


Рис.4.

Математическое моделирование
мгновенного поля скоростей

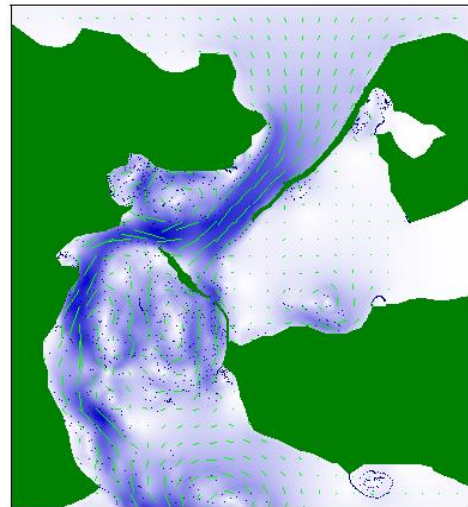


Рис.5.

Математическое моделирование
распространения загрязнений в
Керченском проливе.

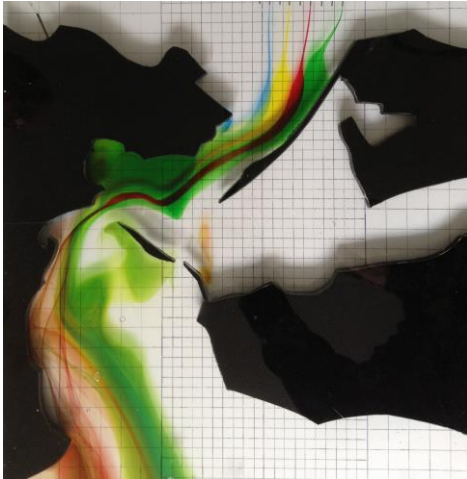


Рис.6.
Лабораторний експеримент.
Візуалізація течія в Керченському
проливі



Рис.7.
Фото со спутника. Розповсюдження
забруднень в Керченському
проливі (11-12.
2007)

6.3. Заключение

Приведенные результаты моделирования (Рис.4, Рис 5), в целом, отображают достаточно хорошее соответствие по доминирующим течениям и проявлениям циркуляции потоков с результатами экспериментов (Рис.6, Рис 7).

Хорошее соответствие следует понимать в смысле визуально контролируемых течений в слое, либо визуально контролируемых осредненных по глубине (по толщине слоя, расходных) характеристик течений.

Данные результаты хорошо согласуются с положениями Н.С. Хе-Шоу [8] (правда, сделанном для медленных и стационарных течений) о том, что для осредненного по толщине слоя течения справедливо предположение о «потенциальном» решении.

Результаты моделирования демонстрируют, что для нестационарного слоистого течения в трехмерной области между двумя плоскими параллельными границами (для задачи о слоистом течении в плоском криволинейном канале) в переменных z, ξ, t (где для $\Phi(z, \xi, t)$ комплексная $\xi = x + iy$, а z является параметром толщины слоя) может быть использована математическая модель, которая имеет как интегральное представление

$$\Phi(z, \xi, t) = \varphi + i\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} f(z, \omega, t) \ln(\xi - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} f(z, \omega, t) \ln(\xi - \omega) d\omega, \quad (36)$$

$$\bar{V}(z, \xi, t) = \frac{\partial \Phi(z, \xi, t)}{\partial \xi} = u - iv = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(z, \omega, t)}{\xi - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(z, \omega, t)}{\xi - \omega} d\omega, \quad (37)$$

так и квадратурное (на основе метода дискретных особенностей [3,4]):

$$\Phi(z, \xi, t) = \varphi + i\psi = \sum_{j_d=1}^{M_d} \frac{\Gamma_{j_d}(z, t)}{2\pi i} \ln(\xi - \omega_{j_d}) + \sum_{j_v=1}^{N_v(t)} \frac{\Gamma_{j_v}(z)}{2\pi i} \ln(\xi - \omega_{j_v}(t)), \quad (38)$$

$$\bar{V}(\xi, t) = u - iv = \sum_{j_d=1}^{M_d} \frac{\Gamma_{j_d}(z, t)}{2\pi i(\xi - \omega_{j_d})} + \sum_{j_v=1}^{N_v(t)} \frac{\Gamma(z)_{j_v}}{2\pi i(\xi - \omega_{j_v}(t))}, \quad (39)$$

где

$$\Gamma_{j_d}(z, t) = \int_{L_{j_d}} f(\omega, t) d\omega, \quad \Gamma_{j_v}(z) = \int_{L_{j_v}(t)} f(\omega, t) d\omega \quad j_d = \overline{1, M_d} \quad j_v = \overline{1, N_v(t)}. \quad (40)$$

Причем, по переменным z, t представления (36)-(40) должны удовлетворять решениям задач 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. /Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М - М.: «Наука», 1988, 232с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. - М.,Л.:ОГИЗ ГИТТЛ, 1947.-928 с.
3. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.- Харьков; Харьковский національний університет ім. В.Р.Каразіна, 2000, 90с.
4. Довгий С.О. Метод сингулярних інтегральних рівнянь./Довгий С.О., Ліфанов І.К. - Теорія та застосування. –Київ, “Наукова думка,” 2004р., -510с.
5. Иванов В.А., Фомин В.В. Математическое моделирование динамических процессов в зоне море-суша./НАН Украины, Морской гидрофизический институт.-Севастополь,- НВЦ «ЕКОСІ-Гідрофізика»-2008., 363С.
6. Черний Д.И. Аппроксимация решения начально-краевой задачи с подвижными границами //Обчислювальна та прикладна математика. - Київ: Київський університет. – 1997. – Вип. 2(82). – С.112-123. (Cherniy D.I. Approximation of Solution of Initial-Boundary Problem with Moving Boundary.//Journal of Computational and Applied Mathematics, №2(82), 1997, pp.112-123.)
7. Cherniy D., Dovgiy S., Meleshko V. The Vortex Model of a Viscid Wall's Layer // IUTAM Symposium on "Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function", Abstract Book, March 10(Sun)-14(Thu), 2013, Centennial Hall, Kyushu University School of Medicine, Fukuoka, Japan, p.p. 126-127.
8. Hele-Shaw H.S. Investigation of the nature of surface resistance of water and of stream motion under certain experimental conditions. // Trans.Inst. Nav. Arch. XI, 25(1898).

УДК 519.217.1

Пуассонівські періодичні кусково стаціонарні потоки та оцінка їх інтенсивності

О. В. Маєвський, О. В. Мацюк, М. В. Приймак, О. М. Приймак
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

Періодичні пуассонівські потоки не рідкість у реальному житті. Проте питання оцінки їх періодичної інтенсивності залишається відкритим. В роботі встановлено, що: побудова однозначної оцінки нестационарних потоків з використанням методу максимальної правдоподібності неможлива, коли інтенсивність залежить від двох чи більше параметрів; побудова однозначної оцінки, що є незміщеною, слушною та ефективною, можлива лише на окремих інтервалах нестационарного потоку, на яких потік є стаціонарним. Виділено клас потоків, для яких розробка методів оцінки інтенсивності є можливою. Отримані результати відкривають можливості для оцінки інтенсивності емпіричних стохастичних періодичних потоків пуассонівського типу, наприклад, дзвінків до станції невідкладної допомоги, потоків даних в Інтернеті і т. ін.

Ключові слова: періодичний пуассонівський потік, кусково стаціонарний потік, інтенсивність потоку, оцінка інтенсивності періодичного потоку.

Периодические пуассоновские потоки не редкость в реальной жизни. Однако вопрос оценки их периодической интенсивности остается открытым. В работе установлено, что: построение однозначной оценки нестационарных потоков с использованием метода максимального правдоподобия невозможно, когда интенсивность зависит от двух или более параметров; построение однозначной оценки, являющейся несмещенной, удобной и эффективной, возможно лишь на тех отдельных интервалах нестационарного потока где поток является стационарным. Выделен класс потоков, для которых разработка методов оценки интенсивности возможна. Полученные результаты открывают возможности для оценки интенсивности эмпирических стохастических периодических потоков пуассоновского типа, например, звонков на станцию неотложной помощи, потоков данных в Интернете и т. д.

Ключевые слова: периодический пуассоновский поток, кусочно стационарный поток, интенсивность потока, оценка интенсивности периодического потока.

The periodic Poisson flows are not rare in real world. But evaluation of their periodic intensity still is an open question. The investigation under discussion has proved that: it is impossible to use the method of maximum likelihood to build the unique estimate of unsteady flow intensity depending on two or more parameters; the unique estimate, which is unbiased, opportune and effective, is possible only for certain stream sections where an unsteady in general flow is nevertheless stationary. The class of flows is separated, for which development of methods for their intensity evaluation is possible. The investigation results open the way for evaluation of intensity of empirical stochastically periodical Poisson's type streams, for example calls to first aid station, data streams in the Internet, etc.

Key words: Poisson flow, periodic Poisson flow, piecewise linear Poisson flow, flow's intensity, assessment of the flow's intensity.

1. Вступ

В повсякденному житті нам постійно зустрічаються потоки – потоки машин на трасах, потоки звернень в системи масового обслуговування (наприклад, в суди, перукарні), в останні роки неможливо уявити існування людини без **інформаційних потоків**. Вважається, що історія дослідження потоків методами

теорії ймовірностей і математичної статистики бере свій початок із робіт датського інженера А.К. Ерланга. Проте, якщо звернутися до одного із прикладів потоків – моментів появи сонячних плям, то виявляється, що вивчення потоків має набагато глибшу історію [1]. Аналізуючи сонячні плями, в 1843 році Г. Швабе відкрив, що для інтенсивності їх появи характерна періодичність із середнім періодом 10 років. Дещо пізніше Р. Вольф отримав більш точне значення цього періоду – приблизно 11 років.

Окремий етап в дослідженні сонячних плям, а по суті стохастично періодичних потоків, посідають дослідження А. Шустера. Виходячи із наглядної «періодичності» послідовності (ряду) чисел сонячних плям, А. Шустер запропонував спосіб їх аналізу, що отримав назву періодограналізу. Ще один підхід до дослідження потоку сонячних плям запропонував Дж. Юл (1928 рік), для цього він за модель потоку використав процес авторегресії і всі подальші дослідження здійснював на базі цієї моделі.

Новий етап в дослідженні потоків з використанням ймовірнісних методів розпочався з робіт А. Ерланга. Хоча основною причиною появи його робіт, а пізніше робіт інших авторів – К.Пальма (Швеція), Ф. Плачека (Франція), В. Феллера (США), О. Хінчина (СРСР)), було дослідження систем масового обслуговування, проте значна увага приділялася і потокам, як однієї із складових цих систем. Особливої уваги заслуговують роботи О. Хінчина (СРСР), зокрема робота [2], в якій закладені основи теорії потоків, в першу чергу найпростіших потоків, які з часом отримали назву стаціонарних пуассонівських потоків. Для цих потоків розроблені методи оцінки їх інтенсивності [3].

Узагальненням стаціонарних потоків є пуассонівські нестаціонарні потоки [2, с.15-18], інтенсивність яких вже є деякою функцією часу $\lambda(t)$. Проте ці потоки якогось особливого інтересу не мають. Привертають увагу частинні випадки нестаціонарних потоків, в першу чергу **стохастично періодичні потоки пуассонівського типу**, інтенсивність яких змінюється періодично. Причина в тому, що крім сонячних плям, про які згадувалося вище, стохастична періодичність характерна для вхідних потоків більшості систем масового обслуговування.

Яким же є стан досліджень періодичних пуассонівських потоків? Часто обмежуються лише згадками про наявність таких потоків та прикладами їх періодичної інтенсивності [4, с. 107], наголошується на важливості їх дослідження [5, с. 48-50]. Заслужує уваги робота [6], в якій введено клас випадкових процесів з незалежними періодичними приростами, частинним випадком яких і є пуассонівські періодичні процеси або те саме, що потоки. Проте, що стосується чи не основного питання періодичних пуассонівських потоків – оцінки їх інтенсивності, то ця задача залишається невирішеною.

2. Мета роботи

Навести основні поняття пуассонівських потоків, в тому числі періодичних пуассонівських потоків; розглянути питання щодо можливості використання для побудови оцінки інтенсивності періодичного пуассонівського потоку методів

статистичного аналізу періодично корельованими процесами та нестационарних пуассонівських потоків і на основі зроблених висновків виділити із множини періодичних пуассонівських потоків клас періодичних пуассонівських кусково-стационарних потоків та побудувати оцінку інтенсивності.

Щоб перейти до розгляду цих питань і при цьому уникати певних роз'яснень, нагадувань, застережень, спочатку нагадаємо деякі поняття, пов'язані з потоками

3. Потоки, їх задання та основні види пуассонівських потоків

В загальному випадку потоком називають послідовність подій, що відбуваються в деякі моменти часу, причому ці моменти в переважній більшості є випадковими. Якщо подіями є замовлення в систему обслуговування, такий потік називається потоком замовлень (звернень, вимог), вхідним потоком або просто потоком.

3.1. Способи задання потоків

Є три основних способи опису потоків. Нагадаємо їх, дотримуючись при цьому [2-4].

Потік можна розглядати як випадковий процес

$$\xi(t), t \geq 0, \quad (3.1)$$

що визначає число подій, що відбулися за проміжок часу $(0, t)$.

Нехай $t_1, \dots, t_i, \dots, t_0 = 0$ – випадкові моменти часу, в які надходять замовлення. Якщо ці моменти розглядати як послідовність випадкових величин (точок) t_1, \dots, t_i, \dots , задану на осі часу $0t, t \geq 0$, причому $0 < t_1 < t_2 < \dots$, то таку послідовність називають потоком [4], іноді точковим процесом.

Якщо послідовність t_1, \dots, t_i, \dots – це моменти надходження замовлень, тоді

різниці $t_i - t_{i-1} = \tau_i, i = 1, 2, \dots$, визначають інтервали (проміжки) часу між $i-1$ -м і i -м замовленнями. Сам же потік розглядається як послідовність випадкових величин (інтервалів) $\tau_i, i = 1, 2, \dots$.

Розглянуті способи задання потоків взаємопов'язані, тобто потік, описаний одним із трьох способів, може бути описаний і в розумінні двох інших [2, с. 41; 4]. В подальшому ми будемо розглядати потік у вигляді (3.1), тобто як випадковий процес $\xi(t), t \geq 0$

3.2. Найпростіший потік

За своїми властивостями потоки можуть бути різних типів. Найбільш вивченими є найпростіші потоки, тобто потоки, що задовольняють умовам стационарності, відсутності післядії та ординарності [2, с. 8]. Показано [2, с. 8-10; 4], що для найпростішого потоку $\xi(t)$ ймовірність того, що за довільний проміжок часу $(t, t + \tau)$ відбудеться s подій, визначається за формулою

$$P(\xi(\tau) = s) = \frac{(\lambda\tau)^s}{s!} e^{-\lambda\tau}, \quad s = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

Параметр λ називається інтенсивністю потоку, іноді густиною потоку.

Оскільки розподіл (3.2) є розподілом Пуассона, найпростіший потік називають стаціонарним пуассонівським потоком або стаціонарним потоком Пуассона. Варто також відзначити, що замість назви «пуассонівський потік» більш точною є назва «пуассонівський процес», проте враховуючи, що ця робота має пряме відношення до теорії масового обслуговування, замість назви пуассонівських процес ми будемо переважно вживати термін пуассонівський потік. Загалом же, потрібно пам'ятати, що **пуассонівський потік – це теж саме, що пуассонівський процес** [7, с.763]

3.3. Нестационарні пуассонівські потоки

Критичне вивчення умов, які приводять до найпростішого потоку, в практичних ситуаціях зустрічаються не так часто [5, с.20]. Якщо потоки розглядати на достатньо тривалих інтервалах часу, то серед них досить часто зустрічаються потоки, для яких умова стаціонарності вже не виконується, хоча умови ординарності і відсутності післядії залишаються справедливими. Перші вагомі результати з теорії нестационарних потоків пуассонівського типу отримані у відомій роботі О. Хінчина [2, с.15-18, 75-78].

Нестационарність потоку проявляється в тому, що його інтенсивність λ вже є деякою функцією часу і визначається за формулою

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[\xi(t + \Delta t) - \xi(t)]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M\xi(t, \Delta t)}{\Delta t} = m'(t), \quad (3.3)$$

де $\xi(t, \tau) = \xi(t + \tau) - \xi(t)$ – приріст потоку, тобто число подій потоку, що відбулися на інтервалі $[t, t + \Delta t)$, $m(t) = M\xi(t)$ – математичне сподівання потоку. Зауважимо, що приріст $\xi(t, \tau)$ можна розглядати як випадкову величину.

Для характеристики пуассонівського потоку крім його інтенсивності $\lambda(t)$ використовується також **провідна функція** $\Lambda(t, \tau)$, що визначається як **середнє число подій**, які відбулися за інтервал часу $[t, t + \tau]$:

$$\Lambda(t, \tau) = \int_t^{t+\tau} \lambda(t) dt.$$

Враховуючи (3.3), провідна функція $\Lambda(t, \tau) = M\xi(t, \tau) = M[\xi(t + \tau) - \xi(t)]$.

Відношення $\frac{\Lambda(t, \tau)}{\tau}$ – це середнє значення інтенсивності потоку в інтервалі $(t, t + \tau)$.

Оскільки для стаціонарного потоку інтенсивність $\lambda(t) = \lambda$, провідна функція

$$\Lambda(t, \tau) = \int_t^{t+\tau} \lambda dt = \lambda \tau = \Lambda(\tau), \text{ тобто залежить лише від довжини інтервалу.}$$

Показано [2, с.15-18, 75-78], що для нестационарного потоку з інтенсивністю $\lambda(t)$ число подій $\xi(t, \tau) = \xi(t + \tau) - \xi(t)$ розподілено за законом Пуассона із параметром $\Lambda(t; \tau)$, тобто

$$P\{\xi(t, \tau) = k\} = \frac{\int_t^{t+\tau} \lambda(t) dt}{k!} e^{-\int_t^{t+\tau} \lambda(t) dt} = \frac{[\Lambda(t, \tau)]^k}{k!} e^{-\Lambda(t, \tau)}.$$

3.4. Пуассонівські періодичні потоки

Серед нестационарних потоків увагу спеціалістів-практиків привертають стохастично періодичні потоки. Нагадаємо [8, 9], що в загальному випадку потік називається **стохастично періодичним**, якщо періодичними (з одним і тим же періодом) є його певні параметри, ймовірнісні характеристики. Що стосується стохастично періодичних потоків пуассонівського типу, то періодичною є [3-5] їх інтенсивність $\lambda(t), t \geq 0$, тобто існує таке число T , що

$$\lambda(t) = \lambda(t + T).$$

При цьому сам потік називається **періодичним пуассонівським потоком**.

Хоча в прикладних дослідженнях ці потоки зустрічаються досить часто, проте основному питанню їх дослідження – оцінці періодичної інтенсивності практично ніякої уваги не приділялося. Щоб розглянути це питання, спочатку зупинимось на аналізі можливостей використання для побудови оцінки періодичної інтенсивності методів теорії оцінювання інших класів процесів, в першу чергу стаціонарних і періодично корельованих процесів.

4. Про відмінності у визначеннях періодично корельованих процесів і періодичних пуассонівських потоків та в постановці задач оцінювання їх характеристик

На даний час достатньо глибоко розроблені методи статистичного аналізу для різних класів процесів, зокрема для стаціонарних та періодично корельованих процесів, періодичних ланцюгів Маркова. І тут виникає цілком закономірне питання: чи можливо для побудови оцінки періодичної інтенсивності використати ті чи інші елементи методів оцінювання ймовірнісних характеристик, розроблених для процесів, що теж характеризуються стохастичною періодичністю, в першу чергу періодично корельованих процесів?

Виявляється, безпосередньо не можна. Основна причина такої відповіді полягає в різних вихідних позиціях щодо визначення цих процесів. При визначенні періодично корельованого процесу [10-12] використовуються ймовірнісні характеристики **значень процесу** $\xi(t)$ в точках $t \in (-\infty, \infty)$. В основі визначення періодичного пуассонівського потоку лежать **прирости потоку** $\eta(t, \tau)$, взяті на певних часових інтервалах $[t, t + \tau) \in [0, \infty)$. Відмінності у визначеннях періодично корельованих процесів і періодичних пуассонівських потоків (процесів) є причиною відмінностей і в постановці зворотних задач – оцінці їх ймовірнісних характеристик, через властивості яких ці процеси визначаються.

Для періодично корельованого процесу $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$ з періодом T ми можемо знаходити оцінки його локальних характеристик, тобто оцінки в деякі

моменти часу. Ось одна із типових задач: побудувати оцінку математичного сподівання $M\xi(t_i)$ в точках $t_i \in [0, T], i = 1, 2, \dots, n$.

Для періодичних пуассонівських потоків, як і нестационарних пуассонівських потоків загалом, мова може йти про інтегральні оцінки їх інтенсивності, тобто про оцінки на деяких часових інтервалах. При цьому задача для періодичного з періодом T пуассонівського потоку $\xi(t), t \in [0, \infty)$, може бути сформульована таким чином: побудувати оцінку інтенсивності $\lambda(t)$ на інтервалах $[t_i, t_i + \tau_i) \subseteq [0, T], i = 1, 2, \dots, n$, що не перетинаються.

5. Можливості статистичного аналізу нестационарних пуассонівських потоків

Оскільки для побудови оцінки інтенсивності періодичного пуассонівського потоку на інтервалі $[t, t + \tau) \subseteq [0, T)$ потрібно буде використовувати прирости потоку на цьому інтервалі (і можливо на спеціально підібраних інших інтервалах), причому потік на цих інтервалах є нестационарним, то в цій ситуації виникає ще одне принципове запитання: що зроблено в напрямку оцінки інтенсивності нестационарних потоків, і що із цього можна використати для оцінки періодичної інтенсивності?

Щоб відповісти на це запитання, спочатку розглянемо приклади на знаходження оцінки інтенсивності. Перший із прикладів розглядався в [3, с.314-315], проте його розв'язок і особливо висновок до нього, в якому говориться «В більшості випадків розв'язок не може бути знайдений в явному вигляді і тому використовують числові методи», не переконливий.

Приклад 1. Досліджується пуассонівський потік $\xi(t), t \geq 0$, з інтенсивністю $\lambda(t, \bar{a})$, де $\lambda(\bullet, \bullet)$ – відома функція, $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_k)$ – вектор невідомих параметрів. Нехай в результаті спостережень за цим потоком на інтервалі $(t_1, t_1 + \tau_1)$ було зафіксовано s_1 подій, тобто для випадкової величини $\xi(t_1; \tau_1) = \xi(t_1 + \tau_1) - \xi(t_1)$ її реалізація $x(t_1; \tau_1) = x(t_1 + \tau_1) - x(t_1) = s_1$. На основі цих даних дослідити можливість побудови оцінки інтенсивності $\lambda(t, \bar{a}), t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$, або те саме, що оцінки вектора $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_k)$.

Для отримання оцінки використаємо метод максимальної правдоподібності [3, с.314-315]. Для цього запишемо функцію правдоподібності $L(\bullet)$ для випадкової величини $\xi(t_1, \tau_1)$, враховуючи, що вона розподілена за законом

Пуассона, параметром якого є провідна функція $\Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a}) = \int_{t_1}^{t_1 + \tau_1} \lambda(t, \bar{a}) dt$:

$$P(\xi(t_1; \tau_1) = s_1) = \frac{\Lambda^{s_1}(t_1, \tau_1; \bar{a})}{s_1!} e^{-\Lambda(t_1; \tau_1)} = \frac{\left(\int_{t_1}^{t_1 + \tau_1} \lambda(t, \bar{a}) dt \right)^{s_1}}{s_1!} e^{-\int_{t_1}^{t_1 + \tau_1} \lambda(t, \bar{a}) dt}. \quad (5.1)$$

Оскільки ми розглядаємо лише одну випадкову величину $\xi(t_1, \tau_1)$, функція правдоподібності співпадає із розподілом (5.1), тобто

$$L(t_1, \tau_1; \bar{a}) = \frac{\Lambda^{s_1}(t_1, \tau_1; \bar{a})}{s_1!} e^{-\Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a})}.$$

Згідно методу максимальної правдоподібності за оцінку $\hat{\bar{a}}$ вектора $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ приймається така функція $\hat{\bar{a}} = \hat{\bar{a}}(x(t_1, \tau_1))$ від спостереження $x(t_1, \tau_1)$, що надає максимум функції правдоподібності $L(t_1, \tau_1; \bar{a})$ або її логарифмові $\ln L(t_1, \tau_1; \bar{a})$. Поставлену задачу оцінки вектора $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_k)$ можна тепер записати у вигляді

$$\arg \max_{\bar{a}} L(t_1, \tau_1; \bar{a}) = \arg \max_{\bar{a}} \left(\frac{\Lambda^{s_1}(t_1, \tau_1; \bar{a})}{s_1!} e^{-\Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a})} \right)$$

або те саме, що

$$\arg \max_{\bar{a}} \ln \left(\frac{\Lambda^{s_1}(t_1, \tau_1; \bar{a})}{s_1!} e^{-\Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a})} \right),$$

тобто знайти вектор $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_k)$, який доставляє максимальне значення функції правдоподібності $L(t_1, \tau_1; \bar{a})$ або її логарифмові

$$\ln L(t_1, \tau_1; \bar{a}) = s_1 \ln \Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a}) - \ln(s_1!) - \Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a}).$$

Для знаходження оцінки максимальної правдоподібності, потрібно розв'язати систему рівнянь правдоподібності

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \ln L(t_1, \tau_1; \bar{a}) = \frac{\partial}{\partial a_i} (s_1 \ln \Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a}) - \ln(s_1!) - \Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a})) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (5.2)$$

Доданки $\ln(s_1!)$ в системі (5.2) не залежать від \bar{a} , тому вона набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (s_1 \ln \Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a}) - \Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a})) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

або після диференціювання

$$s_1 \frac{\Lambda'_{a_i}(t_1, \tau_1; \bar{a})}{\Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a})} - \Lambda'_{a_i}(t_1, \tau_1; \bar{a}) = \Lambda'_{a_i}(t_1, \tau_1; \bar{a}) \left(\frac{s_1}{\Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a})} - 1 \right) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Прирівнюючи множник $\left(\frac{s_1}{\Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a})} - 1 \right)$ кожного рівняння цієї системи до нуля, отримаємо еквівалентну систему із $k+1$ рівнянь:

$$\Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a}) = s_1, \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (5.3)$$

Оскільки всі її $k+1$ рівняння системи (5.3) співпадають, замість системи рівнянь достатньо розглядати лише одне рівняння

$$\Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a}) = \Lambda(t_1, \tau_1; a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_k) = s_1. \quad (5.4)$$

Рівняння (5.4) із невідомими параметрами $a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_k$ будемо називати **розрахунковим**. Щоб знайти його розв'язок, виберемо головний параметр (компоненту) із неведомих $a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_k$, наприклад, a_0 , при цьому всі інші

параметри є вільними. Надавши вільним параметрам певні значення та підставивши їх в рівняння (5.4), знайдемо розв'язок відносно головного параметра. Отримані значення вільних і головного параметрів позначимо через $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_k$. В сукупності вони утворюють вектор $\hat{\bar{a}} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_k)$, який і є оцінкою вектора $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_k)$. Якщо тепер компоненти цього вектора підставити у вираз для інтенсивності $\lambda(t, \bar{a}), t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$, отримаємо її оцінку $\hat{\lambda}(t, \hat{\bar{a}}), t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$.

Оскільки значення вільних параметрів можна вибрати довільно, то множина розв'язків рівняння (5.4), тобто множина оцінок $\hat{\bar{a}} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_k)$ є нескінченною. Звідси виходить, що нескінченною, а значить і неоднозначною, є також множина оцінок інтенсивності $\hat{\lambda}(t, \hat{\bar{a}}), t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$. Отже в сформульованому вигляді ця задача однозначного рішення не має. Однозначну оцінку інтенсивності нестационарного пуассонівського потоку можливо знаходити лише на окремих інтервалах часової напівосі $[0, \infty)$ і при умові, що інтенсивність на цих інтервалах залежить лише від одного параметра.

Приклад 2. Досліджується пуассонівський потік $\xi(t), t \geq 0$, причому припускається, що його інтенсивність залежить лише від одного параметра. В результаті спостережень за потоком на інтервалі $(t_1, t_1 + \tau_1)$ було зафіксовано s_1 подій. Побудувати оцінку інтенсивності потоку для випадків, коли: а) $\lambda(t) = a_0$; б) $\lambda(t) = a_1 t$.

Випадок а). Якщо $\lambda(t) = \lambda = a_0$, провідна функція $\Lambda(t_1, \tau_1) = \int_{t_1}^{t_1 + \tau_1} a_0 dt = a_0 \tau_1$.

При цьому розрахункове рівняння (5.4) набуває вигляду $\Lambda(t_1, \tau_1) = a_0 \tau_1 = s_1$. Звідси виходить, що оцінкою інтенсивності є величина $\bar{a}_0 = s_1 / \tau_1, t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$, або, використовуючи традиційне для інтенсивності позначення, $\hat{\lambda}(t) = \hat{\lambda} = s_1 / \tau_1, t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$.

Випадок б). Якщо $\lambda(t) = a_1 t$, то провідна функція

$\Lambda(t_1, \tau_1) = \int_{t_1}^{t_1 + \tau_1} a_1 t dt = \frac{a_1 \tau_1}{2} (2t_1 + \tau_1)$, відповідно розрахунковим є рівняння

$\frac{a_1}{2} (2t_1 \tau_1 + \tau_1^2) = s_1$. Із нього знаходимо, що $a_1 = \frac{2s_1}{\tau_1 (2t_1 + \tau_1)}$. Отже оцінкою

інтенсивності є функція $\hat{\lambda}(t) = \frac{2s_1}{\tau_1 (2t_1 + \tau_1)} t, t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$.

Відзначимо, що для розглянутих випадків а) і б) оцінка інтенсивності визначається однозначно. Проте якщо для випадку а) оцінка інтенсивності

$\hat{\lambda}(t) = \frac{s_1}{\tau_1}$, $t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$, не залежить від розміщення інтервалу $[t_1, t_1 + \tau_1)$ на осі $[0, \infty)$, тобто не залежить від значення t_1 , ситуація у випадку б) є іншою.

При одних і тих же результатах спостережень, тобто коли τ_1 і s_1 одні і ті ж, графіки оцінки інтенсивності на різних інтервалах спостереження мають різні аналітичні вирази і відрізняються за геометричною формою, тобто при паралельному переносі вони не сумісні. Разом із такою розбіжністю має місце цікавий факт. Враховуючи, що у виразі $\hat{\lambda}(t) = \frac{2s_1}{\tau_1(2t_1 + \tau_1)}t$, $t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$, параметр t_1 і аргумент $t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$ є величинами однакового порядку, неважко переконатися, що

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \hat{\lambda}(t), t \in [t_1, t_1 + \tau_1) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{2s_1}{\tau_1(2t_1 + \tau_1)}t, t \in [t_1, t_1 + \tau_1) = \frac{2s_1}{2\tau_1} = \frac{s_1}{\tau_1}.$$

Остання формула показує, що коли інтервал спостереження $[t_1, t_1 + \tau_1]$ зсувається в сторону зростання аргументу t , то при фіксованому s_1 оцінка інтенсивності прямує до величини $\frac{s_1}{\tau_1}$, яка є оцінкою інтенсивності стаціонарного потоку.

Приклад 3. В результаті спостережень за стаціонарним пуассонівським потоком $\xi(t)$ на інтервалах $[t_i, t_i + \tau_i)$, $i=1, \dots, m$, було зафіксовано s_i подій:

$$\xi(t_i; \tau_i) = \xi(t_i + \tau_i) - \xi(t_i) = s_i, i=1, \dots, m. \text{ Сума всіх інтервалів } \sum_{i=1}^m \tau_i = \tau, \text{ сума всіх}$$

подій $\sum_{i=1}^m s_i = s$. Вважається, що інтервали $[t_i, t_i + \tau_i)$, $i=1, \dots, m$, не перетинаються. Використовуючи ці результати, побудувати оцінку інтенсивності λ .

Оскільки прирости $\xi(t_i; \tau_i) = \xi(t_i + \tau_i) - \xi(t_i)$ на інтервалах, що не перетинаються, є незалежними величинами, функція правдоподібності

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n P(\xi(t_i; \tau_i) = s_i) = \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda \tau_i)^{s_i}}{s_i!} e^{-\lambda \tau_i} = \lambda^s e^{-\lambda \tau} \prod_{i=1}^n \frac{\tau_i^{s_i}}{s_i!}.$$

Позначимо $\prod_{i=1}^n \frac{\tau_i^{s_i}}{s_i!} = a$, при цьому функція правдоподібності $L(\lambda) = a \lambda^s e^{-\lambda \tau}$.

Взявши похідну від цієї функції та прирівнявши її до нуля, маємо

$$L'_\lambda = a s \lambda^{s-1} e^{-\lambda \tau} - a \tau \lambda^s e^{-\lambda \tau} = a \lambda^{s-1} e^{-\lambda \tau} (s - \lambda \tau) = 0$$

або те саме, що $s - \lambda \tau$. Звідси отримуємо, що оцінкою інтенсивності λ є величина

$$\hat{\lambda} = \frac{s}{\tau}. \quad (5.5)$$

Аналіз отриманих в роботі теоретичних результатів та розглянутих прикладів дозволяє стверджувати, що побудова однозначної оцінки періодичної інтенсивності можлива не для всіх загалом періодичних пуассонівських потоків, а лише для потоків, що задовольняють певним умовам. Сформулюємо їх наступним чином.

Будемо вважати, що періодичний пуассонівський потік $\xi(t), t \in [0, \infty)$ з періодом T є таким, що на інтервалі $[0, T)$ можна виділити окремі інтервали $[t_i, t_i + \tau_i), i = 1, \dots, m$, які не перетинаються, їх об'єднання співпадає з інтервалом $[0, T)$, причому на кожному з інтервалів $[t_i, t_i + \tau_i)$ потік є стаціонарним. Це припущення дає змогу виділити із множини періодичних пуассонівських потоків окремий клас потоків, для яких можливо ставити питання про побудову однозначної оцінки їх інтенсивності, що задовольняє умовам незміщеності, слухність і ефективність.

6. Пуассонівські періодичні кусково стаціонарні потоки

Означення 1. Пуассонівський потік $\xi(t)$ називається періодичним кусково стаціонарним потоком, якщо його параметр $\lambda(t)$ є періодичною кусково постійною функцією з періодом T .

У визначенні періодичних пуассонівських кусково стаціонарних потоків можуть бути зроблені певні уточнення, конкретизація. Наприклад, для інтервалу $[0, T)$ можуть вказуватися інтервали стаціонарності потоку

$$[t_0, t_1), \dots, [t_{j-1}, t_j), \dots, [t_{n-1}, t_n), \quad t_0 = 0, t_n = T,$$

на кожному із яких інтенсивність приймає відповідне значення $\lambda(t) = \lambda_j, t \in [t_{j-1}, t_j)$. Якщо $\tau_j = t_j - t_{j-1}$ – довжини інтервалів $[t_{j-1}, t_j), j = 1, \dots, n$, то в сукупності ці довжини можна подати у вигляді вектора

$$\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_j, \dots, \tau_n), \quad \text{для якого } \sum_{j=1}^n \tau_j = T, \quad \text{самі ж інтервали } [t_{j-1}, t_j), j = 1, \dots, n,$$

ще можна записати у вигляді $[t_{j-1}, t_{j-1} + \tau_j), j = 1, \dots, n$.

Якщо врахувати, що інтенсивність потоку є періодичною функцією з періодом T , то інтервали стаціонарності $[t_0, t_1), \dots, [t_{j-1}, t_j), \dots, [t_{n-1}, t_n)$, розміщені на періоді $[0, T)$, можна періодично розмістити з тим же періодом T на всій напівосі $[0, \infty)$ у вигляді:

$$[t_{j-1} + iT, t_j + iT), \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 0, 1, \dots \quad (6.1)$$

Оскільки за нашими припущеннями на довільному періоді $[iT, (i+1)T)$ розміщується n інтервалів стаціонарності, то використавши позначення $t_j + iT = t_{j+in}$, інтервали (6.1) можна пере позначити таким чином:

$$[t_{j-1+in}, t_{j+in}), \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 0, 1, \dots$$

Крім задання інтервалів стаціонарності також можуть бути вказані значення інтенсивностей потоку на цих інтервалах, наприклад, у вигляді вектора

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n),$$

де $\lambda_j, j=1, \dots, n$ – інтенсивність потоку на інтервалі $[t_{j-1}, t_j)$, а значить і на інтервалах $[t_{j-1} + iT, t_j + iT), i=0, 1, \dots$.

У випадках, коли про пуассонівський періодичний кусково стаціонарний потік відома деяка додаткова інформація, наприклад, відомими можуть бути період потоку, його інтервали стаціонарності, інтенсивності потоку на цих інтервалах тощо, ця інформація може вказуватися при заданні потоку. Якщо, наприклад, відомими є:

- ✓ період T , то потік може бути поданий у вигляді $\{\xi(t), T\}$;
- ✓ вектор $\bar{\tau}$ – у вигляді $\{\xi(t), \bar{\tau}\}$;
- ✓ вектор $\bar{\lambda}$ – у вигляді $\{\xi(t), \bar{\lambda}\}$;
- ✓ період T і вектор $\bar{\lambda}$ – у вигляді $\{\xi(t), T, \bar{\lambda}\}$;
- ✓ вектори $\bar{\tau}$ і $\bar{\lambda}$ – у вигляді $\{\xi(t), \bar{\tau}, \bar{\lambda}\}$.

Подання періодичного пуассонівського кусково стаціонарного потоку в тому чи іншому вигляді дозволяє робити постановки конкретних, чітко сформульованих задач. Наприклад, для потоку $\{\xi(t), \bar{\lambda}\}$ такими задачами можуть бути оцінка періоду T і вектора $\bar{\tau}$; для потоку $\{\xi(t), \bar{\tau}\}$ – оцінка вектора $\bar{\lambda}$.

7. Оцінка інтенсивності періодичного пуассонівського кусково стаціонарного потоку

Розглянемо питання побудови оцінки інтенсивності пуассонівського періодичного кусково стаціонарного потоку $\{\xi(t), T, \bar{\tau}\}$, тобто потоку, для якого відомими є його період T та вектор інтервалів стаціонарності $(t_0, t_1), \dots, (t_{j-1}, t_j), \dots, (t_{n-1}, t_n)$, де $t_0 = 0, t_n = T$, або відповідний їм вектор тривалостей стаціонарності $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_j, \dots, \tau_n)$, де $\tau_j = t_j - t_{j-1}$. При цьому вектор інтенсивностей $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n)$ є невідомим.

Спостереження за потоком здійснювалися на інтервалі $[0, T']$, $T' \gg T$, $\left[\frac{T_0}{T} \right] = m$, де $[\bullet]$ – ціла частина. Весь інтервал спостереження $[0, T']$ розіб'ємо на окремі T_i -інтервали $[(i-1)T, iT), i=1, \dots, m$, довжина кожного з яких рівна періоду T .

Результати спостережень розмістимо у вигляді $m \times n$ матриці, поданої в таб.1, де m – число T_i -інтервалів $[(i-1)T, iT)$, на протязі яких велися спостереження за потоком, n – кількість інтервалів стаціонарності потоку на кожному T_i -інтервалі. Елемент $s(i, j)$ матриці – це кількість подій, які були

зафіксовані на j -му інтервалі стаціонарності i -го T -інтервалу, тобто $s(i, j)$ – це приріст потоку $\xi(t)$ на інтервалі $[t_{j-1} + (i-1)T, t_{j-1} + \tau_j + (i-1)T)$:

$$s(i, j) = x(t_{j-1} + (i-1)T, \tau_j) = x(t_{j-1} + \tau_j + (i-1)T) - x(t_{j-1} + (i-1)T).$$

В останній стрічці матриці розміщені суми $S(j) = \sum_{i=1}^m s(i, j)$, $j = 1, \dots, n$, кожна з яких рівна сумі подій, що відбулися на всіх інтервалах стаціонарності $[t_{j-1} + (i-1)T, t_j + (i-1)T + \tau_j)$, $i = 1, \dots, m$, з однією і тією ж інтенсивністю λ_j , оцінку якої і потрібно знайти.

Табл.1. Результати спостережень за пуассонівським періодичним кусково стаціонарним потоком

Номер інтервалу на T -періоді \numberline{Номер T -періоду}	1	...	j	...	n
1	$s(1,1)$...	$s(1, j)$...	$s(1, n)$
...
i	$s(i,1)$...	$s(i, j)$...	$s(i, n)$
...
m	$s(m,1)$...	$s(m, j)$...	$s(m, n)$
	$S(1)$...	$S(j)$...	$S(n)$

Оскільки при фіксованому j на кожному із інтервалів $[t_{j-1} + (i-1)T, t_j + (i-1)T + \tau_j)$, $i = 1, \dots, m$, потік є стаціонарним із поки що невідомою інтенсивністю λ_j , то приймаючи до уваги метод оцінки інтенсивності в прикладі 3, зокрема формулу (5.5), неважко бачити, що оцінкою інтенсивності λ_j , $j = 1, \dots, n$ буде статистика

$$\hat{\lambda}_j = \frac{S(j)}{m\tau_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

де, як зазначалося раніше, $S(j)$ – це сума подій, що відбулися на всіх інтервалах стаціонарності $[t_{j-1} + (i-1)T, t_j + (i-1)T + \tau_j)$, що мають однакову довжину τ_j і кожному з яких одна і та ж інтенсивність λ_j , m – число інтервалів стаціонарності. Вектор $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_j, \dots, \tilde{\lambda}_n)$ буде оцінкою вектора інтенсивностей $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n)$.

8. Висновки

Наведено основні поняття та властивості пуассонівських потоків – стаціонарних, нестаціонарних і періодичних. Розглянуто питання щодо

можливостей використання для побудови оцінки інтенсивності періодичного пуассонівського потоку методів статистичного аналізу періодично корельованих процесів та нестационарних пуассонівських потоків. Враховуючи отриману при цьому негативну відповідь, із множини періодичних пуассонівських потоків виділено клас потоків, для яких можлива розробка методів оцінки їх інтенсивності. Це клас періодичних пуассонівських кусково стаціонарних потоків, для яких і побудована оцінка їх періодичної інтенсивності. Отримані результати відкривають шлях до оцінки періодичної інтенсивності емпіричних стохастично періодичних потоків пуассонівського типу, наприклад, викликів на станцію швидкої допомоги, потоків інформації в Інтернет-трафіках тощо

ЛІТЕРАТУРА

1. Брей Р., Лоухед Р. Солнечные пятна. – М.: Мир, 1967. – 384 с.
2. Хинчин А.Я. Математические методы теории массового обслуживания. Труды математического института имени В.А.Стеклова, т.49. М.: Изд. АН СССР, 1955. – 122 с.
3. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы. Справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 367 с.
4. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1966. – 431 с.
5. Гнеденко Б.В. Беседы о теории массового обслуживания. – М.: Знание, 1973. – 64 с.
6. Красильников О.І., Марченко Б.Г., Приймак М.В. Процеси з незалежними періодичними приростами і періодичні білі шуми // Відбір і обробка інформації. – 1996. – Вип. 10(86). – С. 22-27.
7. Математическая энциклопедия, т. 4. – М.: Сов. энцикл., 1981. – 1208 с.
8. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис...докт. техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. – 34 с.
9. Приймак М.В., Мацюк О.В., Маєвський О.В., Прошин С.Ю. Моделі та методи дослідження систем масового обслуговування марківського типу в умовах стохастичної періодичності та їх застосування в енергетиці // Технічна електродинаміка. – 2014. – С.11-16.
10. Коронкевич О.І. Лінійні динамічні системи під дією випадкових сил //Наукові записки Львів. ун-ту. – 1957. - 44, №8. – С. 175-183.
11. Гладышев Е.Г. Периодически и почти периодически коррелированные случайные процессы с непрерывным временем // Теория вероятностей и ее применение. – 1963, 8, вып. 2. – С.84-189.
12. Драган Я.П. Свойства отсчетов периодически коррелированных случайных процессов // Отбор и передача информации, 1972, №33. – С.9-12.
13. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Корольок, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640 с.

УДК 517.958+338.3+519.6

Имитационное моделирование системы газ-поршень при высоких степенях сжатия

М. А. Хайленко, О. В. Хайленко, Ю. К. Чернышев

Национальный аэрокосмический университет имени Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Украина

Приведены результаты имитационного моделирования распространения звука в сильно сжатом одноатомном газе, полученные применением дискретно-событийного представления поведения коллектива твёрдых сфер. Рассмотрена динамика выталкивания поршня в вакуум. Проведено исследование термодинамических параметров в процессе выталкивания подвижного тела сильно сжатым газом. Обнаружены эффекты пульсаций, обусловленные повышением скорости звука с повышением плотности. Дан численный метод задания возмущений без изменения полной энергии за счёт искусственного уменьшения энтропии.

Ключевые слова: *событийное моделирование, поправки к давлению, скорость звука, твёрдые сферы.*

Наведено результати імітаційного моделювання поширення звуку в сильно стислому одноатомну газі, отримані застосуванням дискретно-подієвого уявлення поведінки колективу твердих сфер. Розглянуто динаміку виштовхування поршня в вакуум. Проведено дослідження термодинамічних параметрів в процесі виштовхування рухомого тіла сильно стиснутим газом. Виявлені ефекти пульсацій, обумовлені підвищенням швидкості звуку з підвищенням щільності. Дан чисельний метод завдання збурень без зміни повної енергії за рахунок штучного зменшення ентропії.

Ключові слова: *подієве моделювання, поправки до тиску, швидкість звуку, тверді сфери.*

The results of the simulation of sound propagation in highly compressed monatomic gas are obtained using discrete-event behavior of the collective representation of hard spheres. The dynamics of pushing the piston in a vacuum was described. Research of thermodynamic parameters in the course of pushing out of a mobile body is conducted by strongly compressed gas was done. The effects of fluctuations caused by an increase in the speed of sound with increasing density was found. The numerical perturbation method of setting without changing the total energy due to an artificial reduction of the entropy was described.

Key words: *event simulation, the amendment to the pressure, the speed of sound, solid spheres.*

1. Введение

Скорость распространения v_{sound} малых возмущений в идеальном газе зависит лишь от температуры и вычисляется по формуле [1]:

$$v_{sound} = \sqrt{\frac{\gamma}{3}} v_{heat}, \quad (1)$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, v_{heat} – среднеквадратичная (тепловая) скорость молекул газа.

В свою очередь, $v_{heat} = \sqrt{\frac{3NkT}{\mu}}$, где k – постоянная Больцмана, T – температура в градусах Кельвина, $\mu = Nm_0$ – масса моля (в граммах), m_0 – масса одной молекулы, $N = 6 \cdot 10^{23}$ – число Авогадро. При изотермическом сжатии скорость звука, согласно (1), не изменяется. Однако в действительности это не так; значительную роль начинает играть степень заполненности рабочей области $\eta = \frac{V_0}{V}$, где V – объём газа, V_0 – суммарный объём молекул. В идеальном газе давление P_{th} зависит лишь от температуры и плотности: $P_{th} = n_r kT$, где n_r – количество молекул в 1 см^3 . Поправки к реальному давлению $\kappa_p = \frac{P_{th}}{P}$ и скорости звука при малых значениях параметра η могут быть получены путём использования уравнения Ван-дер-Ваальса. Но для плотностей, близких к плотностям жидкого состояния, «практическая ценность уравнения Ван-дер-Ваальса невелика» [1]. Таким образом, актуальной задачей является вычисление поправок при высоких степенях сжатия и их учёт при решении задач типа вычисления скорости звука, динамики выталкивания поршня. Наиболее полно математическая теория поправок для газа упругих сфер при больших значениях коэффициента заполнения рассмотрена в работе [2]. Однако полученные в ней результаты недостаточны.

2. Метод твёрдых сфер

С появлением ЭВМ первый успех в рассматриваемой теме был достигнут в [3] путём имитационного моделирования, сводящегося к замене реальных молекул твёрдыми сферами и использованию законов механики при расчёте траекторий. Повышение вычислительных мощностей и развитие специальных алгоритмических методов дало возможность составить таблицы поправок κ_p к давлению и κ_λ к длине свободного пробега [4], графически представленных на рис. 1. Если давление в нормальных условиях равно P_{th} , то в случае значительного сжатия для вычисления истинного давления P вносится поправка к теоретическому значению:

$$P = \frac{P_{th}}{\kappa_p(\eta)}. \quad (2)$$

При столкновении двух упругих сфер массами m_1 , m_2 и радиусами R_1 , R_2 со скоростями \vec{v}_1 , \vec{v}_2 и центрами (в момент столкновения) \vec{r}_1 и \vec{r}_2 новые скорости \vec{v}'_1 , \vec{v}'_2 рассчитываются по формулам, связанным с выполнением законов сохранения суммарных энергии, импульса и момента импульса [5]:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \frac{2M(\Delta\vec{v}, \vec{n})}{m_1} \vec{n}, \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \frac{2M(\Delta\vec{v}, \vec{n})}{m_2} \vec{n}, \quad (3)$$

где $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, $\vec{n} = \frac{\vec{I}_2 - \vec{I}_1}{R_2 + R_1}$, $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса.

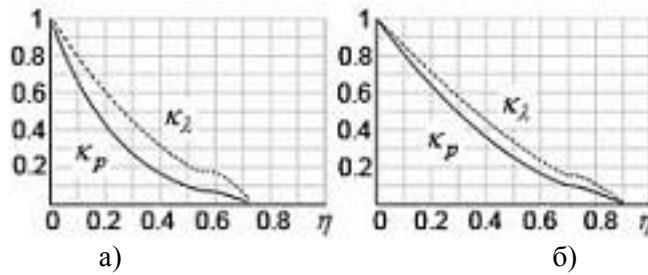


Рис.1. Зависимости поправочных коэффициентов $\kappa_p = \frac{P_{th}}{P}$ и $\kappa_\lambda = \frac{l}{l_{th}}$

от степени заполнения в случае трёхмерного (а) и двумерного (б) пространств

Для обеспечения максимальной скорости поиска ближайших по времени событий-столкновений используется декомпозиция рабочей области путём разбиения её на кубические ячейки [4, 5] и составления динамической очереди для всей совокупности модельных частиц.

3. Расчётная схема системы газ-поршень

Рабочая область представлена цепочкой n_{cells} кубических ячеек с единичными рёбрами. Общие грани двух ячеек считаются проницаемыми, а внешние – отражающими. Помимо этого, рассматривается подвижная стенка с заданным расположением X_{body} по оси цепочки ячеек, моделирующая границу тела (поршня) массы m_{body} . Рабочая область, задаваемая неравенством $1 \leq x < X_{body} \leq n_{cell}$, изначально хаотически заполнена n модельными сферами единичной массы и радиуса R , каждой из которых приписана случайная скорость \vec{v}_i единичной длины с равномерным угловым распределением. Считая аргон наиболее близким по своим физическим свойствам газу из твёрдых сфер и учитывая, что степень заполнения аргона при нормальных температурных условиях составляет примерно 10^{-3} , получаем приближённую формулу для давления:

$$P_{th} = 14.65 \frac{\eta}{\mu} T \text{ МПа.} \quad (4)$$

В среднем в одной ячейке содержится $n/(X_{body}-1)$ модельных частиц. Значение параметра заполнения оценивается как $\eta = V_{part}/V_{all}$, где $V_{part} = (4\pi R^3/3)n$, $V_{all} = (X_{body}-1+2R)(1+2R)^2$.

Развитие картины взаимодействия модельных частиц после реализации 10-15 (в среднем) упругих парных столкновений для каждой модельной частицы приводит к «максвеллизации», [6], т.е. к установлению распределения

Максвелла с единичной средней квадратичной скоростью и средней энергией, равной 0.5. Давление, оказываемое одной модельной частицей на стенки ячейки в этих условиях, равняется $\frac{1}{3}$ условных единиц, а температура равна

$$T_{\text{simul}} = \frac{1}{3} [4].$$

Преобразование скоростей при столкновении модельной частицы с массой m и скоростью \vec{v} ($v_x > 0$) с поршнем, обладающим скоростью V_{body} , коллинеарной оси абсцисс, производится по законам упругого отражения:

$$\begin{aligned} v'_x &= (2M_{\text{body}}V_{\text{body}} + (m - m_{\text{body}})v_x) / (m + m_{\text{body}}), \\ V'_{\text{body}} &= (2mv_x - (m - m_{\text{body}})V_{\text{body}}) / (m + m_{\text{body}}). \end{aligned} \quad (5)$$

Графическое дифференцирование сглаженной зависимости V_{body} от времени приводит к зависимости ускорения от времени, а следовательно, и к зависимости от времени силы давления модельного газа на подвижную стенку. Общая длина цепочки в количестве $n_{\text{cells}} = 10000$ сопоставляется 1 м, модельной тепловой скорости в одну условную единицу сопоставляется реальная тепловая скорость 500 м/с, для разреженного газа с $\eta = 0.001$ давлению на стенку тела сопоставим величину, вычисленную по формуле (4). Эти значения близки к соответствующим величинам для аргона при нормальных условиях. После максвеллизации средняя скорость звука в системе модельных частиц одноатомного становится равной, согласно формуле (1), $v_{\text{sound}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = 0.7454$ условных единиц, что соответствует 372,7 м/с.

Рассматриваемая расчётная схема позволяет задавать начальные возмущения таким образом, что уменьшение энтропии сопровождается постоянством полной энергии газа. Векторам скоростей модельных частиц в ячейкам с номерами от 1 до $n_{\text{sound}} \approx 100$ придаётся направление вдоль оси OX без изменения их длин. Это и вносит возмущение, распространяющееся в дальнейшем по оси OX, причём полная энергия не изменяется, а энтропия, как показатель упорядоченности, – уменьшается. В [4, 7] рассмотрено распространения волны суммарного импульса. Скорость звука отождествляется со скоростью перемещения нулевой точки фронта, отделяющей область положительных значений абсциссы импульса от области отрицательных.

Для решения задач типа моделирования выталкивания свободного поршня из трубы или развития детонационной волны предлагается скорость распространения возмущений определять, исходя из интервалов времени между столкновениями фронта с подвижным телом. На рис. 2 отображены последовательности таких отражений при массе $M_{\text{body}} = 10^6$, $n_{\text{sound}} = 100$, $X_{\text{body}} = 2000$. Значение массы подвижного тела в таком случае на несколько порядков больше, чем масса газа, что соответствует очень малым скоростям выталкиваемого тела, т.е. практически неизменному объёму газа. Считая

теплову скорость равной 500 м/с и учитывая отражения, начиная с третьего, приходим к значениям скорости звука.

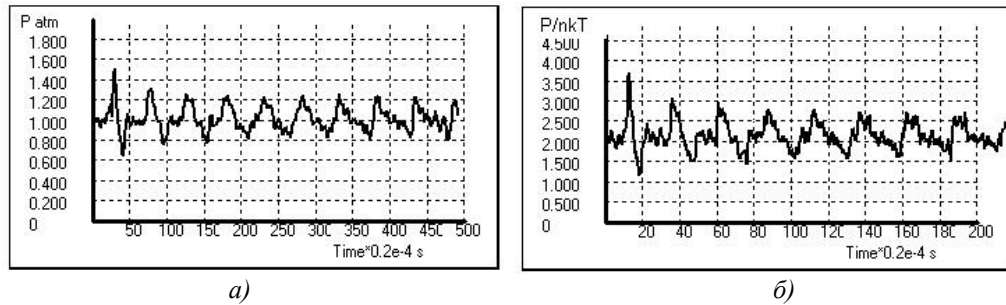


Рис.2. Отражения фронта малых возмущений в газе при различных параметрах заполненности: а) $\eta_a = 0.001$, $\kappa_a = 0.996$; б) $\eta_b = 0.171$, $\kappa_b = 0.49$

В случае а) газ является разреженным, $\eta_a = 0.001$, $\kappa_a = 0.996$, давление при отсутствии возмущений $p_a = 0.1004$ МПа и $v_{\text{sound}(a)} = 375 \pm 5$ м/с, что практически совпадает с теоретически вычисленной скоростью звука 372.7 м/с. В случае б) $\eta_b = 0.171$, $\kappa_b = 0.49$ (согласно рис. 1, а), $p_b = 2.03 p_{\text{th}}$ и $v_{\text{sound}(b)} = 758 \pm 5$ м/с. Заметим, что в случае б) $p_{\text{th}} \approx 17.1$ МПа, а давление с учётом поправок $p_b \approx 35$ МПа. Отношение скоростей звука оказывается обратным к отношению поправок к давлению (рис. 3) :

$$v_{\text{sound}(b)} / v_{\text{sound}(a)} = \kappa_a / \kappa_b . \quad (6)$$

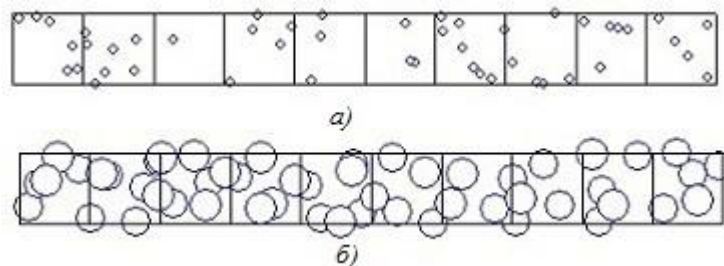


Рис.3. Сравнение заполненностей части ячеек рабочей области: а) $\eta_a = 0.001$, $\kappa_a = 0.996$; б) $\eta_b = 0.171$, $\kappa_b = 0.49$

Давление и скорость звука в случае б) приблизительно в два раза больше теоретических, чем в случае а), что и является результатом учёта поправок к формуле (1) для скорости звука в разреженном газе.

Помимо приведенного примера, соотношение (6) проверено для широкого диапазона коэффициентов заполнения. Интервал $0.1 < \eta < 0.55$ соответствует состоянию сильно сжатого модельного газа, $0.55 < \eta < 0.57$ – жидкости из твёрдых сфер, $0.57 < \eta < 0.74$ – твёрдого плотноупакованного тела.

4. Выталкивание подвижного тела

Рассмотрим тот случай, когда масса подвижного тела сравнима с массой газа; например, $m_{\text{body}} = M_{\text{body}} n = 10000$ при $M_{\text{body}} = 1$. На рис. 4 приведен результат выталкивания в вакуум такого подвижного тела; его масса принята равной массе газа. Начальное положение подвижной стенки задано её координатой $X_{\text{body}} = 2000$ усл.ед., т.е. 0.2 м; для разреженного модельного газа, близкого по свойствам к идеальному, $P_{\text{th}} \approx 0.1$ МПа.

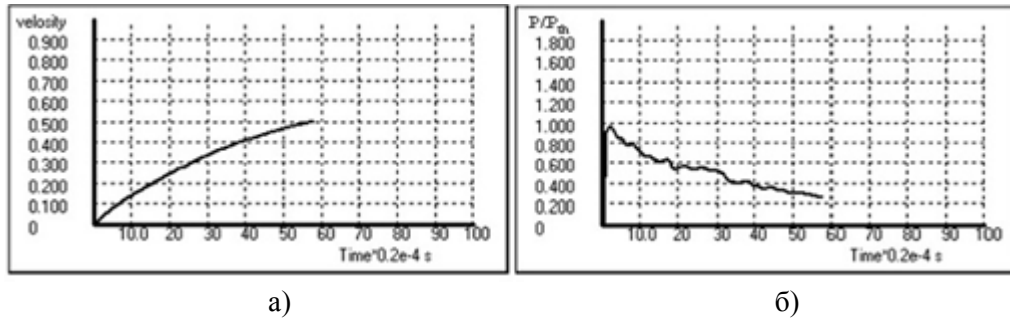


Рис.4. Выталкивание подвижного тела массы, равной массе газа; газ разреженный: а) график скорости тела; б) зависимость давления на поршень от времени.

Дополнительная информация о состоянии газа в рабочей области приведена на графиках рис. 5.

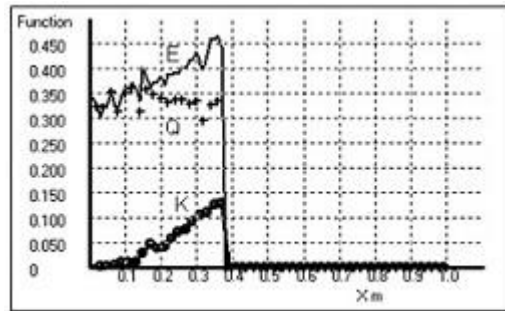


Рис.5. Распределение термодинамических параметров для одной частицы

Рабочая область разбивается на 100 равных отрезков Δ_i , $i = 1..100$, на каждом из которых в отдельные моменты времени подсчитывается суммарные

$$\text{масса } \text{mass}_i = \sum_{x_k \in \Delta_i}^{n_i} m_k, \text{ энергия } E_i = \sum_{x_k \in \Delta_i}^{n_i} \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2}, \text{ импульс } \vec{P}_i = \sum_{x_k \in \Delta_i}^{n_i} m_k \vec{v}_k,$$

$$\text{кинетическая энергия слоя } K_i = \frac{\vec{P}_i^2}{2\text{mass}_i} \text{ и тепловая энергия слоя } Q_i = E_i - K_i,$$

после чего вычисляются эти же величины, приходящиеся на одну частицу путём деления на количество n_i частиц в слое. Между отдельными моментами

измерений происходит 10^6 событий; общее количество событий в данном случае равно примерно 85 миллионов.

Энергия газа передаётся подвижному телу, в результате чего для рассматриваемого момента времени отношение энергии тела к полной энергии газа равняется 0.34, температура газ снижается до 0.75 от исходной.

Рассмотрим аналогичный процесс выталкивания подвижного тела сильно сжатым газом. Согласно результатам п.3, скорость звука в плотном газе может значительно превышать скорость звука в разреженном газе. Это значит, что на динамику продвижения тела могут влиять отражения звуковой волны. На рис. 6, а) воспроизведено заполнение единичных кубических ячеек центрами твёрдых сфер радиусом $R = 0.37$, так что $\eta = 0.49$, $\kappa_p(0.49) = 0.108$.

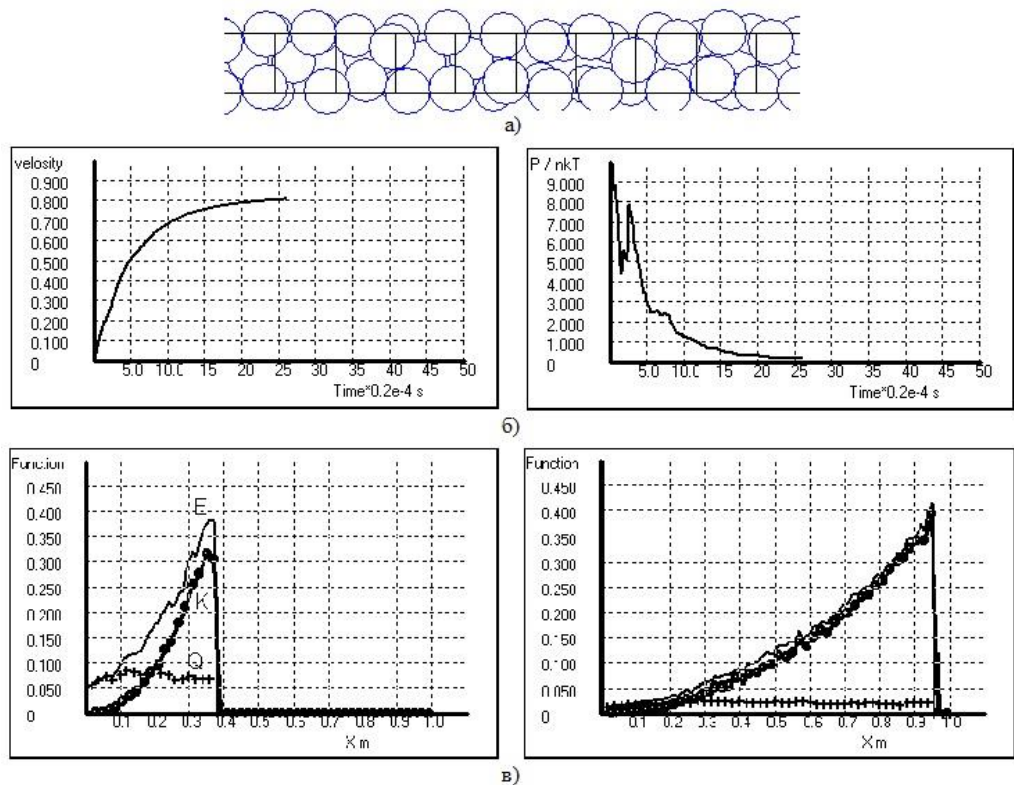


Рис.6. Выталкивание подвижного тела сильно сжатым газом: а) заполнение единичных ячеек центрами твёрдых сфер при $\eta = 0.49$; б) изменение скорости тела и давления на стенку со временем; в) преобразование тепловой энергии газа в кинетическую

5. Выводы

Сравнительный анализ результатов, приведенных на графиках рис. 4, 5, 6, показывает следующее:

– график зависимости давления на поршень от его скорости при высоком уровне заполнения содержит участки резкой неравномерности, что можно объяснить распространением звуковой волны и её отражениями;

– к.п.д. процесса передачи телу энергии сжатого газа значительно выше; для данного примера при выходе тела из рабочей области отношение энергии тела к начальной энергии газа равно примерно 0.64, а скорость можно оценить как 400 м/с;

– температура газа в каждый момент времени при выталкивании свободного поршня в вакуум примерно постоянна по длине рабочей области;

– в случае значительной заполненности практически вся начальная тепловая энергия молекул газа переходит в кинетическую с резким снижением тепловой (а значит, с резким снижением температуры).

В целом событийный подход к имитационному моделированию поведения газа позволяет достаточно адекватно описывать особые случаи поведения газа в процессе динамического взаимодействия с подвижными телами, испытывающими давление. Кроме того, становится возможным численное исследование описанных процессов с учётом энерговыделения при локальных взаимодействиях модельных частиц [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Телеснин Р. В. Молекулярная физика. – М.: Высш. шк., 1965. – 298 с.
2. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. – М.: Мир, 1978. – 496 с.
3. Alder B. J., Wainwright T. Molecular dynamics by electronic computers. // Proceedings of the International Symposium on Transport Processes in Statistical Mechanics. – New York : Interscience, 1958. – P.97.
4. Чернышев Ю. К. Методы вычисления статистических параметров в событийном моделировании. – Х.: «Фактор», 2014. – 244 с.
5. Чернышев Ю. К. Решение задач имитационного моделирования поведения большого количества модельных частиц – Х.: ХАИ, 2006. – 58с.
6. Prigogine I., Stengers I. Order out of chaos. Man's new dialogue with nature. – London, 1984. – 430 P.
7. Чернышев Ю. К. Событийное программирование. Применение к решению некоторых задач физики – Х.: ХАИ, 2008. – 60 с.
8. Хайленко О. В., Чернышев Ю. К. Оптимизация процесса расчета параметров детонационной волны. // Авиационно-космическая техника и технология. – Харьков, ХАИ, 2015. – № 1/118. – С. 68-73.

CONTENTS

▪ AV Borovinsky, AV Gakhov, VO Mishchenko.	5
Energy Metrics: an experience in assessment of programs developed within a mathematical package	
▪ D. B. Bui, O. V. Shishatskaya, S. Fabumni., K. Mohammed.	19
Mathematical foundations of linearization algorithms: reflexive-transitive closures of binary relations	
▪ V. A. Dzyuba.	34
Construction of the combined numerical-analytical method for calculating high accuracy problems of shell structures	
▪ V. M. Kuklin, A. V. Pryimak, V. V. Yanovsky.	41
The impact of memory on the evolution of populations	
▪ A. I. Silakov, M. L. Ugryumov, A. S. Shmelev.	67
Mathematical modeling of hydraulic networks of structurally complex technological schema	
▪ D. I. Cherniy	78
A mathematical model of a flow in a shallow water area	
▪ O. Majevskiy, O. Matsiuk, M. Pryjmak, O. Pryjmak	87
«SIMPLIFIED» forms of periodicity of poisson processes and their intensity assessment	
▪ M. A. Khaylenko, O. V. Khaylenko, Y. K. Chernyshov.	100
Simulation of gas-piston system with a high compression ratio	
CONTENTS	108

**ВІСНИК ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
імені В.Н. Каразіна**

**Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»**

Випуски даної серії розповсюджуються у академічних та наукових колах України та за її межами з метою оперативного висвітлення досліджень у таких актуальних галузях: математичне та комп'ютерне моделювання, обчислювальний експеримент, теорія і прикладні методи обробки інформації, захист інформації, програмно-апаратні системи інформаційного або управляючого призначення, застосування математичного моделювання та системного аналізу у високих, наукоємних технологіях, враховуючи технології створення програмної продукції. Приймаються роботи, що відносяться до напрямів фізико-математичних і технічних наук (бажаний об'єм 6-18 сторінок). Усі рукописи рецензуються.

Примітка. Протягом 2016-17 рр. редакційна колегія при інших рівних умовах надаватиме перевагу роботам, що представлені англійською мовою, якщо мова статті отримала схвалення при рецензуванні.

Офіційний сайт <http://mia.univer.kharkov.ua>

Сайт редколегії <http://www.dsmmph.org.ua/bulletin.html>

**ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В.Н. Каразина**

**Серія «Математическое моделирование. Информационные
технологии. Автоматизированные системы управления»**

Випуски данной серии распространяются в академических и научных кругах Украины и за ее пределами с целью оперативного освещения исследований в следующих актуальных областях: математическое и компьютерное моделирование, вычислительный эксперимент, теория и прикладные методы обработки информации, защита информации, программно-аппаратные системы информационного или управляющего назначения, приложения математического моделирования и системного анализа в высоких, наукоёмких технологиях, включая технологии создания программной продукции. Принимаются работы, относящиеся к направлениям физико-математических и технических наук (желательный объем 6-18 страниц). Все рукописи рецензируются.

Примечание. На протяжении 2016-17 гг. редакционная коллегия при прочих равных условиях будет отдавать предпочтение работам, представленным на английском языке, если язык статьи получил одобрение при рецензировании.

Официальный сайт <http://mia.univer.kharkov.ua>

Сайт редколлегии <http://www.dsmmph.org.ua/bulletin.html>