

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Серія

«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 52

Серія заснована 2003 р.

BULLETIN

of V.N. Karazin Kharkiv National University

Series

«Mathematical Modeling.
Information Technology.
Automated Control Systems»

Issue 52

First published in 2003

Харків
2021

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Наказом Міністерства освіти і науки України від 17.03.2020 № 409 наукове фахове періодичне видання Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» включено до Категорії «Б» Переліку наукових фахових видань України за наступними спеціальностями: 113 – Прикладна математика; 122 – Комп'ютерні науки та інформаційні технології; 123 – Комп'ютерна інженерія; 125 – Кібербезпека.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 12 від 29.11.2021 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),
д.ф.-м.н., академік НАН України, проф., ІВТ
ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора), д.т.н.,
проф. ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т. (заст. гол. редактора), д.ф.-м.н.,
проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Споров О.Є. (відповідальний секретар), к.ф.-
м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Замула О. А., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені
В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ
імені Б.І. Веркіна НАН України

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН
України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Рассомахін С. Г., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені
В. Н. Каразіна

Стервєдєв М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Толстолузька О. Г. д.т.н., с.н.с., доц., ФКН
ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Угрюмов М. Л., д.т.н., проф., ІВТ ХНУ імені
В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-
енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ
імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний
технічний університет "ХПІ"

Стрельнікова О.О., д.т.н., проф. Ін-т
проблем машинобудування НАН України

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра
прикладної інформатики, університет імені
Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat.
habil. Professor of Technical Informatics and
Computer Systems, Institute of Informatics,
Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of
computer science, Dep. of C. S., University of
Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна,
к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Мова публікації: українська, англійська, російська.

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

The articles are present research in the field of mathematical modeling and computing methods, information technologies, information security. New mathematical methods of research and management of physical, technical and information processes, research on programming and computer modeling in science-intensive technologies are covered.

For teachers, researchers, graduate students working in relevant or related fields.

By the order of the Ministry of Education and Science of Ukraine from 17.03.2020 № 409 scientific professional periodical Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University series "Mathematical modeling. Information Technologies. Automated control systems" is included in Category "B" of the List of scientific professional publications of Ukraine in the following specialties: 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science and Information Technology; 123 – Computer engineering; 125 – Cybersecurity.

Approved for publication by the decision of the Academic Council of V.N. Karazin Kharkiv National University (Minutes № 12 of 29.11.2021).

Editorial Board:

Azarenkov M.O. (Chief Editor), Acad. Of the NAS of Ukraine, Dr. Sc., Prof., HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Zholtkevich G.M. (Deputy Editor), Dr. Sc, Prof. MCS V.N. Karazin Kharkiv National University

Lazurik V.T. (Deputy Editor), Dr. Sc, Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Sporov O.E., (Executive Secretary), Ph.D. Assoc. Prof, CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Zamula A.A., Ph.D. Assoc. Prof, CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Zolotarev V.A., Dr. Sc, Prof. B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine

Kuklin V.M., Dr. Sc, Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Matsevity Yu.M., Acad. Of the NAS of Ukraine, Dr. Sc., Prof., DPE V.N. Karazin Kharkiv National University

Rossomakhin S.G., Dr. Sc, Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Rutkas A.G., Dr. Sc, Prof. MCS V.N. Karazin Kharkiv National University

Styervoyedov N.G., Ph.D. Assoc. Prof, CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Tolstoluzka O.G., Dr. Sc, Assoc. Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Ugryumov M.L., Dr. Sc, Prof. HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Sheyko T.I., Dr. Sc, Prof. DPE V.N. Karazin Kharkiv National University

Shmatkov S.I., Dr. Sc, Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Shcherbina V.A., Dr. Sc, Prof. MCS V.N. Karazin Kharkiv National University

Raskin L.G., Dr. Sc, Prof. National Technical University "Kharkiv Polytechnic institute"

Strelnikova E.A., Dr. Sc, Prof., NASU A. Pidgorny Institute of Engineering Problems

Sokolov O.Yu., Dr. Sc, Prof. Nicolaus Copernicus University, Torun, Poland

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Professor of Technical Informatics and Computer Systems, Institute of Informatics, Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of computer science, Dep. of C. S., University of Nice-Sophia Antipolis, France

Editorial Address: 61022, Kharkiv, Svobodi sq., 6, V.N. Karazin Kharkiv National University, r. 534.

Phone. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Language of publication: Ukrainian, English, Russian.

The articles pass internal and external review.

Certificate of state registration: KV № 21578-11478P dated 18.08.2015

ЗМІСТ

▪ Т. Андрющенко	6
Автоматизація побудови відносин видавничо-поліграфічних підприємств із стейкхолдерами	
▪ О.А. Артюх, В.Ю. Максименко, О.Г. Толстолузька	12
Дослідження комп'ютерної моделі веб-сервісу перевірки знань	
▪ В.В. Бudyко, А.О. Попова, О.Г. Толстолузька, Є.Д. Толстолузький	19
Розробка моделі системи визначення місцезнаходження для транспорту	
▪ В.В. Друшляк, Н.М. Кізілова, О.О. Корякіна, А.А. Халін	27
Порівняльне дослідження аеродинамічних властивостей тіл іхтіозаврів	
▪ Д.А. Кулик, Є.П. Куркчі, Н.М. Кізілова	35
Аналіз «великих даних» і математичне моделювання епідемії covid-19 в країнах Європи	
▪ М.Л. Мироненко	43
Демпфування коливань рідини у резервуарах під дією вертикальної збурювальної сили з використанням методу граничних елементів	
▪ О. Ю. Мороз, О. Г. Толстолузька	52
Використання методів формального синтезу та верифікації паралельних часопараметризованих моделей для рішення системи лінійних рівнянь методом Гауса	
▪ М.Г. Нестеренко, О.І. Нестеренко, В.М. Сахно	71
Спрощення методів чисельного моделювання задачі Стефана з явним виділенням границь розділу фаз	

CONTENTS

▪ T. Andriushchenko	6
Automating the relationships between printing companies and their stakeholders	
▪ A. Artiuh, V. Maksimenko, O. Tolstoluzskaya	12
Research of the computer model of the web service for testing knowledge	
▪ V. Budko, A. Popova, O. Tolstoluzka, Y. Tolstoluzkyi	19
Model of the location system for transport	
▪ V. Drushliak, N. Kizilova, O. Koryakina, A. Khalin	27
Comparative study of aerodynamic properties of ichthyosaur bodies	
▪ D. Kulyk, Y. Kurkchi, N. Kizilova	35
Analysis of "big data" and mathematical modeling of the covid-19 epidemic in Europe	
▪ M. Myronenko	43
Damping of liquid sloshing in the tanks subjected to vertical acceleration by using the boundary element method	
▪ O. Moroz, O. Tolstoluzka	52
The use of methods of formal synthesis and verification of parallel time-parameterized models for solving the system of linear equations by the Gaussian elimination	
▪ M. Nesterenko, A. Nesterenko, V. Sakhno	71
Simplified methods of numerical modeling of Stefan's problem with explicit allocate of phase boundaries	

UDC 655.15.011.56

Automating the relationships between printing companies and their stakeholders

T. Andriushchenko

Andriushchenko Tetiana *senior instructor, department of computer systems and technologies, Semyon Kuznets Kharkiv National University of Economics, ave. Nauki, 9-A, Kharkiv, 61166, Ukraine;*
e-mail: tetiana.andriushchenko@hneu.net
<https://orcid.org/0000-0001-8620-5717>

The dynamic development of the printed goods market requires ensuring manageability and flexibility of printing business. Nowadays any printing company needs to meet stakeholders' requirements. Moreover, it should constantly monitor, analyze and assess their satisfaction. But monitoring and analysis without a quick and proper response to stakeholders' actions do not always bring the required results. Evaluating the competitiveness of a printing company can help it to keep up with the competition. The integration of a decision support system into the automated system of a printing company will allow it to make informed decisions. Maintaining the customer-oriented nature of a printing company requires the usage of modern technologies and the leading place among these technologies belongs to CRM systems. Automated systems based on CRM technologies are present in the market of printing services, but none of them makes it possible to improve the efficiency of the relationship between a printing company and its stakeholders. Therefore, the development of the system that would meet all the requirements of a printing company and support the effective decision-making process is quite relevant.

Keywords: *printing company, CRM systems, decision support systems for printing companies.*

Автоматизація побудови відносин видавничо-поліграфічних підприємств із стейкхолдерами

Андрющенко Тетяна Юрївна *старший викладач кафедри комп'ютерних систем та технологій Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, пр. Науки 9А, м. Харків, 61022, Україна*

У сучасних умовах однією з ключових проблем економічного розвитку стає забезпечення конкурентоспроможності продукції, зокрема поліграфічної. Динамічний розвиток ринку поліграфічних товарів вимагає забезпечення керованості й гнучкості бізнесу. Для того, щоб витримати конкуренцію, видавничо-поліграфічне підприємство має, насамперед, задовольнити усі вимоги не тільки замовника, але й усіх стейкхолдерів. Оцінка задоволеності замовників та стейкхолдерів продукцією, послугами та замовленнями потребує постійного моніторингу, аналізу та контролю з боку видавничо-поліграфічного підприємства. Моніторинг та аналіз без правильної відповіді на дії стейкхолдерів не принесе потрібних результатів. Впровадження систем підтримки прийняття рішень в систему видавничо-поліграфічного підприємства надає конкурентні переваги підприємству.

Витримати конкуренцію, видавничо-поліграфічному підприємству дозволить задоволення усіх вимог стейкхолдерів. Оцінка задоволеності стейкхолдерів потребує постійного моніторингу, аналізу та контролю з боку видавничо-поліграфічного підприємства. Моніторинг та аналіз без правильної відповіді на дії стейкхолдерів не принесе потрібних результатів. Розрахунок конкурентоспроможності видавничо-поліграфічного підприємства дозволить підтримувати конкурентні переваги підприємству. Впровадження системи підтримки прийняття рішень в автоматизовану систему видавничо-поліграфічного підприємства дозволить приймати підприємству обґрунтовані рішення.

Клієнтоорієнтованість видавничо-поліграфічного підприємства потребує використання сучасних технологій. Ведуче місце серед цих технологій займають CRM-системи. Автоматизовані системи засновані на CRM-технологіях мають місце на ринку поліграфічних послуг, але жодна з них не надає можливість для удосконалення ефективності взаємовідносин видавничо-поліграфічного підприємства з стейкхолдерами. Тож розробка такої системи, яка б відповідала усім вимогам видавничо-поліграфічного підприємства та давала можливість ефективно приймати рішення є доволі актуальною

Ключові слова: *видавничо-поліграфічне підприємство, CRM-систем, системи підтримки прийняття рішень видавничо-поліграфічних підприємств.*

Автоматизация построения отношений издательско-полиграфических предприятий со стейкхолдерами

Андрющенко Татьяна Юрьевна *старший преподаватель кафедры компьютерных систем и технологий Харьковский национальный экономический университет имени Семена Кузнеця, пр. Науки 9А, г. Харьков, 61022, Украина*

Выдержать конкуренцию, издательско-полиграфическому предприятию позволит удовлетворить все требования стейкхолдеров. Оценка удовлетворенности стейкхолдеров нуждается в постоянном мониторинге, анализе и контроле со стороны издательско-полиграфического предприятия. Мониторинг и анализ без правильного ответа на действия стейкхолдеров не принесет необходимых результатов. Расчет конкурентоспособности издательско-полиграфического предприятия позволит поддерживать конкурентноспособные достоинства предприятия. Внедрение системы поддержки принятия решений в автоматизированную систему издательско-полиграфического предприятия позволит принимать обоснованные решения. Клиентоориентированность издательско-полиграфического предприятия требует использования современных технологий. Ведущее место посреди этих технологий занимают CRM-системы. Автоматизированные системы, основанные на CRM-технологиях, имеют место на рынке полиграфических услуг, но ни одна из них не дает возможность усовершенствовать эффективность взаимоотношений издательско-полиграфического предприятия со стейкхолдерами. Поэтому разработка такой системы, которая бы отвечала всем требованиям издательско-полиграфического предприятия и давала возможность эффективно принимать решения достаточно актуальна

Ключевые слова: издательско-полиграфическое предприятие, CRM-систем, системы поддержки принятия решений издательско-полиграфических предприятий.

1 Introduction

The functioning of a company in a market economy requires appropriate changes in its structure. The process of transition to a new company structure should be focused on a customer-oriented approach. This requires a detailed analysis of customer-oriented technologies in the context of relations between a printing company and its stakeholders. The introduction of a customer-oriented approach in a printing company requires harmonization of the relationships between stakeholders and a printing company which is a complex time-consuming process and requires the appropriate methodological support.

2. Formulation of the purpose of the article, setting the task

Object of research: stakeholder-printing company relationships.

Subject of research: a prototype of a decision support system for an effective stakeholder-printing company relationship.

Purpose of research: to develop the technology of establishing a stakeholder-printing company relationship.

To achieve the stated purpose, it is necessary to analyze the methods used to establish relations between stakeholders and a printing company; describe the procedures used in the stakeholder-printing company relationship; to develop a strategy of effective market positioning of a printing company and to provide the recommendations to a company in order to achieve leading positions in the market of printing services.

3. Presentation of the main material

Each operation in the full cycle of the technological process of manufacturing a printed product, whether it be the process of ordering printing materials or other technological operations is a necessary component of the economic activity of a printing company, as even a slight deviation of any operation from the norm can disrupt the whole cycle and, as a consequence, lead to the reduction of product quality, the lack of orders, or failures in the supply chain.

Nowadays it is very important for printing companies to implement the efficient procedures in the stakeholders-printing company relationships. The key points in this process are the stages of quality control, which should be agreed with stakeholders. The process of identifying (specifying) the needs of the customer largely determines whether the client will be satisfied with the results of cooperation with the service provider for program and project management. Having a clear idea of the problem allows you to solve it in a short time and at the lowest cost. The quality of a product or service and its value to the customer depends on how precisely the needs, that this product or service must meet, have been identified [6].

The modern market, including the market of printing materials, is highly competitive. It is very difficult to increase the competitiveness of a company by improving the quality of goods and services, because this path is usually associated with a significant increase in production costs and, therefore, with raised production prices, which can lead to the opposite effect – the loss of customers. In terms of equalizing the quality of goods and services offered by different companies, the most effective way to attract attention is an individual approach to each customer [4].

In the current economic situation, the effective relationship between a printing company and its stakeholders requires optimization of workhours and working personnel. These tasks can be solved by means of introducing the decision support systems for printing companies. That will increase the speed of data processing and allow making the reasonably correct decisions.

Complexity of decision-making lies in the necessity to take into account the various and complex processes, such as business investment, production, financial, management etc., as well as the numerous indicators of the external and internal market environment. Therefore, a decision maker faces complex challenges, the effective solution of which is impossible without the use of a systematic approach [8].

The business relationships have been recently characterized by the dominance of customer-oriented approach, the main purpose of which is to build individual relationships with all customers, suppliers, partners and other stakeholders. Therefore, this approach involves retaining stakeholders, establishing individual approach to stakeholders, as well as the cooperation with stakeholders, which is based on relationships.

Thus, in today's economic environment, the process of attracting new customers, partners and other stakeholders is very expensive for a printing company, so it is much more profitable for a company to use the consuming potential of the existing client base in order to increase sales of its products. Calculation, maintenance and accounting of each stakeholder's personal data requires the implementation of the technological process of printing enterprise information system such as DSS with the elements of CRM to provide personal interactive relationships between a stakeholder and a company.

The analysis of the latest research and publications shows that S. Apelbaum [1], D. Ling, R. Ian [2], Mukhortova O. [9], Mann I. [7], Vorzhakova Yu. 3], Zinkevich A. [5] pay great attention to the issues of customer-oriented approach for enterprises. Scientific researches of I.I. Bazhin, S.B. Arsenyev, V.B. Britkov, H.A. Salnikov have considerably developed the systems management theory of enterprises' relations.

Most existed automated systems embrace only some aspects of automating the technology of the stakeholder-printing company relationship; relationships with the customers, for example, but none of them allows making informed, accurate decisions concerning relations with stakeholders.

An overview of CRM class systems (Table 1), which allows solving certain problems of the stakeholder-printing company relationship effectively, has made it possible to identify functions that can be used in the prospective information system. Most of the CRM systems considered have a standard set of functions and allows creating and maintaining a client base, creating and tracking tasks etc. All these functions do not allow user (stakeholder) to make informed decisions, such as the choice of materials for the order, order management, and other printing-related parameters.

Table 1. Review of CRM-systems presented in the Ukrainian market that can be used in printing production

CRM systems	Areas of usage	Functions
Oracle Siebel CRM	Production. Service Industries	SMS notifications. Client base. Business processes. Task management. Marketing tools. Integration with mail. Access settings. Reports. Billing and payment system. Statistics
PERFECTUM CRM	B2B. Call centers. Sales departments. Production. Retail departments. Service Industries	SMS notifications. Call analysis. Analytics. Client base. Document flow. Task management. Order management. Integration with IC, mail, telephony. Mobile application. Call center module. Reminder. Access settings. Polls and notes. Reports. Billing and payment system. Warehouse accounting. Statistics.
SAP	Sales departments. Service Industries	Analytics. Client base. Business processes. Sales funnel. Document flow. Task management. Marketing tools. Integration with mail, telephony. Mobile application. Reminder. Reports. Predictions. Statistics.
TEAMWOX	B2B. Call center module. Sales departments. Production Services	Analytics. Client base. Sales funnel. Document flow. Task management. Order management. Access settings. Billing and payment system. Document editor. Order management. Financial Accounting
BLOKNOTAPP	Sales departments. Service Industries	Client base. Sales funnel. Appointment. Integration with mail. Calendar. Reports. Statistics. Order management. Financial Accounting

APPTIVO CRM SYSTEM	Sales departments.	Client base. Business processes. Sales funnel. Document flow. Task management. Order management. Integration with mail. Reports. Billing and payment system. Document editor. Order management. Financial Accounting
--------------------	--------------------	--

However, automated systems have a number of disadvantages: 1) the systems do not take into account the operating technologies of the customer-printing company relationship as a whole, and allow solving only specific local problems; 2) most automated systems do not allow implementing a customer-oriented approach due to the focus on certain features of the technological process; 3) none of the systems presents reasonable decision-making support on the customer-printing company relationship.

The usage of decision support systems with the elements of CRM-system in the printing industry will solve a number of issues a stakeholder faces. But first of all, it allows increasing the competitiveness.

Competition between printing companies is intensifying every year in the Ukrainian market. In the current economic situation, market conditions are constantly changing, the number of small printing companies (operational printing) is growing, and the equipment is able to perform a variety of printing services. The struggle for the customer, supplier and stakeholder is becoming more intense.

Competition as an economic category is a struggle between producers for the most favorable conditions of production and sale of goods and services, for the appropriation of the largest profits. Competition acts as a regulator of the pace and volume of production, encouraging the manufacturer to implement scientific and technical advances, increase productivity, improve technology, labor organization, etc. [2]

No printing company today can afford to ignore the increasing competition, therefore, for achieving stable position in the market it is necessary to identify the advantages of the company over competitors, to establish the factors of competitive success.

Ensuring long-term competitiveness of a printing company should become the priority in the value system of an enterprise. Identifying the factors of competitiveness, managing these factors will form the main effort in increasing the competitiveness of the enterprise.

The four main approaches to the concept of "enterprise competitiveness" are identified in [10]: as a certain ability, capacity or capability of the enterprise; as a complex, relative or comparative characteristic of the business entity; as a property or possession of certain properties; as an assessment of total competitive advantages.

There are several reasons that can negatively affect the long-term competitiveness: the enterprise management system does not work properly, focusing on short-term relationships; insufficient market analysis; inefficiency of management and cost management systems; the decisions concerning the enterprise do not always lead to the desired result.

Conducting a comprehensive study in the field of competitiveness management of a printing company and creating a methodology will ensure the successful establishment of its long-term competitiveness and provide a company with a number of advantages. Currently, the specifics of the problem of a printing company competitiveness have not been sufficiently considered.

There is a need to identify all factors of a company's competitiveness. Therefore, creation of the methods and tools to ensure the development of printing companies and increase its long-term competitiveness is relevant and in great demand.

To perform the analysis of a printing company and determine the level of its competitiveness in the market of printing services, it is necessary to determine the intensity of relationships with customers:

$$I_B = \sum_{i=1}^N \frac{3}{n} \quad (1)$$

where 3 – the number of a company's delivered orders, the quality of which have been assessed by a stakeholder together with a printing company;

n – is the total number of orders.

The analysis of sales of the printing company has revealed that the intensity of the relationship with stakeholders is expressed in the frequency and monetary equivalent of orders. The intensity of relationships with stakeholders allows forming a client base and ensuring a stable demand. Thus, strengthening relations with suppliers, for example, increases the competitiveness and loyalty of stakeholders. The identified interdependence of factors allows determining the factors that characterize

the competitiveness of a printing company, such as relationships with stakeholders that affect the strategic position of the company.

The competitiveness and the efficiency of a printing company also depends on how effectively a company uses the latest technologies, so such a factor as technical equipment of a company should be taken into account. Technical equipment of a company can be calculated by the formula:

$$K_c = \frac{K_{\text{БП}}}{\Pi_0} \quad (2)$$

where $K_{\text{БП}}$ – is the number of the new technologies implemented by a printing company in the last year;
 Π_0 – the total number of a printing company equipment.

Comparing the indicators I_B and K_C , we can assess the capabilities of a printing company, using the matrix shown in Fig. 1.

Intensity of the relationship with a customer		High ($0,5 \leq \mu \leq 1$)		Level of technical equipment
		I	IV	
Low ($\mu < 0,5$)		Low ($0,5 \leq \theta$)		High ($0,5 \leq \theta \leq 1$)
		II	III	

Fig. 1. Matrix for assessing the capabilities of a printing company

The capabilities of a printing company can be determined by the position in the quadrants of the assessing matrix: I – the company has a significant advantage in the printing market, so to maintain current level of competitiveness it is necessary to have active contacts with stakeholders; II – it is necessary to improve relations with stakeholders by introducing innovative technologies and invest into the latest technical equipment; III – a company should review the direction of its activities and order appropriate printing equipment; IV – modern technical equipment allowed a company to reach the current level of the quality of service. A company should initiate marketing activities that will attract potential customers and improve its relationships with stakeholders. The usage of the matrix makes it possible to position the printing company in accordance with the effectiveness of the customer-oriented approach.

4. Conclusions

A printing company succeeds if it focuses on stakeholders, on the customers in particular, ensures a high level of product quality and uses the latest management methods. Satisfaction of customer requirements is the main task of modern printing companies in achieving their goals. Usage of perfect technologies of relationships between a printing company and a stakeholders will ensure the competitiveness, which is one of the crucial factors of the company success. The implementation of the technology of the stakeholders-printing company relationship based on CRM-system in the company's technological process provides the competitive advantage. Therefore, we are planning to develop the decision support system with the elements of CRM-system, which can be used to make informed decisions about the cooperation of printing companies with stakeholders.

LITERATURE

1. Appelbaum, S.H., Pratt, W.G. Strategic organizational change the role of leadership, learning, motivation and productivity. *Management Decision*. 1998. Vol. 36. № 5 С – 299.
2. Ling R., Yen, D.C. Customer relationship management: an analysis framework and implementation strategies. *Journal of Computer Information Systems*. 2001. Vol. 41. №. 3. pp. – 82-97.
3. Воржакова Ю. П. Використання клієнтоорієнтованого підходу при формуванні конкурентної політики на поліграфічних підприємствах URL: <http://ir.kneu.edu.ua:8080/handle/2010/9012> (Дата звернення: 10.01.2021)

4. Дудник О.В. Міненко С. Природа понять «конкуренція» та «конкурентоспроможність». *Причорноморські економічні студії економічна*. 2018. Випуск 29. С.112–116.
5. Зинкевич А. Секреты клиентоориентированности. Клиентоориентированность. URL: <http://www.mim.kiev.ua/ru/alumni/sovety/klientoorientirovannost> (Дата обращения: 10.01.2021)
6. Ілляшенко Н. С. Визначення стратегічних управлінських рішень в залежності від рівня задоволення потреб товаровиробників і споживачів. *Механізм регулювання економіки*. 2008. № 4(1). С. 90–101.
7. Манн И. Определение клиентоориентированности. URL: <http://silauma.ru/igor-mannblog/2008/05/29/moe-opredelenie-klientoorientirovannosti/> (Дата обращения: 10.01.2021)
8. Медведев А. В. Оптимизационная система поддержки принятия решений в бизнес-планировании. *Успехи современного естествознания*. 2015. №1-4. С.679–683.
9. Мухортова О. Клиентоориентированность. URL: <http://eduardk.livejournal.com/93553.html>. (Дата обращения: 10.01.2021)
10. Нестеренко С.А., Колос З. В. Конкурентостійкість підприємства як атрибут його конкурентоспроможності. *Збірник наукових праць Таврійського державного агротехнологічного університету (економічні науки)*. 2017. №1-2 (33-34). С.90–96.

REFERENCES

1. Appelbaum, S.H., Pratt, W.G., “Strategic organizational change the role of leadership, learning, motivation and productivity”, *Management Decision*, 1998. Vol. 36, No. 5, 299 p [in English]
2. Ling R., Yen, D.C. “Customer relationship management: an analysis framework and implementation strategies”, *Journal of Computer Information Systems*, 2001. Vol. 41, No. 3, pp. 82-97. [in English]
3. Vorzhakova, Yu.P. “Use of a client-oriented approach in the formation of competitive policy in printing companies”, URL: <http://ir.kneu.edu.ua:8080/handle/2010/9012> [in Ukrainian]
4. Dudnyk O.V. Minenko S. “Nature will understand "competition" and "competitiveness"”, *Black Sea Economic Studies* 2018. 29. 112–116 [in Ukrainian]
5. Zinkevich, A. “Secrets of client orientation”, URL: <http://www.mim.kiev.ua/ru/alumni/sovety/klientoorientirovannost>. [in Ukrainian]
6. Ilyashenko N. S. “Determination of strategic management decisions depending on the level of meeting the needs of producers and consumers”, *Mechanism of economic regulation*. 2008. 4(1). 90–101. [in Ukrainian]
7. Mann, I. “Definition of client orientation”, available at: <http://silauma.ru/igor-mannblog/2008/05/29/moe-opredelenie-klientoorientirovannosti/> [in English]
8. Medvedev A. V. “Optimization system for supporting decision-making in business planning”. *Successes of modern natural science*. 2015, 1-4. 679–683. [in Ukrainian]
9. Muxortova, O. “Client orientation”, URL: <http://eduardk.livejournal.com/93553.html>
10. Nesterenko S.A., Kolos Z. V. “Competitiveness of the enterprise as an attribute of its competitiveness” *Collection of scientific works of the Tavrya State University of Agrotechnology (Economic Sciences)*. 2017. 1-2 (33-34). 90–96. [in Ukrainian]

УДК 004.9

Дослідження комп'ютерної моделі веб-сервісу перевірки знань

О.А. Артюх, В.Ю. Максименко, О.Г. Толстолузька

**Артюх Олексій
Анатолійович***старший викладач**Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна**майдан Свободи, 6, м. Харків, Україна 61022**e-mail: oleksiy.artiuh@karazin.ua;**<https://orcid.org/0000-0002-2038-4131>***Максименко Владислав
Юрійович***студент**Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна**майдан Свободи, 6, м. Харків, Україна 61022**e-mail: xa11867733@student.karazin.ua;**<https://orcid.org/0000-0002-2038-4131>***Толстолузька Олена
Геннадіївна***д.т.н., с.н.с., професор**Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна**майдан Свободи, 6, м. Харків, Україна 61022**e-mail: elena.tolstoluzka@karazin.ua;**<https://orcid.org/0000-0003-1241-7906>*

Мета статті. Дослідити комп'ютерні моделі веб-сервісів перевірки знань.

Методи дослідження. Статистичні, комп'ютерне моделювання.

Результати. Виконано дослідження методів контролю знань та виявлено, що розроблювана система повинна мінімізувати час на створення тесту і аналіз результатів за рахунок використання сучасних технологій у сфері веб-розробки. Вибір архітектури системи і конкретного набору технологій повинен бути здійснений виходячи з вимоги до максимальної швидкості роботи системи при взаємодії з нею користувачів. Аналітична складова системи також повинна дозволяти відповісти на найбільш затребувані питання користувачів при роботі з результатами тестів.

Висновки. Отримані результати дають основні характеристики для створення комп'ютерної моделі веб-сервісу перевірки знань.

Ключові слова: комп'ютерна модель, веб-сервіс, онлайн-тестування, дистанційне навчання, контроль знань.

Research of the computer model of the web service for testing knowledge

A. Artiuh, V. Maksimenko, O. Tolstoluzskaya

Artiuh Aleksey*Senior Lecturer**V. N. Karazin Kharkiv National University**Svobody Square 6, Kharkiv, Ukraine 61022***Maksimenko Vladislav***student**V. N. Karazin Kharkiv National University**Svobody Square 6, Kharkiv, Ukraine 61022***Tolstoluzskaya Elena***Doctor of Technical Sciences, senior researcher, professor**V. N. Karazin Kharkiv National University**Svobody Square 6, Kharkiv, Ukraine 61022*

Testing is widely used as one of the methods of monitoring students' assimilation of knowledge and has a number of certain advantages over traditional methods of assessment. At schools and universities, tests can be used for monitoring and evaluate students' behavior, psyche, career guidance, or motivation. For a long time, paper tests have been used by educational institutions and private companies to assess student or employee performance. State exams and contests often include a multiple-choice test. Conducting such tests requires preparing a location for the test, spending time on checking and notifying students. Currently, there are a large number of different ways to monitor and evaluate knowledge. A tool for measuring a student's achievements is a properly designed test that corresponds not only to the subject of study, but also to its tasks and serves to develop a systematic approach to studying the discipline. Testing in educational institutions is used as a means of objective control of students'

knowledge of the curriculum. Systematic monitoring of students' level of knowledge, on the one hand, determines the student's academic performance, and on the other hand, it is an indicator of the effectiveness of teaching methods and organization of the educational process. The inclusion of various forms of test tasks in the learning process motivates students to step up work on mastering educational material and forms a desire to develop their abilities. Comparing the testing performed with the help of paper questionnaires and online testing, it is obvious that online testing is much more effective.

The computer models of web-based knowledge verification services have been investigated in this paper by using methods of statistical and computer modeling. The research of knowledge control methods has been carried out and it has been shown that the time required to create a test and analyze the results in the perspective system could be minimized by using the modern technologies in the field of web development. The choice of the system architecture and a specific set of technologies depends on the requirement of maximizing speed of the system-user interaction. The analytical component of the system should answer the users' most popular questions concerning the test results. The results obtained provide the main characteristics for creating a computer model of a web service for testing knowledge.

Keywords: *computer model, web service, online testing, distance learning, knowledge control.*

Исследование компьютерной модели веб-сервиса проверки знаний

Артюх А.А., Максименко В.Ю., Толстолужская Е.Г.

**Артюх Алексей
Анатольевич**

*Старший преподаватель
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
майдан Свободы 6, г. Харьков, Украина 61022*

**Максименко
Владислав Юрьевич**

*студент
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
майдан Свободы 6, г. Харьков, Украина 61022*

**Толстолужская Елена
Геннадиевна**

*д.т.н., с.н.с., профессор
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
майдан Свободы 6, г. Харьков, Украина 61022*

Цель. Исследовать компьютерные модели веб-сервисов проверки знаний.

Методы. Статистические, компьютерное моделирование.

Результаты. Выполнено исследование методов контроля знаний и выявлено, что разрабатываемая система должна минимизировать время на создание теста и анализ результатов за счет использования современных технологий в сфере веб-разработки. Выбор архитектуры системы и конкретного набора технологий должен быть осуществлен исходя из требования к максимальной скорости работы системы при взаимодействии с ней пользователей. Аналитическая составляющая системы также должна позволять ответить на наиболее востребованные вопросы пользователей при работе с результатами тестов.

Выводы. Полученные результаты дают основные характеристики для создания компьютерной модели веб-сервиса проверки знаний.

Ключевые слова: *компьютерная модель, веб-сервис, онлайн-тестирование, дистанционное обучение, контроль знаний.*

Вступ

В даний час у світі накопичено значний досвід реалізації систем дистанційного навчання. Які розрізняються не тільки методологією, а й залежать від особливостей тієї чи іншої країни, в якій практикуються методи і підходи до організації дистанційної перевірки знань. Однак, в цілому, всі визнають, що майбутнє за дистанційним навчанням, не тільки в силу розвитку інформаційно-комунікаційних технологій, а й як наступний, закономірний етап розвитку освітніх систем.

Контроль, або перевірка результатів навчання, є обов'язковим компонентом процесу навчання. Вона має місце на всіх стадіях процесу навчання, але особливого значення набуває після вивчення будь-якого розділу програми і завершення ступеня навчання. Суть перевірки результатів навчання полягає у виявленні рівня засвоєння знань учнями, який повинен відповідати освітньому стандарту або кваліфікації за даною програмою, предмету.

Проведення тестування з використанням паперових тестів давно є одним з пріоритетних способів оцінки успішності учнів або ефективності співробітників в навчальних закладах і приватних компаніях. У школах та університетах тести можуть бути використані для проміжного контролю, а також для оцінки поведінки, психіки, профорієнтації або мотивацій учнів. Деякі державні іспити та олімпіади включають в себе тестову частину з вибором відповіді з декількох

варіантів. Проведення таких тестів пов'язано з різними витратами, в першу чергу з часом на перевірку, пошук місця проведення, оповіщення учнів.

В даний час існує велика кількість різноманітних способів проведення контролю та оцінки знань. Найбільш широко застосовується тестування як один з методів контролю засвоєння учнями знань з дисципліни, що володіє рядом певних переваг перед традиційними методами контролю знань (контрольна робота, усна відповідь і т.д.). Інструментом для вимірювання за шкалою досягнень учня є правильно сконструйований тест, який відповідає не тільки предмету навчання, але і його завданням і служить розвитку системного підходу до вивчення навчальної дисципліни.

Тестування в освітніх установах використовується, як засіб об'єктивного контролю знань навчальної програми у учнів. Систематичний контроль рівня знань учнів з одного боку визначає успішність учня, а з іншого боку є показником ефективності методики навчання та організації навчального процесу. Включення різних форм тестових завдань в процес навчання мотивує учнів до активізації роботи по засвоєнню навчального матеріалу і формує прагнення розвивати свої здібності.

Щоб провести тестування учнів у вигляді опитувальних листів викладачеві необхідно:

- роздрукувати всі варіанти тестів на папері;
- забезпечити учнів листками з варіантами тестів;
- зафіксувати на паперовому носії або в електронному записнику яка категорія учнів тестується;
- зафіксувати на паперовому носії або в електронному записнику книжці всі прізвища і варіанти, які їм належать;
- перевірити кожен тест і помітити помилки, які допустив учень;
- зафіксувати на паперовому носії або в електронному записнику книжці оцінки учнів.

Якщо порівняти процедуру проведення тестування у вигляді опитувальних листів і онлайн, то очевидно, що онлайн тестування більш ефективно.

На даний момент, у зв'язку з епідеміологічною ситуацією частка дистанційного навчання в процесі освіти постійно збільшується. Технічна реалізація системи дистанційного навчання являє собою досить складний програмно-апаратний комплекс.

Методика дослідження

Найчастіше виділяють такі основні принципи контролювання учнів, яких необхідно дотримуватися в дистанційному контролі знань:

- принцип об'єктивності - пізнавальна діяльність повинна оцінюватися при мінімальному впливі суб'єктивного фактору;
- принцип демократичності - повинні створюватися рівні умови для всіх учнів, що проходять контроль;
- принцип масовості і короткочасності - контроль повинен бути організований так, щоб за якомога менший час здійснити перевірку знань у великій кількості випробовуваних.

При проектуванні дистанційного контролю знань вживають спеціальні заходи для забезпечення достовірності даних здійснюваного контролю:

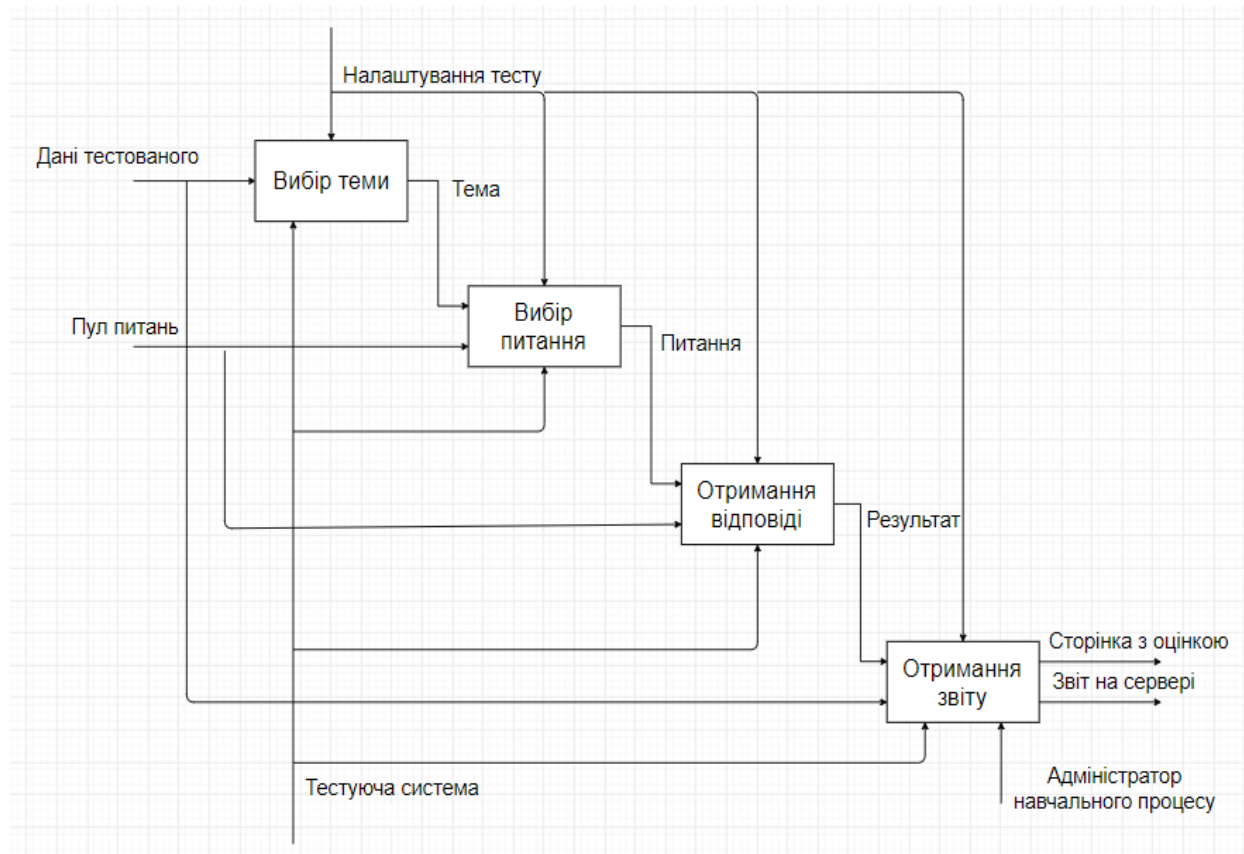
- доступ до ресурсів контролю знань здійснюється за допомогою індивідуальних логінів та паролів;
- використовуються різні шифри и кодування, щоб захистити тести від несанкціонованого доступу;
- усі контрольні заходи проводяться на базі сертифікованих центрів контролю знань, що мають доступ до мережі Інтернет;
- використовуються додаткові периферійні пристрої, наприклад, відеокамери;
- час на відповідь обмежується, а варіанти відповідей випадково перемішуються.

Однозначні і відтворювані оцінки здатні дати лише об'єктивні методи контролю якості знань учнів, що спираються на спеціально створені для цього матеріали - тести. Вони повинні бути

розроблені по кожному рівню засвоєння досвіду. Тест - це засіб, який дозволяє виявити рівень і якість засвоєння. Висока похибка вимірювання тестових результатів не дозволяє говорити про високу надійність результатів вимірювання.

Найчастіше на освітніх сайтах можна побачити тести, що працюють в режимі реального часу. В цьому випадку тестований відповідає на питання тесту в режимі прямого діалогу з комп'ютерною програмою віддаленого сервера. Тести включають питання та варіанти відповідей (один з яких, як правило, вірний, а інші - помилкові). Учні не потрібно записувати відповідь, досить тільки клацнути курсором миші по потрібному рядку. У більшості тестів на перевірку знань дається 3-5 різних відповідей на одне завдання. Після виконання тестів на екрані з'являється результат - коментарі, оцінка, рекомендації щодо подальшої роботи і т. д.

На мал. 1 можна побачити IDEF0 діаграму такого тесту:



Мал. 1 IDEF0 діаграма тесту в режимі реального часу.

Найкращим можна вважати тест, в якому закладено широкий зміст і воно охоплює більш глибокі рівні знань. Розробники комп'ютерних тестів повинні дотримуватися наступних принципів:

- тест повинен відповідати цілям тестування;
- потрібно визначити значимість знань в загальній системі перевіряються знань;
- повинна бути забезпечена взаємозв'язок змісту і форми тесту;
- тестові завдання повинні бути правильними, з точки зору змісту;
- повинна дотримуватися репрезентативність змісту навчальної дисципліни в змісті тесту;
- тест повинен відповідати рівню сучасного стану науки;
- зміст тесту має бути комплексним і збалансованим;
- зміст тесту має бути системним, але разом з тим варіативним.

У процесі тестування необхідно реалізувати функції початку, призупинення, продовження і завершення тестування. Перед тим як почати роботу з тестом, учень повинен заповнити реєстраційну форму на екрані комп'ютера, отримати логін та пароль, який служить сполучною ланкою між реєстраційною інформацією та даними про сеанс тестування.

Результати досліджень

Процес тестування знань співробітників або учнів багато в чому може бути поліпшений за рахунок розробки автоматизованої онлайн - системи тестування. Дана робота описує особливості розробки системи подібного типу, використовувани технології, а також аналізує сучасні підходи до розробки веб-сайтів і аналітичних систем.

Задача створення такої системи передбачає наявність веб-сайту, який служить місцем для створення і проведення тестів. У той же час аналітична складова системи розробляється окремо від сайту і представляє з себе процедури вилучення, трансформації та завантаження даних з віддалених джерел, а також сховище даних. Дані для аналізу копіюються з сайту, який містить таблиці для зберігання інформації про тести, їх питання, варіанти відповіді, відповідей конкретного учасника тестування і т. д. Після цього ці дані можуть бути використані для подальшого аналізу.

Задача складання і проведення тесту завжди пов'язана з деякими витратами, вираженими в матеріальному або часовому вираженні. Проведення тестів з друкованими бланками пов'язано як з матеріальними, так і з тимчасовими витратами, такими як папір, чорнило принтера, час пошуку аудиторії, час самого іспиту. Оцінка результатів таких тестів також пов'язана з тимчасовими витратами по збору бланків і підрахунку результатів. При цьому час, витрачений на підведення підсумків, зростає разом з числом учасників тесту. Для вчителів, менеджерів та інших людей, які займаються проведенням різних тестів регулярно, мінімізація витраченого на тестування часу і ресурсів може виявитися критично важливою.

Використання онлайн - системи тестування з аналітичними можливостями дозволить прискорити процес створення типізованих тестів, здійснити їх віддалене проведення і провести аналіз їх результатів за допомогою персонального комп'ютера. Враховуючи поширеність мережі Інтернет серед учнів і співробітників навчальних та інших організацій, можна сказати, що така система стане доступна для багатьох.

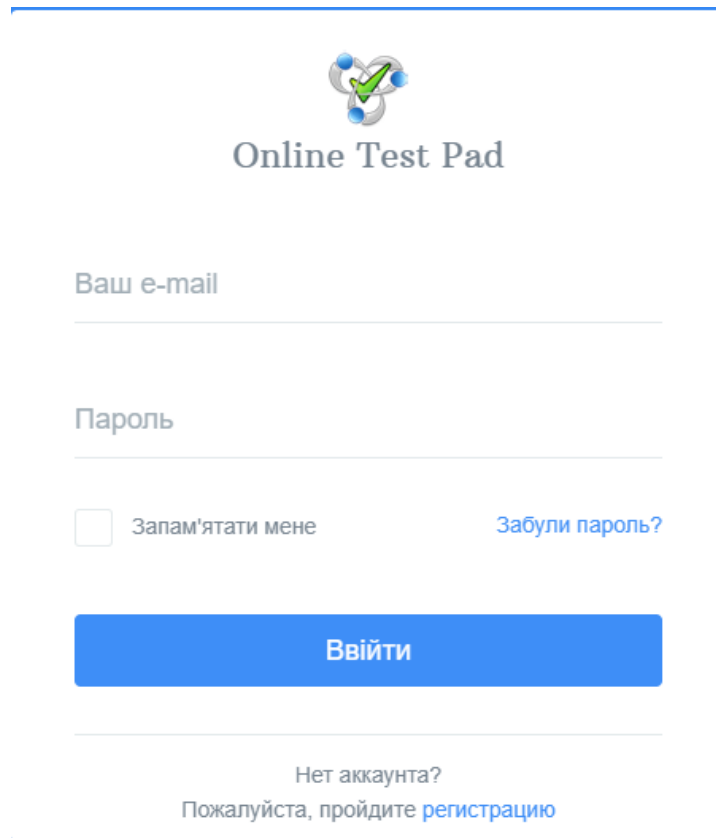
В розробці інтерфейсу Web-сервісу використовувались HTML та CSS. Інтерфейс користувача програми розроблявся з урахуванням вимог простоти, зручності та ергономічності. Початкова сторінка представляє собою сторінку вибору користувача.

Натисніть на кнопку, яка відповідає Вашому статусу!



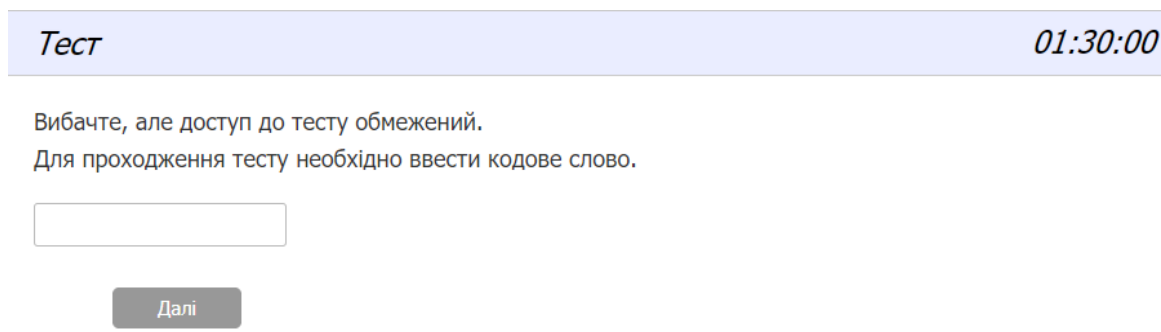
Мал. 2 Початкова сторінка Web-сервісу.

Після натискання на кнопку «Я викладач», користувач потрапляє на сторінку авторизації сервісу «Online Test Pad» для викладача.



Мал. 3 Сторінка входу для викладача в сервіс «Online Test Pad».

Якщо користувач натисне кнопку «Я учень», то потрапить на сторінку проходження тесту, де йому потрібно ввести кодове слово, яке заздалегідь викладач йому повідомляє.



Мал. 4 Сторінка введення кодового слова до тесту.

Висновки

Онлайн-система перевірки-знань зможе стати рішенням завдання скорочення загального часу проведення тестів і збільшення якості аналітичної оцінки їх результатів. Ця система повинна мінімізувати час на створення тесту і аналіз результатів за рахунок використання сучасних технологій у сфері веб-розробки. Вибір архітектури системи і конкретного набору технологій повинен бути здійснений виходячи з вимоги до максимальної швидкості роботи системи при взаємодії з нею користувачів. Аналітична складова системи також повинна дозволяти відповісти на найбільш затребувані питання користувачів при роботі з результатами тестів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ковальов В. М. Сучасні методології опису бізнес-процесів. Методологія IDEF0: Журнал "Консультант директора", № 12, Червень, 2004 р.
https://buscreative.blogspot.com/2015/11/blog-post_14.html

2. Ломовцева Н. В. Контроль навчальної діяльності в дистанційному навчанні. <https://cyberleninka.ru/article/n/kontrol-uchebnoy-deyatelnosti-v-distantsionnom-obuchenii>
3. Полат Е. С. Теорія і практика дистанційного навчання: Навчальний посібник для студ. вищ. пед. навч. закладів / Е. С. Полат, М. Ю. Бухаркіна, М. В. Моїсєєва. - М. «Академія», 2004.- 416 с.
https://www.academia-moscow.ru/ftp_share/books/fragments/fragment_20163.pdf
4. Гаврилова Л. А. Дистанційна освіта. Електронні курси: Навчально-методичний посібник для викладачів. - Єкатеринбург: УГГУ, 2006. - 74 с.
<https://textarchive.ru/c-2930313-pall.html>
5. Канаєв В. І. Дистанційне навчання: технологічні аспекти. - М.: Сучасний гуманітарний університет, 2004. - 192 с.
<https://rusist.info/book/539320>
6. Раззаков, Ш. І. Контроль знань в системі дистанційного навчання / Ш. І. Раззаков, У. З. Нарзієв, Р. Б. Рахімов. - Текст: безпосередній // Молодий вчений. – 2014. – № 7 (66). - С. 70-73.
<https://moluch.ru/archive/66/10934/>

REFERENCES

1. Kovalev V. M. modern methodologies for describing business processes. IDEF0 methodology: director's consultant Journal, No. 12, June, 2004 [in Russian]
https://buscreative.blogspot.com/2015/11/blog-post_14.html
2. Lomovtseva N. V. control of educational activity in distance learning. [in Russian]
<https://cyberleninka.ru/article/n/kontrol-uchebnoy-deyatelnosti-v-distantsionnom-obuchenii>
3. Polat E. S. Teoriya I Praktika distance learning: Uchebnoe posobie dlya stud. Polat E. S., Bukharkina M. Yu., Moiseeva M. V. higher pedagogical educational institutions. Moscow, Akademiya publ., 2004, 416 p. [in Russian]
https://www.academia-moscow.ru/ftp_share/books/fragments/fragment_20163.pdf
4. GavriloVA L. A. Distance Education. E-Courses: a training manual for teachers. Yekaterinburg: UGSU publ., 2006, 74 p. [in Russian]
<https://textarchive.ru/c-2930313-pall.html>
5. Kanaev V. I. distance learning: technological aspects. Moscow: Sovremennoe Humanities University, 2004, 192 p. [in Russian]
<https://rusist.info/book/539320>
6. Razzakov sh. I., Narzиеv U. Z., Rakhimov R. B. Kontrol of knowledge in the distance learning system. - Text: direct // Young Scientist. — 2014.- № 7 (66). – P.70-73. [in Russian]
<https://moluch.ru/archive/66/10934/>

УДК 004.94

Розробка моделі системи визначення місцезнаходження для транспорту

Будько В. В., Попова А. О., Толстолузька О. Г., Толстолузький Є. Д.

- Будько Владислава Віталіївна** студентка;
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
площа Свободи 6, м. Харків Україна, 61022
e-mail: xa11867778@student.karazin.ua
<https://orcid.org/0000-0003-1344-3153>
- Попова Анастасія Олександрівна** студентка;
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
площа Свободи 6, м. Харків Україна, 61022
e-mail: xa11867792@student.karazin.ua
<https://orcid.org/0000-0003-1145-5695>
- Толстолузька Олена Геннадіївна** д. т. н., с.н.с.; професор кафедри теоретичної та прикладної системотехніки;
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
площа Свободи 6, м. Харків Україна, 61022
e-mail: elena.tolstoluzka@karazin.ua
<https://orcid.org/0000-0003-1241-7906>
- Толстолузький Євген Дмитрович** студент;
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
площа Свободи 6, м. Харків Україна, 61022
e-mail: evventol@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-2039-0267>

У сучасному світі системи стеження активно впроваджуються в різному вигляді, починаючи з розумних камер спостереження, комплексних систем розумного будинку та закінчуючи відстеженням посилок, пасажирського транспорту чи транспорту, що перевозить важливий вантаж. Досить популярною є ця тема серед компаній, що працюють з транспортом, де необхідним заходом є його відстеження, наприклад страхові компанії, служби екстреної допомоги і автопарки. Серед таких компаній також знаходяться ті, які вважають за краще працювати вахтовим методом і мають підрядників на колесах, наприклад компанії з видобутку корисних копалин, важливою складовою роботи яких є точне відстеження розташування транспорту та підрахунок часу виконаних транспортом ходок. Трекер – це невеликий пристрій стеження, що застосовується для визначення місцезнаходження та його відстеження, на даний момент має дуже широкий діапазон використання, незважаючи на свою невелику вагу, цей пристрій має низку унікальних властивостей, які допомагають організувати спостереження як за дітьми та людьми похилого віку, так і складати оптимальні маршрути переміщення вантажів за допомогою автомобільних навігаторів та відеореєстраторів або забезпечувати безпеку та точність руху приватного та комерційного транспорту. Ці невеликі електронні пристрої можуть не тільки визначати свої координати за допомогою супутників GPS, але й за допомогою вбудованого модуля зв'язку відсилати на віддалений сервер для подальшого збереження бази даних і обробки. Для ролі віддалених серверів можуть виступати, наприклад, популярні зараз хмарні сервіси Amazon Web Services, обчислювальні потужності яких знаходяться в багатьох географічних зонах у різних кутках світу і завдяки цьому можна не тільки зберегти отримані дані в найближчій до кінцевих користувачів географічній зоні, але і виконувати їх аналіз обробку, не орендуючи при цьому окремих фізичних серверів.

Ключові слова: геолокація, аналіз місцезнаходження, трекер.

Model of the location system for transport

- Budko Vladyslava** student;
V. N. Karazin Kharkiv National University,
Svobody Sq 6, Kharkiv, Ukraine, 61022

- Popova Anastasiia** *student;
V. N. Karazin Kharkiv National University,
Svobody Sq 6, Kharkiv, Ukraine, 61022*
- Tolstoluzka Olena** *doctor of Engineering Sciences; professor of theoretical and applied systems engineering department;
V. N. Karazin Kharkiv National University,
Svobody Sq 6, Kharkiv, Ukraine, 61022*
- Tolstoluzkyi Yevhen** *student;
V. N. Karazin Kharkiv National University,
Svobody Sq 6, Kharkiv, Ukraine, 61022*

In the modern world, tracking systems are actively implemented in various forms, ranging from smart surveillance cameras and integrated smart home systems to tracking parcels, passenger vehicles or vehicles carrying important cargo. This topic is actual for the companies working with vehicles, such as insurance companies, emergency services, and car fleets where tracking the vehicles becomes the commercial necessity. It also concerns those who prefer to work on a rotational basis and have contractors on wheels, for example mining companies, where it is important to track accurately the location of vehicles and calculate the route time. The tracker is a small device used to determine the location and track it. Nowadays, due to its unique properties, this device has a wide range of implementations such as monitoring of children and the elderly, creating optimal routes for the movement of goods using car navigators and video recorders, or ensuring the safety and accuracy of movement of private and commercial vehicles. These small electronic devices can not only determine their coordinates using GPS satellites, but use the built-in communication module to send them to a remote server for further database storage and processing. The currently popular cloud services can be used as a remote server, for instance, Amazon Web Services, the computing power of which is distributed in many geographic locations all around the world, and therefore, it is possible not only to save the obtained data in the geographic location closest to the user, but also to perform their analysis and processing without renting a separate physical server.

Key words: *geolocation, location analysis, tracker.*

Разработка модели системы определения местоположения для транспорта

- Будько Владислава Витальевна** *студентка;
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
площадь Свободы 6, г. Харьков Украина, 61022*
- Попова Анастасия Александровна** *студентка;
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
площадь Свободы 6, г. Харьков Украина, 61022*
- Толстолужская Елена Геннадиевна** *д. т. н., с.н.с.; професор кафедры теоретической и прикладной системотехники;
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
площадь Свободы 6, г. Харьков Украина, 61022*
- Толстолужский Евгений Дмитриевич** *студент;
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
площадь Свободы 6, г. Харьков Украина, 61022*

В современном мире системы слежения активно внедряются в разном виде, начиная с умных камер наблюдения, комплексных систем умного дома и заканчивая отслеживанием посылок, пассажирского транспорта или транспорта, перевозящего важный груз. Достаточно популярной является эта тема среди компаний, работающих с транспортом, где необходимой мерой является его отслеживание например страховые компании, службы экстренной помощи а так же автопарки. В числе таких компаний так же находятся те, которые предпочитают работать вахтовым методом и имеют подрядчиков на колесах, например компании по добыче полезных ископаемых, важной составляющей работы которых является точное отслеживание местоположения транспорта и подсчет времени выполненных транспортом ходок. Трекер – это небольшое устройство слежения, применяемый для определения местоположения и его отслеживания, на данный момент имеет очень широкий диапазон использования, несмотря на свой небольшой вес, это устройство обладает рядом уникальных свойств, которые помогают организовывать наблюдения как за детьми и пожилыми людьми, так и составлять оптимальные маршруты перемещения грузов с помощью автомобильных навигаторов и видеорегистраторов или обеспечивать безопасность и точность движения частного и коммерческого транспорта. Эти небольшие электронные устройства могут не только определять свои координаты с помощью спутников GPS, но и затем с помощью встроенного модуля связи отсылать на удаленный сервер для дальнейшего сохранения в базе данных и обработки. Для роли удаленных серверов могут выступать например популярные сейчас облачные сервисы Amazon

Web Services, вычислительные мощности которых находятся во многих географических зонах в разных уголках мира и благодаря этому можно не только сохранить полученные данные в ближайшей к конечным пользователям географической зоне, но и выполнять их анализ и обработку, не арендуя при этом отдельный физический сервер.

Ключевые слова: геолокация, анализ местонахождение, трекер.

1 Вступ

У теперішній час досить швидко набирають популярність системи стеження, що зв'язано з наростаючою популярністю контролю навколишніх подій, що так люблять люди. Тримаючи під контролем те, що відбувається навколо ми відчуваємо себе краще. Системи стеження активно впроваджуються у різному вигляді, починаючи з розумних камер спостереження, комплексних систем розумного будинку та закінчуючи відстеженням посилок або транспорту з важливим вантажем. Досить популярною також є ця тема серед компаній, що працюють вахтовим методом та мають підрядників на колесах, наприклад компанії з видобування корисних копалин. Це надає контроль за часом, геолокацією машин та виявлення несанкціонованих зупинок, що веде до підвищення продуктивності праці. Детальна інформація про місцезнаходження транспортних засобів полегшує контроль. Також це безумовно надає можливість визначити найбільш продуктивних співробітників та повисити рівень контролю над компанією.

В такому випадку програмне забезпечення складається з трьох складових – датчика відстеження, системи обробки його сигналів та програмного забезпечення за допомогою якого з системою взаємодіє користувач. Також таку систему можуть використовувати інші транспортні підприємства для підвищення ефективності та контролю за перевезеннями для відстеження особливо цінного майна.

2 Аналіз рішень для визначення місцезнаходження

Рішення для визначення місцезнаходження – це термін, що відноситься до технологій, які використовуються для відстеження положення об'єкта в реальному або найближчому часі. Застосовані для цього технології використовуються спільно з системами позиціонування для збору даних. У 1998 році було введено такий термін як RTLS (система позиціонування в реальному часі) для опису нової технології, яка не тільки забезпечувала можливості автоматичної ідентифікації за допомогою активних RFID-міток, але й додавала можливість перегляду розташування на екрані комп'ютера. З того часу з'явилося більш просунуте обладнання для місцезнаходження, а також розвиваються дані та програмне забезпечення для визначення місцезнаходження.

До основних рішень визначення місцезнаходження відносять радіочастотну ідентифікацію (ідентифікація за допомогою RFID-міток), ідентифікацію за допомогою UWB міток (Ultra-Wide Band – надширока смуга радіочастот), Bluetooth міток, Wi-Fi технологій, мобільного зв'язку та GPS (Global Positioning System – система глобального позиціонування).

Ідентифікація за допомогою міток, наприклад RFID-міток працює за допомогою зчитувань, тобто підключивши зчитувач RFID до Інтернету, об'єкти з RFID-мітками можна ідентифікувати та відстежувати. Також мітки діляться на активні що мають власне джерело живлення та пасивні що відповідно не мають [1].

Ідентифікація з GPS підходом працює через визначення геолокації об'єкту через супутники, а за допомогою мобільного зв'язку – через стільникові вишки. Останні два способи відносять до типу основних для відстеження об'єктів на відкритому просторі.

3 Аналіз роботи основних систем відстеження геолокації об'єктів

Початок створення перших тестових систем відстеження об'єктів почалось з ефекту Доплера, коли американські вчені з'ясували, що завдяки цьому ефекту частота сигналу рівномірно збільшується з наближенням і зменшується з віддаленням джерела сигналу. Вони зробили висновки, що якщо точно визначити координати наземного об'єкта, то стає можливим вирахувати точку знаходження та швидкість переміщення супутника і навпаки, інформація про точні координати космічного апарата дає можливість вирахувати місце розташування і швидкість руху будь-якого об'єкта на землі. На цьому принципі були реалізовані перші супутники, які призвели до активного розвитку цієї галузі. Як результат цього наразі існують власне дві найпоширеніші системи GPS та ГЛОНАСС, крім того існують менш поширені системи такі як: DORIS, Beidou, Galileo. Всі вони відрізняються кількістю супутників виведених на орбіту Землі.

Навігаційні системи працюють у будь-якій точці Землі в будь-яких погодних умовах. GPS складається з трьох частин – супутників, станцій на Землі та приймачів сигналу. Сфер застосування GPS досить багато починаючи з картографії і навігації та закінчуючи мобільним зв'язком. Ґрунтується даний метод на триангуляції, у цьому випадку вимірюється відстань об'єкта до навігаційних супутників. Працює система GPS в такий спосіб – приймач сигналу вимірює затримку поширення сигналу від супутника до приймача.

Основний принцип роботи пов'язаний на радіохвилях, які надсилаються супутниками з постійною швидкістю. З отриманого сигналу приймач отримує дані про місцезнаходження супутника. Тут також важливим є час, за який сигнал дійде від джерела до приймача. Він визначається атомарним годинником на космічному апараті. Швидкість, час та розташування супутників дозволяють обчислити їхню відстань до об'єкта, якому потрібна навігація. Для визначення відстані від супутника до приймача затримка сигналу помножується на швидкість світла.

З погляду геометрії роботу навігаційної системи можна проілюструвати так: кілька сфер, у яких перебувають супутники, перетинаються й у них перебуває користувач.



Рисунок 3.1 – Модель взаємного розташування супутників навігації

Радіус кожної із сфер відповідно дорівнює відстані до цього видимого супутника. Сигнали від трьох супутників дозволяють отримати дані про широту та довготу, четвертий супутник дає інформацію про висоту об'єкта над поверхнею. Отримані значення можна звести до системи рівнянь, у тому числі можна знайти координату користувача. Таким чином, для отримання точного розташування необхідно провести 4 виміри дальностей до супутника (якщо виключити неправдоподібні результати, достатньо трьох вимірів) [2].

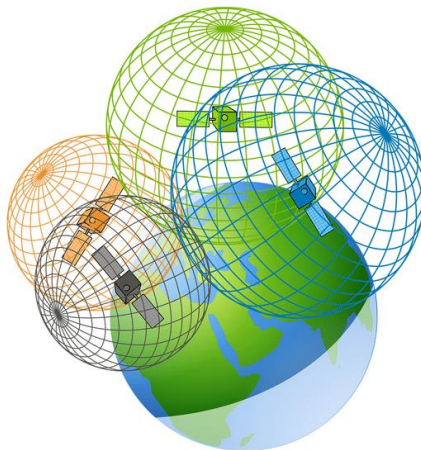


Рисунок 3.2 – Модель взаємного розташування супутників навігації відносно Землі

Перетин сигналу чотирьох і більше супутників дозволяє з мінімальною похибкою визначити, де знаходиться людина. Деякі програми навігації також враховують відстань до вишок стільникового зв'язку, дані вбудованого компаса та акселерометра і навіть швидкість руху того, хто запитує координати. Але якби технології не використовувалися, є багато факторів, які впливають на роботу позиціонування. Найвпливовіші це ймовірні помилки у годинах супутників, місцезнаходження самих супутників, якість GPS модуля в електронному пристрої, зчитування та відображення сигналу при перебуванні об'єкта поруч із щільними спорудами, всередині приміщень або навіть у погану погоду [3].

Головна логіка користування супутниковими методами визначення місцезнаходження зав'язана на невеликому GPS-модулі, що встановлюється в об'єкт, який необхідно відстежити тобто в авто або мобільний телефон.



Рисунок 3.3 – Модель роботи GPS системи для літака або машини

Існує інший варіант відстеження місцезнаходження за допомогою стільникових вишок із застосуванням для цього системи мобільного зв'язку (GSM – Global System for Mobile Communications). Location-based service (LBS) – сервіс визначення об'єкта шляхом прив'язки до орієнтирів з бази даних постачальника послуг зв'язку. У простому випадку місцезнаходження об'єкта визначається за координатами GSM базових станцій. Сама стільникова мережа є павутиною зв'язку, що поділена на сектори, кожен з яких відповідає за свою вежу.

Цей варіант теж визначає локацію за допомогою триангуляції. Тобто, для коректної роботи нам необхідно мати в наявності три вишки стільникового зв'язку. Пошук координат відбувається за допомогою перетину секторів між собою та потрапляння об'єкта між ними. Для передачі даних GSM модем повинен зареєструватися на базовій станції мобільного оператора, яка, передає свій ідентифікаційний номер (Cell ID) та деякі інші службові параметри (MCC, MNC, LAC). Даний метод відстеження заснований на принципі, що будь-який включений модуль GSM буде передавати дані на найближчу базову станцію, перемикаючись по мірі руху між ними. І якщо пристрій може зчитувати дані базової станції (Cell ID, MCC, MNC, LAC), ці дані можуть бути звірені із зовнішніми базами даних для отримання розташування об'єкта.

Даний метод відстеження досить не точний, його розрахунки можуть бути від 100 до 1000 м, що залежить від кількості вишок вашого оператора в цьому районі [4, 5, 6].



Рисунок 3.4 – Принцип роботи LBS/GSM системи

Цей спосіб має досить невелику точність геопозиціонування об'єкту і тому це є великим мінусом через те, що це працює тільки у зоні покриття стільникового зв'язку, а у таких місцях як метро, підвали чи міжміські траси, де сигнал з вишками дуже нечіткий або його немає зовсім, відстежити локацію коректно майже неможливо. Щодо точності його вимірювання, у великих містах вона досягає до 2.7 км, а вже на відкритій місцевості цей показник може змінюватися до 22 кілометрів [3].

На даний момент GPS – це найточніший спосіб позиціонування, через пряме підключення до супутника. Більшість трекерів і мобільних пристроїв використовують мережу GSM для передачі даних а визначають своє місцезнаходження саме за допомогою GPS систем, переключаючись на LBS.

4 Приклад моделі трекеру відстежування

Прикладом того, що за допомогою GPS можна мати більш точні координати місцезнаходження, може бути модель системи визначення місцезнаходження в парі з моделлю трекеру, що має у складі GPS модуль та використовує мережу GSM для передачі даних.

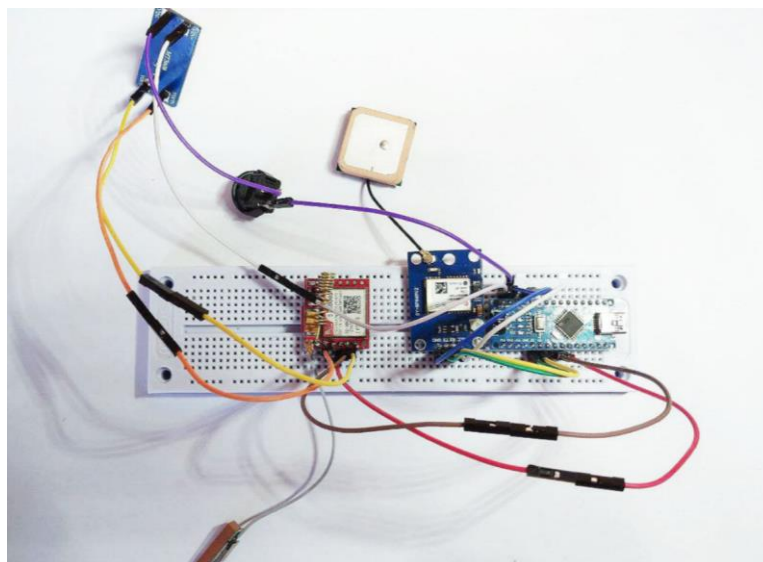


Рисунок 4.1 – Приклад моделі GP- трекеру

Для того щоб зробити таку модель було розроблено схему з наступними компонентами: головна плата Arduino Nano, GSM-модем (SIM 800L), GPS модуль (GY-GPS6MV2), перетворювач напруги (MT3608), літій-іонний акумулятор та вимикач, GSM модуль, GPS модуль, акумулятор, кнопка вмикання та вимикання.

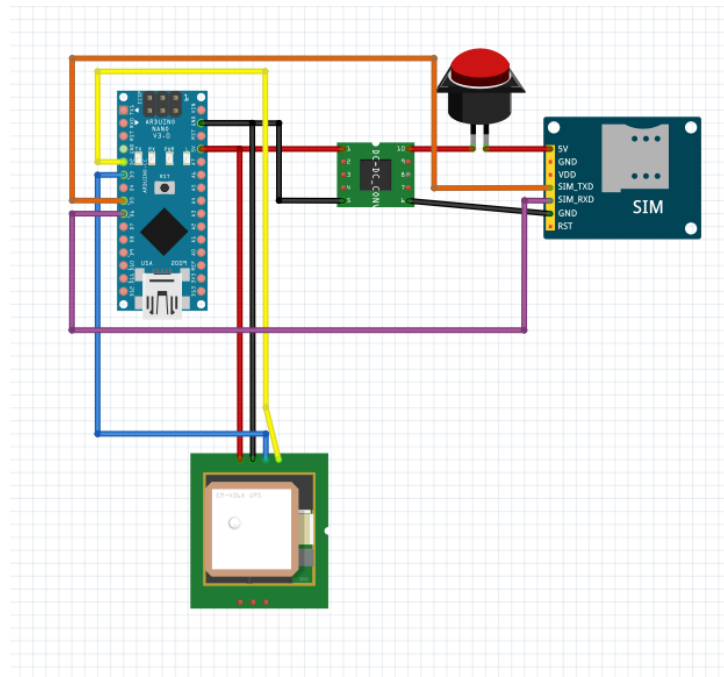


Рисунок 4.2 – Схема моделі GPS-трекера

Загальна архітектура прототипу системи відстежування з використанням даної моделі трекеру зображена на рисунку 8

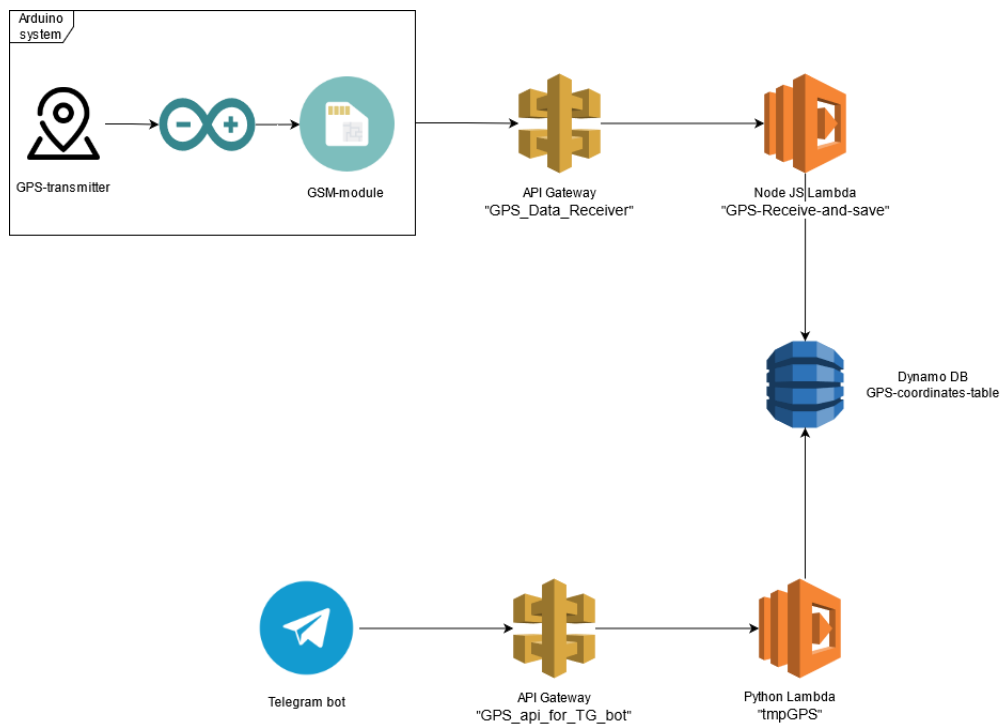


Рисунок 4.3 – Архітектура системи відстежування

У даному прикладі ми використовуємо набір хмарних сервісів AWS (Amazon Web Services) для взаємодії з трекером. На налаштування GPS-модуля після підключення його до мережі може піти до 10 хвилин, в залежності від обраної локації. Після налаштування кожен хвилину він відсилає інформацію про місцезнаходження на систему обробки. Після цього код-обробник зберігає отримані від трекеру дані з його координатами до бази даних та на карті ми можемо побачити координати даного об'єкту.

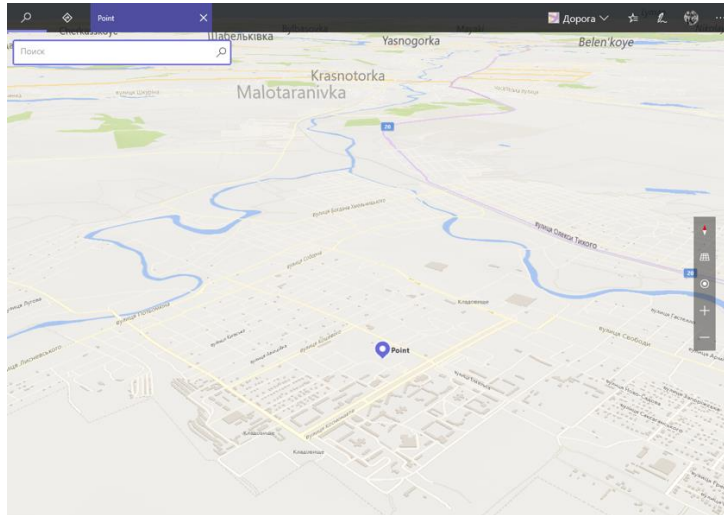


Рисунок 4.4 – Приклад зображення місцезнаходження моделі трекеру на картах

5 Висновки

Системи відстежування транспорту належать до складових частин системи управління. Їх застосовують як для відстежування міського транспорту, так й для підприємств, робота яких тісно пов'язана з відстежуванням транспорту. GPS-трекер як правило не залежить від різновиду машини через те, що він буде під'єднаний до системи обробки без зайвих налаштувань. І так як модель даного сервісу базується на архітектурі з використанням хмарних технологій, його можна буде розмістити ближче до географічної зони користування, що надає більшої гнучкості під час використання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Что представляют собой решения для определения местоположения [Електронний ресурс], URL: <https://www.zebra.com/ru/ru/solutions/intelligent-edge-solutions/rtls/what-are-location-solutions.html>
2. Система спутниковой навигации GPS – принцип, схема, применение [Електронний ресурс], URL: <https://arduinomaster.ru/datchiki-arduino/sistema-sputnikovoj-navigacii-gps/>
3. Точность навигационных систем ГЛОНАСС и GPS [Електронний ресурс], URL: <https://gpscool.ru/sistemy-gps-slezheniya/tochnost-navigatsionnyh-sistem-glonass-i-gps>
4. GPS LBS що це [Електронний ресурс], URL: <https://kztarif.ru/kompjutery/gps-lbs-cto-jeto>
5. LBS мониторинг: определение местоположения по GSM и WiFi [Електронний ресурс], URL: <https://www.navixy.com/ru/docs/academy/location-services/lbs-cell-id-and-wps/>
6. LBS сервис сегодня [Електронний ресурс], URL: <https://gurtam.com/ru/blog/wialon-lbs-servis-segodna>

REFERENCES

1. What are location solutions, URL: <https://www.zebra.com/ru/ru/solutions/intelligent-edge-solutions/rtls/what-are-location-solutions.html> [in Russian]
2. GPS satellite navigation system – principle, scheme, application, URL: <https://arduinomaster.ru/datchiki-arduino/sistema-sputnikovoj-navigacii-gps/> [in Russian]
3. Accuracy of GLONASS and GPS navigation systems, URL: <https://gpscool.ru/sistemy-gps-slezheniya/tochnost-navigatsionnyh-sistem-glonass-i-gps> [in Russian]
4. GPS LBS what is it, URL: <https://kztarif.ru/kompjutery/gps-lbs-cto-jeto> [in Russian]
5. LBS monitoring: location determination via GSM and WiFi, URL: <https://www.navixy.com/ru/docs/academy/location-services/lbs-cell-id-and-wps/> [in Russian]
6. LBS service today, URL: <https://gurtam.com/ru/blog/wialon-lbs-servis-segodna> [in Russian]

УДК 532.5+537.3

Порівняльне дослідження аеродинамічних властивостей тіл іхтіозаврів

В.В. Друшляк, Н.М. Кізілова, О.О. Корякіна, А.А. Халін

- Друшляк Владислав Віталійович** студент, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: vladislav.drushliak@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-3937-6139>
- Кізілова Наталія Миколаївна** д.ф.-м.н., професор; професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9981-7616>
- Корякіна Ольга Олександрівна** студентка, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: korykina67@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-2510-3615>
- Халін Анатолій Андрійович** студент, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: akhalin221x@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-3828-5086>

Досліджується обтікання геометричних форм, які відповідають тілам іхтіозаврів різного еволюційного віку, потоком в'язкої нестисливої рідини. Проведені розрахунки розподілень тиску і швидкості рідини навколо тіл в пакеті прикладних програм AnSys Fluent 2021 R2. Показано, що при деяких кутах нахилу тіла до потоку з'являються вихори, пари вихорів або вихрові доріжки, які приводять до змін зсувних напружень вздовж тіла. Це може використовуватися водними тваринами для контролю швидкості та «кута атаки» при занурюванні або впливанні, а також для рецепції і комунікації між ними. Проведене порівняння гідродинамічних властивостей тіл іхтіозаврів з подібними за розмірами дельфінами і китами. Показано, що в термінах аеродинамічних індексів немає явних розрізень між формами з різним еволюційним віком. Ймовірно, різні підвиди по-різному змінювали особливості плавання, такі як швидкості, кути атаки, проживання у верхніх або нижніх шарах та інші, пристосовуючись до своїх умов проживання. Отримані результати дозволяють краще зрозуміти механізми пристосування і напрямки еволюції водних тварин.

Ключові слова: математичне моделювання, плавання, гідромеханіка, механічні напруження, еволюція

Comparative study of aerodynamic properties of ichthyosaur bodies

- Drushliak Vladyslav** student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine
- Kizilova Nataliya** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Professor of the Department of Applied Mathematics
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine
- Koryakina Olga** student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine
- Khalin Anatolii** student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

The flow of viscous incompressible fluid around the geometric shapes corresponding to the bodies of ichthyosaurs of different evolutionary ages has been studied. The static pressure and flow velocity distributions around the bodies have been computed with the help of AnSys Fluent 2021 R2 software. It is shown that at some 'angles of attack' of the body to the flow there are vortices, pairs of vortices or vortex wakes, which lead to changes in the shear stress distribution along the body, that can be used by aquatic animals for purposes of sensing their environment and communicating. The hydrodynamic properties of the ichthyosaur bodies have been compared with dolphins and whales of a similar size. It is shown that in terms of aerodynamic indices there are no obvious differences between body forms of different evolutionary ages. Different species are most likely to have adapted the specifics of swimming, such as speed, angles of attack, habitation in the upper or lower layers, and others to

their living conditions. The obtained results allow us to understand better the adaptational mechanisms and direction of evolution of aquatic animals.

Keywords: *mathematical modeling, swimming, hydromechanics, mechanical stresses, evolution.*

Сравнительное исследование аэродинамических свойств тел ихтиозавров

Друшляк Владислав Витальевич	<i>студент, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022</i>
Кизилова Наталья Николаевна	<i>д.ф.-м.н., профессор; профессор кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022</i>
Корякина Ольга Александровна	<i>студентка, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022</i>
Халин Анатолий Андреевич	<i>студент, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022</i>

Исследуется обтекание геометрических форм, соответствующих телам ихтиозавров разного эволюционного возраста, потоком вязкой несжимаемой жидкости. Произведены расчеты распределений давления и скорости жидкости вокруг тел в пакете прикладных программ AnSys Fluent 2021 R2. Показано, что при некоторых углах наклона тела к потоку появляются вихри, пары вихрей или вихревые дорожки, которые приводят к изменениям сдвиговых напряжений вдоль тела. Это может использоваться водными животными для контроля скорости и «угла атаки» при погружении или всплытии, а также для рецепции и коммуникации между ними. Проведено сравнение гидродинамических свойств тел ихтиозавров со сходными по размерам дельфинами и китами. Показано, что в терминах аэродинамических индексов нет явных различий между формами с разным эволюционным возрастом. Вероятно, что разные подвиды по-разному изменяли особенности плавания, такие как скорости, углы атаки, обитание в верхних или нижних слоях и другие, приспосабливаясь к своим условиям обитания. Полученные результаты позволяют лучше понять механизмы приспособления и направления эволюции водных животных.

Ключевые слова: *математическое моделирование, плавание, гидромеханика, механические напряжения, эволюция*

1 Вступ

Розуміння розширення біорізноманіття в природі є основною метою еволюційної біології, яка використовує морфологічні подібності і генетичний аналіз для пошуку подібностей і відмінностей у різних видів тварин [1]. В останні роки перевага дається моделі раннього сплеску, яка передбачає швидку та широку морфологічну диверсифікацію на початку еволюційної історії. Цей сплеск розглядається як результат високих темпів еволюції, що призвело до раннього максимального морфологічного різноманіття (невідповідності), за яким слідує помітне уповільнення темпів та зменшення диспропорції. Філогенетичні порівняльні методи є недостатніми і в останні роки використовуються також порівняння ефективності різних фізіологічних систем та локомоцій, тобто здатності переміщуватися. Оскільки перші форми життя з'явилися у воді і еволюційні перетворення форми і будови тіла проходили у водних тварин, для порівняння їх здатностей до руху в воді використовуються комп'ютерні симуляції (computational fluid dynamics, CFD) обтікання тіл потоком води та обчислення гідродинамічного опору Z , підйомної сили F_L , напружень тертя на поверхні тіла τ_s і загального тертя F_D [2]. Порівняння ефективності польоту різних тварин від комах до птахів з ефективністю літаків показало східні залежності між величинами Z , F_L , F_D , максимальною швидкістю і масою та розмірами тіла (довжина розмаху крил) [3]. Таким чином, можливості до польоту живих і технічних систем обумовлені тими ж самим фізичними законами генерації підйомної сили і опору в потоці повітря. Оскільки у водних тварин ті ж самі сили генеруються під час обтікання тіла водою, закономірності руху повинні бути такими ж, як і у тварин, що здатні до польоту або паріння.

Попередні CFD розрахунки на 9 формах іхтіозаврів з еволюційно різним віком від 250 до 150 млн.років тому (МРТ) не виявили значних змін коефіцієнту опору і витрат енергії на рух з постійною швидкістю [2]. Іхтіозаври протягом свого існування приблизно 160 млн. років еволюціонували від видовжених і змієвидних форм у більш кремезних тварин, схожих на сучасних акул та дельфінів. Розрахунки [2] показали, що навіть ранні іхтіозаври мали низькі значення Z в перерахунку на фіксований об'єм тіл, однак були проведені розрахунки тільки при «куті атаки» $\alpha = 0$ (нахил потоку до поздовжньої осі тіла).

В даній роботі проведений порівняльний аналіз ефективності руху в воді тіл, геометрія яких відповідає еволюційно різним формам іхтіозаврів при різних кутах $-30^\circ < \alpha < 30^\circ$.

2 Аналіз геометрії тіл іхтіозаврів

Досліджуються оцифровані тривимірні зображення тіл іхтіозаврів різного еволюційного віку (від 250 до 150 МРТ) і тіл сучасних дельфінів-афалін (Рис.1а). Еволюція форми тіл включала поступове збільшення довжини тіла L від 40-50 см до 20-23 м, яке змінилося зменшенням до 2-4 м, що відповідає довжині тіл сучасних дельфінів (від 2-4 м у афалін до 6-8 м у косаток). Модифікації підпали також відносні поздовжні розміри (міделевий перетин в аеродинамічних термінах): зростання від 0.15 (форма 1) до 0.45 (форма 6) змінилося зменшенням до 0.28 (форма 9). Еволюційні зміни торкнулися розміру, форми і розташування хвостових плавників, а також напрямку його рухів (з вертикальної до горизонтальної площини).

Тварини з більшими розмірами мають більший об'єм м'язів, а тому можуть розвивати більші локомоторні сили. Для порівняльного аналізу тільки гідродинамічних властивостей тіл тварин як аеродинамічних форм, їх розміри, як і в [2], були приведені до стандартної довжини $L=1$ м, а всі плавники усунені (Рис.1б).

Результати розрахунків розмірних величин і безрозмірних параметрів наведені в Табл.1. Безрозмірний параметр M/P характеризує відносний розмір тіла, безрозмірний параметр S/P^2 - звивистість контуру, а безрозмірні параметри V/P^3 і $V/S^{3/2}$ - складність форми. Деякі з параметрів збільшені в 10 та 100 разів для більш чіткої демонстрації на одному рисунку. Всі параметри по-різному характеризують відносну товщину і складність поверхні тіл (Рис.2). Так, практично всі криві мають максимум для форми 6 – найбільш крупного іхтіозавра з найбільшим

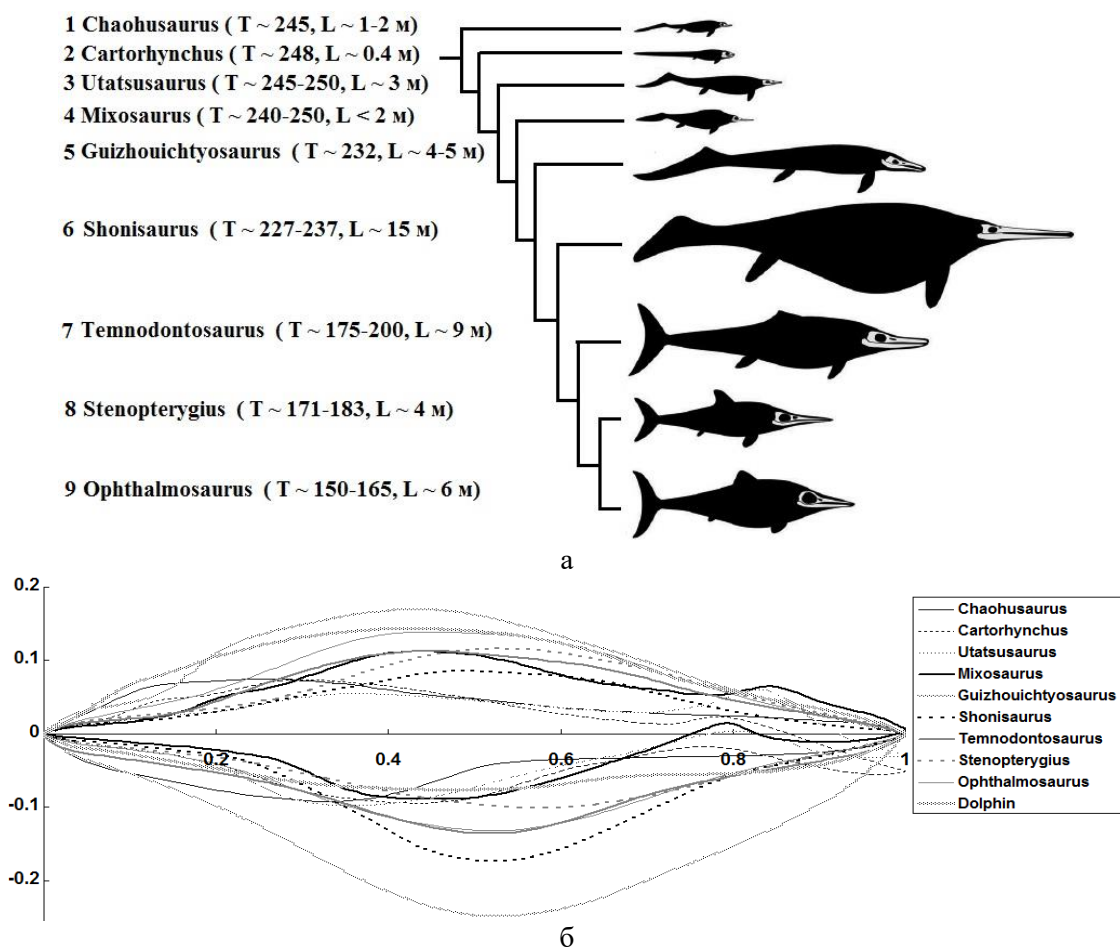


Рис.1 Початкові (а) і нормалізовані до довжини 1 м (б) тіла іхтіозаврів.

міделевим перетином, однак для форми 4 криві S/P^2 і $V/S^{3/2}$ мають максимум і мінімум відповідно, а інші параметри не мають екстремуму в цій точці. Можливі неточності порівняльного

аналізу пов'язані з розташуванням у найбільш архаїчних форм хвостового плавника, який був продовженням хребту, в вертикальній площині.

Таблиця 1. Геометричні параметри досліджуваних форм 1-10

	M (м)	P (м)	S (м ²)	V (м ³)	S/P^2	V/P^3	$V/S^{3/2}$	M/P
1	0.1682	2.1427	0.0873	0.0079	0.0190	0.0008	0.3080	0.0785
2	0.1670	2.1465	0.0912	0.0083	0.0198	0.0008	0.3003	0.0778
3	0.1578	2.1589	0.0893	0.0068	0.0192	0.0007	0.2531	0.0731
4	0.2017	2.1570	0.1912	0.0110	0.0411	0.0011	0.1320	0.0935
5	0.2593	2.0874	0.1219	0.0189	0.0280	0.0021	0.4442	0.1242
6	0.4183	2.4345	0.2439	0.0623	0.0412	0.0043	0.5170	0.1718
7	0.2489	2.1996	0.1353	0.0188	0.0280	0.0018	0.3779	0.1132
8	0.2171	2.0455	0.1174	0.0145	0.0281	0.0017	0.3593	0.1062
9	0.2710	2.2041	0.1463	0.0228	0.0301	0.0021	0.4082	0.1230
10	0.2199	2.0668	0.1426	0.0208	0.0334	0.0024	0.3862	0.1064

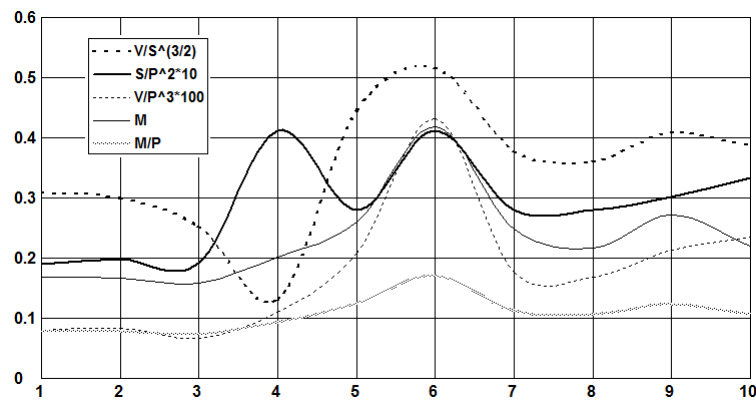


Рис.2 Безрозмірні геометричні параметри тіл 1-10

3 Математична постановка задачі обтікання

Розглядається стаціонарна течія в'язкої нестисливої рідини навколо твердої поверхні. У випадку повільного руху ($Re < 1200$) течія моделювалась рівняннями Нав'є-Стокса

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v}, \quad (1)$$

де \vec{v} і p - швидкість і гідростатичний тиск в рідині, ρ і ν - густина і кінематична в'язкість рідини.

У випадку швидкого руху ($Re \sim 10^6 - 10^8$) використовувалася $k - \omega$ SST модель турбулентної течії

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{u} - \overline{u' u'}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla) k = P_k - \beta^* k \omega + \operatorname{div}[(\nu + \sigma_k \nu_t) \nabla k], \quad (3)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla) \omega = \gamma S^2 - \beta \omega^2 + \operatorname{div}[(\nu + \sigma_\omega \nu_t) \nabla \omega] + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega, \quad (4)$$

де k і ω - кінетична енергія і швидкість дисипації турбулентної течії, u' і \vec{u} - флуктуації швидкості і їх осереднені за часом значення, $\nu_t = \frac{ak}{\max(a\omega, SF_2)}$ - турбулентна в'язкість, $S^2 = 2S_{ik}S_{ik}$

$$S_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad P_k = \min \left(\tau_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, 10\beta^* k \omega \right), \quad F_2 = th \left[\left[\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega z}, \frac{500\nu}{\omega z^2} \right) \right]^2 \right],$$

$$F_1 = th \left(\min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega z}, \frac{500\nu}{\omega z^2} \right), \frac{4k\sigma_{\omega 2}}{z^2 CD_{k\omega}} \right] \right)^4, \quad CD_{k\omega} = \max \left(2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega, 10^{-10} \right), \quad a=0.44, \quad \gamma=5/9, \quad \beta^* = 0.09, \quad \sigma_k=0.85, \quad \sigma_\omega=0.5, \quad \sigma_{\omega 2}=0.856.$$

В якості граничних умов приймалися (1) умови прилипання рідини на поверхні тіла, (2) постійна швидкість потоку, що набігає $\vec{v}_{in}=5-25$ м/с і (3) тиск в потоці $p_{out}=0$.

Чисельні розрахунки проводилися з використанням програмної реалізації методу скінченних елементів в пакеті AnSys Fluent 2021R2, який є безкоштовним для навчальних і дослідницьких цілей. Розрахункова сітка подрібнювалася до поверхні тіла з використанням bias-технології (Рис.3а). Модель розрахункової області складалася з поєднання паралелепіпеда і півкулі (Рис.3б). Для скорочення часу обчислень розглядалася тільки половина тіла з поверхнею симетрії вздовж її поздовжнього перетину. Для рівнянь (1) і (4)-(5) використовувалися чисельні схеми 2-го порядку точності. Якість сітки перевірялася за допомогою опції Y^+ пакету Fluent. Сітка подрібнювалась до досягнення відповідності послідовних обчислень з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

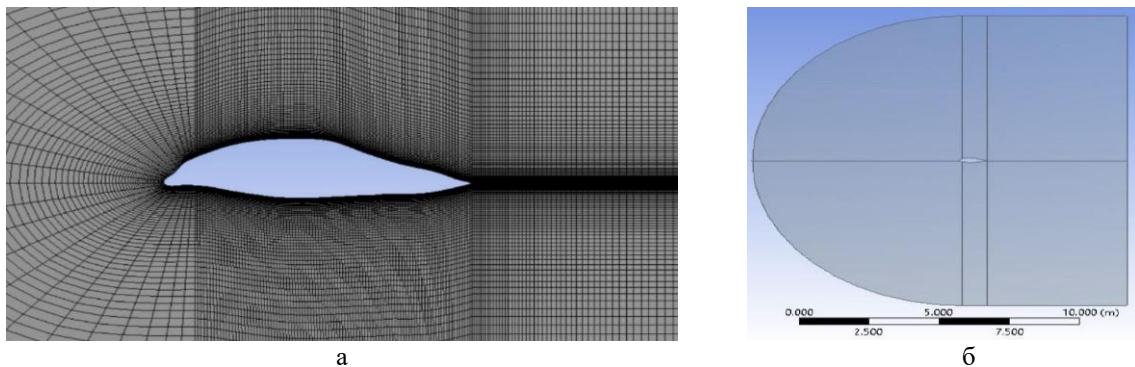
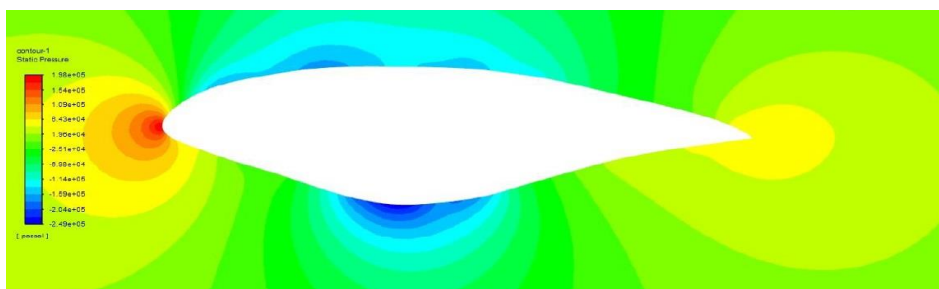


Рис.3. Структурована сітка навколо поверхні тіла (а) і розрахункова область (б).

4 Результати чисельних розрахунків і їх обговорення

В якості рідини з бази даних матеріалів Fluent була обрана модель water-liquid зі стандартними механічними параметрами при кімнатній температурі. Для повільного руху $\vec{v}_{in}=5-10$ м/с розв'язувались рівняння (1), а для швидкостей руху $\vec{v}_{in}=20-25$ м/с – рівняння (2)-(4). Результати розрахунків розподілень гідростатичного тиску, швидкостей, кінематичної енергії турбулентного руху і лінії течії рідини наведені для форм 6 і 7 на Рис.4 і Рис 5.

Для більшості форм отримано плавне ламінарне обтікання з утворенням вихору лише поблизу хвоста, про що говорить і розподілення величини k навколо тіла. Практично на всі форми при русі з нульовим кутом нахилу α діє ненульова підйомна сила за рахунок більших тисків, що діють на нижню поверхню тіла у порівнянні з верхньою поверхнею. Результати розрахунків відповідають даним [2] для $Re \sim 10^6-10^8$. При ненульових кутах нахилу тіла (пірнання або спливання) картина суттєво змінюється, а саме у випадку ламінарної течії спостерігається сепарація ліній току і утворення областей вторинної циркуляції, а при турбулентній – розвинення турбулентного пристінного шару і вихрового ланцюга, який відходить від поверхні тіла біля хвоста (Рис.6). В результаті напруження тертя вздовж тіла у порівнянні з його величиною при $\alpha = 0$ суттєво зростає (Рис.7).



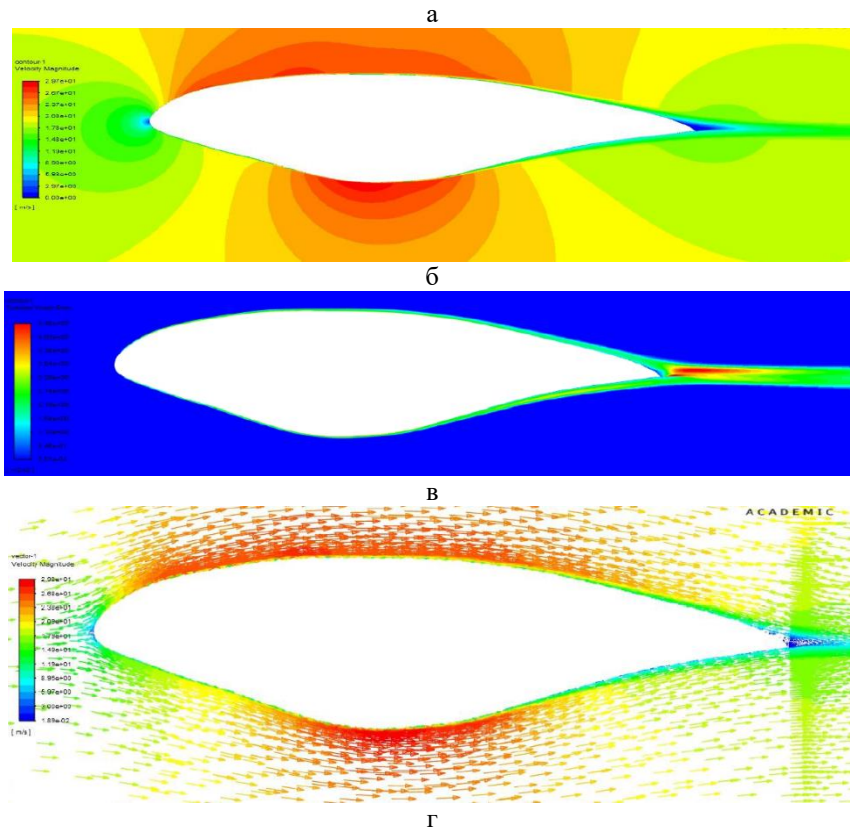


Рис.4. Контурні графіки гідростатичного тиску (а), величини швидкості (б), вектору швидкості (в) і ліній току рідини (г) для тіла 6.

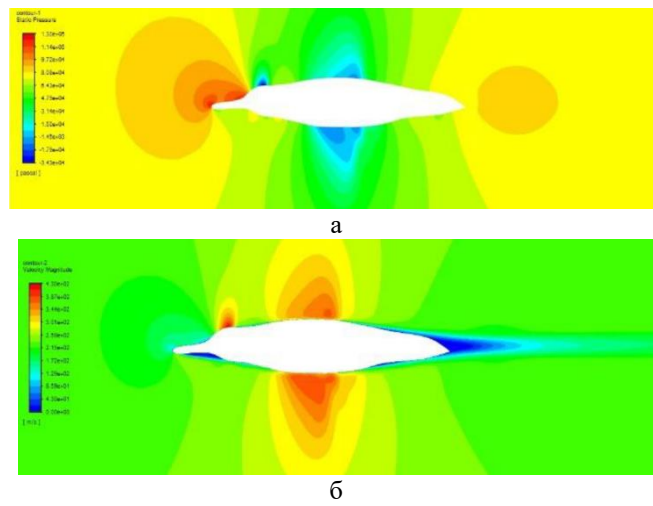
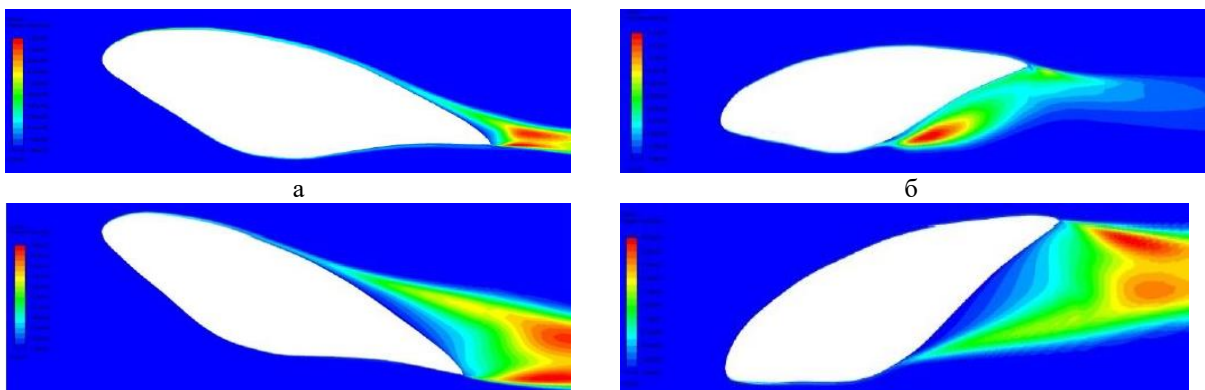


Рис.5. Контурні графіки гідростатичного тиску (а) і величини швидкості (б) для тіла 7.



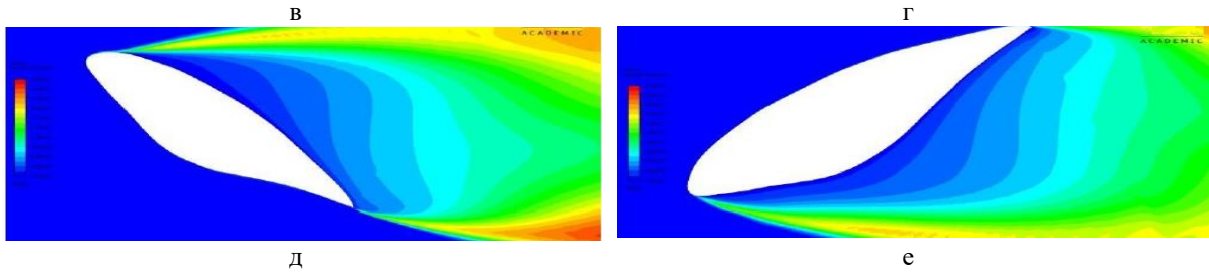


Рис.6. Контурні графіки кінетичної енергії турбулентної течії рідини при кутах нахилу $+10^\circ$ (а), -10° (б), $+20^\circ$ (в), -20° (г), $+30^\circ$ (д), -30° (е) тіла 6.

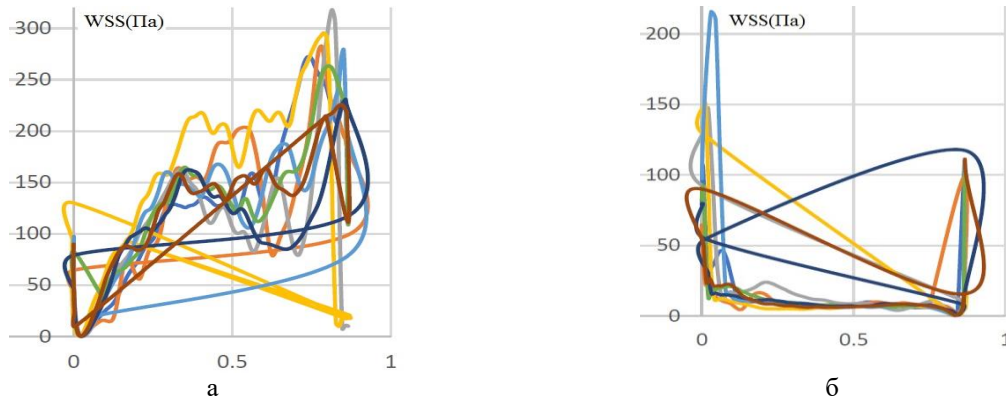


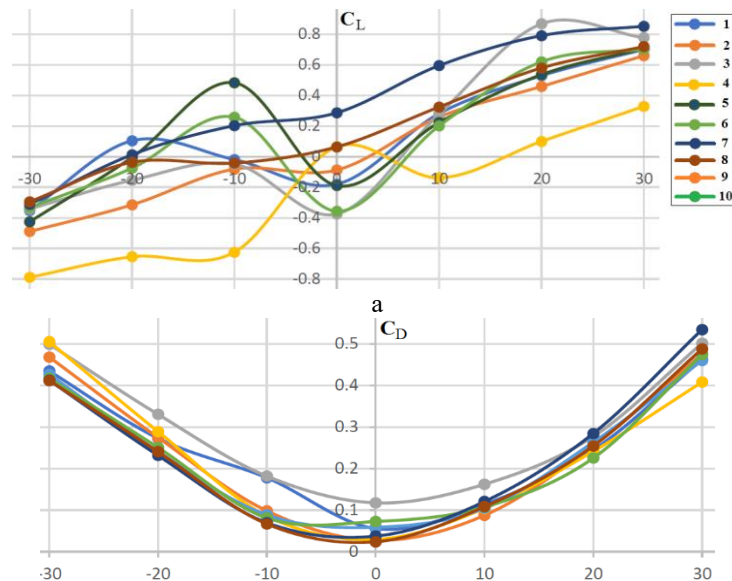
Рис.7. Розподілення поверхневих напружень тертя (WSS, wall shear stress) вздовж верхньої (а) і нижньої (б) поверхонь тіла 4 при $\alpha = 20^\circ$.

Інтегральні аеродинамічні параметри коефіцієнти підйомної сили і тертя розраховувалися за стандартними формулами

$$C_L = \frac{F_L}{\rho v^2 A_M / 2}, \quad C_D = \frac{F_D}{\rho v^2 A_M / 2}, \quad (5)$$

де F_L - підйомна сила, F_D - сила тертя, A_M - площа міделева перетину.

Результати розрахунків показали, що висновки [2] є передчасними. Коефіцієнти тертя і підйомної сили мають значні розбіжності між тілами 1-10 при позитивних або негативних кутах нахилу. Залежності $C_L(\alpha)$, $C_D(\alpha)$, $C_L(C_D)$, а також аеродинамічна якість $C_L^3 / C_D^2(\alpha)$ відрізняються для тіл з різним еволюційним віком. Монотонна залежність, спрямована на поліпшені аеродинамічні характеристики еволюційно нових форм не виявлена, однак окремі геометричні форми мають переваги при спливанні або зануренні з великими кутами атаки.



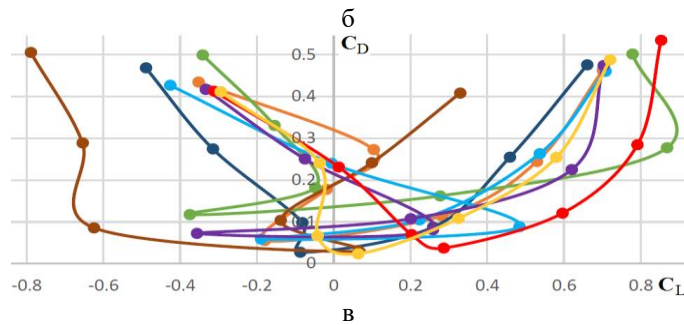


Рис.8. Залежності $C_L(\alpha)$ (а), $C_D(\alpha)$ (б) і C_L/C_D (в) для тіла 7.

5 Висновки

Порівняльний аналіз аеродинамічних властивостей форм тіл іхтіозаврів різного еволюційного віку показав, що протягом еволюції відбувалися зміни геометрії від коротких витягнутих форм з малими значеннями безрозмірних відношень поверхні міделевого перетину до площини тіла, периметру, площини та об'єму тіла до крупних форм з більш складною геометрією і відносно високими значеннями безрозмірних параметрів (Табл.1, Рис.2). Аеродинамічні властивості геометричних форм, які були нормалізовані до стандартної в аеродинаміці крила довжини $L=1\text{м}$, незначно відрізняються при кутах нахилу $\alpha=0$, але мають суттєві відмінності для позитивних $\alpha=10-30$ і негативних $\alpha=-10-30$ кутів, які відповідають зануренню або спливанню. Таким чином, еволюційні зміни форм тіла, які були раніше підтвержені морфологічним аналізом, є неоднозначними. Деякі з них могли бути спрямовані на зменшення напружень тертя на поверхні тіла під час швидких рухів іхтіозаврів в переслідуванні мілкої риби, або в уникненні від хижаків. Крім того, проведені дослідження виявили неоднозначність нормалізації профілів до стандартної довжини, що також було виявлено в попередніх CFD дослідженнях [2]. Отримані результати можуть бути використані для додаткової оцінки ефективності різних еволюційних форм вимерлих тварин.

ЛІТЕРАТУРА

1. Moon B.C., Stubbs Th.L. Early high rates and disparity in the evolution of ichthyosaurs. *Communications Biology*. 2020. Vol. 3. P.68-79. <https://doi.org/10.1038/s42003-020-0779-6>
2. Gutarra S., Moon B.C., Rahman I.A., Palmer C., Lautenschlager S., Brimacombe A.J., Benton M.J. Effects of body plan evolution on the hydrodynamic drag and energy requirements of swimming in ichthyosaurs. *Proceedings of the Royal Society London, Ser. B*. 2019. Vol. 286: 20182786. <http://dx.doi.org/10.1098/rspb.2018.2786>
3. Bejan A., Marden J. H. Constructing Animal Locomotion from New Thermodynamics Theory: Although running, flying and swimming appear to be distinctly different types of movement, they may have underlying physics in common. *New Scientist*. 2006. Vol. 94. P. 342-349, doi: jstor.org/stable/27858803

REFERENCES

1. B.C. Moon, Th.L. Stubbs, "Early high rates and disparity in the evolution of ichthyosaurs", *Communications Biology*, 2020, v. 3, P.68-79. <https://doi.org/10.1038/s42003-020-0779-6>
2. S. Gutarra, B.C. Moon, I.A. Rahman, C. Palmer, S. Lautenschlager, A.J. Brimacombe, M.J. Benton "Effects of body plan evolution on the hydrodynamic drag and energy requirements of swimming in ichthyosaurs", *Proceedings of the Royal Society London, Ser. B*, 2019, v. 286, 20182786. <http://dx.doi.org/10.1098/rspb.2018.2786>
3. A. Bejan, J. H. Marden "Constructing Animal Locomotion from New Thermodynamics Theory: Although running, flying and swimming appear to be distinctly different types of movement, they may have underlying physics in common", *New Scientist*, 2006, v. 94, P. 342-349. doi: jstor.org/stable/27858803

УДК 001.891.572+004.942

Аналіз «великих даних» і математичне моделювання епідемії covid-19 в країнах Європи

Д.А. Кулик, Є.П. Куркчі, Н.М. Кізілова

**Кулик
Дар'я Андріївна**

студентка, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: kulykdar@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-4929-1745>

**Куркчі
Єлизавета Павлівна**

студентка, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: kurkchi1998@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-3738-0978>

**Кізілова
Наталія Миколаївна**

д.ф.-м.н., професор; професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: n.kizilova@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9981-7616>

Досліджуються закономірності динаміки пандемії covid-19 в Україні та інших країнах Європи з використанням методів аналізу «великих даних» у вигляді часових рядів та супутньої інформації з відкритих онлайн джерел. Статистичний аналіз згладжених кривих нових випадків захворювання $I(t)$, померлих $D(t)$, одужалих $R(t)$ та інших часових рядів виявляє різні типи динаміки: хвильову (i), квазіхвильову зі зсувом за часом (ii), східчасту (iii), з аномально високими або низькими амплітудами локальних коливань. За допомогою метода найближчого сусіда побудовані відповідні дерева подібності, в які країни з різними типами динаміки (i,ii,iii) входять у групах. На основі популярної математичної моделі SIRS досліджена стійкість нульової та ненульової стаціонарних точок. Отримані розв'язки лінеаризованої системи та досліджений вплив параметрів моделі на власні значення матриці системи. Показана наявність різних типів динаміки: з трьома негативними дійсними (а), одним позитивним дійсним (б), одним дійсним і парою комплексно спряжених (в) власних значень. Побудовані фазові портрети і показаний зв'язок типів часових рядів (i,ii,iii) і розв'язків (а,б,в) системи рівнянь моделі SIRS. Отримані результати дозволяють на основі аналізу часових рядів на даний момент оцінити динамічну поведінку системи, її стійкість або нестійкість з можливістю появи хаотичної динаміки.

Ключові слова: математична епідеміологія, covid-19, аналіз «великих даних», фазовий портрет, стійкість.

Analysis of "big data" and mathematical modeling of the covid-19 epidemic in Europe

Kulyk Daria

student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

Kurkchi Yelizavieta

student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

Kizilova Nataliya

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Professor of the Department of Applied Mathematics
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

The regularities of the dynamics of the covid-19 pandemic in Ukraine and other European countries are studied by using the methods of analyzing "big data" in the form of time series and related information from open online sources. Statistical analysis of smoothed curves of new cases $I(t)$, dead $D(t)$, recovered $R(t)$ and other time series has shown different types of dynamics: wave (i), quasi-wave with time shift (ii), stepwise (iii), with abnormally high or low amplitudes of local oscillations. The appropriate similarity trees have been constructed by using the nearest neighbor method. It is shown that the countries with different types of dynamics (i, ii, iii) are located in separate branches of the trees. The stability of zero and nonzero stationary points have been investigated on the basis of the popular mathematical model SIRS. The solutions of the linearized system have been obtained and the influence of the model parameters on the eigenvalues of the system matrix has been investigated. The presence of different types of dynamics is shown: with three negative real (a), one positive real (b), one real and a pair of complex

conjugate(c) eigenvalues. The phase portraits have been constructed and the connection of the types of time series (i, ii, iii) and solutions (a, b, c) of the SIRS equations is shown. The obtained results allow us to estimate the dynamic behavior of the system, its stability or instability with the possibility of chaotic dynamics on the basis of the analysis of time series on any current day.

Keywords: *mathematical epidemiology, covid-19, Big Data analysis, harmonic analysis, phase portrait, stability.*

Анализ «больших данных» и математическое моделирование эпидемии covid-19 в странах Европы

Кулик Дарья Андреевна	<i>студентка, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022</i>
Куркчи Елизавета Павловна	<i>студентка, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022</i>
Кизилова Наталья Николаевна	<i>д.ф.-м.н., профессор; профессор кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022</i>

Исследуются закономерности динамики пандемии covid-19 в Украине и других странах Европы с использованием методов анализа «больших данных» в виде временных рядов и сопутствующей информации из открытых онлайн источников. Статистический анализ сглаженных кривых новых случаев заболевания $I(t)$, умерших $D(t)$, выздоровевших $R(t)$ и других данных выявил разные типы динамики: волновую (i), квазиволновую со смещением по времени (ii), ступенчатую (iii), с аномально высокими или низкими амплитудами локальных колебаний. С помощью метода ближайшего соседа построены соответствующие деревья подобности, в которые страны с разными типами динамики (i,ii,iii) входят отдельными группами. На основе популярной математической модели SIRS исследована устойчивость нулевой и ненулевой стационарных точек. Получены решения линеаризованной системы и исследовано влияние параметров модели на собственные значения матрицы системы. Показано наличие различных типов динамики: с тремя отрицательными действительными (а), одним положительным действительным (б), одним действительным и парой комплексно сопряженных (в) собственных значений. Построены фазовые портреты и показана связь типов временных рядов (i,ii,iii) и решений (а,б,в) системы уравнений модели SIRS. Полученные результаты позволяют на основе анализа временных рядов оценить динамическое поведение системы, ее устойчивость или неустойчивость с возможностью появления хаотической динамики.

Ключевые слова: *математическая эпидемиология, covid-19, анализ «больших данных», фазовый портрет, устойчивость.*

1 Вступ

Майже два роки відслідкування динаміки розповсюдження пандемії covid-19 в більш ніж 220 країнах та окремих регіонах (острови, випадки на океанських лайнерах, міста з особливим статусом) дозволяють стверджувати, що наведені на багатьох відкритих онлайн ресурсах [1,2] результати щоденних вимірювань числа захворілих (I , infected), одужалих (R , recovered), померлих (D , dead) та низки інших показників відносяться до «великих даних (BigData), оскільки задовольняють головному критерію VVV (volume, velocity, variety) [3]. Окрім зростання об'єму даних, спостерігається додавання з прискореною швидкістю нових часових рядів, таких як кількість вакцинованих (V , vaccinated), тестованих (T , tested), самоізолюваних (Q , quarantined), госпіталізованих (H , hospitalized), а також коефіцієнту інфікування (R_0 , infection rate, тобто середньої кількості осіб, яку інфікує одна хвора особа), показників розвинення країни і т.д. Такі масиви даних дозволяють виявляти нову важливу інформацію методами обробки «великих даних». Був досліджений можливий вплив соціально-економічних факторів на динаміку пандемії в країні [4], показана наявність подібної динаміки у країн-сусідів [5]. Порівняльний аналіз вимірних кривих показує, що динамічна поведінка розповсюдження covid-19 відрізняється в різних країнах (Рис.1). Для цілей статистичного аналізу криві осереднюють методом віконця, яке прослизає, шириною в 7 діб, що дозволяє згладити випадкові коливання і виявити лінію тренду. Так, в ряді країн спостерігається класична для математичної епідеміології [6] хвильова картина з чіткими максимумами і мінімумами (практично до незначних величин) кривих $I(t)$, $D(t)$ (Рис.1а). Однак найчастіше окремі хвилі «наповзають» одна на одну (Рис.1б) і не завжди зрозуміло, це друга хвиля переходить в третю, або це продовження другої хвилі. У окремих випадках спостерігається незначне зниження значень $I(t)$, $D(t)$, яке швидко переходить до нового максимуму і поступовим зростанням мінімальних значень (Рис.1в).

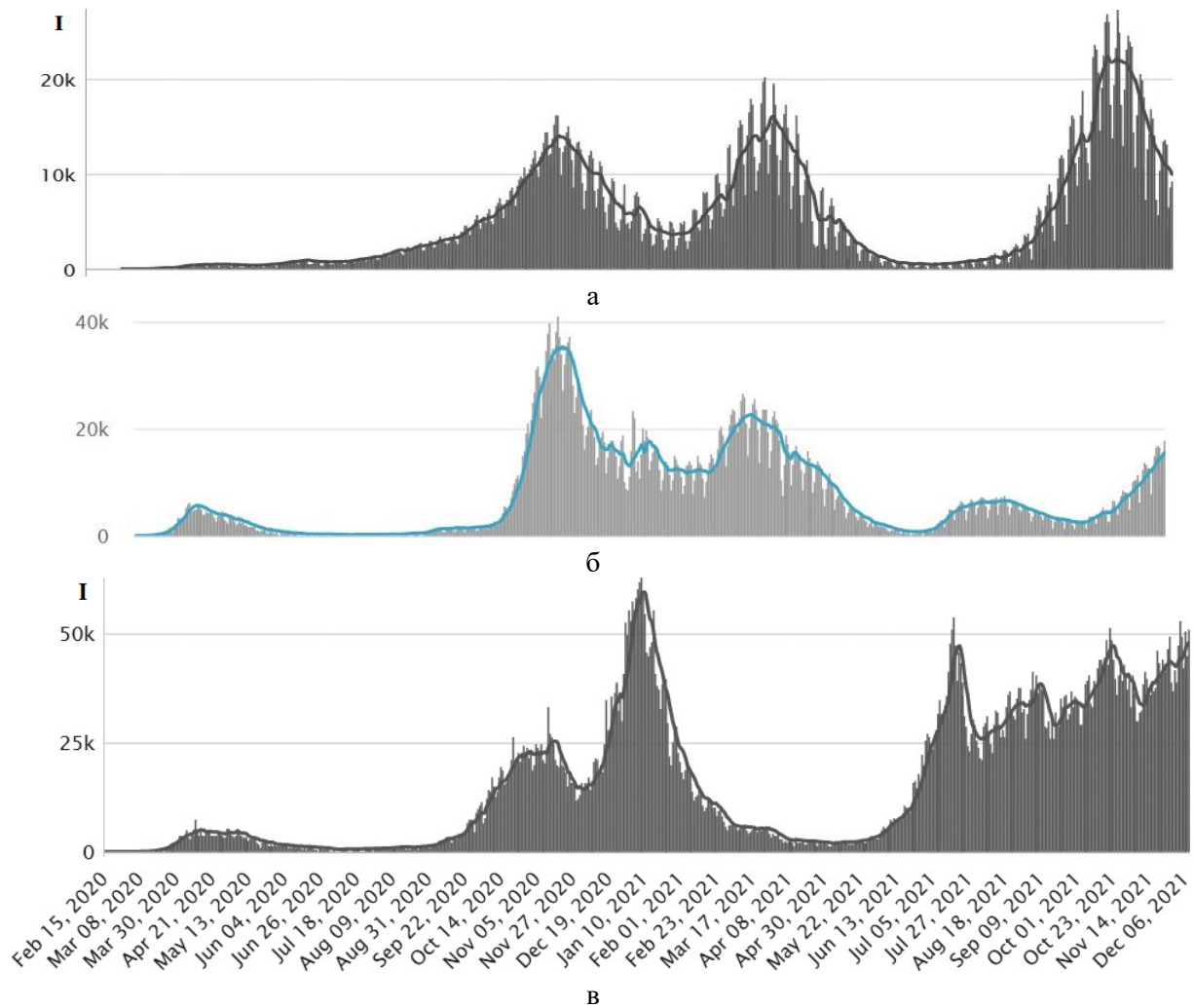


Рис.1 Різні типи динамічної поведінки часових рядів $I(t)$ в Україні (а), Італії (б), Великобританії (в); k позначає 10^3 (кіло-).

Для зрозуміння причин різних типів розповсюдження захворювання потрібний більш детальний аналіз часових рядів методами «великих даних» і вивчення властивостей розв'язків відповідних математичних моделей, що складає ціль даного дослідження.

2 Статистичний аналіз часових рядів

Вихідні дані у вигляді часових рядів $I_j(t)$, $D_j(t)$, $R_j(t)$, та ін., де $j=1,2,\dots,n$ – порядковий номер країни, згладжувалися. Проводилася загальна описова аналітикою В кожному з рядів виділялися лінії тренду і осциляції [5]. Остання компонента досліджувалася за допомогою спектрального аналізу. Оскільки відповідні імовірнісні розподілення не відповідали Гаусовому, замість розрахунків коваріацій і кореляційного аналізу був використаний метод найближчого сусіда. Для кожної з пар кривих $(X_j(t), X_k(t))$, де j і k – номери з початого набору з n країн, $X(t)$ – часові ряди одного типу (захворілі, померлі, і т.д.) обчислювалася відстань $D(X_j, X_k)$ між ними у декартовій метриці

$$D(X_j, Y_k) = \left(N^{-1} \sum_{m=1}^N (X_j(t_m) - Y_k(t_m))^2 \right)^{1/2}, \quad (1)$$

де N – число днів спостережень або довжина часових рядів.

Пара країн з мінімальною серед усіх облічених відстанню замінювалася на новий часовий ряд $\{X_{jk}(t_m)\}_{m=1}^N = \{X_j(t_m) - X_k(t_m)\}_{m=1}^N$, після чого процедура обчислень відстаней для всіх пар зі списку $n-1$ країн повторювалась. Після кожної ітерації кількість країн зменшувалася на одну. По закінченню ітерацій за (1) генерувалося дерево найближчих сусідів, яке відповідало найбільш

подібним кривим динаміки епідемії в країнах. На Рис.2 наведений результат розрахунків для часових рядів $I_j(t)$ країн Європи. Таким чином, на відміну від візуальної оцінки подібності динаміки у вигляді кількості і структури окремих хвиль (Рис.1а-в), використаний метод дозволяє кількісно оцінювати ступінь подібності у вигляді дерева відстаней. Окремі агрегати добре відповідають географічним локаціям, наприклад, Великобританія і Ірландія; Іспанія, Португалія і Монако; Польща і Угорщина; Франція і Нідерланди; Швеція; Ліхтенштейн і Швейцарія; Люксембург і Хорватія; Австрія і Італія; Боснія і Болгарія; П. Македонія і Молдова; Румунія; Німеччина і Україна; Росія і Беларусь; Норвегія і Фінляндія; Данія; Греція; Албанія; Словачія; Латвія; Литва; Словенія; Косово; Бельгія; Естонія; Сербія; Чехія; Андора.

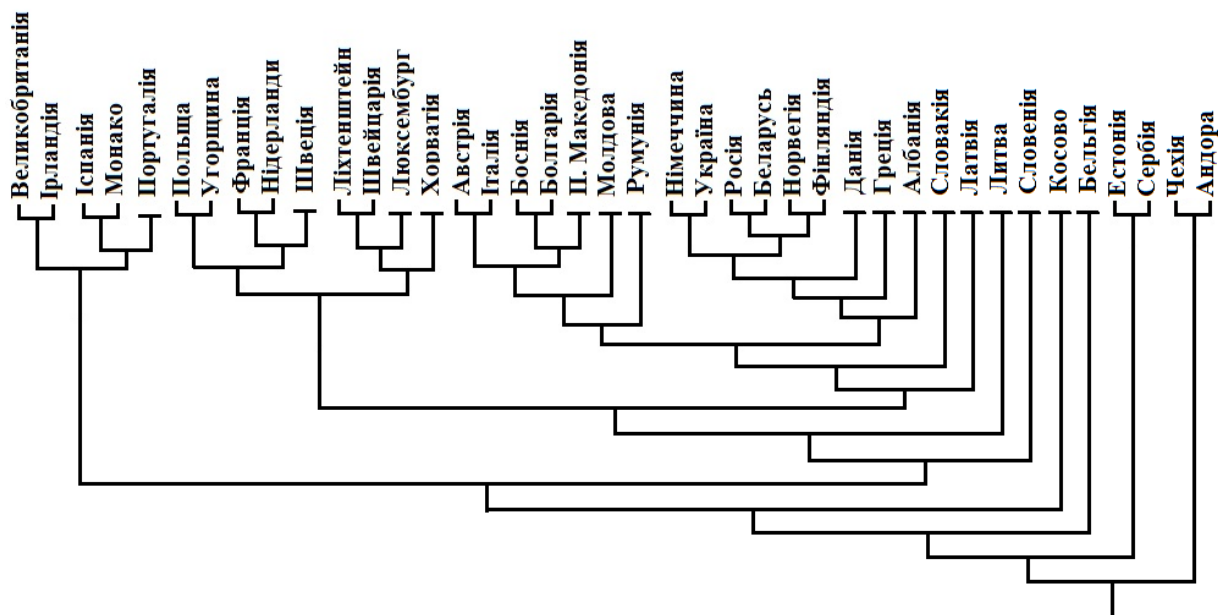


Рис.2. Дерева відстаней для кривих $I(t)$ країн Європи.

3 Математичне моделювання динаміки епідемії

Математична епідеміологія сходиться до класичних праць кінця XIX – початку XX ст. [4-6], які використовували модель Лотка-Вольтерра вигляду «хижак-жертва», де в якості двох останніх розглядалися віруси (або бактерії) і популяція (або тварин). Була сформульована гіпотеза, що епідемія спадає, коли значно зменшується кількість сприйнятливих до інфекції індивідів (вмирають або одужують), тобто закінчується «паливо» для «вогню» епідемії [5]. В яких випадках спостерігається хвиля захворювання з чіткими швидким, а потім повільним підйомом, максимумом, швидким, а потім повільним спадом до мінімуму (Рис.1а).

Динаміка вірусних епідемії відрізняється коротким часом імунітету, можливістю повторних заражень, високим рівнем мутацій вірусу, що у всій сукупності спостерігається для випадку covid-19 [7]. Для урахування цих особливостей вірусів SARS і ряду інших були розроблені моделі SIRS (три звичайні диференціальні рівняння, ЗДР), SEIRS (чотири ЗДР) та ще більш детальні (5-8 ЗДР) математичні моделі. В даній роботі використана стандартна модель SIRS, яка дозволяє візуалізацію динамічних кривих в координатах (S,I,R) на 3D графіках. Відповідно до цієї моделі, потенційно сприйнятливі (S, susceptible) до інфекції індивіди після зустрічі і спілкування з інфікованими (I) особами можуть перейти до групи захворілих, після чого перейти або до групи D, або до групи R. У зв'язку з особливостями SARS-CoV епідемії, деяка частина індивідів з групи R (з недостатньо високим імунітетом) знов переходить до групи S. Відповідна система ЗДР має вигляд [4-7]:

$$\frac{dS}{dt} = \zeta - \mu S - \alpha SI + \delta R, \quad \frac{dI}{dt} = \alpha SI - (\beta + \gamma) I, \quad \frac{dR}{dt} = \beta I - \delta R, \quad (2)$$

де ζ і μ - природні коефіцієнти народжуваності та смертності, α - імовірність захворювання при контактах з інфікованими, γ - коефіцієнт смертності від covid, β - коефіцієнт одужання, δ - імовірність повторного інфікування covid.

Сума рівнянь (2) відповідає динаміці популяції в цілому ($P=S+I+R$)

$$\frac{dP}{dt} = \zeta - \mu S - \gamma I, \quad (3)$$

де P – чисельність населення (країни, області, і т.д.), яка визначається тільки народжуваністю населення (ζ), його смертністю від звичайних факторів (μ) та від covid (γ). Таким чином, модель (3) відповідає лінійному зростанню популяції ($dP/dt = \zeta = \text{const}$) за рахунок народження і міграції, на відміну від експоненціальної моделі Мальтуса ($dP/dt = \zeta P$).

З правої частини (3) видно, що система знаходиться у стаціонарному стані ($dP/dt=0$) якщо $I_0 = I^*$, $I^* = (\zeta - \mu S_0) / \gamma$. Якщо $I_0 > I^*$, починається значне зменшення чисельності населення від пандемії.

Система (2) має дві стаціонарні точки:

1) нульова $S_0 = \zeta / \mu$, $I_0 = 0$, $R_0 = 0$, яка відповідає відсутності епідемії;

2) ненульова з постійними значеннями $S_0 = \frac{(\beta + \gamma)}{\alpha}$, $I_0 = \frac{(\zeta - \mu)(\beta + \gamma)}{\alpha \gamma}$, $R_0 = \frac{\beta(\zeta - \mu)(\beta + \gamma)}{\alpha \delta \gamma}$

.Дослідимо умови стійкості системи (2) навколо стаціонарних точок. Для цього розглянемо розв'язок (2) у вигляді

$$S(t) = S_0 + S^* e^{\lambda t}, \quad I(t) = I_0 + I^* e^{\lambda t}, \quad R(t) = R_0 + R^* e^{\lambda t}, \quad (4)$$

де λ - власні значення матриці системи (2), $\{S^*, I^*, R^*\}$ - амплітуди. Якщо $\text{Re}(\lambda) < 0$, розв'язок (2) є асимптотично стійким. Підстановка (4) в (2) з урахуванням (3) дає систему рівнянь для визначення амплітуд $\{S^*, I^*, R^*\}$ у вигляді

$$M \begin{pmatrix} S^* \\ I^* \\ R^* \end{pmatrix} = 0, \quad M = \begin{pmatrix} \lambda - (\zeta - \mu) + \alpha I_0 & \alpha S_0 & -\delta \\ -\alpha I_0 & \lambda - \alpha S_0 + (\beta + \gamma) & 0 \\ 0 & -\beta & \lambda + \delta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Умова $\det(M) = 0$ існування нетривіального розв'язку (5) дає кубічне рівняння для λ визначення власних значень системи (2)

$$\lambda^3 + \Phi \lambda^2 + \Theta \lambda + \Omega = 0, \quad (6)$$

де $\Phi = \delta + p + q$, $\Theta = \delta(p + q) + R$, $\Omega = \delta(pq + \alpha^2 S_0 I_0)$, $p = \beta + \gamma - \alpha S_0$, $q = \alpha I_0 - \zeta + \mu$.

Коефіцієнти (6) є дійсні числа, а тому розв'язки алгебраїчного рівняння можуть давати або набір з трьох дійсних чисел, або одне дійсне і пару комплексно спряжених величин, відповідно до значень параметрів моделі (2). Якщо $\Theta = \Phi^2 / 3$, $\Omega = \Phi^3 / 27$, система (5) має один трьохкратний дійсний корінь. Якщо $729\Theta^3 - 708.75\Theta^2\Phi^2 + 234\Theta\Phi^4 - 26\Phi^6 + 27\Phi^3\Omega - 121.5\Phi\Theta\Omega + 182.25\Omega^2 = 0$, система (5) має один однократний і один двократний дійсні корні. Таким чином, в залежності від параметрів, динамічна поведінка системи буде суттєво відрізнятися.

При цьому значення ζ і μ можуть бути взяті зі статистичних даних народжуваності і смертності у даній країні, а значення $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ залежать від різних соціально-економічних факторів, які специфічні для даної країни, і повинні бути визначені шляхом порівняння розв'язку задачі (2) і даних вимірювань, наприклад, за допомогою методу найменших квадратів. Ці значення обчислювалися з використанням даних різних країн [5-10]. Було показано, що параметри моделі, які були обчислені з використанням експериментальних даних різної довжини N , дають трохи різні значення для тієї ж самої країни. Таким чином, параметри $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ є не константами, але функціями часу, оскільки вони відповідають поступовим змінам рівню імунітету, прийнятих засобів обмеження (від масок і соціальної дистанції до локдауну і закритих границь), динаміки вакцинації, наявності нових ліків і т.д.

4 Чисельні розрахунки і обговорення результатів

Для чисельних розрахунків розв'язків і фазових портретів системи (2) використовувалися початкові значення параметрів, які були обчислені як осереднені в даній країні за всіма хвилями епідемії, які попередньо були отримані в цій країні різними авторами і опубліковані протягом 2020-2021 рр. [4-10]: $\alpha_0 = 1.44 \cdot 10^{-7}$, $\beta_0 = 0.27$, $\gamma_0 = 0.06$, $\delta_0 = 0.5$. В цілях моделювання аномально низької або високої захворюваності, смертності та одужування ці значення в 10 разів зменшували і підвищували відповідно. Розрахунки проводилися для трьох хвиль пандемії в Україні, Норвегії,

Франції і Іспанії, значення $\{\zeta, \mu\}$ для яких в 20219 р. були $\{0.0105, 0.0144\}$ (Україна), $\{0.0122, 0.0081\}$ (Норвегія), $\{0.0123, 0.0093\}$ (Франція), $\{0.0094, 0.0091\}$ (Іспанія).

Результати розрахунків коренів рівняння (8) методом дотичних з точністю 10^{-4} показали, що λ_1 залежить тільки від δ і для $\delta = 0.1\delta_0, \delta_0, 10\delta_0$ у всіх країн складає $\lambda_1 = -0.05, -0.5, -5$ відповідно. Два останніх корні для Норвегії, Франції і Іспанії (група I) є комплексно спряженими числами вигляду $-a \pm ib$, а для України (група II) – дійсні корні, які мають різні знаки. Відповідно до загальної теорії систем ЗДР першого порядку ці дві групи країн будуть відрізнятися динамічною поведінкою, причому для України система може бути нестійкою поблизу стаціонарних точок ($\lambda_3 > 0$). Для групи II в площинах $R=\text{const}$ буде спостерігатися фазовий портрет «вузол», а в площинах $S=\text{const}$ і $I=\text{const}$ – «седло», тоді як для групи I в площинах $R=\text{const}$ буде спостерігатися фазовий портрет «фокус», а $S=\text{const}$ і $I=\text{const}$ – «вузол».

Відповідні розв'язки вигляду (4) для країн груп I і II є, відповідно

$$\{S, I, R\}(t) = \{S_0, I_0, R_0\} \left(C_1 \exp(\lambda_1 t) + e^{-at} (C_2 \cos(bt) + C_3 \sin(bt)) \right), \quad (7)$$

$$\{S, I, R\}(t) = \{S_0, I_0, R_0\} (C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + C_3 \exp(\lambda_3 t)), \quad (8)$$

де $a = -\text{Re}(\lambda_2)$, $b = \text{Im}(\lambda_2)$.

Величина $\omega = 2\pi/b$ відповідає періоду коливань змінних системи (2). За результатами розрахунків значень $\lambda_{2,3}$ для країн групи I були отримані наступні періоди коливань: Франція: $T = 3.5; 34; 85$ діб; Іспанія: $T = 10.5; 32; 102$ діб; Норвегія: $T = 5; 31; 90$ діб. На Рис.3 наведені приклади фазових портретів лінеаризованої системи ЗДР (2) в безрозмірних координатах $(S^\circ, I^\circ, R^\circ)$, які відповідають величинам S, I, R , розділеним на максимальні значення (кількість населення у країні). Ці фазові портрети відповідають перетинам тривимірної системи траєкторій площиною $R=0.1$, тобто в координатній площині (S°, I°) .

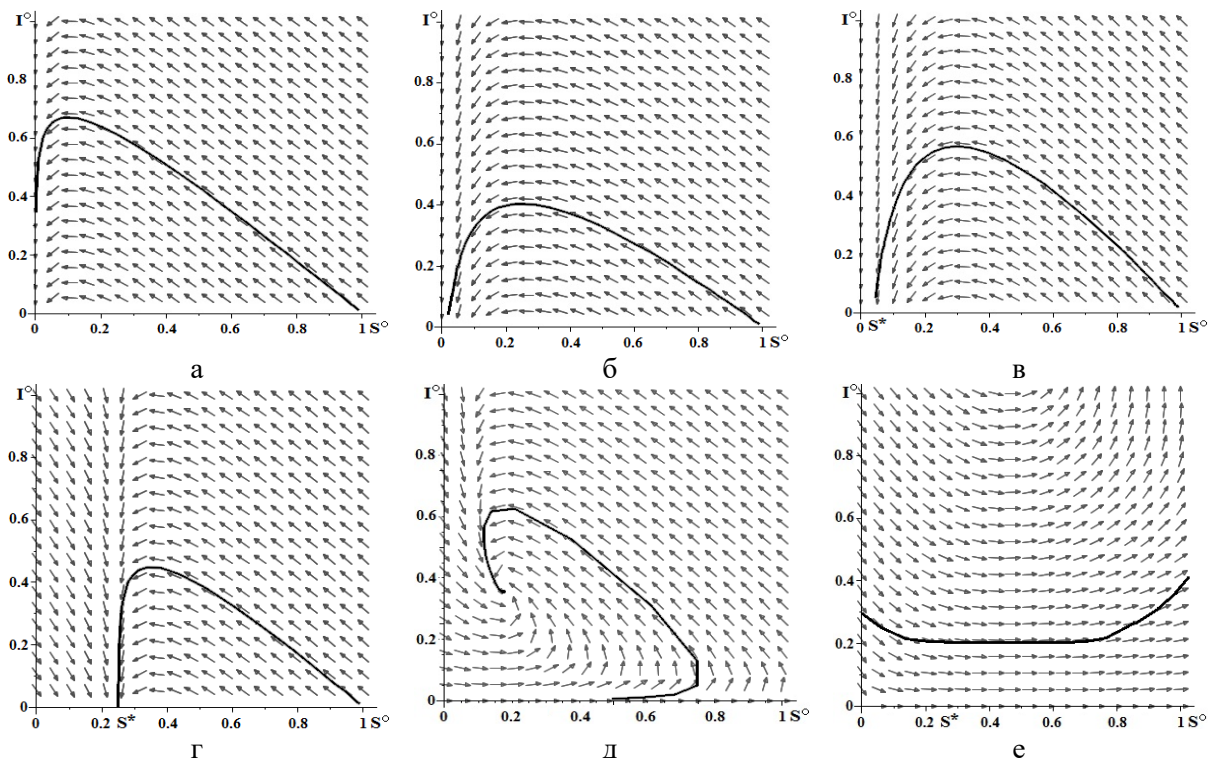


Рис.3. Типові фазові портрети в безрозмірних координатах (S°, I°) для випадків $\gamma = 0.1$, $\delta = 0$, $\beta/\alpha = 0.1$ (а), $\beta/\alpha = 0.25$ (б), $\beta/\alpha = 0.1$, $\delta = 0.1$ (в), $\delta = 0.3$ (г), $\beta/\alpha = 0.25$, $\delta = 0.2$ (д), $\gamma = 0.3$, $\delta = 0.5$ (е).

У випадку стійкого імунітету ($\delta = 0$) популяція досить швидко перехворіє і повертається до стійкого стану з відсутністю хворих. Максимальні значення числа захворілих вздовж траєкторій залежать від співвідношення $\beta/\alpha = 0.1$ між швидкостями одужання і захворювання (Рис.3а,б). При слабкому імунітеті певна частина одужалих повертається в групу S і, таким чином, критичне

значення S^* чисельності групи S зростає (Рис.3 в,г). Перехідний режим від стійкої динаміки ($\text{Re}(\lambda) < 0$) до нестійкої (один корінь (6) з $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$, $\text{Re}(\lambda_3) > 0$) наведений на Рис.3д, а нестійкий випадок – на Рис.3е.

На Рис.4а-е наведені розв'язки (2) у вигляді кривих $S(t), I(t), R(t)$, які відповідають наборам параметрів моделі з Рис.3а-е і початковим даним $S^\circ(0) = 1, I^\circ(0) = 0, R^\circ(0) = 0$. Таким чином, при наявності стійкості стаціонарної точки моделі (2) спостерігається поступове зростання числа захворілих і одужалих. Динаміка кривих $R(t)$ у всіх випадках відповідає логістичній залежності (S -подібна крива), тоді як криві $I(t)$ мають чітко означені зростання до максимуму і зменшення до мінімуму поблизу значення $I = 0$, що відповідає експериментальним кривим, які наведені на Рис.1а. Нестійкість стаціонарній точці рівнянь (2) у випадку даних моделі для України може бути пов'язана з виключною для країн Європи негативною динамікою популяції (народжуваність ζ менше за смертність μ на 1 млн. населення).

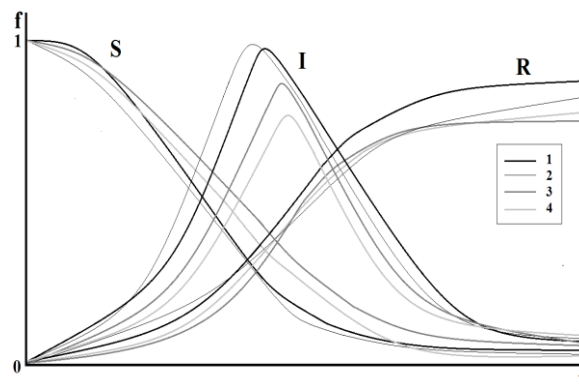


Рис.4. Криві $S(t), I(t), R(t)$ для параметрів моделі (2), які відповідають фазовим портретам з Рис.3а-г.

5 Висновки

Статистичний аналіз даних з відкритих джерел методами BigData виявив різні типи «хвиль» пандемії covid-19 в різних країнах, а саме: хвильова динаміка з чітким підвищенням числа захворілих і померлих від майже нуля до нуля (Рис.1а); хвильове збільшення і/або зменшення I і D (Рис.1б); східчасте збільшення числа захворілих без значного зменшення, що вказує на неконтрольоване розвинення пандемії (Рис.1в). Модель SIRS дозволяє описати всі наявні типи динамічної поведінки з використанням мінімально можливої системи рівнянь. В рамках якісної теорії ЗДР виявлені різні типи фазових портретів моделі SIRS, а саме стійкий фокус і сідло. Математичне моделювання на основі моделі SIRS дозволяє проводити прогнозування з імітацією сприятливого/несприятливого розвинення епідемії в країні з урахуванням відповідно помірних/підвищених коефіцієнтів захворюваності, одужання і рівня надбаного імунітету. Для більш детальних рекомендацій потрібні порівняльні дослідження як з використанням статистичних даних інших країн Європи і світу, так і більш складних математичних моделей.

ЛІТЕРАТУРА

1. Worldometer. COVID Live Update [Електронний ресурс] <https://www.worldometers.info/coronavirus/>
2. Coronavirus Pandemic. Statistics and Research [Електронний ресурс] <https://ourworldindata.org/coronavirus>
3. Кізілова Н.М. Методи аналізу «великих даних». Методичні рекомендації з курсу «Прикладні задачі аналізу великих даних» для студентів спеціальності «Прикладна математика». Харків: ХНУ ім. В.Н. Каразіна. 2021. – 96 с.
4. Захарова А.А., Кізілова Н.М. Дослідження кореляцій динаміки захворювання на COVID-19 з деякими соціально-економічними факторами. *Вісник Харківського національного університету серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 47. С.49-56. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-04>

5. Волошина К.І., Кізілова Н.М., Кіпоренко П.В. Дослідження динаміки чотирьох хвиль covid-19 в країнах Європи. *Вісник Харківського національного університету серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2021. Вип. 51. С. 6.
6. Костецька В.В., Кізілова Н.М. Математичне моделювання динаміки пандемії COVID-19. *Вісник Харківського національного університету серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 48. С.65-71. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-06>
7. Computational Modeling and Data Analysis in COVID-19 Research. Ed. by Ch.R.Panigrahi, B. Pati, M. Rath, R. Buyya. CRC Press. 2021.
8. Aldila D., Khoshnaw S.H.A., Safitri E., et al. A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. Vol. 139, 110042. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110042>
9. Sun J. Forecasting COVID-19 pandemic in Alberta, Canada using modified ARIMA model. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2021. Vol. 22, 100029. <https://doi.org/10.1016/j.cmpbup.2021.100029>
10. James N., Menzies M. Trends in COVID-19 prevalence and mortality: A year in review. *Physica D*. 2021. Vol. 425, 132968. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132968>

REFERENCES

1. Worldometer. COVID Live Update [Електронний ресурс] <https://www.worldometers.info/coronavirus/>
2. Coronavirus Pandemic. Statistics and Research [Електронний ресурс] <https://ourworldindata.org/coronavirus>
3. N. Kizilova, Methods of "big data" analysis. Methodical recommendations on the course "Applied problems of big data analysis" for students of the specialty "Applied Mathematics". V.N. Karazin Kharkov National University, 2021, 96 p. (in Ukrainian)
4. A. Zakharova, N. Kizilova, "Study on correlations of disease dynamics on COVID-19 with some socio-economic factors", *Bulletin of Kharkiv National University, series "Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems"*, 2020, Vol. 47, P.49-56. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-04>
5. K. Voloshyna, N. Kizilova, P. Kiporenko, "Investigation of the dynamics of four waves covid-19 in European countries", *Bulletin of Kharkiv National University, series "Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems"*, 2021, Vol. 51, P.
6. V. Kostetzka, N. Kizilova, "Mathematical modeling of the dynamics of the COVID-19 pandemic", *Bulletin of Kharkiv National University, series "Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems"*, 2020, Vol. 48, P.65-71. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-06>
7. *Computational Modeling and Data Analysis in COVID-19 Research*. Ed. by Ch.R.Panigrahi, B. Pati, M. Rath, R. Buyya. CRC Press. 2021.
8. D. Aldila, S.H.A. Khoshnaw, E. Safitri, et al. "A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia", *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. Vol. 139, 110042. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110042>
9. J. Sun, "Forecasting COVID-19 pandemic in Alberta, Canada using modified ARIMA model", *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2021. Vol. 22, 100029. <https://doi.org/10.1016/j.cmpbup.2021.100029>
10. N. James, M. Menzies, "Trends in COVID-19 prevalence and mortality: A year in review", *Physica D*. 2021. Vol. 425, 132968. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132968>

УДК 593.6

Damping of liquid sloshing in the tanks subjected to vertical acceleration by using the boundary element method

Maria Myronenko

Myronenko Maria*PhD student**Institute of Mechanical Engineering Problems A. N. Podgorny NASU, 2/10
Pozharsky Street, Kharkiv, 61046, Ukraine;**assistant of the Department of Land Administration and Geoinformation Systems
O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv, 17, Marshala
Bazhanova Street, Kharkiv, 61002, Ukraine**e-mail: mariamyronenko87@gmail.com**<http://orcid.org/0000-0002-0266-4463>*

The paper presents numerical simulations of liquid sloshing in the partially filled fuel tanks subjected to vertical acceleration. The tanks are considered to be shells of revolution, and a liquid inside the tank is supposed to be incompressible with viscosity effects being accounted for. The liquid motion is irrotational, and a velocity potential can be introduced. The boundary value problem is formulated for the Laplace's equation to obtain the velocity potential and the free surface level. Non-penetration boundary conditions are used at the wetted surface of a shell. The kinematic and dynamic boundary conditions are given on the free liquid surface. Effects of a surface tension are included into the Bernoulli equation as an additional pressure that is proportional to the mean curvature of the free surface. It allows considering coupled effects of both gravitational and capillarity waves. The boundary value problem is solved by using boundary element method. The system of the Mathieu equations is obtained and modified according to the damping effects. These effects are estimated, and stability regions on Ince-Strutt diagram are specified.

Key words: *mathematical modeling, sloshing, boundary element method, free surface, gravitational waves, capillarity waves.*

Демпфування коливань рідини у резервуарах під дією вертикальної збурювальної сили з використанням методу граничних елементів

**Мироненко Марія
Леонідівна***аспірант**Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул.
Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна;**асистент кафедри земельного адміністрування та геоінформаційних
систем**Харківський національний університет міського господарства ім. О.М.
Бекетова, вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002*

У статті подано чисельне моделювання вимушених вертикальних коливань рідини у частково заповнених паливних баках. Метою даного дослідження є виконання чисельного аналізу рівня підйому рідини при врахуванні впливу демпфуючих факторів. Резервуари розглядаються як оболонки обертання, що заповнені нестисливою рідиною з урахуванням впливу в'язкості. Для оболонок обертання, заповнених рідиною, розглянуто зв'язану задачу. Рух рідини є безвихровим, і можна ввести потенціал швидкості. Сформульовано крайову задачу для рівняння Лапласа для отримання потенціалу швидкості та рівня вільної поверхні. На змоченій поверхні оболонки використовуються граничні умови непротікання, а також наведені кінематична та динамічна граничні умови на вільній поверхні рідини. Спочатку проведено аналіз впливу демпфування на різні рідини. Припускаємо, що поверхневий натяг не враховується. Отримано систему рівнянь Мат'є з урахуванням демпфуючих ефектів. Дано оцінки цих ефектів, і вказані області стійкості на діаграмі Айнса-Стретта. Вивчення впливу поверхневого натягу виконуємо, використовуючи скінченні значення числа Бонда. Поверхневий натяг включаються в рівняння Бернуллі як додатковий тиск, пропорційний середній кривизні вільної поверхні. Це дозволяє враховувати як гравітаційні, так і капілярні явища при русі вільної поверхні рідини. Крайова задача розв'язується методом граничних елементів. Для дослідження явища плескань враховано різні значення числа Бонда для різних рідин. Оцінюються ефекти в'язкості та уточнюється їх вплив на стабільність руху. Було продемонстровано, що в зонах нестійкості діаграми Айнса-Стретта при врахуванні в'язкості з'являються невеликі зони стабільності руху та зони стійкості збільшуються зі збільшенням коефіцієнта демпфування. Отримані числові дані вказують на те, що збільшення поверхневого натягу приводить до збільшення частоти коливань та зменшення амплітуди коливань.

Ключові слова: математичне моделювання, плескання, метод граничних елементів, вільна поверхня, гравітаційні хвилі, капілярні хвилі.

Демпфирование колебаний жидкости в резервуарах под действием вертикальной возмущающей силы с использованием метода граничных элементов

Миرونенко Леонидовна **Мария** аспірант

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина;
ассистент кафедры земельного администрирования и геоинформационных систем
Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А.Н. Бекетова, ул. Маршала Бажанова, 17, Харьков, 61002*

В статье приведены результаты численного моделирования вынужденных вертикальных колебаний жидкости в частично заполненных топливных баках. Резервуары рассматриваются как оболочки вращения, заполненные несжимаемой жидкостью с учетом влияния вязкости. Движение жидкости является безвихревым, и можно ввести потенциал скорости. Сформулирована краевая задача для уравнения Лапласа для определения потенциала скорости и уровня свободной поверхности. На смоченной поверхности оболочки выполняются граничные условия непротекания, а также приведены кинематическое и динамическое граничные условия на свободной поверхности жидкости. Эффекты поверхностного натяжения включаются в уравнение Бернулли как дополнительное давление, пропорциональное средней кривизне свободной поверхности. Это позволяет учитывать как гравитационные, так и капиллярные явления при движении свободной поверхности жидкости. Краевая задача решается методом граничных элементов. Получена система уравнений Матве с учетом демпфирующих эффектов. Даны оценки этих эффектов и указаны области устойчивости на диаграмме Айнса-Стретта.

Ключевые слова: математическое моделирование, плескания, метод граничных элементов, свободная поверхность, гравитационные волны, капиллярные волны.

1 Introduction

The boundary elements methods (BEM) have been widely used in engineering in last decades, especially for solving the fluid-structure interaction (FSI) problems. The main advantage of using BEM is reducing dimensions of the problem without losing accuracy. So, for three-dimensional FSI problems we only have to discretize the boundary of the fluid volume. Now BEM is successfully applied to the multi-medium problems considering fluid-solid, fluid-structure-soil or air-fluid interactions. The special attention here should be paid to the boundary conditions on the interface surfaces. It is topical in aerospace applications, especially considering low-gravity conditions. There is a lot of research devoted to liquid sloshing in ground gravity conditions. The first simulations relied upon mechanical analogies of pendulums or springs to simulate the resultant dynamic pressure on reservoirs during sloshing are presented in [1, 2]. Comprehensive reviews of the sloshing phenomenon, including analytical and experimental research were done by Abramson [3] and Ibrahim [4]. The boundary conditions with the surface tension effect were obtained by Ibrahim in [4] and Myshkis et al in [5] by including the pressure changing across the free liquid surface described by the Laplace – Young equation. The sloshing motion that occurs in a low gravity differs drastically from the sloshing in the ground gravity [6]. It should be noted that in [4] Ibrahim concludes that exact solutions for the linear liquid sloshing are limited to tanks with straight walls (rectangular and upright-cylindrical containers). However, it is specified in [7], that it is difficult to directly apply computational fluid dynamics models to designing spacecraft attitude control devices because the analysis is very cumbersome and time-consuming. So, it is important to elaborate effective methods based on fast numerical procedures [8, 9]. Recently, a series of sloshing model tests for various viscous liquids have been elaborated, that allows investigating the effects of liquid viscosity on sloshing [10, 11]. The experimental results show that the liquid viscosity has an important effect on sloshing pressure [12, 13].

In this paper the boundary element method is applied to simulation of the liquid vibrations in rigid tanks, the effects of viscosity and capillarity being considered. The stability regions on the Ince- Strutt diagram are specified.

2 Problem formulation

Let us consider a shell of revolution partially filled with liquid (Fig. 2.1). Here S_1 is a wetted part of the shell, and S_0 is the liquid free surface. It should be noted that free surface S_0 represents the interface

surface between two mediums: water and air. It is considered as a thin membrane if effects of the surface tension are sufficient.

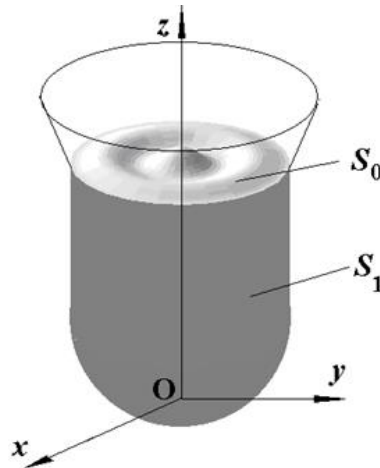


Fig.2.1 Fluid-filled shell of revolution

The fundamental equations of the liquid motion are following:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}_f) + Q, \quad \rho \frac{d\mathbf{V}_f}{dt} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_f). \quad (2.1)$$

Here ρ and \mathbf{V}_f are the liquid density and velocity, Q is the mass sources, \mathbf{b} is the vector of volume forces, and $\boldsymbol{\sigma}_f$ is the stress tensor. So

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}; \quad \mathbf{T} = 2\mu \left(\dot{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}(\operatorname{div}\mathbf{V}_f)\mathbf{I} \right),$$

where p is the liquid pressure, \mathbf{I} is the unit tensor, and $\dot{\mathbf{S}}$ is the stress deviator. Supposing the fluid flow is irrotational, we can set the velocity potential as $\mathbf{V}_f = \operatorname{grad} \phi$.

As in [8], let us consider the following formulation for determining the velocity potential without including viscosity and capillarity effects

$$\Delta \phi = 0; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Big|_{S_0} + g \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{S_0} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{S_0}$$

with the following additional condition

$$\iint_{S_0} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS_0 = 0.$$

Let σ be a surface tension. It may be included in the Bernoulli equation by using the Laplace-Young equation [14]

$$p_s = \sigma \kappa,$$

where κ is the surface curvature. The expression for κ can be linearized as follows [4]:

$$\kappa = -\Delta_s \zeta.$$

Here Δ_s is the surface Laplace operator, the function ζ describes the shape and location of the free liquid surface. So, the dynamical boundary condition on the free surface can be represented as

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\zeta - \frac{\sigma}{\rho_l} \Delta_s \zeta \Big|_{S_0} = 0. \quad (2.2)$$

The above formulation allows us to define the velocity potential and the free surface level without including the effects of viscosity [15].

2.1 Estimation of viscosity effects

The following presentations are applied for the velocity potential and the free surface level functions [14]

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{m=0}^N \cos m \theta \sum_{k=1}^M d_{mk}(t) \phi_{mk}(r, z), \\ \zeta &= \frac{1}{g} \sum_{m=0}^N \cos m \theta \sum_{k=1}^M \chi_{mk}^2 c_{mk}(t) \phi_{mk}(r, 0). \end{aligned}$$

Here

$$d_{mk}(t) = \dot{c}_{mk}(t), \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

The functions $\phi_{mk}(r, z)$ are obtained by using BEM described in [16]. These functions are the solutions of the following boundary value problems (supposing for simplicity $\phi_{mk}(r, z) = \psi(r, z)$)

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\chi^2}{g} \psi \Big|_{S_0}, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS_0 = 0. \quad (2.3)$$

The equations (2.3) are reduced to the system of integral equations in the following form:

$$\begin{cases} 2\pi\psi_1 + \iint_{S_1} \psi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS_1 - \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \psi_0 \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 + \iint_{S_0} \psi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS_0 = 0, \\ - \iint_{S_1} \psi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS_1 - 2\pi\psi_0 + \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \psi_0 \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

where $|P - P_0|$ is the Cartesian distance between points P and P_0 . In the equations (2.4) we denote by ψ_0 the values of potential ψ in the nodes of the free surface S_0 , and by ψ_1 its values in the nodes of the wetted surfaces S_1 of the shell. For the numerical implementation of the equations (2.4) the methods have been developed in [17, 18].

After obtaining functions $\psi_{mk}(r, z)$ and the frequencies χ_{mk} from [14] the next differential equations are formed for evaluating the time-dependent coefficients $c_{mk}(t)$

$$\ddot{c}_{mk}(t) + \chi_{mk}^2 \left(1 + \frac{a_z(t)}{g} \right) c_{mk}(t) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.5)$$

Here g is the gravity acceleration, χ_{mk} are sloshing frequencies.

It should be noted that the equations (2.5) are the Mathieu's equations. Therefore, we suppose that

$$g_z(t) = a_z \cos \omega_z t. \quad (2.6)$$

According to [19], the equations (2.5) are modified to calculate the viscosity and gravity effects as

$$\ddot{c}_{mk}(t) + \gamma \dot{c}_{mk}(t) + \omega_{mk}^2 \left(1 + \frac{a_z(t)}{g_0} \right) c_{mk}(t) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.7)$$

Here

$$\gamma = 4,47 \sqrt{\frac{\nu}{\omega_{11} R_0^2}}, \quad \omega_{mk}^2 = g_0 \chi_{mk}^2 + \frac{\sigma \chi_{mk}^3}{\rho}. \quad (2.8)$$

It should be noted that the equations (2.7) are so called the damped Mathieu equations [20]. For their numerical implementation the Runge-Kutta 4 order method is used.

3 Numerical simulation

Let us consider a cylindrical tank with the following geometrics: the filling level $H=1\text{m}$, the shell radius $R=1\text{m}$. Taking into account different values of the Bond number, i.e., studying the effect of damping on a liquid at different levels of gravity. First, consider the case when $B_0 = \infty$, so we neglect the surface tension forces. In the equation (2.8) we have the following expression for the frequency: $\omega_0^2 = g_0 \chi_{11}^2$. Let us consider the vibrations corresponding to the first harmonic. The values of the characteristic wave numbers are given in Table 1.

Table 1. Characteristic wave numbers for the 1st harmonic

n	Characteristic values χ_{11}
1	1.841183781
2	5.331442774
3	8.536316366
4	11.70600490
5	14.86358863

We consider various variable components of the residual acceleration $g_z(t)$, but we believe that this acceleration is harmonious.

In Table 2 the values of kinematic viscosity for some typical liquids, such as water, nitric acid, kerosene, hexane, and nitrogen tetraoxid are shown.

Table 2. Kinematic viscosity value

№	Fluid	Kinematic viscosity, ν $10^{-6} \times \text{m}^2/\text{sec.}$	Temperature, $^{\circ}\text{C}$
1	Water	1,13	15,6
		0,55	54,4
2	Nitric acid 25 %	0,6957	20,0
	Nitric acid 100 %	0,4934	20,0
3	Kerosene	1,2-4,5 (2,71)	20,0
4	Hexane	0,683	-17,8
		0,401	37,8
5	Nitrogen tetraoxide	0,2917	20,0

The surface tension values for typical liquids at various Bond numbers $B_0 = 1, B_0 = 2, B_0 = 3, B_0 = 4, B_0 = 5$ are presented in Table 3.

Table 3. Surface tension values

№	Fluid	Density, kg/m^3	Surface tension, H/m				
			Bond number, B_0				
			1	2	3	4	5
1	Water	1000	100,00	50,00	33,33	25,00	20,00
		986	98,60	49,30	32,87	24,65	19,72
2	Nitric acid 25 %	1150	115,00	57,50	38,33	28,75	23,00
3	Nitric acid 100 %	1520	152,00	76,00	50,67	38,00	30,40
4	Kerosene	850	85,00	42,50	28,33	21,25	17,00
5	Hexane	684	68,40	34,20	22,80	17,10	13,68
		643	64,30	32,15	21,43	16,08	12,86
6	Nitrogen tetraoxide	1440	144,00	72,00	48,00	36,00	28,80

We are interested in the damping effect during vibrations with a frequency ω_z , which approaches to ω_{11} or a double value $2\omega_{11}$.

First, the effect of damping on various fluids is analyzed, the surface tension not being taken into account. The frequency $\omega_z = 3\text{Hz}$ has been chosen for forced vibrations, and it is not close to either ω_{11} or the double value $2\omega_{11}$.

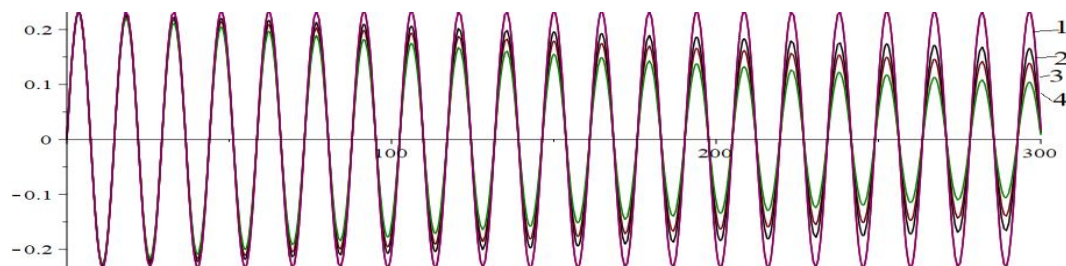


Fig.3.1 Influence of damping on vibration amplitudes for various liquids

Figure 3.1 shows the amplitudes of fluid vibrations under the following conditions. It is assumed that a_z in the formula (2.6) is equal to $a_z = 0.01$, $\omega_z = 3\text{Hz}$, $g_0 = 0.1g$.

Number 1 indicates the graph of the function in the absence of damping, namely, at $\gamma = 0$, figures 2-4 refer to nitric acid (100%), water and kerosene respectively (the value of kinematic viscosity $2.71 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{sec}$ is taken).

Further, taking into account the kinematic viscosity, we will consider kerosene, since the damping effect is the most prominent in that case.

Let us consider forced vibrations with the frequency $\omega_z = 1.8412\text{Hz}$, at $g_0 = 0.1\text{g}$ and at different a_z . As could be seen from Table 1, this frequency is practically equal to the fundamental frequency of fluid vibrations.

Figure 3.2 shows the time dependences for the coefficient $c_{11}(t)$ in the expansion for the function ζ .

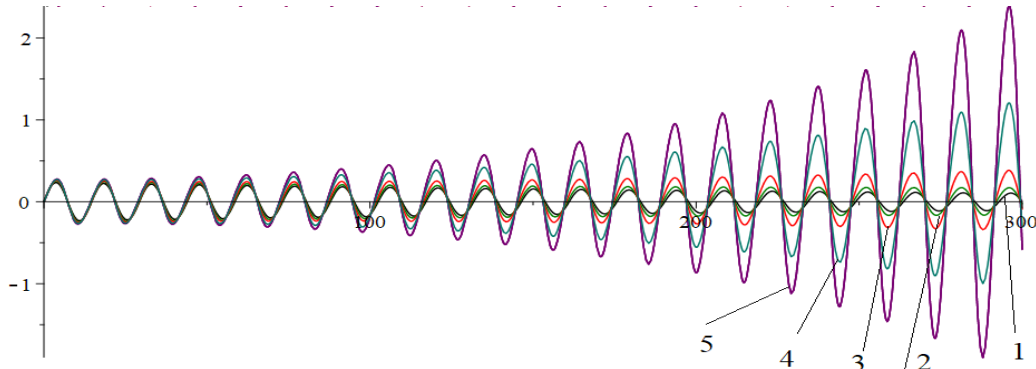


Fig.3.2 Time dependence of $c_{11}(t)$ for different a_z at $\omega_z = 1.8412\text{Hz}$

Here numbers 1-5 correspond to the values $a_z = 0.01, 0.05, 0.07, 0.09, 0.1$. In contrast to the Mathieu equation without damping, there is a zone of stability in the first unstable region (Fig. 3.3).

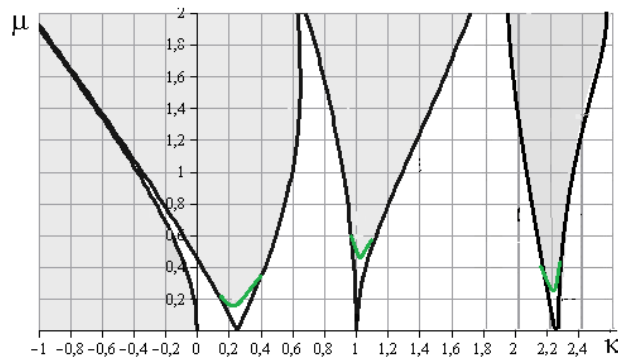


Fig.3.3 Ince-Strutt diagram

It should be noted that in zones of instability of the Ince-Strutt diagram small zones of motion stability appear, when viscosity is taken into account. According to [18], the stability zones increase with the increasing damping coefficient.

A similar pattern is observed with forced vibrations of a fluid with a frequency equal to twice the fundamental. The calculation data are shown in Fig. 3.4.

Here the numbers 1-4 correspond to the values $a_z = 0.01, 0.0075, 0.005, 0.004$. In the case of parametric resonance, only the motions at $a_z \leq 0.004$ will be stable in the second zone (Fig. 3.3).

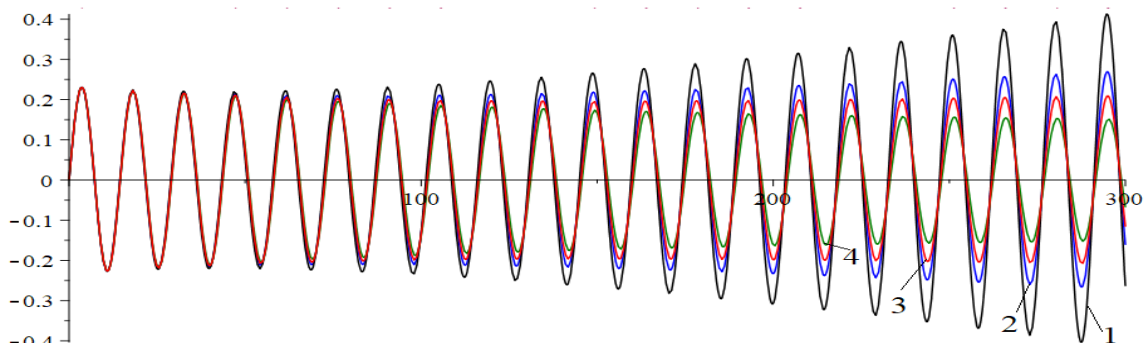


Fig. 3.4 Time dependence of $c_{11}(t)$ for different a_z at $\omega_z = 3.6824\text{Hz}$

Next, we study the effect of surface tension, namely, we move to the finite values of the Bond number. In this case, the frequency values are determined by the formula

$$\omega_{mn}^{*2} = \frac{\omega_{mn}^2}{g/R_2} = k_{mn} \left(1 + \frac{k_{mn}^2}{B_0} \right) \tan \left(k_{mn} \frac{h}{R_2} \right) \quad (3.1)$$

Figure 3.5 shows the values of the free surface amplitudes for kerosene at various Bond numbers, namely, $B_0 = 1, B_0 = 2, B_0 = 3, B_0 = 4, B_0 = 5, B_0 = \infty$. We investigate the movements caused by the external load with a frequency of $\omega_z = 3\text{ Hz}$.

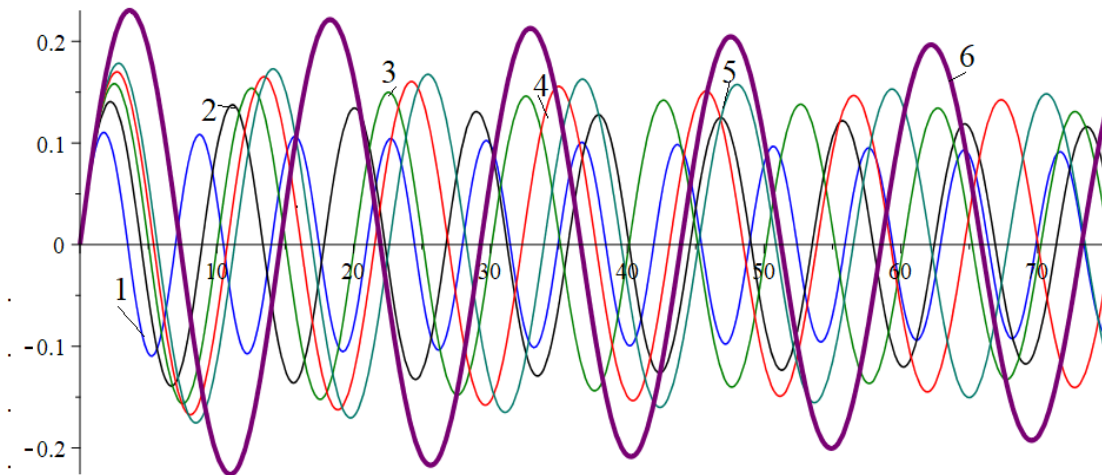


Fig. 3.5 Time dependence of $c_{11}(t)$ for various Bond numbers at $\omega_z = 3.0\text{ Hz}$

Here the numbers 1-6 correspond to the following values of the Bond number: $B_0 = 1, B_0 = 2, B_0 = 3, B_0 = 4, B_0 = 5, B_0 = \infty$. From the numerical data it can be concluded that with the increasing surface tension, the vibration frequencies increase and the vibration amplitudes decrease.

4 Conclusions

The boundary element method is applied to numerical estimations of the surface tension and viscosity effects on liquid vibrations in rigid shells of revolution partially filled with the liquid. For the velocity potential the boundary value problem is formulated with modified boundary conditions on the free surface, taking into account the surface tension. The basic functions corresponding to the problem of free surface vibrations have been obtained without considering the surface tension. Then the modified boundary condition on the free surface has been used for obtaining the unknown coefficients. Various Bond's numbers for liquid sloshing of different liquids have been considered. The viscosity effects have been estimated, and their influence on stability of motion has been specified. It has been demonstrated that in the zones of instability of the Ince-Strutt diagram small zones of motion stability appear, when viscosity is taken into account, and the stability zones increase with increasing damping coefficient.

ЛІТЕРАТУРА

1. Housner G. W. Dynamic pressures on accelerated fluid containers. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1957. Vol. 47, no. 1. P. 15–35. URL: <https://doi.org/10.1785/bssa0470010015> (дата звернення: 16.10.2021).
2. Housner G. W. The dynamic behavior of water tanks. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1963. Vol. 53, no. 2. P. 381–387. URL: <https://doi.org/10.1785/bssa0530020381> (дата звернення: 16.10.2021).
3. The dynamic behavior of liquids in moving containers: With applications to space vehicle technology. Washington: Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration; [for sale by Supt. of Docs., U. S. Govt. Print. Off.], 1966. 467 p.
4. Ibrahim R. A. Liquid sloshing dynamics: Theory and applications. New York: Cambridge University Press, 2005.
5. Kolmanovskii V., Myshkis A. Applied Theory of Functional Differential Equations. Dordrecht: Springer Netherlands, 1992. URL: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8084-7> (дата звернення: 16.10.2021).

6. Myshkis A. D. *Low-Gravity Fluid Mechanics: Mathematical Theory of Capillary Phenomena*. Springer, 2011. 604 p.
7. Microgravity validation of a novel system for RNA isolation and multiplex quantitative real time PCR analysis of gene expression on the International Space Station / M. Parra et al. *PLOS ONE*. 2017. Vol. 12, no. 9. P. e0183480. URL: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0183480> (дата звернення: 16.10.2021).
8. BEM analysis of gravitational–capillarity waves on free surfaces of compound shells of revolution / V. I. Gnitko et al. *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2021. Vol. 9, no. 1. P. 38–50. URL: <https://doi.org/10.2495/cmем-v9-n1-38-50> (дата звернення: 16.10.2021).
9. Gnitko V., et al., Multi-Domain Boundary Element Method for Axisymmetric Problems in Potential Theory and Linear Isotropic Elasticity, *BEM/MRM 2018*, WIT Press, 2018, pp.13-25, DOI:10.2495/be410021.
10. The effect of liquid viscosity on sloshing characteristics / C.-F. Zou et al. *Journal of Marine Science and Technology*. 2015. Vol. 20, no. 4. P. 765–775. URL: <https://doi.org/10.1007/s00773-015-0329-y> (дата звернення: 16.10.2021).
11. High Frequency Sloshing - Energy Dissipation and Viscous Damping through CFD / L. F. Blas Martinez et al. *WCX™ 17: SAE World Congress Experience*. 400 Commonwealth Drive, Warrendale, PA, United States, 2017. URL: <https://doi.org/10.4271/2017-01-1317> (дата звернення: 16.10.2021).
12. Demirel E., Aral M. Liquid Sloshing Damping in an Accelerated Tank Using a Novel Slot-Baffle Design. *Water*. 2018. Vol. 10, no. 11. P. 1565. URL: <https://doi.org/10.3390/w10111565> (дата звернення: 16.10.2021).
13. Dennehy C. Recent Experiences of the NASA Engineering & Safety Center (NESC) GN&C Technical Discipline Team (TDT). *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Toronto, Ontario, Canada. Reston, Virginia, 2010. URL: <https://doi.org/10.2514/6.2010-8427> (дата звернення: 16.10.2021).
14. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations / E. Strelnikova et al. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. Vol. 111. P. 78–87. URL: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.10.008> (дата звернення: 16.10.2021).
15. BEM analysis of gravitational–capillarity waves on free surfaces of compound shells of revolution / V. I. Gnitko et al. *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2021. Vol. 9, no. 1. P. 38–50. URL: <https://doi.org/10.2495/cmем-v9-n1-38-50> (дата звернення: 16.10.2021).
16. Strelnikova, E., et al. Free and Forced Vibrations of Liquid Storage Tanks with Baffles *J. Modern Technology & Engineering*, Vol.3, No.1, 2018, pp.15-52. URL: <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf> (дата звернення: 16.10.2021).
17. Naumenko, V., et al. Singular integrals accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 26, No.1, 2002, pp.95-98. DOI:10.1016/S0955-7997(01)00041-8
18. Karaiev, A., et al. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 101, No.1, e201800339, DOI:10.1002/zamm.201800339
19. Dodge F. T. *The New «Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers»*, San Antonio, Texas : Southwest Research Inst., 2000.
20. Ramírez Barrios M., Collado J., Dohnal F. Stability of Coupled and Damped Mathieu Equations Utilizing Symplectic Properties. *Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices*. Cham, 2020. P. 137–145. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-34713-0_14 (дата звернення: 16.10.2021).

REFERENCES

1. G. W. Housner, "Dynamic pressures on accelerated fluid containers," *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 47, no. 1, pp. 15–35, Jan. 1957. Accessed: Oct. 16, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1785/bssa0470010015>
2. G. W. Housner, "The dynamic behavior of water tanks," *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 53, no. 2, pp. 381–387, Feb. 1963. Accessed: Oct. 16, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1785/bssa0530020381>
3. *The dynamic behavior of liquids in moving containers: With applications to space vehicle technology*. Washington: Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration; [for sale by Supt. of Docs., U. S. Govt. Print. Off.], 1966.

4. R. A. Ibrahim, *Liquid sloshing dynamics: Theory and applications*. New York: Cambridge University Press, 2005.
5. V. Kolmanovskii and A. Myshkis, *Applied Theory of Functional Differential Equations*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1992. Accessed: Oct. 16, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8084-7>
6. A. D. Myshkis, *Low-Gravity Fluid Mechanics: Mathematical Theory of Capillary Phenomena*. Springer, 2011.
7. M. Parra *et al.*, "Microgravity validation of a novel system for RNA isolation and multiplex quantitative real time PCR analysis of gene expression on the International Space Station," *PLOS ONE*, vol. 12, no. 9, Sep. 2017, Art. no. e0183480. Accessed: Oct. 16, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0183480>
8. V. I. Gnitko, A. O. Karaiev, M. L. Myronenko, and E. A. Strelnikova, "BEM analysis of gravitational–capillarity waves on free surfaces of compound shells of revolution," *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, vol. 9, no. 1, pp. 38–50, Mar. 2021. Accessed: Oct. 16, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2495/cmeme-v9-n1-38-50>
9. Gnitko V., et al., Multi-Domain Boundary Element Method for Axisymmetric Problems in Potential Theory and Linear Isotropic Elasticity, *BEM/MRM 2018*, WIT Press, 2018, pp.13-25, DOI:10.2495/be410021.
10. C.-F. Zou, D.-Y. Wang, Z.-H. Cai, and Z. Li, "The effect of liquid viscosity on sloshing characteristics," *Journal of Marine Science and Technology*, vol. 20, no. 4, pp. 765–775, Jul. 2015. Accessed: Oct. 16, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s00773-015-0329-y>
11. L. F. Blas Martinez, R. Palma, F. Gomez, D. Vaishnav, and F. Canales, "High Frequency Sloshing - Energy Dissipation and Viscous Damping through CFD," in *WCX™ 17: SAE World Congress Experience*. 400 Commonwealth Drive, Warrendale, PA, United States: SAE International, 2017. Accessed: Oct. 16, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.4271/2017-01-1317>
12. E. Demirel and M. Aral, "Liquid Sloshing Damping in an Accelerated Tank Using a Novel Slot-Baffle Design," *Water*, vol. 10, no. 11, p. 1565, Nov. 2018. Accessed: Oct. 16, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/w10111565>
13. C. Dennehy, "Recent Experiences of the NASA Engineering & Safety Center (NESC) GN&C Technical Discipline Team (TDT)," in *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Toronto, Ontario, Canada. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2010. Accessed: Oct. 16, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2514/6.2010-8427>
14. E. Strelnikova, D. Kriutchenko, V. Gnitko, and K. Degtyarev, "Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 111, pp. 78–87, Feb. 2020. Accessed: Oct. 16, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.10.008>
15. V. I. Gnitko, A. O. Karaiev, M. L. Myronenko, and E. A. Strelnikova, "BEM analysis of gravitational–capillarity waves on free surfaces of compound shells of revolution," *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, vol. 9, no. 1, pp. 38–50, Mar. 2021. Accessed: Oct. 16, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2495/cmeme-v9-n1-38-50>
16. Strelnikova, E., et al., "Free and Forced Vibrations of Liquid Storage Tanks with Baffles," *J. Modern Technology & Engineering*, Vol.3, No.1, pp.15-52, 2018. Accessed: Oct. 16, 2021. [Online]. Available: <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf>.
17. Naumenko, V., et al. Singular integrals accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 26, No.1, 2002, pp.95-98. DOI:10.1016/S0955-7997(01)00041-8
18. Karaiev, A., et al. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 101, No.1, e201800339, DOI:10.1002/zamm.201800339
19. Dodge F. T. *The New «Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers»*, San Antonio, Texas : Southwest Research Inst., 2000.
20. M. Ramírez Barrios, J. Collado, and F. Dohnal, "Stability of Coupled and Damped Mathieu Equations Utilizing Symplectic Properties," in *Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices*, Cham: Springer International Publishing, 2020, pp.137–145. Accessed: Oct. 16, 2021. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-030-34713-0_14

УДК 65.0(075.8)

Використання методів формального синтезу та верифікації паралельних часопараметризованих моделей для рішення системи лінійних рівнянь методом Гауса

О. Ю. Мороз, О. Г. Толстолузька

**Мороз
Ольга
Юрійвна**

старший викладач кафедри теоретичної та прикладної системотехніки факультету комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61077

e-mail: o.moroz@karazin.ua

<https://orcid.org/0000-0002-4920-4093>.

**Толстолузька
Олена
Геннадіївна**

д.т.н., с.н.с., професор кафедри теоретичної і прикладної системотехніки факультету комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61077

e-mail: elena.tolstoluzka@karazin.ua

<https://orcid.org/0000-0003-1241-7906>.

Основним вирішенням проблеми підвищення ефективності паралельних обчислювальних систем є методи формального синтезу ефективних часопараметризованих мультипаралельних моделей задач. Стаття присвячена задачі дослідження ефективності використання методів формального синтезу даного класу паралельних моделей для конкретних прикладних задач, що робить її актуальною та практично значущою. У роботі проведено аналіз методів паралельної обробки даних та показників ефективності, а також аналіз методів синтезу та засобів специфікації та візуалізації паралельних статичних та часопараметризованих моделей задач. Розроблено паралельну часопараметризовану модель алгоритму Гауса на основі методу структур СЧС, а також паралельну часопараметризовану модель алгоритму Гауса на основі методу структур СЧС та формальних поліномів. Дана порівняльна оцінка ефективності цих двох методів синтезу для критерію мінімізації кількості міжпроцесорних обмінів повідомленнями в кластерній системі. Розроблено програмну реалізацію створення паралельних часопараметризованих моделей розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса для кластерних систем з урахуванням комунікаційної складової. Об'єктом дослідження є методи формального синтезу паралельних часопараметризованих моделей задач для обчислювальних систем з розподіленою пам'яттю (MPP, CLUSTER). Предметом дослідження є ефективність використання методів формального синтезу мультипаралельних часопараметризованих моделей конкретних прикладних завдань для критерію мінімізації кількості міжпроцесорних обмінів повідомленнями у кластерній системі.

Ключові слова: паралельні обчислювальні системи, кластерні системи, методи структур СЧС, методи формального синтезу, часопараметризована модель алгоритму Гауса..

Using the methods of formal synthesis and verification of parallel time-parameterized models for solving the system of linear equations by Gaussian elimination

**Moroz
Olha Yuriiivna**

Senior lecturer of the Department of Theoretical and Applied Systems Engineering, Faculty of Computer Science; VN Karazin Kharkiv National University, 6 Svobody Square, Kharkiv, Ukraine, 61077

e-mail: o.moroz@karazin.ua

<https://orcid.org/0000-0002-4920-4093>.

Tolstoluzskaya Elena

Doctor of Technical Sciences, senior researcher, professor

V. N. Karazin Kharkiv National University

Svobody Square 6, Kharkiv, Ukraine 61022

The main solution to the problem of improving the efficiency of parallel computing systems is the methods of formal synthesis of efficient time-parameterized multiparallel models. The article is devoted to investigating the efficiency of using the formal synthesis methods of the given class of parallel models for the specific applied problems. The analysis of methods of parallel data processing and efficiency indicators, as well as the analysis of synthesis methods and means of specification and visualization of parallel static and time-parameterized problem models have been carried out. A parallel time-parameterized model of the Gaussian algorithm based on the method of SCS structures, as well as a parallel time-parameterized model of the Gaussian algorithm based on the method of SCS structures and formal polynomials have been developed. A comparative evaluation of the effectiveness of these two synthesis methods for the criterion of minimizing the number of interprocessor messages in the cluster system. The software implementation for creating parallel time-parameterized models of solving systems of linear equations by Gaussian elimination for cluster systems taking into account the communication component has been developed. The research object is the methods of formal synthesis of parallel time-parameterized models for computing systems

with distributed memory (MPP, CLUSTER). The research subject is the efficiency of using the methods of formal synthesis of multiparallel time-parameterized models of specific applied problems for the criterion of minimizing the number of interprocessor exchanges in the cluster system.

Keywords: *parallel computing systems, cluster systems, methods of SCS structures, methods of formal synthesis, time-parameterized model of Gaussian elimination.*

Использование методов формального синтеза и верификации параллельных времяпараметризованных моделей для решения системы линейных уравнений методом Гаусса

Мороз Ольга Юрьевна	<i>старший преподаватель кафедры теоретической и прикладной системотехники Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы 6, Харьков -077, Украина, 61077</i>
Толстолужская Елена Геннадиевна	<i>д.т.н., с.н.с., профессор кафедры теоретической и прикладной системотехники Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина пл. Свободы 6, Харьков -077, Украина, 61077</i>

Основным решением проблемы повышения эффективности параллельных вычислительных систем есть методы формального синтеза эффективных времяпараметризованных мультипараллельных моделей задач. Статья посвящена задаче исследования эффективности использования методов формального синтеза данного класса параллельных моделей для конкретных прикладных задач, что делает ее актуальной и практически значимой. В работе проведен анализ методов параллельной обработки данных и показателей эффективности, а также анализ методов синтеза и средств спецификации и визуализации параллельных статических моделей. Разработана параллельная времяпараметризованная модель алгоритма Гаусса на основе метода структур СЧС, а также параллельная времяпараметризованная модель алгоритма Гаусса на основе метода структур СЧС и формальных полиномов. Дана сравнительная оценка эффективности этих двух методов синтеза для критерия минимизации количества межпроцессорных обменов сообщениями в кластерной системе. Разработана программная реализация создания параллельных времяпараметризованных моделей решения систем линейных уравнений методом Гаусса для кластерных систем с учетом коммуникационной составляющей. Объектом исследования являются методы формального синтеза параллельных времяпараметризованных моделей задач для вычислительных систем с распределенной памятью (MPP, CLUSTER). Предметом исследования является эффективность использования методов формального синтеза мультипараллельных времяпараметризованных моделей конкретных прикладных задач для критерия минимизации количества межпроцессорных обменов сообщениями в кластерной системе..

Ключевые слова: *параллельные вычислительные системы, кластерные системы, методы структур СЧС, методы формального синтеза, времяпараметризованная модель алгоритма Гаусса.*

1 Вступ

На даний час центральною проблемою перспективної обчислювальної техніки є підвищення ефективності паралельних ЕОМ/мереж. Виник розрив між збільшеними запитами практики – необхідністю подальшого підвищення ефективності високопродуктивної обчислювальної техніки, з одного боку, та відсутністю можливості задоволення цих запитів за допомогою відомих паралельних ЕОМ/мереж, з іншого боку. Необхідною умовою підвищення ефективності суперЕОМ та розвитку перспективної паралельної обчислювальної техніки є підвищення ефективності паралельного програмного забезпечення. Як зазначається у роботі [1], «В даний час проблема розробки ефективного паралельного програмного забезпечення виявилася центральною проблемою паралельних обчислень загалом...» та центральне питання паралельних обчислень – яким чином створювати ефективні програми для паралельних систем?

Одним з основних шляхів вирішення цієї проблеми є підвищення ефективності паралельного програмного забезпечення за рахунок розширення методів паралельної обробки даних, переходу від традиційних статичних паралельних програм до застосування часопараметризованих мультипаралельних програм та розробки методів і технологій їх автоматичного проектування [1–3]. Відомі системи паралельного програмування не забезпечують вирішення цієї проблеми через обмежений склад методів паралельної обробки підтримки, відсутність обліку реального часу та ручного характеру проектування людиною паралельних програм [1–4]. Основою вирішення проблеми є методи формального синтезу ефективних часопараметризованих мультипаралельних моделей задач [5–7]. Саме задача дослідження ефективності використання методів формального

синтезу даного класу паралельних моделей для конкретних прикладних задач є актуальною і практично значущою.

Метою роботи стало дослідження ефективності використання методів формального синтезу мультипаралельних часопараметризованих моделей для конкретних прикладних задач.

Задачі дослідження: провести аналіз методів паралельної обробки даних та показників ефективності; провести аналіз методів синтезу та засобів специфікації та візуалізації паралельних статичних та часопараметризованих моделей задач; розробити паралельну часопараметризовану модель алгоритму Гауса на основі методу структур СЧС; розробити паралельну часопараметризовану модель алгоритму Гауса на основі методу структур СЧС та формальних поліномів; дати порівняльну оцінку ефективності цих двох методів синтезу для критерію мінімізації кількості міжпроцесорних обмінів повідомленнями у кластерній системі; розробити програмну реалізацію створення паралельних часопараметризованих моделей розв’язання систем лінійних рівнянь методом Гауса для кластерних систем з урахуванням комунікаційної складової.

Об’єктом дослідження є методи формального синтезу паралельних часопараметризованих моделей задач для обчислювальних систем з розподіленою пам’яттю (MPP, CLUSTER).

Предметом дослідження є ефективність використання методів формального синтезу мультипаралельних часопараметризованих моделей конкретних прикладних задач для критерію мінімізації кількості міжпроцесорних обмінів повідомленнями у кластерній системі.

Як засоби числового опису паралельних часових моделей задач було використано структури семантико-числової специфікації (СЧС) та утворюючі поліноми (УП) [4-7]. Засобами графічної візуалізації є Сі-графи та часові паралельні граф-схеми 4,6].

2 Постановка задачі

Початкові дані:

- досліджується «прогнозована» ефективність – потенційна ефективність майбутнього використання аналізованих/розроблюваних методів формального синтезу моделей;
- склад досліджуваних методів формального синтезу моделей [б]:
 - а) «Метод структур СЧС»;
 - б) «Метод структур СЧС та Формальних Поліномів»;
- підтримуваний клас паралельних обчислювальних систем (ОС) – системи з розподіленою пам’яттю (MPP, CLUSTER);
- прикладна задача – послідовний алгоритм Гауса вирішення системи лінійних рівнянь;
- методи паралельної обробки даних, що підтримуються, – поєднання незалежних операцій завдань;
- оцінювані показники ефективності – час вирішення задач, можливості зменшення часових витрат за обмін повідомленнями;
- тривалість виконання t_j^0 операцій (у тактах).

тип	Vx	+,-	=	*	%	/	vix	Bp	stop	cont
t_j^0	1.00	1.00	2.00	10.00	35.00	35.00	1.00	1.00	1.00	1.00

3. Математична модель алгоритму Гауса

Математична модель розв’язання системи лінійних рівнянь методом Гауса має такий вигляд [4].

Дана система n лінійних рівнянь алгебри:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1\ n+1}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2\ n+1}$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n\ n+1}$$

Рішення системи рівнянь за компактною схемою полягає у послідовному визначенні x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 із системи рівнянь:

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = c_{1\ n+1}$$

$$x_2 + \dots + c_{2n}x_n = c_{2n+1}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_n = c_{n+1}$$

Ця система виходить як результат розкладання вихідної матриці на трикутні матриці відповідно до наступних формул:

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} \cdot c_{kj}, \quad 1 \leq j, j \leq n, i \geq j;$$

$$c_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} \cdot c_{kj} \right) / b_{ii}, \quad 1 \leq j \leq n, 1 < j \leq n+1, i < j.$$

Результаті обчислень виходить матриця

$$b_{11}c_{12}c_{13}\dots c_{1n}c_{1n+1}$$

$$b_{21}b_{22}c_{23}\dots c_{2n}c_{2n+1}$$

$$\dots$$

$$b_{n1}b_{n2}b_{n3}\dots b_{nn}c_{n+1}.$$

Власне обчислення значень $x_i, i = n, n-1, \dots, 1$ виконується за формулою:

$$x_i = c_{i+1} - \sum_{k=1}^{n-i} c_{i,n-k+1} \cdot x_{n-k+1}.$$

Метод Гауса ґрунтується на можливості виконання еквівалентних перетворень лінійних рівнянь, які не змінюють рішення системи, що розглядається. До таких перетворень ставляться:

- множення будь-якого рівняння на ненульову константу;
- перестановка рівнянь; h
- додавання до рівняння будь-якого іншого рівняння системи.

Основна ідея методу полягає у приведенні матриці A/U коефіцієнтів за допомогою еквівалентних перетворень до трикутного вигляду, після чого значення невідомих можуть бути отримані безпосередньо в явному вигляді.

4. Узагальнений алгоритм методів синтезу паралельних часових моделей завдань для класів MPP/CLUSTER

Архітектура узагальненого методу формального синтезу часових паралельних моделей завдань кластерних систем представляє рис. 1 [6]

Етап 1 (п. 2, рис. 1). Змістом етапу є формування для вихідної Сі-програми структур семантико-числової інформації (СЧС), які є основою наступних етапів формального синтезу часопараметризованих паралельних MPP/CLUSTER моделей/програм.

Етап 2 (п. 3 рис. 1). Змістом етапу є формальний синтез та візуалізація графічної специфікації Сі-програми у вигляді Сі-графа з деталізацією до інструкцій/функцій мови Сі. Сі-граф задає, так само як і структури BF і CF семантико-числової специфікації, склад інструкцій/функцій вихідної Сі-програми та їх зв'язок за даними та управлінням.

Етап 3 (п. 4 рис. 1). Змістом етапу є верифікація синтезованих семантико-числової та графічної специфікацій (структур СЧС та Сі-графа) Сі-програми. Метою верифікації є перевірка коректності результатів, що використовуються як вихідні дані при виконанні наступних етапів синтезу часопараметризованих паралельних MPP/CLUSTER - моделей/програм.

Етап 4 (п. 5 рис. 1). Змістом етапу є розширення складу операторів та зв'язків структур BF і CF семантико-числової специфікації Сі-програми за рахунок введення додаткових змінних, що представляють результати проміжних обчислень, та відповідних цим змінним операторів роботи з пам'яттю. Це забезпечує перехід до конструктивних (Constructive, C) структур CBF і CCF семантико-числової специфікації, що відображає повний склад та зв'язки операторів, що підлягають виконанню при вирішенні задачі.

Етап 5 (п. 6 рис. 1). Забезпечує перевірку наявної системи часових чи ресурсних вимог/обмежень, наявність яких визначає вибір конкретного методу та алгоритму синтезу

часопараметризованих паралельних *MPP/CLUSTER* моделей/програм: методу структур СЧС і методу структур СЧС та формальних поліномів.

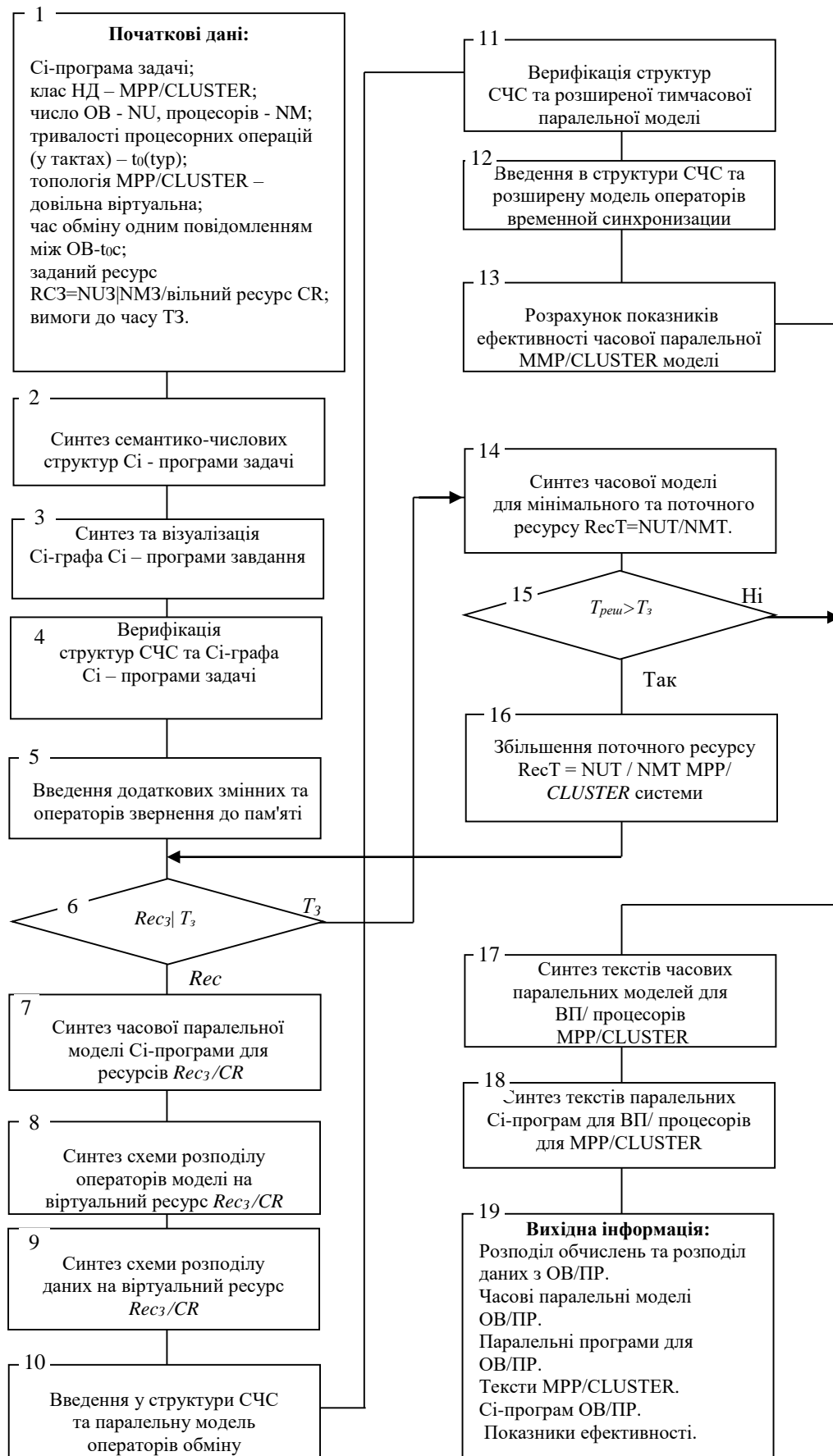


Рис. 1. Узагальнений метод синтезу та верифікації часових паралельних моделей.

Етап 6 (п. 7 рис. 1). Змістом етапу є синтез часової паралельної моделі вихідної Сі-програми для заданого ресурсу обчислювальних вузлів/процесорів NU_3/NM_3 та перевірка її коректності.

Основні етапи методів формального синтезу представлені на рис. 2 [6]

Етап 7 (п. 8 ... 16 рис. 1). Змістом етапу є вирішення наступних задач:

- розподіл операторів часової паралельної ресурсно-орієнтованої моделі Сі-програми між компонентами заданого ресурсу $Rec_3=NU_3/NM_3$ для подальшого виконання;
- розподіл даних між відповідними модулями пам'яті, що підтримує прийнятий на заданому ресурсі Rec_3 розподіл операторів;
- введення в часову паралельну ресурсно-орієнтовану модель операторів обміну повідомленнями ($send(...)$, $recieve(...)$), які забезпечують обмін даними між обчислювальними вузлами/процесорами MPP/CLUSTER системи.

Розглянемо призначення та математичний опис основних етапів синтезу, показаних на рис. 2 [6].

Етап 1 (п. 2 рис. 2) забезпечує вирішення двох завдань:

а) розрахунок для кожної вершини $P_j \in P$ Сі-графа $GO = GO(P, U)$ значення рангу r_j відповідно до наступних співвідношень:

$$r_j = t_j^0 \text{ якщо } W(P_j) = 0,$$

$$r_j = \max_{P_\xi \in W(P_j)} (r_\xi + t_j^0) \text{ якщо } W(P_j) \neq 0;$$

б) розрахунок для операторів $P_j \in P$ значення пріоритету d_j , що визначає важливість оператора P_j стосовно інших операторів P_k , з безлічі P і тим самим черговість його розгляду при вирішенні задачі виділення обладнання з метою його реалізації.

Співвідношення, що забезпечують розрахунок приватних пріоритетів $b_j^\delta = 1$ операторів конкретного алгоритму $P^\delta = \{P_j^\delta\}$, мають такий вигляд:

$$b_j^\delta = 1 \text{ якщо } r_j = \max_{P_i \in P^\delta} r_i \text{ и } r_i < r_j \text{ якщо } i \neq j;$$

$$b_j^\delta < b_i^\delta \text{ якщо } r_i = r_j \text{ и } t_j^0 > t_i^0;$$

$$b_j^\delta < b_i^\delta \text{ якщо } r_j > r_i;$$

$$b_j^\delta < b_i^\delta \text{ якщо } r_i = r_j, t_j^0 = t_i^0 \text{ и } |W_j| > |W_i|;$$

$$b_j^\delta < b_i^\delta \text{ якщо } r_i = r_j, t_j^0 = t_i^0 \text{ та } |W_j| = |W_i|, \text{ для } j < i.$$

У цих співвідношеннях r_i, r_j – ранги операторів P_i, P_j , що визначаються наступним чином: $r_j = t_j^0$ якщо $W_j = \emptyset$ (якщо оператор P_j є вихідним оператором алгоритму, що формує остаточний результат); $r_j = \max_{P_\xi \in W_j} (r_\xi + t_j^0)$ якщо $W_j \neq \emptyset$ (якщо P_j здійснює обчислення проміжного результату, використовуваного іншим (іншими) операторами алгоритму).

Етап 2 (п. 4 рис. 2) забезпечує формування безлічі E_{nj}^c операторів P_j^δ – кандидатів на початок виконання в момент t відповідно до наступних співвідношень (індекс «с» в E_{nj}^c відповідає застосуванню методу суміщення операцій). Логіка формування множини E_{nj}^c задається такими співвідношеннями

$$E_{nj}^c = R_{nj-1}^c \cup K_{nj}^c,$$

де R_{nj-1}^c – безліч операторів P_j , реалізація яких була розпочата на $nj-1$ -му ярусі у зв'язку з відсутністю необхідних вільних компонентів; K_{nj}^c – безліч операторів, виконання яких може бути

розпочато на n_j -му ярусі у зв'язку з наявністю всіх необхідних для них даних, тобто з урахуванням раніше виконаних операторів та інформаційно-керуючих зв'язків між операторами $P_j \in P$.

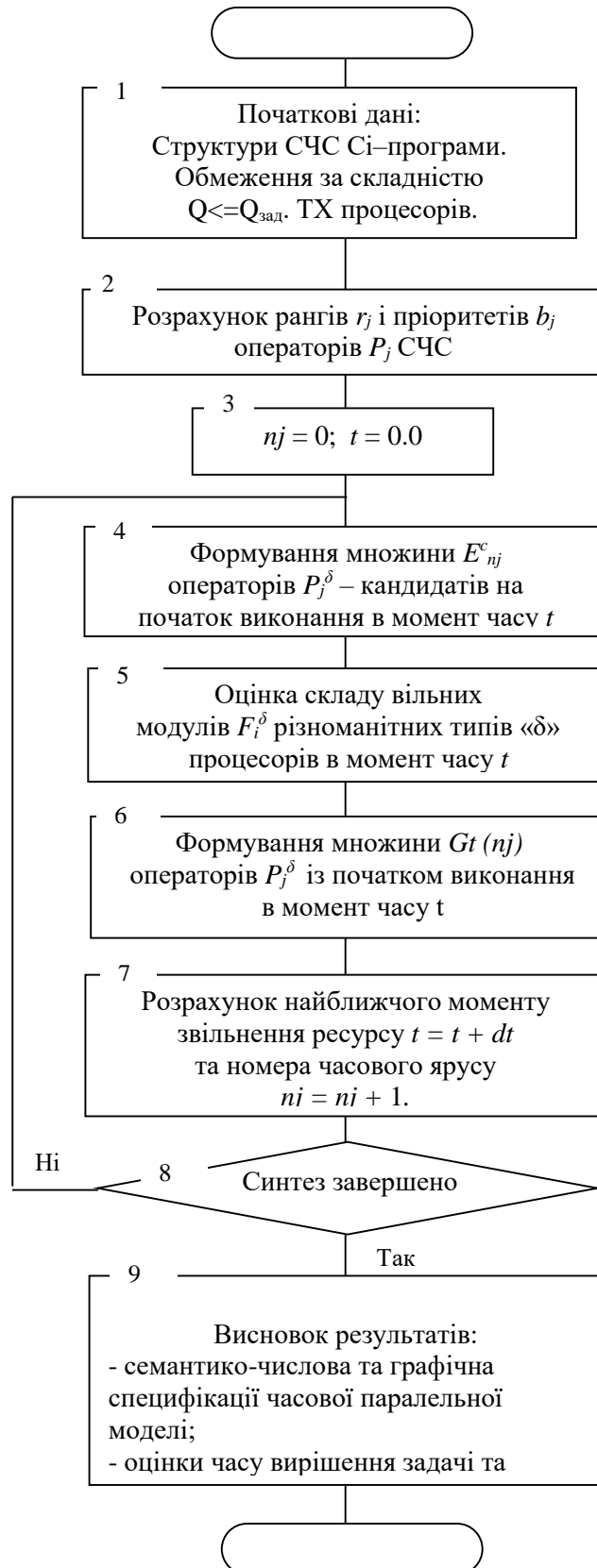


Рис. 2. Етапи формального синтезу часових паралельних моделей задач при ресурсних вимогах/обмеженнях.

$$R_{nj-1}^c = \begin{cases} 0 & \text{при } nj=0, \\ E_{nj-1}^c \setminus G_{nj-1}^c & \text{при } nj > 0; \end{cases}$$

$$K_{nj}^c = \begin{cases} \bigcup_j P_j & \text{при } S(P_j)=0 \text{ (якщо } nj=0), \\ \bigcup_j P_j & \text{за умови виконання для } P_j \text{ наступних умов:} \end{cases}$$

а) $P_j \in \bigcup_{P_\xi \in G_{nj-1}^c} W(P_\xi)$, якщо $S(P_j) \subseteq G_{nj-1}^c$;

б) $t_\xi^H + t_\xi^0 \leq t(nj)$ для усіх $P_\xi \in S(P_j)$.

Тут G_{nj-1}^c – безліч операторів P_j , реалізація яких було розпочато на ярусах $nj = 1 \dots nj - 1$.

Етап 3 (п. 5, 6, 7 рис. 2) забезпечують вирішення наступних задач формування множини $G_t(nj)$ операторів P_j^{δ} з початком виконання на nj -му ярусі в момент часу t , у тому числі:

- оцінки вільного в момент часу $t(nj)$ складу ресурсу (функціональних модулів різних типів – для варіанта апаратної реалізації моделі та кількості процесорів – для варіанта програмної реалізації моделі);
- вибору з безлічі операторів – кандидатів E_{nj}^c операторів P_j (у порядку зменшення пріоритетів) та перевірки наявності необхідного для виконання оператора P_j вільного ресурсу;
- призначення оператора P_j на відповідний ресурс та розрахунку моменту звільнення ресурсу після завершення виконання оператора.

4. Розробка часової паралельної моделі алгоритму Гауса на основі Методу структур СЧС

Для Сі-програми розв’язання системи лінійних рівнянь (рис. 3) за допомогою «Синтезатора графів Сі-програм» і «Синтезатора паралельних моделей Сі – програм» автоматично синтезуються структури ВФС, СФС та часовий файл TF [6]. На основі цих файлів за допомогою програми «Автоматичний візуалізатор паралельних моделей та структур»[7] для «Методу структур СЧС» (рис. 1, рис. 2) та заданого ресурсу Rec_3 процесорів синтезується графічна візуалізація паралельної часопараметризованої моделі (рис. 3).

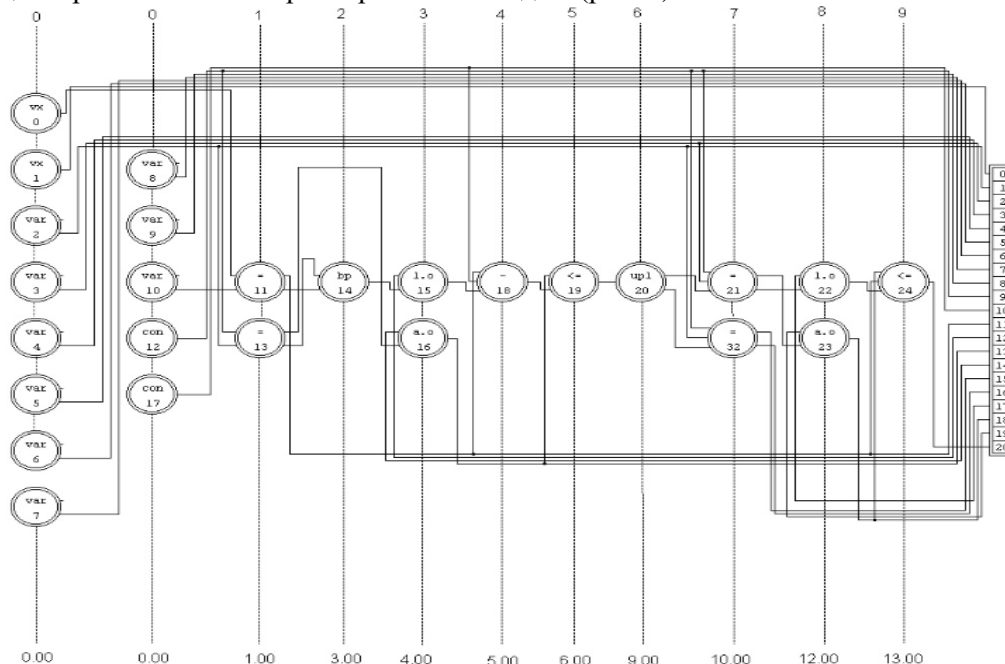


Рис. 3. Паралельна часова модель розв’язання систем лінійних рівнянь методом Гауса (початок).

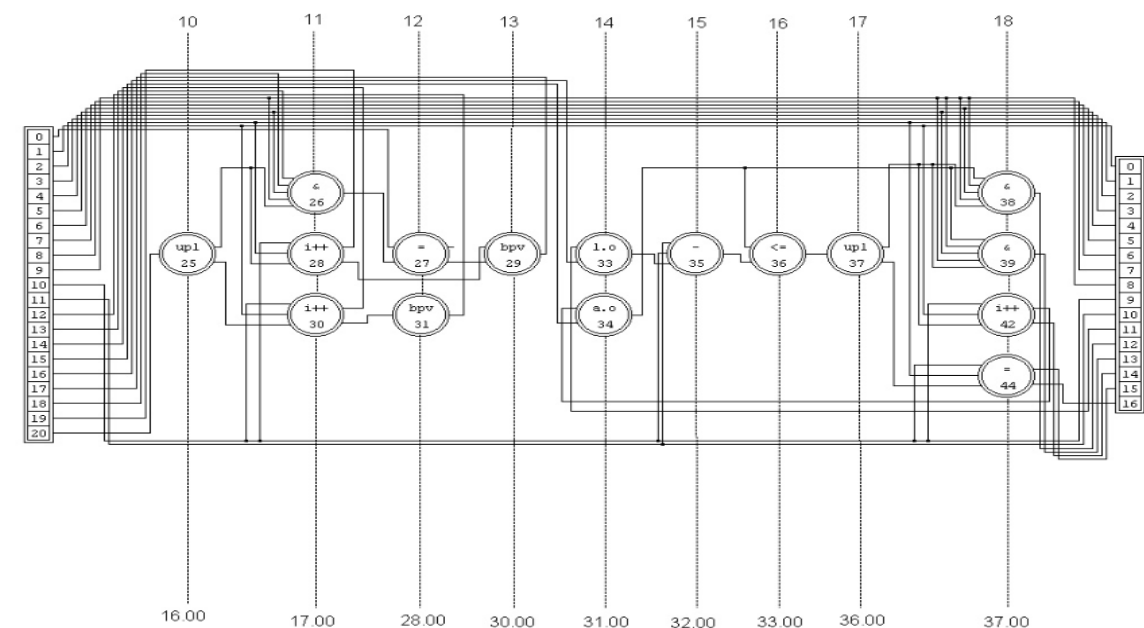


Рис. 3. Паралельна часопараметризована модель розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса (продовження 1).

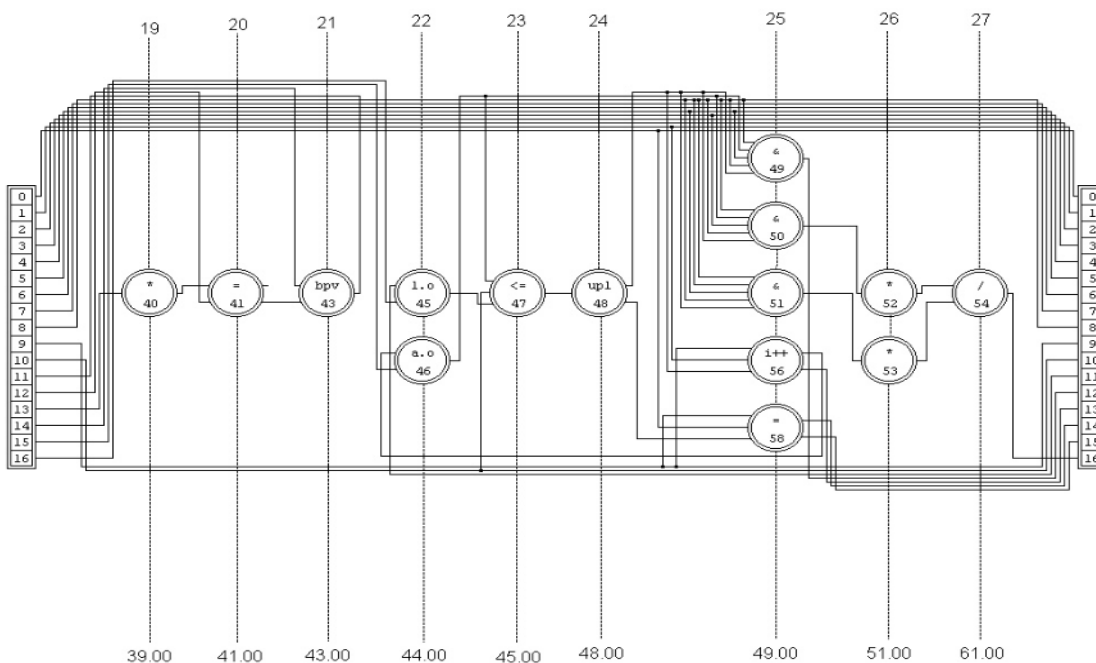


Рис. 3. Паралельна часопараметризована модель розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса (продовження 2).

Для скорочення обсягу матеріалу далі показані завершальні частини синтезованої паралельної часової моделі.

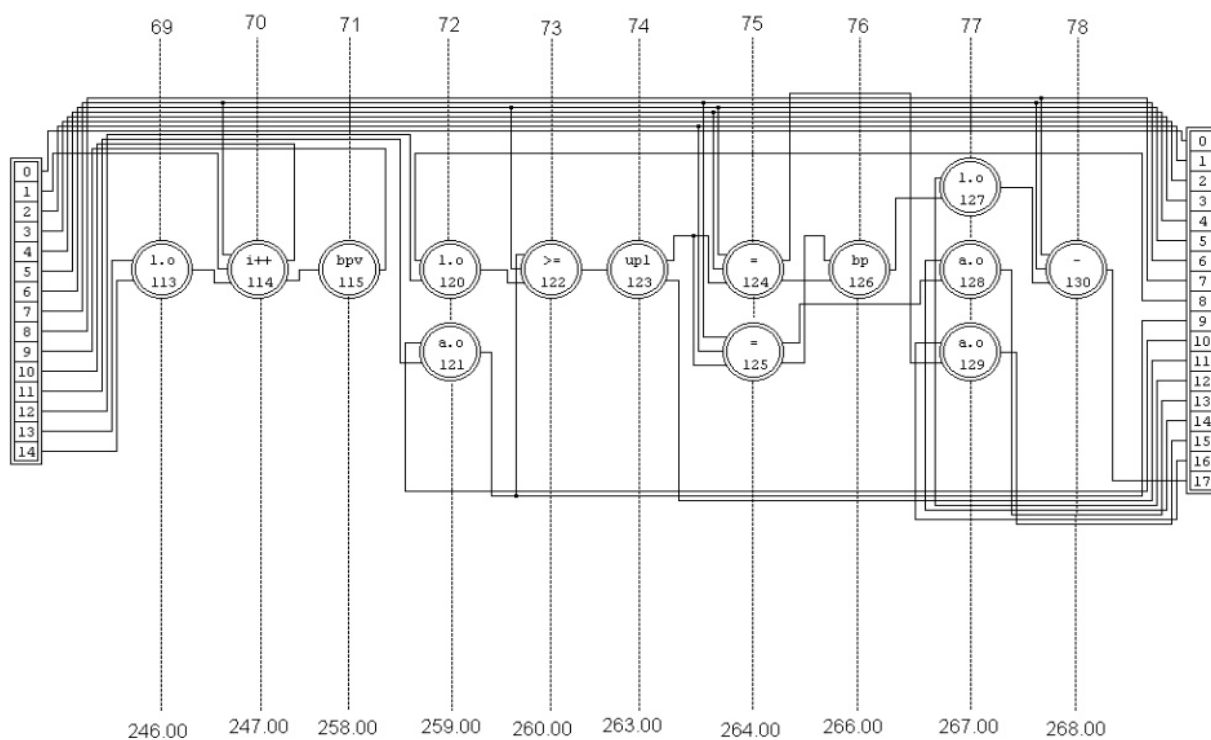


Рис. 3. Паралельна часопараметризована модель розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса (продовження 8).

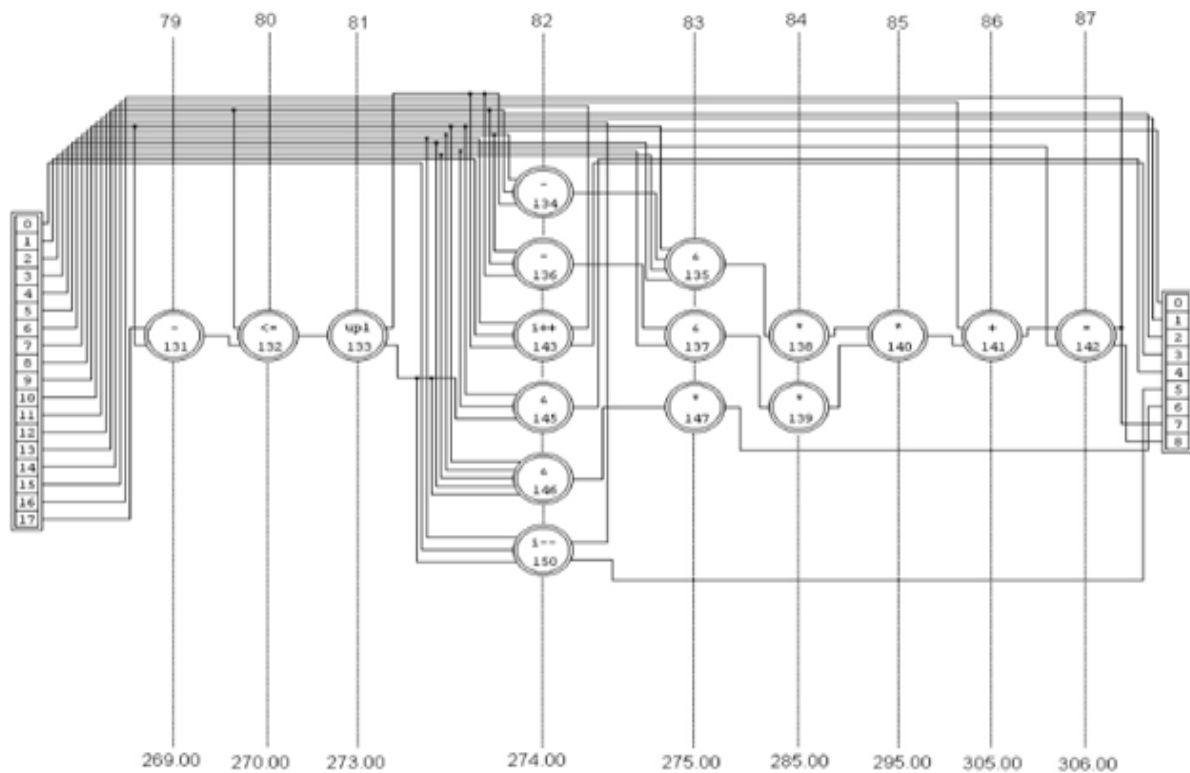


Рис. 3. Паралельна часопараметризована модель розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса (продовження 9).

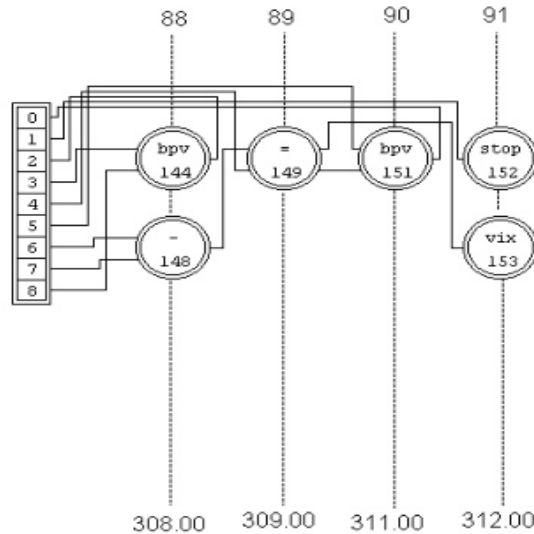


Рис. 3. Паралельна часопараметризована модель розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса (закінчення).

Аналіз структур СЧС та паралельної часопараметризованої моделі (рис. 3) показує, що модель має такі значення кількісних параметрів: число операторів – 153, кількість зв'язків операторів – 338, кількість часових ярусів – 91, час T виконання (у тактах) дорівнює 312.00, кількість обмінів повідомленнями (send-receive) між процесорами дорівнює 120.

5. Розробка часової паралельної моделі алгоритму Гауса на основі Методу структур СЧС та Формальних Поліномів

В основу фрагментації завдань із застосуванням формальних поліномів покладено виконання таких дій (рис. 5).

1. Синтез для задачі стисненого псевдочасового графа/Сі-графа.
 2. Формування для псевдочасового графа/Сі-графа безлічі формальних поліномів $PL(X) = \{P^s(X)\}$ різних ступенів s ; тут $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – безліч формальних змінних, n – кількість вершин у стислому псевдочасовому графі задачі, s приймає значення $s = 1, 2, \dots, n-1$.
 3. Редукція (з метою спрощення) формальних поліномів $P^s(X)$ різних ступенів s за рахунок виключення термів, що містять змінні ступенем $s < 2$.
 4. Формування з термів редукованих формальних поліномів, побудованих для кожного k -го ярусу стисненого псевдочасового графа/Сі-графа, множин "покриттів" вершин k -го ярусу (що містять всі вершини ярусу), $k = 1, 2, \dots, sl$; sl – кількість псевдочасових ярусів у стиснутому псевдочасовому графі задачі.
 5. Оцінка складності кожного «покриття» вершин k -го псевдочасового ярусу та вибір варіанта покриття із мінімальною складністю.
 6. «Розширення» сформованих для попередніх псевдочасових ярусів (з номерами $1, 2, \dots, k-1$) фрагментів шляхом включення до їх складу термів покриття, що має мінімальну складність.
- Різні етапи моделі фрагментації (рис. 5) виконують такі дії [6].

Етап 1 (п. 2 рис. 4). Змістом етапу є побудова Сі-графа Сі-програми задачі. Побудова Сі-графа може виконуватися або вручну (за завданням розрахункових співвідношень), або автоматичному режимі за допомогою програми «Синтезатор графів Сі-програм» [4].

Отримана графічна специфікація задає кількість операторів $P_j \subset P$ у задачі, склад типів операторів та сполучено – зовнішні зв'язки за даними та з управління між операторами P_j задачі.

Етап 2 (п. 3 рис. 4). Змістом етапу є перетворення Сі-графа задачі в стислий псевдочасовий граф, що виконується в припущенні однакового (рівного умовній одиниці) часу t_j^0 виконання операцій/функцій $P_j \subset P$ різних типів. Тим самим досягається розподіл Сі-графа на псевдочасові «шари» $SL(k)$ вершин, $k = 1, 2, \dots, sl$.

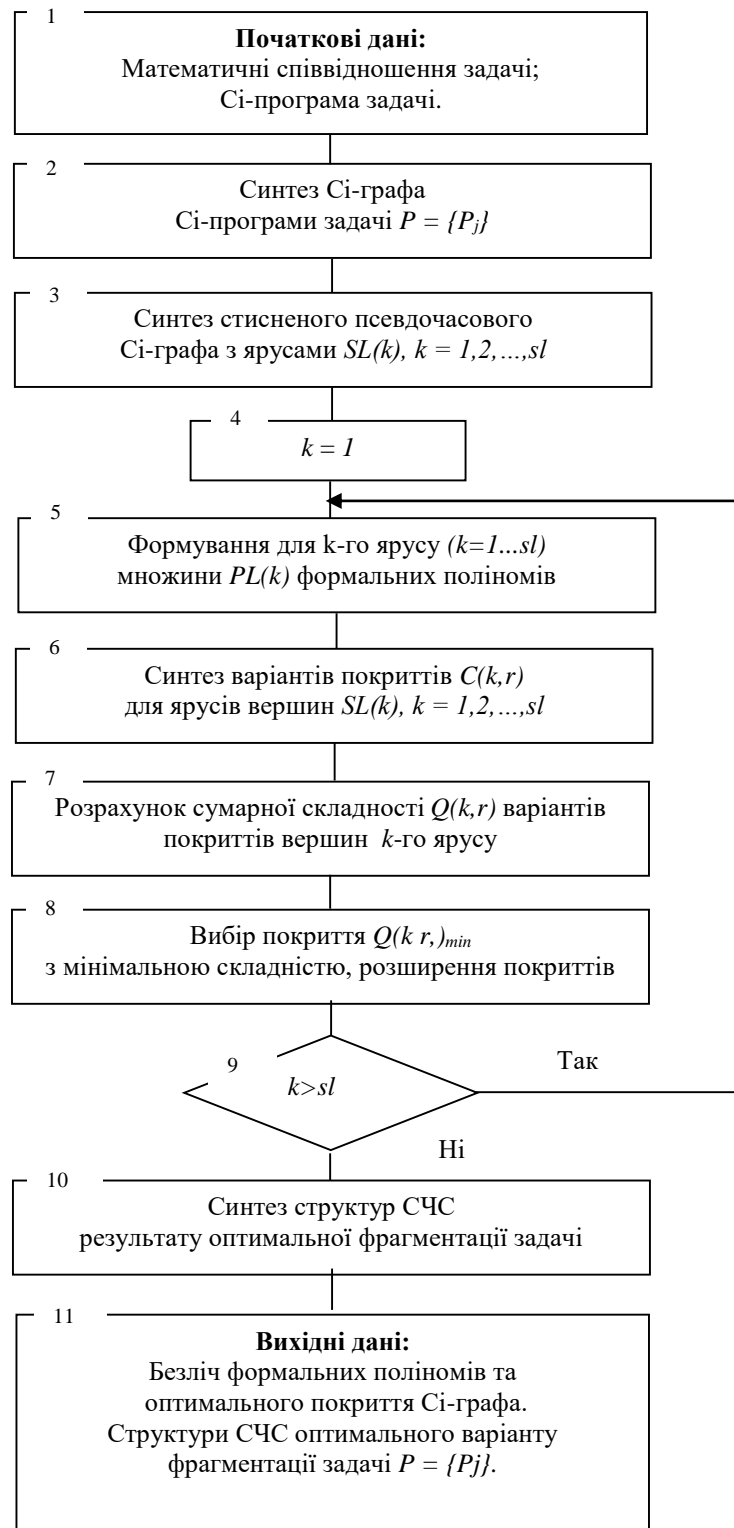


Рис.4. Модель фрагментації задач із застосуванням структур СЧС та формальних поліномів.

Етап 3 (п. 4,5 рис. 4) забезпечує формування кожного шару $SL(k)$ псевдочасової моделі задачі ($k = 1, 2, \dots, sl$; де sl – кількість ярусів псевдочасового графа задачі) набору $PL(k)$ формальних поліномів. До складу $PL(k)$ входять поліноми $P^s(k)$, що мають значення ступеня $s = 1, 2, \dots, n_k - 1$

(де n_k – кількість вершин у k -му шарі $SL(k)$). У цьому об’єднанні (за s) наборів $P^s(k)$ має містити усі вершини k – го шару $SL(k)$: $\sum_{s=1}^{n_k} P^s(k) = SL(k)$.

Етап 4 (п. 6 рис. 4). До етапу є формування для k -го ярусу $SL(k)$ ($k = 1, 2, \dots, sl$) множини $C(k, r)$ «покриттів» - сукупності підмножин різної потужності операторів P_j шару $SL(k)$, об’єднання яких містить («покриває») усі оператори k -го ярусу. Це завдання вирішується методом підбору з термів редукованих поліномів k -го ярусу підмножин термів, об’єднання яких «накриває» всі вершини ярусу, що розглядається. При розв’язанні задачі фрагментації цей етап циклічно виконується для кожного з ярусів псевдочасового графа задачі, кількість повторень циклу визначається числом ярусів sl у графі задачі.

Етап 5 (п. 7, 8, 9 рис. 4). Зміст етапу складає вирішення наступних задач:

1. Розрахунок складності вершини (оператора P_j) при її включенні в один із формованих фрагментів $\Phi(s)$, $s = 1, 2, \dots, p$. (складність вершини P_j дорівнює нулю, якщо використовує її результат вершина P_i належить тому ж фрагменту, інакше – кількості зовнішніх – для цієї вершини P_j – вершин інших фрагментів).

2. Оцінка складності $Q(k, r)$ кожного r – го «покриття» $C(k, r)$ вершин k -го ярусу $SL(k)$ ($k = 1, 2, \dots, sl$). «Складність $Q(k, r)$ покриття $Q(k, r)$ » поточного фрагмента $\Phi(p)$ визначається як сумарна кількість «зовнішніх» зв’язків операторів P_j покриття, що розглядається (які належать поточному фрагменту) з операторами P_j , включеними раніше до складу інших фрагментів $\Phi(s)$, $s = 1, 2, \dots$, та $s \leq p$.

3. Вибір оптимального варіанта покриття $C(k, r)_{opt}$ вершин k -го ярусу, що має мінімальну складність $Q(k, r)_{opt} = \min Q(k, r)$ та включення його операторів до складу поточного фрагмента $\Phi(p)$.

4. Корекція складу операторів P_j формованих фрагментів $\Phi(s)$, корекція поточних значень їх складнощів $Q(s)$, $s = 1 \dots p$, видача (при завершенні циклу за кількістю sl ярусів псевдочасового графа/Сі-графа задачі) результатів статичної фрагментації.

Результати виконання етапів 1 і 2 моделі фрагментації задач (рис. 4) – псевдочасовий Сі-граф моделі алгоритму Гауса (рис. 5).

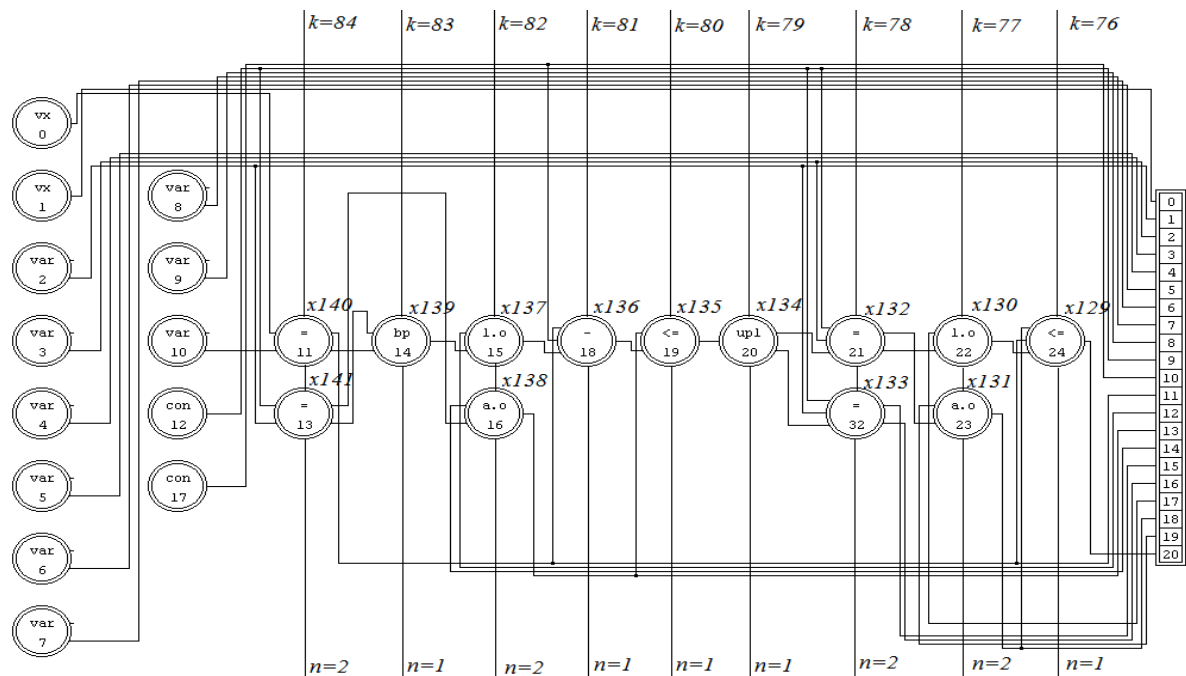


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (початок)

Прийняті на рис. 5 позначення: k – номер шару Сі-графа, n – кількість операторів, що належать конкретному шару («потужність» шару), x_j – ім’я змінної формального полінома, що поставлена у взаємно однозначну відповідність оператору з номером j Сі-графа .

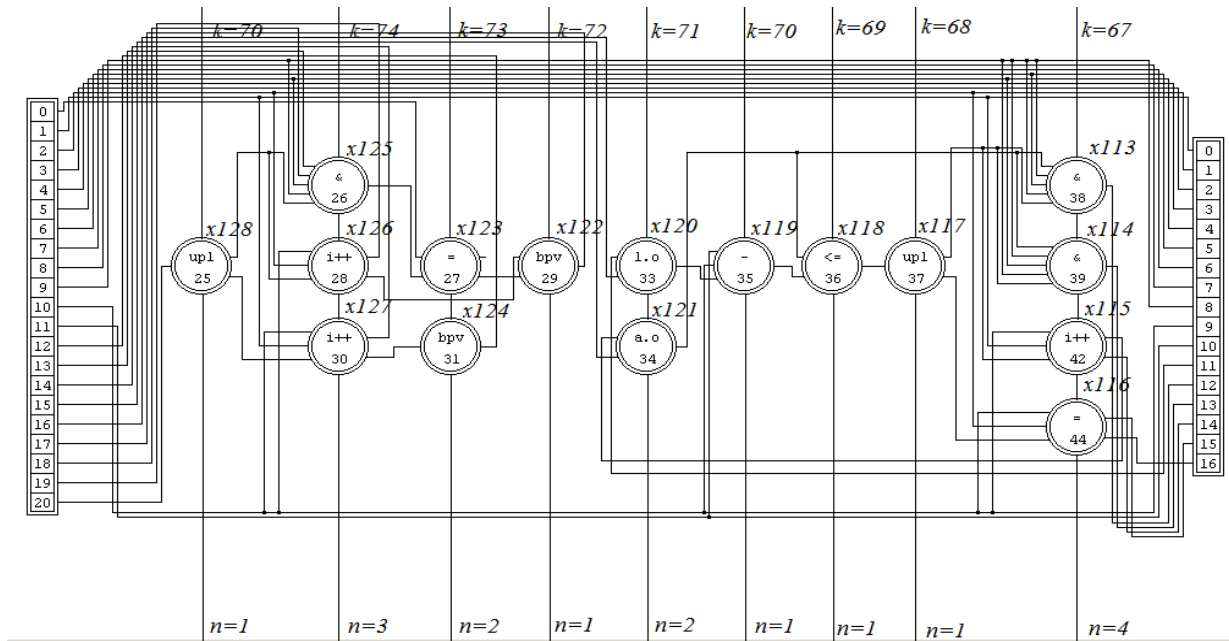


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (продовження 1)

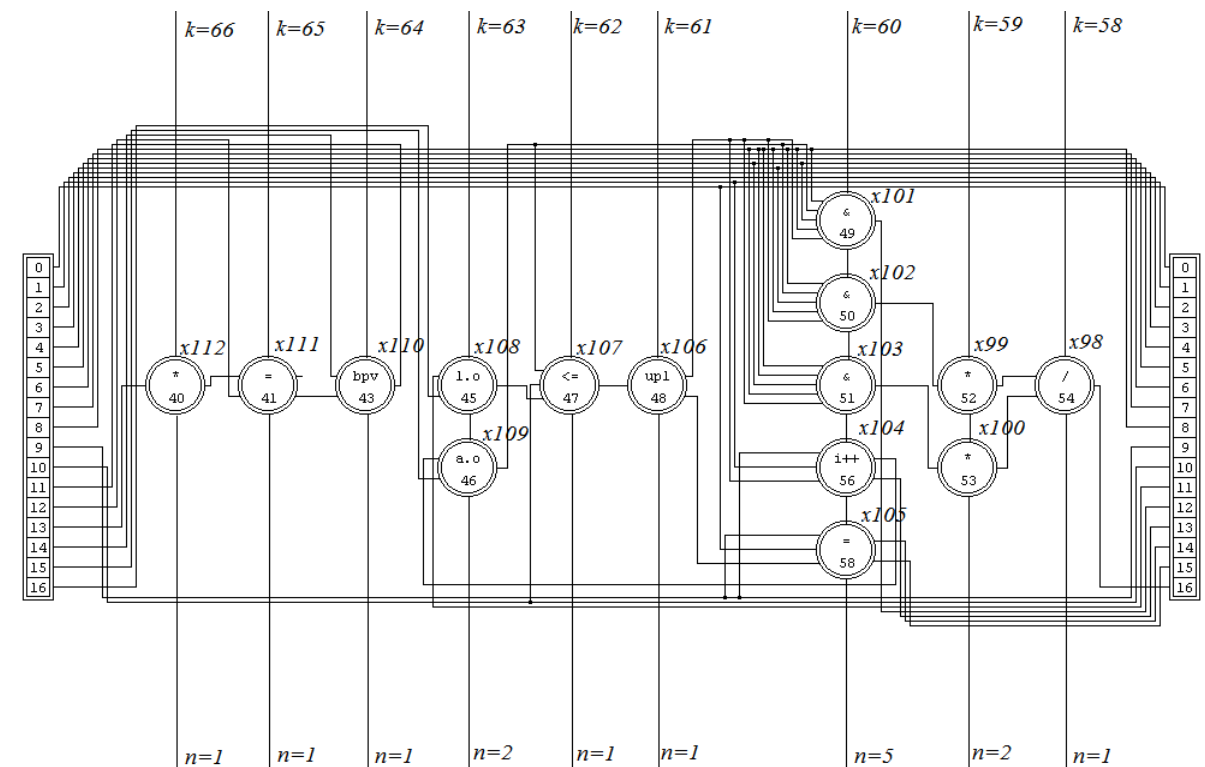


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (продовження 2)

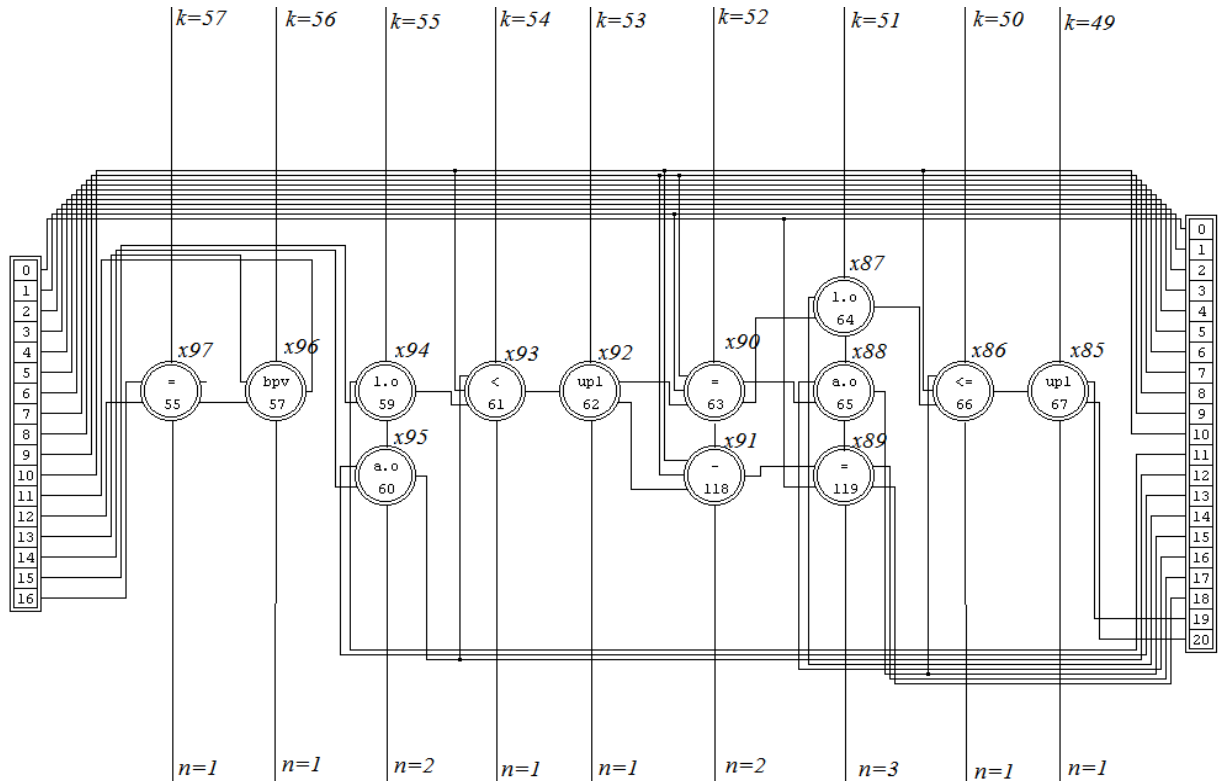


Рис. 5. Si-граф моделі Si-програми алгоритму Гауса (продовження 3)

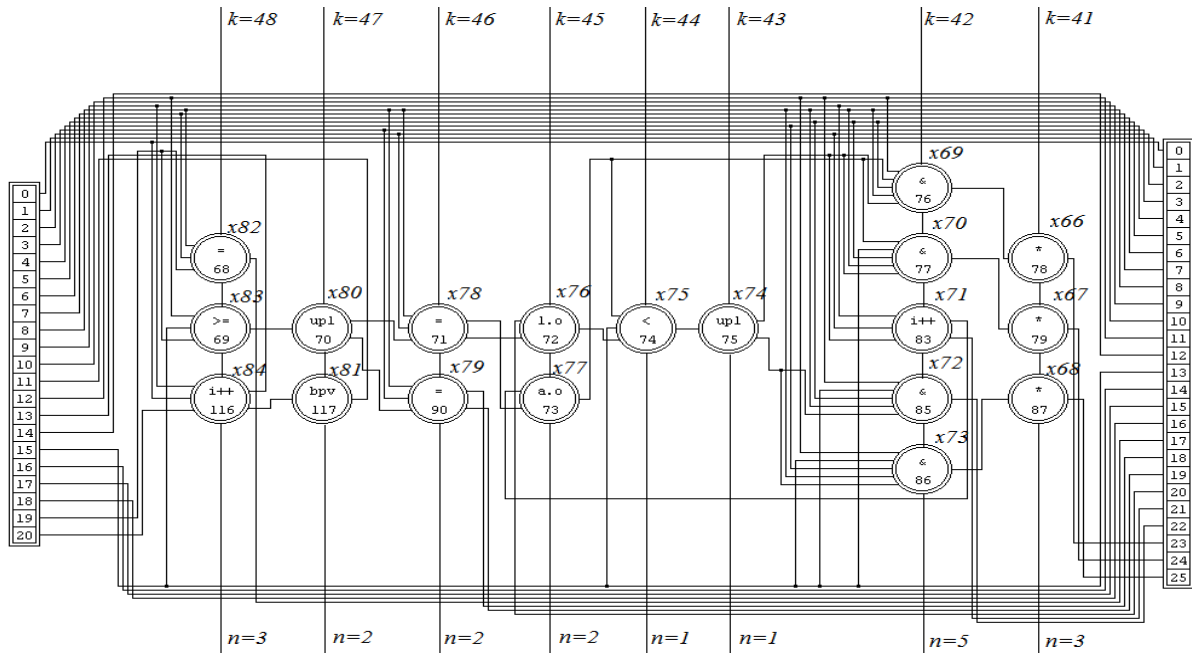


Рис. 5. Si-граф моделі Si-програми алгоритму Гауса (продовження 4)

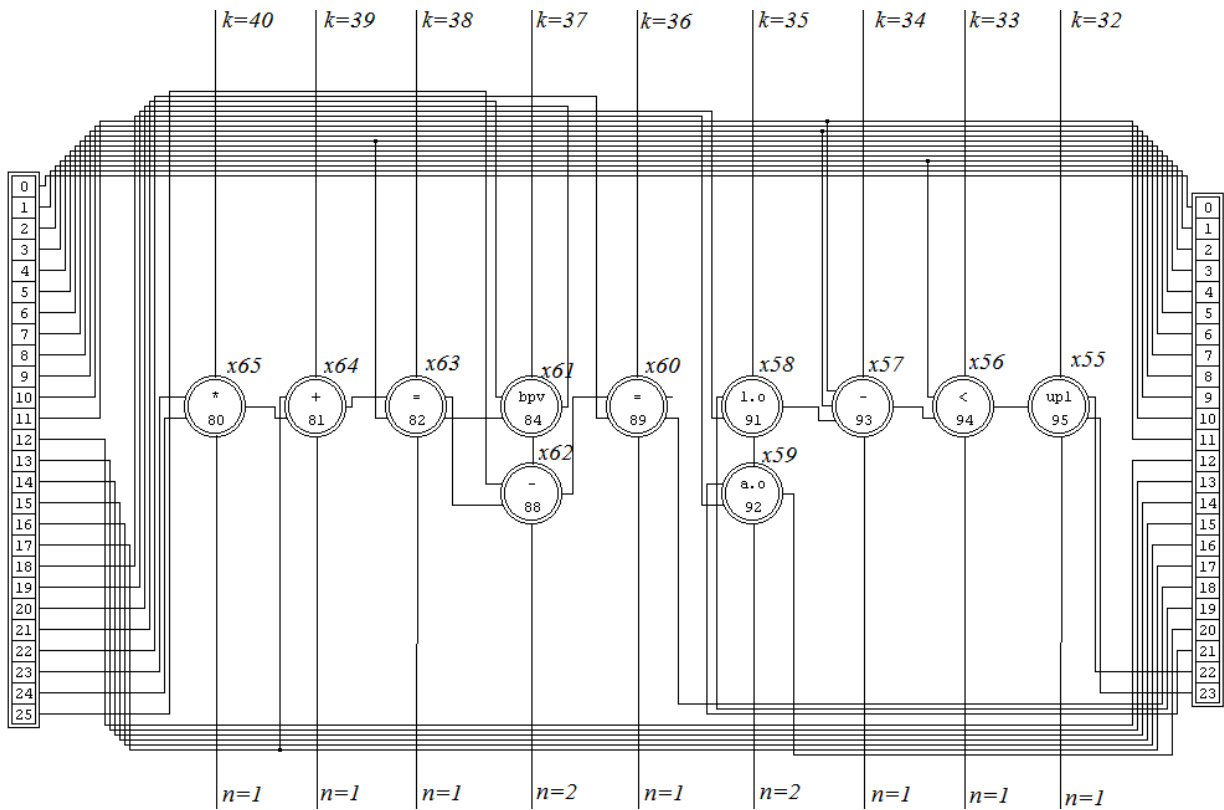


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (продовження 5)

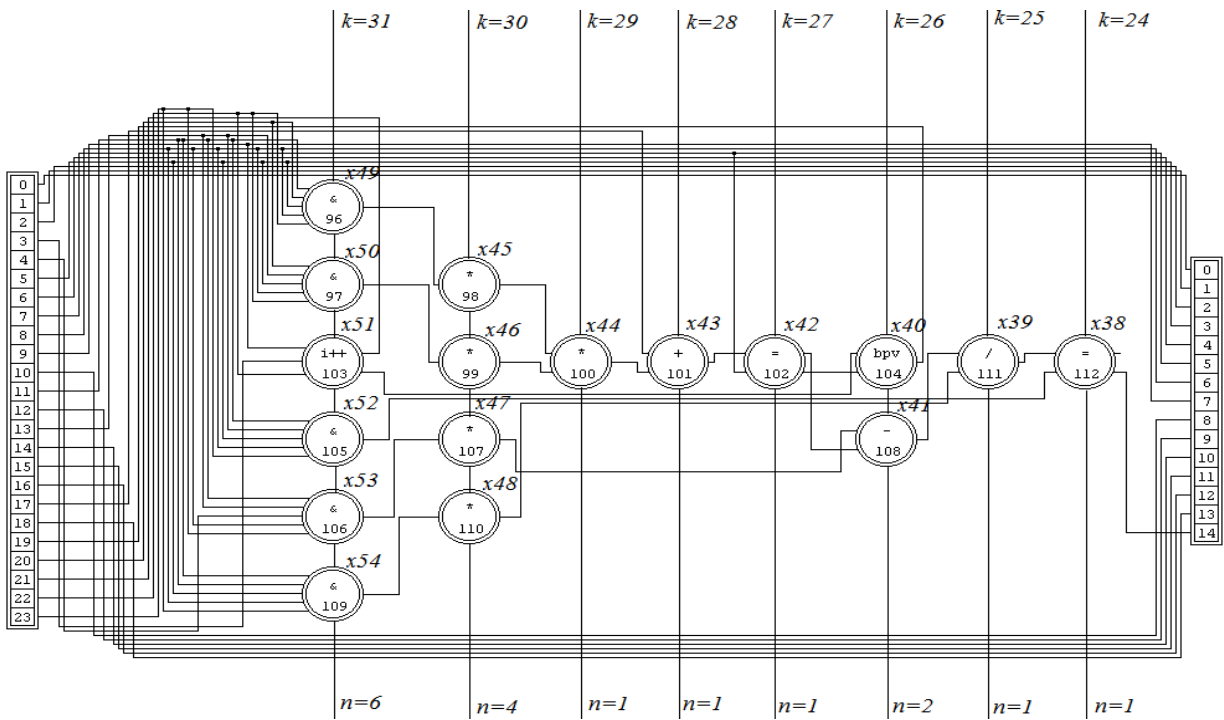


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (продовження 6)

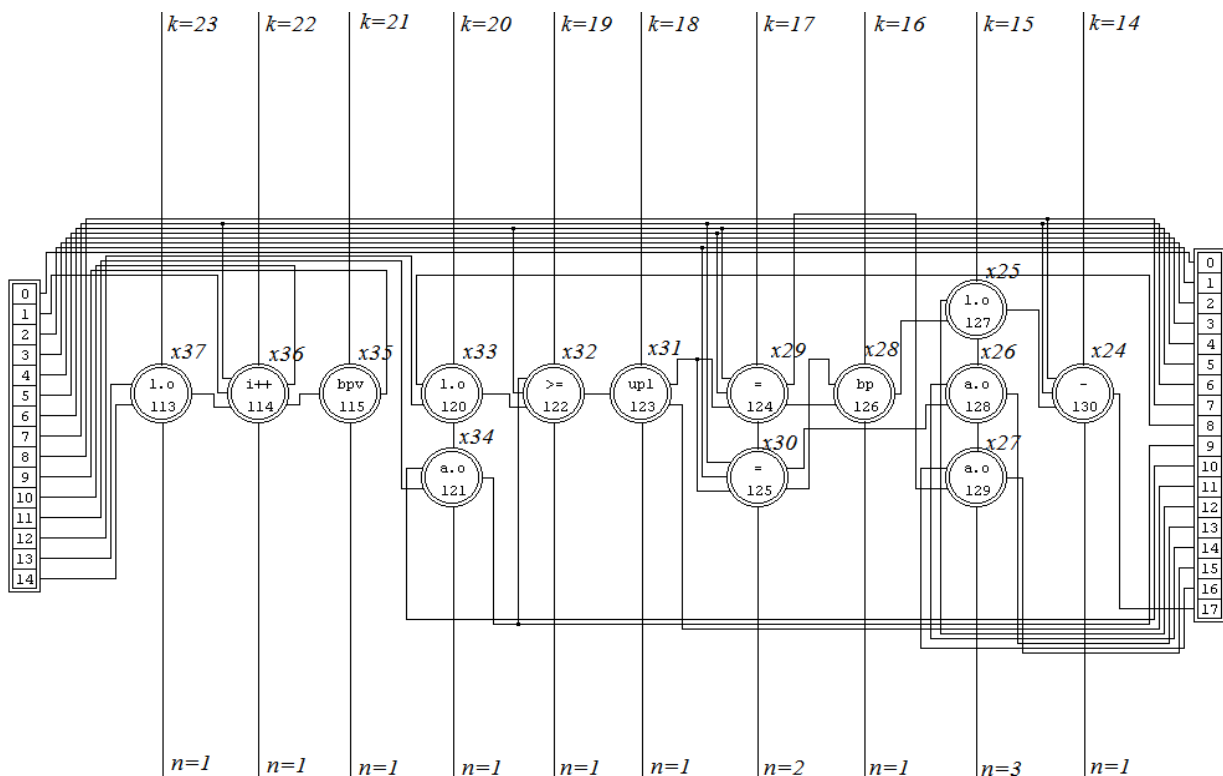


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (продовження 7)

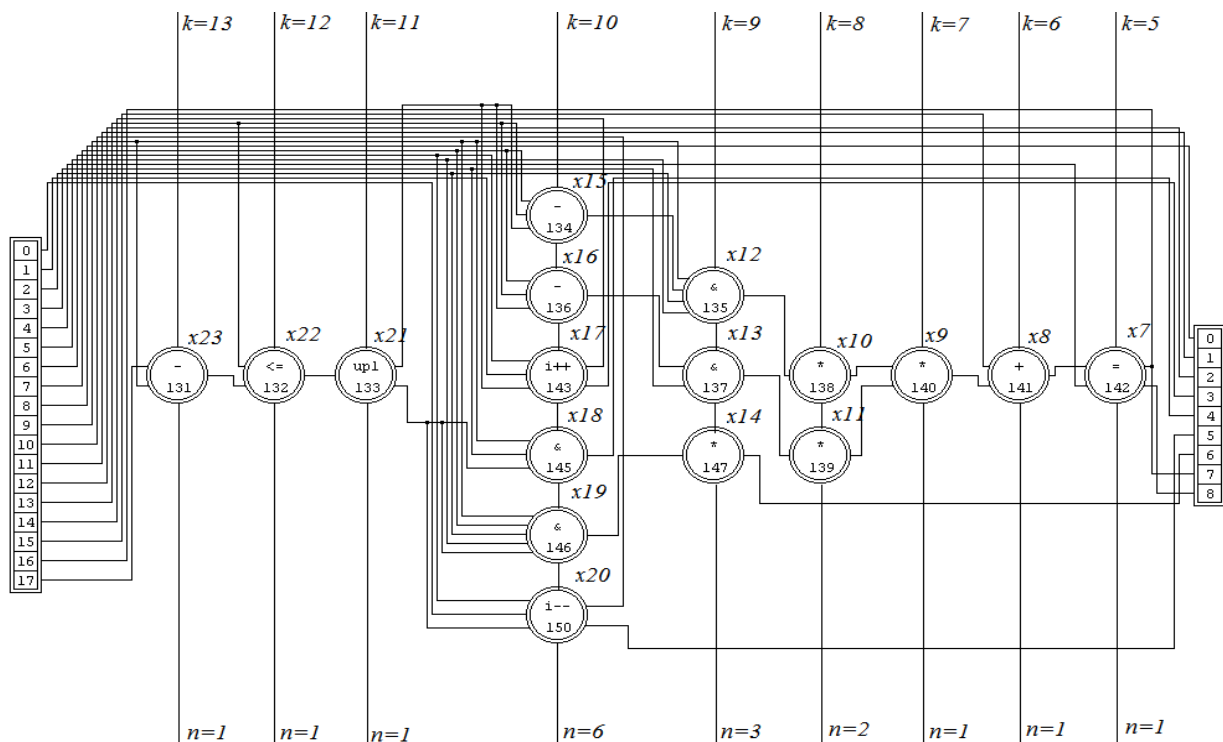


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (продовження 8)

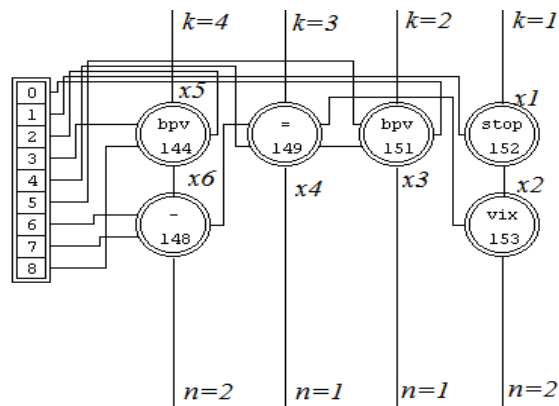


Рис. 5. Si-граф моделі Si-програми алгоритму Гауса (закінчення)

Отримані під час використання «Методу структур СЧС і Формальних Поліномів» результати мають такі значення кількісних параметрів: число операторів – 153, кількість зв'язків операторів – 338, число часових ярусів – 91, час Т виконання (у тактах) псевдочасового Si-графа моделі дорівнює 91.00, кількість обмінів даними між процесорами дорівнює 90 та, отже, зменшення кількості обмінів повідомленнями становить 25% (рис.6).

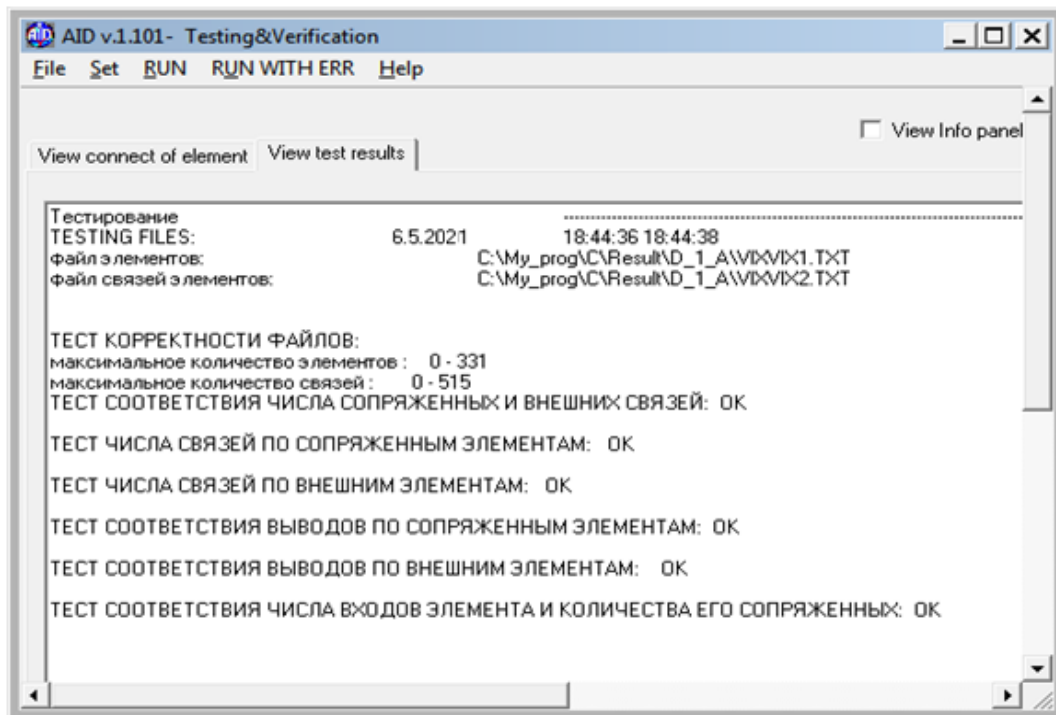


Рис. 6. Результаты верификации состава операторов та його зв'язків у Si-програмі алгоритму Гауса.

6. Висновки.

Можливість практичної реалізації в кластерних системах паралельних часопараметризованих моделей вимагає введення до складу моделей операторів обміну повідомленнями (send-receive). Розроблено програму, що забезпечує автоматичне «розширення» структур СЧС вихідних часових моделей шляхом включення до їх складу операторів (send-receive) та замикання їх зв'язків з операторами вихідних моделей та синтез структур СЧС кластерної моделі. Розроблена програма розширює можливості створення систем автоматичного синтезу паралельних часопараметризованих програм для кластерних систем.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гергель, В.П., Стронгин, Р.Г. Основы параллельных вычислений для многопроцессорных вычислительных систем. Учебное пособие. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2003. 184 с. <http://window.edu.ru/catalog/pdf2txt/069/24069/6579>
2. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 608 с. <https://www.twirpx.com/file/159421/>
3. Немнюгин С. Модели и средства программирования для многопроцессорных систем. СПб. : С. Петербургский ГУ, 2010. - 100 с. <https://www.twirpx.com/file/456084/>
4. Хьюз К., Хьюз Т. Параллельное и распределенное программирование на C++.: Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. 672с. <https://unotices.com/books-u/148623/4>
5. Толстолужская Е. Г. Синтез времяпараметризованных моделей управления параллельными вычислительными процессами циклических задач / Е. Г. Толстолужская, Ю. А. Артюх // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи. 2012. № 6. С. 64–69. http://nbuv.gov.ua/UJRN/recs_2012_6_14.
6. Синтез и анализ параллельных процессов в адаптивных времяпараметризованных вычислительных системах : монография / Г. А. Поляков, С. И. Шматков, Е. Г. Толстолужская, Д. А. Толстолужский. Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2012. 672 с. <http://mlge.cordon.in.ua/knyga/sintez-i-analiz-parallelnyh-processov-v-adaptivnyh-vremyaparametrizovannyh-vychislitelnyh>
7. Толстолужская Е. Г., Паршенцев Б. В. Исследование возможности параллельной обработки больших объемов данных на основе "Cloud computing". Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України. 2015. № 2(19). С. 118–121. <http://www.hups.mil.gov.ua/periodic-app/article/806>

REFERENCES

1. V. P. Gergel , R. G. Strongin. Fundamentals of parallel computing for multiprocessor computing systems. Tutorial. Nizhny Novgorod: Publishing House of the UNN named after. N. I. Lobachevsky, 2003. 184 p. [in Russian] <http://window.edu.ru/catalog/pdf2txt/069/24069/6579>
2. V. V. Voevodin, Vl. B. Voevodin/ Parallel computing. St. Petersburg: BHV-Peterburg, 2002. 608p. [in Russian] <https://www.twirpx.com/file/159421/>
3. S. Nemnyugin. Models and programming tools for multiprocessor systems. SPb. :C. Petersburg State University, 2010. - 100 p. . [in Russian] <https://www.twirpx.com/file/456084/>
4. K. Hughes, T. Hughes Parallel and distributed programming in C++.: Per. from English. M.: Williams Publishing House, 2004. 672p. [in Russian] <https://unotices.com/books-u/148623/4>
4. E. G. Tolstoluzhskaya. Synthesis of time-parameterized control models for parallel computing processes of cyclic problems / E. G. Tolstoluzhskaya, Yu. A. Artyukh // Radio electronic and computer systems. 2012. No. 6. P. 64–69. [in Russian] http://nbuv.gov.ua/UJRN/recs_2012_6_14
5. Synthesis and analysis of parallel processes in adaptive time-parameterized computing systems: monograph / G. A. Polyakov, S. I. Shmatkov, E. G. Tolstoluzhskaya, D. A. Tolstoluzhsky. Kh. : V. N. Karazin KhNU, 2012. 672p. [in Russian] <http://mlge.cordon.in.ua/knyga/sintez-i-analiz-parallelnyh-processov-v-adaptivnyh-vremyaparametrizovannyh-vychislitelnyh>
6. E. G. Tolstoluzhskaya, B. V. Parshentsev. Investigation of the possibility of parallel processing of large amounts of data based on "Cloud computing". Science and technology of the Defense Forces of the Defense Forces of Ukraine. 2015. No. 2(19). P. 118–121 [in Russian] <http://www.hups.mil.gov.ua/periodic-app/article/806>

УДК 519.63

Спрощення методів чисельного моделювання задачі Стефана з явним виділенням границь розділу фаз

М.Г. Нестеренко, О.І. Нестеренко, В.М. Сахно

Нестеренко Микола Григорович

*к.ф.-м.н., доцент, доцент каф. програмного забезпечення інформаційно-вимірювальної техніки
Український державний хіміко-технологічний університет, пр. Гагаріна 8,
м. Дніпро, Україна, 49005
e-mail: ngn1950@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-8451-4866>*

Нестеренко Олександр Іванович

*д.ф.-м.н., професор; професор кафедри енергетики
Український державний хіміко-технологічний університет, пр. Гагаріна 8,
м. Дніпро, Україна, 49005
e-mail: nesko@ukr.net;
<https://orcid.org/0000-0003-2880-6471>*

Сахно Вячеслав Миколайович

*к.ф.-м.н., доцент, доцент каф. вищої математики та фізики
Дніпровський державний аграрно-економічний університет, вул. Сергія
Єфремова 25, м. Дніпро, Україна, 49000
e-mail: sakhno1960@gmail.com;
<https://orcid.org/0000-0002-2314-4547>*

З розвитком обчислювальної техніки і прогресом в області моделювання фізико-хімічних процесів особливої актуальності набувають способи підвищення точності та спрощення алгоритмів і методів розрахунку математичних моделей. Дана робота присвячена проблемі Стефана, до якої зводяться завдання теплопереносу з фазовим переходом рідина - тверде тіло і дифузійного масопереносу з фазовими перетвореннями в твердому тілі (розпад твердих розчинів, нанесення дифузійних покриттів). Розглянуто особливості чисельного моделювання задачі Стефана в багатофазних системах. Проаналізовано можливості та недоліки існуючих чисельних методів вирішення цього завдання. Запропоновано три нових методи з виділенням рухливих міжфазних границь, на яких сіткова функція терпить розрив першого роду, що істотно спрощують алгоритм чисельного рішення цієї задачі. Порівняння запропонованих алгоритмів між собою та з існуючими чисельними методами проводилося на модельній задачі реакційної дифузії в твердому тілі, що представляє собою задачу Стефана в багатофазних системах, з використанням граничних і початкових умов, які допускають її аналітичне рішення. Проведене моделювання двох існуючих і трьох запропонованих методів показало, що а) метод рівноважної концентрації призводить до значних помилок на ранніх стадіях дифузійного процесу. Але з часом загальні властивості дифузії приводять до зменшення цих помилок. Тому цей метод пропонується для розрахунку кінцевого стану довготривалих дифузійних процесів.; б) методи лінійної інтерполяції та градієнта, що зберігається, практично не поступаються по точності загальноприйнятим алгоритмам і можуть бути використані для рішення задач Стефана в багатовимірній багатофазній постановці.

Ключові слова: задача Стефана, чисельні методи, межа розділу фаз, різницева схема, явне виділення рухомої границі.

Simplified methods of numerical modeling of Stefan's problem with explicit allocate of phase boundaries

Nesterenko Mykola Grigorovich

*Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor software of information and measuring equipment
Ukrainian State University of Chemical Technology, 8 Gagarina Ave., Dnipro, Ukraine, 49005*

Nesterenko Alexander Ivanovich

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Professor of the Department of Energy
Ukrainian State University of Chemical Technology, 8 Gagarina Ave., Dnipro, Ukraine, 49005*

Sakhno Vyacheslav Mykolayovych

Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor.

Dnipro State Agrarian and Economic University, vul. Serhiy Yefremov 25, Dnipro, Ukraine, 49000

With the development of computer technology and progress in the field of modeling physical and chemical processes, methods of increasing the accuracy, as well as simplifying the algorithms and methods for calculating mathematical models, become especially relevant. This work is devoted to the Stefan problem, to which the problems of heat transfer with a liquid-solid phase transition and diffusion mass transfer with phase transformations in a solid (decomposition of solid solutions, deposition of diffusion protective coatings) are reduced. The features of numerical modeling of the Stefan problem in multiphase systems are considered. The possibilities and disadvantages of existing numerical methods for solving this problem are analyzed. Three new methods are proposed with the allocate of moving interphase boundaries, on which the grid function suffers a discontinuity of the first kind, which greatly simplify the algorithm for the numerical solution of this problem. The comparison of the proposed algorithms with each other and with existing numerical methods has been carried out on a model problem of reaction diffusion in a solid, which is the Stefan problem in multiphase systems by using boundary and initial conditions that allow its analytical solution. The simulation of two existing and three proposed methods shows that a) the equilibrium concentration method leads to significant errors in the early stages of the diffusion process. But over time, the general properties of diffusion processes lead to a reduction of these errors. Therefore, this method is proposed to calculate the final state of long-term diffusion processes; b) methods of linear interpolation and conserved gradient in practice are not inferior in accuracy to generally accepted methods and can be used to solve the Stefan problems in a multidimensional multiphase setting.

Keywords: *Stefan problem, numerical methods, phase boundary, difference scheme, explicit selection of a moving border.*

Упрощение методов численного моделирования задачи Стефана с явным выделением границ раздела фаз

Нестеренко Николай Григорьевич

к.ф.-м.н., доцент, доцент каф. программного обеспечения информационно-измерительной техники

Украинский государственный химико-технологический университет, пр. Гагарина 8, г. Днепр, Украина, 49005

Нестеренко Александр Иванович

д.ф.-м.н., профессор; профессор кафедры энергетики

Украинский государственный химико-технологический университет, пр. Гагарина 8, г. Днепр, Украина, 49005

Сахно Вячеслав Николаевич

к.ф.-м.н., доцент, доцент каф.

Днепровський державний аграрно-економічний університет, вул. Сергія Ефремова 25, м. Днепр, Україна, 49000

С развитием вычислительной техники и прогрессом в области моделирования физико-химических процессов особую актуальность приобретают способы повышения точности, а также упрощения алгоритмов и методов расчета математических моделей. Данная работа посвящена проблеме Стефана, к которой сводятся задачи теплопереноса с фазовым переходом жидкость - твердое тело и диффузионного массопереноса с фазовыми превращениями в твердом теле (распад твердых растворов, нанесения диффузионных защитных покрытий). Рассмотрены особенности численного моделирования задачи Стефана в многофазных системах. Проанализированы возможности и недостатки существующих численных методов решения этой задачи. Предложено три новых метода с выделением подвижных межфазных границ, на которых сеточная функция терпит разрыв первого рода, которые существенно упрощают алгоритм численного решения этой задачи. Сравнение предложенных алгоритмов между собой и с существующими численными методами проводилось на модельной задаче реакционной диффузии в твердом теле, представляющей собой задачу Стефана в многофазных системах с использованием граничных и начальных условий, допускающих ее аналитическое решение. Проведенное моделирование двух существующих и трех предложенных методов показало, что а) метод равновесной концентрации приводит к значительным ошибкам на ранних стадиях диффузионного процесса. Но со временем общие свойства диффузионных процессов прозводит к уменьшению этих ошибок. Поэтому этот метод предлагается для расчета конечного состояния длительных диффузных процессов; б) методы линейной интерполяции и сохраняющегося градиента практически не уступают по точности общепринятым методам и могут быть использованы для решения задач Стефана в многомерной многофазной постановке.

Ключевые слова: *задача Стефана, численные методы, граница раздела фаз, разностная схема, явное выделение подвижной границы.*

1. Вступ

Сучасний стан обчислювальної техніки і вдосконалення методів обчислювальної математики відкриває нові можливості використання різних математичних моделей процесів і систем. До переваг моделювання можна віднести простоту зміни параметрів процесів, що протікають, та

відсутність складних умов експеримента і матеріальних витрат на унікальне експериментальне обладнання і матеріали.

Перспективним напрямком в моделюванні можна вважати математичні моделі, що базуються на побудованих відповідних фізичних механізмах процесів, що протікають. Ясно, що будь-яка фізична модель істотно відрізняється від реальної системи і є її деяким спрощенням. Тому, на першому етапі побудови математичної моделі необхідно з усієї сукупності процесів і зв'язків, що існують в даній реальній системі, виділити ті, які визначають її подальшу еволюцію і кінцевий стан. Далі, записати систему рівнянь, що описують виділені процеси і зв'язки, і вибрати методи дослідження отриманої моделі.

Дослідження працездатності в агресивних середовищах жароміцних конструкційних матеріалів з нанесеними різними захисними покриттями - оптимальний об'єкт математичного моделювання. Дороге устаткування, тривалість експериментів і екстремальні умови їх проведення підкреслюють основні переваги математичного моделювання.

З точки зору фізичного моделювання в ланцюжку процесів, що протікають в системі "метал основи - елемент насичення", лімітуючим (найповільнішим) процесом є дифузія елемента насичення в металі основи і у всіх шарах інтерметаллідних фаз системи "метал основи - елемент насичення", що утворилися. Причому, в загальному випадку, в результаті реакційної дифузії всі наявні міжфазні границі рухаються. Рухливість міжфазних границь призводить до еволюції області рішення задачі, що веде до значних математичних труднощів і включає цей клас задач в розділ математичної фізики, який називається - "проблема Стефана".

2. Постановка задачі

Розглянемо одновимірну модельну задачу Стефана для випадку дифузійного насичення матриці металу основи **A** елементом насичення **B** з урахуванням: а) появи в складі дифузійного покриття всіх (або декількох) шарів фаз бінарної діаграми стану системи **A-B**, б) еволюції міжфазних границь в процесі насичення.

Принципова схема розподілу концентрації елемента насичення **B** у матриці металу основи **A** (для трифазної системи $Q = 3$) приведена на рис 2.1.

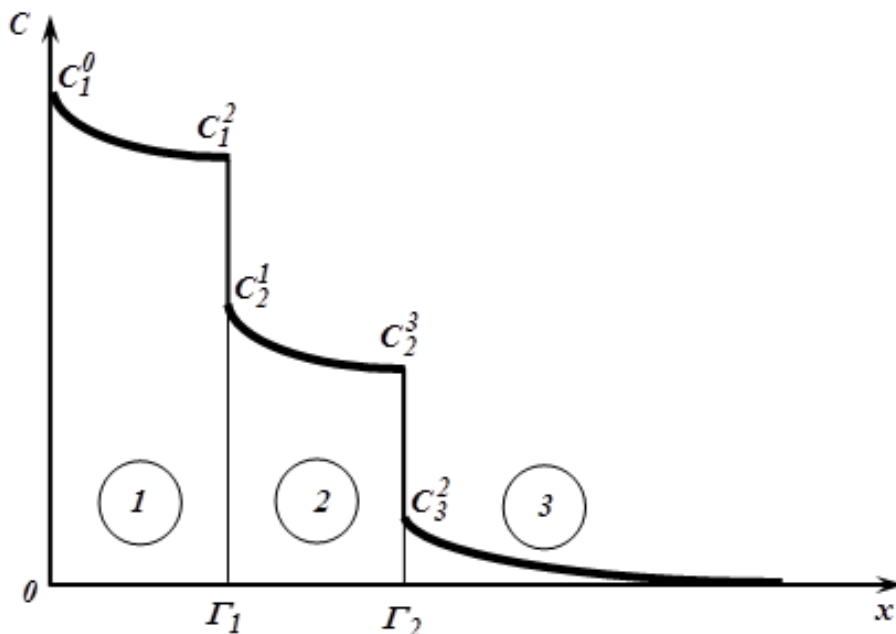


Рис. 2.1. Розподіл концентрації для трифазної системи

Дифузійні процеси в кожній з фаз описуються рівняннями:

$$\frac{\partial C_q}{\partial t} = D_q \frac{\partial^2 C_q}{\partial x^2}; \quad q = 1, 2, \dots, Q; \quad \Gamma_{q-1} \leq x \leq \Gamma_q; \quad (2.1)$$

$$\Gamma_0 \equiv 0; \quad \Gamma_Q \equiv l.$$

Де C_q - концентрація елемента насичення в q фазі;

q - номер фази, (відлік починається від поверхні $x = 0$);

D_q - коефіцієнт дифузії елемента насичення в q фазі;

Γ_q у Γ_{q-1} - координати q і $(q-1)$ міжфазних границь, відповідно;

Кожному конкретному способу дифузійного насичення відповідають конкретні крайові умови (початковий розподіл елемента насичення в металі основи, умови взаємодії на зовнішніх границях, геометрія зразка), які в загальному вигляді запишуться:

$$C(x, 0) = \varphi(x). \quad (2.2)$$

$$C_1(\Gamma_0) = f(t). \quad (2.3)$$

$$C_Q(\Gamma_Q) = \Phi(t). \quad (2.4)$$

На рухомих міжфазних границях q фази, відповідно до діаграми стану бінарної системи **A-B**, підтримуються рівноважні концентрації C_q^{q-1} і C_q^{q+1} , тобто виконуються граничні умови:

$$C_q(\Gamma_{q-1}, t) = C_q^{q-1}; \quad q = 2, 3, \dots, Q. \quad (2.5)$$

$$C_q(\Gamma_q, t) = C_q^{q+1}; \quad q = 1, 2, \dots, Q-1. \quad (2.6)$$

Все дифузійні процеси в багатофазній системі взаємопов'язані, так як на кожній рухомій границі, що розділяє q і $q+1$ фази, має виконуватися умова балансу маси:

$$-D_q \frac{\partial C_q}{\partial x} \Big|_{\Gamma_q} = -D_{q+1} \frac{\partial C_{q+1}}{\partial x} \Big|_{\Gamma_q} + (C_q^{q+1} - C_q^q) \frac{\partial \Gamma_q}{\partial t}, \quad (2.7)$$

Аналитичне рішення задачі (2.1) - (2.7) можна отримати [1] тільки при ідеалізованих умовах: а) напівнескінченної дифузійної зони; б) сталості граничних концентрацій і коефіцієнтів дифузії всередині фаз; в) миттєвого встановлення на поверхні насичення сталого значення концентрації елемента насичення; г) простого початкового розподілу концентрації типу $C(x, 0) = C_0 = const$.

На практиці ці ідеалізовані умови ніколи не виконуються. Відмова ж хоча б від одного з цих обмежень унеможливує отримання аналітичного рішення задачі (2.1) - (2.7). Більш повне урахування реальних крайових умов дифузійного експерименту стає можливим лише шляхом використання чисельних методів.

Чисельні методи для вирішення задачі Стефана з вільною (невідомою) межею [2] пов'язано з використанням двох класів методів. До першого класу відносять методи з виділенням границі розділу фаз (variable domain methods). До другого класу відносять [3] методи наскрізного розрахунку без виділення границі розділу фаз (fixed domain methods).

Кожен з цих методів має свої недоліки і переваги. Тому, в залежності від вимог до точності і простоти рішень, наочності їх подання, можна використовувати ті чи інші методи. Якщо в задачі немає необхідності точно визначити положення міжфазної границі і кінетику її руху, то методи наскрізного розрахунку дадуть можливість спростити алгоритм розрахунку і отримати прийнятний результат (зазвичай цей клас методів застосовується при розрахунку теплофізичних задач зі зміною агрегатного стану речовини: промерзання, кристалізація, плавлення). Однак, в разі реакційної дифузії, «розмазана» по деякому просторовому навколограничному інтервалу сіткова функція, яка на границі розділу фаз має розрив першого роду (на кожній рухомій міжфазній границі існує стрибок рівноважної концентрації дифузанта $\Delta C = C_q^{q+1} - C_q^q$, рис.2.1), не дозволяє точно визначити положення міжфазних границь. Тому неможливо використовувати

подібні методи як інструмент дослідження кінетики дифузійних процесів і фазових перетворень в таких системах.

Використання методів математичного моделювання для дослідження еволюції багатофазних дифузійних систем вимагає знання кінетики руху міжфазних границь, зміни товщини фаз, появи нових фаз і розчинення існуючих, тобто знання точного положення міжфазних границь в кожен момент часу.

Цим вимогам задовольняють лише методи з явним виділенням границі розділу фаз.

Існує думка, що методи з виділенням границі розділу фаз відрізняються складними алгоритмами і вимагають великих обчислювальних витрат. Однак сучасні персональні комп'ютери навіть середнього класу практично усувають проблему обчислювальних витрат. Складнощі ж алгоритму можна розбити на два типи:

а) складність відстеження форми границі розділу фаз (це стосується двох- і тривимірних задач);

б) складність визначення граничної умови крайової задачі всередині окремої фази через рухливості міжфазних границь.

З точки зору висунутих вимог розглянемо методи, які найбільш часто використовуються, До них відносяться: методи лову границі у вузол сітки, методи динамічної сітки (випрямлення фронту), метод подрібненого кроку по часу, метод допоміжної сітки.

Метод лову границі у вузол сітки [4] не має ніяких перерахованих складнощів і дуже економічний, але вимагає змінних за часом кроків, що робить його непридатним до багатовимірних і багатофазних задач, так як неможливо «зловити» в вузли сітки всі межі фаз одночасно.

Метод динамічної сітки [5] в разі багатофазних задач вимагає введення адаптаційної сітки з незмінним числом вузлів в межах однієї фази і подальшої інтерполяції сіткової функції в нові регулярні вузли рівномірної сітки. Це призводить до алгоритмічних складнощів і значним обчислювальним витратам.

Метод подрібненого кроку по часу має такі недоліки. Через подрібнений крок по часу, введення якого потрібно при кожному перетині рухомою границею регулярного вузла, ускладнюється алгоритм [6] обчислення граничної умови на новому часовому шарі, а також втрачається точність розрахунку сіткової функції через різні величини кроків по часу, які використовуються в околиці рухомої границі і внутрішніх вузлів фази. Це призводить до принципових труднощів в багатовимірній постановці задачі.

Комбінація методів подрібненого кроку по часу і динамічної сітки, наведена в [7], відрізняється складним алгоритмом реалізації розрахунків.

Метод допоміжної сітки [8], вирішує перераховані труднощі, але введення допоміжної сітки для точного визначення граничної умови на рухомій міжфазній границі веде до алгоритмічної складності методу.

Розглянемо можливість рішення поставленої задачі (2.1) - (2.7) з використанням більш економічної схеми.

3. Спрощення алгоритма рішення задачі Стефана.

Основні труднощі чисельних методів для вирішення задачі Стефана з явним виділенням границі розділу фаз на фіксованій рівномірної сітці полягає в тому, що при перетині міжфазною границею регулярного вузла ip' сітки в ньому не визначена сіткова функція, як на новому $C_q(ip', n+1)$, так і на старому $C_q(ip', n)$ часовому шарі (рис.3.1.).

Всі перераховані вище методи з явним виділенням границі розділу фаз дають можливість записати граничну умову (2.7) поблизу рухомої границі на новому $(n+1)$ часовому шарі з різним ступенем точності і різною можливістю адаптації до багатовимірних випадків

У даній роботі запропоновано три спрощених способи вирішення цієї проблеми, що дозволяють отримати рішення задачі Стефана в багатовимірній багатофазній постановці і, як буде показано нижче, з достатнім ступенем точності.

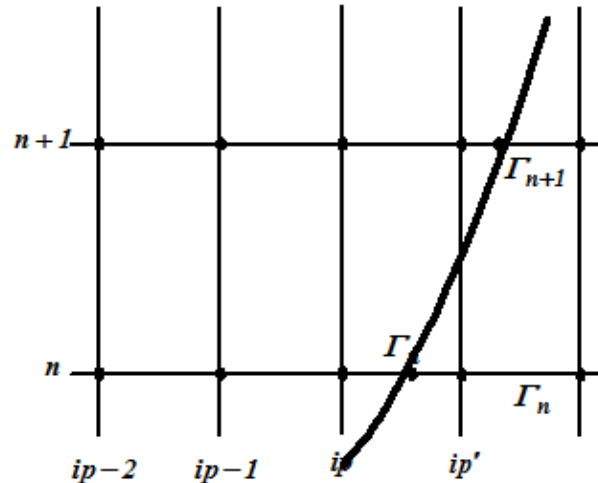


Рис.3.1 Поява нового регулярного вузла сітки у фазі

3.1. Метод рівноважної концентрації.

На протязі одного кроку по часу відбувається незначна зміна величини концентрації в вузлах сітки, то, в разі перетину границею вузла просторової сітки, можна вважати значення концентрації у вузлі, що з'явився, рівним рівноважній концентрації на цій міжфазній границі (рис. 3.1):

$$C^{n+1}(ip') = C_q^{q+1} \quad (3.1)$$

Отже, значення концентрації у вузлі ip' на новому $(n+1)$ часовому шарі виявляється відомим, і ми отримуємо граничну умову першого роду на цій міжфазній границі. Метод прогонки дозволяє знайти в даній фазі всі інші значення концентрацій у вузлах регулярної сітки на новому часовому шарі. Простота граничних умов спрощує алгоритми розрахунків і дозволяє використовувати цей метод для багатозначних багатовимірних задач.

Його недоліком є той факт, що при розрахунку положення границі розділу фаз на новому $(n+1)$ часовому шарі градієнт концентрації на рухомій границі в тій фазі, де з'явився новий регулярний просторовий вузол виявляється рівним нулю і границя буде на $n+2$ часовому шарі зміщуватися в зворотну сторону (зворотний рух). На наступних кроках по часу правильний рух границі відновлюється. Така помилка буде систематично спостерігатися при кожному перетині границею розділу фаз просторового вузла регулярної сітки, що призводить до накопичення помилки обчислення при визначенні положення границі розділу фаз.

3.2. Метод градієнта, що зберігається

Для зменшення помилок при визначенні положення міжфазної границі приймемо значення концентрації у вузлі ip' що з'явився, таким, щоб градієнт концентрації на міжфазній границі $(n+1)$ -го часового шару дорівнював би градієнту концентрації на цій границі n -го часового шару. Це приводить до наступного співвідношення:

$$\frac{C_q^{q+1} - C^{n+1}(ip')}{\Gamma_q(n+1) - ip'} = \frac{C_q^{q+1} - C^n(ip)}{\Gamma_q(n) - ip} \quad (3.2)$$

Елементарні перетворення дозволяють розрахувати значення концентрації у вузлі ip' на новому $(n+1)$ часовому шарі:

$$C^{n+1}(ip') = C_q^{q+1} + [C^n(ip) - C_q^{q+1}] \cdot \frac{\Gamma_q(n+1) - ip'}{\Gamma_q(n) - ip} \quad (3.3)$$

Якщо врахувати, що протягом одного кроку по часу границя не повинна перетинати більше одного просторового вузла: $(\Gamma_q(n+1) < \Gamma_q(n) + 1)$, то, вочевидь, множник $\frac{\Gamma_q(n+1) - ip'}{\Gamma_q(n) - ip}$ завжди буде менше 1.

Таким чином, отримуємо значення концентрації у вузлі ip' на новому часовому шарі, тобто приходимо до граничної умови першого роду на цій міжфазній границі. Даний метод, як і попередній, не вимагає подрібнення просторових і часових кроків і тому також може бути використаний для багатофазних багатовимірних задач.

3.3 Метод лінійної інтерполяції.

Так як на протязі одного кроку по часу зміщення границі розділу фаз не повинно перевищувати величину просторового кроку сітки, то граничну умову методу прогонки можна отримати, якщо записати рівняння лінійної інтерполяції значення концентрації у вузол ip' , що з'явився на новому $(n+1)$ часовому шарі.

$$C^{n+1}(ip') = C_q^{q+1} + [C^{n+1}(ip) - C_q^{q+1}] \cdot \frac{\Gamma_q(n+1) - ip'}{\Gamma_q(n+1) - ip} \quad (3.4)$$

Значення концентрації на границі C_q^{q+1} відоме і рівняння (3.11) буде пов'язувати концентрації в регулярних вузлах ip' , ip на новому часовому шарі, тобто буде граничною умовою методу прогонки. Після нескладних перетворень, приходимо до виразу:

$$C^{n+1}(ip') = \frac{C_q^{q+1}}{\Gamma_q(n+1) - ip} + C^{n+1}(ip) \cdot \frac{\Gamma_q(n+1) - ip'}{\Gamma_q(n+1) - ip}$$

Цей метод позбавлений зворотного руху границі розділу фаз на $n+2$ часовому шарі і, так як ніяких подрібнення просторового або часового кроку не потрібно, може бути використаний для багатофазних багатовимірних задач.

Необхідно відзначити, що лінійна інтерполяція значення концентрації у вузол ip' завжди буде давати невелике завищення значення концентрації в порівнянні з аналітичним рішенням. Це пов'язано з тим, що реальний розподіл концентрацій є увігнутою функцією координат, і будь-яка лінійна інтерполяція в середину відрізка завжди дає трохи завищене значення.

Помилка, пов'язана з такою поведінкою функції розподілу концентрації, виникає і при обчисленні градієнтів концентрації на рухомих границях розділу фаз. Ці системні помилки обчислення градієнтів носять такий характер, що призводять до збільшення швидкості руху границі (рис. 3.2).

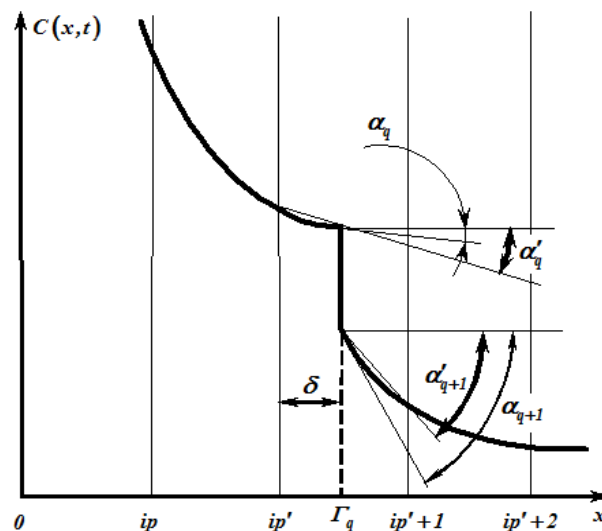


Рис.3.2 Помилки апроксимації градієнту увігнутої функції

На рис. 3.2 α_q, α_{q+1} - це аналітичні значення кутів нахилу дотичних на міжфазній границі в точках $x = \Gamma_{-0}$ і $x = \Gamma_{+0}$, відповідно. А α'_q, α'_{q+1} - значення кутів нахилу відрізків на міжфазній границі, які використовуються в процесі різницевої апроксимації градієнтів. Ясно, що завжди будуть виконуватися нерівності: $\alpha'_q > \alpha_q$ і $\alpha'_{q+1} < \alpha_{q+1}$. Тобто в результаті різницевої апроксимації потік дифузанта до міжфазної границі буде завжди більше істинного. З тієї ж причини потік дифузанта від міжфазної границі буде завжди менше істинного.

Згодом, коли реальний розподіл концентрації дифузанта наближається до лінійного, помилки обчислення градієнтів зменшуються, а швидкість руху границі розділу фаз, буде наближатися до аналітичного значенням.

Останнє зауваження стосується всіх без винятку чисельних методів рішення задачі Стефана з явним виділенням границі розділу фаз. Тому підвищення точності визначення градієнтів концентрації на міжфазній границі (з урахуванням зроблених зауважень) вимагає окремого розгляду

4. Порівняння точності запропонованих спрощених методів

Аналітичні рішення [1] показують, що при постійній концентрації дифузанта на зовнішній поверхні металу основи границя розділу фаз рухаються по параболічному закону ($\Gamma = 2\beta\sqrt{t}$, $\beta = const$ - параметр, що визначає положення рухомої границі) і швидкість руху зменшується обернено пропорційно \sqrt{t} .

В якості тестового прикладу розглядалася дифузійна задача про насичення напівнескінченної матриці **A** деяким елементом **B** з утворенням двох фаз, тобто з однією рухомою границею. Вихідні дані задачі мали такі значення:

$$C_1^0 = 30; C_1^2 = 20; C_2^1 = 10; C_2^3 = 0; C(x, 0) = 0;$$

$$D_1 = 2,3; D_2 = 0,992.$$

Таке формулювання задачі Стефана допускає аналітичне рішення. Згідно аналітичному [1] рішенню задачі (2.1) - (2.7) можна отримати параметр, який визначає положення рухомої границі (в цьому прикладі дорівнює $\beta = 0.61477$). Для того, щоб при чисельних розрахунках уникнути математичних складнощів в початковий $t = 0$ момент часу, в якості початкового моменту вибирали момент $t = 25$, для якого за аналітичними формулами розраховували положення границі розділу фаз і розподіл концентрації в фазах. Використовуючи ці розрахунки як початкову умову, було проведено чисельне моделювання. Результати моделювання наведені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 Залежність положення міжфазної границі від часу

Час	Аналітика	Допоміжна сітка	Подрібнений крок по часу	Лінійна інтерполяція	Рівноважна концентрація	Градієнт, що зберігається
27	6,38888	6,41759	6,41759	6,41759	6,41759	6,41759
29	6,62128	6,65574	6,65574	6,65574	6,65574	6,65574
31	6,84579	6,88542	6,88542	6,88542	6,88542	6,88542
35	7,27406	7,32465	7,32469	7,33931	6,76828	7,35341
39	7,67847	7,73577	7,73579	7,74369	6,86492	7,75132
45	8,24801	8,32348	8,32351	8,34180	7,41147	8,35957
53	8,95119	9,03088	9,03091	9,04196	8,03941	9,05272
65	9,91287	10,00612	10,00613	10,01485	9,24215	10,02338
81	11,06586	11,17781	11,17782	11,19121	9,90947	11,19824
105	12,59904	12,71959	12,71960	12,73183	11,52313	12,73947
137	14,39140	14,52808	14,52809	14,53759	13,12185	14,54092
183	16,63291	16,78034	16,78035	16,78779	15,34942	16,79105

247	19,32374	19,48416	19,48417	19,49012	18,39198	19,49290
337	22,57135	22,74002	22,74003	22,74491	21,88442	22,74717
463	26,45655	26,63360	26,63360	26,63757	25,94208	26,63947
639	31,08086	31,26671	31,26671	31,26959	30,69900	31,27118
885	36,57752	36,76691	36,76691	36,76979	36,30402	36,77112
1229	43,10410	43,30026	43,30027	43,30240	42,91206	43,30379
1711	50,85898	51,05921	51,05922	51,06067	50,73288	51,06178
2387	60,07155	60,27497	60,27497	60,27628	60,00147	60,27748

Вочевидь, що всі наведені методи дають близькі результати, які мало відрізняються від аналітичного рішення. Для більш детального аналізу в табл.4. 2 наведені помилки $\Delta\Gamma$ кожного з методів:

$$\Delta\Gamma = \Gamma_p - \Gamma_a ,$$

де Γ_p - розрахункове положення міжфазної границі;

Γ_a -- аналітичне положення міжфазної границі.

Таблиця 4.2 Залежність помилки положення міжфазної границі від часу

Час	Допоміжна сітка ($\Delta\Gamma^1$)	Подрібнений крок по часу ($\Delta\Gamma^2$)	Лінійна інтерполяція ($\Delta\Gamma^3$)	Рівноважна концентрація ($\Delta\Gamma^4$)	Гradient, що зберігається ($\Delta\Gamma^5$)
27	0,02872	0,02872	0,02872	0,02872	0,02872
29	0,03446	0,03446	0,03446	0,03446	0,03446
31	0,03963	0,03963	0,03963	0,03963	0,03963
35	0,05060	0,05064	0,06525	-0,50578	0,07935
39	0,05729	0,05731	0,06522	-0,81355	0,07284
45	0,07547	0,07551	0,09380	-0,83654	0,11156
53	0,07970	0,07972	0,09078	-0,91178	0,10154
65	0,09325	0,09327	0,10198	-0,67072	0,11052
81	0,11195	0,11196	0,12535	-1,15639	0,13238
105	0,12055	0,12056	0,13280	-1,07590	0,14043
137	0,13669	0,13670	0,14619	-1,26955	0,14952
183	0,14743	0,14744	0,15488	-1,28349	0,15814
247	0,16043	0,16043	0,16638	-0,93176	0,16916
337	0,16867	0,16867	0,17355	-0,68694	0,17582
463	0,17705	0,17705	0,18103	-0,51446	0,18293
639	0,18584	0,18584	0,18872	-0,38187	0,19032
885	0,18939	0,18939	0,19227	-0,27350	0,19360
1229	0,19616	0,19616	0,19830	-0,19204	0,19969
1711	0,20023	0,20023	0,20169	-0,12611	0,20280
2387	0,20341	0,20341	0,20473	-0,07008	0,20593

На рис.4.1(а) побудовані графіки залежності помилки визначення положення міжфазної границі від часу (для всіх методів, що були розглянуті), а на рис.4.1(б) приведені ці ж графіки у збільшеному масштабі для деталізації розбіжностей методів на початковому етапі дифузійного насичення матриці.

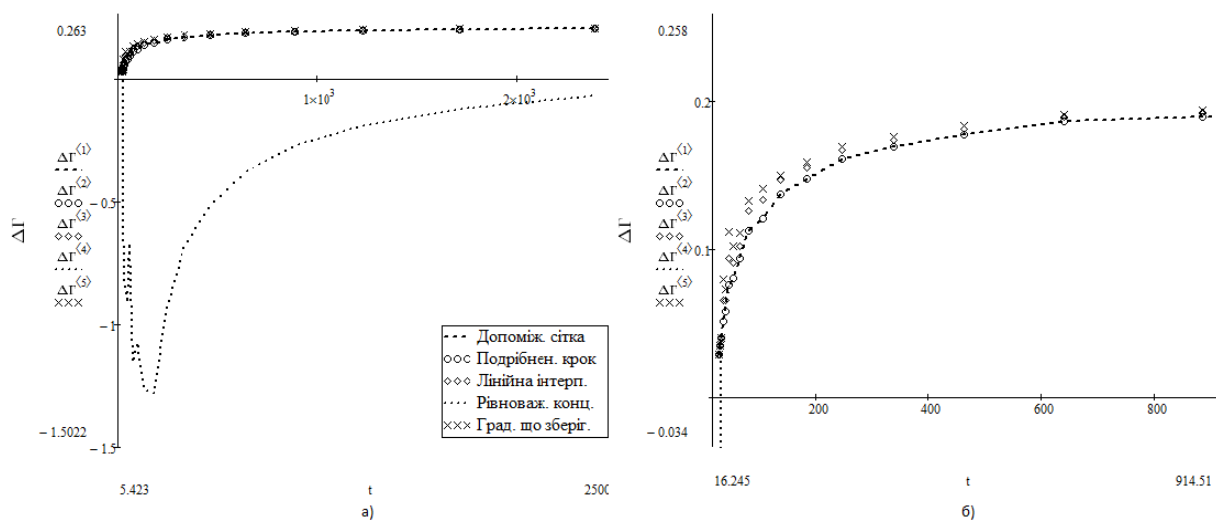


Рис.4.1 Залежність від часу помилок різних методів чисельних розрахунків

Всі методи, крім методу рівноважної концентрації, демонструють (рис.4.1) перевищення розрахованого значення положення границі розділу фаз над аналітичним значенням. На початковому етапі дифузійного насичення, коли увігнутість функції реального розподілу концентрацій значна, швидкість руху міжфазної границі велика, просторові вузли сітки перетинаються цією межею часто, метод рівноважної концентрації дає занижене значення положення міжфазної границі, що узгоджується з наведеними вище міркуваннями.

Решта методів демонструють (рис.4.1) практично однакову поведінку помилки визначення положення границі, що вказує на загальний механізм її виникнення, не пов'язаний зі способом обчислення граничної умови на рухомій границі при перетині нею просторового вузла сітки. Поведінка цих помилок з часом, повністю узгоджується із зауваженнями до рис. 3.2 . Можна припустити, що всі ці відхилення викликані систематичними помилками обчислення градієнтів концентрації на рухомих кордонах.

5. Висновки

1. При чисельному моделюванні довготривалого процесу дифузійного насичення та великих розмірах дифузійної зони положення міжфазних границь визначається якістю моделювання дифузійних процесів у матриці та усуненням систематичних помилок математичної моделі. Методи визначення граничних умов чисельного моделювання на рухомих міжфазних границях за цих умов менше впливають на визначення поля концентрацій та положення цих границь.

2. Метод рівноважної концентрації, особливо спочатку дифузійного насичення (коли швидкості руху міжфазних границь великі), призводить до значних помилок у визначенні положення міжфазних границь, але з часом ці помилки зменшуються і сягають прийнятних значень ($\square 0,3\%$) для моментів часу $t = 1000$ або більше. Тому цей простий метод можна використовувати при вивченні кінцевих станів довготривалих дифузійних процесів.

3. Методи лінійної інтерполяції і градієнта, що зберігається, практично не поступаються по точності загальноприйнятим алгоритмам (помилка при порівнянні з аналітичним розрахунком складає $\square 0,3\%$) і можуть бути використані для рішення задач Стефана в багатовимірній багатофазній постановці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарський А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с. http://mat.net.ua/mat/Tihonov_Samarskiy-Marfizika.htm
2. Чеблакова Е. А. Моделирование конвекции в областях со свободными границами. *Вычислительные технологии*. 2000. Том 5, № 6. С.87-98. <https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-konveksii-v-oblastyakh-so-svobodnymi-granitsami>

3. Курбатова Г.И. О расчете оледенения поверхностей в морской воде. *Вестник Санкт-Петербургского университета серия «Прикладная математика. Информатика. Процессы управления»*. 2018. Т. 14, Вып. 3. С. 186–199. [in Russian] http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vspui&paperid=369&option_lang=us
4. Хасанов М.К., Столповский М.В. Численное решение задачи Стефана с несколькими границами фазовых переходов методом ловли фронта в узел сетки. *Фундаментальные исследования*. 2015. № 11-4. С. 748-752. [in Russian] <https://elibrary.ru/item.asp?id=25098376>
5. Королева О.Н., Мажукин В.И. Математическое моделирование лазерного плавления и испарения многослойных материалов. *ЖВМиМФ*. 2006. т.46, № 5. С. 910-924. [in Russian] <http://www.mathnet.ru/links/3dce284e6656ef1e1aafd2e7b16bcf40/zvmmf472.pdf>
6. Сафронов Д.И., Панов А.И., Самодолов А.В. Решение уравнения теплопроводности на неструктурированных сетках Дирихле с использованием экономичной схемы. *Вопросы атомной науки и техники, серия Математическое моделирование физических процессов*. 2009. вып. 4, С. 3-11. [in Russian] <https://elibrary.ru/item.asp?id=13918457>
7. Окулов Н.А. Об одном численном методе решения одномерных задач типа Стефана. *Вычислительные методы и программирование*, 2011, т. 12. С. 238-246. [in Russian] http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vmp&paperid=191&option_lang=rus
8. Kulikov S.I., Nesterenko A.I., Nesterenko N.G. The solution of the two-dimensional Stefan problem in a multiply connected domane. *Comput. Maths Math. Phys*, 1993.Vol. 33, No. 3. P. 365-375, http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=2746&option_lang=eng

REFERENCES

1. A.N. Tikhonov, A.A.Samarskiy. *Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka, 1977,755p. [in Russian] http://mat.net.ua/mat/Tihonov_Samarskiy-Marfizika.htm
2. E.A. Cheblakova. “Simulation of convection in regions with free boundaries”. *Computational technologies*. Vol. 5, no. 6. pp. 87-98, 2000. [in Russian] <https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-konveksii-v-oblastyah-so-svobodnymi-granitsami>
3. G.I. Kurbatova. “On the calculation of glaciation of surfaces in sea water”. *Bulletin of St. Petersburg University series “Applied Mathematics. Computer science. Management Processes ”*. Vol. 14, Iss. 3. pp. 186–199, 2018. [in Russian] http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vspui&paperid=369&option_lang=rus
4. M.K. Khasanov, M.V. Stolpovsky. “Numerical solution of the Stefan problem with several boundaries of phase transitions by the method of catching the front in a grid node”. *Fundamental research*. No. 11-4. pp. 748-752, 2015. [in Russian] <https://elibrary.ru/item.asp?id=25098376>
5. O.N. Koroleva, V. I.Mazhukin. “Mathematical modeling of laser melting and evaporation of multilayer materials”. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*vol. Vol. 46, No. 5. pp. 910-924, 2006. [in Russian] <http://www.mathnet.ru/links/3dce284e6656ef1e1aafd2e7b16bcf40/zvmmf472.pdf>
6. D.I. Safronov, A.I. Panov, A.V. Samodolov. “Solving the heat equation on unstructured Dirichlet grids using an economical scheme”. *Atomic Science and Technology Issues, series Mathematical modeling of physical processes*. No. 4, pp. 3-11, 2009. [in Russian] <https://elibrary.ru/item.asp?id=13918457>
7. N.A. Okulov. “On a numerical method for solving one-dimensional problems of the Stefan type”. *Computational Methods and Programming*, Vol. 12, pp. 238-246, 2011. [in Russian] http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vmp&paperid=191&option_lang=rus
8. S.I. Kulikov S.I., A.I. Nesterenko, N.G. Nesterenko. “The solution of the two-dimensional Stefan problem in a multiply connected domane”. *Comput. Maths Math. Phys*. Vol. 33, No. 3, pp. 365-375, 1993. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=2746&option_lang=eng

Наукове видання

**Вісник Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна**

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 52

Збірник наукових праць

Українською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О.О. Афанасьєва

Підписано до друку 29.11.2021 р.
Формат 60x84/8. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. – 9.
Обл.– вид. арк. – 11,3.
Наклад 50 пр. Зам. № 27/2021
Безкоштовно

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09

Видавництво Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
тел.: 705-24-32