

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Серія

«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 48

Серія заснована 2003 р.

BULLETIN

of V.N. Karazin Kharkiv National University

Series

«Mathematical Modeling.
Information Technology.
Automated Control Systems»

Issue 48

First published in 2003

Харків
2020

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Наказом Міністерства освіти і науки України від 17.03.2020 № 409 наукове фахове періодичне видання Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» включено до Категорії «Б» Переліку наукових фахових видань України за наступними спеціальностями: 113 – Прикладна математика; 122 – Комп'ютерні науки та інформаційні технології; 123 – Комп'ютерна інженерія; 125 – Кібербезпека.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 19 від 28.12.2020 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),

д.ф.-м.н., академік НАН України, проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора), д.т.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т. (заст. гол. редактора), д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Споров О.Є. (відповідальний секретар), к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Замула О. А., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ імені Б.І. Веркіна НАН України

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Рассомахін С. Г., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В. Н. Каразіна

Стервєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Толстолузька О. Г. д.т.н., с.н.с., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Угрюмов М. Л., д.т.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"

Стрельнікова О.О., д.т.н., проф. Ін-т проблем машинобудування НАН України

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра прикладної інформатики, університет імені Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Professor of Technical Informatics and Computer Systems, Institute of Informatics, Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of computer science, Dep. of C. S., University of Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Мова публікації: українська, англійська, російська.

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

The articles are present research in the field of mathematical modeling and computing methods, information technologies, information security. New mathematical methods of research and management of physical, technical and information processes, research on programming and computer modeling in science-intensive technologies are covered.

For teachers, researchers, graduate students working in relevant or related fields.

By the order of the Ministry of Education and Science of Ukraine from 17.03.2020 № 409 scientific professional periodical Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University series "Mathematical modeling. Information Technologies. Automated control systems" is included in Category "B" of the List of scientific professional publications of Ukraine in the following specialties: 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science and Information Technology; 123 – Computer engineering; 125 – Cybersecurity.

Approved for publication by the decision of the Academic Council of V.N. Karazin Kharkiv National University (Minutes № 19 of 28.12.2020).

Editorial Board:

Azarenkov M.O. (Chief Editor), Acad. Of the NAS of Ukraine, Dr. Sc., Prof., HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Zholtkevich G.M. (Deputy Editor), Dr. Sc, Prof. MCS V.N. Karazin Kharkiv National University

Lazurik V.T. (Deputy Editor), Dr. Sc, Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Sporov O.E., (Executive Secretary), Ph.D. Assoc. Prof, CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Zamula A.A., Ph.D. Assoc. Prof, CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Zolotarev V.A., Dr. Sc, Prof. B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine

Kuklin V.M., Dr. Sc, Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Matsevity Yu.M., Acad. Of the NAS of Ukraine, Dr. Sc., Prof., DPE V.N. Karazin Kharkiv National University

Rossomakhin S.G., Dr. Sc, Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Rutkas A.G., Dr. Sc, Prof. MCS V.N. Karazin Kharkiv National University

Styervoyedov N.G., Ph.D. Assoc. Prof, CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Tolstoluzka O.G., Dr. Sc, Assoc. Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Ugryumov M.L., Dr. Sc, Prof. HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Tseluyko A.F., Ph.D. Prof, HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Sheyko T.I., Dr. Sc, Prof. DPE V.N. Karazin Kharkiv National University

Shmatkov S.I., Dr. Sc, Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Shcherbina V.A., Dr. Sc, Prof. MCS V.N. Karazin Kharkiv National University

Raskin L.G., Dr. Sc, Prof. National Technical University "Kharkiv Polytechnic institute"

Strelnikova E.A., Dr. Sc, Prof., NASU A. Pidgorny Institute of Engineering Problems

Sokolov O.Yu., Dr. Sc, Prof. Nicolaus Copernicus University, Torun, Poland

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Professor of Technical Informatics and Computer Systems, Institute of Informatics, Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of computer science, Dep. of C. S., University of Nice-Sophia Antipolis, France

Editorial Address: 61022, Kharkiv, Svobodi sq., 6, V.N. Karazin Kharkiv National University, r. 534.

Phone. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Language of publication: Ukrainian, English, Russian.

The articles pass internal and external review.

Certificate of state registration: KV № 21578-11478P dated 18.08.2015

ЗМІСТ

▪ І.О. Верушкін, О.О. Стрельнікова	6
Метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь в задачі визначення частот та форм коливань круглої пластинки, зануреної в рідину	
▪ К.Г. Дегтярьов, В.І. Гнітько, А.М. Тонконоженко	22
Метод скінченних елементів при визначенні руйнівного навантаження на перфоровану оболонку при короткочасних силових впливах	
▪ М.В. Демидюк, В.М. Демидюк	36
Параметрична оптимізація кінематичної структури та руху дволанкового маніпулятора	
▪ А.А. Захарова, Н.М. Кізілова	49
Дослідження кореляцій динаміки захворювання на COVID-19 з деякими соціально-економічними факторами	
▪ Л.М. Козачок, О.Ю. Лісіна	57
Моделювання нечітких процесів управління транспортними системами пасажирських перевезень	
▪ В.В. Костецька, Н.М. Кізілова	65
Математичне моделювання динаміки пандемії COVID-19	
▪ І.А. Отлев, Г.М. Жолткевич	72
Дескриптивні моделі детермінованих систем	
▪ О.О. Стрельнікова, О.О. Усатова	81
Моделювання руху рідини в циліндричних оболонках	
▪ М.Г. Стервосдов, В.Л. Терьохін	89
Розробка мережевої інфраструктури IoT на базі сенсорної мережі розподілених датчиків для вимірювання радіаційного забруднення з використанням багаторівневої архітектури	

CONTENTS

▪ I. Vierushkin, E. Strelnikova	6
Hipersingular integral equation method in numerical simulating frequencies and modes of circular plate immersed into liquid	
▪ K. Degtyarev, V. Gnitko, A. Tonkonozhenko	22
Finite element method in determining the destructive load on the perforated shell under short-term forces	
▪ M. Demydyuk, V. Demydiuk	36
Parametric optimization of the kinematic structure and the movement of the two-link manipulator	
▪ A. Zakharova, N. Kizilova	49
Study of correlations of COVID-19 dynamics with social-economic factors	
▪ L. Kozachok, O. Lisina	57
Modeling fuzzy management processes of passenger transport systems	
▪ V. Kostetska, N. Kizilova	65
Mathematical modeling of the dynamics of the COVID-19 pandemic	
▪ I. Otlev, G. Zholtkevych	72
Descriptive models of the determined systems	
▪ O. Strelnikova, O. Usatova	81
Simulation of liquid movement in cylindrical shells	
▪ M. Stervoyedov, V. Terokhin	89
Development of an IoT network infrastructure based on a sensor network of distributed sensors for measuring radiation pollution using a multi-level architecture	

УДК 593.

The hypersingular integral equation method in the problem of determination of vibration modes and frequencies of a circular plate immersed in a liquid

I.A. Vierushkin, E.A. Strelnikova

Vierushkin Ivan

PhD student

A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NASU, Pozharsky, st. 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine

e-mail: ivanveruskin86@gmail.com;

<http://orcid.org/0000-0002-3837-5567>

Strelnikova Elena

DSc, Prof, leading researcher

A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NASU, Pozharsky, st. 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine

e-mail: elena15@gmx.com;

<http://orcid.org/0000-0003-0707-7214>

The new approach for studying the vibration modes and frequencies of a circular plate immersed in a liquid has been developed. The approach is based on the use of hypersingular integral equations and the assumed mode method. It is assumed that a round thin elastic plate is immersed in an ideal incompressible fluid, and its motion is considered to be irrotational. Under these conditions, there is a velocity potential that satisfies the Laplace equation everywhere outside the plate, and the no-flow condition is satisfied for the plate surface. The fluid pressure has been determined by using the linearized Cauchy-Lagrange integral. For solving the boundary value problem with regard to the velocity potential, an integral representation in the form of a double layer potential has been used, the potential density being proportional to the fluid pressure drop. The assumed mode method makes it possible to reduce the problem of determining the added masses of a liquid to solving hypersingular equations on a circular domain. The two-dimensional hypersingular integral equations have been reduced to one-dimensional ones. Therefore, the inner integrals take the form of elliptic integrals of the second kind without singularities. To calculate the external integral, which exists only in the sense of Hadamard, the boundary element method is proposed. A procedure for calculating the matrix elements of a system of linear algebraic equations for determining the density of the double layer potential has been developed. A numerical solution of the hypersingular integral equation has been obtained, and a comparison of the numerical and analytical solutions has been carried out. The right-hand sides of hypersingular integral equations are the modes of vibrations of a rigidly fixed circular plate, which are obtained analytically. A technique for calculating the matrix of added masses has been developed, which makes it possible to reduce the considered problem to solving the problem of eigenvalues.

Key words: *thin plate, perfect incompressible fluid, vibration, hypersingular integral equation, boundary element method*

Метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь в задачі визначення частот та форм коливань круглої пластинки, зануреної в рідину

I.O. Verushkin, O.O. Strelnikova

**Верушкін Іван
Олексійович**

аспірант

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, вул.

Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна

e-mail: ivanveruskin86@gmail.com;

<http://orcid.org/0000-0002-3837-5567>

**Стрельнікова Олена
Олександрівна**

д.т.н., проф. провідний науковий співробітник

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, вул.

Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна

e-mail: elena15@gmx.com;

<http://orcid.org/0000-0003-0707-7214>

Для дослідження частот та форм коливань круглої пластинки, що занурена в рідину, розроблено новий підхід, заснований на застосуванні гіперсингулярних інтегральних рівнянь та методу заданих форм. Припускається, що кругла тонка пружна пластина занурена в ідеальну нестисливу рідину, рух якої вважається безвихровим. В цих умовах існує потенціал швидкостей, що задовольняє рівнянню Лапласа всюди за межами пластини, а на поверхні пластини виконується умова непротікання. Тиск рідини визначено з лінеаризованого інтегралу Коші-Лагранжа. При розв'язанні крайової задачі щодо потенціалу швидкостей використано інтегральне зображення у вигляді потенціалу подвійного шару, при цьому густина потенціалу пропорційна перепаду тиску рідини. Використання методу заданих форм дозволило звести задачу визначення приєднаних мас рідини до розв'язання гіперсингулярних рівнянь на круговій

області. Здійснено зведення двовимірних гіперсингулярних інтегральних рівнянь до одновимірних. Внутрішні інтеграли при цьому набувають форму еліптичних інтегралів другого роду, що не мають особливостей. Для обчислення зовнішнього інтегралу, який існує лише в сенсі Адамара, запропоновано використати метод граничних елементів. Розроблено процедуру обчислення елементів матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомої густини потенціалу подвійного шару. Здійснено розв'язок гіперсингулярного рівняння та наведено порівняння числових та аналітичних розв'язків. Праві частини гіперсингулярних інтегральних рівнянь є формами коливань жорстко закріпленої круглої пластини, які отримані аналітичним шляхом. Розроблено методику обчислення матриці приєднаних мас, що дозволило звести задачу, що розглядається, до розв'язання проблеми власних значень.

Ключові слова: тонка пластина, ідеальна нестислива рідина, коливання, гіперсингулярне інтегральне рівняння, метод граничних елементів.

Метод гиперсингулярных интегральных уравнений в задаче определения частот и форм колебаний круглой пластины, погруженной в жидкость

И. А. Верушкин, Е. А. Стрельникова

**Верушкин Иван
Алексеевич**

аспирант

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина
e-mail: ivanveruskin86@gmail.com;
<http://orcid.org/0000-0002-3837-5567>*

**Стрельникова Елена
Александровна**

Д.т.н., проф., ведущий научный сотрудник

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина
e-mail: elenal5@gmx.com;
<http://orcid.org/0000-0003-0707-7214>*

Для исследования частот и форм колебаний круглой пластинки, погруженной в жидкость, разработан новый подход, основанный на применении гиперсингулярных интегральных уравнений и метода заданных форм. Предполагается, что круглая тонкая упругая пластина погружена в идеальную несжимаемую жидкость, движение которой считается безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей, который удовлетворяет уравнению Лапласа всюду вне пластины, а на поверхности пластины выполняется условие непротекания. Давление жидкости определено с помощью линеаризованного интеграла Коши-Лагранжа. При решении краевой задачи относительно потенциала скоростей использовано интегральное представление в виде потенциала двойного слоя, при этом плотность потенциала пропорциональна перепаду давления жидкости. Использование метода заданных форм позволило свести задачу определения присоединенных масс жидкости к решению гиперсингулярных уравнений на круговой области. Осуществлено сведение двумерных гиперсингулярных интегральных уравнений к одномерным. Внутренние интегралы при этом приобретают форму эллиптических интегралов второго рода, не имеющих особенностей. Для вычисления внешнего интеграла, который существует только в смысле Адамара, предложено использовать метод граничных элементов. Разработана процедура вычисления элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестной плотности потенциала двойного слоя. Получено численное решение гиперсингулярного интегрального уравнения, и проведено сравнение численного и аналитического решений. Правые части гиперсингулярных интегральных уравнений являются формами колебаний жестко закрепленной круглой пластины, полученных аналитическим путем. Разработана методика вычисления матрицы присоединенных масс, что позволило свести рассматриваемую задачу к решению проблемы собственных значений.

Ключевые слова: тонкая пластина, идеальная несжимаемая жидкость, колебания, гиперсингулярное интегральное уравнение, метод граничных элементов

1. Introduction

Problems of hydroelastic interaction of structural elements with the environment have been of great interest to many scientists in recent decades. These problems are conventionally divided into two classes. The first includes the task of determining the dynamic characteristics of the structures containing a liquid; i.e. the surfaces of the structural element are in a unilateral contact with the liquid. The works [1-3] are devoted to the problems of liquid splashes for rigid shell systems. The vibrations of elastic reservoirs partially filled with a liquid are analyzed in the article [4]. The free vibrations of an elastic head cover of a hydro turbine during interaction with a liquid are considered in [5, 6].

The second class includes the determination of the dynamic characteristics of elastic thin structures where the bearing surfaces are in bilateral contact with a liquid, such as the blades of the impellers of

Francis and Kaplan turbines [7, 8], the blades of powerful air units [9, 10], the wings of aircraft [11], etc.

The powerful computational methods have been developed for solving such problems numerically. Among them there are the method of finite differences, [12], the methods of finite and boundary elements [13, 14], the method of R-functions [15].

But each new design, which is intended to work under intense power loads and to interact with the environment, requires careful analysis of its strength and dynamic characteristics. This leads to the need of developing new and improving existing computational methods that would take into account the specific features of the structure being analyzed.

The new effective method for solving hypersingular integral equations on a circular domain has been developed in the article. The method has been successfully used to determine the free vibration modes and frequencies of a circular plate immersed in a liquid.

2. Formulation of the problem

The vibration of a thin circular plate immersed in a liquid is analyzed. The Kirchhoff-Lev hypothesis has been used to model the motion of the plate [16].

The following notation is used: E is the Young's modulus, ν is the Poisson's ratio, and h is the plate thickness.

With a thickness of a homogeneous plate being constant, the equation of motion of the plate [16] has the form

$$D\Delta\Delta w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (2.1)$$

where $w(x, y, t)$ is a deflection of the plate;

ρ_p is density of the plate material;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ is cylindrical rigidity;

$q(x, y, t)$ is a force acting on the plate.

If the plate is immersed in a liquid, then

$$q(x, y, t) = p(x, y, t)\mathbf{n} + q_0(x, y, t), \quad (2.2)$$

where $p(x, y, t)$ is a liquid pressure drop on the plate;

\mathbf{n} is a unit normal to the surface of the plate;

$q_0(x, y, t)$ is a disturbing force.

If in the equation (2.2) the function $q_0(x, y, t) = 0$, then we have the case of free hydroelastic vibration.

To find the pressure $p(x, y, t)$, the following assumptions have been made: the fluid is an ideal and incompressible, and its motion is vortex-free. In this case, there is a velocity potential $\varphi(x, y, z, t)$, and its gradient is the velocity of the liquid, namely:

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

This potential satisfies the Laplace equation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.3)$$

The relationship between velocity potential and pressure is determined from the linearized Cauchy-Lagrange integral

$$p^\pm = -\rho_l \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial t} + p_0$$

where ρ_l is density of the liquid;

p_0 is an atmospheric pressure.

The limit values φ^\pm correspond to the transition to the plane of the plate from the positive and negative values of z coordinate, respectively.

Thus, for the pressure drop we have

$$p = p^+ - p^- = -\rho_l \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial t} \right). \quad (2.4)$$

The boundary conditions for the differential equation (2.3) have been formulated. According to the condition of non-leakage [17] we could obtain the following equations for the surfaces σ of the plate:

$$\frac{\partial \varphi^\pm}{\partial \mathbf{n}} \Big|_\sigma = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (2.5)$$

The system of differential equations (2.1), (2.3) with boundary condition (2.5) must also be supplemented by the conditions of fixation, in other words by the conditions which respects to the function $w(x, y, t)$ on the plate contour.

Thus, we arrive at a related problem with respect to two unknown functions $w(x, y, t)$ and $\varphi(x, y, z, t)$. Moreover, the right-hand side of the differential equation $w(x, y, t)$ includes time derivative of $\varphi(x, y, z, t)$, while boundary conditions for the Laplace equation to $\varphi(x, y, z, t)$ include time derivative of an unknown function $w(x, y, t)$.

3. The assumed mode method

To solve the problem of natural and forced vibrations of elastic plate immersed in a liquid, the assumed mode method [17] has been used. Generally, we consider the movement of the plate immersed in a liquid as:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) w_k(x, y), \quad (3.1)$$

where $c_k(t)$ are unknown coefficients that depend only on time;

$w_k(x, y)$ are modes of plate vibration without taking into account the interactions with the liquid;

N is the number of modes retained in the calculations.

From (2.4), (3.1) we can see that for the velocity potential $\varphi(x, y, z, t)$ it is necessary to choose the following

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \varphi_k(x, y, z), \quad (3.2)$$

in which the functions $\varphi_k(x, y, z)$ are solutions of the following boundary value problems

$$\Delta \varphi_k = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} = w_k. \quad (3.3)$$

It should be noted that in the boundary value problems (3.3) the right-hand sides in the boundary conditions are known.

In the next part we will describe the method of reducing the problem of determining the vibration modes and frequencies of a "plate-liquid" system to the hypersingular equations.

4. The hypersingular equations for determining the velocity potential and fluid pressure

To find the fluid pressure drop on the surfaces of the plate, the equation (2.4) can be used. It should be noted that the velocity potential is a harmonic function everywhere outside the circular plate, i.e. it is a continuous function in three-dimensional space with a section. In this case, according to the equation (2.5), this harmonic function has a continuous normal derivative at the intersection of the section in the form of a circle occupied by the plate. But according to the equation (2.4), this function has a finite gap in the specified area.

Such properties are known to be inherent in the potential of the double layer [18]. This potential has a form

$$\varphi(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS, \quad \mathbf{P} \in S, \quad (4.1)$$

where S is an area occupied by the circular plate;

\mathbf{n} is a unit normal to the surface S ;

\mathbf{P} and \mathbf{P}_0 are the points of three-dimensional space with coordinates (x, y, z) and (x_0, y_0, z_0) , respectively;

$|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ is a Cartesian distance between \mathbf{P} and \mathbf{P}_0 ;

$\Gamma(\mathbf{P})$ is potential density, the function given on the surface S .

The function defined by the formula (4.1) satisfies the Laplace equation (2.3), has a continuous normal derivative, and at the intersection of the surface S along the normal has a finite discontinuity, namely [18]

$$\varphi^+(\mathbf{P}_0) - \varphi^-(\mathbf{P}_0) = \Gamma(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}_0 \in S.$$

Therefore, we use the representation (4.1) for the velocity potential. To determine the pressure drop, it is necessary to find the density $\Gamma(\mathbf{P})$ on the surface of the plate. From (3.2) it follows that we need to obtain solutions of the boundary value problems (3.3). For the functions φ_k the expression (4.1) is used. The Laplace equation with (3.3) is satisfied, and the boundary condition leads to the integral equation in the form

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} = w_k(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S \quad (4.2)$$

As proved in [19, 20], the integral in (4.2) does not exist either as an ordinary improper one or in the sense of the Cauchy principal value. This integral can be interpreted only in the Hadamard sense [21, 22] as a limit value of the normal derivative of the double layer potential. For the case where the surface S is a part of a plane, we have

$$\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} = w_k(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S,$$

or

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(x, y) \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{-z_0}{\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2}\right)^3} = w_k(x_0, y_0). \quad (4.3)$$

The equations of the same type as (4.3) refer to hypersingular integral equations. Some methods of numerical solution of such equations are investigated in [22].

5. Reduction of two-dimensional hypersingular equations to one-dimensional singular equations

If the domain S in the equation (4.3) is a circle, then it is possible to reduce a two-dimensional hypersingular equation to a one-dimensional one.

Let S be a circle on the xOy plane, namely

$$S = \{x, y : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Let us calculate the Cartesian distance $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|$ for the points of the specified region S . In cylindrical coordinates we have

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, & y &= \rho \sin \theta, & z &= z, & x^2 + y^2 &= \rho^2, \\ x_0 &= \rho_0 \cos \theta_0, & y_0 &= \rho_0 \sin \theta_0, & z_0 &= z_0, & x_0^2 + y_0^2 &= \rho_0^2. \end{aligned}$$

as follows

$$|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)}.$$

Then we use standard notation [14]

$$a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2\rho\rho_0.$$

Firstly, we suppose that the functions w_k, Γ_k do not depend on the circumferential coordinate θ , i.e. we consider the problem in an axially symmetric formulation.

Then by using (4.3) we obtain the following hypersingular integral equation ($z = z_0 = 0$):

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(x, y) \frac{-dxdy}{\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)^3} = w_k(x_0, y_0).$$

With the transition to a cylindrical coordinate system and taking into account the assumptions about the axial symmetry of the problem, we find that

$$A\Gamma_k = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(\rho) \frac{\rho d\theta d\rho}{\left(\sqrt{a-b\cos(\theta-\theta_0)}\right)^3} = -w_k(\rho_0).$$

Let us write this integral as a repeated one

$$A\Gamma_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \rho \Gamma_k(\rho) \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(\sqrt{a-b\cos(\theta-\theta_0)}\right)^3} \right] d\rho = -w_k(\rho_0). \quad (5.1)$$

Let us make a variable replacement in the internal integral in (5.1)

$$\psi = \theta - \theta_0, \quad \theta = \psi + \theta_0, \quad d\theta = d\psi.$$

Since under the sign of the integral there is a periodic function that integrates by a period, the boundaries of integration will not change. Therefore, we take not $(0, 2\pi)$ but $(-\pi, \pi)$. For the internal integral we obtain

$$I_1(\rho, \rho_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi}{\left(\sqrt{a-b\cos\psi}\right)^3}.$$

Due to the parity of the subintegral function we have

$$I_1(\rho, \rho_0) = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\left(\sqrt{a-b\cos\psi}\right)^3}.$$

Then we make the transformations in this integral

$$I_1(\rho, \rho_0) = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\left(\sqrt{a-b\cos\psi}\right)^3} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\left(\sqrt{a+b-2b\cos^2(\psi/2)}\right)^3} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\left(\sqrt{a+b-2b\cos^2\psi}\right)^3}.$$

After another variable replacement

$$\psi_1 = \pi/2 - \psi; \quad d\psi_1 = -d\psi$$

we find that

$$I_1(\rho, \rho_0) = \frac{4}{\left(\sqrt{a+b}\right)^3} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\right)^3}, \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}.$$

Next we use the formula from [23] and obtain

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\right)^3} = \frac{1}{k'^2} E(k), \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} d\psi, \quad k'^2 = 1-k^2.$$

Since $k'^2 = 1-k^2 = 1 - \frac{2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}$, then for the internal integral we have

$$I_1(\rho, \rho_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}(a-b)} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} d\psi = \frac{4}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2} E(k),$$

where $E(k)$ is a complete elliptic integral of the second kind.

Thus, we obtain a one-dimensional hypersingular integral equation for determining the functions $\Gamma_m(\rho)$ by the known functions $w_m(\rho)$, $m = 1, 2, \dots$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^R \Gamma_m(\rho) \frac{\rho E(k) d\rho}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2} = -w_m(\rho_0). \quad (5.2)$$

Note that the kernel of the integral operator in (5.2) has the following form:

$$K(\rho, \rho_0) = \frac{\rho E(k)}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}.$$

This kernel has a feature of type $(\rho-\rho_0)^{-2}$.

To clarify the nature of the function $K(\rho, \rho_0)$ near the singularity ($\rho - \rho_0 = 0$) we use the asymptotic formula [23] for the function $E(k)$ at k , close to 1

$$E(k) = 1 + \frac{1}{2} k'^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{3}{4} k'^4 \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{4} \right) + \dots$$

Let l_0 be a special element, that is $l_0 \in [0, R]$, $\rho_0 \in l_0$. Let us introduce the notation

$$K_0(\rho, \rho_0) = \frac{\rho}{(\rho + \rho_0)(\rho - \rho_0)^2} \left[1 + \frac{1}{2} k'^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{2} \right) \right].$$

Then for calculating the integral of the element containing the feature, we use the formula

$$\int_{l_0} \Gamma_m(\rho) K(\rho, \rho_0) d\rho = \int_{l_0} \Gamma_m(\rho) K_0(\rho, \rho_0) d\rho + \int_{l_0} \Gamma_m(\rho) [K(\rho, \rho_0) - K_0(\rho, \rho_0)] d\rho. \quad (5.3)$$

The first part here contains hypersingular and logarithmic components, and the second is an integral of the function that does not contain features.

6. Determination of free vibration modes and frequencies of a circular plate without taking into account the added masses of a liquid

Let us assume that in the equation (2.1) the function $q(x, y, t) = 0$, i.e we assume that the plate vibrates freely. Then we look for a solution of the equation (2.1) in the form

$$w(x, y, t) = \exp(i\Omega t) w(x, y). \quad (6.1)$$

Then we substitute (6.1) into the homogeneous equation (2.1) and obtain the differential equation in partial derivatives with respect to the amplitude values $w(x, y)$

$$\Delta \Delta w - \alpha^4 w = 0, \quad \alpha^4 = \Omega^2 \frac{12\rho_p(1-\nu^2)}{Eh^2} = \Omega^2 \frac{\rho_p h}{D}. \quad (6.2)$$

The equation (6.2) is represented in the form

$$(\Delta - \alpha^2)(\Delta + \alpha^2)w = 0$$

which is equivalent to the system

$$\begin{cases} (\Delta - \alpha^2)w = 0 \\ (\Delta + \alpha^2)w = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

For a circular plate in polar coordinates we have

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

In this case, the system (6.3) takes the form

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \alpha^2 w = 0, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \alpha^2 w = 0. \quad (6.5)$$

The solutions of the equation (6.4) are the Bessel functions of the first and second kind of zero order $J_0(\alpha\rho)$ and $Y_0(\alpha\rho)$, and the solutions of the equation (6.5) are the modified Bessel functions of the first and second kind of $I_n(\alpha\rho)$ and $K_n(\alpha\rho)$. Thus, the general solution of the equation (6.2) has the form

$$w(\rho) = A J_0(\alpha\rho) + B Y_0(\alpha\rho) + C I_0(\alpha\rho) + D_1 K_0(\alpha\rho)$$

where A, B, C, D_1 are constants.

Since the functions $Y_n(\alpha\rho)$ and $K_n(\alpha\rho)$ will infinitely increase if $\rho \rightarrow 0$, we assume that $B = 0, D_1 = 0$ to avoid non-physical displacements.

To determine the constants A, C , we use the boundary conditions for fixing the plate along the contour. For the case of rigid fixation we have the following boundary conditions [16]:

$$w|_{\rho=R} = 0, \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{\rho=R}$$

From these conditions it follows that

$$\begin{cases} AJ_n(\alpha R) + CI_n(\alpha R) = 0 \\ AJ'_n(\alpha R) + CI'_n(\alpha R) = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

For the system (6.6) to have a nonzero solution, it is necessary for the system determinant to be zero. Therefore, we obtain the equation for finding the unknown quantity α

$$\begin{vmatrix} J_n(\alpha R) & I_n(\alpha R) \\ J'_n(\alpha R) & I'_n(\alpha R) \end{vmatrix} = J_n(\alpha R)[I_{n-1}(\alpha R) + I_{n+1}(\alpha R)] - I_n(\alpha R)[J_{n-1}(\alpha R) - J_{n+1}(\alpha R)] = 0 \quad (6.7)$$

Let's denote $\lambda = \alpha R$. Table 6.1 shows the first six root values of the equation (6.7) for different values of n .

Table 6.1 The values of the roots of the characteristic equation

m	λ_m
1	3.196220616
2	6.306437050
3	9.439499140
4	12.57713064
5	15.71643853
6	18.85654552

The relation between the constants A and C for each α_m is obtained from the equality

$$A_{mn} J_n(\alpha_{mn} R) + C_m I_n(\alpha_{mn} R) = 0 \Rightarrow C_{mn} = -A_{mn} \frac{J_n(\alpha_{mn} R)}{I_n(\alpha_{mn} R)}$$

Note that we can choose $A_m = 1 \forall m$.

Thus, the dependences of free vibration modes of the circular plate on ρ in the mode are obtained

$$w_{mn}(\rho) = J_0(\alpha_{mn} \rho) - \frac{J_n(\alpha_{mn} R)}{I_n(\alpha_{mn} R)} I_n(\alpha_{mn} \rho). \quad (6.8)$$

These functions appear at right-hand sides of the hypersingular equations (5.2).

Fig. 6.1 shows the functions defined by the formulas (6.8) for $R = 1$.

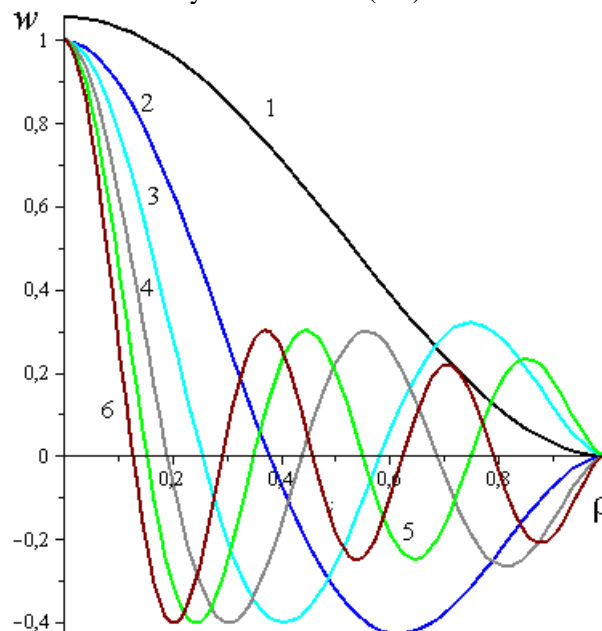


Figure 6.1 Dependences of vibration modes on the radial coordinate

Numbers 1-6 in Fig. 6.1 denote the modes corresponding to the values $\lambda_m = \alpha_m$, given in Table 6.1.

Fig. 6.2 shows the first six modes of axially symmetrical vibrations of a circular plate rigidly fixed along the contour.

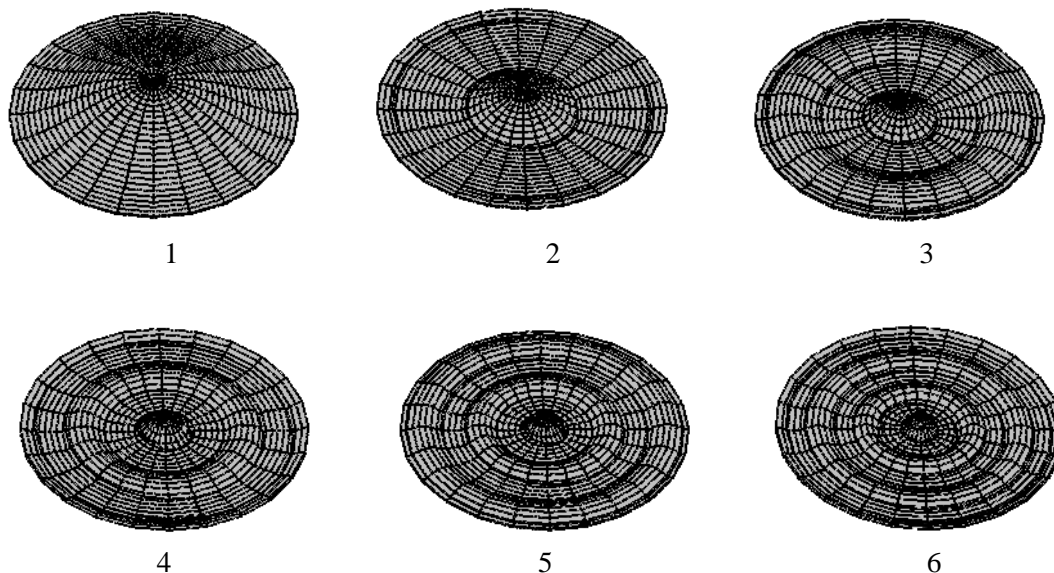


Figure 6.2 Modes of axially symmetric vibrations of a round plate

According to the formulas (6.8), for the increasing number m , vibration modes of $w_m(\rho)$ will asymptotically approach $J_0(\alpha_m \rho)$.

Checking the orthogonality of the natural vibration modes $w_m(\rho)$ we can find that

$$(w_m(\rho), w_l(\rho)) = A_m \delta_{ml}. \quad (6.9)$$

The following values are obtained for the constants A_m

$$A_1 = 0.1018870979, A_2 = 0.0506907858, A_3 = 0.0337792448, A_4 = 0.0253319976, A_5 = 0.0202649244, A_6 = 0.0168871927.$$

7. The numerical method of solving a hypersingular integral equation

For a numerical solution of a hypersingular integral equation

$$\frac{1}{\pi_0} \int_0^R \Gamma(\rho) \frac{\rho E(k) d\rho}{(\rho + \rho_0)(\rho - \rho_0)^2} = -w(\rho_0) \quad (7.1)$$

with known right-hand sides, the method of boundary elements with a constant approximation of the density [22] has been used. Note that as compared with (5.2), the index m is omitted in the equation (7.1) to simplify the recording.

To do this, we divide the integration region $[0, R]$ into N_1 boundary elements of an equal length. Let us denote

$$l_i = [\rho_{i-1}, \rho_i], \quad i = \overline{1, N_1}, \quad 2\tau = \rho_i - \rho_{i-1} = R/N_1, \quad \rho_0 = 0, \quad \rho_{N_1} = R.$$

Inside each element l_i , we select the points (collocation points) as follows:

$$\rho_{i0} = 0.5 \cdot (\rho_i + \rho_{i-1}), \quad i = \overline{1, N_1}.$$

After we roughly replace the integral in (7.1) by the integral sum, assuming that for each element the unknown density is constant, that is $\Gamma(\rho) = \Gamma_i$, $\rho \in [\rho_{i-1}, \rho_i]$, we obtain a system of linear algebraic equations with respect to Γ_i in the form

$$\frac{1}{\pi_0} \int_0^R \Gamma(\rho) K(\rho, \rho_{i0}) d\rho = \sum_{j=1}^{N_1} A_{ij} \Gamma_j = -w(\rho_{i0}), \quad i = \overline{1, N_1},$$

where the system matrix elements are calculated by the formula

$$A_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{\rho_{j-1}}^{\rho_j} K(\rho, \rho_{0i}) d\rho. \quad (7.2)$$

In the case of the boundary element not containing a collocation point, $i \neq j$, standard quadrature formulas can be used for the calculation of A_{ij} . If $i = j$, the following formula can be used

$$\Gamma_j \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} K(\rho, \rho_{j0}) d\rho = \Gamma_j \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} K_0(\rho, \rho_{j0}) d\rho + \Gamma_j \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} [K(\rho, \rho_{j0}) - K_0(\rho, \rho_{j0})] d\rho. \quad (7.3)$$

According to the results obtained above, the second term in (7.3) is not singular, and standard quadrature formulas can also be used to calculate it. The first term contains hypersingular and logarithmic features. The hypersingular component has the form

$$K_h(\rho, \rho_0) = \frac{\rho}{(\rho + \rho_0)(\rho - \rho_0)^2}.$$

Let us make such transformations

$$\begin{aligned} K_h(\rho, \rho_0) &= \frac{\rho + \rho_0}{(\rho + \rho_0)(\rho - \rho_0)^2} - \frac{\rho_0}{(\rho^2 - \rho_0^2)(\rho - \rho_0)} = \frac{1}{(\rho - \rho_0)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho - \rho_0} \left[\frac{1}{\rho - \rho_0} - \frac{1}{\rho + \rho_0} \right] = \\ &= \frac{1}{2(\rho - \rho_0)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(\rho^2 - \rho_0^2)} = \frac{1}{2(\rho - \rho_0)^2} + \frac{1}{4\rho_0} \frac{1}{\rho - \rho_0} - \frac{1}{4\rho_0} \frac{1}{\rho + \rho_0}. \end{aligned}$$

In this expression there is the component that does not contain features, namely

$$K_{h2}(\rho, \rho_0) = -\frac{1}{4\rho_0} \frac{1}{\rho + \rho_0}. \quad (7.4)$$

Let

$$K_{h1}(\rho, \rho_0) = \frac{1}{2(\rho - \rho_0)^2} + \frac{1}{4\rho_0} \frac{1}{\rho - \rho_0}.$$

We calculate the integral over a special domain from $K_{h1}(\rho, \rho_0)$

$$\begin{aligned} \int_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau} \left[\frac{1}{2(\rho - \rho_{i0})^2} + \frac{1}{4\rho_{i0}(\rho - \rho_{i0})} \right] d\rho &= -\frac{1}{2(\rho - \rho_{i0})} \Big|_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau} + \frac{1}{4\rho_{i0}} \ln|\rho - \rho_{i0}| \Big|_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau} \right) + \frac{1}{4\rho_{i0}} \ln \left| \frac{\tau}{\tau} \right| = -\frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

The logarithmic component has the form

$$K_l(\rho, \rho_0) = \frac{\rho k'^2}{2(\rho + \rho_0)(\rho - \rho_0)^2} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\rho}{2(\rho + \rho_0)^3} \left[\ln 4 - \frac{1}{2} - \ln \left| \frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0} \right| \right].$$

After the transformations we have

$$K_l(\rho, \rho_0) = \left[\frac{1}{2(\rho + \rho_0)^2} - \frac{\rho_0}{2(\rho + \rho_0)^3} \right] \left[\ln 4 - \frac{1}{2} - \ln \left| \frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0} \right| \right].$$

Note that the component

$$K_{l2}(\rho, \rho_0) = \left[\frac{1}{2(\rho + \rho_0)^2} - \frac{\rho_0}{2(\rho + \rho_0)^3} \right] \left[\ln 4 - \frac{1}{2} - \ln|\rho + \rho_0| \right] \quad (7.5)$$

does not contain features, it is further referred to the regular part. Let

$$K_{l1}(\rho, \rho_0) = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(\rho + \rho_0)^2} + \frac{\rho_0}{(\rho + \rho_0)^3} \right] \ln|\rho - \rho_0|.$$

When calculating the integral of $K_{l1}(\rho, \rho_0)$ we carry out the integration of parts. Let us consider that

$$dV = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(\rho + \rho_0)^2} + \frac{\rho_0}{(\rho + \rho_0)^3} \right], \quad U = \ln|\rho - \rho_0|$$

$$V = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\rho + \rho_0)} - \frac{2\rho_0}{(\rho + \rho_0)^2} \right], \quad dU = \frac{1}{\rho - \rho_0}$$

At integration on a special element we will receive

$$\int_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau} K_{I1}(\rho, \rho_{i0}) d\rho = \frac{1}{4} \ln |\rho - \rho_{i0}| \left[\frac{2\rho + \rho_{i0}}{(\rho + \rho_{i0})^2} \right]_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau} - \frac{1}{4} \int_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau} \frac{2\rho + \rho_{i0}}{(\rho + \rho_{i0})^2} \frac{1}{\rho - \rho_{i0}} d\rho.$$

Next we have

$$\begin{aligned} \int_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau} K_{I1}(\rho, \rho_{i0}) d\rho &= \frac{1}{4} \ln |\rho - \rho_{i0}| \left[\frac{2\rho + \rho_{i0}}{(\rho + \rho_{i0})^2} \right]_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau} + \frac{1}{8} \frac{1}{\rho + \rho_{i0}} \Big|_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau} - \frac{3}{16\rho_{i0}} \ln \left| \frac{\rho - \rho_{i0}}{\rho + \rho_{i0}} \right| \Big|_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau} = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{(\ln \tau)(3\rho_{i0} + \tau)}{(2\rho_{i0} + \tau)^2} - \frac{(\ln \tau)(3\rho_{i0} - \tau)}{(2\rho_{i0} - \tau)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\rho_{i0} + \tau} - \frac{1}{2\rho_{i0} - \tau} \right) + \frac{3}{4\rho_{i0}} \ln \left| \frac{2\rho_{i0} + \tau}{2\rho_{i0} - \tau} \right| \right] = \\ &= -\frac{\tau}{2(4\rho_{i0}^2 - \tau^2)} \left(\frac{\rho_{i0} \ln \tau}{4\rho_{i0}^2 - \tau^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{16\rho_{i0}} \ln \left| \frac{2\rho_{i0} + \tau}{2\rho_{i0} - \tau} \right| \end{aligned}$$

Thus, it is obtained that

$$\int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} K_0(\rho, \rho_{j0}) d\rho = -\frac{1}{\tau} - \frac{\tau}{2(4\rho_{i0}^2 - \tau^2)} \left(\frac{\rho_{i0} \ln \tau}{4\rho_{i0}^2 - \tau^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{16\rho_{i0}} \ln \left| \frac{2\rho_{i0} + \tau}{2\rho_{i0} - \tau} \right| + \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} K_{h2}(\rho, \rho_{j0}) d\rho + \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} K_{I2}(\rho, \rho_{j0}) d\rho.$$

The functions $K_{h2}(\rho, \rho_0)$ and $K_{I2}(\rho, \rho_0)$ are calculated by the formulas (7.4) and (7.5), respectively, and the integrals of these functions are calculated by the standard quadrature formulas.

To calculate the integrals with kernels in the form of elliptical integrals, we use the method from [24].

To test the proposed method, we use the analytical solution of the spatial hypersingular equation given in [22, 25]. For the hypersingular equation in the form

$$\frac{1}{\pi} \iint_S \frac{\Gamma(x, y) dx dy}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}^3} = -\pi, \quad S = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

in [22, 25] it is proved that

$$\Gamma(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

If we consider the hypersingular equation in the form (7.1), then for the equation

$$\frac{1}{\pi} \int_0^R \Gamma(\rho) \frac{\rho E(k) d\rho}{(\rho + \rho_0)(\rho - \rho_0)^2} = -1 \quad (7.6)$$

we will have the analytical solution

$$\Gamma(\rho) = \frac{4}{\pi} \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

To numerically solve the equation (7.6), the method of boundary elements with a constant approximation of the density on the elements [22] has been used. A circle with the radius $R = 1$ m is considered. 100 boundary elements have been selected. The comparison of numerical and analytical results is given in Fig. 7.1.

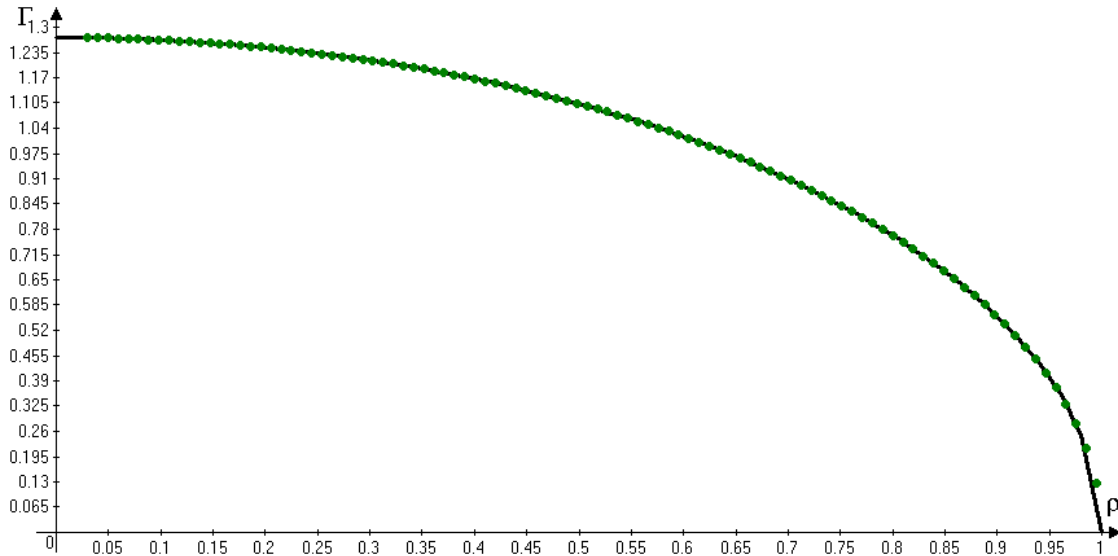


Figure 7.1 Numerical and analytical solutions of the hypersingular equation

The solid line corresponds to the analytical solution; the points indicate the numerical data obtained by the proposed method.

Let us note that at almost all points of the segment $[0, R]$ the accuracy is $\varepsilon = 10^{-4}$. The exception is points near the ends of the interval. Since at ρ, ρ_0 , close to zero, an additional feature appears in the equation (7.6), it is proposed to replace the integration segment by $[\delta, R]$ [14]. For the above mentioned calculations, $\delta = 0.025/R$ is chosen. For ρ close to 1, the accuracy can be increased by taking into account the behavior of the solution at the ends of the integration interval [22].

For the method of boundary elements for the two-dimensional region in [22] we used 1200 boundary elements, and the obtained accuracy is $\varepsilon = 10^{-3}$. These data indicate the effectiveness of the proposed method.

8. Receiving the matrix of added masses

After determining the natural vibration modes $w_m(\rho)$ of a circular plate by the formulas (6.8) we find the solutions of hypersingular equations according to the method of boundary elements.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^R \Gamma_m(\rho) \frac{\rho E(k) d\rho}{(\rho + \rho_0)(\rho - \rho_0)^2} = -w_m(\rho_0)$$

We look for a solution to the problem of hydroelastic vibrations of the plate in the form of the series (3.1), (3.2).

Considering the equation (2.1) in the assumption that $q_0(x, y, t) = 0$, and the pressure drop is obtained from the equation (2.4), we have the following relations

$$D \Delta \Delta w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\rho_l \left[\frac{\partial \varphi^+(x, y, t)}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^-(x, y, t)}{\partial t} \right],$$

$$D \sum_{m=1}^N c_m(t) \Delta \Delta w_m + \rho_p h \sum_{m=1}^N \ddot{c}_m(t) w_m = -\rho_l \sum_{m=1}^N \dot{c}_m(t) \Gamma_m. \quad (8.1)$$

Since free hydroelastic vibrations will be considered, we suppose that

$$c_m(t) = C_m \exp(i\omega t), \quad (8.2)$$

where ω is the frequency of natural hydroelastic vibrations; i is an imaginary unit; C_m is unknown.

According to the equations (6.2) and (8.2) we convert (8.1) to the form

$$D \sum_{m=1}^N C_m \alpha_m^4 w_m - \omega^2 \left[\rho_p h \sum_{m=1}^N C_m w_m + \rho_l \sum_{m=1}^N C_m \Gamma_m \right] = 0. \quad (8.3)$$

The next step is finding a scalar product of the equation (8.3) on the functions $w_n(\rho)$, $n = 1, 2, \dots, N$ and obtaining the system of linear homogeneous algebraic equations with respect to the constants

$$\sum_{m=1}^N \{ \delta_{nm} A_m D \alpha_m^4 - \omega^2 [\rho_p h A_m \delta_{nm} + \rho_l (\Gamma_m, w_n)] \} C_m = 0 \quad (8.4)$$

To find the nonzero solution of the equations (8.4) we obtain the characteristic equation with respect to ω

$$\det \{ \rho_p h \Omega_m^2 A_m \delta_{nm} - \omega^2 [\rho_p h A_m \delta_{nm} + \rho_l (\Gamma_m, w_n)] \} = 0 \quad (8.5)$$

Thus, the problem of determining the frequencies and modes of natural hydroelastic vibrations of a circular plate is reduced to solving the problem of natural values.

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{B})\mathbf{C} = 0,$$

where the elements of the matrices are determined by the formulas

$$a_{mn} = \Omega_m^2 \rho_p h A_m \delta_{mn}, \quad b_{mn} = \rho_p h A_m \delta_{mn} + \rho_l (\Gamma_m, w_n).$$

The elements of the matrix of the added masses of a liquid are determined by the formulas

$$g_{mn} = (\Gamma_m, w_n) = \tau \sum_{i=1}^{N_l} \rho_{i0} \Gamma_m(\rho_{i0}) w_n(\rho_{i0}),$$

that is, we use the formula of central rectangles.

Thus, for determining free vibration frequencies and modes of a circular plate immersed in a liquid the method based on the use of one-dimensional hypersingular equations has been developed.

9. Conclusions

The method for solving the problem of determining the frequencies and modes of vibrations of a circular elastic plate immersed in an ideal incompressible fluid, the motion of which is considered to be irrotational, has been developed. The method is based on using one-dimensional hypersingular equations. The analysis of singularities of kernels of integral operators has been carried out, which allowed obtaining analytical formulas for calculating hypersingular terms and terms with logarithmic singularity. The test calculation of a hypersingular equation with a unit right-hand side has been performed. It has proved the effectiveness of the proposed method over the method of boundary elements in two-dimensional formulation. The algorithm for obtaining the matrix of added masses is proposed.

REFERENCES

1. Ibrahim R. A., Liquid sloshing dynamics: theory and applications. *Cambridge University Press*, 2005. URL: https://www.researchgate.net/publication/259815818_Liquid_Sloshing_Dynamics_Theory_and_Applications_by_Raouf_A_Ibrahim
2. Gavriluk, I., M. Hermann, Lukovsky I., Solodun O., Timokha, A. Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks. *Engineering Computations*, vol. 25, no. 6, pp.518 – 540, 2008. URL: https://www.researchgate.net/publication/245338809_Natural_sloshing_frequencies_in_rigid_truncated_conical_tanks
3. Degtyarev, K., Glushich, P., Gnitko, V., Strelnikova, E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells. *International Journal of Modern Physics and Applications*. Vol. 1, No. 4, pp. 159-168, 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209 URL: https://www.researchgate.net/publication/280728146_Numerical_Simulation_of_Free_Liquid-Induced_Vibrations_in_Elastic_Shells
4. Eseleva E.V., Gnitko V.I., Strelnikova E.A. Natural vibrations of pressure vessels when interacting with liquid. *Problems of Mechanical Engineering*, vol. 9, no 1, pp.105 – 118, 2006. <http://journals.uran.ua/jme/issue/archive> [in Ukrainian]
5. T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head. *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*, vol. 1, no 1. pp.45 – 50, 2015. DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961 URL: https://www.researchgate.net/publication/282868308_Free_Hydroelastic_Vibrations_of_Hydroturbine_Head
6. Misyura S., Smetankina N., Misyura U. Rational modeling of a hydroturbine cover for strength

- analysis. *Bulletin of Kharkiv Polytechnic Institute*, Dynamics and strength of machines, no. 1, pp.34 – 39, 2019. URL: <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44370> [in Ukrainian]
7. Ganchin E.V., Rzhetskaya I.E., Strelnikova E.A. Investigation of the dynamic characteristics of impeller blades of Kaplan hydraulic turbines when interacting with a liquid. *Bulletin of Kharkiv National University*, no. 847, pp.79-86, 2009. URL: <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30078.pdf> [in Russian]
 8. Babachenko Yu. Avdyushenko A. Computational study of radial forces acting on the rotor of a radially axial hydraulic turbine. *Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, vol. 4, no. 2, pp.547 – 552, 2013. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/raschetnoe-issledovanie-radialnyh-sil-deystviyuschih-na-rotor-radialno-osevoy-gidroturbiny> [in Russian]
 9. Degtyarev K. Strelnikova E. Sheludko G. Computer modeling of wind turbine blades with optimal parameters. *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University*. Series: Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems, no. 19, pp.81 – 86, 2012. URL: <http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf> [in Russian]
 10. Hozyainov B. Kostin I. Testing of wind and hydro turbine blades with vertical axis of rotation. *Bulletin of Samara State Aerospace University*, vol. 4, no. 24, pp.120 – 124, 2010. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispytanie-lopastej-vetro-i-gidroturbin-s-vertikalnoy-osyu-yrascheniya> [in Russian]
 11. Ishmuratov F.Z., Kuznetsov A.G., Mosunov V.A. Application of the Ritz polynomial method for calculating the characteristics of dynamic aeroelasticity taking into account gyroscopic forces. *Uchenye zapiski CAGI*, vol. 48, no. 6, pp.64 – 74, 2017. URL: http://www.tsagi.ru/institute/publications/memoirs/archive_annotations/ [in Russian]
 12. Amosov A.A., Dubinsky Yu.A., Kopchenova N.V. Computational methods for engineers. Training manual. – M.:Vysshaja shkola, pp.487 – 506, 1994. URL: <https://e.lanbook.com/book/42190> [in Russian]
 13. Segerlind L. Applied finite element method - M .: Mir- 392 p., 1979. URL: <https://studizba.com/files/show/djvu/1936-1-segerlind-1--primenenie-metoda.html> [in Russian]
 14. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F & Wrobel, L.C., Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984. URL: <https://studizba.com/files/show/djvu/1932-1-brebbiya-k-telles-zh-vroubel-1--metody.html>
 15. Rvachev V. L. Theory of R-functions and some of its applications. Kiev: *Nauk. dumka*, 552 p., 1982. URL: <https://www.twirpx.com/file/2178304/>
 16. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill, 1959. 594 c. URL: https://www.cup-recifal.com/ccs_files/articles/cuveaqual_denisio/Timoshenko - Theory of plates and shells.pdf
 17. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles J. *Modern Technology & Engineering* Vol.3, No.1, 2018, pp.15-52. URL: <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf>
 18. Gunther N.M. Potential theory and its application to the main problems of mathematical physics. – M .: Gostekhteorizdat, 1953. - 416 p. URL: http://publ.lib.ru/ARCHIVES/G/GYUNTER_Nikolay_Maksimovich/_Gyunter_N.M..html#0003
 19. Strelnikova E.A., Hypersingular integral equations in two-dimensional boundary value problems for the Laplace equation and the Lamé equations, *Dopovidi NAN Ukraini*. no. 3, pp.27-31, 2001. URL: <https://www.dopovidi-nanu.org.ua/uk/archive>
 20. Gandel Yu.V. Introduction to methods for calculating singular and hypersingular integrals. - Kharkov: *Ed. Kharkiv national university*, 92 p., 2010. URL: <http://ekhnuir.univer.kharkov.ua/handle/123456789/247>
 21. Hadamard J. The Cauchy problem for linear partial differential equations of hyperbolic type. –M: Nauka, 352 p., 1978. URL: <https://www.twirpx.com/file/1394980/>
 22. Kantor B.Ya. Strelnikova E.A. Hypersingular integral equations in problems of continuum mechanics. *Kharkov: Novoe Slovo*, 252 p., 2005. URL: <https://www.twirpx.com/file/1394980/>
 23. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products. *Moscow: Fizmatgiz*, 1100 pp., 1963. URL: <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30090.pdf>
 24. Karaiev A. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics / A. Karaiev, E. Strelnikova //International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing, 2020, Vol. 11, № 1, 2050003 . DOI: 10.1142/S1793962320500038.

URL: <http://www.vixri.com/d/Gradshtejn.%20Ryzhikov%20Tablicy%20Integralov.pdf>

25. Kit G.S., Hai M.V. The method of potentials in three-dimensional problems of thermoelasticity for bodies with cracks. *Kiev: Nauk. dumka*, 288 p., 1989. URL: <https://www.e-varamu.ee/item/HMM7WKKBPAMHRIRDJ7BUXPYNW4X3S625>

ЛІТЕРАТУРА

- Ibrahim R. A., Liquid sloshing dynamics: theory and applications. *Cambridge University Press*, 2005.
https://www.researchgate.net/publication/259815818_Liquid_Sloshing_Dynamics_Theory_and_Applications_by_Raouf_A_Ibrahim
- Gavrilyuk, I., M. Hermann, Lukovsky I., Solodun O., Timokha, A. Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks. *Engineering Computations*, Vol. 25 Iss: 6, pp.518 – 540, 2008
https://www.researchgate.net/publication/245338809_Natural_sloshing_frequencies_in_rigid_truncated_conical_tanks
- Degtyarev, K., Glushich, P., Gnitko, V., Strelnikova, E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells. *International Journal of Modern Physics and Applications*. Vol. 1, No. 4, pp. 159-168, 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209
https://www.researchgate.net/publication/280728146_Numerical_Simulation_of_Free_Liquid-Induced_Vibrations_in_Elastic_Shells
- Еселева Е.В. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. Е.В. Еселева, В.И. Гнисько, Е.А. Стрельникова. *Пробл. машиностроения*. 2006. Т. 9. №1, С.105– 118. <http://journals.uran.ua/jme/issue/archive>
- Medvedovskaya T. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers / Т. Medvedovskaya, Е. Strelnikova, К. Medvedyeva // *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*. – 2015. – Vol. 1, No 1. – P. 45 - 50. – DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961
https://www.researchgate.net/publication/282868308_Free_Hydroelastic_Vibrations_of_Hydroturbine_Head
- Місюра С. Ю., Сметанкіна Н. В., Місюра Є. Ю. Рациональне моделювання кришки гідротурбіни для аналізу міцності. *Вісн. Нац. техн. ун-ту «ХПІ»*. Сер. Динаміка і міцність машин. 2019. № 1. С. 34–39. <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44370>
- Ганчин Е.В., Ржевская И.Е., Стрельникова Е.А. Исследование динамических характеристик лопастей рабочих колес поворотных гидротурбин при взаимодействии с жидкостью. *Вісник Харківського національного університету*, 2009. № 847. С. 79-86. <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30078.pdf>
- Бабаченко Ю.В. Расчетное исследование радиальных сил, действующих на ротор радиально осевой гидротурбины / Бабаченко Ю.В., Авдюшенко А.Ю. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, 2013. Т.4. №2, С. 547-552.
<https://cyberleninka.ru/article/n/raschetnoe-issledovanie-radialnyh-sil-deystvuyuschih-na-rotor-radialno-osevoy-gidroturbiny>
- Дегтярев К.Г., Стрельникова Е. А., Шелудько Г. А. Компьютерное моделирование лопастей ветроустановок с оптимальными параметрами. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*, No 19, 2012, С.81–86
<http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf>
- Хозяинов Б.П. Испытание лопастей ветро - и гидротурбин с вертикальной осью вращения. Хозяинов Б.П., Костин И.Г. *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва*, 2010. Т.4. №24, С. 120-124.
<https://cyberleninka.ru/article/n/isyptanie-lopastey-vetro-i-gidroturbin-s-vertikalnoy-osyu-vascheniya>
- Ишмуратов Ф.З. Применение полиномиального метода Ритца для расчета характеристик динамической аэроупругости с учетом гироскопических сил / Ишмуратов Ф.З., Кузнецов А.Г., Мосунов В.А. // *Ученые записки ЦАГИ*, 2017. Т.48. – №6, – С. 64-74.
http://www.tsagi.ru/institute/publications/memoirs/archive_annotations/

12. Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров / Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. // *Учеб. пособие.* – М.: Высш. шк., 1994. – С. 487-506. <https://e.lanbook.com/book/42190>
13. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов – М.: Мир, 1979. – 392 С. <https://studizba.com/files/show/djvu/1936-1-segerlind-1--primeneniye-metoda.html>
14. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F & Wrobel, L.C., Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984. <https://studizba.com/files/show/djvu/1932-1-brebbiya-k-telles-zh-vroubel-1--metody.html>
15. Рвачёв В. Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. Киев: Наук. думка 1982. 552 С. <https://www.twirpx.com/file/2178304/>
16. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill, 1959. 594 с. https://www.cap-recifal.com/ccs_files/articles/cuveaqual_denisio/Timoshenko_-_Theory_of_plates_and_shells.pdf
17. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles J. Modern Technology & Engineering Vol.3, No.1, 2018, pp.15-52 <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf>
18. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехтеориздат, 1953. 416 с. http://publ.lib.ru/ARCHIVES/G/GYUNTER_Nikolay_Maksimovich/_Gyunter_N.M..html#0003
19. Стрельникова Е. А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в двумерных краевых задачах для уравнения Лапласа и уравнений Ламе // *Доп. НАН України.* 2001. №3. С. 27-31. <https://www.dopovidi-nanu.org.ua/uk/archive>
20. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков: *Изд. Харьк. национального ун-та им. В.Н. Каразина,* 2000. 92 с. <http://ekhnuir.univer.kharkov.ua/handle/123456789/247>
21. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М: Наука, 1978. 352 с. <https://www.twirpx.com/file/1394980/>
22. Кантор Б.Я. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. Б.Я. Кантор, Е.А. Стрельникова. Харьков: Новое слово, 2005. 252 с. <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30090.pdf>
23. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с. http://www.vixri.com/d/Gradshtejn,%20Ryzhikov_Tablicy%20Integralov.pdf
24. Karaiev A. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics / A. Karaiev, E. Strelnikova // *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing.* 2020. Vol. 11, № 1, 2050003 . DOI: [10.1142/S1793962320500038](https://doi.org/10.1142/S1793962320500038) <https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S1793962320500038>
25. Кит Г.С., Хай М.В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1989. 288 с. <https://www.e-varamu.ee/item/HMM7WKKBPAMHRIRDJ7BUXPYNW4X3S625>

УДК 593.

Метод скінченних елементів при визначенні руйнівного навантаження на перфоровану оболонку при короткочасних силових впливах

К.Г. Дегтярьов, В.І. Гнітько, А.М. Тонконоженко

**Дегтярьов Кирило
Георгійович**

*провідний інженер
Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, вул.
Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна
e-mail kdegt89@gmail.com;
<http://orcid.org/0000-0002-4486-2468>*

**Гнітько
Іванович**

Василь *к.т.н., старший науковий співробітник
Інститут проблем машинобудування 22ул. А. М. Підгорного НАНУ, 22ул.
Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна
e-mail: gmitkovi@gmail.com;
<http://orcid.org/0000-0003-2475-5486>*

**Тонконоженко
Анатолій
Мстиславович**

*керівник сектору
Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля
вул. Криворізька, 3 Дніпро 49008, Україна
e-mail: stcu-yuzhnoye@freemail.dnpr.net,
<https://orcid.org/0000-0002-4721-6345>*

Досліджено напружено-деформований стан циліндричної оболонки з періодичною системою отворів. Вважається, що рух оболонки здійснюється під впливом короткочасного інтенсивного навантаження. Запропоновано метод дослідження руйнівних навантажень при короткочасних силових впливах на перфоровану циліндричну оболонку. Задачу визначення руху оболонки розглянуто в пружно-пластичному формулюванні. Вважається, що коли еквівалентні навантаження дорівнюють або перевищують границю плинності, в пружному тілі починають розвиватися пластичні деформації. Зона пластичних деформацій уточнюється на кожному кроці навантаження. Сумарну деформацію зображено в вигляді суми пружної та пластичної складових. Пружні деформації виражаються через пружні переміщення за допомогою співвідношень Коші. Умови рівноваги застосовано в напруженнях. При цьому пружна складова приводить до рівнянь Ламе в переміщеннях, невідомі пластичні напруження приймають вигляд додаткових навантажень та враховуються в правій частині диференціальних рівнянь руху. Застосовуються теорія малих пружно-пластичних деформацій та теорія течії. Обирається закон пластичної течії, задається мульти - лінійна або білінійна діаграма розтягування, що характеризує зону пластичної течії, при цьому вважається, що компоненти девіатору пластичних деформацій прямо пропорційні компонентам девіатору напружень. Для розв'язання системи диференціальних рівнянь руху використано метод скінченних елементів. Використані просторові 20-ті вузлові скінченні елементи з квадратичною апроксимацією переміщень всередині елементів. Проведено дослідження збіжності методу в залежності від кількості елементів. Отримано оцінку моменту початку руйнування.

Ключові слова: перфорована оболонка, пружно-пластична поведінка, короткочасне навантаження, метод скінченних елементів, руйнування

Finite element method in determining the destructive load on the perforated shell under short-term forces

K. Degtyarev, V. Gnitko, A. Tonkonozhenko

Degtyarev Kirill

*senior Engineer,
National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical
engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046;
e-mail: kdegt89@gmail.com;
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4486-2468>.*

Gnitko Vasyl

*PhD, Senior Research Fellow,
National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical
engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046;
e-mail: gmitkovi@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2475-5486>.*

**Tonkonozhenko
Anatoly** *head of department,
M. K. Yange Yuzhnoye Design Office
Dnipro, Krivorizka, 3, Ukraine, 49008,
e-mail: stcu-yuzhnoye@freemail.dnepr.net,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4721-6345>.*

Stress-strain state of cylindrical shells with periodic system of openings is considered. It is supposed that the shell moves under the influence of short-term intense load. The method of determining destructive loads in case of short-term force effects on a perforated cylindrical shell is proposed. The problem of determining the shell motion is considered in the elastic-plastic formulation. It is supposed that when the equivalent loads are equal to or exceed the yield strength; plastic deformations begin to develop in the elastic body. The zone of plastic deformations is specified at each step of loading. The total deformation is presented as the sum of elastic and plastic components. Elastic deformations are expressed through elastic displacements with Cauchy ratios. Equilibrium conditions are applied in stresses. The elastic component results in to Lamé equations in displacements, unknown plastic stresses take the form of additional loads and are taken into account in the right part of the differential equations of motion. The theories of small elastic-plastic deformations and plastic flows are applied. The law of plastic flow is chosen, a multi-linear or bilinear tensile diagram characterizing the zone of plastic flow is given, and it is assumed that components of plastic deviator deformations are directly proportional to the components of the stress deviator. The finite element method is used to solve the system of differential equations of motion. Spatial 20-nodes finite elements with quadratic approximation of unknown motion inside elements are used. Studying the convergence of the method depending on the number of elements has been performed. The estimation of the moment of the beginning of destruction is obtained.

Key words: *perforated shell, elastic-plastic behavior, short-term load, finite element method, fracture*

Метод конечных элементов при определении разрушающей нагрузки на перфорированную оболочку при кратковременном нагружении

К.Г. Дегтярев, В.И. Гнисько, А.М. Тонконоженко

**Дегтярев Кирилл
Георгійович** *ведущий инженер
институт проблем машиностроения им. А. . Подгорного НАНУ, ул.
Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина
e-mail kdegt89@gmail.com;
<http://orcid.org/0000-0002-4486-2468>*

**Гнисько Василий
Іванович** *к.т.н., старший научный сотрудник
институт проблем машиностроения им. А. . Подгорного НАНУ, ул.
Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина
e-mail: gnitkovi@gmail.com;
<http://orcid.org/0000-0003-2475-5486>*

**Тонконоженко
Анатолій
Мстиславович** *начальник сектору
Конструкторское бюро «южное»им. М.К. Янгеля
вул. Криворізька, 3 Дніпро 49008, Україна
e-mail: stcu-yuzhnoye@freemail.dnepr.net,
<https://orcid.org/0000-0002-4721-6345>*

Исследовано напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки с периодической системой отверстий. Движение оболочки осуществляется под действием кратковременной интенсивной нагрузки. Предложен метод исследования разрушающих нагрузок при кратковременных силовых воздействиях на перфорированную цилиндрическую оболочку. Задача определения движения оболочки рассмотрена в упруго - пластической формулировке. При этом, когда эквивалентные напряжения равны или превышают предел текучести, в упругом теле развиваются пластические деформации. Зона пластических деформаций уточняется на каждом шаге по нагрузке. Суммарная деформация представлена в виде суммы упругой и пластической составляющих. Упругие деформации выражаются через упругие перемещения с помощью соотношений Коши. Рассмотрены уравнения равновесия в напряжениях. При этом упругая составляющая приводит к уравнениям Ламе в перемещениях, неизвестные пластические напряжения принимают вид дополнительных нагрузок и учитываются в правой части дифференциальных уравнений движения. Применяются теория малых упруго - пластических деформаций и теория течения. Задается мульти - линейная или билинейная диаграмма растяжения, характеризующая зону пластического течения, при этом принято, что компоненты девиатора пластических деформаций прямо пропорциональны компонентам девиатора напряжений. Для решения системы дифференциальных уравнений движения использован метод конечных элементов. Используются пространственные 20-ти узловые конечные элементы с квадратичной аппроксимацией неизвестных перемещений внутри элементов. Проведено исследование сходимости метода в зависимости от количества элементов. Получена оценка времени до начала разрушения.

1 Вступ

Дослідження впливу пластичних деформацій та деформацій повзучості є актуальним для задач міцності і стійкості неоднорідних конструкцій, наприклад, в ракетно-космічній техніці. При високих рівнях навантаження і тривалих термінах експлуатації в елементах конструкцій виникають пластичні деформації. Такі деформації в першу чергу виникають при локальних навантаженнях і контактних взаємодіях [1-4]. Врахування таких ефектів, що характеризує фізичну нелінійність, дає реальну оцінку міцності і працездатності конструкцій. Задачі теорії пластичності зводяться до побудови крокових процесів послідовних наближень, в кожному наближенні розв'язується задача теорії пружності з введенням параметрів, що характеризують особливості пластичного деформування (додаткові навантаження і деформації, змінні параметри пружності та ін.) [5-9].

При імпульсному навантаженні в конструкції виникають напруження різної природи, що поширюються з визначеними швидкостями у вигляді хвиль збурення (хвиль напружень - навантаження, розвантаження і відображення). Залежно від природи хвиль напружень області збурення поділяються на первинні та вторинні. Первинною є область збурень хвилі навантаження, так як при її відсутності не існує хвиль розвантаження і відображення; відповідно області збурень хвиль розвантаження і відбитих хвиль вважаються вторинними. Вони завжди знаходяться всередині області збурень хвилі і є областями з початковими напруженнями та деформаціями.

Метою цього дослідження є прогноз руйнування конструктивного елемента в вигляді перфорованої, встановлення моменту часу, в який відбувається руйнування. На підставі розрахунків даються рекомендації щодо зміни параметрів конструктивного елемента для поліпшення міцності.

2. Формулювання задачі

Розглянуто циліндричну оболонку, послаблену періодичною системою кругових отворів. Створено спрощену геометричну модель для розрахунку руху такої оболонки, зображену на рис. 2.1. Для прискорення розрахунків було введено дві площини симетрії, що дозволило залишити в розрахунках одну чверть вхідної конструкції.

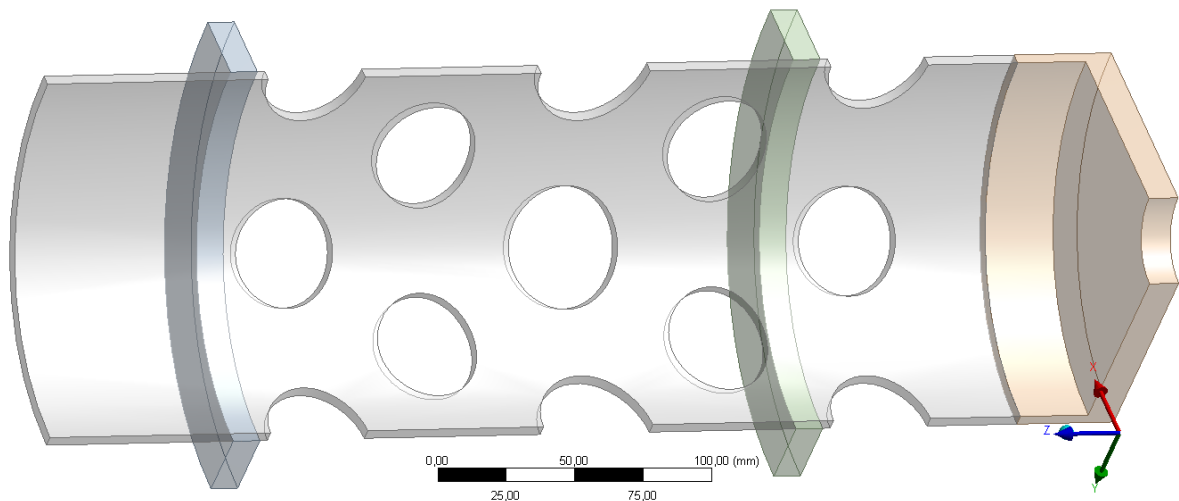


Рисунок 2.1 Розрахункова модель конструкції

Навантаження, що діє на конструктивний елемент, подаються у вигляді таблиці, в якій показано зміну тиску як функції часу.

Вважаємо, що при збільшенні навантаження в тілі можуть розвиватися пластичні деформації, тобто зв'язок напружень і переміщень не буде описуватися законом Гука.

Для визначення динамічного напружено-деформованого стану пружного тіла служать граничні умови задачі і система трьох диференціальних рівнянь еліптичного типу в частинних похідних другого порядку (рівнянь Ламе) напружень і деформацій

$$\mu \Delta u_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + X_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad j=1,2,3.$$

$$\text{де } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \vartheta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3};$$

$u_i(\mathbf{x})$ - переміщення,

X_i - компоненти об'ємної сили,

ρ - густина матеріалу конструктивного елементу,

$\mu = E[2(1+\nu)]^{-1}$ – модуль зсуву,

$\lambda = E\nu[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$ – коефіцієнт Ламе,

E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона, відповідно.

$$\text{При цьому } \nu = \lambda[2(\lambda + \mu)]^{-1}, \quad E = \mu(2\mu + 3\lambda)(\lambda + \mu)^{-1}.$$

Якщо перші похідні переміщень настільки малі, що їх квадратами і добутками частинних похідних від $u_i(\mathbf{x})$ можна знехтувати, то деформації ε_{ij} подаються у формі тензора малих деформацій Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}). \quad (2.1)$$

Компоненти тензора напружень для пружного ізотропного тіла, яке зазнає впливу зовнішніх механічних навантажень, визначаються через компоненти $u_i(\mathbf{x})$ за законом Гука в формі [10]

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Згідно з [10], введемо диференційний оператор пружних напружень (оператор зусиль класичної теорії пружності), що діє на поверхні зі зовнішньою одиничною нормаллю $\mathbf{n}(\mathbf{x})$

$$T_{ij}^n(\partial_x, \mathbf{n}(\mathbf{x})) = \lambda n_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \delta_{ij} \mu \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

де $n_j(\mathbf{x})$ - компоненти вектору нормалі.

Припустимо, що на частині межі Γ_1 задані переміщення тіла, а на частині Γ_2 - зусилля; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Зусилля виражаються за формулою

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}^n(\partial_x, \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \lambda n \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}). \quad (2.3)$$

Тобто граничні умови мають вигляд

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_1} = \mathbf{U}(t), \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_2} = \mathbf{P}(t). \quad (2.4)$$

Задаються також початкові умови, якщо розглядається динамічний стан

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = 0. \quad (2.5)$$

Зазвичай розглядаються нульові початкові умови, тобто вважається, що рух тіла починається із стану спокою.

Вважаємо, що при збільшенні навантаження в тілі можуть розвиватися пластичні деформації, тобто зв'язок напружень і переміщень не буде описуватися законом Гука. Будемо застосовувати теорію малих пружних деформацій або теорію течії.

Формулювання задачі пружно-пластичного деформування є такі. Нехай на тіло, що займає область Ω з границею Γ , діють задані об'ємні та поверхневі сили. Потрібно визначити поля напружень, деформацій і переміщень $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) та невідомі заздалегідь інтенсивності повних напружень та повних деформацій в області Ω , які відповідають заданим граничним умовам та співвідношенням, що описують рух тіла при різних рівнях навантаження.

Для знаходження зазначених функцій застосовуються такі рівняння:

- диференціальні рівняння рівноваги в напруженнях σ_{ij}

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} 0; \quad i, j = 1, 2, 3,$$

- граничні умови (2.4);
- початкові умови (2.5);
- співвідношення Коші, які дають залежності між компонентами тензора деформацій і компонентами вектора переміщень та визначаються формулою (2.1);
- фізичні рівняння, що зв'язують компоненти тензорів напружень і деформацій до моменту виникнення пластичних деформацій (закон Гука, формула (2.2));
- умова плинності, при виконанні якого виникають пластичні деформації (умова Хубера-Мізеса-Генки)

$$\sigma_{eq}(\mathbf{x}) = \sigma_T,$$

де σ_T - межа плинності;

$\sigma_i(\mathbf{x})$ - інтенсивність повних напружень, що визначається за формулою

$$\sigma_{eq}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}.$$

Якщо $\sigma_{eq}(\mathbf{x}) < \sigma_T$, то матеріал знаходиться в пружній зоні, і пластичні деформації не розвиваються.

Згідно з [11] використовуємо гіпотезу про існування єдиної кривої деформування, яка встановлює однозначну залежність між еквівалентними деформаціями ε_{eq} та еквівалентними напруженнями σ_{eq} . Задається мульти - лінійна або білінійна діаграма розтягування, що характеризує зону пластичної течії. За гіпотезою єдиної кривої деформування вважається, що діаграма напруження-деформації залишається такою ж, як при одноосьових випробуваннях, але одноосьові напруження і деформація замінюються відповідними інтенсивностями напружень і деформацій. За даними [12] вважаємо, що густина ρ є сталою.

Інтенсивність еквівалентних деформацій визначається за формулою

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)}. \quad (2.6)$$

Повна деформація є сумою її пружної та пластичної складових за гіпотезами Прандтля-Рейса [11]

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{pl}. \quad (2.7)$$

Тоді повну еквівалентну деформацію можна подати у вигляді суми її еквівалентних пружної ε_{eq}^e та пластичної ε_{eq}^{pl} частин, а саме:

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_{eq}^e + \varepsilon_{eq}^{pl}.$$

Компоненти пружної деформації зв'язані з компонентами напружень законом Гука.

Згідно з [13] вважаємо, що за рахунок пластичних деформацій зміна об'єму невелика, тобто виконана умова нестисливості матеріалу; при малих пластичних деформаціях компоненти девіатора деформацій пропорційні компонентам девіатора напружень. Між інтенсивністю еквівалентних напружень та інтенсивністю еквівалентних деформацій існує функціональна залежність

$$\sigma_{eq} = \Phi(\varepsilon_{eq}), \quad (2.8)$$

Причому ця залежність, є єдиною для даного матеріалу, не залежить від виду напруженого стану, й подібна до залежності від напруженнями та деформаціями при розтягненні. Тому цю залежність зазвичай будують за діаграмою розтягнення.

Фізичні рівняння, або рівняння зв'язку між напруженнями та деформаціями, або швидкостями деформацій, залежать від прийнятих законів зміцнення. В теорії малих пружно-пластичних

деформацій задається зв'язок між напруженнями та деформаціями, а в теорії пластичного плинину задаються зв'язки між напруженнями та швидкостями деформацій.

В цьому дослідженні використано теорію малих пластичних деформацій, з використанням гіпотез Прандтля-Рейса [13], а також теорію Купера – Саймондса [14], коли пластичні деформації суттєво перевищують пружні.

Фізичні рівняння теорії малих пружно-пластичних деформацій мають вигляд

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_{eq}}{\varepsilon_{eq}} \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{eq}}{\sigma_{eq}} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0), \quad \sigma_0 = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_0, \quad \sigma_{eq} = \Phi(\varepsilon_{eq}), \quad (2.9)$$

де ε_{eq} визначається за формулою (2.6).

Внаслідок рівності (2.7) маємо для прирощень деформацій такі співвідношення

$$\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon_{ij}^e + \delta\varepsilon_{ij}^{pl}.$$

Прирощення пружних деформацій знаходимо із закону Гука, а прирощення пластичних деформацій знаходимо за формулою [13], а саме

$$\delta\varepsilon_{ij}^{pl} = \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}}.$$

При застосуванні теорії малих пружно-пластичних деформацій маємо для додаткових деформацій такі вирази [13] із застосуванням критерію Хубера-Мізеса-Генки маємо

$$\delta\varepsilon_{ij}^{pl} = \left(\Psi - \frac{1}{2\mu} \right) (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0),$$

де $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0$ - компоненти девіатора напружень.

Згідно з методом додаткових навантажень [11], знаходимо

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) = \frac{1}{\Psi} (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0), \quad \frac{1}{\Psi} = 2\mu - \left(2\mu - \frac{1}{\Psi} \right).$$

Це дає змогу побудувати таке зображення повних напружень

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \left(2\mu - \frac{1}{\Psi} \right) (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0).$$

Якщо $2\mu - \frac{1}{\Psi} = 0$, то маємо співвідношення пружної задачі. Це співвідношення приймаємо як нульове наближення для значення Ψ . Після розв'язання рівнянь Ламе знаходимо відповідні нульові наближення для переміщень та деформацій $u_i^{(0)}, \varepsilon_{ij}^{(0)}$. Далі за формулою (2.6) знаходимо $\varepsilon_{eq}^{(0)}$ та за формулою (2.8) обчислюємо $\sigma_{eq}^{(0)}$. Після цього знаходимо перше наближення для Ψ за формулою

$$\Psi^{(1)} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{eq}^{(0)}}{\varepsilon_{eq}^{(0)}}.$$

Далі знову розв'язуємо рівняння Ламе з відомими додатковими правими частинами, побудованими за $\left(2\mu - \frac{1}{\Psi} \right) (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)$ та отримуємо $u_i^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}$. Далі знаходимо $\varepsilon_{eq}^{(1)}, \sigma_{eq}^{(1)}$ та

$\Psi^{(2)} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{eq}^{(1)}}{\varepsilon_{eq}^{(1)}}$. Розв'язання задачі продовжуємо доти різниця між наближеннями по нормі не буде

перевищувати наперед заданого малого додатного числа [15].

Після цього переходимо на наступний крок за часом.

Теорію малих пружно-пластичних деформацій застосовуємо доти пластична частина деформацій є малою в порівнянні з пружною. В наших розрахунках надалі приймалось, що для застосування цієї теорії еквівалентна пластична деформація має не перевищувати 0.1 від еквівалентної пружної деформації.

При перевищенні вказаної межі переходимо до застосування теорії Купера – Саймондса. При цьому обчислюємо швидкості деформацій і застосовуємо зв'язок між швидкостями деформацій та напруженнями, як критерій руйнування використовуємо таку залежність

$$\dot{\sigma}_{eq} = \sigma_{eq} \left[1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}_{eq}}{D} \right)^{\frac{1}{n}} \right], \quad (2.10)$$

де D, n є сталими матеріалу, інтенсивність швидкостей $\dot{\epsilon}_{eq}$ обчислюється за формулою

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22})^2 + (\dot{\epsilon}_{22} - \dot{\epsilon}_{33})^2 + (\dot{\epsilon}_{33} - \dot{\epsilon}_{11})^2} + \frac{3}{2} (\dot{\epsilon}_{12}^2 + \dot{\epsilon}_{23}^2 + \dot{\epsilon}_{31}^2).$$

Вираз (2.10) є динамічною границею плинності. Рівняння (2.9) узагальнюються таким чином

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0 = \frac{2}{3} \frac{\dot{\sigma}_{eq}}{\dot{\epsilon}_{eq}} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_{eq}}{\dot{\sigma}_{eq}} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0), \quad \dot{\sigma}_{eq} = \Phi(\dot{\epsilon}_{eq}).$$

В рівняннях Прандтля-Рейса приріст пружних деформацій вважаємо малим по відношенню до приросту пластичних деформацій.

Далі знаходимо швидкості деформацій та напруження на кожному кроці за часом.

Вибирається також критерій руйнування. Це критичне значення еквівалентної деформації. Моделювання процесу локального руйнування матеріалу реалізується наступним чином. Коли еквівалентні деформації сягають свого граничного значення, матеріал конструкції вважається зруйнованим, а час, за який отримано це граничне значення, вважається часом руйнування.

3 Числовий метод розв'язання задачі

На теперішній час основними методами чисельного інтегрування диференціальних рівнянь по просторовим координатам в задачах аналізу статичного та динамічного напружено-деформованого стану конструкцій є методи скінченних та граничних елементів, метод скінченних різниць та методи розкладення в ряди [16-20]. Кожен з них має свої переваги та недоліки, що обумовлює вибір методу для кожної конкретної задачі.

В цьому дослідженні використано метод скінченних елементів, детальний опис застосованого методу подано в роботі [9].

Була створена якісна скінченно-елементна сітка з методом побудови одноманітних скінченних елементів, пріоритетом якого є рівносторонні елементи однакового розміру, які найбільш краще підходять для динамічного аналізу.

Використовувались 20-вузлові просторові скінченні елементи з квадратичною апроксимацією переміщень всередині елементів.

Також було здійснено локальне подрібнення сітки в найбільш слабких і небезпечних місцях конструкції. Такими місцями є кільця отворів найбільших діаметрів, що знаходяться між двох пасків конструкції. Фінальна сітка скінченних елементів (рис. 3.1) налічує понад 35 тисячі скінченних елементів із середньою якістю елемента більше 0.85, що є хорошим результатом для оболонкової моделі даної геометрії. Збільшення кількості скінченних елементів вдвічі не привело до суттєвої зміни результатів.

В розрахунках прийнято мульті - лінійну діаграму розтягнення, та її форма прийнята для побудови діаграми, що описує зв'язок між інтенсивністю еквівалентних деформацій та еквівалентних напружень, рис. 3.2.

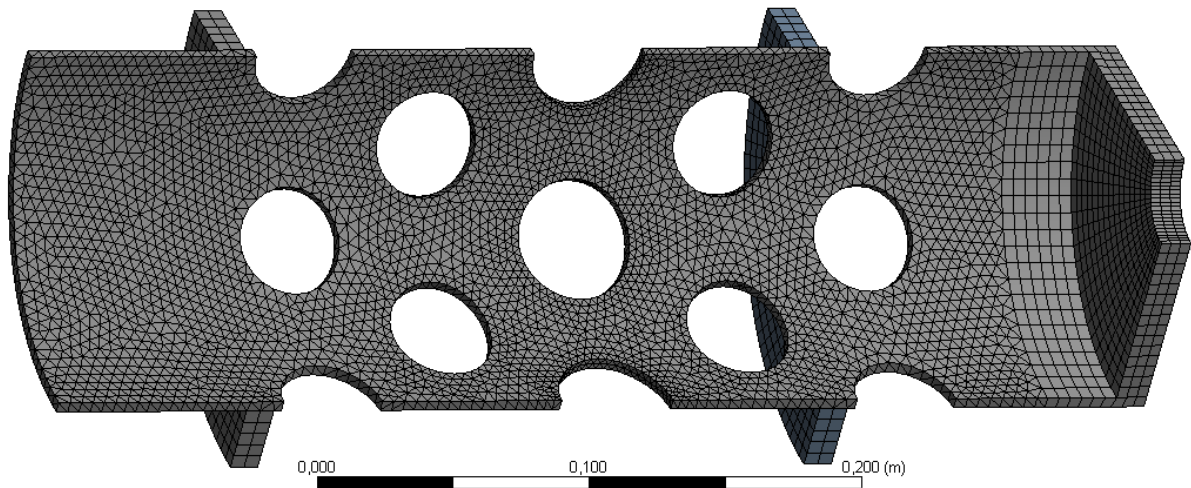


Рисунок 3.1 Скінченно-елементна модель конструкції

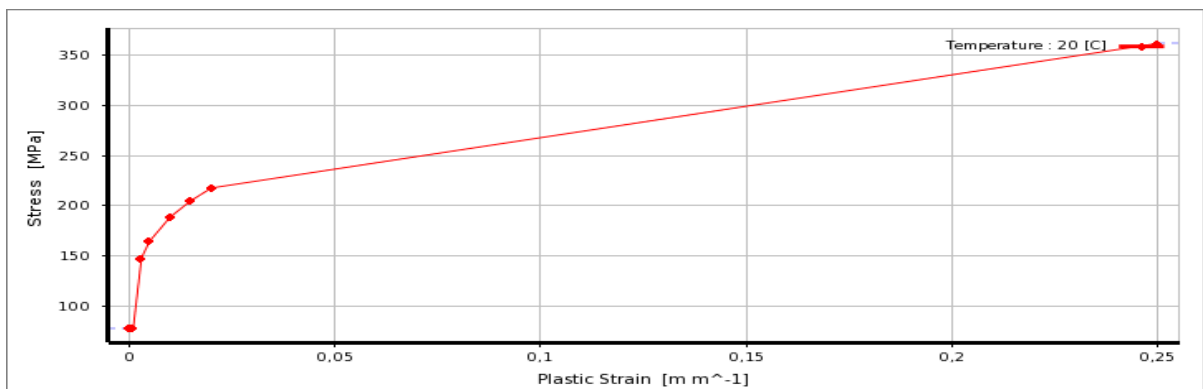


Рисунок 3.2 Мульти- лінійна діаграма розтягнення

Навантаження є тиском на внутрішню поверхню оболонки, включаючи один з її фланців, що викликає не тільки меридіональні, але й напруження розтягу. Навантаження змінюються як за часом, так і за величиною, та задаються в табличному вигляді. Закріплення оболонки приймалося як жорстке защемлення за контуром оболонки. На рис. 3.3 зображено поверхню навантаження.

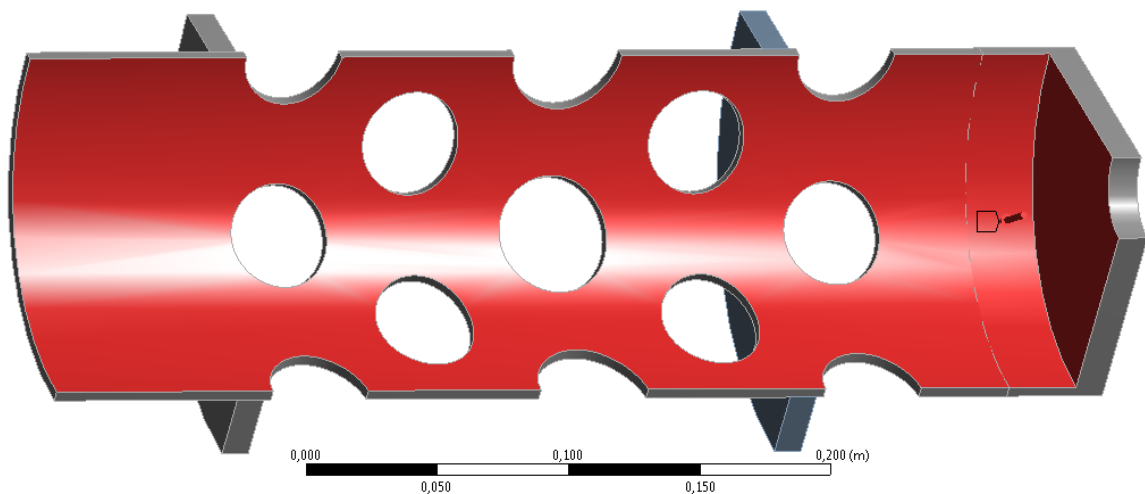


Рисунок 3.3 Поверхня навантаження на оболонку

Розглядалися навантаження, змінні за часом, та досліджувався напружено-деформований стан конструкції з урахуванням пластичних деформацій.

4 Аналіз числових результатів.

Розглянуто напружено-деформований стан перфорованої оболонки з такими геометричними параметрами: діаметр зовнішній 190мм; товщина 4 мм; товщина стінки з потовщеннями в районі фланців 5 мм; довжина оболонки з фланцем 430 мм; довжина моделі без фланця 390 мм; діаметри 1,2,4,5 кільця отворів 40мм; діаметр третього кільця отворів 45 мм; кількість отворів в кільці дорівнює 10, рис. 2.1. Оболонка виготовлена зі сталі 30ХГСА. Фізико-механічні властивості цього матеріалу подані в табл. 4.1.

Вважається що оболонка знаходиться під дією змінного навантаження, яке подається у вигляді таблиці. Схематично зміну навантаження за часом подано на рис. 4.1.

Таблиця 4.1 Властивості матеріалу Сталь 30ХГСА

ρ , кг/м ³	E, ГПа	ν	$\sigma_{0,2}$, МПа	σ_B , МПа	δ , %
7850	213	0,3	834	1059	9

Задача розрахунку полягає у визначенні напружено-деформованого стану конструкції, моменту початку руйнування оболонки, а також процесу руйнування.

Слід врахувати, що при таких високих напруженнях початок розвитку тріщини (початок руйнування конструкції) і момент зрощення тріщин (остаточне руйнування конструкції) практично збігаються в часі. Таким чином, визначення міцності відбувається шляхом визначення максимально допустимих пластичних деформацій. Задачу розв'язано в пружно-пластичному формулюванні.

Результати розрахунків наведені на рис.4.2-4.4.

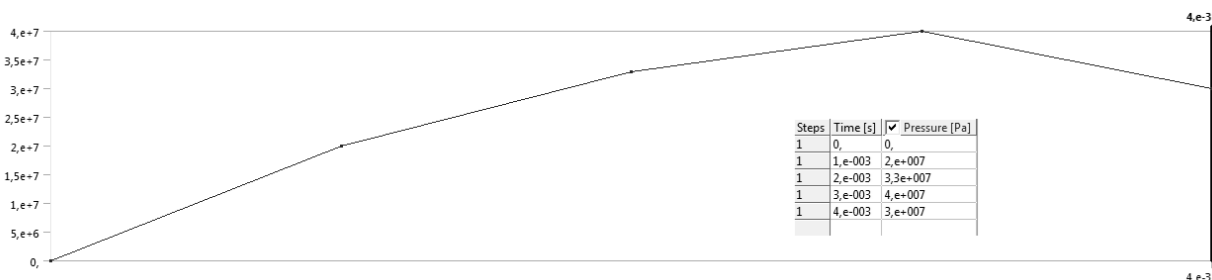
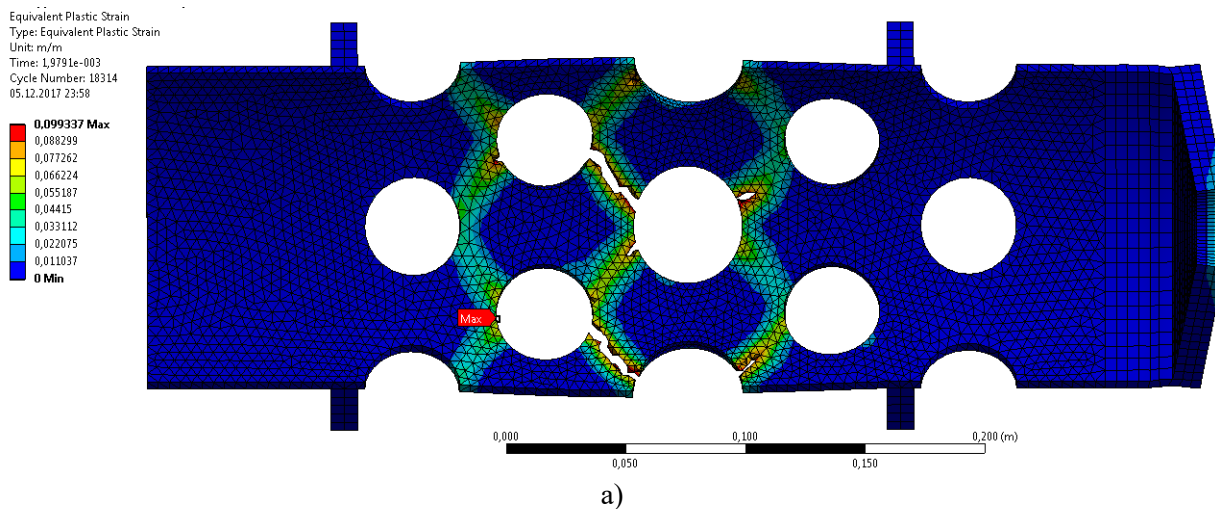
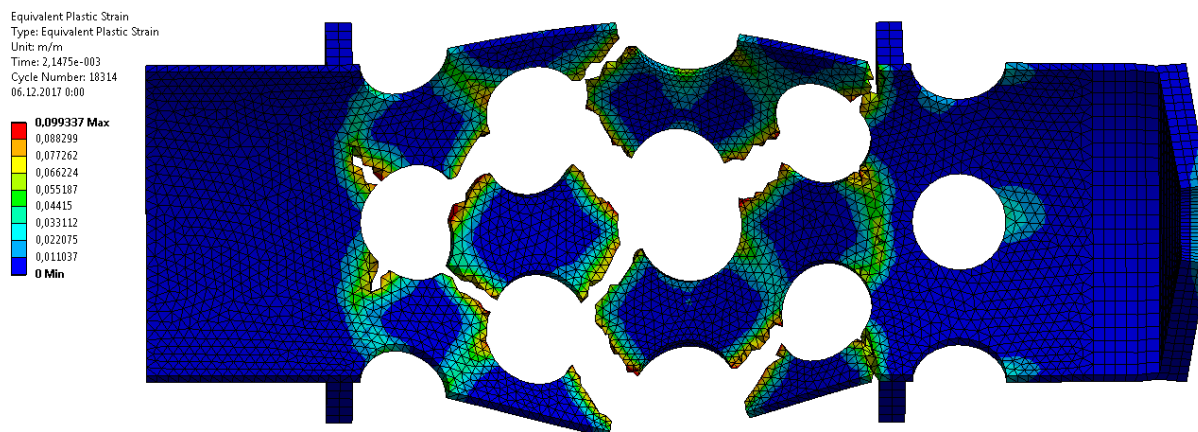


Рисунок 4.1 Зміна навантаження за часом

Зазначимо, що після моменту часу $t = 1.65$ мс матеріал зазнає значних пластичних деформацій у порівнянні з пружними. Тому, починаючи з цього моменту, було використано рівняння теорії пластичного плинину в формі Купера – Саймондса. Значення сталих в формулі (2.10) прийняті такими $D = 3000$ 1/с, $n = 3$, що характерно для сталей.



a)



б)

Рисунок 4.2 Розвинення пластичних деформацій за часом: а) $t = 1.98\text{мс}$ б) $t = 2.15\text{мс}$.

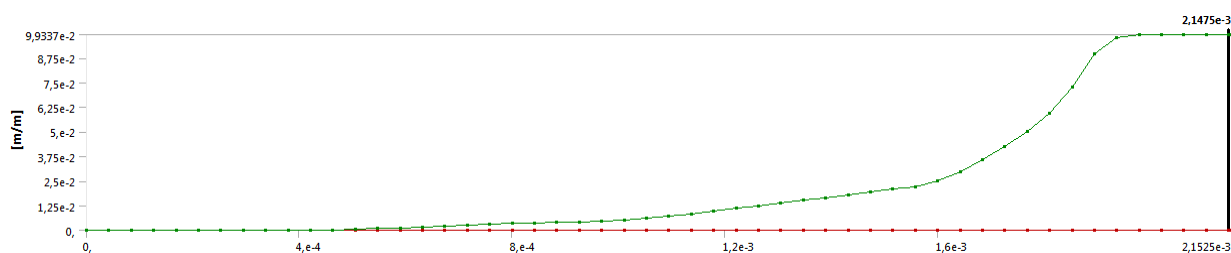


Рисунок 4.3 Залежність максимальних пластичних деформацій від часу навантаження

Аналізуючи результати, наведені на рис. 4.2 – 4.3, можна зробити такі висновки.

Поява і зростання пластичної деформації починається з середини першої мілісекунди розрахунку (рис. 4.1а). Спочатку зростання рівня пластичної деформації є несуттєвим і становить близько 3% за 1.5 мс, потім відбувається різке його прискорення. Таку поведінку, очевидно, викликано відгуком конструкції на процес її навантаження. За період між 1.5 мс і 1.98 мс відбувається різкий стрибок рівня пластичної деформації до критичного. У момент часу 1.98 мс в конструкції починаються початкове руйнування. Зруйновані елементи відразу ж зростаються в наскрізну тріщину (рис. 4.2а), що призводить до повного руйнування конструкції. Первинне руйнування відбувається шляхом зрощення тріщин між 2, 3, 4 кільцями отворів, починаючи з отворів найбільшого діаметра. Незабаром, через декілька мілісекунд частина конструкції між отворів перетворюється в набір осколків різного розміру (рис 4.2б).

Таким чином, конструкція сталеві оболонки з товщиною стінки 4 мм не пройшла віртуального випробування і передчасно зруйнувалася. Збільшення товщини стінки конструкції має надати їй додаткову міцність.

Була проведена серія перевірочних розрахунків для товщини моделі з кроком по товщині 0,2 мм. Результати розрахунку відображені на рис. 4.4.

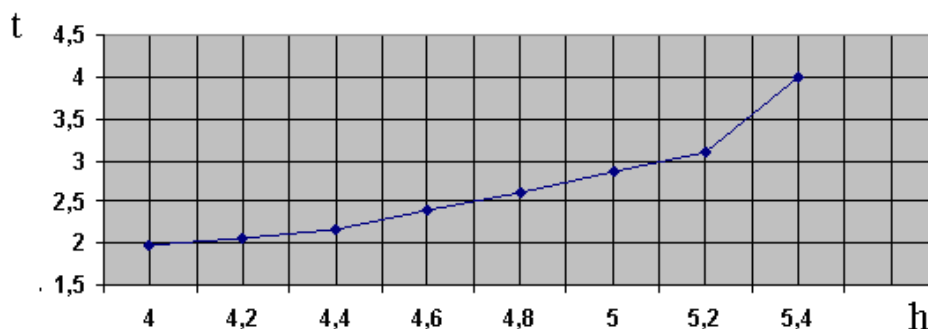


Рисунок 4.3 Залежність часу працездатності конструкції t , мс від товщини її стінки h , мм.

Закінчення серії розрахунків відбувалось при досягненні такої товщини, при якій конструкція витримала без руйнування весь процес навантаження. Першою товщиною оболонки, при якій досягається необхідна міцність, є товщина 5,4мм. Максимальні пластичні деформації, що виникають в конструкції при такій товщині, є відчутними, але не перевищують критичні 10%, що дозволяє конструкції успішно пройти віртуальні випробування і не руйнуватися.

Діаграма розподілу остаточних пластичних деформацій в оболонці подана на рис. 4.4. Графік зміни максимальних пластичних деформацій конструкції в процесі навантаження подано на рис 4.5. Розподіл еквівалентного по Мизесу напруги конструкції в момент максимуму при $t=3,12\text{мс}$ подано на рис. 4.6.

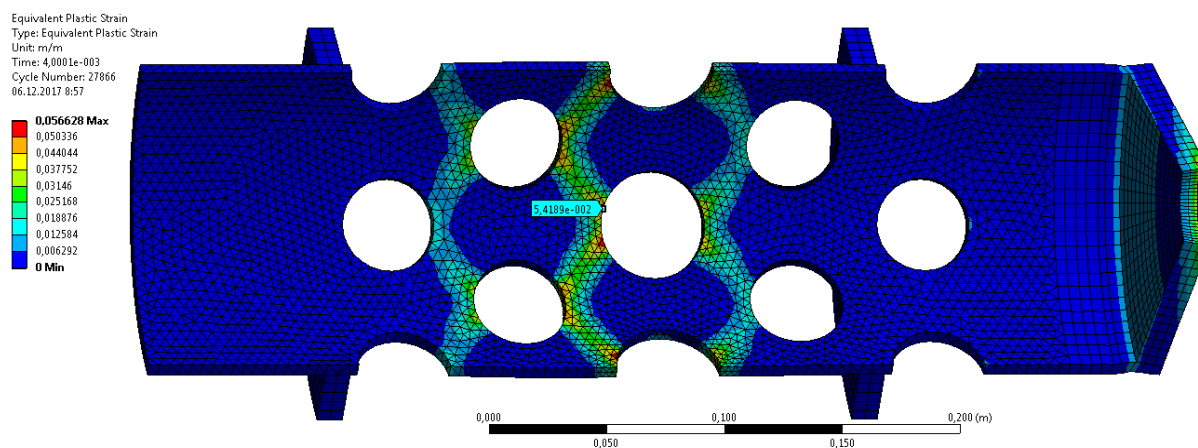


Рисунок 4.4 Розподіл пластичних деформацій конструкції в момент закінчення розрахунку

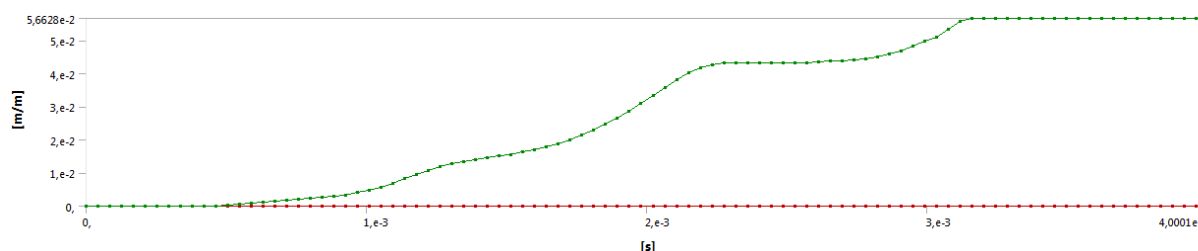


Рисунок 4.5 Графік зміни максимальних пластичних деформацій за часом

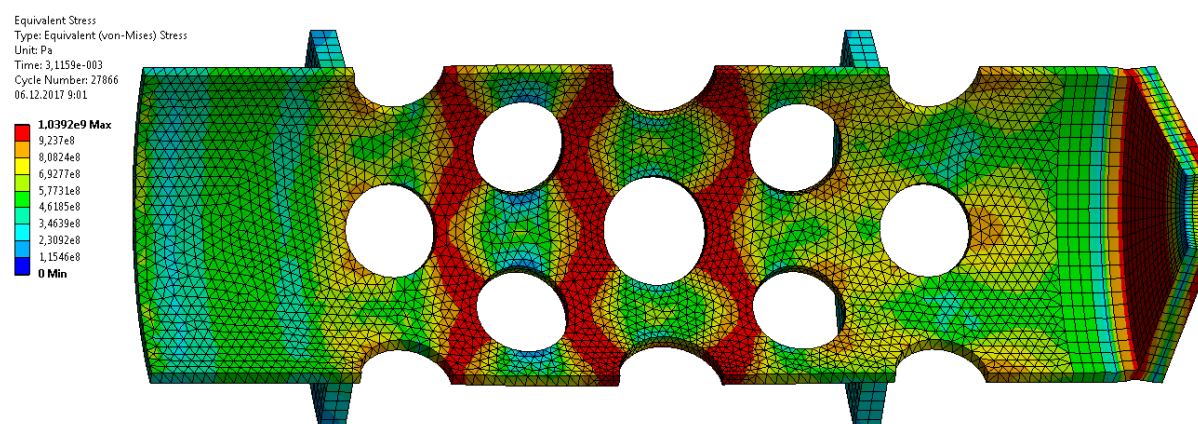


Рисунок 4.6. Розподіл еквівалентного по Мизесу напруги конструкції в момент максимуму при $t=3,12\text{мс}$

Таким чином, була отримана оптимальна товщина конструкції, що дозволяє їй успішно пройти віртуальні випробування і не піддатися руйнуванню. Рівень максимальних пластичних деформацій склав 5,7%, а конструкція витримала весь процес навантаження.

Зазначимо, що під час проведення оптимізаційних розрахунків було виявлено ефект запізнювання відгуку конструкції на її навантаження, що скоріш за все пов'язано з хвильовими процесами в конструкції, а також імпульсним характером навантаження. Описаний ефект в деяких розрахунках приводив до руйнування конструкції, при, здавалося б, достатній товщині. Дана особливість поведінки конструкції могла бути врахована тільки в динамічному розрахунку, який і був проведений.

5. Висновки

Побудовано метод розв'язання задачі визначення руйнівних навантажень на перфоровану оболонку. Розроблено комп'ютерну модель для дослідження, аналізу працездатності та визначення раціональних конструктивних параметрів перфорованих оболонкових систем з різних матеріалів при короткочасних силових впливах. Розроблено комп'ютерний метод моделювання динамічних випробувань, проведення аналізу руйнують навантажень перфорованих оболонкових систем при імпульсних впливах. Досліджено НДС і процес руйнування конструкцій. Визначено час до руйнування і величина руйнівного навантаження. Комп'ютерний аналіз дав можливість знайти мінімальну товщину моделі, що витримує випробування. В подальшому планує проведення оптимізації оболонки, враховуючи геометричні параметри, властивості матеріалів, розташування, форму і радіуси отворів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций / отв. ред. В. Л. Рвачев. Киев, 1988. 288 с. <http://www.pmi.lv/libdb/authors/view/2239>
2. Hudramovych V. S. Contact mechanics of shell structures under local loading. *Int. Appl. Mech.* 2009. V. 45, No 7. P. 708 – 729. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10778-009-0224-5>
3. Ильющин А. А. Труды в 4-х т. М., 2009. Т. 4. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. 526 с. <https://www.livelib.ru/book/1000815977>
4. Hudramovich V. S., Sirenko V. N., Klimenko D. V., Daniev Ju. F., Hart E. L. Development of the normative framework methodology for justifying the launcher structures resource of launch vehicles. *Strength of Materials*. 2019. Vol. 51, No 3. P. 333 – 340. <https://doi.org/10.33136/stma2020.01.044>
5. Hudramovich V. S., Hart E. L., Strunin K. A. Numerical simulation of behavior of elastic structures with local stiffening. *Kosm. teh. Raket. vooruž.* 2019, (2); 25-34 p. <https://doi.org/10.33136/stma2019.02.025>
6. Hudramovych V. S. Features of nonlinear deformation of shell systems with geometrical imperfections. *Int. Appl. Mech.* 2006. Vol. 42, No 7. P. 3 – 37. <https://doi.org/10.33136/stma2020.01.044>
7. Гудрамович В. С., Скальський В. Р., Селіванов Ю. М. Голографічне та акустикоемісійне діагностування неоднорідних конструкцій і матеріалів / відповід. ред. З. Т. Назарчук. Львів, 2017. 488 с. <http://www.nas.gov.ua/EN/Book/Pages/default.aspx?BookID=0000010420>
8. Гудрамович В. С., Клименко Д. В., Гарт Э. Л. Влияние вырезов на прочность цилиндрических отсеков ракет-носителей при неупругом деформировании материала. *Космична наука і технологія*. 2017. Т. 23, № 6. С. 12 – 20. <https://doi.org/10.15407/knit2017.06.012>
9. Дегтярев К.Г., Гнитко В.И., Тонконоженко А.М. Компьютерное моделирование разрушающей нагрузки на топливный бак. *Вісник Харківського національного університету імені ВН Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»* N 1105, 2014, С.51-59. http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMAM_2014_1105_24_7
10. Трёхмерные задачи математической теории упругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе. М.: Наука, 1976. 664 с. <https://www.twirpx.com/file/507934>
11. Ильющин, А. А. Пластичность. Ч. 1. Уруго - пластические деформации / А. А. Ильющин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с. <http://openarchive.nure.ua/handle/document/1342>
12. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості. К.: Вища школа, 2002. - 308 с. <http://www.library.univ.kiev.ua/ukr/elcat/new/detail.php3915952>
13. Cowper G., Symonds P. Strain hardening and strain-rate effects in the impact loading of cantilever beams. Tech. Rep. Brown University: Division of Applied Mathematics, 1957. 28 p. <https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/144762.pdf>
14. J.C.Simo, R.L. Teylor. Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity. *Computer*

methods in applied mechanics and engineering. Vol.48, pp.101-118, 1985.

[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90070-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90070-2)

15. Degtyarev, K., Glushich, P., Gnitko, V., Strelnikova, E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells. // *International Journal of Modern Physics and Applications*. Vol. 1, No. 4, pp. 159-168, 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209

<https://www.researchgate.net/publication/280728146>

16. Місюра С. Ю., Сметанкіна Н. В., Місюра Є. Ю. Раціональне моделювання кришки гідротурбіни для аналізу міцності. *Вісн. Нац. техн. ун-ту «ХПИ»*. Сер. Динаміка і міцність машин. 2019. № 1. С. 34–39. <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44370>

17. Дегтярев К.Г., Стрельникова Е.А., Шелудько Г.А. Компьютерное моделирование лопастей ветроустановок с оптимальными параметрами / *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*, No 19, 2012, С.81-86 <http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf>

18. Medvedovskaya T. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers / T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva // *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*. – 2015. – Vol. 1, No 1. – P. 45–50. – DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961

<https://www.researchgate.net/publication/282868308>

19. Еселева Е.В. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью / Е.В. Еселева, В.И. Гнидько, Е.А. Стрельникова // *Пробл. машиностроения*. –2006. Т. 9. – №1, – С.105 - 118. <http://journals.uran.ua/jme/issue/archive>

20. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L., Strelnikova, E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), pp.75-87, 2016. <https://www.researchgate.net/publication/301655238>

REFERENCES

1. Mossakovsky V.I., Gudramovich V.S., Makeev E.M. Contact interactions of elements of shell structures / ed. V. L. Rvachev. Kiev, 1988. 288 p. URL: <http://www.pmi.lv/libdb/authors/view/2239>

2. Hudramovych V. S. Contact mechanics of shell structures under local loading. *Int. Appl. Mech.* 2009. V. 45, No 7. P. 708 – 729. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10778-009-0224-5>

3. Ilyushin A.A. Proc. in 4 volumes. M., 2009. V. 4. Modeling of dynamic processes in solids and engineering applications. 526 p. URL: <https://www.livelib.ru/book/1000815977>

4. Hudramovich V. S., Sirenko V. N., Klimenko D. V., Daniev Ju. F., Hart E. L. Development of the normative framework methodology for justifying the launcher structures resource of launch vehicles. *Strength of Materials*. 2019. Vol. 51, No 3. P. 333 – 340. URL: <https://doi.org/10.33136/stma2020.01.044>

5. Hudramovich V. S., Hart E. L., Strunin K. A. Numerical simulation of behavior of elastic structures with local stiffening. *Kosm. teh. Raket. vooruz.* 2019, (2); 25-34 URL:

<https://doi.org/10.33136/stma2019.02.025>

6. Hudramovych V. S. Features of nonlinear deformation of shell systems with geometrical imperfections. *Int. Appl. Mech.* 2006. Vol. 42, No 7. P. 3 – 37 URL: <https://doi.org/10.33136/stma2020.01.044>

7. Gudramovich V.S., Skalskiy V.R., Selivanov Yu.M. Holographic and acousto-efficient diagnostics of heterogeneous designs and materials / reports. ed. Z. T. Nazarchuk. Lviv URL:

<http://www.nas.gov.ua/EN/Book/Pages/default.aspx?BookID=0000010420>

8. Gudramovich V.S., Klimenko D.V., Gart E.L. Influence of cutouts on the strength of cylindrical compartments of launch vehicles under inelastic deformation of the material. *Space science and technology*. 2017. Vol. 23, No. 6. P. 12 – 20 URL: <https://doi.org/10.15407/knit2017.06.012>

9. Degtyarev K.G., Gnitko V.I., Tonkonozhenko A.M. Computer simulation of the destructive load on the fuel tank. Bulletin of Kharkiv National University for the Name of VN Karazin, series “Mathematical Model. Information technologies. Automated control systems” N 1105, 2014, pp.51-59 URL:

http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMAM_2014_1105_24_7

10. Three-dimensional problems of mathematical theory of elasticity / V.D. Kupradze, T.G. Hegelia, M.O. Bashaishvili, T.V. Burchuladze - Moscow: Nauka, 1976. - 664 p. URL:

<https://www.twirpx.com/file/507934>

11. Ilyushin, A.A. Plasticity. Part 1. Elastic - plastic deformation / A. A. Ilyushin. - M.; L.: Gostekhizdat, 1948. - 376 p. URL: <http://openarchive.nure.ua/handle/document/1342>

12. Mozharovsky M.S. The theory of springiness, plasticity and increased sensitivity. К.: Vischa school, 2002. - 308 p. URL:
<http://www.library.univ.kiev.ua/ukr/elcat/new/detail.php3915952>
13. Cowper G., Symonds P. Strain hardening and strain-rate effects in the impact loading of cantilever beams. *Tech. Rep. Brown University: Division of Applied Math.*, 1957. 28 p. URL:
<https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/144762.pdf>
14. J.C.Simo, R.L. Teylor. Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. Vol.48, pp.101-118, 1985. URL:
[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90070-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90070-2)
15. Degtyarev, K., Glushich, P., Gnitko, V., Strelnikova, E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells. // *International Journal of Modern Physics and Applications*. Vol. 1, No. 4, pp. 159-168, 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209 URL:
https://www.researchgate.net/publication/280728146_Numerical_Simulation_of_Free_Liquid-Induced_Vibrations_in_Elastic_Shells
16. Misyura S., Smetankina N., Misyura U. Rational modeling of a hydroturbine cover for strength analysis. *Bulletin of Kharkiv Polytechnic Institute, Dynamics and strength of machines*, no. 1, pp.34 –39, 2019. URL:
<http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44370> [in Ukrainian]
17. Degtyarev K. Strelnikova E. Sheludko G. Computer modeling of wind turbine blades with optimal parameters. *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems*, no. 19, pp.81 – 86, 2012. URL:
<http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf> [in Russian]
18. Medvedovskaya T. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers / T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva // *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*. 2015. Vol. 1, No 1. – P. 45–50. – DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961 URL:
https://www.researchgate.net/publication/282868308_Free_Hydroelastic_Vibrations_of_Hydroturbine_Head
19. Eseleva E.V., Gnitko V.I., Strelnikova E.A. Natural vibrations of pressure vessels when interacting with liquid. *Problems of Mechanical Engineering*, vol. 9, no 1, pp.105 – 118, 2006.URL:
<http://journals.uran.ua/jme/issue/archive> [in Ukrainian]
20. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L., Strelnikova, E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), pp.75-87, 2016. <https://www.researchgate.net/publication/301655238>

УДК 531.8+62-50

Параметрична оптимізація кінематичної структури та руху дволанкового маніпулятора

М.В. Демидюк, В.М. Демидюк

**Демидюк
Мирослав Васильович**

*кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАНУ, вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна
e-mail: m_demydyuk@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0002-9719-4512>*

**Демидюк
Віталій Мирославович**

*магістр (системний аналіз), інженер-програміст, ТОВ “ДевКрафт”
(ORIL Inc., www.oril.co), вул. Сигнівка, 3, оф. 81, м. Львів, 79040, Україна,
e-mail: vitalii.demydiuk@oril.co
<https://orcid.org/0000-0003-3442-2108>*

Досліджуємо керований рух дволанкового маніпулятора, який під дією керувань (моментів сил у шарнірах) виконує транспортну операцію в горизонтальній площині: переносить вантаж із заданого початкового положення в задане кінцеве. Швидкість вантажу на початку та в кінці операції вважаємо нульовою, тривалість руху заданою. Під час налаштування маніпулятора (на виконання заданої операції) можна змінити положення базового шарніра, що зв'язує систему з нерухомою основою. Також для заданих лінійних координат вантажу (на початку та в кінці руху) можливі різні кутові конфігурації ланок маніпулятора. Сформульовано задачу сукупної оптимізації координат базового шарніра, початкових і кінцевих конфігурацій ланок маніпулятора та його руху за умови мінімізації квадратичного (за керуваннями) функціонала. Запропоновано алгоритм побудови субоптимального розв'язку задачі, який ґрунтується на методиці параметричної оптимізації. Кутові координати маніпулятора апроксимуємо сумою кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду (з невідомими параметрами). Коефіцієнти полінома знаходимо із початкових та кінцевих умов транспортної операції. В результаті вихідна задача зводиться до задачі нелінійного програмування з цільовою функцією, залежною від координат базового шарніра, граничних конфігурацій ланок та коефіцієнтів тригонометричного ряду. Для розв'язання отриманої задачі використовуємо числові алгоритми мінімізації функцій багатьох змінних. Наведено результати числового моделювання субоптимального руху дволанкового маніпулятора, також чисельно досліджено вплив координат базового шарніра на характеристики цього руху.

Ключові слова: дволанковий маніпулятор, транспортна операція, оптимальне керування, параметризація кутових координат, нелінійне програмування.

Parametric optimization of the kinematic structure and the movement of the two-link manipulator

Demydyuk Myroslav

*PhD, Senior Researcher,
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine, 3-B Naukova St., L'viv, 79060,
Ukraine*

Demydiuk Vitalii

*Master's Degree (System Analysis), Software Engineer, LLC “DevCraft”,
(ORIL Inc., www.oril.co), 3 Syhnyvka St., off. 81, L'viv, 79040, Ukraine*

The controlled motion of a two-link manipulator has been studied. The manipulator being under the action of controls (torques at joints) performs a transport operation in the horizontal plane, namely, transfers the cargo from a given initial position to a given final position. The speeds of the cargo at the beginning and end of the operation are considered to be zero, and the duration of the movement is given. While preparing the manipulator for executing a given operation, it is possible to change the placement of the joint which connects it to a fixed base. The different angular configurations of manipulator links are available at the beginning and the end of the operation. The problem for aggregate optimization of the base joint coordinates, as well as the boundary configurations of the links of the manipulator and its movements is formulated, providing that the quadratic (over the controls) functional is minimized. The algorithm for building a suboptimal solution of the problem, based on the methodology of parametric optimization is proposed. The angular coordinates of the manipulator are approximated by the sum of a cubic polynomial and a finite trigonometric series (with unknown parameters). The coefficients of the polynomial are found from the initial and final conditions of the transport operation. As a result, the initial problem is reduced to the

problem of nonlinear programming with an objective function depending on the coordinates of the base joint, boundary configurations and coefficients of the trigonometric series. The standard numerical procedures for minimization of the functions of many variables have been used to solve the resulting nonlinear programming problem. The results of numerical modeling of two-link manipulator suboptimal motion are described, and the influence of the base joint coordinates on the characteristics of this motion is numerically investigated. The analysis of numerical calculations shows that the position of the base joint and the boundary configurations of a two-link manipulator influence significantly the energy consumption during the transport operation.

Keywords: two-link manipulator, transport operation, optimal control, angular coordinate parameterization, nonlinear programming.

Параметрическая оптимизация кинематической структуры и движений двухзвенного манипулятора

Демьдюк Мирослав Васильевич кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С.Подстригача НАНУ, ул. Научная, 3-Б, г. Львов, 79060, Украина

Демьдюк Виталий Мирославович магистр (системный анализ), инженер-программист, ТОО “ДевКрафт”
(ORIL Inc., www.oril.co), ул. Сыгнивка, 3, оф. 81, г. Львов, 79040, Украина

Исследуем движения двухзвенного манипулятора, который под действием управлений (моментов сил в шарнирах) выполняет транспортную операцию в горизонтальной плоскости: перемещает груз с заданного начального состояния в заданное конечное положение. Скорость груза в начале и конце операции считаем нулевой, время движения заданным. При настройке манипулятора (на выполнение заданной операции) можно изменить положение базового шарнира, связывающего систему с неподвижным основанием. Также для заданных линейных координат груза (в начале и конце движения) возможны разные угловые конфигурации звеньев манипулятора. Сформулирована задача совместной оптимизации координат базового шарнира, граничных конфигураций звеньев манипулятора и его движений при условии минимизации квадратичного (по управлениям) функционала. Предложен алгоритм построения субоптимального решения задачи, базирующийся на методике параметрической оптимизации. Угловые координаты манипулятора аппроксимируем суммой кубического полинома и конечного тригонометрического ряда (с неизвестными параметрами). Коэффициенты полинома находим из начальных и конечных условий транспортной операции. В результате исходная задача сводится к задаче нелинейного программирования с целевой функцией, зависящей от координат базового шарнира, граничных конфигураций звеньев и коэффициентов тригонометрического ряда. Для решения полученной задачи используем численные алгоритмы минимизации функций многих переменных. Приведены результаты численного моделирования субоптимального движения двухзвенного манипулятора, также численно исследовано влияние координат базового шарнира на характеристики этого движения.

Ключевые слова: двухзвенный манипулятор, транспортная операция, оптимальное управление, параметризация угловых координат, нелинейное программирование.

1 Вступ

Комплексна автоматизація виробництва – важливий напрям науково-технічного прогресу. На сьогодні автоматизовані виробничі системи широко розповсюджені в різних галузях промисловості. Основним складником таких систем є маніпуляційні роботи. Постійна потреба в підвищенні технічного рівня виробництва висуває на передній план проблеми вдосконалення існуючих та створення нових зразків маніпуляційних роботів із високими функціональними показниками. Серед цих показників чільне місце займають точність позиціонування робочого органу (захоплювача) маніпулятора та енерговитрати, необхідні для виконання робочої операції [1]. Очевидно, що зазначені показники залежать від параметрів конструкції робота та його руху.

Продуктивним підходом у поліпшенні функціональних характеристик роботів є оптимізація їх конструкцій та режимів керування [2]. Поряд з цим важливим оптимізуючим чинником, що дає відчутний результат, є відповідне розміщення (у технологічній зоні виробництва) маніпуляційного робота під час його налаштування на виконання робочої операції. Як свідчать результати числового моделювання руху дволанкового маніпулятора [3], завдяки вибору відповідного розміщення базового шарніра (шарнір, що зв'язує маніпуляційну систему з нерухомою основою) можна суттєво зменшити енерговитрати на виконання операції. Значимо, що такий вибір є особливо актуальним для мобільних роботів, у яких маніпуляційна система закріплена на колісній платформі, що може переміщатися у межах робочої зони [4]. Ще одним плідним підходом у оптимізації маніпуляційних систем є вибір відповідної кінематичної конфігурації ланок маніпулятора. Наприклад, для дволанкового маніпулятора заданому

положенню захоплювача відповідають дві кінематичні конфігурації ланок, вибір яких також істотно впливає на функціональні характеристики маніпуляційної системи [5].

Ефективним у реалізації наведених вище оптимізаційних підходів є використання засобів математичного моделювання, теорії оптимізації та сучасних комп'ютерних технологій. Тому дослідження математичних моделей типових маніпуляційних систем і побудова на їхній основі алгоритмічно-програмного забезпечення для оптимізації конструкцій та режимів керування є актуальною задачею робототехніки.

Серед маніпуляційних систем чільне місце посідають дволанкові маніпулятори. Такі маніпулятори є складовими частинами конструкцій багатьох маніпуляційних роботів, у яких довжини двох суміжних ланок помітно перевищують розміри решти ланок (див., наприклад, конструкції роботів SCARA [6, 7], LabVolt 5150, KUKA KR 100-2 [8]). Саме ці ланки виконують основний обсяг руху робота під час виконання робочих операцій. Тому дволанкові маніпулятори вже тривалий час привертають увагу дослідників, про що свідчить значна кількість публікацій.

Відмітимо деякі публікації, присвячені оптимізації дволанкових маніпуляційних систем. У монографії [6] дослідили низку задач оптимального (за швидкодією) програмного керування дволанковим маніпулятором. Чисельно побудували діаграми, за допомогою яких можна визначити (у параметричному класі кусково-сталих функцій) параметри керування. На підставі числового моделювання автори показали, що для заданої транспортної операції, коли задаються лінійні координати захоплювача на початку та в кінці руху, відповідні (граничні) конфігурації дволанкового маніпулятора суттєво впливають на час швидкодії. У разі прямолінійного переміщення захоплювача автори запропонували методику визначення оптимальної конфігурації маніпулятора. У [9] розв'язали задачу оптимального керування дволанковим маніпулятором із комбінованим функціоналом, у якому інтегральна частина (квадрати керувань) виражає енерговитрати, термінальна частина – тривалість руху. Розв'язок побудували за умови статичної урівноваженості другої ланки, коли її центр мас розміщений на осі шарніра. Також тут чисельно побудували діаграми для визначення оптимальної конфігурації ланок маніпулятора (у кінцевому положенні) та напрямку їхнього повороту. Вплив граничних конфігурацій (на початку та в кінці руху) дволанкового маніпулятора на динамічні характеристики побудованого субоптимального режиму керування чисельно дослідили також у [5]. Тут для розв'язання задачі оптимального керування використали методику параметричної оптимізації, у якій кутові координати системи апроксимували сумою кубічного полінома і скінченного тригонометричного ряду (з невідомими параметрами), що дало змогу звести вихідну задачу до задачі нелінійного програмування. Аналогічну методику під час дослідження задач оптимізації руху дволанкового маніпулятора застосували в статтях [10, 11]. У праці [10] для апроксимації використали класичні ортогональні поліноми. У [11] розглянули маніпулятор, що виконує циклічну транспортну операцію під дією активних та пружинно-демпферних пасивних приводів. На основі методики параметричної оптимізації тут побудували алгоритм сукупної оптимізації параметрів пасивного приводу та законів руху маніпулятора.

Підхід, що ґрунтується на спрощенні рівнянь руху, використали в [1]. Тут для дволанкового маніпулятора з електромеханічними приводами побудували програмні режими керування, які мінімізують: енерговитрати та тривалість руху системи (задача 1); енерговитрати та точність позиціонування (задача 2). Режими керування побудували в припущенні великих передавальних чисел редукторів та нульових коефіцієнтів індуктивності обмоток якорів двигунів, що дало змогу знехтувати взаємовпливом різних ступенів вільності маніпулятора.

Алгоритми керування дволанковим маніпулятором із використанням ПД-регуляторів описано в статтях [12–14]. У [15] запропонували алгоритм адаптації класичного ПД-регулятора (з використанням симплексного інваріантного методу оптимізації), який використали в системі керування дволанковим маніпулятором.

У статті [3] автор акцентував увагу на доцільність раціонального розміщення базового шарніра дволанкового маніпулятора. Тут узагальнені координати маніпулятора задають у вигляді кубічних поліномів (за часом), коефіцієнти яких визначають з умов транспортної операції. Засобами числового моделювання показано, що положення базового шарніра суттєво впливає на енерговитрати маніпулятора. У [16] для дволанкового маніпулятора будівельного робота встановили явні залежності між лінійними розмірами робочої зони, заданої у формі прямокутника, та параметрами маніпулятора (довжинами ланок та граничними значеннями міжланкового кута). У праці [17] побудували математичну модель та алгоритми розв'язання

прямої та оберненої задач кінематики й динаміки дволанкового маніпулятора, на основі яких розробили програмний код (у середовищі MATLAB) та провели низку числових експериментів.

Нижче досліджуємо задачу сукупної оптимізації кінематичної структури та законів руху дволанкового маніпулятора. Маніпулятор під дією керувань (моментів сил у шарнірах) виконує транспортну операцію у горизонтальній площині: за заданий час переносить вантаж із заданого початкового положення у задане кінцеве. Швидкості вантажу на початку та в кінці операції вважаємо нульовими. Припускаємо, що під час налаштування маніпулятора (на виконання заданої операції) можна змінити положення базового шарніра, що зв'яже систему з нерухомою основою. Також для заданого положення вантажу (на початку та в кінці руху) можливі різні кінематичні конфігурації маніпулятора. Якість процесу керування оцінюємо квадратичним (за керуваннями) функціоналом. Побудували субоптимальний розв'язок задачі, який ґрунтується на параметризації кутових координат маніпулятора сумою кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду. Коефіцієнти полінома знайшли із початкових та кінцевих умов транспортної операції. У результаті вихідну задачу оптимального керування (з параметрами) звели до задачі нелінійного програмування з цільовою функцією, залежною від координат базового шарніра, граничних конфігурацій ланок та коефіцієнтів тригонометричного ряду. Для розв'язання останньої використали стандартні числові процедури мінімізації функції багатьох змінних. Провели низку числових експериментів по моделюванню субоптимального руху маніпулятора та чисельно дослідили вплив координат базового шарніра на характеристики цього руху.

Мета дослідження – побудувати алгоритм параметричної оптимізації кінематичної структури та законів руху дволанкового маніпулятора, розробити відповідну комп'ютерну програму та чисельно дослідити вплив параметрів маніпулятора на його динамічні характеристики. Розробка є подальшим розвитком методики параметричної оптимізації у дослідженні задач оптимального керування маніпуляційними системами [5, 10, 11, 18–22].

2 Механічна модель та рівняння руху маніпулятора

Розглянемо дволанковий маніпулятор, що здійснює керований рух у горизонтальній площині O_1XY . Модель маніпулятора схематично зображена на рис. 1 (а). Маніпулятор складається із двох твердих тіл (ланок) OA , AB , з'єднаних між собою циліндричним шарніром A . Перша ланка зв'язана з нерухомою основою (базою) циліндричним шарніром O із координатами (ξ, η) в інерційній системі відліку O_1XY . На кінці другої ланки розташований захоплювач із вантажем. З метою спрощення математичної моделі припускаємо, що лінійні розміри захоплювача (з вантажем) є набагато меншими за розміри ланок маніпулятора, тому їх моделюємо точковою масою m , зосередженою в точці B . Також вважаємо, що всі шарніри системи є ідеальними.

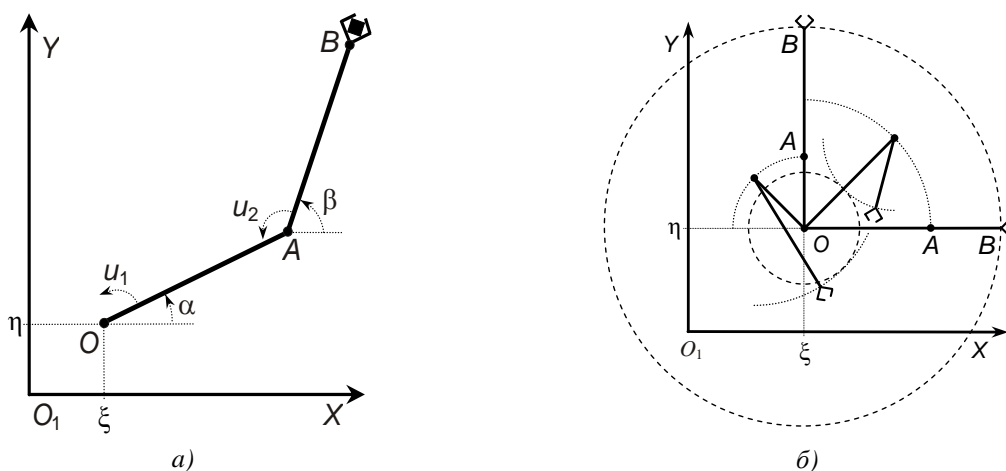


Рис. 1. Кінематична схема (а) та область досяжності маніпулятора (б)

Рівняння руху маніпулятора подамо у вигляді системи двох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [5, 10]:

$$\begin{aligned} K_a \ddot{\alpha} + K[\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)] &= u_1 - u_2, \\ K_b \ddot{\beta} + K[\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta)] &= u_2, \end{aligned} \quad (1)$$

де позначено: α, β – кути повороту ланок OA, AB відносно осі O_1X ; u_1, u_2 – моменти керуючих сил, прикладених у шарнірах O і A відповідно; $K_a = J_a + a^2(m_b + m)$, $K_b = J_b + mb^2$, $K = a(rm_b + mb)$; $a = |OA|$, $b = |AB|$ – довжини ланок маніпулятора, J_a, J_b – моменти інерції ланок OA, AB відносно осей шарнірів O, A відповідно, m_b, r – маса ланки AB та відстань від її центра маси до шарніра A . Крпкою (зверху над величиною) позначено диференціювання за часом t . Співвідношення (1) є рівняннями Лагранжа другого роду, які описують рух дволанкового маніпулятора під дією керувань $u_1(t), u_2(t)$ [6].

3 Постановка та алгоритм розв'язання задачі оптимізації

В умовах сучасного автоматизованого виробництва досить поширеною технологічною операцією, яку часто виконують маніпуляційні роботи, є транспортна операція – перенесення вантажу із заданого початкового положення (робочого простору маніпулятора) у задане кінцеве положення [2]. Швидкість вантажу в початковому та кінцевому положеннях, зазвичай, рівна нулю. В окремих випадках ця швидкість може бути відмінною від нуля, наприклад, вантаж захоплюють на рухомому конвеєрі та переносять на інший рухомий конвеєр. Тривалість операції, як і закон руху вантажу, можуть задавати заздалегідь, а можуть визначати із додаткових вимог, накладених на рух маніпуляційної системи, наприклад, мінімізації часу переміщення вантажу, витрат енергії приводів керування тощо. Також можлива ситуація, коли задано траєкторію руху вантажу, а закон руху (вздовж заданої траєкторії) потрібно визначити. Водночас на траєкторію можуть накладатися певні геометричні обмеження, зумовлені умовами технологічного процесу.

Нехай задано транспортну операцію

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0, \\ x(T) &= x_T, \quad y(T) = y_T, \quad \dot{x}(T) = \dot{y}(T) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де x, y – координати точки B у системі відліку O_1XY ; $(x_0, y_0), (x_T, y_T), T$ – задані сталі параметри, які визначають початкове і кінцеве положення вантажу та тривалість руху. Введені параметри (разом з координатами базового шарніра ξ, η) повинні задовольняти умови досяжності маніпулятора

$$(a-b)^2 \leq (x_\tau - \xi)^2 + (y_\tau - \eta)^2 \leq (a+b)^2, \quad \tau = 0, T. \quad (3)$$

На рис. 2 (б) область досяжності маніпулятора обмежена двома концентричними колами (зображеними пунктирними лініями) з центром у точці $O(\xi, \eta)$. Радіуси внутрішнього та зовнішнього кіл рівні відповідно $|a-b|$ та $a+b$. Наведені тут кінематичні схеми маніпулятора відповідають випадкам: $a > b$, $a < b$. Детальніший аналіз зони досяжності дволанкового маніпулятора у разі, коли $\xi = \eta = 0$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, описано у статті [23].

Із аналізу кінематичної схеми маніпулятора слідує, що коли захоплювач розміщується всередині області досяжності, його заданому положенню (x_τ, y_τ) відповідають два різних набори значень кутових координат $(\alpha_\tau^+, \beta_\tau^-)$, $(\alpha_\tau^-, \beta_\tau^+)$ (внаслідок кінематичної надлишковості) [5]:

$$\begin{aligned} \alpha_\tau^\pm &= \tilde{\alpha}_\tau^\pm - \Lambda(\tilde{\alpha}_\tau^\pm), \quad \beta_\tau^\pm = \tilde{\beta}_\tau^\pm - \Lambda(\tilde{\beta}_\tau^\pm), \\ \tilde{\alpha}_\tau^\pm &= \psi_\tau \pm \arccos \frac{r_\tau^2 + c^2}{2ar_\tau}, \quad \tilde{\beta}_\tau^\mp = \psi_\tau \mp \arccos \frac{r_\tau^2 - c^2}{2br_\tau}, \quad c^2 = a^2 - b^2, \\ \psi_\tau &= \operatorname{sgn}(y_\tau - \eta) \arccos \frac{x_\tau - \xi}{r_\tau}, \quad r_\tau = \sqrt{(x_\tau - \xi)^2 + (y_\tau - \eta)^2}, \end{aligned}$$

де функція $\Lambda(\theta) \equiv \pi[1 + \operatorname{sgn}(|\theta| - \pi)]\operatorname{sgn}(\theta - \pi)$ приводить значення кута θ на проміжок $[-\pi, \pi]$. Тут вирази для кутів $\alpha_\tau^\pm, \beta_\tau^\pm$ отримуємо, розв'язавши систему тригонометричних рівнянь $a \cos \alpha_\tau + b \cos \beta_\tau = x_\tau, a \sin \alpha_\tau + b \sin \beta_\tau = y_\tau$ за умов $-\pi \leq \alpha_\tau \leq \pi, -\pi \leq \beta_\tau \leq \pi$. Набори кутів $(\alpha_\tau^+, \beta_\tau^-), (\alpha_\tau^-, \beta_\tau^+)$ відповідають двом конфігураціям кінематичного ланцюга OAB , симетричним відносно прямої OB . Загалом маємо чотири набори конфігурацій у моменти часу $\tau = 0, T$:

$$\zeta_1 = [(\alpha_0^+, \beta_0^-), (\alpha_T^+, \beta_T^-)], \zeta_2 = [(\alpha_0^+, \beta_0^-), (\alpha_T^-, \beta_T^+)], \\ \zeta_3 = [(\alpha_0^-, \beta_0^+), (\alpha_T^+, \beta_T^-)], \zeta_4 = [(\alpha_0^-, \beta_0^+), (\alpha_T^-, \beta_T^+)].$$

Позначимо через Ω множину допустимих значень координат базового шарніра $O(\xi, \eta)$, які задовольняють обмеженням (3), через $Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\}$ – множину можливих граничних конфігурацій кінематичної структури маніпулятора. Сформулюємо **задачу**. Знайти такі координати базового шарніра $O(\xi^*, \eta^*) \in \Omega$, конфігурацію $\zeta^* \in Z$, закон руху маніпулятора $\alpha^*(t), \beta^*(t)$ та відповідні програмні керування $u_1^*(t), u_2^*(t), t \in [0, T]$, які забезпечать виконання маніпулятором заданої транспортної операції (2) з мінімальним значенням функціонала

$$E = \int_0^T [u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt. \quad (4)$$

Квадратичний функціонал виду (4) часто використовують у задачах оптимального керування механічними системами [1, 2, 5, 9–11, 18, 24, 25]. За певних припущень, коли керування системою відбувається за допомогою електромеханічних приводів, цей функціонал характеризує енерговитрати на її переміщення [1].

Використаємо для розв'язання сформульованої задачі методику параметричної оптимізації (у просторі узагальнених координат). Методика ґрунтується на ідеї методу Рітца [26], згідно з якою задачу про відшукування мінімуму функціонала замінюємо простішою задачею про знаходження мінімуму відповідної функції (багатьох змінних). Згідно з цією методикою узагальнені координат механічної системи представимо у вигляді лінійної комбінації заданих функцій із невідомими параметрами, що дає можливість звести вихідну задачу оптимального керування до задачі нелінійного програмування. Відповідно цій методиці подамо кутові координати маніпулятора $\alpha(t), \beta(t)$ у такому вигляді [5]

$$f = \sum_{i=0}^3 c_i^f t^i + G_n^f(t), \quad G_n^f = \sum_{i=1}^n [a_i^f g_{1i}^f(t) + b_i^f g_{2i}^f(t)], \quad f \in \{\alpha, \beta\}. \quad (5)$$

Тут $\{g_{1i}^f(t), g_{2i}^f(t)\}_{i=1}^n$ – задані на $[0, T]$ функції, $g_{ji}^f \in C^2[0, T], j=1, 2$. Такими функціями можуть бути, наприклад, тригонометричні функції [5, 18, 20, 27], ортогональні поліноми [10, 28, 29] тощо. Коефіцієнти полінома $\{c_i^f\}_{i=0}^3$ знаходимо з умов транспортної операції (2):

$$c_0^f = f_0 - G_n^f(0), \quad c_1^f = -\dot{G}_n^f(0), \\ c_2^f = \frac{1}{T^2} \{3[f_T - f_0 + G_n^f(0) - G_n^f(T)] + T[2\dot{G}_n^f(0) + \dot{G}_n^f(T)]\}, \\ c_3^f = \frac{1}{T^3} \{2[f_0 - f_T + G_n^f(T) - G_n^f(0)] - T[\dot{G}_n^f(0) + \dot{G}_n^f(T)]\}, \quad (6)$$

де граничні значення $f_\tau = f(\tau) \in \{\alpha(\tau), \beta(\tau)\}, \tau = 0, T$, рівні

$$\alpha(\tau) = \alpha_\tau^\pm, \quad \beta(\tau) = \beta_\tau^\mp, \quad \dot{\alpha}(\tau) = \dot{\beta}(\tau) = 0, \quad \tau = 0, T. \quad (7)$$

Рівність нулю кутових швидкостей ланок в співвідношеннях (7) задаємо з огляду на нульові лінійні швидкості вантажу в (2).

Коефіцієнти параметризації $\{a_i^f, b_i^f\}_{i=1}^n, f \in \{\alpha, \beta\}$ знаходимо в результаті розв'язання відповідної задачі нелінійного програмування, яку отримуємо в такий спосіб. Представлення кутових характеристик маніпулятора у вигляді (5) приводить до параметричних сімейств $\alpha(t, \xi, \eta, \zeta, \mathbf{z}), \beta(t, \xi, \eta, \zeta, \mathbf{z})$, де $\mathbf{z} = (a_1^\alpha, b_1^\alpha, a_1^\beta, b_1^\beta, \dots, a_n^\alpha, b_n^\alpha, a_n^\beta, b_n^\beta)$ – вектор невідомих коефіцієнтів

параметризації в (5). Після підставлення α , β та їх похідних у рівняння руху (1) знаходимо параметризовані керування $u_1(t, \xi, \eta, \zeta, \mathbf{z})$, $u_2(t, \xi, \eta, \zeta, \mathbf{z})$, які перетворюють функціонал (4) у функцію багатьох змінних $E(\xi, \eta, \zeta, \mathbf{z})$. У результаті вихідна задача оптимального керування (з параметрами) зводиться до задачі нелінійного програмування [30, 31]

$$E(\xi, \eta, \zeta, \mathbf{z}) \xrightarrow{\xi, \eta, \zeta, \mathbf{z}} \min \quad (8)$$

Наведений вище алгоритм реалізовано у вигляді комп'ютерної програми (в інтегрованому програмному середовищі MS Visual C# 2012, [32]), з допомогою якої проведено оптимізацію кінематичної структури та законів руху дволанкового маніпулятора.

4 Числове моделювання

Наведемо окремі результати розв'язання досліджуваної задачі. Розглядали маніпулятор, ланки якого мають: кільцевий поперечний переріз зі сталими зовнішнім 0.1 м і внутрішнім 0.094 м діаметрами, сталу густину матеріалу 7850 кг/м^3 , $a=0.8 \text{ м}$, $b=0.6 \text{ м}$, $r=0.3 \text{ м}$. Параметри транспортної операції набували таких значень: $x_0=0$, $y_0=1 \text{ м}$, $x_T=0.7 \text{ м}$, $y_T=0.6 \text{ м}$, $T=6 \text{ с}$, $m=8 \text{ кг}$.

Обчислення проводили на комп'ютері з процесором AMD Ryzen 5 1600 (3.2 ГГц) та оперативною пам'яттю 16 Гб. У параметризації (5) використали тригонометричні функції

$$G_n^f = \sum_{i=1}^n [a_i^f \cos \frac{2\pi i}{T} t + b_i^f \sin \frac{2\pi i}{T} t],$$

де задавали $n=8$, відповідно загальна кількість параметрів оптимізації становила 38. Для розв'язання отриманої задачі нелінійного програмування (8) використали стандартні алгоритми оптимізації, зокрема, циклічний алгоритм покоординатного спуску в поєднанні з алгоритмом золотого поділу відрізка [33]. За початкові значення параметрів оптимізації було взято $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=\zeta_1$, $\mathbf{z}=0$. Точність за параметрами оптимізації (ξ , η , \mathbf{z}) та значенням цільової функції становили відповідно 10^{-6} і 10^{-3} , крок дискретизації проміжка $[0, T]$ – 0.03 с, час розв'язання – близько 11 с.

У результаті оптимізації отримали мінімальне значення функціонала (4) $E^*=0.8$, яке досягається для координат базового шарніра $\xi^*=1.143 \text{ м}$, $\eta^*=0.413 \text{ м}$, набору конфігурацій ланок $\zeta^*=\zeta_4$ та коефіцієнтів параметризації \mathbf{z} , поданих у табл. 1. Отримане $E^*=0.8$ є меншим приблизно в 7.7 раз від $E^0=6.14$ – величина функціонала (4) для початкових значень параметрів оптимізації, а також менше в 5.4 раз від величини $\tilde{E}^*=4.333$, яку досягли мінімізацією функціонала (4) тільки за коефіцієнтами параметризації \mathbf{z} та фіксованими параметрами $\xi=\eta=0$ (оптимізація без зміщення базового шарніра [5]).

Таблиця 1. Коефіцієнти параметризації

i	$f = \alpha(t)$		$f = \beta(t)$	
	a_i^f	b_i^f	a_i^f	b_i^f
1	0,066725	-0,041106	-0,038123	0,089544
2	0,006689	-0,006904	-0,001038	-0,000214
3	0,000988	-0,001120	0,000296	-0,000906
4	0,000163	-0,000132	0,000082	-0,000296
5	0,000051	-0,000051	0,000000	-0,000132
6	0,000000	-0,000050	0,000000	-0,000051
7	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
8	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

Відповідні графіки кінематичних та динамічних характеристик отриманого субоптимального процесу зображено на рис. 2–6. Тут час t виражено в секундах, лінійні переміщення захоплювача x , y – в метрах, швидкості \dot{x} , \dot{y} – в м/с, кути α , β – в радіанах (рад), кутові швидкості $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ – в рад/с, моменти u_1 , u_2 – в Н · м. На рис. 2 наведено графіки закону руху та швидкості захоплювача, на рис. 3 – графіки кутових координат та швидкостей ланок маніпулятора. Бачимо, що побудований субоптимальний рух маніпулятора є безреверсним та задовольняє умови транспортної операції. Графіки відповідних керувань u_1 , u_2 зображено на рис. 4 (а). На рис. 4 (б) показана траєкторія руху захоплювача (стрілкою вказано напрямок руху).

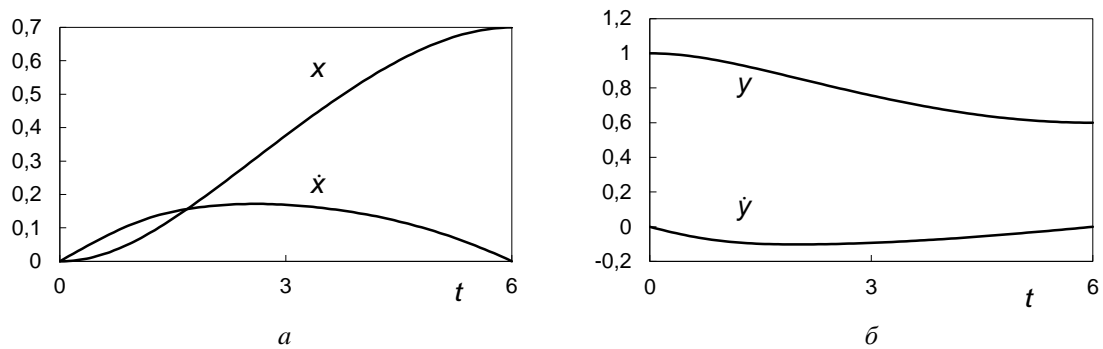


Рис. 2. Закон руху та швидкість захоплювача: (а) – у напрямку осі O_1X ; (б) – у напрямку осі O_1Y

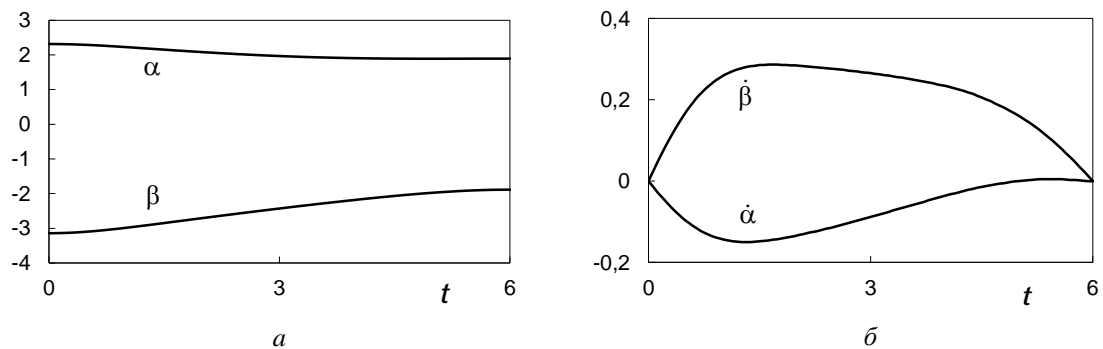


Рис. 3. Кутові характеристики ланок маніпулятора: (а) – кути; (б) – кутові швидкості

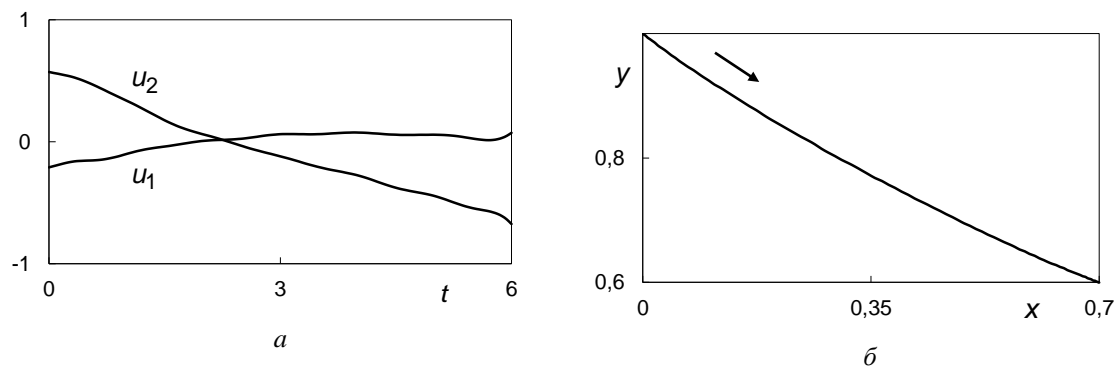


Рис. 4. Керування маніпулятора (а), траєкторія руху захоплювача (б)

На рис. 5 зображено кінограму руху маніпулятора під час переміщення захоплювача з початкового положення $P_0=(0, 1.0)$ у кінцеве $P_1=(0.7, 0.6)$. Бачимо, що базовий шарнір O

зміщений в точку $(1.143, 0.413)$ системи координат O_1XY , положення ланок маніпулятора в початковий та кінцевий моменти часу руху відповідають конфігураціям набору ζ_4 .

Розподіл мінімальних (за коефіцієнтами \mathbf{z}) енерговитрат $\tilde{E}^* = \min_{\mathbf{z}} E(\xi, \eta, \zeta, \mathbf{z})$ на дискретній сітці значень параметрів ξ , η та фіксованій конфігурації $\zeta = \zeta_4$ наведено на рис. 6. Тут сітка значень $(\xi, \eta) \in \{(\xi_i, \eta_j): \xi_i = -0.8 + 0.1i, \eta_j = -0.5 + 0.1j, i = \overline{0, 23}, j = \overline{0, 26}\}$. Позначення осі X відповідає параметру ξ , осі Y – параметру η , осі Z – енерговитратам \tilde{E}^* . Видно, що для заданої транспортної операції положення базового шарніра маніпулятора суттєво впливає на його енерговитрати.

Отже, під час налаштування дволанкового маніпулятора на виконання транспортної операції важливим є вибір положення його базового шарніра. Як свідчать отримані результати числового моделювання, за рахунок раціонального розміщення цього шарніра можна істотно зменшити енерговитрати маніпулятора.

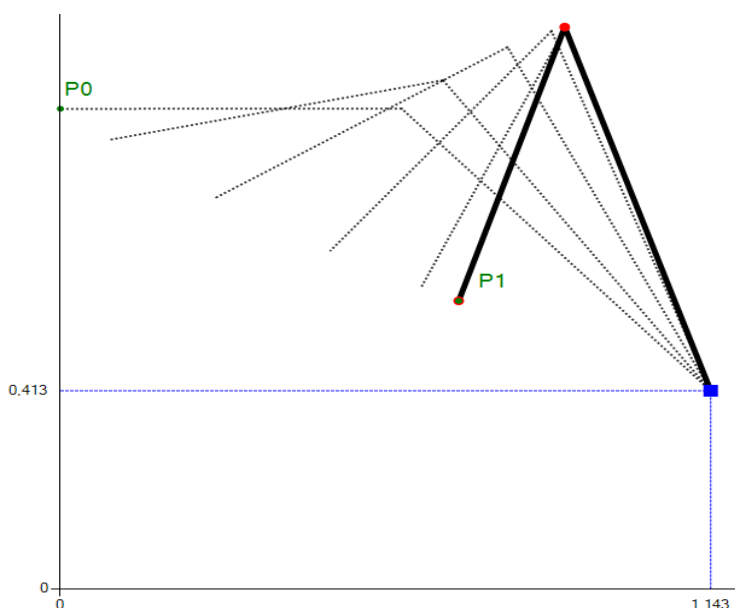


Рис. 5. Оптимальне зміщення базового шарніра та кінограма руху маніпулятора

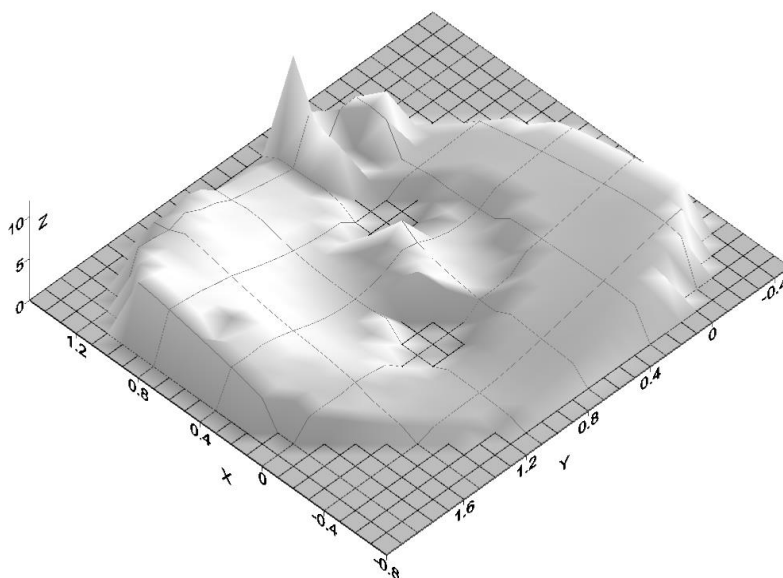


Рис. 6. Розподіл мінімальних енерговитрат маніпулятора

5 Висновки

Для дволанкової маніпуляційної системи, що виконує задану транспортну операцію, сформульовано задачу сукупної оптимізації координат базового шарніра, граничних конфігурацій ланок та законів руху маніпулятора. Запропоновано алгоритм побудови субоптимального розв'язку задачі, який ґрунтується на методиці параметричної оптимізації, концепції обернених задач динаміки та числових процедурах нелінійного програмування. В основу методики параметричної оптимізації покладено апроксимацію кутових координат маніпулятора сумою кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду (з невідомими параметрами), що зводить вихідну задачу оптимального керування (з параметрами) до мінімізації функції багатьох змінних. Алгоритм реалізовано у вигляді відповідної комп'ютерної програми із сучасними інтерфейсними модулями для введення, оптимізації, аналізу та збереження параметрів та динамічних характеристик маніпулятора. Проведено серію числових розрахунків (для модельного прикладу маніпулятора), аналіз отриманих числових розрахунків свідчить, що положення базового шарніра та граничні конфігурації дволанкового маніпулятора суттєво впливають на його енерговитрати під час виконання транспортної операції, а тому їх доцільно враховувати під час налаштування маніпуляційної системи.

Розроблене алгоритмічно-програмне забезпечення може бути включене до розрахункових баз даних систем автоматизованого проектування маніпуляційних роботів та використане для удосконалення наявних та розроблення нових зразків маніпуляційних систем із високим рівнем експлуатаційних характеристик.

Перспективою подальших досліджень може бути порівняльний аналіз оптимальних процесів, побудованих для дволанкового маніпулятора за допомогою методики параметричної оптимізації та з використанням принципу максимуму Понтрягіна.

ЛІТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н. Н. Оптимизация режимов управления манипуляционными роботами с учетом энергозатрат. *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*. 1987. № 3. С. 100–107.
2. Bolotnik N.N., Chernous'ko F.L. Optimization of manipulation robot control. *Soviet Journal Computer and Systems Sciences*. 1990. Vol. 28, No. 5. P. 127–169.
3. Polishchuk O. Control Processes Optimization for Mechanical Systems with Active, Semi-Passive and Passive Actuators. *Applied Mathematics and Physics*. 2013. Vol. 1, No. 4. P. 147–150. URL: <http://www.sciepub.com/AMP/abstract/932> (дата звернення: 07.12.2020).
4. Орлов И. В., Чунг Ч. Т. Управление мобильным двухзвнным манипулятором с ангулярной системой координат. *Вест. Московского энергетического института*. 2011, № 5. С.90–94. URL: <https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=33699077> (дата звернення: 07.12.2020).
5. Demydyuk M. V., Hoshovs'ka N.V. Parametric optimization of the transport operations of a two-link manipulator. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 238, Is. 2. P. 174–188. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04227-8> (дата звернення: 07.12.2020).
6. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989. 386 с.
7. Lewis F.L., Abdallah C.T., Dawson D.M. Control of Robot Manipulators: Theory and Practice (second edition, revised and expanded). Marcel Dekker, Inc., New York, U.S.A., 2006. 614 p.
8. Ghafil H.N., Jarmai K. Optimization for Robot Modelling with MATLAB. 2020, Springer. 220 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-40410-9> (дата звернення: 07.12.2020).
9. Аветисян В.В. Оптимизация конфигураций и направлений поворотов звеньев двухзвнного манипулятора по комбинированным критериям качества. *Изв. НАН Армении. Механика*. 1998. Том 51, № 4. С. 65–71.
10. Демидюк М.В., Гошовська Н.В. Параметрична оптимізація руху дволанкового маніпулятора з використанням ортогональних поліномів. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2016. Вип. 14. С. 168–175. <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/issue/view/137> (дата звернення: 07.12.2020).
11. Демидюк М.В., Ширко М.І. Оптимізація режимів руху та параметрів дволанкового маніпулятора з активними і пасивними приводами. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Том 50, № 2. С. 41–48.

12. Fani D., Shahraki E. Two-link Robot Manipulator using Fractional Order PID Controllers Optimized by Evolutionary Algorithms. *Biosciences Biotechnology Research Asia*. 2016. Vol. 13, No. 1. P. 589–598. URL: <http://dx.doi.org/10.13005/bbra/2075> (дата звернення: 07.12.2020).
13. Khatri M., Khatri P. Trajectory control of two link robotic manipulator using PID. *Golden Research Thoughts*. 2013. Vol. 3, Is. 5. P. 1–7. URL: <http://oldgrt.lbp.world/UploadedData/2998.pdf> (дата звернення: 07.12.2020).
14. Zakia U., Moallem M., Menon C. PID-SMC controller for a 2-DOF planar robot. *Int. Conf. on Electrical, Computer and Communication Engineering (ECCE)*, 7-9 February, 2019, Cox'sBazar, Bangladesh. P. 1–6. <https://ieeexplore.ieee.org/document/8679436> (дата звернення: 07.12.2020).
15. Галемов Р.Т., Масальский Г.Б. Сравнительный анализ методов адаптации параметров регулятора системы управления робота-манипулятора. *Журнал Сибир. федерального универ. Техника и технологии*. 2017. Том 10. Вып. 4. С. 508–522. <https://readera.org/sravnitelnyj-analiz-metodov-adaptacii-parametrov-reguljatora-sistemy-upravlenija-146115895> (дата звернення: 07.12.2020).
16. Міщук Д., Горбатюк Є., Волянюк В. Визначення геометричних параметрів маніпулятора за характеристиками робочого середовища. *Гірничі, будівельні, дорожні і меліоративні машини*. 2019. Вип. 94. С. 25–34. URL: <http://gbdmm.knuba.edu.ua/article/view/208960> (дата звернення: 07.12.2020).
17. Badoniya P., George J. Two Link Planar Robot Manipulator Mechanism Analysis with MATLAB. *Int. J. for Research in Applied Science & Engineering Technology (IJRASET)*. 2018. Vol. 6, Is.7. P. 778–788. <https://www.ijraset.com/files/serve.php?FID=18429> (дата звернення: 07.12.2020).
18. Lidberg M., Berbyuk V. Optimization of Controlled Motion of Closed-Loop Chain Manipulator Robots with Different Degree and Type of Actuation. *J. Stability and Control: Theory and Application (SACTA)*. 2002. Vol. 4. No. 2. P. 56–73.
19. Бербюк В.Є., Демидюк М.В., Литвин Б.А. Параметрична оптимізація ходи та пружних характеристик пасивних приводів двоногого крокуючого робота. *Вісник Київського універ. ім.Тараса Шевченка. Серія: Кібернетика*. 2002, №3. С. 17–20.
20. Demydyuk M.V. Parametric optimization of four-link close-chain manipulator with active and passive actuators. *Journal of Mathematical Sciences*. 2010. Vol. 168, No. 5. P. 746–758. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0023-x> (дата звернення: 07.12.2020).
21. Демидюк М. В. Оптимізація транспортних операцій чотириланкового замкнутого маніпулятора. *Фізико-математичне моделювання та інформ. технології*. 2014. № 20. С. 107–116. URL: <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/issue/archive> (дата звернення: 07.12.2020).
22. Demydyuk M.V., Lytvyn B.A. Optimization of the Parameters and Motion Control Modes of the Bilegged Walking Robot. *J. of Automation and Information Sci.* 2016. Vol. 48, Is. 12. P. 48–61. <http://dl.begellhouse.com/journals/2b6239406278e43e,49aee25875792fbb,2db684dd32093748.html> (дата звернення: 07.12.2020).
23. Zar T., Lin P.W., Win S.Y. Workspace Analysis of Two-link Planar Manipulator. *Int. J. of Science and Engineering Applications*. 2019. Vol.8, Is. 08. P. 380–383. DOI: 10.7753/IJSEA0808.1028 <https://ijsea.com/archive/volume8/issue8/IJSEA08081028.pdf> (дата звернення: 07.12.2020)
24. Berbyuk V.E., Boström A.E. Optimization problems of controlled multibody systems having spring-damper actuators. *International applied mechanics*. 2001. Vol. 37, Is. 7. P. 935-940.
25. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Москва: Наука, 1968. 476 с.
26. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы: В 2 т. М.: Наука, 1977. Т. 2. 400 с.
27. Nagurka M., Yen V. Fourier-based optimal control of nonlinear dynamic systems. *Trans. ASME. J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 1990. Vol. 112, № 3. P. 19–26.
28. Mezzadri F., Galligani E. A. Chebyshev technique for the solution of optimal control problems with nonlinear programming methods. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2016. Vol. 121, P. 95–108. URL: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2015.08.023> (дата звернення: 07.12.2020).
29. Tohidi E., Samadi O.R.N., Farahi M.H. Legendre Approximation for Solving a Class of Nonlinear Optimal Control Problems. *J. of Mathematical Finance*. 2011, No. 1. P. 8–13. URL: [10.4236/jmf.2011.11002](http://dx.doi.org/10.4236/jmf.2011.11002) (дата звернення: 07.12.2020).
30. Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty C.M. Nonlinear programming: theory and algorithms (3rd ed.). John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. 2013. 872 p. URL: <https://www.wiley.com/en-us/Nonlinear+Programming:+Theory+and+Algorithms,+3rd+Edition-p-9780471486008> (дата

звернення: 07.12.2020).

31. Betts J.T. Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming (2-nd edition). Society for Industrial & Applied Mathematics, 2009. 448 p. URL: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718577> (дата звернення: 07.12.2020).
32. Deitel P., Deitel H. Visual C# 2012: How to Program, 5-th Ed. Pearson, 2013. 1020 p.
33. Бартіш М.Я. Методи оптимізації. Теорія і алгоритми: Навч. посібник. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Ів. Франка, 2006. 223 с.

REFERENCES

1. V.V.Avetisyan, L.D.Akulenko, N.N.Bolotnik, "Optimization of control modes for manipulation robots with regard of the energy consumption". *Izv. Akad. Nauk SSSR. Tekh. Kibern.* No. 3, pp. 100–107. 1987. [in Russian].
2. N.N. Bolotnik, F.L. Chernous'ko, "Optimization of manipulation robot control". *Soviet Journal Computer and Systems Sciences.* Vol. 28, No. 5. pp. 127–169. 1990.
3. O.Polishchuk, "Control Processes Optimization for Mechanical Systems with Active, Semi-Passive and Passive Actuators". *Applied Mathematics and Physics.* Vol. 1, No. 4, pp. 147–150. 2013. URL: <http://www.sciepub.com/AMP/abstract/932> (Last accessed: 07.12.2020).
4. I.V.Orlov, T.T.Trung, "Control of two links mobile manipulator with the angular coordinate system". *Bulletin of Moscow Power Engineering Institute.* No. 5, pp. C.90–94. 2011. URL: <https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=33699077> (Last accessed: 07.12.2020) [in Russian].
5. M.V.Demydyuk, N.V.Hoshovs'ka, "Parametric optimization of the transport operations of a two-link manipulator". *Journal of Mathematical Sciences.* Vol. 238, Is. 2, pp. 174–188. 2019. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04227-8> (Last accessed: 07.12.2020)
6. F. L. Chernous'ko, N. N. Bolotnik, V. G. Gradetskii, *Robot Manipulators: Dynamics, Control, and Optimization*, Moscow: Nauka, 386 p. 1989 [in Russian].
7. F.L.Lewis, C.T.Abdallah, D.M.Dawson, *Control of Robot Manipulators: Theory and Practice* (second edition, revised and expanded). Marcel Dekker, Inc., New York, U.S.A., 614 p. 2006.
8. H.N.Ghafil, K.Jarmai, *Optimization for Robot Modelling with MATLAB*. Springer. 220 p. 2020. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-40410-9> (Last accessed: 07.12.2020).
9. V.V.Avetisyan, "Optimization of configurations and directions of rotations of two-link manipulators by the combined criteria of quality". *Izv. NAN Armenii. Mekhanika.* Vol. 51, Is. 4, pp. 65–71. 1998 [in Russian].
10. M.V.Demydyuk, N.V.Hoshovska, "Parametric optimization of the two-link manipulator motions with using orthogonal polynomials". *Applied Problems of Mechanics and Mathematics.* Is. 14. pp. 168–175. 2016. URL: <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/issue/view/137> [in Ukrainian].
11. M.V.Demydyuk, M.I.Shyrko, "The two-link semi-passively actuated manipulator motion modes and parameters optimization". *Mathematical Methods and Physicomechanical Fields.* Vol. 50, Is. 2. pp. 41–48. 2007. [in Ukrainian].
12. D.Fani, E.Shahraki, "Two-link Robot Manipulator using Fractional Order PID Controllers Optimized by Evolutionary Algorithms". *Biosciences Biotechnology Research Asia.* 13(1), pp. 589–598. 2016. URL: <http://dx.doi.org/10.13005/bbra/2075> (Last accessed: 07.12.2020).
13. M.Khatri, P.Khatri, "Trajectory control of two link robotic manipulator using PID". *Golden Res. Thoughts.* Vol. 3, Is. 5, pp. 1–7. 2013. URL: <http://oldgrt.lbp.world/UploadedData/2998.pdf> (Last accessed: 07.12.2020)
14. U.Zakia, M.Moallem, C.Menon, "PID-SMC controller for a 2-DOF planar robot". *Int. Conf. on Electrical, Computer and Communication Engineering (ECCE)*, 7-9 February, 2019, Cox'sBazar, Bangladesh, pp. 1–6. <https://ieeexplore.ieee.org/document/8679436> (Last accessed: 07.12.2020).
15. R.T.Galemov, G.B.Masalsky, "Comparative analysis of the regulator parameters adaptation methods of the control system of the robot manipulator". *Journal of Siberian Federal University. Engineering and Technologies.* Vol. 10, Is. 4, pp. 508–522. 2017. <https://readera.org/sravnitelnyj-analiz-metodov-adaptacii-parametrov-reguljatora-sistemy-upravlenija-146115895> (Last accessed: 07.12.2020).
16. D.Mishchuk, E.Gorbatyuk, V.Volianiuk, "Determination of geometric parameters of a manipulator

- using by characteristics the working environment”. *Mining, constructional, road and melioration machines*. Is. 94, pp. 25-34. 2019. URL: <http://gbdmm.knuba.edu.ua/article/view/208960> (Last accessed: 07.12.2020) [in Ukrainian].
17. P.Badoniya, J.George, “Two Link Planar Robot Manipulator Mechanism Analysis with MATLAB” *Int. J. for Research in Applied Sci. & Eng. Technology (IJRASET)*. Vol. 6, Is. 7, pp. 778–788. 2018. <https://www.ijraset.com/fileserve.php?FID=18429> (Last accessed: 07.12.2020).
 18. M.Lidberg, V.Berbyuk, “Optimization of Controlled Motion of Closed-Loop Chain Manipulator Robots with Different Degree and Type of Actuation”. *J. Stability and Control: Theory and Application (SACTA)*. Vol. 4, No. 2, pp. 56–73. 2002.
 19. V.E.Berbyuk, M.V.Demydyuk, B.A.Lytvyn, “Parametric optimization of motion and stiffness characteristics of passive drives of a bipedal walking robot”. *Visnyk Taras Shevchenko National University of Kyiv. Cybernetic*. №3, pp. 17–20. 2002.
 20. M.V.Demydyuk, “Parametric optimization of four-link close-chain manipulator with active and passive actuators”. *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 168, No. 5, pp. 746–758. 2010. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0023-x> (Last accessed: 07.12.2020).
 21. M. Demydyuk, “Transport operation optimization of the four link closed chain manipulator”. *Physico-mathematical modeling and informational technologies*. No. 20. pp. 107–116. 2014. URL: <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/issue/archive> (Last accessed: 07.12.2020) [in Ukrainian].
 22. M.V.Demydyuk, B.A.Lytvyn, “Optimization of the Parameters and Motion Control Modes of the Bilegged Walking Robot”. *J. of Automation and Inform. Sci.* Vol. 48, Is. 12, pp. 48–61. 2016. <http://dl.begellhouse.com/journals/2b6239406278e43e,49aee25875792fbb,2db684dd32093748.html> (Last accessed: 07.12.2020).
 23. T.Zar, P.W.Lin, S.Y.Win, “Workspace Analysis of Two-link Planar Manipulator”. *Int. J. of Science and Engineering Applications*. Vol. 8, Is. 8, pp. 380–383. 2019. DOI: 10.7753/IJSEA0808.1028. <https://ijsea.com/archive/volume8/issue8/IJSEA08081028.pdf> (Last accessed: 07.12.2020).
 24. V.E.Berbyuk, A.E.Boström, “Optimization problems of controlled multibody systems having spring-damper actuators”. *International applied mechanics*. Vol. 37, Is. 7, pp. 935-940. 2001.
 25. N. N. Krasovskii, *Motion Control Theory*, Moscow: Nauka, 1968, 476 c. [in Russian].
 26. V.I.Krylov, V.V.Bobkov, P.I.Monastyrnyi, “Computational methods: In 2 vol. Moscow: Nauka, Vol. 2. 400 p. 1977 [in Russian].
 27. M.Nagurka, V.Yen, “Fourier-based optimal control of nonlinear dynamic systems”. *Trans. ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. Vol. 112, Is. 3, pp. 19–26. 1990.
 28. F.Mezzadri, E.A.Galligani, “Chebyshev technique for the solution of optimal control problems with nonlinear programming methods”. *Mathematics and Computers in Simulation*. Vol. 121, pp. 95–108. 2016. URL: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2015.08.023> (Last accessed: 07.12.2020).
 29. E.Tohidi, O.R.N.Samadi, M.H.Farahi, “Legendre Approximation for Solving a Class of Nonlinear Optimal Control Problems”. *Journal of Mathematical Finance*. No. 1, pp. 8–13. 2011. URL: [10.4236/jmf.2011.11002](https://doi.org/10.4236/jmf.2011.11002) (Last accessed: 07.12.2020).
 30. M.S.Bazaraa, H.D.Sherali, C.M.Shetty, *Nonlinear programming: theory and algorithms (3rd ed.)* – John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. 872 p. 2013. URL: <https://www.wiley.com/en-ua/Nonlinear+Programming:+Theory+and+Algorithms,+3rd+Edition-p-9780471486008> (Last accessed: 07.12.2020).
 31. J. T. Betts, *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematic, University City Science Center, Philadelphia. 190 p. 2001. URL: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718577> (Last accessed: 07.12.2020).
 32. P.Deitel, H.Deitel, *Visual C# 2012: How to Program*, 5-th Ed. Pearson, 1020 p. 2013.
 33. M.Y.Bartish, *Optimization methods. Theory and algorithms: Textbook*. Lviv: Publishing Center of Ivan Franko National University of Lviv, 223 p. 2006. [in Ukrainian].

УДК 51-76+616.9

Дослідження кореляцій динаміки захворювання на COVID-19 з деякими соціально-економічними факторами

А.А. Захарова, Н.М. Кізілова

**Захарова
Аліса Андріївна**

студентка, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;

*e-mail: alicedarcy@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-2539-5403>*

**Кізілова
Наталія Миколаївна**

д.ф.-м.н., професор; професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;

*e-mail: n.kizilova@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9981-7616>*

Досліджується динаміка поширення COVID-19 на основі статистичного аналізу часових рядів для числа інфікованих, одужалих, померлих, та ін. даних, які доступні з відкритих джерел. Було одібрано 60 країн, для яких були виявлені статистично значущі кореляції і отримані їх функціональні апроксимації. Виявлені найбільш інформативні показники епідемії. Показано, що вони залежать від ряду факторів, специфічних для даної країни, і повинні бути обчислені окремо для кожної хвилі та фази пандемії. Досліджені кореляції цих показників з рядом соціально-економічних факторів. Запропонована математична модель динаміки поширення захворювання у вигляді системи ЗДУ (адаптована SIR-модель) та обчислений критерій асимптотичної стійкості системи, який є показником необхідності введення локдауну. Ідентифікація параметрів математичної моделі для даної фази епідемії за рахунок аналізу статистичних даних дозволяє оцінювати зміни критерію стійкості за часом, прогнозувати та контролювати динаміку епідемії.

Ключові слова: динамічні системи, кореляційний аналіз, математичне моделювання, COVID-19.

Study of correlations of COVID-19 dynamics with social-economic factors

A. Zakharova, N. Kizilova

Zakharova Alisa

*student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022,
Ukraine*

Kizilova Nataliya

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Professor of the
Department of Applied Mathematics
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022,
Ukraine*

Studying the current state of the dynamics of the COVID-19 spread is based on the statistical analysis of time series for the number of infected persons, recovered or died patients, the number of tests performed and other data available from open sources. The mathematical models of infectious diseases have been investigated. Sixty countries from Europe, Asia, Africa, North and South America and Oceania have been selected for the statistical analysis. Statistically significant dependences between the time series have been identified by means of correlation analysis, and their functional approximations have been obtained. The indicators that are the most informative for assessing the state of the epidemic and forecasting its further dynamics have been identified. It is shown that those indicators depend on a number of factors specific to a given country and, therefore, they should be calculated separately for each wave and phase of the pandemic. It has been confirmed that the averaged 14-day values for the new daily cases is a more reliable indicator of COVID-19 dynamics than the 1-day values but the approximation coefficients are country-specific. The correlation of the indicators with a number of socio-economic factors, among which the Human Development Index (HDI), tourism activity and social distance are the most significant, has been shown. The synergy of other factors that exhibited no significant effect separately should be noticed. A mathematical model of the disease spread dynamics as a system of ordinary differential equations (adapted SIR-model) is proposed and the criterion of asymptotic stability of the system, which is an indicator of the need for lockdown, is calculated. Identification of the parameters for the model of current phase of the epidemic by the analysis of statistical data allows assessing changes in the criterion of stability over time, predicting and controlling the dynamics of the epidemic.

Keywords: dynamical systems, correlation analysis, mathematical modeling, COVID-19.

Исследование корреляций динамики заболевания COVID-19 с некоторыми социально-экономическими факторами

А.А. Захарова, Н.М. Кизилова

Захарова

Алиса Андреевна

студентка,

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, майдан Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022

Кизилова

Наталья Николаевна

д.ф.-м.н., профессор; профессор кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, майдан Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022

Исследуется динамика распространения COVID-19 на основе статистического анализа временных рядов для числа инфицированных, выздоровели, умерших, и др. данных, которые доступны из открытых источников. Было отобрано 60 стран, для которых были обнаружены статистически значимые корреляции и получены их функциональные аппроксимации. Выявлены наиболее информативные показатели эпидемии. Показано, что они зависят от ряда факторов, специфических для данной страны, и должны быть вычислены отдельно для каждой волны и фазы пандемии. Исследованы корреляции этих показателей с рядом социально-экономических факторов. Предложена математическая модель динамики распространения заболевания в виде системы ОДУ (адаптированная SIR-модель) и получен критерий асимптотической устойчивости системы, который является показателем необходимости введения локдауна. Идентификация параметров математической модели для конкретной фазы эпидемии за счет анализа статистических данных позволяет оценивать изменения критерия устойчивости по времени, прогнозировать и контролировать динамику эпидемии.

Ключевые слова: динамические системы, корреляционный анализ, математическое моделирование, COVID-19.

1 Вступ

Протягом пандемії вірусу COVID-19 станом на кінець листопада 2020 р. були охоплені 215 країн і територій, заражені понад 63 мільйонів людей і спричинено понад 1.5 мільйон смертей у всьому світі.¹ Протистояння розповсюдженню захворювання можливо тільки за умови об'єднаних зусиль біологів, фізіологів, лікарів, фармацевтів, біохіміків, біофізиків та математиків. Статистичні моделі багаторівневої обробки великих даних дозволяють виявити кореляції між різними факторами та рівнем захворюваності у різних країнах, побудувати регресійні залежності та використати їх для будування нових математичних моделей, які дозволять прогнозувати динаміку розповсюдження вірусу, знаходити найбільш ефективні засоби боротьби з ним та моделювати подібні випадки у майбутньому, щоб бути готовими до них [1]. Серед численних факторів, пов'язаних із ризиком COVID-19, виявлено, що економічна нерівність посилює ризик передачі COVID-19. Кількість ліжок на душу населення негативно корелює зі смертністю від COVID-19. Групи крові В і АВ виявлені захисними факторами для ризику COVID-19, тоді як група крові А була фактором ризику. Збільшення споживання овочів, істівної олії, білків, вітаміну D та вітаміну К було пов'язано зі зниженням, тоді як збільшення споживання алкоголю було пов'язане з підвищенням ризику COVID-19. Інші фактори включали вік, стать, температуру, вологість, соціальну дистанцію, куріння, інвестиції в охорону здоров'я, рівень урбанізації та расу. Всебічна ідентифікація факторів, які впливають на передачу COVID-19 та летальний результат, може дати нові уявлення про пандемію COVID-19 та знайти ефективні стратегії запобігання та міграції поширення COVID-19.

На основі статистичного аналізу розробляють нові методи діагностики та прогнозування поширення та аналізу вірусів, які вводять показник нестабільності в динаміку пандемії [2]. У роботі [3] проведений аналіз часових рядів нових випадків, щоденних смертей та виконаних тестів в Великобританії та Німеччині для дослідження наслідків самоізоляції протягом карантину. Результати показали, що поява другої хвилі залежить майже виключно від швидкості, з якою працює імунітет, і що для реалізації рішення необхідно відстежувати якнайменше 20% безсимптомних заражених випадків. Подібний аналіз був проведений і для інших країн [4,5].

¹<https://www.worldometers.info/coronavirus/>

Оскільки одним з найважливіших способів передачі захворювання є соціальна активність, мобільність, якою охоплені більшість активних людей молодого та середнього віку [6], значний інтерес являє дослідження факторів, які сприяють соціальній активності і, таким чином, повинні бути належним шляхом модифіковані для запобігання розповсюдженню пандемії.

2 Матеріали і методи

В роботі проводилась статистична обробка «великих даних» з відкритих джерел щоденних вимірювань загальної кількості I_{tot} і D_{tot} та нових випадків на день I_{day} і D_{day} захворілих і померлих від COVID-19, загальні кількості активних A_{tot} , критичних C_{tot} та одужалих R_{tot} пацієнтів, кількості T_{tot} проведених тестів, а також загальноприйнятих показників, таких як денна кількість нових інфікованих на 100000 населення, середня кількість нових хворих за остатні 2 тижня I_{14} та інших.² Серед факторів, які найчастіше згадуються та вивчаються як найбільш впливові на динаміку хвороби в країні, кантоні, області тощо, є середній вік населення, доля літнього населення, індекс розвинення країни, кількість коштів, що витрачаються на медицину, Human Development Index (HDI), туристична активність, соціальна дистанція, рівень продажу тютюнових виробів, кількість курців, спортивна активність, кліматичні фактори та інші. Оскільки дослідити залежності від вище визначених факторів в рамках одного дослідження неможливо, були обрані соціально-економічні фактори. HDI - це сумарний показник середніх досягнень за ключовими параметрами людського розвитку: довге і здорове життя, рівень отриманих знань і гідний рівень життя, який розраховується як середнє геометричне нормованих індексів для кожного з трьох вимірів. Для детального уявлення найбільш вагомих параметрів, які повинні бути включені до математичної моделі, що дозволить прогнозувати динаміку пандемії та впливати на неї, проводився кореляційний аналіз між параметрами $\{I_{tot}, D_{tot}, I_{day}, D_{day}, I_{14}\}$ та різними соціально-економічними показниками з баз великих даних³, що були виміряні для кожної з країн в 2019 р. Для порівняння були відібрані 60 країн Європи (31), Азії (15), Африки (6), Північної (2) і Південної (4) Америки та Океанії (2). Методами кореляційного аналізу досліджувались таблиці коефіцієнтів кореляції. За наявності позитивної або негативної кореляції для діаграм розсіювання будувалися лінійні, експоненціальні та степеневі регресійні залежності методом найменших квадратів.

3 Результати статистичного аналізу даних

3.1 Статистичні залежності між показниками пандемії

Детальний аналіз показав, що кореляції між кумулятивними параметрами статистично незначні. Це може бути пов'язано з різною кумулятивною динамікою пандемії в країнах (перша хвиля, початок, пік, згасання або закінчення другої хвилі), введення суворих, середніх або легких обмежень, всеохопленість і доступність тестування, відкритість даних та ін. В цьому розділі наведені лише ті результати, які виявили статистично значущі кореляції та відповідні регресійні залежності з високим коефіцієнтом детермінації (R^2). На Рис. 1а,б відповідно наведені діаграми розсіювання $D_{mln}(I_{mln})$ і $I_{14}(I_{mln})$ для кількостей I_{day} , D_{day} , I_{14} перелічених на 1 млн. населення країни. На Рис. 1в,г наведені ті ж самі залежності, але тільки для країн Європи із зазначенням країн.

Значущі регресійні залежності (Рис. 1а) були знайдені для $D_{mln}(I_{mln})$ тільки для країн Африки ($\sim 0.035 \cdot x^{0.798}$; $R^2 = 0.9597$), тоді як залежності $I_{14}(I_{mln})$ - для країн Африки ($\sim 1.246 \cdot x^{1.001}$; $R^2 = 0.9954$), Азії ($\sim 1.515 \cdot x^{0.958}$; $R^2 = 0.9931$) і Європи ($\sim 2.309 \cdot x^{0.918}$; $R^2 = 0.9036$). Таким чином, географічне положення та рівень економічного розвинення країни не визначає залежності D/I за день, 2 тижня або за період пандемії, і інші фактори можуть бути суттєво більш значущими. В той же час, виявилась лінійна кореляція між I_{14} і I_{mln} (Рис. 1б). У вищенаведених ступеневих залежностей показник ступеню ~ 1 , але коефіцієнти залежностей різні для країн Африки, Азії і Європи. Значно вищий коефіцієнт залежності для країн Європи може бути пов'язаний з кількістю тестувань та доступністю даних. Для країн Півн. Америки та

² <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

³ <https://ourworldindata.org/>, <https://www.worldometers.info/>

Океанії (по 2 країни) регресійний аналіз не має сенсу, але формальний аналіз дає наступні залежності $D_{min}(I_{min})$ і $I_{14}(I_{min})$: Півн.Америци ($\sim 0.219 \cdot x^{0.458}$; $R^2 = 1$ і $\sim 0.576 \cdot x^{1.157}$; $R^2 = 1$) і для Океанії ($\sim 0.348 \cdot x^{0.657}$; $R^2 = 1$ і $\sim 0.941 \cdot x^{0.374}$; $R^2 = 1$). Таким чином, останні залежності суттєво відрізняються від статистичних. Таким чином, показник I_{min} , який прийнятий як поріг для введення локдауну в деяких країнах Європи, є обґрунтованим, але повинен розраховуватися окремо для кожної країни з урахуванням різниці в отриманих вище коефіцієнтів в регресійних залежностях. Наприклад, в воєводствах республіки Польщі офіційно прийнятий поріг $I_{day} > 10^2/10^{5.4}$. Загальна статистика для всіх 60 країн дає залежності $\sim 0.124 \cdot x^{0.574}$; $R^2 = 0.498$ і $\sim 1.438 \cdot x^{0.988}$; $R^2 = 0.9805$ для $D_{min}(I_{min})$ і $I_{14}(I_{min})$ відповідно. Як видно з Рис.1в,г чітких територіальних залежностей, які можна було б пояснити різницею в середньорічній температурі, вологості повітря та інших географічних та кліматичних факторах, не спостерігається. Всі країни Північної Європи, крім Швеції, виявляють низькі значення D_{min} , I_{min} , I_{14} , що пояснюється особливістю обраної Швецією тактики боротьби з COVID-19 протягом першої хвилі пандемії.

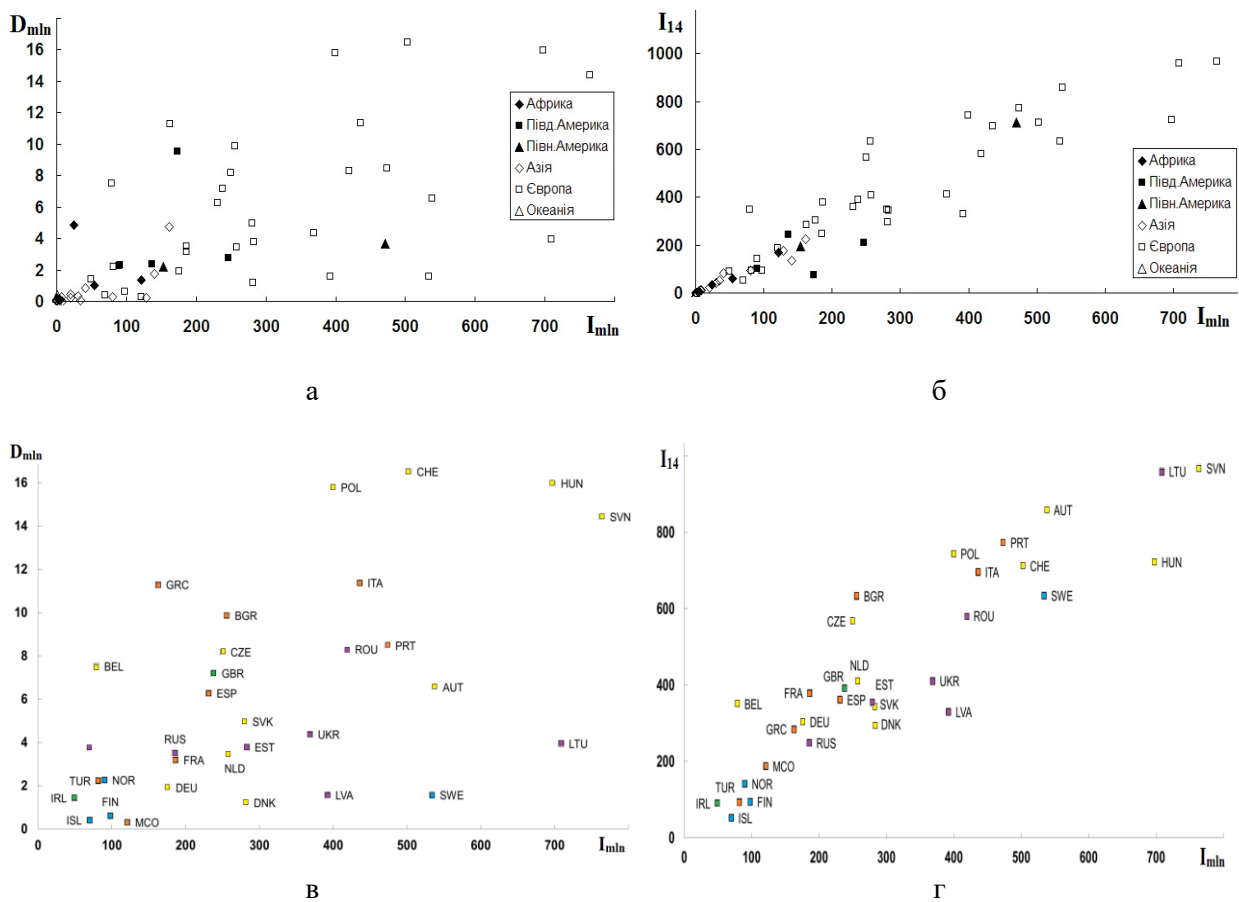


Рис. 1. Діаграми $D_{min}-I_{min}$ (а) і $I_{14}-I_{min}$ (б) станом на 1/12/2020 р. для 60 країн та ті ж діаграми (в), (г) для країн Європи. Умовні позначення: Austria (AUT), Belgium (BEL), Bulgaria (BGR), Czechia (CZE), Denmark (DNK), Estonia (EST), Finland (FIN), France (FRA), Germany (DEU), Greece (GRC), Hungary (HUN), Iceland (ISL), Ireland (IRL), Italy (ITA), Latvia (LVA), Lithuania (LTU), Monaco (MCO), Netherlands (NLD), Norway (NOR), Poland (POL), Portugal (PRT), Romania (ROU), Russia (RUS), Slovakia (SVK), Slovenia (SVN), Spain (ESP), Sweden (SWE), Switzerland (CHE), Turkey (TUR), Ukraine (UKR), United Kingdom (GBR); кольорами позначені країни північної (блакитний), південної (помаранчевий), східної (фіолетовий), західної (зелений) та центральної (жовтий) Європи.

Були виявлені також кореляції між кількостями A_{day} , R_{day} та C_{day} від I_{day} ($R^2 < 0.85$), але коефіцієнти відповідних регресійних залежностей різні у різних країн. Відповідно до даних

⁴ <https://tvn24.pl/polska/koronawirus>

різних досліджень [1-4], ці коефіцієнти залежать від рівня медичної допомоги в країні на даний час ті завантаженості шпиталів.

3.2 Вплив економічних факторів на показники розповсюдження пандемії

Кореляційний аналіз проводився між усіма показниками пандемії $\{I, D, A, C, R\}$ за день, за 2 тижня і загальною кількістю на 1.12.2020 р. Та вищезазначеними економічними факторами. Були розраховані коефіцієнти кореляції Пірсона (P_{ij}). Оскільки більшість параметрів пандемії не має нормального розподілу, були обчислені коефіцієнти Спірмена (P_{ij}). У разі достатньо великих значень $P.P > 0.5$ будувалися відповідні діаграми розсіювання та кореляційні залежності (лінійні, експоненціальні та ступеневі). За умовою $R^2 > 0.8$ робився висновок о наявності значущої кореляції. Величина середнього геометричного (СГ) трьох показників давала можливість оцінити наявність відповідних прямих функціональних залежностей [5-7]. Деякі результати розрахунків наведені в Табл. 1.

Таблиця 1. Наявність кореляцій між показниками:
 $CG > 0.8 (+)$, $0.8 > CG > 0.6 (\pm)$, $0.6 > CG > 0.4 (\mp)$, $0.4 > CG (-)$

		I_{tot}	A_{tot}	C_{tot}	R_{tot}	D_{tot}
1	Географічне положення країни	\mp	-	-	-	-
2	Площа країни	\pm	-	-	-	-
3	Щільність населення	\pm	\mp	\mp	\mp	\pm
4	ВВП на душу населення	\mp	\mp	\mp	\pm	\pm
5	Витрати на охорону здоров'я (% ВВП)	\pm	\mp	\mp	\pm	\pm
6	Рівень розвитку туризму (% ВВП)	+	\mp	\mp	\mp	\pm
7	Кількість туристів на душу населення	+	\pm	+	\pm	+
8	HDI	\pm	\pm	\mp	\pm	\mp

Таким чином, є слабка залежність як загальної, так і щоденної кількості різних стадій захворювання на COVID-19 від щільності населення, рівня ВВП на душу населення, витрат країни на охорону здоров'я та від загального індексу якості життя HDI. Значно вищий вплив має туристична привабливість країни та кількість туристів, які приїжджають, що по суті впливає на тимчасову щільність населення. Цей вплив помітніший для I_{tot} , в деяких випадках – для R_{tot} і D_{tot} , але значно слабкий для інших показників, які залежать від доступності та рівня медичної допомоги, а також від обраної владою тактики боротьби з пандемією.

3.3 Вплив соціальних факторів на показники розповсюдження пандемії

Серед різноманіття соціальних факторів вивчався вплив так званої соціальної дистанції, яка визначається як комфортна відстань для спілкування з незнайомою (social, $L_{soc} \sim 2$ м), прийнятною (accepted, $L_{acc} \sim 1.2-2$ м), знайомою (personal, $L_{pers} \sim 0.46-1.22$ м) та добре знайомою (intimate, $L_{int} < 0.46$ м) особою, середні значення яких вимірювалися в різних країнах. Проведений в роботі статистичний аналіз показав, що люди вибирають вид дистанції не тільки виходячи з відносин з людиною, але і з огляду на такі характеристики, як стать, вік, екологічні фактори (температура регіону, кількість захворювань в даній країні і темпи зростання населення), соціально-психологічні фактори (соціальне оточення, рівень колективізму, багатство суспільства, освіта, HDI). Вік є важливим фактором вибору дистанції і молоді люди обирають близькі дистанції у порівнянні з літніми людьми. Виявилось, що в бідніших країнах надають перевагу більш близьким міжособистісним дистанціям. Індекс HDI, який зв'язаний з рівнем соціальної довіри в країні, теж впливає на значення $\{L_{soc}, L_{acc}, L_{pers}, L_{int}\}$. Міжособистісні відстані збільшуються при взаємодії людей, які відрізняються соціальним статусом. В цілому, середня міжособистісна дистанція складає $L_{soc} = 1.35$ м; $L_{acc} = 1.02$ м; $L_{pers} = 0.92$ м; $L_{int} = 0.32$ м, що нижче загальноприйнятої безпечної дистанції при пандемії $L > 1.5$ м. Таким чином, вплив соціальних, екологічних та географічних факторів через так звану соціальну дистанцію може впливати на розповсюдження пандемії через значення $\{L_{acc}, L_{pers}, L_{int}\}$.

4 Математична модель і аналіз результатів

Серед математичних моделей динаміки інфекційних захворювань найбільш популярною та вивченою є SIR-модель⁵ (Sustainable-Infected-Recovered) або її модифікації. Оригінальна модель використала звичкі диференційні рівняння (ЗДР) для еволюції системи $\{\text{birth} \rightarrow S \rightarrow I \rightarrow R\}$, де S – кількість потенційно здорових осіб (sustainable). Відповідні зв'язки зображені на Рис.2.

Розширена модель включає також латентний період переходу $S \rightarrow I$ у вигляді затримання за часом або введення додаткової групи осіб E (exposed), які мають вірус (хворобу), але ще не мають симптомів і тому не можуть бути віднесені до групи I. На відміну від інших вірусів, для COVID-19 можливий також перехід $R \rightarrow S$, тобто особи, які одужали, можуть бути ще раз інфіковані. Крім того, група E складається з осіб, які є носіями вірусу, але не можуть інфікувати інших (E_{pass}) і тих, які можуть це зробити (E_{act}). Оскільки є детальна статистика динаміки кількостей A, C, D, ці групи теж можуть бути використані для розширеної моделі.

Модифіковані моделі мають значно більшу кількість параметрів, які потребують визначення (ідентифікації) на основі статистичного аналізу результатів вимірювань на «великих даних», але детальніше описують еволюцію динамічної системи та дають більше можливостей для керування динамікою та вивчення виходу з пандемії [7,8]. Оригінальна SIR-модель має мінімальну кількість параметрів, які можна ідентифікувати, але вона не дозволяє описувати складну багатоступінчасту динаміку як наростання, так і зменшення (релаксації) значень параметрів S, I, R.

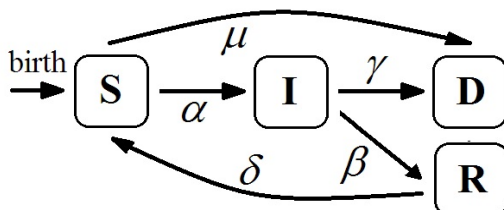


Рис.2. Схема SIR-моделі.

Відповідно до схеми взаємовідносин між групами (Рис.2), математична модель може бути записана у вигляді системи ЗДУ першого порядку [7,8]

$$\frac{dS}{dt} = (\lambda - \mu)S - \alpha SI + \delta R, \quad \frac{dI}{dt} = \alpha SI - (\beta + \gamma)I, \quad \frac{dR}{dt} = \beta I - \delta R, \quad (1)$$

де λ і μ - природні коефіцієнти народжуваності та смертності, α - імовірність захворювання при зустрічі з інфікованими, γ - коефіцієнт смертності від COVID-19, β - коефіцієнт одужання зі стійким імунітетом, δ - імовірність повторного інфікування COVID-19.

Значення λ і μ можуть бути отримані з річних статистичних таблиць, а значення $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ залежать від соціально-економічних факторів, які обговорювалися вище. Значення цих коефіцієнтів можуть бути отримані тільки шляхом статистичної обробки «великих даних»; вони різні для різних країн та залежать від поточних умов і тому можуть бути використані для оцінки заходів, які організує або може запропонувати чинна влада (локдаун різного ступеня або його відсутність), обов'язкові лабораторні дослідження і т.д.

Сума рівнянь (1) відповідає динаміці населення в цілому

$$\frac{dN}{dt} = (\lambda - \mu)S - \gamma I, \quad (2)$$

яка визначається тільки народжуваністю населення (λ) та його смертністю від звичайних факторів (μ) та COVID-19 (γ). Система (2) знаходиться у стаціонарному стані ($dN/dt=0$) якщо $I_0 = (\lambda - \mu)S_0 / \gamma$, $\lambda \geq \mu$.

Відношення I_0/S_0 в даній моделі відповідає індексу поширення захворювання $\mathfrak{R}_0 = (\lambda - \mu) / \gamma$, критичні значення якого ($\mathfrak{R}_0 < 0$) вимірюються за даними спостережень в різних країнах та є

⁵ M'Kendrick A.G. Applications of Mathematics to Medical Problems. Proc. Edinburgh Math. Soc. 1926. Vol.44. P.98-130.

головним чинником для введення локдауну [8]. В рамках математичних моделей значення \mathfrak{R}_0 відповідають ситуаціям, тобто наборам параметрів, коли розв'язки системи стають асимптотично нестійкими [8,9].

Для системи (1) стаціонарний розв'язок

$$S_0 = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}, \quad I_0 = \frac{\lambda - \mu}{\gamma} S_0, \quad R_0 = \frac{\beta}{\delta} I_0 \quad (3)$$

є нестійким, якщо $\mathfrak{R}_0 = 12k_2^3 + 81k_3^2 + 12k_3k_1^3 - 3k_1k_2(k_1k_2 + 18k_3) < 0$,

де $k_1 = \delta + \frac{\beta(\lambda - \mu)}{\gamma}$, $k_2 = \frac{(\lambda - \mu)}{\gamma}((\beta + \delta)\beta + (2\beta + \gamma)\gamma)$, $k_3 = \gamma\lambda + \beta(\lambda - \mu)$.

Виконання останньої умови потребує чисельних оцінок параметрів моделі на основі статистичної обробки «великих даних» для даної країни, даної хвилі і фази пандемії.

5 Висновки

Таким чином, різні соціально-економічні фактори, такі як географічне положення і площа країни, щільність населення, ВВП на душу населення, витрати на охорону здоров'я (% ВВП), рівень розвитку туризму (% ВВП), HDI та соціальна дистанція в різній мірі впливають на динаміку поширення пандемії. В роботі виявлена слабка залежність як загальної, так і щоденної кількості різних стадій захворювання на COVID-19 від щільності населення, рівня ВВП на душу населення, витрат країни на охорону здоров'я та від загального індексу якості життя HDI, а також сильна залежність – від туристичної привабливості країни, рівню HDI та соціальної дистанції у спілкуваннях з добре знайомими людьми. Отримані функціональні залежності для показників динаміки пандемії та географічних і соціально-економічних факторів, які можуть використатися в математичних моделях для кожної конкретної країни.

Виявлені також кореляції між кількістю інфікованих, померлих, одужалих, а також особ в активному і критичному станах в залежності від країни і її географічної локації. Відповідні регресійні залежності можуть бути використані в SIR-моделі динаміки захворювання або в її більш детальній модифікації. З адаптованої SIR-моделі у вигляді системи трьох ЗДР отримані стаціонарні розв'язки та умови їх асимптотичної стійкості у вигляді обмежень на параметри моделі. Оскільки для даного випадку нестійкість системи означає неконтрольоване зростання числа захворілих і померлих з часом, отримані критерії стійкості є показниками контрольованої/неконтрольованої динаміки пандемії, які можуть ефективно використовуватися на практиці. Детальні оцінки параметрів моделі та умов стійкості для вибраних 60 країн будуть проведені в подальшій роботі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Li M., Zhang Zh., Cao W., et al. Identifying novel factors associated with COVID-19 transmission and fatality using the machine learning approach. *Science of the Total Environment*. 2020. 13 October, (in press). <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0048969720363397>
2. Varotsos C.A., Krapivin V.F. A new model for the spread of COVID-19 and the improvement of safety. *Safety Science*. 2020. Vol.132 (104962). <https://doi.org/10.1016/j.ssci.2020.104962>
3. Friston K.J., Parr T., Zeidman P., et al. Testing and tracking in the UK: A dynamic causal modelling study. *Wellcome Open Res*. 2020. Vol.5. P.144. <https://wellcomeopenresearch.org/articles/5-144>
4. Wu J.T., Leung K., Leung G.M. Nowcasting and forecasting the potential domestic and international spread of the 2019-nCoV outbreak originating in Wuhan, China: a modelling study. *The Lancet*. 2020. Vol. 395(10225), P. 689–697. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)30260-9](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)30260-9)
5. Lopez V., Cukic M. A dynamical model of SARS-CoV-2 based on people flow networks. *Safety Science*. 2021. Vol. 134. 105034. <https://doi.org/10.1016/j.ssci.2020.105034>
6. Samanta S., Dubey V.K., Sarkar B. Measure of influences in social networks. *Applied Soft Computing Journal*. 2020. (in press) <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106858>

7. Bacaër N., Short A. *History of Mathematical Population Dynamics*. Springer-Verlag, London. 2011. 162 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-115-8>
8. Aldila D., Khoshnaw S.H.A., Safitri E., et al. A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. 139. 110042 <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110042>
9. Nikolopoulos K., Punia S., Schäfers A., et al. Forecasting and planning during a pandemic: COVID-19 growth rates, supply chain disruptions, and governmental decisions. *European Journal of Operational Research*. 2020. (in press) <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.08.001>

REFERENCES

1. M. Li, Zh. Zhang, W. Cao, et al., “Identifying novel factors associated with COVID-19 transmission and fatality using the machine learning approach”. *Science of the Total Environment*, 2020, 13 October, (in press) <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0048969720363397>
2. C.A. Varotsos, V.F. Krapivin, “A new model for the spread of COVID-19 and the improvement of safety”. *Safety Science*, 2020, Vol.132 (104962) <https://doi.org/10.1016/j.ssci.2020.104962>
3. K.J. Friston, T. Parr, P. Zeidman, et al. “Testing and tracking in the UK: A dynamic causal modelling study”. *Wellcome Open Res.*, 2020, Vol.5, P.144 <https://wellcomeopenresearch.org/articles/5-144>
4. J.T. Wu, K. Leung, G.M. Leung, “Nowcasting and forecasting the potential domestic and international spread of the 2019-nCoV outbreak originating in Wuhan, China: a modelling study”. *The Lancet*, 2020, Vol. 395, (10225), P. 689–697 [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)30260-9](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)30260-9)
5. V. Lopez, M. Cukic, “A dynamical model of SARS-CoV-2 based on people flow networks”. *Safety Science*, 2021, Vol. 134, 105034 <https://doi.org/10.1016/j.ssci.2020.105034>
6. S. Samanta, V.K. Dubey, B. Sarkar, “Measure of influences in social networks”. *Applied Soft Computing Journal*, 2020 (in press) <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106858>
7. N. Bacaër, A. Short, *History of Mathematical Population Dynamics*. Springer-Verlag, London, 2011, 162 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-115-8>
8. D. Aldila, S.H.A. Khoshnaw, E. Safitri, et al., “A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia”. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, 139, 110042 <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110042>
9. K. Nikolopoulos, S. Punia, A. Schäfers, et al. “Forecasting and planning during a pandemic: COVID-19 growth rates, supply chain disruptions, and governmental decisions”. *European Journal of Operational Research*, 2020, (in press) <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.08.001>

УДК 656.072; 656.015; 519,12.176

Моделювання нечітких процесів управління транспортними системами пасажирських перевезень

Л.М. Козачок, О.Ю. Лісіна

**Козачок
Лариса Миколаївна**

ст. викладач
*Харківський національний автомобільно-дорожній університет,
вул. Ярослава Мудрого 25, Харків, Україна, 61002*
e-mail: appl-math@ukr.net;
<https://orcid.org/0000-0002-5246-4246>

**Лісіна
Ольга Юліївна**

к. ф.-м. н., доцент
*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
площа Свободи 4, Харків, Україна, 61022*
e-mail: lisina_korovina@ukr.net;
<https://orcid.org/0000-0002-2732-2136>

У пошуку нових ефективних методів та інструментів управління пасажирськими перевезеннями, які спрямовані на мінімізацію часу обслуговування та досягнення максимального показника задоволення потреб пасажирів у транспорті, роботу маршруту та вивчення пасажиропотоку на ньому корисно розглянути за допомогою методів нечіткої логіки, що забезпечують механізм роботи з неточними поняттями, вводять нечіткі множини, проводять з ними логічні дії та отримують кінцевий результат поставленої задачі. У даній роботі з використанням функцій приналежності нечітким множинам розроблено алгоритм пошуку розкладу роботи транспортних засобів на маршруті як послідовності інтервалів обслуговування, що відповідають у ході поставленої задачі нечіткій функції цілі – задоволення потреб населення у перевезеннях та нечітким обмеженням на використання транспортних засобів, які обслуговують маршрут міського пасажирського транспорту.

Ключові слова: транспортна система, математична модель, календарне планування, нечітка логіка, оптимальний розклад, алгоритмізація.

Modeling fuzzy management processes of passenger transport systems

Kozachok Larisa

Senior Lecturer
*Kharkiv National Automobile and Highway University, st. Yaroslava Mudrogo 25,
Kharkiv, Ukraine, 61002*

Lisina Olga

PhD of Physical and Mathematical Sciences, docent
*V.N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Square 4, Kharkiv,
Ukraine, 61022*

The main tasks of organizing route transportation when considering processes in transport systems are to ensure a high level of management and the introduction of advanced working methods to meet the needs of the commuters, to ensure the quality of passenger service, to use vehicles of the enterprises' automobile fleet efficiently, to ensure transportation safety, as well as to reduce the cost of the necessary trips for the population. The main task of the passenger transport management should be the creation of schedules and the rational organization for the routes of vehicles. When looking for new effective methods and tools for managing passenger traffic, aimed at minimizing service time and achieving the maximum level of satisfaction of passengers, it is useful to consider the fuzzy logic methods. These methods provide and implement the mechanism of working with inaccurate concepts, introduce fuzzy sets of input data and allow performing logical actions with them as well as obtaining the final solution of the problem.

While setting the task of integer programming for creating a schedule for a train route, the target function and the system of restrictions on the desired values of unknowns are replaced by the functions of belonging to fuzzy sets, which indicate the average degree of belonging to the selected sets. Finding the values of the variables that are the solution to the problem and grouping them gives us a schedule for the route, which optimizes the target function under given restrictions. As the objective function, namely, the function of belonging to multiple time intervals, which correspond to the fuzzy function of the target in the studies, the numerical expression of the average degree of satisfaction of the needs of passengers is chosen. The time intervals – the average degree of use of vehicles during service during the daily operation of the route is chosen as the system of restrictions on

the desired variables. The algorithm for finding a solution space that is the basis for generating a schedule of vehicles on a route in the form of a sequence of service intervals corresponding to variable values has been developed.

The fuzzy objectives of the problem should be subject to the main criterion for creating a traffic schedule and optimal route control. That criterion takes into account the cost of the operation time of vehicles and the cost of waiting time for passengers.

Keywords: *transport system, mathematical model, scheduling, fuzzy logic, optimal schedule, algorithmization.*

Моделирование нечетких процессов управления транспортными системами пассажирских перевозок

**Козачок
Лариса Николаевна**

*ст. преподаватель
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет,
ул. Ярослава Мудрого 25, Харьков, Украина, 61002*

**Лисина
Ольга Юлиевна**

*к. ф.-м. н., доцент
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
площадь Свободы 4, Харьков, Украина, 61022*

При поиске новых эффективных методов и инструментов управления пассажирскими перевозками, которые направлены на минимизацию времени обслуживания и достижение максимального уровня удовлетворения потребностей пассажиров в транспорте, работу маршрута и изучение пассажиропотока на нем полезно рассмотреть с помощью методов нечеткой логики. Данные методы предоставляют и внедряют в процесс поиска решения механизм работы с неточными понятиями, вводят нечеткие множества по входным данным, проводят с ними логические действия и получают конечный результат поставленной задачи. В этой исследовательской работе с использованием функций принадлежности нечеткого множества разработан алгоритм поиска расписания работы транспортных средств на маршруте как последовательности интервалов обслуживания, соответствующих в поставленной задаче нечеткой функции цели – удовлетворение потребностей населения в перевозках и нечетким ограничением на использование транспортных средств, обслуживающих маршрут городского пассажирского транспорта.

Ключевые слова: *транспортная система, математическая модель, календарное планирование, нечеткая логика, оптимальное расписание, алгоритмизация.*

1 Вступ

У ході розгляду різноманітних підходів до поліпшення роботи пасажирського транспорту у містах та методів, спрямованих на це, звернемо увагу на відповідні варіанти удосконалення управління перевезеннями пасажирів на маршрутах. У якості таких регуляторів можуть бути використані наступні показники: зменшення інтервалів між виходами на маршрут для виконання перевезень конкретними транспортними засобами, розробка розкладів, які враховують удосконалення якості роботи на маршруті, залучення інших видів транспортних засобів з певною пасажиромісткістю. Коректування та створення нових графіків роботи маршруту, нових розкладів обслуговування пасажирів транспортними засобами рухомого складу також мають спиратися на змінення інтервалів руху на маршруті, на змінення часу початку та закінчення роботи по перевезенню пасажирів [2, 3]. Велике значення у цих розробках набуває урахування змін пасажиропотоку впродовж робочої доби на маршруті та дослідження побудованої за необхідними об'ємами перевезень епюри інтенсивності пасажиропотоку та кількості транспортних засобів, що працюють на маршруті [1, 4].

Таким чином, побудова розкладів, що спираються на змінення часу роботи транспортних засобів на маршруті в залежності від кількості пасажирів, які використовують автобусний пасажирський транспорт в певні періоди часу та на певних ділянках є перспективним напрямком розвитку методів управління та врегулювання роботи маршрутів транспортних систем міст.

В багатьох наукових роботах також останнього часу надані розробки нових ефективних методів та інструментів управління пасажирськими перевезеннями, які спрямовані на мінімізацію часу обслуговування, досягнення максимального показника задоволення потреб пасажирів у транспорті на необхідних, економічно активних ділянках транспортної мережі міста та на мінімізацію затрат при використанні транспортних засобів на маршруті, тобто і на енергозбереження ресурсів економіки міст [5-7].

2 Основні поняття метода досліджень

Вивчення пасажиропотоку корисно розглянути за допомогою методів нечіткої логіки, які гарантують високий рівень обробки вхідних даних та низьку затримку у часі обробки цих даних. Також нечітка логіка допомагає визначати значення достовірності практичних результатів. Нечітка логіка при вірно введених означеннях дає також проміжні оцінки критеріїв між абсолютно вірним значенням та абсолютно хибним значенням з урахуванням того, що при більших значеннях функції приналежності до певної множини вище достовірність критерію, що розглядається.

Процес застосування нечіткої логіки до вхідних значень являє собою скінчену кількість правил, які використовуються при отриманні вихідних значень, та відповідно при прийнятті рішень для удосконалення технічних процесів. Поняття нечіткої множини введено Zadeh у роботах 1965 р. [8], воно є поняттям множини з нечіткими границями. На заміну цільовій функції цілочислового програмування введена функція приналежності множині, значення якої змінюються у інтервалі від 0 до 1, $\mu(x) \in [0; 1]$, вказуючи на ступінь відповідності обраній множині. Введемо позначення X деякої множини значень, відносно яких обговорюється критерій A , тоді нечітка множина елементів X буде надана як набір впорядкованих пар $\{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$, $\mu_A(x)$ – ступінь, який вказує наскільки x належить нечіткій множині A . Завдяки введеним поняттям у подальшому розвитку цієї теорії Беллман у 1970 році [9] задачі цілочислового програмування зміг звести до вирішення задач у поняттях нечіткої логіки, у яких цільова функція та система обмежень записуються як нечіткі множини. Вирішити ці задачі означає вирішення задачі сумісного виконання нечітких цілей та нечітких обмежень і, тобто, перетин відповідних множин.

Нечіткі множини та операції з ними будемо застосовувати для програмування та управління процесами на міському пасажирському транспорті. Нехай парк деякого транспортного підприємства складається з транспортних засобів рухомого складу у необмеженій кількості, спочатку зробимо таке припущення. Це транспортне підприємство обслуговує деякий маршрут пасажирських міських перевезень. Розглянемо можливі варіанти руху автобусів та посадки пасажирів у автобуси на зупинках.

Поняття часових станів, які створюють простір часових станів.

Як було описано у роботах Беллмана Р. Е. [9], простір Ω неперервного часу обслуговування перетворюється у дискретний скінчений простір станів Ω , де $|\Omega| < \infty$ з однаковими інтервалами часу у 1 хвилину

$$\forall \omega_i, \omega_{i+1} \in \Omega : \omega_{i+1} - \omega_i = 1.$$

Поняття простору часових етапів (відрізків часу).

Простір часового етапу Q ділиться на простір часового етапу Q , де $N = |Q| < \infty$ з еквівалентними інтервалами $s \in [5, 30]$ в залежності від обслуговування пасажирів. Часовий стан ω відповідає часовому етапу $q(\omega, s)$, який визначається наступним чином:

$$q(\omega, s) = [\omega, s].$$

Розклад роботи автобусів на маршруті по обслуговуванню пасажирів.

$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ – розклад, який являє собою та надає проміжки часу обслуговування. Мається на увазі обслуговування пасажирів на маршруті певним автобусом при чому z_N є моментом часу відправлення на маршрут N -го автобусу, який відраховується від моменту часу виходу першого автобусу на маршрут. Також час початку та закінчення обслуговування пасажирів на маршруті z_1 та z_N задані спочатку, де N – кількість автобусів, працюючих на маршруті.

Знаходження значень змінних, які будуть рішенням задачі.

$t \in T$ є значеннями, що належать скінченій множині усіх значень інтервалів часу та являють собою проміжки часу, що проходять між двома послідовними зупинками автобусу:

$$t_1 < t_2 < \dots < t_M, |T| = M, t_{i+1} - t_i = 1, \forall i = \overline{1, M-1}.$$

Множина зупинок на маршруті.

Припустимо, що кількість пасажирів, які обслуговуються за інтервали часу $t_i, i = \overline{1, M}$, розподілена рівномірно. Множину зупинок позначимо $b_j \in \{b_1, b_2, \dots, b_j\}, j = \overline{1, J}$.

Максимальна пасажиромісткість являє собою максимальну кількість пасажирів, яка перевозиться одним автобусом, та позначається $p_i, i = \overline{1, N}$. Також для розгляду завдань можна використовувати поняття бажаної пасажиромісткості, яке було введено CederA.

Тобто для вивчення роботи по обслуговуванню на маршруті системи міського пасажирського транспорту та постановці задачі оптимізації вводяться умови з системи обмежень у певному часовому стані $\omega \in \Omega$ на певному часовому етапі $q \in Q$ та у певному проміжку часу $t \in T$.

Опишемо пасажиропотік.

Швидкість потоку пасажирів (інтенсивність), прибуваючих на зупинку на етапі $q \in Q$ позначимо v_i^q .

Множина пасажирів, що очікують автобусна зупинці $i \in J$ має міцність (кількість пасажирів) буде записано $v_i^q \cdot t$, час очікування автобуса цими пасажирами буде $\frac{v_i^q \cdot t^2}{2}$.

Інтенсивність потоку пасажирів, що використовують автобус, сідають у автобус на зупинці i , виходять з автобусу на зупинці j на часовому етапі $q \in Q$ позначимо λ_{ij}^q , а кількість таких пасажирів знаходиться як $v_i^q \cdot t \cdot \lambda_{ij}^q$.

Кількість пасажирів, що продовжують шлях поїздки у автобусі після j -ої зупинки позначимо $K_j^{\omega, t}$ при цьому проміжок часу ω буде різницею у часі між відправленням автобусу від зупинки j та останнім автобусом на маршруті у момент відправлення його від першої зупинки при розгляді певного часового стану ω

$$K_j^{\omega, t} = K_{j-1}^{\omega, t} + v_j^q \cdot t_{\omega} - \sum_{i=1}^{j-1} v_i^q \cdot t_{\omega} \cdot \lambda_{ij}^q. \quad (1)$$

Визначимо використаність конкретної зупинки, її **значущість**, яка залежить від кількості пасажирів, що заходять у автобус та виходять із автобусу на зупинці j при розгляді етапу часу q :

$$b_j^q = \frac{v_j^q + \sum_{i=1}^{j-1} v_i^q \cdot \lambda_{ij}^q}{\sum_{j=1}^J (v_j^q + \sum_{i=1}^{j-1} v_i^q \cdot \lambda_{ij}^q)}, \quad (2)$$

де $\sum_{j=1}^J b_j^q = 1$.

3 Використання методів нечіткої логіки для побудови оптимального розкладу роботи маршруту

Функцію приналежності до множини часових інтервалів, що відповідають нечіткій функції цілі, яка чисельно визначає ступінь задоволення потреб пасажирів, кількість яких $K_j^{\omega, t}$ є кількістю пасажирів, що відправляються від зупинки j , буде позначено $\mu_{g,p}(K_j^{\omega, t})$, де P – максимальна місткість транспортного засобу.

Позначимо $\mu_g^{\omega}(t)$ та $\mu_c^{\omega}(t)$ функції приналежності, які використовуються для цільової функції та системи обмежень, аргументом цих функцій буде часовий інтервал t , який розглядається у часовому стані ω транспортної системи. Приналежність часового інтервалу до необхідної множини часових інтервалів розглядається для кожної зупинки $j = \overline{1, J-1}$ з урахуванням значущості цієї зупинки як ваги, що була задані вище рівністю (2).

Для цих функцій приналежності отримаємо наступні формули:

$$\mu_g^{\omega}(t) = \sum_{j=1}^{J-1} b_j^q \cdot \mu_{g,p}(K_j^{\omega, t}) \quad (3)$$

$$\mu_c^{\omega}(t) = \sum_{j=1}^{J-1} b_j^q \cdot \mu_{c,p}(K_j^{\omega, t}) \quad (4)$$

Далі запишемо функцію приналежності, яка вказує на ступінь відповідності часового інтервалу t обслуговування транспортним засобом пасажирів нечіткій цільовій функції та нечітким обмеженням, тобто функцію приналежності до множини часових інтервалів, що найбільш

відповідають нечіткій цілі та нечітким обмеженням у певному часовому стані ω . Ця формула буде мати наступний вигляд:

$$\mu_o^\omega(t) = \mu_g^\omega(t) \wedge \mu_c^\omega(t). \quad (5)$$

Для $d \in (0; 1)$ введемо поняття d -рівня функції $\mu_o^\omega(t)$, який позначимо як множину $U_d(\mu_o)$, також позначимо n_o – кількість часових інтервалів, що будуть включені до оптимального розкладу Z^* роботи на маршруті та будуть оптимізувати цей розклад у часовому стані ω . Множина O_d^ω є підмножиною $U_d(\mu_o)$, що містить інтервали, які мають найвищий ступінь відповідності, відображений у функції приналежності, кількість елементів цієї множини буде n_o .

Таким чином

$$O_{d,n_o}^\omega(t) \subset U_d(\mu_o) = \overline{\{t | \mu_o^\omega(t) > d\}},$$

$$|\mu_{O_{d,n_o}^\omega}(t)| = |\mu_o| \leq n_o. \quad (6)$$

Для того, щоб оцінювати оптимальність розкладу руху Z транспортних засобів на маршруті необхідно обчислити величини, які є характеристиками цього розкладу, та за допомогою значень цих характеристик можна оптимізувати розклад руху. Спочатку запишемо формули для обчислення загального часу обслуговування пасажирів транспортними засобами на маршруті T_z , загального часу руху пасажирів, що залежить від стану транспортної системи, T_ω , загального часу очікування пасажирів транспортних засобів на маршруті T_w :

$$T_z = \sum_{\omega=z_1}^{z_N} \sum_{j=1}^{J-1} \omega_j^q \quad (7)$$

$$T_\omega = \sum_{\omega=z_2}^{z_N} \sum_{j=1}^{J-1} (K_j^{\omega,t} \cdot \omega_j^q) \quad (8)$$

$$T_w = \sum_{\omega=z_2}^{z_N} \sum_{j=1}^{J-1} \frac{v_j^q \cdot t_\omega^2}{2} \quad (9)$$

Далі ми можемо вивести формулу для обчислення середнього ступеню задоволення потреб населення у автобусах, які виконують перевезення на маршруті впродовж робочої доби як середнього значення функції приналежності до множини часових інтервалів, що найбільш відповідають нечіткій цілі, тобто ступінь відповідності цільовій функції. Також буде записана формула для обчислення середнього значення ступеню використання транспортних засобів впродовж добової роботи на маршруті як середнє значення функції приналежності, що вказує на ступінь відповідності нечітким обмеженням:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_g &= \frac{1}{N-1} \sum_{\omega=z_2}^{z_N} \mu_g^\omega(t), \\ \bar{\mu}_c &= \frac{1}{N-1} \sum_{\omega=z_2}^{z_N} \mu_c^\omega(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Нечіткі цілі постановки задачі повинні підпорядковуватися головному критерію розгляду і вирішення задачі побудови розкладу руху та оптимального управління на маршруті, цей критерій враховує вартість роботи розкладу, що складається з вартості часу роботи транспортних засобів по обслуговуванню пасажирів та вартості часу очікування пасажирів транспортних засобів на маршруті:

$$C = c_z \cdot T_z + c_w \cdot T_w ,$$

де c_z - затрати на одну годину обслуговування маршруту транспортним засобом, c_w - затрати пасажирів за одну годину очікування на зупинках.

Визначення оптимального інтервалу часу t_ω для кожного часового стану ω .

При вирішенні задачі можна будувати чітку математичну модель з чіткими обмеженнями на пропускну здатність автобусів при цьому оптимальний часовий інтервал визначається так, щоб отримати максимальне сукупне навантаження, яке наближається до бажаної зайнятості транспортних засобів та вдоволення потреб населення у перевезеннях.

Якщо будувати нечітку модель для вирішення задачі, що поставлена, то оптимальні часові інтервали, що будуть входити до оптимального розкладу роботи на маршруті, визначаються як нечіткою цільовою функцією так і нечіткими обмеженнями, згрупованими у систему, у певному часовому стані роботи на маршруті:

$$t_\omega = \begin{cases} \arg \max \mu_0^\omega(t) & \text{якщо } \mu_0^\omega(t) \leq d , \\ O_{d,n_0}^\omega(t) & \text{якщо } \mu_0^\omega(t) > d , \end{cases} \quad (11)$$

при $t \in T = \{t_1, t_2, \dots, t_M\}$.

Математична модель при цьому перетворює чітку цільову функцію у дві нечіткі функції приналежності – нечітку ціль задоволення пасажирів та нечіткі обмеження використання пропускну спроможності транспортного засобу. Для певного часового інтервалу у певному стані часу кількість пасажирів у транспортному засобі на кожній зупинці b_j відрізняється. У наслідок цього $\mu_g^\omega(t)$ та $\mu_c^\omega(t)$ отримується агрегацією усіх μ_g та μ_c на зупинці јнад усіма зупинками $j = \{1, 2, \dots, J - 1\}$, враховуючи ваги кожної зупинки b_j^q на етапі роботи транспортної системи $q \in Q$.

4 Формування розкладу роботи транспортних засобів на маршруті по обслуговуванню пасажирів

У рівнянні знаходження часових інтервалів оптимального розкладу робіт сказано, що при $\mu_0^\omega(t) \leq d$ множина оптимальних часових інтервалів складається з одного елемента t_ω , що максимізує $\mu_0^\omega(t)$, де d – певний рівень значень функції приналежності. Якщо $\mu_0^\omega(t) > d$, то множина часових інтервалів оптимального розкладу є множиною $O_{d,n_0}^\omega(t)$, що складається з інтервалів, які мають найвищий ступінь відповідності, відображений у функції приналежності, кількість елементів цієї множини буде n_0 , елементи будуть розташовані у порядку не зростання їх величин. Рішенням поставленої задачі буде матриця O розміру $p \times q$, елементи якої будуть $O(\omega, t_\omega) = \mu_0^\omega(t)\omega$.

Простір прийняття рішень O є базою для формування розкладу Z як графіку часу обслуговування, при якому два послідовних відправлення автобусів по сполученню відповідають станам $\omega, \omega + t_\omega$, де t_ω - часовий інтервал, що відповідає стану ω .

Запишемо послідовні кроки пошуку простору рішень $O(\omega, t_\omega)$:

- Спочатку усім елементам матриці $O(\omega, t)$ присвоїмо нульові значення, також $K_j^{\omega,t} = 0$.
- У циклі по $\omega \in \Omega, t \in T, j = \overline{1, J-1}$ будемо обчислювати кількість пасажирів, які продовжують переміщення у автобусі після j -ї зупинки за формулою, наведеною вище:

$$K_j^{\omega,t} = K_{j-1}^{\omega,t} + t_\omega \left(v_j^q - \sum_{i=1}^{j-1} v_i^q \cdot \lambda_{ij}^q \right), \text{ де } q = \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right].$$

- Знаходимо значення функцій приналежності у циклі по $\omega \in \Omega, t \in T$:

$$\mu_g^\omega(t) = \sum_{j=1}^{J-1} b_j^q \cdot \mu_{g,B}(K_j^{\omega,t}),$$

$$\mu_c^\omega(t) = \sum_{j=1}^{J-1} b_j^q \cdot \mu_{c,B}(K_j^{\omega,t}),$$

$$\mu_0^\omega(t) = \mu_g^\omega(t) \wedge \mu_c^\omega(t).$$

- У циклі по $t \in T$ обчислюємо оптимальні часові інтервали, множину, що відповідає простору рішень у вигляді матриці O

$$t_\omega = \arg \max \mu_0^\omega(t),$$

$$O(\omega, t_\omega) = \mu_0^\omega(t_\omega).$$

- Розташувати значення функції $\mu_0^\omega(t)$ по спаданню значень елементів, результат записати у вектор-стовпчик

$$spuskO = descending(\mu_0^\omega(t)).$$

- У циклі по $n = \overline{1, n_0}$ виконати наступні дії:

$$\text{якщо } spuskO(n) \leq d \text{ тоді } t_\omega = spuskO(n), \quad O(\omega, t_\omega) = spuskO(n).$$

5 Висновки

У ході виконання наведеного вище алгоритму ми отримуємо розклад роботи транспортних засобів на маршруті у запису послідовності інтервалів обслуговування. Цей розклад буде наближений до оптимального розкладу роботи, що можна розглянути, враховуючи кількість рейсів автобусів N , час обслуговування маршруту транспортними засобами T_z , час знаходження пасажирів у дорозі на маршруті T_ω , час очікування пасажирів транспортним засобом T_w , середню кількість пасажирів у автобусі P , середній ступінь задоволення потреб пасажирів $\overline{\mu_g}$ та середнє значення ступеню використання транспортних засобів впродовж добової роботи на маршруті $\overline{\mu_c}$. Вартість роботи рухомого складу на маршруті, що розглядається, за побудованим розкладом обчислюється наступним чином:

$$C = c_z \cdot T_z + c_w \cdot T_w$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Левковець П.Р., Мороз М.М., Кобилецький Р.В. Удосконалення логістичного управління перевезень пасажирів. *Вісник КДПУ імені Михайла Остроградського*. 2007. Вип. 6 (47). С. 113-115. [http://www.kdu.edu.ua/statti/2007-6\(47\)/113.pdf](http://www.kdu.edu.ua/statti/2007-6(47)/113.pdf)
2. Ceder A. Planning and Evaluation of Passenger Ferry Service in Hong Kong. *Transportation*. 2006. Vol. 33. P. 133–152. <https://www.worldtransitresearch.info/research/2324>
3. Ceder A., Voß S., Daduna J. Efficient Timetabling and Vehicle Scheduling for Public Transport. Computer-Aided Scheduling of Public Transport. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. 2001. Vol. 505. P. 37-52. https://doi.org/10.1007/978-3-642-56423-9_3
4. Горбачов П.Ф., Любий Є.В. Моделювання попиту на перевезення населення малих міст маршрутним пасажирським транспортом: монографія. Харків: ХНАДУ, 2014. 257 с. https://scholar.google.com.ua/citations?user=aOVv_AoAAAAJ&hl
5. Alvarez A., Casado S., Gonzalez Velarde J., Pacheco J. A computational tool for optimizing the urban public transport. *Journal of Computer System Sciences International*. 2010. Vol. 49(2). P. 244-252. https://www.researchgate.net/publication/226909691_A_computational_tool_for_optimizing_the_urban_public_transport_A_real_application

6. Leurent F. Transport capacity constraints on the mass transit system: systemic analysis. *European Transport Research Review*. 2011. Vol. 3. P. 11-21. <https://doi.org/10.1007/s12544-011-0046-5>
7. Marieke S. van der Tuin, Pel A.J. The disruption transport model: computing user delays resulting from infrastructure failures for multi-modal passenger & freight traffic. *European Transport Research Review*. 2020. Vol. 12. P. 1-10. <https://doi.org/10.1186/s12544-020-0398-9>
8. Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965. Vol. 8(3). P. 338-353. <https://doi.org/10.2307/2272014>
9. Bellman R.E., Zadeh L.A. *Decision-Making in a Fuzzy Environment*. *Management Science*. 1970. Vol. 17. 141-164. <https://doi.org/10.1287/mnsc.17.4.B141>

REFERENCES

1. P.R. Levkovec, M.M. Moroz, and R.V. Kobileckiy, “Improved logistics management of passenger transportation”, *Vestnik KDPU*, vol. 6(47), 113-115, 2007. [http://www.kdu.edu.ua/statti/2007-6\(47\)/113.pdf](http://www.kdu.edu.ua/statti/2007-6(47)/113.pdf) [in Ukrainian]
2. A. Ceder, “Planning and Evaluation of Passenger Ferry Service in Hong Kong”, *Transportation*, vol. 33, p. 133–152, 2006. <https://www.worldtransitresearch.info/research/2324>
3. A. Ceder, S. Voß, & J. Daduna, “Efficient Timetabling and Vehicle Scheduling for Public Transport. Computer-Aided Scheduling of Public Transport”, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol 505, 37-52, 2001. https://doi.org/10.1007/978-3-642-56423-9_3
4. P.F. Gorbachov, E.V. Lyubiy, “Modeling the demand for transportation of the population of small towns by route passenger transport: monograph”, Kharkov: KhNADU, 2014. https://scholar.google.com.ua/citations?user=aOVv_AoAAAAJ&hl [in Ukrainian]
5. A. Alvarez, S. Casado, J. Gonzalez Velarde, & J. Pacheco, “A computational tool for optimizing the urban public transport”, *Journal of Computer System Sciences International*, vol. 49(2), 244-252, 2010. https://www.researchgate.net/publication/226909691_A_computational_tool_for_optimizing_the_urban_public_transport_A_real_application
6. F. Leurent, “Transport capacity constraints on the mass transit system: systemic analysis”, *European Transport Research Review*, vol. 3: 11-21, 2011. <https://doi.org/10.1007/s12544-011-0046-5>
7. Tuin, Marieke S. van der and A. Pel, “The disruption transport model: computing user delays resulting from infrastructure failures for multi-modal passenger & freight traffic”, *European Transport Research Review*, vol. 12: 1-10, 2020. <https://doi.org/10.1186/s12544-020-0398-9>
8. L.A. Zadeh, “Fuzzy sets”, *Information and Control*, vol. 8(3), 338-353, 1965. <https://doi.org/10.2307/2272014>
9. R.E. Bellman, L.A. Zadeh, “Decision-Making in a Fuzzy Environment”, *Management Science*, vol. 17, 141-164, 1970. <https://doi.org/10.1287/mnsc.17.4.B141>

УДК 51-76+616.9

Математичне моделювання динаміки пандемії COVID-19

В.В. Костецька, Н.М. Кізілова

Костецька

Валерія Володимирівна

студентка, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: kostetskavv@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-0995-6979>

Кізілова

Наталія Миколаївна

д.ф.-м.н., професор; професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: n.kizilova@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9981-7616>

Приведений детальний огляд математичних моделей, які представлені системами ЗДР і використовуються для вивчення взаємозв'язаних шляхів і механізмів поширення інфекційних захворювань, зокрема SIRS і SEIRS моделей та їх модифікацій. Окремо досліджується узагальнена SEIRS-модель, яка містить шість параметрів і враховує зниження доступності та якості лікування зі зростанням числа хворих. Проведені дослідження асимптотичної стійкості стаціонарного розв'язку системи та аналітичні оцінки базової швидкості поширення інфекції R_0 . Показано, що в залежності від параметрів моделі можлива біфуркація поведінки динамічної системи. Проведені чисельні розрахунки за моделлю з використанням даних для ряду країн Європи, включаючи Україну. Показано, що параметр стійкості системи ЗДР відповідає кількості випадків вторинного зараження, яку розраховують шляхом аналізу клінічних даних.

Ключові слова: динамічні системи, епідеміологія, математичне моделювання, COVID-19.

Mathematical modeling of the dynamics of the COVID-19 pandemic

Kostetska Valeriia

student

V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

Kizilova Nataliya

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Professor of the Department of Applied Mathematics

V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

The detailed review of mathematical models represented by the systems of ordinary differential equations (ODE) and used to study the complex interconnected mechanisms and pathways of the spread of infection diseases over a country, a region or worldwide is presented. The most popular models are based on functional interconnections between the groups of susceptible, exposed, infected and recovered individuals in the community (SIRS and SEIRS models). It is shown that in some cases the number of ODE can be decreased. The SEIRS models and their recent modifications are discussed. The generalized SEIRS-model, which has six parameters and takes into account the noticeable decrease in the availability and quality of medical care with a rapid increase in the number of infected patients, is considered. The asymptotic stability of the stationary solution of the system is studied, and some analytical estimates of the basic reproduction number (BRN) of infection R_0 are presented. It is shown that, depending on the model parameters, a bifurcation in the behaviour of the dynamical system is possible. In those cases the dynamical system could transfer from the conditions with one stability criterion $R_{01} < 0$ to another $R_{02} < 0$ during the same "wave" of the pandemic in the country. The model has been validated on the data for Indonesia obtained from the open sources. The numerical calculations by using the statistical data for a number of European countries, including Ukraine, have been carried out. It is shown that the stability parameter for the model system of ODE corresponds to the BRN index of secondary infection calculated by the statistical analysis of the epidemiological data. The obtained results can be used in the decision making about the measures against the COVID-19 propagation in a given country or region.

Keywords: dynamical systems, epidemiology, mathematical modeling, COVID-19.

Математическое моделирование динамики пандемии COVID-19

Костецкая Валерия Владимировна	<i>студентка, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022</i>
Кизилова Наталья Николаевна	<i>д.ф.-м.н., профессор; профессор кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022</i>

Приведен подробный обзор математических моделей, которые представлены системами ОДУ и используются для изучения взаимосвязанных путей и механизмов распространения инфекционных заболеваний, в частности SIRS и SEIRS моделей и их модификаций. Отдельно исследуется обобщенная SEIRS-модель, которая содержит шесть параметров и учитывает снижение доступности и качества лечения с ростом числа больных. Проведенные исследования асимптотической устойчивости стационарного решения системы и аналитические оценки базовой скорости распространения инфекции R_0 . Показано, что в зависимости от параметров модели возможна бифуркация поведения динамической системы. Проведены численные расчеты по модели с использованием данных для ряда стран Европы, включая Украину. Показано, что параметр устойчивости системы ОДУ соответствует количеству случаев вторичного заражения, которую рассчитывают путем анализа клинических данных.

Ключевые слова: динамические системы, эпидемиология, математическое моделирование, COVID-19.

1 Вступ

Пандемія коронавірусу COVID-19 розпочалась з території Китаю в грудні 2019 р. і станом на початок грудня 2020 р. вже охопила 220 країн і регіонів з майже 70 млн. хворих, 1.5 млн. померлих та 50 млн. одужалих. Розробка засобів профілактики, лікування та вакцинації, впливу генетичних факторів, віку та супутніх захворювань є невідкладними задачами медико-біологічних наук. В той же час актуальними задачами фізико-математичних наук є дослідження фізичних шляхів передачі інфекції, статистичної обробки «великих даних» спостережень та вимірювань параметрів поширення пандемії COVID-19 у порівнянні з попередніми вірусними та не вірусними епідеміями, а також розробки відповідних ефективних математичних моделей, які дозволяють планувати засоби боротьби з поширенням епідемії та прогнозувати її подальшу динаміку (спад, наявність другої та подальших хвиль, неконтрольоване зростання тощо).

Протягом 2020 р. були опубліковані open access результати досліджень та статистичного аналізу даних в різних країнах світу – Китаї [1], Великобританії [2], Італії [3], Індонезії [4] та ін. Ці дані надають широкі можливості для глибокого аналізу закономірностей поширення пандемії COVID-19 та вплив на цей процес географічних, кліматичних, екологічних, економічних, соціальних, політичних та інших важливих факторів, які є специфічними для країни, області, території. В даній роботі проведений аналіз існуючих математичних моделей та наведені результати моделювання динаміки поширення епідемії з використанням даних ряду країн Європи, включаючи Україну.

2 Огляд математичних моделей

Історично перші спроби «математизувати» процес поширення захворювання належать видатному математику і механіку Д. Бернуллі, який в 1760-1766 р. вивчав можливості збільшення середньої тривалості життя за рахунок усунення віспи, яка в ті часи була однією з головних причин смерті¹. Лише в 1870-х роках Р. Кох та Луї Пастер підтвердили, що інфекційні хвороби викликані мікроорганізмами, що відкрило шлях до пояснення спостережуваних кривих, які сьогодні називають кривими захворюваності [5]. На початку XIX ст. Джон Сноу [5] сформулював гіпотезу, що епідемії закінчуються, коли доступність сприйнятливих осіб («епідемічного палива») зменшується. Кілька десятиліть пізніше, аналізуючи дані про захворюваність на кір у Великобританії, Вільям Хамер² визначив дворічний період спалахів у містах, і зокрема пояснив повторність епідемій кору гіпотезою Сноу. Ключовий крок до перетворення математичної епідеміології в наукову дисципліну зв'язаний з працями лікаря Р. Росса, який застосував теорію

¹ Bernoulli D. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité cause par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. Histoire de l'académie royale des sciences avec les mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de cette académie. Paris 1766.

² Hamer W.H. The Milroy Lectures on Epidemic Disease in England: the Evidence of Variability and of Persistency of Type, Bedford Press, 1906.

ймовірностей для зрозуміння передачі інфекції³ та епідеміолога А. Маккендріка⁴, який використав підходи статистичної фізики і закон масової дії кінетики хімічних реакцій, щоб описати передачу інфекції як результат соціального контакту між інфікованими (infected, I) сприйнятливими (susceptible, S) людьми. Саме Маккендріка висунув гіпотезу про те, що популяція поводить себе як сукупність «частинок» різних типів, які випадково рухаються в навколишньому середовищі, де кожне «зіткнення» між частинками з груп S і I з має рівномірну ймовірність того, що частинка S-типу переходить у I-тип. Він вивів перше в історії звичайне диференціальне рівняння (ЗДР) для швидкості поширення епідемії у вигляді $y' = ky(N - y)$, де N – чисельність популяції, y' – похідна за часом, y – число інфікованих, тобто $I = y/N$ – відносна доля інфікованих в популяції, k – швидкість поширення захворювання.

Для безрозмірного параметра I Маккендрік отримав логістичне ЗДР

$$I' = kI(1 - I), \quad (1)$$

розв'язок якого $I(t) = I_0 e^{kt} / (1 + I_0(e^{kt} - 1))$, $I_0 = I(0)$ описує сигмовидну криву, яка має асимптоту $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 1$, що відповідає поширенню інфекції на всю популяцію у разі відсутності імунітету (перший принцип теоретичної епідеміології). В подальшій серії праць з М. Кермаком⁵ була доказана відома порогова теорема для інфекцій, які надають постійний імунітет, вивчені умови ендемічності, проаналізовані структури епідеміологічних моделей. Це привело до справжнього вибуху біоматематичних досліджень [6].

Наступний прорив в математичній імунології пов'язаний з систематичним використанням математичних моделей для інтерпретації епідеміологічних даних та тенденцій, спрямованих на боротьбу з пневмонією [7], вірусним гепатитом, СНІД [6], які стали центральним допоміжним інструментом для уряду та громадськості для прийняття рішення щодо охорони здоров'я в суспільстві. В останні десятиріччя чимало зусиль було прикладене в дослідженнях нових загроз пандемії: 2000 - черевний тиф, 2002 - SARS, 2005 - пташиний грип, 2009 - свинячий грип, 2010 - лихоманка Західного Нілу, 2012 - MERS, 2014 - лихоманка Ебола, 2015 - лихоманка Зика, 2016 - сибірська виразка, 2019 – кір. Саме математичне моделювання у порівнянні з результатами статистичного аналізу даних дозволило зрозуміти, що люди не є «частинками» в моделі, що привело до сучасних теорій «соціальних потоків» [8]. Було показано, що важливим індексом епідемічної загрози є базова репродуктивна швидкість (basic reproduction number, BRN) інфекції \mathcal{R}_0 , який визначається як очікувана кількість випадків вторинного зараження, спричиненого одним типовим інфекційним випадком протягом усього періоду зараженості. У великій однорідній популяції \mathcal{R}_0 - це пороговий параметр, який визначає, чи епідемія зростає, чи спадає. З точки зору математичного моделювання \mathcal{R}_0 - це експоненціальний фактор зростання числа інфікованих відносно групи S [4-8]

$$I(S) \sim \mathcal{R}_0^{-1} \log(S/S_0), \quad (2)$$

де $S_0 = S(0)$.

В розвинених країнах значення \mathcal{R}_0 щодобово розраховуються для кожного регіону як показник в експоненціальній апроксимації поточної частини часового ряду $I(t)$, оприлюднюються та використовуються для прийняття рішень. Так, в Італії протягом піку другої хвилі пандемії $\mathcal{R}_0 > 2.6$, а на початок грудня 2020 р. знизився до $\mathcal{R}_0 = 0.61-1.06$; для порівняння, протягом пандемічного грипу 1918 р. в Іспанії $\mathcal{R}_0 \sim 2$ [6]. За критичні значення для введення локдауну з жорсткими обмеженнями приймають $\mathcal{R}_0 = 1.5-2$ в залежності від заповнення медичних закладів.

³ Ross R. An application of the theory of probabilities to the study of a priori pathometry. Part I, Proc. R. Soc. A, Contain. Pap. Math. Phys. Charact. 1916. v.92(638). P.204–230.

⁴ McKendrick A. The rise and fall of epidemics, Paludism. 1912. v.1. P. 54–66.

⁵ Kermack M., McKendrick A. Contributions to the mathematical theory of epidemics. Part I, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 1927. v.115(5). P.700–721.

Найпростіша математична модель інфекційного захворювання базується на групах S, I та одужалих (recovered, R), між якими можливі зрозумілі переходи $S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S$ (так звана SIRS, або SIR модель), яка описується системою ЗДР [5,6]

$$\begin{aligned} S' &= \lambda - \beta SI - \mu S + \delta R, \\ I' &= \beta SI - \gamma I - (\mu + \phi)I, \\ R' &= \gamma I - (\mu + \delta)R, \end{aligned} \quad (3)$$

де λ - швидкість зростання популяції, β - швидкість інфікування, ϕ - смертність від хвороби, μ - смертність від інших причин, γ і δ - швидкості одужання та ослаблення імунітету.

Параметр β залежить як від параметрів живучості та швидкості передачі даного виду інфекції, екологічних і погодних факторів, а також від активності індивідів, числа зустрічей на одиницю часу, соціальної дистанції і т.п. [6]. Сума рівнянь (2) описує стаціонарний стан системи, в якій особі народжуються ті вмирають від природних або епідемічних факторів: $(S+I+R)' = \lambda - \mu(S+I+R) - \phi I$. За відсутністю епідемії ($\phi=0$) та наявності збалансованості ($\lambda = \mu$), система знаходиться в стаціонарному (детермінованому) стані $S+I+R=1$. Це дає можливість отримати з (3) найпростішу SIS-модель [6]

$$\begin{aligned} S' &= \lambda - \beta SI - \mu S, \\ I' &= (\beta S - \gamma - \mu - \phi)I, \end{aligned} \quad (4)$$

а долю одужалих потім обчислювати як $R = 1 - S - I$; при $\lambda = \mu = \phi = 0$ (4) дає класичну SIR- модель Кермака і Маккендріка.

Розв'язок (4) можна знайти у вигляді $\{S, I\}(t) = \{S_0, I_0\} = \{S^*, I^*\}e^{\xi t}$, де $S_0 = (\gamma + \mu + \phi) / \beta$, $I_0 = (\lambda - \mu S_0) / \beta S_0$, $\lambda \beta > \mu(\gamma + \mu + \phi)$ - стаціонарний розв'язок (4), S^*, I^* - амплітуди малих відхилень, ξ - власті значення оператора задачі (4). В залежності від параметрів моделі, можна дослідити різні режими динамічної системи (4) та умови стійкості стаціонарного стану $\text{Re}(\xi) < 0$.

Численні модифікації SIRS-моделі включають доповнення її додатковими групами контактних індивідів, які ще не мають симптомів хвороби (exposed, E) – SEIRS-модель [6]; інфікованих, які не є переносниками вірусу, які мають симптоми та знаходяться на лікуванні за умовами обмеженості соціальних контактів, які є інфікованими і можуть заражати інших і знають (I_1) або не знають (I_2) про те, групи необстежених, поверхнево або глибоко обстежених, і т.д. [4-9] При цьому моделі (3), (4) можуть як завгодно ускладнюватися, що веде до значного підвищення кількості параметрів моделі, які потребують визначення. На сьогодні задача визначення моделі, яка є достатньо розширена і може описувати різні динамічні режими, які спостерігаються в різних країнах (наявність окремих хвиль з визначеними фазами зростання, піку, плато, спадання, або перехід першої хвилі в другу, перманентне зростання і т.д.), але розумно обмежена можливістю ідентифікації параметрів моделі з даних спостережень.

3 Постановка задачі та аналітичні оцінки

В даній роботі розглядається модифікація SEIRS-моделі [6-8]

$$\begin{aligned} S' &= \lambda - \beta SI - \mu S + \delta R, & I' &= \alpha E - \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{1+bI} \right) I - (\mu + \phi)I, \\ E' &= \beta SI - (\alpha + \mu)E, & R' &= \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{1+bI} \right) I - (\mu + \delta)R, \end{aligned} \quad (5)$$

де ε - ефективність лікування в лікарні, b – коефіцієнт насичування лікарень хворими, α - параметр, який залежить від інкубаційного періоду вірусу.

Таким чином, модель (5) враховує ступінь підготовленості медичної системи країни до епідемії та дозволяє керувати динамічною системою за рахунок не тільки обмежень контактів ($\downarrow \beta$), але й поліпшення якості ($\downarrow \phi$) та доступності ($\downarrow b, \uparrow \varepsilon$) лікування. Параметри λ, μ теж піддаються контроль, але тільки в далекій перспективі, а параметр α може змінюватися неконтрольовано у

зв'язку с мутаціями вірусу або іншими факторами. Сума рівнянь (5) дає баланс загальної чисельності популяції за рахунок природних факторів та смерті від інфекції: $N' = \lambda - \mu N - \phi I$. З урахуванням співвідношення $N = S + I + E + R$ (5) може бути зведена до SEI-моделі, аналогічно (3), (4).

Стационарний розв'язок (5) $\{S_0, E_0, I_0, R_0\}$

$$S_0 = \frac{\delta(\gamma(1+bI_0)+\varepsilon)I_0 + \lambda(\mu+\delta)(1+bI_0)}{(\mu+\delta)(\beta I_0 + \mu)}, \quad E_0 = \frac{\beta S_0 I_0}{(\alpha + \mu)}, \quad R_0 = \frac{(\beta I_0 + \mu)S_0 - \lambda}{\delta}, \quad (6)$$

де I_0 - позитивний корінь рівняння $I_0^2 + k_4 I_0 + k_5 = 0$, $k_4 = \frac{(\gamma + \varepsilon)k_1 - k_2 + k_3 - \mu\gamma}{(\gamma k_1 - k_2)b}$, $k_5 = \frac{k_3 - \mu(\gamma + \varepsilon)}{(\gamma k_1 - k_2)b}$,
, $k_1 = k\delta - \beta$, $k_2 = (\mu + \phi)\beta$, $k_3 = \lambda(\mu + \delta)k - \mu(\mu + \phi)$, $k = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \mu)(\mu + \delta)}$,

В залежності від параметрів моделі критерій стійкості системи $\mathfrak{R}_0 < 1$ має вигляд

$$\mathfrak{R}_0 = \begin{cases} -k_4, & \text{якщо } k_5 > k_4^2 / 4, \\ -k_5, & \text{якщо } k_4 > 2\sqrt{k_5}. \end{cases} \quad (7)$$

В [4] розглядалась більш детальна 6-параметрична модель COVID-19, але був отриманий тільки один критерій стійкості для випадку $b=0$

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\alpha\beta\lambda}{\mu(\mu + \gamma + \phi + \varepsilon)(\alpha + \mu)}. \quad (8)$$

Підстановка $b=0$ в (6) дає лінійне рівняння для I_0 і тому в (7) маємо один критерій $k_4 = k_5$, який співпадає з (8). Для подальшого аналізу динамічної системи (5) потрібно проведення чисельних розрахунків.

4 Чисельні розрахунки і аналіз результатів

З метою валідації моделі (5) проводилися чисельні розрахунки з параметрами, які були отримані шляхом обробки даних спостережень за першою хвилею COVID-19 (з 3.03 по 10.05 2020 р.) в м. Джакарта, Індонезія [4]: $\alpha = 0.25$, $\beta = 1.44 \cdot 10^{-7}$, $\gamma = 0.27$, $\varepsilon = 0.23$, $\phi = 0.06$, $b = 10^{-4}$, $\delta = 0.5$, $\lambda = 0.0164$, $\mu = 0.0064$ (дані за 2019 р.). Чисельні розрахунки за цими параметрами дали криві, подібні аналогічним залежностям, які наведені в [4], хоча в тій роботі була використана система з шести ЗДР, в якій група E була поділена на три підгрупи. Модель (5) дозволяє описати динаміку поширення епідемії за відсутності будь-яких профілактичних і обмежувальних заходів, за наявності м'яких або жорстких обмежувальних заходів, оцінювати прогнозовану кількість перехворілих, видужалих і померлих, потребу койко-місць в лікарнях, очікуваний термін піку і закінчення епідемії тощо.

Чисельне дослідження чутливості системи ЗДР (5) до змін кожного з параметрів моделі показав, що найбільш значний вплив оказує параметр β , зміна якого на порядок викликає як зміни в значеннях $\{S_0, E_0, I_0, R_0\}$, так і в знаках критеріїв $\mathfrak{R}_{01} = -k_4$, $\mathfrak{R}_{02} = -k_5$. Спільні зміни деяких з параметрів моделі теж впливають на залежності $\mathfrak{R}_{01}(\beta)$ і $\mathfrak{R}_{02}(\beta)$. Для порівняння з даними для Індонезії проведемо розрахунки для деяких країн Європи зі позитивною динамікою зростання населення (Франція $\lambda = 0.0123$, $\mu = 0.0093$ і Норвегія $\lambda = 0.0122$, $\mu = 0.081$), з майже стационарним станом (Іспанія $\lambda = 0.0094$, $\mu = 0.0091$), і з негативною динамікою (Україна, $\lambda = 0.0105$, $\mu = 0.0144$). Розрахунки критичних значень β^* , таких що при $\beta < \beta^*$ має місце асимптотична стійкість і $\mathfrak{R}_{01} < 0$, $\mathfrak{R}_{02} < 0$ дали значення $\beta^* = 0.4285, 0.3005, 0.2035, 0.2348, 0.2255$ для Індонезії, Франції, Норвегії, Іспанії і України відповідно.

Спільні зміни параметрів λ, μ , а також ε, b і γ, δ, ϕ впливають на значення β^* . Таким чином, в залежності від наборів параметрів моделі може мати місце біфуркація динамічної системи, коли

асимптотично стійкий розв'язок, який відповідає умовам $k_4 > 0$, $k_5 > k_4^2/4$ в (7) може за рахунок зменшення ε , зростання b і т.д. перейти в нестійкий, який відповідає умові $k_4 < 0$.

Більш детальні розрахунки були проведені для чисельних рядів першої хвилі пандемії (з 20.03 по 30.06.2020)⁶. Результати моделювання наведені на Рис. 1а-г. Вибрані країни демонструють різні фази сплеску захворювання. Результати моделювання за (5) наведені у вигляді тонкої та жирної ($\mathcal{R}_{01} < 0$ і $\mathcal{R}_{02} < 0$) червоної та синьої ($\delta = 0.3$ і $\delta = 0.5$), а також для комбінованого сценарію (зелена лінія). В останньому випадку точність прогнозування помітно краще.

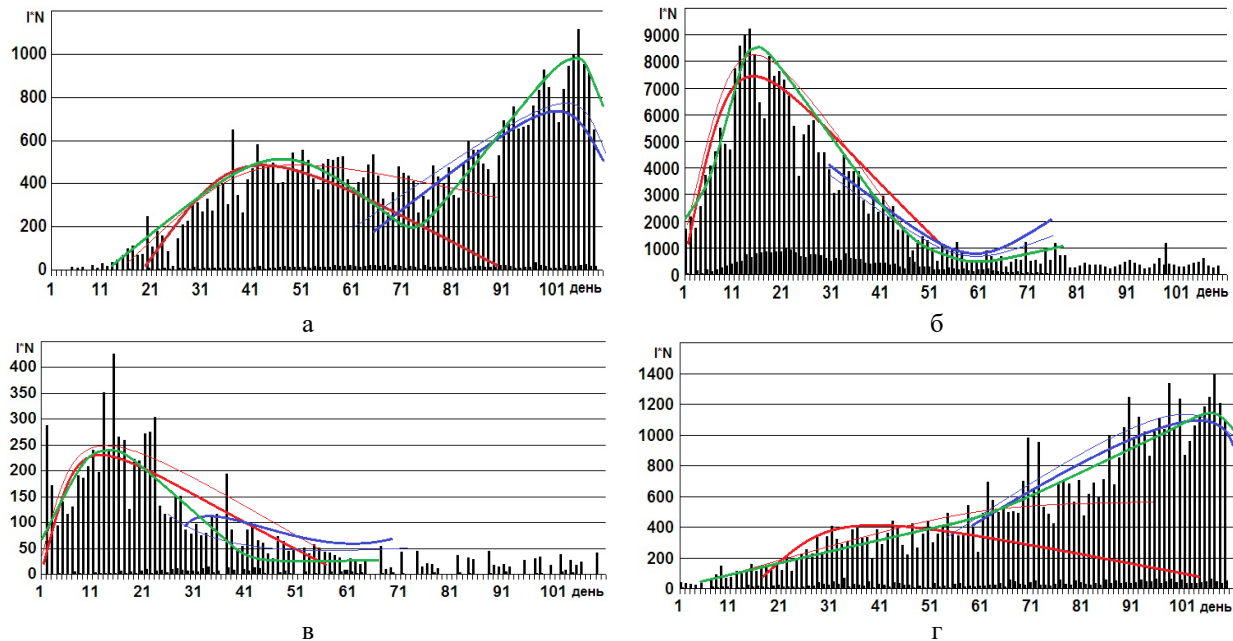


Рис. 1. Часові ряди і дані моделювання 1-ї хвилі пандемії: Україна (а), Іспанія (б), Норвегія (в) і Індонезія(г).

5 Висновки

Математичні моделі у вигляді систем з 3-6 ЗДР для числа здорових, контактних, хворих, одужалих і т.д. індивідів здатні відтворювати різні типи поведінки динамічної системи та передбачувати зростання, пик та спад епідемії. Модель особлива чутлива для швидкості захворювання β (тривалість інкубаційного періоду) і слабо чутлива для інших параметрів. Для якісного прогнозу поведінки системи треба використовувати не сталі, а часові значення параметрів, які треба перераховувати протягом всього часу спостереження за розповсюдженням епідемії в кожній країні, вимірювання часових кривих та статистичної обробки даних.

ЛІТЕРАТУРА

1. Wu J.T., Leung K., Leung G.M. Nowcasting and forecasting the potential domestic and international spread of the 2019-nCoV outbreak originating in Wuhan, China: a modelling study. *The Lancet*. 2020. Vol. 395(10225), P. 689–697. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)30260-9](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)30260-9)
2. Friston K.J., Parr T., Zeidman P., et al. Testing and tracking in the UK: A dynamic causal modelling study. *Wellcome Open Res.* 2020. Vol.5. P.144. <https://wellcomeopenresearch.org/articles/5-144>
3. Giordano G., Blanchini F., Bruno R., et al. Modelling the COVID-19 epidemic and implementation of population-wide interventions in Italy. *Nature Medicine*. 2020. Vol.26, P. 855–860. <https://doi.org/10.1038/s41591-020-0883-7>
4. Aldila D., Khoshnaw S.H.A., Safitri E., et al. A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. 139. 110042 <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110042>

⁶ <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

5. Bacaër N., Short A. *History of Mathematical Population Dynamics*. Springer-Verlag, London, 2011. 162 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-115-8>
6. Wang Z., Bauch Ch.T., Bhattacharyya S., et al. Statistical physics of vaccination. *Physics Reports*. 2016. Vol.664. P.1-113. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2016.10.006>
7. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1985. 239 с. <http://prometeus.nsc.ru/science/schools/marchuk/biblio/cont1985.ssi>
8. Samanta S., Dubey V.K., Sarkar B. Measure of influences in social networks. *Applied Soft Computing Journal*. 2020. (in press) <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106858>
9. Varotsos C.A., Krapivin V.F. A new model for the spread of COVID-19 and the improvement of safety. *Safety Science*. 2020. Vol.132 (104962). <https://doi.org/10.1016/j.ssci.2020.104962>

REFERENCES

1. J.T. Wu, K. Leung, G.M. Leung, “Nowcasting and forecasting the potential domestic and international spread of the 2019-nCoV outbreak originating in Wuhan, China: a modelling study”. *The Lancet*, 2020, Vol. 395, (10225), P. 689–697 [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)30260-9](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)30260-9)
2. K.J. Friston, T. Parr, P. Zeidman, et al. “Testing and tracking in the UK: A dynamic causal modelling study”. *Wellcome Open Res.*, 2020, Vol.5, P.144 <https://wellcomeopenresearch.org/articles/5-144>
3. G. Giordano, F. Blanchini, R. Bruno, et al. “Modelling the COVID-19 epidemic and implementation of population-wide interventions in Italy”. *Nature Medicine*, 2020, Vol.26, P. 855–860 <https://doi.org/10.1038/s41591-020-0883-7>
4. D. Aldila, S.H.A. Khoshnaw, E. Safitri, et al., “A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia”. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, 139, 110042 <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110042>
5. N. Bacaër, A. Short, *History of Mathematical Population Dynamics*. Springer-Verlag, London, 2011, 162 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-115-8>
6. Wang Z., Bauch Ch.T., Bhattacharyya S., et al. Statistical physics of vaccination. *Physics Reports*. 2016. Vol.664. P.1-113. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2016.10.006>
7. G.I. Marchuk *Mathematical modeling in immunology*, Nauka, Moscow, 1985, 239 p. (in Russian) <http://prometeus.nsc.ru/science/schools/marchuk/biblio/cont1985.ssi>
8. S. Samanta, V.K. Dubey, B. Sarkar, “Measure of influences in social networks”. *Applied Soft Computing Journal*, 2020 (in press) <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106858>
9. C.A. Varotsos, V.F. Krapivin, “A new model for the spread of COVID-19 and the improvement of safety”. *Safety Science*, 2020, Vol.132 (104962) <https://doi.org/10.1016/j.ssci.2020.104962>

УДК 004.942

Дескриптивні моделі детермінованих систем

І.А. Отлев, Г. М. Жолткевич

**Отлев Ілля
Анатолійович**

Аспірант кафедри теоретичної та прикладної інформатики факультету математики і інформатики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: io.sonics.cm@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-0227-1413>

**Жолткевич
Григорій Миколайович**

Доктор фізико-математичних наук, професор, декан факультету математики і інформатики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: g.zholtkevych@karazin.ua
<https://orcid.org/0000-0002-7515-2143>

Класичні чіткі математичні моделі складних систем не гнучкі та вибагливі до ресурсів в процесі побудови і тяжкі в роботі. Побудова таких моделей складних систем у новій предметній області стикається з рядом проблем. Область, знання та дані погано структуровані або не структуровані взагалі, частина даних відсутня або, навпаки, даних так багато, що виокремити суттєві стає дуже складно. А тому побудова чіткої математичної моделі, вивчення її динаміки для потрібної предметної області стає дуже важким або навіть неможливим завданням. Тому для розв'язку таких завдань ми потребуємо нових методів, а саме побудови дескриптивної моделі складних систем. Дескриптивна модель виступає в ролі не чіткої, але якісної моделі, яка при дослідженні дає змогу дати описову структуру системи, для якої побудована, характер її внутрішніх відносин, наближені правила її динаміки. Така якісна модель дає змогу вже на першому етапі відхилити гіпотези, що з нею не співвідносяться.

Ключові слова: математична модель, складні системи, динаміка складних систем, дескриптивні моделі.

Descriptive models of the determined systems

I. Otlev, G. Zholtkevych

Otlev I. A.

PhD student of the department of theoretical and applied informatics, department of Mathematics and Informatics, Kharkiv National University named by V. N. Karazin, Freedom Square 4, Kharkiv, 61022

Zholtkevych G. N.

Professor, Dean of the department of Mathematics and Informatics, Kharkiv National University named by V. N. Karazin, Freedom Square 4, Kharkiv, 61022

Common mathematical models of complex systems are not flexible, their creation is very resource-demanding and they are hard to work with. The numerous problems can arise during the process of building a mathematical model for complex systems. An area of knowledge, facts, and information could be structured badly or not structured at all. Part of the data might be missing or vice versa – we might have too much data available, which makes it difficult to find the necessary information. Therefore building a formal mathematical model, studying its dynamic for the relevant area of knowledge becomes a very hard or even almost impossible task. And that is why the new methods for such task are in much demand, namely, the methods of building descriptive mathematical models. The descriptive mathematical model serves as not a strict and formal model but a qualitative one. Such a qualitative model gives us a possibility to describe the character of the system, behavior of its internal components, and approximate rules of its dynamics. The qualitative model gives us a chance to deny the propositions, which do not fit the model directly at the first stage.

Keywords: Dynamical systems, complex systems, mathematical modelling, descriptive modeling.

Дескриптивные модели детерминированных систем

И.А. Отлев, Г. Н. Жолткевич

**Отлев Илья
Анатольевич**

Аспирант 4 года обучения, кафедра теоретической и прикладной информатики, факультет Математики и Информатики, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Площадь Свободы, 4, г. Харьков, Украина, 61022

**Жолткевич Григорий
Николаевич**

д.ф-м.н., профессор; декан факультета Математики и Информатики, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Площадь Свободы, 4, г. Харьков, Украина, 61022

Классические четкие математические модели сложных систем не гибкие, очень требовательные к количеству ресурсов в процессе построения и сложны в работе. Построение моделей сложных систем для новой предметной области связано с рядом проблем. Область, знания или данные плохо структурированы или не структурированы вовсе, часть данных отсутствует или, наоборот, данных так много, что выделить необходимые становится очень трудно. А поэтому построение четкой математической модели, изучение её динамики для интересующей нас предметной области становится очень трудной или почти невозможной задачей. Поэтому для решения таких задач нам требуются новые методы, а именно методы построения дескриптивных моделей. Дескриптивная модель выступает в роли не четкой, но качественной модели, которая при исследовании даёт возможность сделать описательную структуру системы, для которой построена, характер её внутренних отношений, приближённые правила динамики. Такая качественная модель даёт возможность уже на первом этапе отбросить гипотезы, которые с ней не соотносятся.

Ключевые слова: математическая модель, сложные системы, динамика сложных систем, дескриптивные модели.

1 Вступ

Математичне моделювання є загально прийнятим методом дослідження складних природних і технічних систем [1]. Це зумовлено складністю, а іноді і неможливістю, експериментальних досліджень зважаючи на фізичні, технічні, чи фінансові обмеження. Основою математичного моделювання є математична модель, що представляє собою приблизний опис об'єкту чи явища, що досліджується, отриманий шляхом абстрагування від несуттєвих з точки зору дослідника властивостей об'єкту дослідження, його складових та зв'язків між ними. Крім того, такий опис виконується на базі певного обраного математичного формалізму, який надає відповідний інструментарій аналізу моделі з метою прояснення структури об'єкта дослідження, прогнозування його поведінки, визначення можливостей і методів керування такою поведінкою. Розвиток сучасних інформаційних технологій дозволяє застосовувати комп'ютерні системи до аналізу математичних моделей за умови, що математичний формалізм, обраний дослідником базується на конструктивній математиці і може бути поданий комплексом алгоритмів і структур даних. Відповідний різновид математичного моделювання відомий як імітаційне моделювання, а моделі, що використовують підхід – імітаційними моделями.

Таким чином, створення адекватної об'єкту і меті дослідження математичної моделі є передумовою успішного досягнення цієї мети. Слід підкреслити, що побудова адекватної математичної моделі потребує структурованих знань про об'єкт дослідження, відповідних обчислювальних ресурсів та часу.

При застосуванні математичного моделювання до дослідження конкретних систем визначну роль відіграє контекст дослідження. Саме контекст фіксує точку зору дослідника і спосіб змістовної інтерпретації математичних результатів, отриманих під час математичного чи комп'ютерного аналізу моделі.

При дослідженні складних систем у галузях де математичні методи традиційно не використовуються, або використовуються в елементарній формі, виникає проблема поетапної побудови ланцюга моделей, які поступово ускладнюються. Важливою властивістю такого ланцюга є узгодженість його членів у тому розумінні, що наступна модель у ланцюгу є більш специфічною, але не суперечить попередній [2, § 1.2]. Така точка зору, з якої побудова моделі розглядається як покроковий процес побудови ланцюга узгоджених моделей, потребує визначення першого члену цього ланцюга. В кожному конкретному випадку вибір першого члена є специфічним. Наприклад, якщо для предметної області дослідження вже існують розвинуті

математичні моделі, тоді ланцюг буде починатися з найбільш близької до проблеми, що досліджується, існуючої моделі і складається з двох-трьох членів.

Проте, нас цікавить інша ситуація, тобто об'єктом дослідження є система з предметної області, для якої не має чітко структурованого, формального опису. В такому випадку вихідний член ланцюгу моделей є достатньо простим і представляє системні компоненти і зв'язки між ними на логічному, описовому рівні. Саме для цього випадку ми пропонуємо використовувати дескриптивне моделювання. Дескриптивне моделювання було запропоновано в роботах [3, 4] для дослідження техногенних впливів на екосистеми.

Дескриптивне моделювання є спеціальним видом математичного моделювання, який використовується для встановлення базових модельних залежностей. Кінцевою метою такого моделювання є побудова не детальної математичної моделі процесу чи явища, а його описової моделі. Така модель на відміну від детальної фіксує тільки якісні залежності між параметрами моделі. Звичайно, вона не дає детальних відповідей на питання, що виникають в процесі дослідження, але вона має інше призначення. Така модель дає змогу зробити приблизну оцінку системи, дає її якісний опис. Така модель будується для відповіді на конкретні запитання про характер внутрішніх відносин або динаміку системи, і перевірки деяких гіпотез, пов'язаних з цими питаннями на якісному рівні. Вже такий загальний опис, що відповідає дескриптивній моделі, дає можливість відкинути деякі гіпотези, що не відповідають дескриптивній моделі.

2 Дескриптивна динаміка

У даній статті ми подаємо метод побудови дескриптивних моделей складних систем. Зважаючи на те, що дескриптивна модель є математичною моделлю, її побудова має відповідати всім чотирьом основним етапам загальної схеми побудови математичної моделі [5].

На першому етапі ми повинні вивчити наш об'єкт чи явище, спробувати виявити його характерні риси. На цьому етапі ми потребуємо більшої кількості знань і фактів, що мають відношення до об'єкта чи явища, яке ми збираємось описувати за допомогою моделі. Тобто на цьому етапі ми маємо знайти відповіді на запитання, що ми хочемо описати нашою моделлю. На які питання для нашої системи ми хотіли б знайти відповіді? Можливо звузити коло своїх питань, оскільки отримана модель все ж буде описовою.

Другий етап характеризується розв'язанням прямої задачі. На цьому етапі для нас важливо сформулювати чіткий математичний апарат, необхідний для подальшого аналізу. Сформулювати основні правила – сформулювати мову нашої роботи. В запропонованій статті ми розглянемо вищезазначені пункти за допомогою таких математичних понять як граф, поле, та блукання полем над графом. Ми сформулюємо основні поняття, твердження та теореми, які нам знадобляться для побудови та аналізу дескриптивної моделі. На цьому етапі буде відбуватися принциповий перехід від загального до конкретного опису системи. Особливістю дескриптивного моделювання є те, що основним інструментом побудови моделей є прості неорієнтовані графи.

На третьому етапі ми будемо досліджувати отримані результати. На якісному рівні відкидати хибні твердження, гіпотези, що виявилися не правдивими. Будемо досліджувати на скільки складними вийшли отримані завдання, та які методи можливо використати для їх розв'язання. Проведемо аналіз нашої моделі: на скільки швидко буде зростати її розмір та складність з подальшим уточненням. Які методи ми зможемо використати надалі? Оскільки ми робитимемо побудову нашої моделі за допомогою графів, проведемо оцінку розмірів графа – кількість його вершин та ребер. Якщо система буде зростати занадто швидко, то, хоча вона і буде лишатись кінцевою, то все ж таки метод простого перебору не буде ефективним, оскільки ми будемо мати справу з занадто великими масивами даних. А отже необхідно буде знайти та використати нові методи для вирішення отриманих завдань. Можливо, ми будемо змушені змінити постановку деяких завдань, зменшити поле нашого вибору до припустимих розмірів.

Четвертий етап пов'язаний з подальшим аналізом нашої моделі з урахуванням вже отриманих знань та попередніх висновків щодо будови, характеру відносин, можливої поведінки системи. Оцінки можливості керування цією поведінкою, зважаючи на складність системи та отримані результати. А також складатися з уточнення нашої моделі – переходу до наступного стану, з більшої точністю. Тобто розширення нашої системи, її уточнення та формалізації. Використання методів оцінки, отриманих на попередньому етапі, оскільки при такому переході ми будемо спостерігати неминуче зростання розмірів, а отже і складності нашої моделі.

Описаний процес побудови дескриптивної математичної моделі ми будемо проводити вважаючи, що система для якої ми будемо модель чітко детермінована, тобто визначена, така, що еволюціонує поступово, має обумовлений крок розвитку, та кожен наступний стан системи може бути повністю визначений через попередній. Згідно з класифікацією систем С. Біра, такі системи можуть бути як простими, так і складними [6]. Такі визначення ми приймаємо поки що для зручності при використанні наведених методів. Очевидно, що в подальшому, наведені визначення, теореми та методи можна буде доопрацювати в процесі побудови дескриптивних моделей для систем, які мають стохастичний характер або можуть бути описані так званою «не чіткою логікою» (Fuzzy logic) [7]. Такі системи можна частіше зустріти при вивченні різних областей знань, а тому методи побудови таких моделей, методи роботи з ними і їх аналізу є необхідними для вивчення в подальшому.

Для початку зазначимо, що робити опис складних систем ми будемо за допомогою математичного графа та таких понять як поле над графом, блукання графом і т.інш. Важливо зазначити, що будується граф особливим принципом, а саме граф для нашої моделі буде зв'язним, неорієнтовним та будуватися на принципі «сусідства». Тобто кожні дві вершини, що зв'язані спільним ребром, будуть сусідніми. Значення компонент для таких сусідніх вершин будуть відрізнятися не більше ніж на 1 крок, або не відрізнятися взагалі, оскільки ми не виключаємо можливості не переходу.

Оскільки через вершини ми збираємось описувати конкретні стани нашої системи, досить природньо виглядає наша умова сусідства. Це означає поступовий розвиток нашої системи, її динаміку без розривів. За такої умови за визначений один крок ми потрапляємо лише до сусіднього стану, або лишаємось в поточному.

Нехай ми маємо граф $G(V, E)$ з набором вершин V і ребер E . Кожне ребро ми розуміємо як двоелементну підмножину V . Саме такі два елементи є сусідніми, а тому досяжними за один крок з обох боків. А також для будь якого $x \in V$ будемо використовувати наступне позначення: $E(x) = \{e \in E \mid x \in e\}$.

Також введемо визначення блукання графом. **Блуканням графом** $G(V, E)$ будемо називати оператор $S: V \rightarrow V$ такий, що $\{x, Sx\} \in E$ для будь-якого $x \in V$.

Для дескриптивного моделювання кожна вершина графу представляється вектором (x_1, \dots, x_n) значень n атрибутів, кожний з яких приймає одне з m значень з множини $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Ми будемо вважати значення i та j сусідніми, якщо $|i - j| \leq 1$. Тепер ми можемо сформувати множину ребер графа, як множину двоелементні підмножини векторів E , які утворені векторами x та x' такими, що x_k і x'_k є сусідніми значеннями для будь-якого $1 \leq k \leq n$.

Блукання для цього графу тоді визначається оператором $S(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)$, де значення відповідних компонентів векторів x та x' є сусідніми.

Таким чином дескриптивна модель характеризується параметрами n – кількість атрибутів, що описують стани нашої системи, та m – кількість значень, які ці атрибути можуть приймати, і повністю визначається оператором блукання S відповідним графом. Очевидно, що наш граф матиме загалом m^n вершин.

Описавши тепер майже весь граф, необхідно дізнатися яку складність він представляє собою. Тобто які розміри має, а також як зростає його складність, та як він розширюється із вводом додаткової компоненти, або ще одного значення для них.

Як вже було зазначено, для графа нашої моделі, який побудований для n – атрибутів, що приймають m значень, кількість вершин $\|V\|$ дорівнює очевидно m^n . Інша ситуація з кількістю ребер для цього графа, оскільки саме вона визначає розмір множини операторів блукання графом. Будемо позначати кількість ребер графа через $\|E\|$. Загалом, кількість ребер можна подати наступною формулою

$$\|E\| = \begin{cases} m-1, & \text{якщо } n=1 \text{ і } m \geq 2 \\ \frac{m^n(m^n-1)}{2} & \text{якщо } n \geq 2 \text{ і } m=2 \\ (m-1)(3m-2)^{n-1} & \text{якщо } n \geq 2 \text{ і } m > 2 \end{cases} \quad (0.1)$$

Розглянемо формулу (2.1) більш детально.

Для випадку, коли $n=1$ формула є очевидною. Дійсно, у цьому випадку маємо лінійний граф з m вершинами, в якого кількість ребер є, очевидно, $m-1$.

Для випадку, коли $m=2, n \geq 2$ пересвідчитися у коректності формули також досить просто. Такий граф є повним, а для повних графів ми маємо формулу для знаходження кількості ребер, знаючи кількість вершин.

Для всіх інших випадків, які і являють для нас найбільший інтерес, обґрунтувати формулу дещо складніше. Позначимо через $E(n, m)$ число $\|E\|$ для моделі з n атрибутами і m значеннями. Ми знаємо, що $E(1, m) = m-1$. А з цього, ми можемо зробити висновок, що:

$$E(n+1, m)Z^{n+1} = Z(3m-2)E(n, m)Z^n \quad (0.2)$$

Де Z – це деякий множник, $(3m-2)$ – це загальна сукупність нових вершин, яка складається з m – старих вершин, що є сусідами, та $2(m-1)$ – нових, що отримуємо при переході.

А отже, формулу (2.6) можна переписати в більш загальному вигляді:

$$E(n, m) = E(k, m)(3m-2)^{n-k} \quad (0.3)$$

Де k – це деяка підмножина вже існуючих компонент. Тоді для формули (2.7) ми можемо провести заміну змінних, та записати її у наступному вигляді:

$$\sum_{k=1}^{\infty} E(k, m)z^k = z(3m-2) \sum_{n=1}^{\infty} E(n, m)z^n \quad (0.4)$$

Як можна побачити, ліва і права частина дуже схожі і відрізняються лише на один множник. Ми можемо винести його, та позначити:

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} E(n, m)z^n \quad (0.5)$$

Враховуючи таку заміну змінних, формулу (2.8) можна переписати у наступному вигляді:

$$\Phi(z) - z(m-1) = z(3m-2)\Phi(z) \quad (0.6)$$

Спрощуючи цю формулу ми отримуємо:

$$\Phi(z)(1 - z(3m-2)) = z(m-1)$$

$$\Phi(z) = \frac{z(m-1)}{1 - z(3m-2)} \quad (0.7)$$

Для зручності ведення наступних записів, проведемо ще одну просту заміну змінних, та позначимо $a = m-1$, та через $b = 3m-2$. Тоді (2.11) можна записати у новій формі із спрощеними змінними:

$$\Phi(z) = \frac{az}{1-bz} = -\frac{a}{b} + \frac{a}{b(1-bz)} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{1}{1-bz} - 1 \right)$$

Тепер ми можемо скористуватися розкладанням функції у ряд Тейлора у нулі. Тоді наші виведені формули приймуть майже остаточно спрощений вигляд, з яким ми і будемо працювати далі:

$$E(n, m) = \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!} \quad (0.8)$$

Тепер проведемо по чергове дослідження похідних для функції $\Phi(z)$. Отримуємо наступні результати:

$$\Phi'(z) = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{(1-bz)^2} = \frac{a}{(1-bz)^2}$$

$$\Phi''(z) = \frac{2ab}{(1-bz)^3}$$

$$\Phi'''(z) = \frac{6ab^2}{(1-bz)^4}$$

Продовжуючи цей процес до n -ної похідної, напишемо загальний вигляд для похідної порядку n .

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!ab^{n-1}}{(1-bz)^{n+1}} \quad (0.9)$$

А отже, розкладаючи цю функцію в точці «0», ми отримаємо, що знаменник дорівнює 1. А тому, підставивши наші значення для функцій a та b , отримуємо наступне:

$$E(n, m) = (m-1)(3m-2)^{n-1} \quad (0.10)$$

Що саме і відповідає кількості ребер в нашому графі в ситуації, коли кількість компонент та кількість значень перевищують 2, та система, яку ми описуємо, має дискретний характер. А отже, для цього варіанту ми можемо побачити, що при збільшенні кількості компонент, кількість ребер буде зростати експоненційно. А при збільшенні кількості значень для компонент – поліноміально. Таке зростання складності є досить швидким, а тому потребує розробки та використання методів для роботи з такими задачами. Оскільки, хоча ми і працюємо з скінченими моделями, все ж таки, вони великі. Тому й необхідні подальші дослідження і розробки методів роботи з такими моделями.

3 Основні визначення

Тепер дамо базові визначення, які будуть застосовуватися при описі даних методів, а саме граф, та концепція ідеї обходу графа. Продемонструємо, що така ідея дуже тісно пов'язана з іншим поняттям, а саме – полем над графом.

В цій статті будемо використовувати позначення $G(V, E)$, що відповідатиме простому, неорієнтованому графу. В цьому графі, будемо позначати V – як множину вершин такого графа і відповідно E – як двоелементну підмножину V . Яку досить природньо будемо розуміти як множину ребер для визначеного графа. А також для цієї множини, будемо вважати, що для кожного $x \in V$ вірне наступне твердження:

$$E(x) = \{e \in E \mid x \in e\} \quad (0.11)$$

Що можна природньо розуміти як вершини, що належать до одного ребра, а отже належать одному елементу з множини E .

Як вже було зазначено, ми будемо розглядати лише детермінований випадок для системи. Це найпростіший випадок, коли наступний стан системи може бути повністю характеризований за інформацією з поточного стану.

Оскільки ми вже дали визначення графа для нашого методу, тепер ми можемо ввести поняття обходу полем над графом. Детерміністичним **обходом полем над графом** $G(V, E)$ будемо називати оператор $S : V \rightarrow V$ такий, що:

$$Sx = x : \{x, Sx\} \in E(x) : \forall x \in V \quad (0.12)$$

Тобто ми маємо на увазі таке відображення, що переводить нас з однієї вершини графа в іншу, тільки якщо вони являють собою різні кінці одного ребра. Таким чином ми досить природньо можемо обходити наш визначений граф тільки по вершинам, які зв'язані.

Маючи визначення обходу, ми тепер можемо узагальнити це поняття. А саме ввести поле переміщень по графу. Даючи формальне визначення, ми будемо називати **полем переміщень** графом $G(V, E)$ для деякого обходу $S : V \rightarrow V$ таку мапу: $\partial S : V \rightarrow E \cup \{\emptyset\}$, яку будемо визначати як:

$$(\partial S)x = \begin{cases} \emptyset & : Sx = x \\ \{x, Sx\} & : Sx \neq x \end{cases} \quad (0.13)$$

звичайно, для $\forall x \in V$.

А також ми можемо сприймати поля на графах незалежними від обходу по цьому графу, як два різних об'єкти і поняття. Таке припущення призводить нас до наступного визначення, яке треба зазначити.

Полем на графі $G(V, E)$ будемо називати таке відображення $\tau : V \rightarrow E \cup \{\emptyset\}$ таке, що $\tau x \neq \emptyset$. В свою чергу, це саме під собою має на увазі що і $\tau x \in E(x)$.

Вся зазначена сукупність визначень дозволяє нам зробити таке припущення, що для кожного поля на графі ми можемо прокласти унікальне блукання, яке буде співпадати з цим полем. Напишемо це формально у вигляді теореми.

Для будь якого $\tau : V \rightarrow E \cup \{\emptyset\}$ на графі $G(V, E)$ існує унікальне блукання S_τ для цього ж графа $G(V, E)$, такий що $\partial S_\tau = \tau$.

Спробуємо довести встановлене твердження. Для доказу унікальності визначимо обхід графом S_τ наступним чином:

$$S_\tau = \lambda x \begin{cases} x & : \tau x = \emptyset \\ y & : \tau x = \{x, y\} \end{cases} \quad (0.14)$$

При такому записі ми більш наочно бачимо, що S_τ це блукання графом $G(V, E)$.

Тепер, спробуємо визначити ∂S_τ . У випадку якщо $\tau x = \emptyset$ ми маємо таку ситуацію, що ми маємо $S_\tau x = x$, а отже справедливо і наступне: $(\partial S_\tau)x = \emptyset = \tau x$.

Для випадку коли $\tau x = \{x, y\}$, ми отримуємо випадок коли $S_\tau x = y$. А отже справедливо і наступне що: $(\partial S_\tau)x = \{x, S_\tau x\} = \{x, y\} = \tau x$. Таким чином частину теореми про існування такого блукання можна вважати доведеною. Що до частини про його унікальність, то ми будемо вважати, що існує такий обхід $S : V \rightarrow V$ на графі $G(V, E)$. Такий, що $\partial S = \tau$ а також $Sx_0 \neq S_\tau x_0$ для деякого $x_0 \in V$.

Припущення, що $Sx_0 = x_0$ логічно призводить нас до того, що $\tau x_0 = (\partial S)x_0 = \emptyset$. А отже і до висновку, що $S_\tau x_0 = x_0$.

Припущення, що $Sx_0 = y \neq x$ логічно призводить нас до того, що $\tau x_0 = (\partial S)x_0 = \{x_0, y\}$. А отже і до висновку, що $S_\tau x_0 = y$.

Однак обидва припущення не узгоджуються з припущенням, що $Sx_0 \neq S_\tau x_0$, це робить останнє не вірним. А отже є доведенням унікальності такого блукання. Згадуючи, що частина про існування вже була доведена, ми маємо повний доказ нашої представлені теорема.

Зважаючи на те, що ми ввели поняття графа, поля над графом, поняття блукання графом. Нам лишилося зробити ще одне ключове визначення, яке є важливим для подальшої роботи побудови дескриптивної моделі та взагалі для розуміння. Нас цікавить дослідження динаміки системи, її зміни з кроком часу. А отже в контексті графів, нам цікаво дослідити маршрут, або траєкторію розвитку.

Для графа $G(V, E)$ і детерміністичного обходу $S: V \rightarrow V$ на цьому графі, послідовність станів $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ будемо називати **траєкторією**, якщо $x_{n+1} = Sx_n$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Тобто, як вже зазначалося для детерміністичного випадку, кожен наступний стан нашої системи може бути описаний із інформації про її поточний стан.

Тепер, сформулювавши основні визначення для загальної ситуації, описавши вигляд та динаміку графа для детерміністичного випадку ми маємо базу для подальшого дослідження.

4 Висновки

Отже, було розроблено зручний та потенційно досить загальний метод побудови дескриптивних моделей для складних систем. Були сформульовані основні визначення необхідні в роботі. Продемонстровано та досліджено граф, що саме і являє собою нашу описову модель для складної системи та дає можливість дослідити як і її окремі стани, так і динаміку.

Виявили, що при розширенні кількості досліджуваних значень, складність системи буде зростати лінійно. Наприклад: для графа з $m = 3, n = 2$ ми можемо порахувати, що його кількість ребер складатиме $E(3, 2) = 14$. А при кроці по m ми отримуємо результат: $E(4, 2) = 30$. На наступному кроці буде вже $E(5, 2) = 52$. Система зростає, але для таких значень, ми ще в змозі застосовувати стандартні методи роботи, або перебирати всі значення по черзі, перебором.

Для кроку по n ми спостерігаємо іншу ситуацію. Оскільки, навіть починаючи з того ж самого графа $E(3, 2) = 14$, вже на наступному кроці ми отримуємо $E(3, 3) = 98$. Що сильно відрізняється від попередніх переходів для збільшення кількості значень. Для наступного кроку, результат буде ще більшим: $E(3, 4) = 686$. Такий зріст набагато ускладнює обробку і аналіз даних. Метод простого перебору не буде ефективним, оскільки на деякому етапі ми будемо просто не в змозі перебрати всі стани. Хоча ми все ж таки працюватимемо з кінцевими величинами, їх ефективна обробка буде потребувати використання спеціальних методів. Розробка таких методів представляє інтерес для подальшого дослідження цієї теми.

Також, слід зазначити, що був розглянутий випадок для систем з дискретною поведінкою. В подальшому такий підхід можна також ускладнювати. Будувати дескриптивні моделі такого типу для систем із стохастичною динамікою. Такі системи є більш універсальними на відміну від стохастичних, а тому методи побудови моделей для них є актуальними. Крім того, після отримання результатів для стохастичних моделей, представлений механізм може бути ще розвинутий для опису ще більш складних систем. Наприклад систем, динаміку яких можна описати за допомогою використання не чіткої логіки (Fuzzy logic).

Узагальнюючи, скажемо що представлені методи та їх подальший розвиток є потенційно дуже якісним та зручним інструментом, який можна буде використовувати для побудови дескриптивних моделей складних систем. Для дослідження і обробки результатів таких моделей, необхідно буде використовувати спеціальні методи, які будуть розроблені в подальшому. Тому подальше дослідження цієї проблеми є актуальним та необхідним.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стеценко І.В. Моделювання систем: навч. посіб. Черкаси: ЧДТУ, 2010. 399 с.
2. Жолткевич Г.М. Автоматизація проектування технологічної оснастки: теорія і практика. К.: Техніка, 1998, 263 с.
3. Zholtkevych, G.N., Bespalov, G.Y., Nosov, K.V. et al. Discrete Modeling of Dynamics of Zooplankton Community at the Different Stages of an Antropogeneous Eutrophication. *Acta Biotheor* 61, 2013, pp. 449–465.
4. Zholtkevych, G.N., Nosov, K.V., Bespalov, Y.G. et al. Descriptive Modeling of the Dynamical Systems and Determination of Feedback Homeostasis at Different Levels of Life Organization. *Acta Biotheor* 66, 2018, pp. 177–199.
5. Математическое моделирование / Под ред. А.Н. Тихонова, В.А. Садовниченко и др. М.: Изд-во МГУ, 1993, 290 с.
6. Бир С. Кибернетика и управление производством. – М.: Наука, 1965. – 391 с.
7. Zadeh, L. A. "Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic". *Fuzzy Sets and Systems*. 90 (2), 1997, pp. 111–127

REFERENCES

1. I. V. Stetsenko, *Systems modeling: textbook*. Cherkasy: CSTU, 2010, 399 p. [in Ukrainian]
2. G. N. Zholtkevych, *Automation of technological equipment design: theory and practice*. Kyiv.: Technique, 1998, 263 p. [in Ukrainian]
3. G. N. Zholtkevych, G. Y. Bespalov, K. V. Nosov, et al. Discrete Modeling of Dynamics of Zooplankton Community at the Different Stages of an Antropogeneous Eutrophication. *Acta Biotheor* 61, 2013, pp. 449–465. [in English]
4. G. N. Zholtkevych, K. V. Nosov, Y. G. Bespalov, et al. Descriptive Modeling of the Dynamical Systems and Determination of Feedback Homeostasis at Different Levels of Life Organization. *Acta Biotheor* 66, 2018, pp. 177–199. [in English]
5. *Mathematical modeling* / Ed. A. N. Tikhonov, V. A. Sadovnichy. M.: Moscow State University, 1993, 290 p. [in Russian]
6. S. Beer, *Cybernetics and production management*. – M.: Nauka, 1965. – 391 p. [in Russian]
7. L. A. Zadeh, "Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic". *Fuzzy Sets and Systems*. 90 (2), 1997, pp. 111–127. [in English]

УДК 593.3

Simulation of liquid movement in cylindrical shells

O. Strelnikova, O. Usatova

Usatova Olha

PhD student

A. Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of NASU, Kharkov, 61046, Ukraine <https://orsid.org/0000-0001-1267-2723>

Strelnikova Elena

Dr.Tech.Sc, professor

*A. Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of NASU, Kharkov, 61046, Ukraine e-mail: elena15@gmx.com
<https://orsid.org/0000-0003-0707-7214>*

The motion of a viscous incompressible fluid with constant coefficients in case of the Hagen-Poiseuille flow is considered in this paper. The equation of motion of the elastic shell in the absence of external perturbations is obtained on the basis of the Ostrogradsky-Hamilton principle. Assuming the Hagen-Poiseuille flow, the expression for the kinetic energy of a moving fluid in a nanotube is obtained, and the equations to determine oscillation frequencies of a tube with a fluid are constructed, that allows investigating the stability of motion. Using the Poiseuille formula it is possible to effectively determine the movement of fluid in tubes. According to the Bernoulli's equation, when the fluid is stationary along a rectilinear horizontal tube of a constant cross-section, the fluid pressure must be the same along the entire length of a tube.

In recent years, a new trend associated with nanotechnology has been developing in hydromechanics. The relevance of modeling fluid flow through micro- and nanotubes is confirmed by the results of many experiments conducted over two decades. A nanotube can be represented as a graphite plane rolled into a cylinder (hollow tube), which is a set of regular hexagons with carbon atoms in the vertices, and having the diameter of several nanometers. The fluid flow through micro and nanotubes is a common phenomenon in various biological and technical devices and systems and therefore is of great importance. Consequently, flows in nanometer-sized channels are being studied intensively. The numerical values of the oscillation frequencies of the elastic cylindrical shell for the cases of absence of fluid and the presence of fluid with different pressure values have been obtained.

Отримані числові значення частот коливань пружної циліндричної оболонки без урахування наявності рідини, а також з рідиною при різних значеннях перепаду тиску.

Keywords: *nanotubes, ideal liquid, boundary conditions, incompressible fluid, Hagen-Poiseuille flow.*

Моделювання руху рідини в циліндричних оболонках

О.О. Стрельнікова. О.О. Усатова

**Усатова Ольга
Олександрівна**

аспірант 3-го року навчання

*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України,
вулиця Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна
<https://orsid.org/0000-0001-1267-2723>*

**Стрельнікова Олена
Олександрівна**

доктор техн. наук, професор

*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України,
вулиця Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна
e-mail: elena15@gmx.com
<https://orsid.org/0000-0003-0707-7214>*

В роботі розглянуто рух в'язкої нестисливої рідини в пружній циліндричній оболонці. Рівняння руху пружної оболонки за відсутності зовнішніх збурень отримано на основі принципу Остроградського – Гамільтона. За припущеннями наявності течії Хагена – Пуазейля отримано вираз для кінетичної енергії рухомої рідини в нанотрубі та побудовані рівняння для визначення частот коливань трубки з рідиною, що дає змогу дослідити стійкість руху. Отримані числові значення частот коливань пружної циліндричної оболонки без урахування наявності рідини, а також з рідиною при різних значеннях перепаду тиску.

Ключові слова: *нанотрубки, ідеальна рідина, граничні умови, нестислива рідина, течія Хагена – Пуазейля.*

Моделирование движения жидкости в цилиндрических оболочках

Е.А. Стрельникова. О.А. Усатова

Усатова Александрова	Ольга	<i>аспирант, Институт проблем машиностроения им. А.М. Подгорного НАН Украины, улица Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина, https://orsid.org/0000-0001-1267-2723</i>
Стрельникова Александровна	Елена	<i>д.т.н., профессор, Институт проблем машиностроения им. А.М. Подгорного НАН Украины, улица Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина, e-mail: elena15@gmx.com https://orsid.org/0000-0003-0707-7214</i>

В последние годы, в гидромеханике получает развитие новое направление, связанное с распространенным применением нанотехнологий. Движение жидкости по трубкам является очень распространенным явлением в природе и технике. В работе рассмотрены движение вязкой несжимаемой жидкости в упругой цилиндрической оболочке. Уравнения движения упругой оболочки при отсутствии внешних возмущений получено на основе принципа Остроградского - Гамильтона. В предположениях, характеризующих течение Хагена – Пуазейля получено выражение для кинетической энергии движущейся жидкости в нанотрубке, построены уравнения для определения частот колебаний трубки с жидкостью, что позволяет исследовать устойчивость движения.

Ключевые слова: нанотрубки, идеальная жидкость, граничные условия, несжимаема жидкость, течение Хагена - Пуазейля.

1 Introduction

The movement of fluid is a phenomenon inherent in many technical processes. It is known that a stationary liquid in a vessel transmits external pressure in all directions according to Pascal's law, and conditions at all points of the volume of the liquid medium are constant and identical. However, if the fluid flows through the pipe without friction, the cross-sectional area varies in different areas. The pressure is different along the pipe lengths [1]. There is an effective way to determine the movement of fluid in tubes by using the Poiseuille formula. According to the Bernoulli's equation, if the fluid is stationary along a rectilinear horizontal tube of constant cross-section, the fluid pressure must be the same along the entire length of the tube. But in reality the fluid pressure drops along with the direction of its movement. To use the Poiseuille approach it is necessary to ensure stationarity, namely, to maintain a constant pressure difference at the ends of the tube, balancing the forces of internal friction that occur during the movement of the fluid [2, 3].

In recent years, a new trend associated with nanotechnology has been developing in hydromechanics. The relevance of modeling fluid flow through micro- and nanotubes is confirmed by the results of many experiments conducted over two decades. A nanotube can be represented as a graphite plane rolled into a cylinder (hollow tube), which is a set of regular hexagons with carbon atoms in the vertices, and having the diameter of several nanometers. Nanotubes can consist of a single layer of atoms - single-walled nanotubes (SWNT), or several "nested" single-layer tubes - multi-walled nanotubes (MWNT). It has been found that if the size of volume is about 10 molecular diameters or less, the liquid behaviour changes significantly. The studies show that in a microtube with a diameter of 50 nm the flow is continuous but in a microtube with a diameter of 5 nm it is not. The high value of the elasticity modulus of carbon nanotubes makes it possible to create composite materials that could be extremely resistant to ultra-high elastic deformations.

2 The Poiseuille flow simulation.

Stating that molecules in a microtube form a solid wall and atoms in the wall are subjected to chaotic motion at a finite wall temperature, there are the following peculiarities of the Poiseuille flow: in the intermediate range of the Knudsen numbers, liquid particles slide into the walls. Three possible cases are described in [4]:

- 1) the liquid is stationary (no slippage);
- 2) there is a flow with slippage;
- 3) there is no friction.

For the classical hydrodynamics, Navier (C.L.M.H. Navier, 1823) proposed a boundary condition that took into account the slippage of a liquid along the surface a solid body. O. Girard used this model to describe his experimental data [5].

According to the Navier boundary condition, the value of the liquid slip rate is proportional to the velocity gradient on the wall:

$$\mathfrak{g}|_{z=R} = L_s \left. \frac{d\mathfrak{g}}{dz} \right|_{z=R} \quad (1)$$

Scientists from the University of Wisconsin-Madison (USA) have been able to prove that the laws of friction for nanostructures do not differ from the classical laws [6].

The inner surface of the nanotube is considered to be smooth even on the atomic level. But the macroscopic surfaces of porous materials are rough on a much smaller level. Therefore, the gas that propagates through the inner cavity of the nanotube meets significantly less surface resistance. Moreover, not only gaseous but liquid substances can pass through the nanotubes as well. The experiments have proved that the liquid carrying capacity of nanotubes is more than three orders of magnitude higher than the corresponding value obtained on the basis of the classical the Hagen-Poiseuille formula. This effect could be explained by the complicated nature of the fluid interaction with the inner walls of the membrane. The membrane is a part of a filter element, which is a nanotube. A liquid slides along the surface of a nanotube; therefore, the traditional boundary conditions (according to which the speed of movement on the wall is zero) are no longer satisfied. On a manometer scale, the liquid exhibits atypical properties, such as a sharp increase in viscosity and density near the walls of nanocapillaries, the changes in thermodynamic parameters, and the atypical chemical activity at the boundary between solid and liquid phases. Experiments have shown a significant increase in effective viscosity in such volumes compared to macroscopic values. It is determined that the effective viscosity of a liquid in a nanotube depends on its diameter.

In classical hydrodynamics, the atomic (molecular) structure of a liquid is not taken into account, and the liquid motion in nanochannels with a diameter of 10 nm and smaller is not described. One of the main problems is that the laws of classical physics are not applicable in the nanotechnology.

At present, the main methods of studying the flow of fluid in nanotubes are the molecular dynamics and continuum mechanics. The method of modeling molecular dynamics is an effective method, but it requires a great amount of computational time, especially for large systems. Therefore, it is expedient to model large systems by the method of continuum mechanics [7], [8], [9].

During the physical adsorption of the substance on the inner and outer surfaces of the tube, the density of a layer formed can be similar to the density of a condensed state of the substance. Thus, on the one hand, the tube could be as a container for storing aggressive substances without using common thick-walled vessels. On the other hand, the properties of the tubes themselves will be modified by the absorbed particles, and that allows creating various heterostructures. [10].

The fluid flow through micro and nanotubes is a common phenomenon in various biological and technical devices and systems and therefore is of great importance. Consequently, flows in nanometer-sized channels are being studied intensively. At the first stage it is necessary to investigate the adequacy of the classical models of shells.

3 Problem formulation and method of solution

The equations of hydrodynamics are nonlinear, even at constant coefficients. Due to the fact that the inertial terms of the equation include the square velocity, relatively few exact solutions are known. Therefore, it is necessary to find such approximate solutions that would be a set of basic currents present in technological processes.

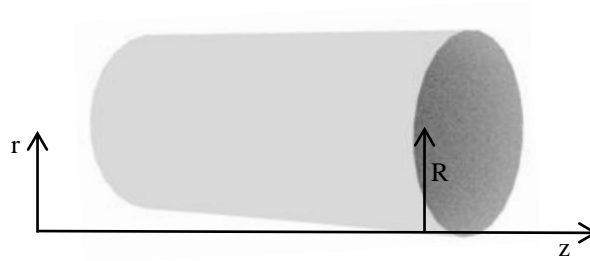
As the first approximation, we will consider the Hagen-Poiseuille flow in an elastic cylindrical tube. Let us present the value G , which characterizes the volumetric flow rate of the liquid

$$G = \int_0^R U(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} \quad (2)$$

where v is a speed, R is a tube radius, L is a tube length, μ is a dynamic viscosity of the liquid, Δp is a pressure drop.

Using the Hagen-Poiseuille formula (2), we can find the average cross-sectional velocity in the pipe

$$U_{cep} = \frac{G}{\pi R^2} \quad (3)$$



L

Figure 1. Coordinate system for the Hagen - Poiseuille flow

Here is a layered flow with a single non-zero z-velocity component, namely:

$$U_z = U \neq 0 \quad (4)$$

A characteristic feature of layered flow is the presence of the only one non-zero velocity component. This means that the trajectories of all fluid particles are co-aligned with one of the coordinate lines [11].

The equation of the elastic shell motion in the absence of external perturbations can be obtained on the basis of the Ostrogradsky-Hamilton principle:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta\Pi - \delta T) dt = 0 \quad (5)$$

where Π , T - potential and kinetic energy.

Let $U = (U_r, U_z, U_\theta)$ be a shell displacement vector in the cylindrical coordinate system r, z, θ . Let us present the vector of displacement in the form an expansion into Fourier series by a circumferential coordinate

$$U(r, z, \theta) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} u_\alpha(r, z) C_\alpha(\theta) \quad (6)$$

where

$$C_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha \theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha \theta \end{bmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \infty$$

The potential strain energy can be represented as follows:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_S \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dS_1 dS_2, \quad (7)$$

where σ_{ij} , ε_{ij} are components of tension and strain tensors.

The expressions:

$$dS_1 = A_1 d\alpha_1, \quad dS_2 = A_2 d\alpha_2 = r d\theta \quad (8)$$

are the differentials of the arcs of the median surface along the directions of the coordinate lines α_1 and α_2 .

For the kinetic energy of a shell that does not contain a liquid, we have the expression:

$$T_s = \frac{1}{2} \iint_S \rho_s (\dot{U}_r^2 + \dot{U}_z^2 + \dot{U}_\theta^2) dS_1 dS_2. \quad (9)$$

In the presence of the Hagen-Poiseuille flow, the expression for the kinetic energy of a moving fluid in a shell which experiences small oscillations has the form:

$$T_f = \frac{1}{2} \iint_S \rho_f \left(\dot{U}_r^2 + \left(\dot{U}_z + U_{cep} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 + \dot{U}_\theta^2 \right) dS_1 dS_2 \quad (10)$$

where the quantities ρ_s , ρ_f are the densities of the shell material and the liquid, respectively, [12].

The overall kinetic energy of the system is equal to

$$T = T_s + T_f. \quad (11)$$

The equation of the shell motion has the form

$$\mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Q} \quad (12)$$

where \mathbf{L} is an elastic force operator, \mathbf{M} is a mass operator, \mathbf{D} is a damping operator, \mathbf{Q} is a vector describing external influences.

We will look for a solution of the system of equations (12) in the form

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{u}_k = (u_r^k, u_\theta^k, u_z^k), \quad (13)$$

where $c_k(t)$ are unknown coefficients that depend only on time, \mathbf{u}_k are modes of oscillations of an elastic unfilled shell. $c_k(t)$ can be considered as generalized coordinates.

Substituting the series (13) into equation (12) and taking into account the expressions obtained by using the Hamilton-Ostrogradsky principle and the formula (11), we obtain

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \mathbf{L}(\mathbf{u}_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{c}_k(t) \mathbf{M}(\mathbf{u}_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) \mathbf{D}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{Q}. \quad (14)$$

Let us perform the scalar product of equation (14) on \mathbf{u}_j , $j=1,2,\dots$

Let us use the relations (13)

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) = \Omega_k^2 \mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \quad (15)$$

in which Ω_k is an oscillation frequency of the unfilled shell.

From (15) we obtain

$$(\mathbf{L}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \Omega_k^2 (\mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) \quad (16)$$

Taking into account the formulas (9), (10) for the kinetic energy of the fluid and the expression (13) the expression $(\mathbf{D}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j)$ takes the following form

$$(\mathbf{D}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \frac{R}{2} \rho_f U_{cep} \left(u_z^j, \frac{\partial u_z^k}{\partial z} \right).$$

Taking into account the above relations, the equation (14) takes the form

$$\ddot{c}_k(t) \left(\rho_s h + \rho_l \frac{R}{2} \right) \delta_{kj} + \frac{R}{2} \rho_s U_{cep} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) \left(u_z^j, \frac{\partial u_z^k}{\partial z} \right) + \Omega_k^2 \rho_s h \delta_{kj} c_k(t) = (\mathbf{Q}, \mathbf{u}_j), \quad (17)$$

where h is shell thickness.

To solve the problem of eigenvalues (determination the natural frequencies of oscillations of the shell with a liquid) we assume that

$$Q = 0, \quad c_k(t) = C_k \exp(\omega t), \quad C_k = const.$$

Therefore, we obtain the equation for determining the oscillation frequencies ω and unknown coefficients C_k , which determine the modes of oscillations, in the form of

$$\omega^2 \left(1 + \frac{\rho_f R}{2\rho_s h} \right) \delta_{kj} + \Omega_k^2 \delta_{kj} C_k + \omega U_{cep} \sum_{k=1}^{\infty} D_{kj} C_k = 0, \quad D_{kj} = \frac{\rho_f R}{2\rho_s h} \left(u_z^j, \frac{\partial u_z^k}{\partial z} \right). \quad (18)$$

We reduce (18) to the standard problem of eigenvalues. Let us limit to a finite number of n members of the series in (13).

We introduce the vector \mathbf{X} in the form of

$$\mathbf{X} = (\mathbf{C}, \omega \mathbf{C}) \tag{19}$$

(18) could be rewritten in a matrix form

$$\omega^2 \mathbf{B}\mathbf{C} + \mathbf{\Omega}\mathbf{C} + \omega U_{cep} \mathbf{D}\mathbf{C} = 0, \tag{20}$$

where the following order matrices are used ($n \times n$).

$$\mathbf{B} = \left(1 + \frac{\rho_f R}{2\rho_s h} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_n^2 \end{pmatrix}$$

The expression for the matrix \mathbf{D} is given in the formula (18).

From the equation (20) we obtain

$$\begin{aligned} \omega^2 \mathbf{B}\mathbf{C} &= -(\mathbf{\Omega} + \omega U_{cep} \mathbf{D})\mathbf{C}, \\ \omega^2 \mathbf{C} &= -(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{\Omega} + \omega U_{cep} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D})\mathbf{C}. \end{aligned} \tag{21}$$

We introduce a dimensional matrix $2n \times 2n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{\Omega} & -U_{cep} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \end{pmatrix}.$$

From (19), (20) we have the equality

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{\Omega} & -U_{cep} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \omega \mathbf{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \mathbf{C} \\ \omega^2 \mathbf{C} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \omega \mathbf{C} \end{pmatrix}.$$

Therefore, the standard problem of natural oscillations is obtained

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \omega \mathbf{X}. \tag{22}$$

In contrast to the equations used in [13, 14], the characteristic equation in (22) can have complex natural frequencies. If the real parts of such roots are positive, there is a stability loss. The described approach can be used to study the stability of the elastic tubes with a fluid.

4 Analysis of the numerical results

The elastic cylindrical shell with the following geometric and physical parameters is considered: $R=0.05m$, $L=3m$, $\mu=1.004 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$, $\Delta p=0.5Pa$, $h=0.005m$, the Young's module $E=20000MPa$, the Poisson's ratio $\nu=0.3$, $\rho_f=1000kg/m^3$, $\rho_s=7800kg/m^3$. We suppose that the shell is rigidly fixed at $z=0$.

Table 4.1 shows the values ω of the first five oscillation frequencies for the empty elastic shell, for the shell filled with the stationary liquid ($\Delta p=0$), and for the case of the shell with moving fluid ($\Delta p=0.5Pa$).

Table 4.1. Shell oscillation frequencies

$\rho_f, kg/m^3$	$\Delta p, Pa$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0	0	261.699	422.243	785.098	1266.42	1308.50
1000	0	181.964	293.579	545.895	880.595	909.827
1000	0.5	(0,181.964i)	(-1.8580, 293.579i)	(0,545.895i)	(-1.3854, 880.595i)	(0,909.827i)

From the data we can see that the complex frequencies appear in the case of moving fluid. The real parts of these frequencies are negative, i.e. the oscillations are damped. The presence of fluid leads to a decrease in the frequency of the shell oscillations.

5. Conclusions

The motion of the viscous incompressible fluid in the elastic cylindrical shell has been considered in the paper. The expressions for kinematic and potential energy have been derived. The equations for determining the frequencies of the fluid oscillation according to the assumptions of the Hagen-Poiseuille flow have been obtained. The frequencies of the shell oscillation have been determined taking into account the presence of moving fluid. The approach to studying the elastic shell stability in case of fluid motion has been developed.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. Гл. XII, §§ 93, 94, 95. https://learn.ztu.edu.ua/pluginfile.php/93163/mod_resource/content/1/Sivuhin_D.V._Kurs_obwey_fiziki._Tom_2-arpg75zl9bj.pdf
2. Хайкин С.Э. Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. Гл. XVI, §§ 123, 124. <https://www.twirpx.com/file/1922952/>
3. Стрелков С.П. Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 100–106. <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Strelkov1975ru.pdf>
4. Eric Lauga, Willow R. DiLuzio, George M. Whitesides, and Howard A. Stone. Swimming in Circles: Motion of Bacteria near Solid Boundaries. *Biophys J.* 2006 Jan 15; 90(2): 400–412. doi: 10.1529/biophysj.105.069401 <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1367047/>
5. Darrigol, O. Between Hydrodynamics and Elasticity Theory: The First Five Births of the Navier-Stokes Equation. *Arch Hist Exact Sc.* 56, 95–150 (2002). <https://doi.org/10.1007/s004070200000> <https://link.springer.com/article/10.1007/s004070200000>
6. Yifei Mo, Kevin T. Turner, Izabela Szlufarska. Friction laws at the nanoscale. *Nature*, Vol 457| 26 February 2009| doi:10.1038/nature07748. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/19242472/>
7. Toshiaki Natsuki and Morinobu End. Vibration analysis of embedded carbon nanotubes using wave propagation approach. *Journal of Applied Physics* 99, 034311 (2006); <https://doi.org/10.1063/1.2170418> <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.2170418>
8. Wang, Q., Varadan, V.K., Quek, S.T. (2006-09-04). Small scale effect on elastic buckling of carbon nanotubes with nonlocal continuum models. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* 357(2) :30-135. ScholarBank@NUS Repository. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.04.026> <https://scholarbank.nus.edu.sg/handle/10635/66179>
9. С.Абдуллаева, Ф.Нагиев Наногидромеханика, 2011,Баку. //Дьячков П.Н// Углеродные нанотрубки. Материалы для компьютеров XXI века // *Природа*. 2000. №11. С.23-30. http://anl.az/el_ru/kniqi/2013/2-815097.pdf
10. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 1. Гл. 8. <https://e.lanbook.com/book/2684>
11. Байков В.И., Павлюкевич Н. В., Федотов А.К., Шнип А.И. Минск: Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова НАН Беларуси, 2014. — 370 с. https://www.itmo.by/doc/publication/full_teplofiz2.pdf
12. Reza Bahaadini, Ali Reza Saidi and Mohammad Hosseini. Flow-induced vibration and stability analysis of carbon nanotubes based on the nonlocal strain gradient Timoshenko beam theory. *Journal of Vibration and Control* 2019, Vol. 25(1) 203–218, doi.org/10.1177/1077546318774242 <https://journals.sagepub.com/doi/full/10.1177/1077546318774242>
13. Degtyarev, K., Glushich, P., Gnitko, V., Strelnikova, E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells // *International Journal of Modern Physics and Applications*. Vol. 1, No. 4, pp. 159-168, 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209 https://www.researchgate.net/publication/280728146_Numerical_Simulation_of_Free_Liquid-Induced_Vibrations_in_Elastic_Shells
14. Medvedovskaya T. Free hydroelastic vibrations of hydroturbine head covers/ Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K // *Int. J. Eng. and Advanced Research Technology*.– 2015.– Vol. 1.–

No 1.– P.45-50. DOI: 10.13140/RG.2.1.3527.4961 <https://journal-me.com/archive-ukr/vol21-2018-iss1-paper5/?print=print>

REFERENCES

1. Sivukhin D.V. General course of physics. T. I. - Moscow: Nauka, 1996. Ch. XII, §§ 93, 94, 95. https://learn.ztu.edu.ua/pluginfile.php/93163/mod_resource/content/1/Sivuhin_D.V._Kurs_obvej_fiziki_Tom_2-arpg75z19bj.pdf [in Russian]
2. Khaikin S.E. Physical foundations of mechanics. - M.: Nauka, 1971. Ch. XVI, §§ 123, 124. <https://www.twirpx.com/file/1922952/> [in Russian]
3. Strelkov S.P. Mechanics. - M.: Nauka, 1975. §§ 100-106. <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Strelkov1975ru.pdf> [in Russian]
4. Eric Lauga, Willow R. DiLuzio, George M. Whitesides, and Howard A. Stone. Swimming in Circles: Motion of Bacteria near Solid Boundaries. *Biophys J.* 2006 Jan 15; 90(2): 400–412. doi: 10.1529/biophysj.105.069401 <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1367047/> [in English]
5. Darrigol, O. Between Hydrodynamics and Elasticity Theory: The First Five Births of the Navier-Stokes Equation. *Arch Hist Exact Sc.* 56, 95–150 (2002). <https://doi.org/10.1007/s004070200000> <https://link.springer.com/article/10.1007/s004070200000> [in English]
6. Yifei Mo, Kevin T. Turner, Izabela Szlufarska. Friction laws at the nanoscale. *Nature*, Vol 457| 26 February 2009| doi:10.1038/nature07748. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/19242472/> [in English]
7. Toshiaki Natsuki and Morinobu End. Vibration analysis of embedded carbon nanotubes using wave propagation approach. *Journal of Applied Physics* 99, 034311 (2006); <https://doi.org/10.1063/1.2170418> <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.2170418> [in English]
8. Wang, Q., Varadan, V.K., Quek, S.T. (2006-09-04). Small scale effect on elastic buckling of carbon nanotubes with nonlocal continuum models. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* 357(2):30-135.ScholarBank@NUSRepository. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.04.026> <https://scholarbank.nus.edu.sg/handle/10635/66179> [in English]
9. S. Abdullaeva, F. Nagiyev Nanohydrodromechanics, 2011, Baku. // Dyachkov P.N. // Carbon nanotubes. Materials for computers of the XXI century // *Nature*. 2000. No. 11. P.23-30. http://anl.az/el_ru/kniqi/2013/2-815097.pdf [in Russian]
10. Kingsep A.S., Lokshin G.R., Olkhov O.A. Fundamentals of Physics. T. 1. Mechanics, electricity and magnetism, oscillations and waves, wave optics. - M.: Fizmatlit, 2001. Part 1. Ch. eight. <https://e.lanbook.com/book/2684> [in Russian]
11. Baikov V.I., Pavlyukevich N.V., Fedotov A.K., Shnip A.I. Minsk: A.V.Lykov Institute of Heat and Mass Transfer of the National Academy of Sciences of Belarus, 2014. --- 370 p. https://www.itmo.by/doc/publication/full_teplofiz2.pdf [in Russian]
12. Reza Bahaadini, Ali Reza Saidi and Mohammad Hosseini. Flow-induced vibration and stability analysis of carbon nanotubes based on the nonlocal strain gradient Timoshenko beam theory. *Journal of Vibration and Control* 2019, Vol. 25(1) 203–218, doi.org/10.1177/1077546318774242 <https://journals.sagepub.com/doi/full/10.1177/1077546318774242> [in English]
13. Degtyarev, K., Glushich, P., Gnitko, V., Strelnikova, E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells // *International Journal of Modern Physics and Applications*. Vol. 1, No. 4, pp. 159-168, 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209 https://www.researchgate.net/publication/280728146_Numerical_Simulation_of_Free_Liquid-Induced_Vibrations_in_Elastic_Shells
14. Medvedovskaya T. Free hydroelastic vibrations of hydroturbine head covers/ Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K // *Int. J. Eng. and Advanced Research Technology*.– 2015.– Vol. 1.– No 1.– P.45-50. <https://journal-me.com/archive-ukr/vol21-2018-iss1-paper5/?print=print>

УДК 004.07

Розробка мережевої інфраструктури IoT на базі сенсорної мережі розподілених датчиків для вимірювання радіаційного забруднення з використанням багаторівневої архітектури

М.Г.Стервоєдов, В.Л.Терьохін

**Стервоєдов
Микола
Григорович**

*к.т.н., доцент; завідуючий кафедри електроніки та управляючих систем
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна,
Майдан Свободи 4, Харків-22, Україна, 61022
e-mail: stervoyedov@yahoo.com
<https://orcid.org/0000-0003-0136-6437>*

**Терьохін
Віталій
Леонідович**

*аспірант кафедри електроніки та управляючих систем
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна,
Майдан Свободи 4, Харків-22, Україна, 61022
e-mail: kbs-com@karazin.ua
<https://orcid.org/0000-0001-7653-4488>*

У цій статті розроблено підходи до створення мережевої інфраструктури на базі сенсорної мережі розподілених датчиків для радіаційного контролю забруднення навколишнього середовища. Фундаментальні рішення IoT характеризує себе як частина невідмінного життя людей у нашій країні, та не тільки. Встановлення зв'язку між пристроями та мережею. У статті проаналізовано та розроблено принципові схеми та уніфіковані підходи до побудови повноцінної системи розподілених датчиків які можуть з'єднуватися між собою по бездротовим канал. Використовуючи хмарні сервіси система виходить на новий рівень взаємозв'язків між користувачем та додатком. Автономне керування мережею повинна передбачати різні аспекти, які в ній закладені таких як, серед яких можна зазначити: самоуправління, автоматичне налаштування, автоматичне усунення проблем, а також усунення проблем живлення. Ці передумови є найважливішими у сій сукупності пристроїв. Також система відповідає комунікації користувача та додатків, а перш за все в створенні захищених каналів зв'язку, бо у сьому світі постала загроза саме кібербезпеці середовища та додатків, які до цього залучені та сприяння недостовірної інформації може повести за собою великі витрати кошт на усунення статті розглянуто здатність реагування локацією та комунікацію приладів та користувачів та відповідати потребам безпеки у встановленні обладнання. Окремі частини системи IoT, що зазвичай працюють автоматично, надають можливість уповноваженим особам проводити необхідні налаштування та вимірювання. Розглянуто багаторівневість IoT для управління передачі, прийому та обробки даних. Стаття є доповнення до інших статей за цією тематикою інфраструктури та розгалужено є повноцінною архітектурою сенсорної мережі з використання провідних мікроконтролерів які на багато випереджають свій час. А використання сучасних протоколів на багато років дає можливість впровадження цієї системи не тільки на території України. Мережі комунікації передають дані, отримані з підключених пристроїв, а також інструкції від програм, іншим частинам системи. Вони надають можливості для надійної та ефективної передачі даних. Інфраструктура мережі IoT може бути реалізована як за допомогою існуючих мереж та протоколів обміну даними, наприклад, протоколу TCP/IP, так і на мережах що у цей час проходять стадію розробки, таких як мережі нового покоління (NGN). Складні мережі застосовують новітні підходи до управління систем.

Ключові слова: радіаційний моніторинг, мікроконтролерний дозиметр, детектор, мікроконтролер, напівпровідникові сенсори, зарядо - чутливий підсилювач, хмарні сервіси, віддалений доступ користувачів, сенсорні мережі, Інтернет речей.

Development of an IoT network infrastructure based on a sensor network of distributed sensors for measuring radiation pollution using a multi-level architecture

M. Stervoyedov, V. Terokhin

Stervoyedov Nikolay

PhD (Technology), associate Professor; Head of the Department of electronics and control systems, V. N. Karazin Kharkiv national University, 6 Svobody square, Kharkiv-22, Ukraine, 61022

Terokhin Vitaliy*Aspirant of the Department of electronics and control systems, V. N. Karazin Kharkiv national University, 6 Svobody square, Kharkiv-22, Ukraine, 61022*

Approaches to creating a network infrastructure based on a network of distributed sensors for radiation monitoring of environmental pollution have been developed in the article. Fundamental solutions IoT is characterized as integral part of the peoples' live not only in Ukraine but a whole world. The article analyzes and develops schematic diagram and unified approaches to building a full-fledged system of distributed sensors that can be wirelessly connected to each other. By using cloud services, a new level of interaction between the user and the application has been reached. Autonomous network management should provide for various aspects such as: self-management, automatic configuration, automatic troubleshooting, as well as power management. These prerequisites are essential for this set of devices. The system is responsible for communication between the user and applications, and above all for creating secure communication channels, because the issue of cybersecurity is of extreme importance and data breaches can cause environmental risks and huge expenses. The article examines the ability to respond to location, provide communication between devices and users and meet the security needs of the equipment installation. Individual parts of the IoT system, which usually work automatically, allow authorized persons to provide the necessary configurations and measurements. The multilevel nature of IoT for managing transmission, reception, and data processing has been considered. The article supplements previous articles on the topic of full-fledged sensor network architecture where the modern microcontrollers are used. Using modern protocols makes it possible to present this system on the world market. Communication networks transmit data received from connected devices, as well as program instructions to other parts of the system; therefore providing opportunities for reliable and efficient data transmission. The IoT network infrastructure can be implemented through existing networks and data exchange protocols, such as TCP/IP, and on currently developed networks, such as next-generation networks (NGN). The latest approaches to system management are applied.

Keywords: radiation monitoring, microcontroller, dosimeter, detector, microcontroller, semiconductor sensors, charge-sensitive amplifier, cloud services, remote user access, sensor networks, IoT.

Разработка сетевой инфраструктуры IoT на базе сенсорной сети распределенных датчиков для измерения радиационного загрязнения с использованием многоуровневой архитектуры

Н.Г.Стервоедов, В.Л.Терехин

**Стервоедов
Николай
Григорьевич**

*к.т.н., доцент; заведующий кафедры электроники
и управляющих систем
Харковский национальный университет имени В.Н.Каразина,
Площадь Свободы 4, Харьков-22, Украина, 61022
e-mail: stervoyedov@yahoo.com
<https://orcid.org/0000-0003-0136-6437>*

**Терехин
Виталий
Леонидович**

*аспирант кафедры электроники и управляющих систем
Харковский национальный университет имени В.Н.Каразина,
Площадь Свободы 4, Харьков-22, Украина, 61022
e-mail: kbs-com@karazin.ua
<https://orcid.org/0000-0001-7653-4488>*

В этой статье разработаны подходы к созданию сетевой инфраструктуры на базе сенсорной сети распределенных датчиков для радиационного контроля загрязнения окружающей среды. Фундаментальные решения IoT характеризуют себя как часть неотъемлемой жизни людей в нашей стране и не только. Установка связи между устройствами и сетью. В статье проанализированы и разработаны принципиальные схемы и унифицированные подходы к построению полноценной системы распределенных датчиков, которые могут соединяться между собой по беспроводным каналом. Используя облачные сервисы, система выходит на новый уровень взаимосвязей между Пользователем и приложением. Автономное управление сетью должно предусматривать различные аспекты, которые в ней заложены таких как, среди которых можно отметить: самоуправление, автоматическая настройка, автоматическое устранение проблем, а также устранение проблем питания. Эти предпосылки являются важнейшими в этой совокупности устройств. Также система соответствует коммуникации пользователя и приложений, а прежде всего в создании защищенных каналов связи, потому что в седьмом мире возникла угроза именно кибербезопасности среды и приложений, которые к этому вовлечены и содействие недостоверной информации может повести за собой большие расходы на устранение этих проблем. В статье рассмотрена способность реагирования локацией и коммуникацию приборов и пользователей, отвечать потребностям безопасности в установке оборудования. Отдельные части системы IoT, которые обычно работают автоматически, предоставляют возможность уполномоченным лицам проводить необходимые настройки и измерения. Рассмотрена многоуровневость IoT для управления передачи, приема и обработки данных. Статья представляет собой дополнение к другим статьям по этой тематике инфраструктуры и развертыванию являются полноценной архитектурой сенсорной сети по использованию ведущих микроконтроллеров, которые на многое опережают свое время. А использование современных протоколов на многие годы дает возможность внедрения этой

системы не только на территории Украины. Сети коммуникации передают данные, полученные с подключенных устройств, а также инструкции от программ, другим частям системы. Они предоставляют возможности для надежной и эффективной передачи данных. Инфраструктура сети IoT может быть реализована как с помощью существующих сетей и протоколов обмена данными, например, протокола TCP/IP, так и на сетях в настоящее время проходят стадию разработки, таких как сети нового поколения (NGN). Сложные сети применяют новейшие подходы к управлению систем.

Ключевые слова: радиационный мониторинг, микроконтроллерный дозиметр, детектор, микроконтроллер, полупроводниковые сенсоры, зарядо-чувствительный усилитель, облачные сервисы, удаленный доступ пользователей, сенсорные сети, Интернет вещи.

Вступ

На даний час знайти вихідну точку для концепції Інтернету речей є проблемою, оскільки поява Інтернету речей є органічною та передбачуваною в умовах сильного розвитку електроніки та інформаційних технологій у 1980-х роках. Різні інструменти підштовхували людство вперед, розширювали можливості цивілізації та закладали основу для винаходу нових знарядь праці. Інструмент є продуктом людини, і він завжди намагається модернізувати його для задоволення поточних потреб. Ще до появи першої вбудованої системи, з впровадженням технології електрифікації та автоматизації, змінилася велика кількість звичайних предметів побуту. Ринок стимулює використання нових технологій, оскільки вони додають вартість продуктам. Більше того, хоча більшість людей не носять кольорове взуття, більший відсоток людей використовує електродрилі замість ручних. Цей приклад наочно ілюструє важливість вирішення конкретних технічних проблем. Оскільки Інтернет просувається у всьому світі як єдиний інформаційний канал, "розумні" пристрої (тобто пристрої, функції яких були розширені або вдосконалені завдяки використанню цифрових технологій) почали інтегруватися в мережу.

Відома корпорація Cisco Systems визначила період з 2008 по 2009 рік, коли Інтернет речей справді "народився". Співвідношення кількості речей до кількості людей в Інтернеті має перевагу, тому в 2010 р. Вартість речей становила 1,84, а в 2003 р. - 0,08 [1]. Той факт, що пристроїв забагато, ілюструє концепцію, тому вона є частиною сучасного світу, тому розуміння її принципів є актуальним. Розробка підходів до створення хмарних систем більш примітивних систем M2M, в яких обчислювальні машини поєднувалися одна з одною напряму. Звичайний Інтернет, клієнтами якого є люди, що використовують різні варіанти персональних комп'ютерів прийнято називати «Інтернетом комп'ютерів».

У сферах логістики та охоронних систем вже давно використовувалися засоби радіочастотної ідентифікації (RFID). Міська інфраструктура також підключена до Інтернету. Своєчасне виявлення загроз від стихійних лих, таких як лісові пожежі чи радіаційні загрози, допомагає аварійним службам. За допомогою розумної системи камер або датчиків ви можете встановити власника автомобіля та накласти штраф. Контроль дорожніх заторів усуває проблему заторів та автоматично змінює рівень освітлення, щоб допомогти заощадити електроенергію та покращити огляд при зміні природних умов. Відстежуючи наявність місць та бронюючи місця для паркування, стоянки стають швидшими. Система метеостанцій може покращити точність прогнозів погоди. У 2010 році Китай взяв національний курс і запровадив Інтернет речей у своїх містах. В даний час Китай контролює найбільшу частку ринку Інтернету речей, що становить 22% від загальної кількості [2].

Фундаментальні характеристики використання IoT у сенсорній мережі радіаційного моніторингу

Використання сенсорних мереж можна охарактеризувати низкою основних характеристик, пов'язаних зі структурою та використанням Інтернет речей:

Архітектуру мережі можна розділити на чотири рівні, кожен з яких вирішує певні проблеми в процесі обробки даних (рис. 1).



Рис. 1. Рівні архітектури мережі та їх задачі.

Найближче до предметної області - це висота смарт-пристрою (датчика) - так званої "речі". Розумні пристрої - це спосіб перетворення даних із фізичного світу в цифровий і навпаки. Вони мають датчики, які дозволяють отримувати значення різних зовнішніх і внутрішніх показників: температури, вологості, просторового розташування, напруги, кольору тощо. Пускачі (двигуни, звукові, візуальні інструкції тощо) дозволяють реагувати на команди мережі та реагувати на зовнішнє середовище. Велика кількість датчиків підключена до локальної мережі (LAN, WSN) через з'єднання Wi-Fi або Ethernet. Існують також датчики, які безпосередньо підключаються до мережі за допомогою мобільних методів (GSM, GPRS, LTE).

Сенсорні масиви, які генерують великі обсяги даних і вимагають надійної та швидкої передачі даних, зазвичай використовують виділені мережі та проміжні пристрої, які передають дані в мережу. Для зв'язку в локальній мережі використовується спеціальний протокол для інтеграції датчика з результатами в різних форматах. Проміжний пристрій може інтерпретувати отримані дані, збирати їх у пакети даних, зберігати у тимчасовому сховищі, виконувати фільтрацію та виконувати попередню обробку, передавати дані до мережі та захищати локальну мережу від можливих атак [5]. Рівень управління даними встановлює правила проміжної обробки даних. Обробляючи великі обсяги інформації, він здатний очищати непотрібні записи, аналізувати дані та збирати статистичну інформацію. За певних умов він може надіслати запит на певний рівень відповіді на смарт-пристрій, тим самим прискорюючи швидкість відповіді системи. Рівень управління даними позбавляє потреби завантажувати розширені програми шляхом аналізу надлишкових пакетів даних. Наприклад, отримуючи температуру та вологість, якщо це потрібно користувачеві, він може передавати лише дані про температурний індекс.

Рівень програми (рівень програми) є цільовим користувачем інформації. Ця програма отримує оброблені дані. У приміщенні знаходиться система клімат-контролю та насосна станція. Система використовує індикатор детектора для контролю тиску води [6].

Розробка з'єднань сенсорної мережі с використання ІоТ

Для встановлення з'єднання між частинами систем Інтернету речей використовують різні протоколи обміну даними:

- MQTT (Message Queue Telemetry Transport) – протокол з'єднання сенсорів та проміжних пристроїв. Використовує модель підписки з брокером, де брокер відповідальний за автентифікацію адресату та адресанту. Працює у поєднанні з TCP/IP.
- ZIGBEE – протокол з низьким рівнем енергозатрат та малою пропускну здатністю. Найчастіше використовується в ІоТ.
- AMQP (Advance Message Queuing Protocol) – використовується на прикладному рівні. Заснований на чергах повідомлень.

- DDS (Data Distribution Service) – протокол розповсюдження даних, заснований на рівні реконструкції даних (DLRL), що виступає інтерфейсом для рівня інформаційно-орієнтованих публікацій за підпискою (DCPS). Використовують в проміжних пристроях та хмарних сервісах.

- LoRaWAN (Long Range Wide Area Network) – протокол, що надає можливість підключення великої кількості пристроїв малої потужності на значній відстані (до 15 кілометрів).

Іншими протоколами IoT є: Bluetooth, Wi-Fi, Cellular (мобільний зв'язок), UDP, IPv6, QUIC, Nano-IP, DLTS [7].

Використовують різні топології підключення до мережі:

- з'єднанням з допомогою шлюзу;
- з'єднанням без посередників;
- з'єднанням без використання мережі, тобто, по схемі «точка-точка».

Також застосовують змішані варіанти топології мережі поєднанням декількох варіантів комунікації. Схему системи Інтернету речей з різними варіантами підключення наведено на (рис. 2).

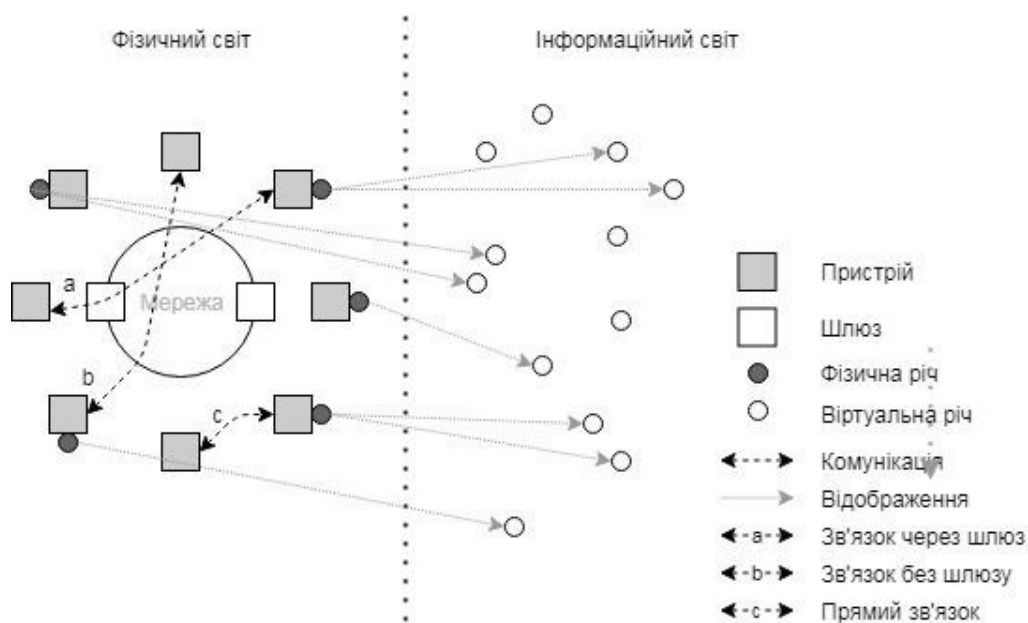


Рис. 2. Варіанти підключення мережі.

Хмарні сервіси та класи сенсорної мережі

Мережа зв'язку передає дані, отримані від підключених пристроїв, та інструкції від програми до інших частин системи. Вони надають можливості для надійної та ефективної передачі даних. Мережева інфраструктура IoT може бути реалізована за допомогою існуючих мереж та протоколів зв'язку (таких як TCP / IP) або в мережах, що зараз розробляються (таких як мережі наступного покоління (NGN)). Складні мережі використовують новітні методи управління системою.

Як було описано у попередніх статтях [6], виконуючи певні команди, слід звертати увагу на типи повідомлень, якими обмінюються між різними частинами системи та ключовими областями. Ви побачите, що деякі повідомлення позначені кольоровими стрілками, і процес буде залишатися активним до отримання відповіді від одержувача. Інші асинхронні повідомлення дозволяють використовувати системні компоненти відразу після надсилання команди. Крім того, на малюнку також показано дві області циклу. Вони відповідають за процес виявлення циклу, де відбувається час між спробами виявлення та час між відправленням пакетів до ThingSpeak. На цьому етапі можна вважати, що динамічний опис компонування системи є достатнім для розробки її алгоритму та програмної реалізації. Завершальним кроком у розробці архітектури макета обміну даними буде створення схеми класу програмного забезпечення макета та клієнтської програми Android для визначення структурних елементів, їх атрибутів та поведінки (рис. 3).

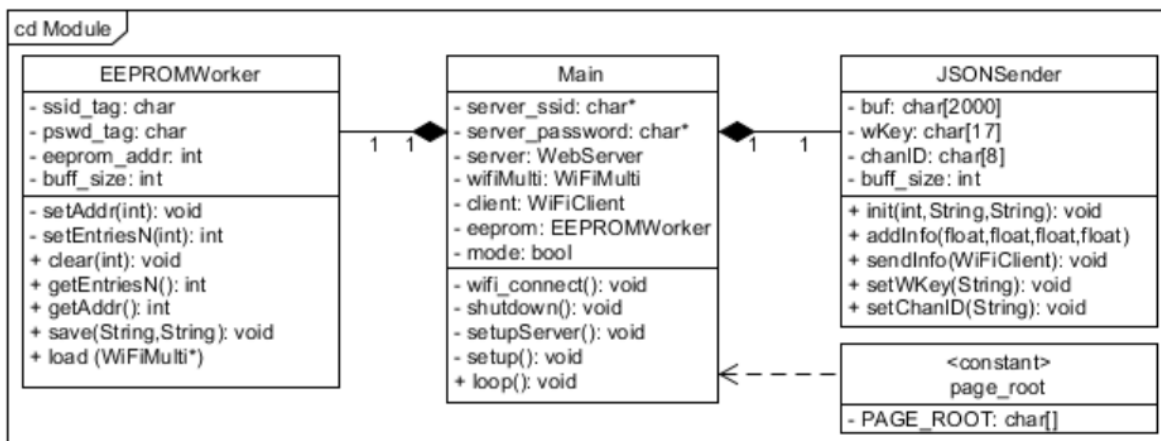


Рис. 3. UML діаграма класів програмного забезпечення модулю.

Програмне забезпечення макета не потребує створення великої кількості класів. Як правило, процеси, які відбуватимуться в цій частині системи, будуть реалізовані без використання об'єктно-орієнтованих програм. Як видно з (рис. 3), класом, який повинен бути реалізований роботою, є клас роботи. Клас EEPROMWorker інкапсулює всю роботу в енергонезалежній пам'яті мікроконтролера. Він повинен записати пару SSID і пароль, передані в HTTP-запиті, в EEPROM. Крім того, потрібно зберегти кількість цих пар та місце розташування останнього зайнятого блоку зберігання. Також потрібно мати можливість очистити пам'ять, повернувшись до початкового формату, і завантажити збережені значення у клас, відповідальний за підключення до відомих точок доступу Wi-Fi. Як і інші класи, використані на цій схемі, цей клас також є частиною готової бібліотеки. Тому їх зображення на діаграмі класів непотрібні, оскільки вони є "чорними ящиками" для системи. Більш актуальним є створення діаграми класів для клієнтського Android додатку (рис. 4).

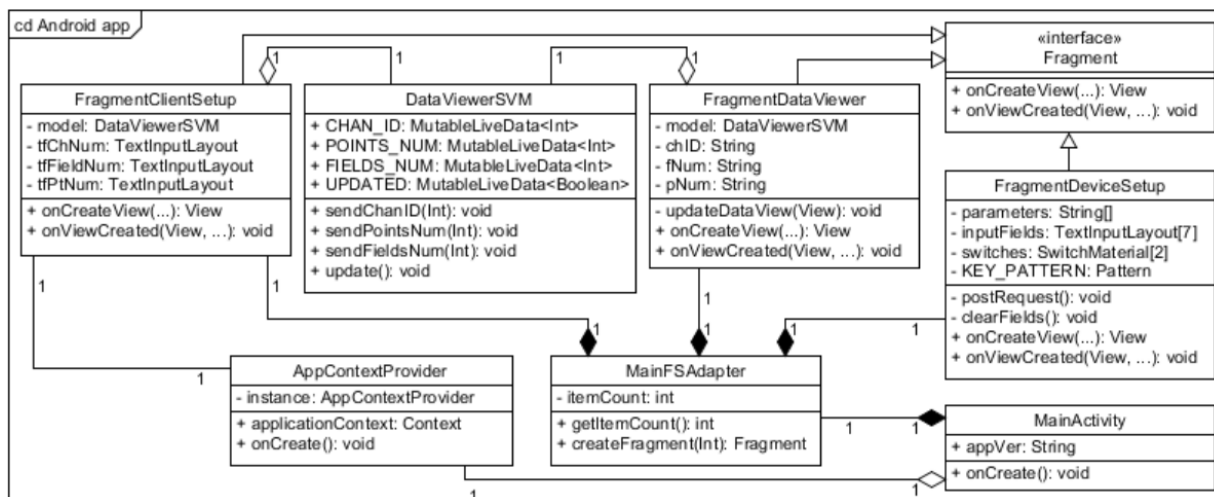


Рис. 4. UML діаграма класів Android додатку.

Схема класів додатків показує лише класи, які потрібно розробити. Для створення графічного інтерфейсу користувача потрібно використовувати велику кількість готових компонентів з різних бібліотек Android. Деякі зв'язки здійснюються на рівні прихованих частин бібліотеки та впровадження. Основним класом програми є клас MainActivity. Програма починається з її ініціалізації. Аналізуючи виконання системи, що містить необхідні елементи проекту, для забезпечення коректної роботи програми може бути призначено безліч класів обслуговування. Для надання контексту програми створюється точка доступу у вигляді класу AppCompatActivityProvider. Це дозволяє перенести контекст програми на інші види діяльності, крім основної. Клас DataViewerSVM забезпечує асинхронний доступ до спільних змінних кількох фрагментів, такими є: фрагменти представлення даних та фрагменти конфігурації програми. Тут часто використовують дані як параметр запиту для хмарних служб. Робота над проектом пов'язана з

розробкою низки програмних рішень для фізично-розгалужених елементів системи та налагодженням зв'язку між ними. Кінцевим результатом став апаратно-програмний макет що демонструє взаємодію компонентів системи на кожному етапі роботи з даними та здатний до налаштування для роботи у новій локації.

Вибір та підключення апаратних частин макету

Під час розробки не було доцільності паяти власний 8-розрядний комп'ютер для вивчення електронних продуктів, включаючи програмісти в структурі схеми, тому немає необхідності в дорогих зовнішніх рішеннях і ненадійних схемах підключення, а вбудована схема регулятора потужності економить сотні процесорів. Коротке замикання та несправність. В освіті та побічних проєктах використання плат, подібних до Arduino, стало фактичним стандартом. Малий бізнес та стартапи іноді використовують дошки розвитку для створення першої версії своїх бізнес-проєктів. Поява нових мікроконтролерів майже завжди пов'язана з появою плат розвитку, завдяки чому фахівці знайомляться з функціями нових мікроконтролерів, а потім використовують їх у власних схемах розробки. Для цього проєкту було вирішено створити макет за допомогою плати розробки та периферійних пристроїв. Після остаточного затвердження апаратного забезпечення системи, розробки та тестування програмного алгоритму та виправлення помилок на різних етапах рекомендується розробити та виготовити власну схему мікроконтролера. Вибір конкретної плати розробки для використання цього мікроконтролера базується на кількох факторах: кількості розведених виходів GPIO, наявності виходів програміста та ланцюгів живлення та наявності плат розвитку в українських магазинах. Як результат, обрана плата є аналогом відомого Wemos D1 R2 (рис. 3.1), який побудований на мікроконтролері ESP8266. Плата Wemos D1 R2 була обрана, оскільки вона має вбудований контролер живлення з коаксіальним входом, що дозволяє запитувати мікроконтролер від джерела живлення з широким діапазоном допустимих напруг (9-24В). Крім того, він також має інтерфейс USB, 11 цифрових та 1 аналоговий вихід. На (рис. 5) зображено готовий макет пристрою поширення дозиметричної інформації та вказано головні компоненти макету.

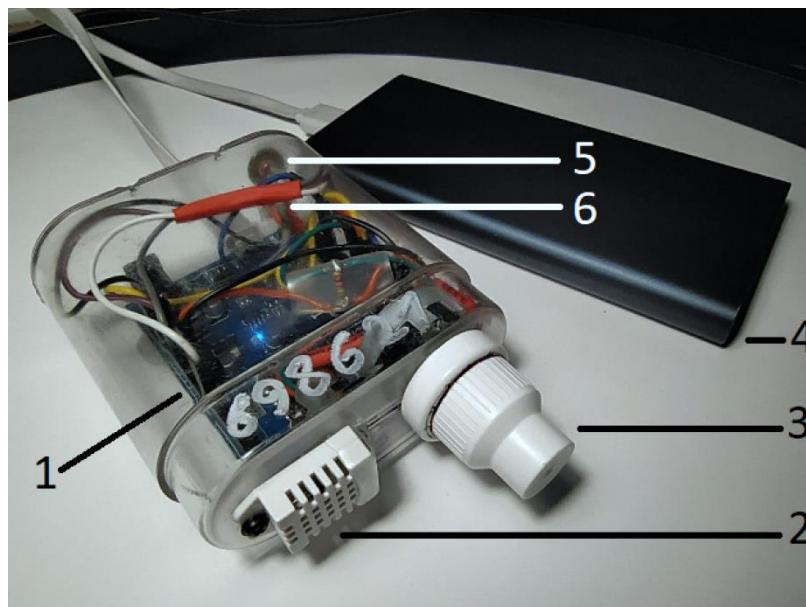


Рис. 5. Компоненти макету пристрою обміну даними.

До компонентів макета належать: 1-плата розробки Wemos D1R2, 2-датчик температури та вологості DHT22, 3-потенціометр, акумуляторна батарея 4-5 В 2,4 А з виходом USB, 5-індикаторний світлодіод, 6-кнопка управління.

Центральний вихід потенціометра підключений до аналогового входу плати-прототипу. Залежно від положення рукоятки, вона буде забезпечувати напругу від 0 до 3,3 В. Цифровий вхід призначений для підключення виходу даних датчика температури та вологості DHT22, що працює

в протоколі I2C. Один цифровий вихід зайнятий кнопкою управління, один світлодіодний індикатор стану схеми розміщення цифрового виходу, а другий поєднується з виходом RST для ініціалізації режиму енергозбереження мікроконтролера. Решта виходів периферійних компонентів підключені згідно з документом: вихід + V або плата компоновання GND.

Висновки

Результатом поточної статті є більш точна та повна модель широкого спектру дозиметричних систем на базі сенсорних мереж, перероблення та вдосконалення обробки даних та поширення концепції виявлення Інтернету речей. Крім того, враховуючи індикатор часу сигналу та реалізацію формули, запропонованої у нашій власній науковій публікації, була розроблена модель модуля спектра для моделювання роботи детектора іонізуючого випромінювання. Лабораторне моделювання проводилось для побудови спектроскопічних замірів, розгортання та експлуатації системи обміну даними IoT для експериментів з дозиметрії. На основі архітектури, алгоритмів та апаратних та програмних рішень, розроблених під час до цього написаних статей, будуть створені більш детальні імітаційні моделі, реальні прототипи систем моніторингу випромінювання та дослідницькі та навчальні системи спектроскопії.

Робота над проектом підтримується міжнародним грантом УНТЦ №9903. Сумісними зусиллями ХНУ імені В.Н. Каразіна та працівників ННЦ ХФТІ готується робочий прототип запропонованої частини системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ridozub, O., Terokhin, V., Stervoyedov, N., Fomin, S.. Сенсорний вузол для бездротової мережі радіаційного моніторингу. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», 2019, 44, 88-93с. <https://periodicals.karazin.ua/mia/index>
2. Ажажа В.М. Приборы на основе CdTe и CdZnTe для технологического контроля и мониторинга радиационной обстановки на АЭС / В.М. Ажажа, В.Е. Кутний, А.В. Рыбка, Л.Н. Давыдов, И.Н. Шляхов, А.А. Захарченко, Д.В. Кутний, Д.В. Наконечный // Наука та інновації. – 2006. – Т. 2, № 6. – С. 31–38. <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/113940>
3. Захарченко А.А. Моделирование дозиметрических свойств детекторов гамма излучения на основе высокоомных полупроводников. Диссертация на соискание канд. физ. – мат. наук. Харьков, 2009 С. 28–31. <http://dspace.nbu.gov.ua/bitstream/handle/123456789/52427/10-Zakharchenko.pdf?sequence=1>
4. D. Evans The Internet of Things How the Next Evolution of the Internet is Changing Everything : [Електронний ресурс] // April 2011, Cisco Internet Business Solutions Group (IBSG), 2016-2020. URL: https://www.cisco.com/c/dam/en_us/about/ac79/docs/innov/IoT_IBSG_0411FINAL.pdf. Дата звернення: 02.08.2020
5. The Internet of Things (IoT) – essential IoT business guide: [Електронний ресурс] // i-SCOOP. 2017-2020. URL: <https://www.i-scoop.eu/internet-of-things-guide/>. Дата звернення: 02.08.2020
6. Ridozub, O., Terokhin, V., Stervoyedov, N., Fomin, S.. Розробка основних підходів до створення апаратно-програмних засобів інформаційних систем радіаційного моніторингу. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», 2020, 46, 82-91с. <https://periodicals.karazin.ua/mia/index>
7. China: The World Largest IoT Market: [Електронний ресурс] // September 2018, MarketingToChina, 2019-2020. URL: <https://www.marketingtochina.com/china-world-largest-iot-market/>. Дата звернення: 10.09.2020
8. Internet of Things (IoT) Gateways: [Електронний ресурс] // @geeksforgeeks. 2020. URL: <https://www.geeksforgeeks.org/internet-of-things-iot-gateways/> Дата звернення: 11.09.2020
9. K. K Patel, S. M Patel Internet of Things-IOT: Definition, Characteristics, Architecture, Enabling Technologies, Application & Future Challenges // International Journal of Engineering Science and Computing, May 2016 с.6122-6131.
10. Introduction to IoT protocols and types: [Електронний ресурс] // Microcontrollerslab.com, 2013-2020. URL: <https://microcontrollerslab.com/iot-protocols-types/>. Дата звернення: 12.09.2020

REFERENCES

1. Ridozub, O., Terokhin, V., Stervoyedov, N., Fomin, S.. Touch node for a wireless radiation monitoring network. Bulletin of V. N. Karazin Kharkiv National University, Series " mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems", 2019, 44, 88-93c. <https://periodicals.karazin.ua/mia/index> [In Ukraine]
2. Azhazha V. M., Kutny V. E., Rybka A. V., Davydov L. N., Shlyakhov I. N., Zakharchenko A. A., Kutny D. V., Nakonechny D. V. devices based on CdTe and CdZnTe for technological control and monitoring of the radiation situation at the NPP. 2006, Vol. 2, No. 6, pp. 31-38. <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/113940> [In Russia]
3. Zakharchenko A. A. modeling of dosimetric properties of gamma radiation detectors based on high-resistance semiconductor devices. Dissertation for the candidate's degree. Fiz. - mat. Nauk. Kharkiv, 2009, pp. 28-31. <http://dspace.nbu.gov.ua/bitstream/handle/123456789/52427/10-Zakharchenko.pdf?sequence>
4. D. Evans the Internet of Things How the next Evolution of the Internet is Changing everything: [electronic resource] // April 2011, Cisco Internet Business Solutions Group (IBSG), 2016-2020. URL: https://www.cisco.com/c/dam/en_us/about/ac79/docs/innov/IoT_IBSG_0411FINAL.pdf. accessed: 02.08.2020
5. The Internet of Things (IoT) – essential IoT business guide: [electronic resource] // i-SCOOP. 2017-2020. URL: <https://www.i-scoop.eu/internet-of-things-guide/>. accessed: 02.08.2020 [In Ukraine]
6. Ridozub, O., Terokhin, V., Stervoyedov, N., Fomin, S..Development of basic approaches to the creation of hardware and software tools for information systems for radiation monitoring. Bulletin of V. N. Karazin Kharkiv National University, Series " mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems", 2020, 46, 82-91c. <https://periodicals.karazin.ua/mia/index> .[In Ukraine]
7. China: the world's Largest IoT Market: [electronic resource] // September 2018, MarketingToChina, 2019-2020. URL: <https://www.marketingtochina.com/china-world-largest-iot-market/>. accessed: 10.09.2020
8. Internet of Things (IoT) Gateways: [electronic resource] // @geeksforgeeks. 2020. URL: <https://www.geeksforgeeks.org/internet-of-things-iot-gateways/> accessed: 11.09.2020
9. K. K Patel, S. M Patel Internet of Things-IOT: Definition, Characteristics, Architecture, Enabling Technologies, Application & Future Challenges // International Journal of Engineering Science and Computing, May 2016 pp. 6122-6131v
10. Introduction to IoT protocols and types: [electronic resource] // Microcontrollerslab.com, 2013-2020. URL: <https://microcontrollerslab.com/iot-protocols-types/>. accessed: 12.09.2020

Наукове видання

**Вісник Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна**

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 48

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О.О. Афанасьєва

Підписано до друку 28.12.2020 р.
Формат 60x84/8. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. – 8,2.
Обл.– вид. арк. – 10,3.
Наклад 50 пр. Зам. № 6/2021
Безкоштовно

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09

Видавництво Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
тел.: 705-24-32