

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Серія

«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 46

Серія заснована 2003 р.

BULLETIN

of V.N. Karazin Kharkiv National University

Series

«Mathematical Modeling.
Information Technology.
Automated Control Systems»

Issue 46

First published in 2003

Харків
2020

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Наказом Міністерства освіти і науки України від 17.03.2020 № 409 наукове фахове періодичне видання Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» включено до Категорії «Б» Переліку наукових фахових видань України за наступними спеціальностями: 113 – Прикладна математика; 122 – Комп'ютерні науки та інформаційні технології; 123 – Комп'ютерна інженерія; 125 – Кібербезпека.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 10 від 23.06.2020 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),

д.ф.-м.н., академік НАН України, проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора), д.т.н., проф. ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т. (заст. гол. редактора), д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Споров О.Є. (відповідальний секретар), к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Замула О. А., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ імені Б.І. Веркіна НАН України

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Рассомахін С. Г., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В. Н. Каразіна

Стервєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Толстолузька О. Г. д.т.н., с.н.с., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Угрюмов М. Л., д.т.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"

Стрельнікова О.О., д.т.н., проф. Ін-т проблем машинобудування НАН України

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра прикладної інформатики, університет імені Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Professor of Technical Informatics and Computer Systems, Institute of Informatics, Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of computer science, Dep. of C. S., University of Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Мова публікації: українська, англійська, російська.

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

The articles are present research in the field of mathematical modeling and computing methods, information technologies, information security. New mathematical methods of research and management of physical, technical and information processes, research on programming and computer modeling in science-intensive technologies are covered.

For teachers, researchers, graduate students working in relevant or related fields.

By the order of the Ministry of Education and Science of Ukraine from 17.03.2020 № 409 scientific professional periodical Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University series "Mathematical modeling. Information Technologies. Automated control systems" is included in Category "B" of the List of scientific professional publications of Ukraine in the following specialties: 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science and Information Technology; 123 – Computer engineering; 125 – Cybersecurity.

Approved for publication by the decision of the Academic Council of V.N. Karazin Kharkiv National University (Minutes № 10 of 23.06.2020).

Editorial Board:

Azarenkov M.O. (Chief Editor), Acad. Of the NAS of Ukraine, Dr. Sc., Prof., HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Zholtkevich G.M. (Deputy Editor), Dr. Sc, Prof. MCS V.N. Karazin Kharkiv National University

Lazurik V.T. (Deputy Editor), Dr. Sc, Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Sporov O.E., (Executive Secretary), Ph.D. Assoc. Prof, CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Zamula A.A., Ph.D. Assoc. Prof, CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Zolotarev V.A., Dr. Sc, Prof. B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine

Kuklin V.M., Dr. Sc, Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Matsevity Yu.M., Acad. Of the NAS of Ukraine, Dr. Sc., Prof., DPE V.N. Karazin Kharkiv National University

Rossomakhin S.G., Dr. Sc, Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Rutkas A.G., Dr. Sc, Prof. MCS V.N. Karazin Kharkiv National University

Styervoyedov N.G., Ph.D. Assoc. Prof, CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Tolstoluzka O.G., Dr. Sc, Assoc. Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Ugryumov M.L., Dr. Sc, Prof. HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Tseluyko A.F., Ph.D. Prof, HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Sheyko T.I., Dr. Sc, Prof. DPE V.N. Karazin Kharkiv National University

Shmatkov S.I., Dr. Sc, Prof. CSD HTI V.N. Karazin Kharkiv National University

Shcherbina V.A., Dr. Sc, Prof. MCS V.N. Karazin Kharkiv National University

Raskin L.G., Dr. Sc, Prof. National Technical University "Kharkiv Polytechnic institute"

Strelnikova E.A., Dr. Sc, Prof., NASU A. Pidgorny Institute of Engineering Problems

Sokolov O.Yu., Dr. Sc, Prof. Nicolaus Copernicus University, Torun, Poland

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Professor of Technical Informatics and Computer Systems, Institute of Informatics, Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of computer science, Dep. of C. S., University of Nice-Sophia Antipolis, France

Editorial Address: 61022, Kharkiv, Svobodi sq., 6, V.N. Karazin Kharkiv National University, r. 534.

Phone. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Language of publication: Ukrainian, English, Russian.

The articles pass internal and external review.

Certificate of state registration: KV № 21578-11478P dated 18.08.2015

ЗМІСТ

▪ В.В. Гасвий, Л.С. Глоба	7
Аналіз архітектур для побудови обчислювальних робочих процесів у розподіленому середовищі	
▪ Н.М. Кізілова, О.В. Світличний, В.В. Чуйко	17
Дослідження зв'язку фрактальних та гідравлічних властивостей пористих структур верхніх дихальних шляхів деяких арктичних тварин	
▪ О.Б. Кобильська, В.П. Ляшенко	25
Метод розв'язання крайових задач в багатошарових областях	
▪ В.М. Колодяжний, В.С. Селищев, О.Ю. Лісіна	37
Особливості побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій $P_{l\sigma r, a}(x_1, x_2)$	
▪ Д.В. Лістрова, Т.В. Медінцева, Г.А. Шелудько	56
Гібридний адаптивний метод пошуку коренів негладкої функції в задачі визначення власних частот коливань рідини в резервуарах	
▪ М.Г. Моргун	64
Моделювання динаміки громадської думки у сучасному суспільстві	
▪ О.Ю. Мороз, О.Г Толстолузька, Р.В. Савченко	76
Аналіз існуючих технологій верифікації паралельних програм	
▪ М.Г. Стервоєдов, В.Л. Терьохін, О.В. Рідозуб, С.П. Фомін	82
Розробка основних підходів до створення апаратно-програмних засобів інформаційних систем радіаційного моніторингу	

CONTENTS

▪ V. Gaievyi, L. Globa	7
The architectures analyzing for computational workflows designing in a distributed environment	
▪ N. Kizilova, O. Svietlichny, V. Chujko	17
Investigation of the relationship between fractal and hydraulic properties of porous structures of the upper respiratory tract of some Arctic animals	
▪ E. Kobilskaya, V. Lyashenko	25
A method for solving a boundary value problem in a multilayered area	
▪ V. Kolodyazhny, V. Selischev, O. Lisina	37
Some Features of the construction of a family of atomic radial basis functions $P_{\log r, a}(x_1, x_2)$	
▪ D.V. Listrtova, T.V. Medintseva, G.A. Sheludko	56
Hybrid adaptive method for finding the roots of a non-smooth function in the problem of determining the natural frequencies of fluid vibrations in reservoirs	
▪ M. Morhun	64
Model of public opinion dynamics in modern society	
▪ O.Yu. Moroz, O.G. Tolstoluzka, R.V. Savchenko	76
Analysis of existing verification technologies for parallel programs	
▪ M. Stervoyedov, V. Terokhin, O. Ridozub, S. Fomin	82
Development of basic approaches to creating hardware and software for radiation monitoring information systems	

СОДЕРЖАНИЕ

- **В.В. Гаевой, Л.С. Глоба** 7
Анализ архитектур для построения вычислительных рабочих процессов в распределённой среде
- **Н.Н. Кизилова, А.В. Светличный, В.В. Чуйко** 17
Исследование связи фрактальных и гидравлических свойств пористых структур верхних дыхательных путей некоторых арктических животных
- **Е.Б. Кобыльская, В.П. Ляшенко** 25
Метод решения краевых задач в многослойных областях
- **В.М. Колодяжный, В.С. Селищев, О.Ю. Лисина** 37
Особенности построения семейства атомарных радиальных базисных функций $Plor_{r,a}(x_1, x_2)$
- **Д.В. Листрова, Т.В. Мединцева, Г.А. Шелудько** 56
Гибридный адаптивный метод поиска корней негладкой функции в задаче определения собственных частот колебаний жидкости в резервуарах
- **Н.Г. Моргун** 64
Моделирование динамики общественного мнения в современном обществе
- **О.Ю. Мороз, Е.Г. Толстолужская, Р.В. Савченко** 76
Анализ существующих технологий верификации параллельных программ
- **Н.Г. Стервеедов, В.Л. Терехин, О.В. Ридозуб, С.П. Фомин** 82
Разработка основных подходов к созданию аппаратно-программных средств информационных систем радиационного мониторинга

УДК 004.04

Анализ архитектур для построения вычислительных рабочих процессов в распределённой среде

В.В. Гаевой, Л.С. Глоба

- Гаевой
Вадим Владимирович** аспирант,
Национальный технический университет Украины "Киевский
политехнический институт имени Игоря Сикорского",
проспект Победы 37, Киев-56, Украина, 03056
e-mail: vadymg@outlook.com
<https://orcid.org/0000-0001-7855-3957>
- Глоба
Лариса Сергеевна** д.т.н., профессор; заведующий кафедрой информационно-
телекоммуникационных систем
Национальный технический университет Украины "Киевский
политехнический институт имени Игоря Сикорского",
проспект Победы 37, Киев-56, Украина, 03056
e-mail: lgloba@its.kpi.ua
<https://orcid.org/0000-0003-3231-3012>

В статье представлена модель вычислительных рабочих процессов, которая основывается на их понимании конечным пользователем, приведён обзор различных вычислительных архитектур, таких как вычислительный кластер, Grid, Cloud Computing и SOA, для их построения в распределённой среде. Проведён сравнительный анализ возможностей архитектур для реализации вычислительных рабочих процессов, в ходе которого определено, что рабочие процессы целесообразно реализовывать на основе SOA, поскольку данный подход отвечает всем требованиям к базовой инфраструктуре и обеспечивает высокую степень распределённости вычислительных узлов, создает способность их миграции и интеграции с другими системами в гетерогенной среде. Использование архитектуры Cloud Computing может быть целесообразным при построении базовой информационной инфраструктуры для организации распределённых высокопроизводительных вычислений, так как она поддерживает общее и скоординированное использование динамически выделяемых распределённых ресурсов, позволяет в географически рассредоточенных центрах обработки данных создавать и виртуализировать высокопроизводительные вычислительные системы, которые способны самостоятельно поддерживать необходимый уровень обслуживания, а также при необходимости использовать модель Software as a Service (SaaS) для пользователей. Преимущества архитектуры облачных вычислений не позволяют конечному пользователю реализовывать проектирование бизнес-процессов автоматически, проектируя их «на лету». Очевидна необходимость построения семантически-ориентированных вычислительных рабочих процессов на базе сервис-ориентированной архитектуры с применением подхода микросервисов, онтологий и структур метаданных, что позволит формировать рабочие процессы «на лету» в соответствии с требованиями текущего запроса.

Ключевые слова: вычислительные рабочие процессы, вычислительный кластер, GRID, Cloud Computing, SOA, веб-сервисы, сервис-ориентированная архитектура, микросервисы, онтология.

Аналіз архітектур для побудови обчислювальних робочих процесів у розподіленому середовищі

В.В. Гаєвий, Л.С. Глоба

- Гаєвий
Вадим Володимирович** аспірант
Національний технічний університет України "Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського",
проспект Перемоги 37, м.Київ-56, Україна, 03056
- Глоба
Лариса Сергеевна** д.т.н., професор; заведуючий кафедрою інформаційно-
телекомунікаційних систем
Національний технічний університет України "Київський
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",
проспект Перемоги 37, Київ-56, Україна, 03056

У статті представлено модель обчислювальних робочих процесів, яка базується на сприйнятті їх кінцевим користувачем, і приведений огляд різних обчислювальних архітектур, таких як обчислювальний кластер, Grid, Cloud Computing і SOA, для їх побудови в розподіленому середовищі. Проведено порівняльний аналіз можливостей архітектур для реалізації обчислювальних робочих процесів, в ході якого визначено, що робочі процеси доцільно реалізовувати на

основі SOA, оскільки такий підхід відповідає всім вимогам до базової інфраструктури і забезпечує високу ступінь розподіленості обчислювальних вузлів, створює здатність їх міграції та інтеграції з іншими системами в гетерогенному середовищі. Використання архітектури Cloud Computing може бути доцільним при побудові базової інформаційної інфраструктури для організації розподілених високопродуктивних обчислень, так як вона підтримує загальне і скоординоване використання розподілених ресурсів, які виділяються динамічно, дозволяє в географічно розосереджених центрах обробки даних створювати і віртуалізувати високопродуктивні обчислювальні системи, здатні самостійно підтримувати необхідний рівень обслуговування, а також при необхідності використовувати модель Software as a Service (SaaS) для користувачів. Переваги архітектури хмарних обчислень не дозволяють кінцевому користувачу реалізувати проектування бізнес-процесів автоматично, проектуючи їх «на льоту». Найважливішою є необхідність побудови семантично-орієнтованих обчислювальних робочих процесів на базі сервіс-орієнтованої архітектури із застосуванням підходу мікросервісів, онтологій і структур метаданих, що дозволить формувати робочі процеси «на льоту» відповідно до вимог поточного запиту.

Ключові слова: обчислювальні робочі процеси, обчислювальний кластер, GRID, Cloud Computing, SOA, веб-сервіси, сервіс-орієнтована архітектура, мікросервіси, онтологія.

The architectures analyzing for computational workflows designing in a distributed environment

V. Gaievyi, L. Globa

Gaievyi Vadym

PhD student

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37 Peremohy Ave., Kyiv-56, Ukraine, 03056

Globa Larisa

Doctor of Technical Sciences, Professor; Head of the Department of Information and Telecommunication Systems

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37 Peremohy Ave., Kyiv-56, Ukraine, 03056

The paper presents a model of computational workflows based on end-user understanding and provides an overview of various computational architectures, such as computing cluster, Grid, Cloud Computing, and SOA, for building workflows in a distributed environment. A comparative analysis of the capabilities of the architectures for the implementation of computational workflows has shown that the workflows should be implemented on the basis of SOA, since it meets all the requirements for the basic infrastructure and provides a high degree of compute node distribution, as well as their migration and integration with other systems in a heterogeneous environment. Using Cloud Computing architecture may be efficient for building a basic information infrastructure for the organization of distributed high-performance computing, since it supports the general and coordinated dynamic allocation of distributed resources, allows geographically dispersed data centers to create and virtualize high-performance computing systems that are able to independently support the necessary QoS level and to use the Software as a Service (SaaS) model for end-users, if necessary. The advantages of the Cloud Computing architecture do not allow the end user to design the business processes automatically, performing this process "on the fly". At the same time, there is the obvious need to create semantically oriented computing workflows based on a service-oriented architecture by using a microservices approach, ontologies and metadata structures, which will allow creating workflows "on the fly" in accordance with the current request requirements.

Key words: computing workflows, computing cluster, GRID, Cloud Computing, SOA, web services, service-oriented architecture, microservices, ontologies.

1. Введение

На сегодняшний день многие организации и компании сталкиваются с проблемой больших данных, различных по своей природе и требующих различных математических методов их обработки. На основании этих данных требуется определить параметры, по которым нужно выполнять аналитические расчёты и выдавать обобщённую информацию, выполнять аналитическую обработку этих данных и решать другие вычислительные задачи.

Такие задачи представляют в виде рабочего процесса, т.е. последовательности вычислительных шагов, которые составляют вычислительные этапы и стадии обработки информации. Вместе с тем, общая эффективность выполнения распределённых вычислений для решения аналитических задач может быть низкой, поскольку они характеризуются большим объёмом вычислений и, соответственно, повышают требования к вычислительным ресурсам, причем объём необходимых вычислительных ресурсов зависит от конкретных текущих задач, которые решаются.

В связи с этим, задача определения требований к базовой инфраструктуре построения вычислительных рабочих процессов, а также проведение сравнительного анализа их архитектур является актуальной.

В данной работе приведен сравнительный анализ высокопроизводительных вычислительных архитектур, таких как вычислительный кластер, Grid, Cloud Computing, и веб-службы для построения инфраструктуры выполнения вычислительных рабочих процессов.

Эта статья структурирована следующим образом: в разделе 1 описывается общая характеристика вычислительных рабочих процессов, их структура и математическая модель. В разделе 2 приводится обзор вычислительных архитектур, таких как вычислительный кластер, Grid, Cloud Computing и Сервис-ориентированная архитектура. В разделе 3 проводится сравнительный анализ возможностей вычислительных архитектур для реализации вычислительных рабочих процессов по ряду критериев и требований. В разделе 4 приводятся результаты анализа и даются рекомендации по построению вычислительных рабочих процессов на различных архитектурах и платформах. В разделе 5 даются общие выводы, описываются нерешённые проблемы и планы дальнейшего исследования.

2. Общая характеристика вычислительных рабочих процессов

Вычислительным рабочим процессом (workflow) будем называть некое описание последовательности вычислительных действий (этапов обработки данных), представленных в виде отдельных структурных программных компонент, отвечающих за конкретную функциональность и работающих автономно.

Модель вычислительных рабочих процессов служит для представления цепочки реальных вычислительных задач, оценки и анализа их эффективности, а также описания часто повторяющейся последовательности операций обработки данных.

Поскольку данные вычислительные компоненты могут быть распределены по сети, то многие алгоритмы, используемые каждым из компонентов, максимально ориентированы на распараллеливание данных в процессе их анализа, а также на гибкое управление параллельными процессами с целью достижения высокой эффективности применения аппаратных ресурсов. Вопросам автоматизации проектирования бизнес-процессов в распределенной среде посвящены работы [1,2,3], особенности архитектуры HPC Cluster представлены в работе [4], а в работе [5] анализируются особенности архитектуры распределенной интегрированной среды вычислительной Grid – среды, в [10] – архитектурные решения, используемые в системах Cloud Computing. Подходы к построению бизнес-процессов с использованием Web-service технологий рассмотрены в [7,8,9]. Общие подходы и рекомендации к построению оптимизированной информационной инфраструктуры рассмотрены в работе [10]. Вместе с тем, построение оптимальной инфраструктуры для хостинга бизнес-процессов остается нетривиальной задачей, требующей учета особенностей инфраструктуры распределенной среды, подходов к построению бизнес-процессов и организации выполнения самого вычислительного процесса в такой среде.

Общая схема вычислительного рабочего процесса может быть представлена на рисунке ниже (см. *Рисунок 1*).

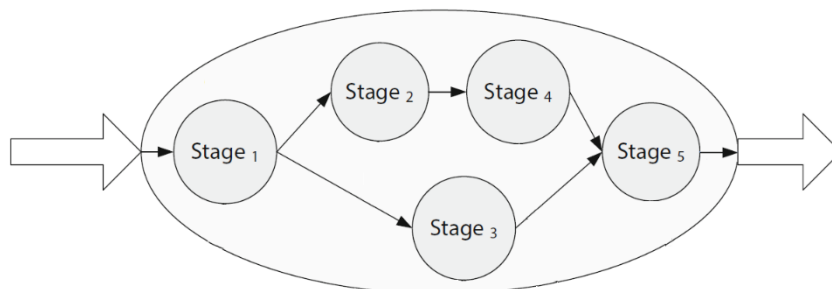


Рисунок 1 Общая схема рабочего процесса

Вычислительный рабочий процесс состоит из набора этапов (Stages), которые могут выполняться последовательно и параллельно. Каждый этап состоит из набора задач (tasks) которые, в свою очередь, тоже могут выполняться последовательно и параллельно. Кроме того, рабочий процесс может содержать требования к вычислительной среде. Математически это можно представить следующим образом:

$$W = \{S_i\} \rightarrow \left\{ \{T_{ij}\}, \{M_{req_{ij}}, P_{req_{ij}}, t_{max_{ij}}\} \right\},$$

где W – вычислительный рабочий процесс;

S_i – i -й этап рабочего процесса;
 T_{ij} – j -я задача i -го этапа;
 M_{reqij} – требования к оперативной памяти для выполнения j -й задачи i -го этапа;
 P_{reqij} – требования к процессору для выполнения j -й задачи i -го этапа;
 t_{maxij} – требования по максимально допустимому времени выполнения j -й задачи i -го этапа.

Вычисления проводятся в вычислительной системе, который состоит из набора узлов:

$$DC = \{N_k\},$$

где DC – вычислительный центр;

N_k – k -й узел вычислительного центра.

В распределённой слабосвязанной гетерогенной среде узлы могут быть территориально распределены и не зависеть друг от друга, но должны быть объединены в одну вычислительную сеть.

Каждый узел обладает вычислительными ресурсами:

$$N_k = \{M_k, P_k\},$$

где M_k – объем доступных ресурсов оперативной памяти у k -го узла;

P_k – объем доступных процессорных ресурсов у k -го узла.

Тогда при выполнении вычислительных задач на k -м узле необходимо будет выделить следующий объем ресурсов i -й задаче:

$$\begin{cases} M_{k_i} = f_M(T_i), \bigcup_{i=1}^n M_{k_i} \subset M_k, M_{k_p} \cap M_{k_q} = \emptyset \forall k, p: k \neq p \\ P_{k_i} = f_P(T_i), \bigcup_{i=1}^n P_{k_i} \subset P_k, P_{k_p} \cap P_{k_q} = \emptyset \forall k, p: k \neq p \end{cases}$$

Выделим основные цели при проектировании инфраструктуры вычислительных рабочих процессов:

- сокращение времени вычислений и анализа;
- сокращение стоимости анализа за счет более эффективной утилизации имеющихся вычислительных ресурсов;
- повышение доступности вычислительных сервисов и обеспечение их целостности и конфиденциальности.

3. Обзор вычислительных архитектур

На сегодняшний день существует несколько высокопроизводительных вычислительных архитектур, каждую из которых можно использовать для построения инфраструктуры вычислительных рабочих процессов:

- Вычислительный кластер;
- Grid;
- Cloud Computing;
- Сервис-ориентированная архитектура.

Вычислительный кластер. На физическом уровне архитектура кластера представляет собой два или более серверов (узлов), соединённых высокоскоростным каналом связи, они имеют одинаковую аппаратную или виртуализированную архитектуру, одну и ту же операционную систему и представляются в качестве единого информационно-вычислительного ресурса. Вычислительные кластеры позволяют уменьшить время расчетов, по сравнению с одиночным компьютером, разбивая задачу на ветви, выполняющиеся параллельно, и обменивающиеся данными по сети. Для вычислительных кластеров существенными показателями являются высокая производительность процессора в операциях над числами с плавающей точкой (flops) и низкая латентность объединяющей сети, менее существенными – скорость операций ввода-вывода.

Grid. Вычислительная Grid – это архитектура распределенных вычислений, в которой вычислительные ресурсы представлены в виде распределенных кластеров, соединенных с помощью сети. Технологии Grid поддерживают совместное и скоординированное использование разнородных ресурсов в динамических распределенных виртуальных секциях. Это даёт возможность создавать виртуальные вычислительные системы с географически

рассредоточенными компонентами, способных совместно поддерживать необходимый уровень обслуживания. Grid с точки зрения сетевой организации представляет собой согласованную, открытую и стандартизированную среду, обеспечивающую гибкое, безопасное, скоординированное разделение вычислительных ресурсов и ресурсов хранения информации, которые являются частью этой среды, в рамках одной виртуальной организации.

Cloud Computing. Cloud Computing – это архитектура распределенных информационных систем с доступом по требованию к распределенным вычислительным ресурсным пулам (например, сетей, серверов, систем хранения данных, сервисов), ресурсы которых могут быть быстро предоставлены и задействованы с минимальными усилиями по управлению и взаимодействию с поставщиком услуг. Архитектура Cloud Computing позволяет предоставить гибкую и масштабируемую ИТ-инфраструктуру, или программную платформу, в которой вычислительные ресурсы выделяются динамично, по требованию для решения вычислительных задач.

Сервис-ориентированная архитектура (SOA). Сервис-ориентированная архитектура – это архитектура распределенных информационных систем, которая обладает модульным подходом к проектированию программных решений. В основе архитектуры лежит принцип, основанный на использовании распределённых, слабо связанных заменяемых компонентов, оснащённых стандартизированными интерфейсами для взаимодействия по стандартизированным протоколам.

4. Сравнительный анализ возможностей вычислительных архитектур для реализации вычислительных рабочих процессов

Спроектировать инфраструктуру вычислительных рабочих процессов можно на основе каждой из этих вычислительных архитектур.

Рассмотрим краткое сравнение основных их свойств (табл. 1):

Таблица 1 Сравнение свойств вычислительных архитектур

Свойство	Вычислительный кластер	Grid	Cloud Computing	SOA
Распределение вычислительных ресурсов	Распределение строго фиксированное и ограничено рамками самого кластера	Совместное использование ресурсов (виртуальные организации). Ресурсы могут быть распределены только в рамках инфраструктуры Grid	Ресурсы выделяются по требованию, в соответствии с нагрузкой, но могут быть распределены только в рамках облачной инфраструктуры вендора	Ресурсы могут выделяться по требованию, в соответствии с нагрузкой, и их распределение не ограничено конкретно выделенной платформой или инфраструктурой.
Степень возможности миграции вычислительных ресурсов	Отсутствует	Отсутствует	Ограниченна рамками инфраструктуры Cloud-провайдера	Высокая
Неоднородность ресурсов	Объединение однородных ресурсов	Объединение гетерогенных ресурсов	Вычислительные ресурсы могут быть гетерогенны	Вычислительные ресурсы могут быть гетерогенны
Виртуализация	Виртуализация может использоваться при необходимости	Ресурсы не виртуализируются	Полная виртуализация аппаратных и программных ресурсов	Виртуализация используется в большинстве случаев

Свойство	Вычислительный кластер	Grid	Cloud Computing	SOA
Самообслуживание	Отсутствует	На уровне само-организации Grid-узлов	Автоматизированное управление динамической инфраструктурой, может возможность самовосстановления после сбоев	Отсутствует
Степень централизованности	Централизованный контроль	Децентрализованный контроль	Централизованный контроль	Централизованный контроль
Степень гибкости интеграции с другими системами в гетерогенной среде	Низкая	Низкая	Средняя	Высокая
Сложность развёртывания/управления инфраструктурой	Простой в развёртывании и управлении	Сложный в развёртывании и управлении	Сложный в развёртывании, простой в управлении	Простой в развёртывании и управлении
Доступ	Через локальную (корпоративную) сеть	Через программное обеспечение промежуточного уровня	Через сеть Интернет	Через корпоративную сеть/сеть Интернет
Гарантии SLA	Отсутствуют	Отсутствуют	Гарантируется SLA	Отсутствуют

Для построения инфраструктуры вычислительных рабочих процессов также необходимо определить группу основных требований к базовой информационной инфраструктуре. Среди них можно выделить следующие:

- Надежность и отказоустойчивость;
- Доступность;
- Масштабируемость;
- Безопасность;
- Совокупная стоимость владения.

Надежность и отказоустойчивость. Одним из основных требований к инфраструктуре вычислительных рабочих процессов является требование обеспечения надежности предоставления услуги. Пользователи должны быть уверены в надежности, предсказуемости и высоком уровне доступности сервиса. Недостаточный уровень показателя отказоустойчивости может привести к отказу в обслуживании в критический момент при расчете, что может быть недопустимо для ряда вычислительных систем.

Доступность. Решение должно быть доступным как для бизнес-аналитиков, так и обслуживающего персонала. Должна быть возможность обеспечить доступность сервисов с мобильных рабочих мест.

Масштабируемость. Масштабируемость - важный аспект распределенных вычислительных систем, поскольку для работы вычислительных рабочих процессов может быть необходима возможность работы под большой нагрузкой. Система называется масштабируемой, если она

имеет возможность наращивания дополнительных ресурсов без архитектурных и структурных изменений ее компонентов.

Безопасность. Должна быть в полной мере обеспечена конфиденциальность и целостность, как самих сервисов, так и данных.

Совокупная стоимость владения. Построение высокопроизводительных вычислительных комплексов стоит дорого, поэтому при развертывании инфраструктуры вычислительных рабочих процессов необходимо учитывать и совокупную стоимость решения.

В табл. 2 приводится сравнительный анализ вычислительных архитектур по критерию соответствия требованиям к инфраструктуре вычислительных рабочих процессов к базовой информационной инфраструктуре.

Таблица 2 Соответствие требованиям к инфраструктуре вычислительных архитектур

Требование	Вычислительный кластер	Grid	Cloud Computing	SOA
Надежность и отказоустойчивость	Обеспечивается базовой инфраструктурой функционирования кластера	Обеспечивается путём введения избыточных Grid узлов	Обеспечивается на уровне архитектуры решения	Обеспечивается базовой инфраструктурой функционирования сервисов
Доступность	Построить высокодоступную систему дорого, при этом получить сверхвысокий показатель SLA практически невозможно	Поскольку топология Grid может постоянно меняться, сложно гарантировать определённый уровень доступности.	Может представлять сверхвысокий показатель SLA, порядка 99,99%	Доступность решения зависит от надежности и отказоустойчивости базовой информационной инфраструктуры в целом
Масштабируемость	Масштабируемость на уровне добавления / удаление узлов кластера	Масштабируемость на уровне добавления / удаление узлов Grid	Динамическое и мгновенное масштабирование ресурсов в соответствии с потребностями	Масштабирование на уровне добавления / удаление узлов фермы
Безопасность	Безопасность решение зависит от безопасности базовой информационной инфраструктуры в целом	Безопасность решение зависит от конфигурации взаимодействия между узлами и выбранной политики контроля доступа	Безопасность системы гарантируется провайдером инфраструктуры Cloud Computing	Безопасность решения зависит от безопасности базовой информационной инфраструктуры в целом
Общая стоимость владения	Включает в себя как начальные инвестиции в базовую информационную инфраструктуру так и затраты на их обслуживание	Включает в себя как начальные инвестиции на построение и развертывание инфраструктуры GRID так и затраты на их обслуживание	Включает в себя только затраты на развертывание вычислительных рабочих процессов	Зависит от среды развёртывания. Может включать в себя как начальные инвестиции в базовую информационную инфраструктуру так и затраты на их обслуживание.

Как видно из табл. 1 и табл. 2, архитектуры вычислительный кластер и Grid при построении инфраструктуры вычислительных рабочих процессов не обеспечивают необходимую гибкость управления системой и масштабирование, а также не обладают необходимой эластичностью при выделении вычислительных ресурсов.

В то же время, использование архитектуры Cloud Computing при построении инфраструктуры вычислительных рабочих процессов имеет следующие преимущества:

- Управление инфраструктурой вычислительных рабочих процессов сводится к управлению непосредственно сервисами, при этом обеспечение работоспособности аппаратной и программной составляющей обслуживающей среды берёт на себя инфраструктура Cloud Computing и вендор.
- Обеспечение динамичного и мгновенного масштабирования ресурсов пропорционально со спросом. Выделение вычислительных ресурсов может быть неограниченным с точки зрения сервиса и эти ресурсы могут быть получены в любом количестве и в любое время.

Однако, архитектура Cloud Computing не обладает рядом преимуществ, которыми обладают решения, построенные на базе архитектуры веб-сервисов, а именно:

- Высокая степень распределённости вычислительных узлов. Вычислительные узлы могут быть распределены по всему миру без привязки к конкретному вендору либо провайдеру предоставления услуг.
- Высокая степень миграции вычислительных узлов. Вычислительные узлы можно легко мигрировать с одной вычислительной инфраструктуры в другую без привязки к аппаратным или платформенным зависимостям.
- Высокая степень интеграции с другими системами в гетерогенной среде. Используя открытые протоколы и стандарты, архитектура веб-сервисов является платформенно-независимой и легко может быть интегрирована с другими системами не зависимо от аппаратно-программных особенностей вендора предоставления услуг.

Вместе с тем, существенные преимущества, которые дает архитектура Cloud Computing связаны и с определенными проблемами, которые требуется решать при автоматизации проектирования бизнес-процессов «на лету» конечным пользователем:

- Отсутствие семантически-ориентированных моделей вычислительных рабочих процессов на базе сервис-ориентированной архитектуры, учитывающих накопленный опыт разработчиков;
- Отсутствие подходов и мета-моделей, микросервисов, позволяющих выполнять их интеграцию «на лету»;
- Отсутствие онтологий и структур метаданных, описывающих все объекты как вычислительной среды, так и компонент, правила их соединения, выполняющие вычисления, хранение и обработку данных.

5. Рекомендации

Сравнительный анализ показал, что использование технологии Cloud Computing может быть целесообразно при построении базовой информационной инфраструктуры для организации распределенных высокопроизводительных вычислений.

Cloud Computing поддерживает общее и скоординированное использование динамически выделяемых распределенных ресурсов. Использование этой архитектуры позволит в географически рассредоточенных центрах обработки данных создавать и виртуализировать высокопроизводительные вычислительные системы, которые способны самостоятельно поддерживать необходимый уровень обслуживания, а также при необходимости использовать модель Software as a Service (SaaS) для пользователей.

В то же время, архитектура Cloud Computing сама по себе не обладает рядом положительных свойств, которые присущи сервис-ориентированной архитектуре и веб-сервисам. Построение инфраструктуры вычислительных рабочих процессов на базе архитектуры веб-сервисов даёт возможность обеспечить высокую степень распределённости вычислительных узлов, а также их миграции при необходимости.

Сервис-ориентированная архитектура обеспечивает высокую степень интеграции с другими системами в гетерогенной среде.

Поэтому для построения решений инфраструктуры вычислительных рабочих процессов может быть рекомендовано использование сервис-ориентированной архитектуры, но при этом размещать вычислительные узлы системы в среде Cloud Computing, что позволит получить все преимущества каждой архитектуры в отдельности.

6. Выводы

На основе проведенного сравнительного анализа вычислительных архитектур можно сделать вывод, что архитектура Cloud Computing полностью соответствует предъявляемым требованиям к базовой инфраструктуре вычислительных рабочих процессов и имеет ряд преимуществ, по сравнению с кластерной архитектурой и архитектурой Grid.

Использование Cloud Computing может быть целесообразным при построении базовой информационной инфраструктуры для организации распределенных высокопроизводительных вычислений, в связи с тем, что Cloud Computing поддерживает общее и скоординированное использование динамически выделяемых распределенных ресурсов. Использование этой архитектуры позволит в географически рассредоточенных центрах обработки данных, создавать и виртуализировать высокопроизводительные вычислительные системы, которые способны самостоятельно поддерживать необходимый уровень обслуживания, а также при необходимости использовать модель Software as a Service (SaaS) для пользователей.

Применение подходов сервис-ориентированной архитектуры для построения вычислительных рабочих процессов даёт возможность обеспечить высокую степень распределённости вычислительных узлов, а также их миграции.

Сервис-ориентированная архитектура обеспечивает высокую степень интеграции с другими системами в гетерогенной среде.

Дальнейшие исследования будут продолжены в направлении изучения возможности построения семантически-ориентированных вычислительных рабочих процессов на базе сервис-ориентированной архитектуры с применением подхода микросервисов, онтологий и структур метаданных, что, позволит формировать рабочие процессы динамически, «на лету».

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Adams, A.H.M. ter Hofstede, N. Russell. Modern Business Process Automation: YAWL and its Support Environment. – Berlin: Springer-Verlag, 2010. – pp 591-596, <https://www.springer.com/gp/book/9783642031205>
2. L. Globa, T. Kot, A. Schill, A. Strunk. Method of IBIS design and workflow realization. – "Polish J. of Environ. Stud." Vol. 18, No. 4a (2009), pp.: 35-38, [http://www.its.kpi.ua/itm/lgloba/Lists/publications/Attachments/15/\(11\)--TUD_IBIS_Shill_Globa_NTUU_KPI_camera_ready.pdf](http://www.its.kpi.ua/itm/lgloba/Lists/publications/Attachments/15/(11)--TUD_IBIS_Shill_Globa_NTUU_KPI_camera_ready.pdf)
3. L. Globa, T. Kot, A. Schill. Applying business process modeling method when Telecommunication services development. – 121-я Международная Крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо'2011). Материалы конф. - Севастополь, Крым, Украина 2011. Т.1, С. 457 - 458. ISBN 978-966-335-352-4, IEEE Catalog Number СП 1788, <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6069007>
4. High Performance Computing and Windows Compute Cluster Server [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://docs.microsoft.com/en-us/previous-versions/technet-magazine/cc194411\(v=msdn.10\)](https://docs.microsoft.com/en-us/previous-versions/technet-magazine/cc194411(v=msdn.10))
5. Величкевич С.В. Распределенная, интегрированная вычислительная среда Grid /С.В. Величкевич, А.И. Петренко // Электроника и связь, №19, 2003 – с.36-42, http://old.elc.kpi.ua/images/pdf/soderjanie/Soderjanie_19.pdf
6. The NIST Definition of Cloud Computing [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://csrc.nist.gov/publications/nistpubs/800-145/SP800-145.pdf>
7. K. Modi, G. Sanjay. Dynamic Web Services Composition using Optimization Approach. – International Journal of Computer Science & Communication, vol 6, number 2, 2015 pp. 285-293, <http://csjournals.com/IJCSC/PDF6-2/46.%20Kirti.pdf>
8. S. Seheon, L. Seok-Won. A goal-driven approach for adaptive service composition using planning. – Mathematical and Computer Modelling 58 (2013) 261–273, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717712002154>

10. Business process execution language for Web services. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://docs.oasis-open.org/wsbpel/2.0/wsbpel-v2.0.pdf>.
11. SAM Infrastructure Optimization Assessment [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.microsoft.com/en-us/sam/infrastructure-optimization.aspx>

REFERENCES

1. M. Adams, A.H.M. ter Hofstede, N. Russell. Modern Business Process Automation: YAWL and its Support Environment. – Berlin: Springer-Verlag, 2010. – pp 591-596, <https://www.springer.com/gp/book/9783642031205>
2. L. Globa, T. Kot, A. Schill, A. Strunk. Method of IBIS design and workflow realization. – "Polish J. of Environ. Stud " Vol. 18, No. 4a (2009), pp.: 35-38, [http://www.its.kpi.ua/itm/lgloba/Lists/publications/Attachments/15/\(11\)--TUD_IBIS_Shill_Globa_NTUU_KPI_camera_ready.pdf](http://www.its.kpi.ua/itm/lgloba/Lists/publications/Attachments/15/(11)--TUD_IBIS_Shill_Globa_NTUU_KPI_camera_ready.pdf)
3. L. Globa, T. Kot, A. Schill. Applying business process modeling method when Telecommunication services development. – 121-я Международная Крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо'2011). Материалы конф. - Севастополь, Крым, Украина 2011. Т.1, С. 457 - 458. ISBN 978-966-335-352-4, IEEE Catalog Number СП 1788, <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6069007>
4. High Performance Computing and Windows Compute Cluster Server [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://docs.microsoft.com/en-us/previous-versions/technet-magazine/cc194411\(v=msdn.10\)](https://docs.microsoft.com/en-us/previous-versions/technet-magazine/cc194411(v=msdn.10))
5. S Velykevych, Distributed Integrated Computing Environment Grid, 2003 – pp.36-42. [in Russian], http://old.elc.kpi.ua/images/pdf/soderjanie/Soderjanie_19.pdf
6. The NIST Definition of Cloud Computing: <http://csrc.nist.gov/publications/nistpubs/800-145/SP800-145.pdf>
7. K. Modi, G. Sanjay. Dynamic Web Services Composition using Optimization Approach. – International Journal of Computer Science & Communication, vol 6, number 2, 2015 pp. 285-293, <http://csjournals.com/IJCSC/PDF6-2/46.%20Kirti.pdf>
8. <http://csjournals.com/IJCSC/PDF6-2/46.%20Kirti.pdf>
9. S. Seheon, L. Seok-Won. A goal-driven approach for adaptive service composition using planning. – Mathematical and Computer Modelling 58 (2013) 261–273, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717712002154>
10. Business process execution language for Web services. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://docs.oasis-open.org/wsbpel/2.0/wsbpel-v2.0.pdf>.
11. SAM Infrastructure Optimization Assessment [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.microsoft.com/en-us/sam/infrastructure-optimization.aspx>

УДК 532.546+514.86

Дослідження зв'язку фрактальних та гідравлічних властивостей пористих структур верхніх дихальних шляхів деяких арктичних тварин

Н. М. Кізілова, О. В. Світличний, В. В. Чуйко

**Кізілова Наталія
Миколаївна**

*д.ф.-м.н., професор; професор кафедри прикладної математики
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан
Свободи 4, Харків. Україна, 61022
e-mail: n.kizilova@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9981-7616>*

**Світличний
Олександр
Володимирович**

*студент
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан
Свободи 4, Харків. Україна, 61022
e-mail: wamkapwnz@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9224-6371>*

**Чуйко Владислав
Валерійович**

*студент
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан
Свободи 4, Харків. Україна, 61022
e-mail: vladchuiko@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-1173-3125>*

Вивчається зв'язок між гідродинамічними і фрактальними параметрами пористих структур верхніх дихальних шляхів арктичних тварин. Фрактальна розмірність D поперечних перерізів комп'ютерних томограм шляхів була обчислена методом counting box. Обчислені також пористість зразків, звивистість пор та еквівалентний гідравлічний діаметр D_h каналу. В якості моделей пористих структур використані фрактали Серпінського різних типів, для яких теж обчислені вищеназвані параметри, а також гідравлічні опори для стаціонарної течії. Виявлений ряд статистичних залежностей між розрахованими параметрами, але показана відсутність їх кореляцій з D . Аналіз закономірностей, що були обчислені для фрактальних пористих структур, показав, що однакові значення D можуть мати структури з різними пористостями та гідравлічним опором, і тому вибір адекватної моделі на основі тільки D вносить значну погрішність в результати розрахунків нагрівання повітря при проходженні кризь верхні дихальні шляхи. Статистичні залежності, властиві до досліджених природних зразків, можуть бути отримані тільки на основі мультифрактальних моделей, коли число і форма каналів, а також масштаб їх зменшення змінюються відповідним шляхом на кожній генерації.

Ключові слова: математичне моделювання, пористі середовища, тепломасообмін, фрактальна розмірність.

Investigation of the relationship between fractal and hydraulic properties of porous structures of the upper respiratory tract of some Arctic animals

N. Kizilova, O. Svetlichny, V. Chujko

Kizilova Natalya

*DSc, professor
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 av.Svobody, Kharkiv 61022 Ukraine*

Svietlichny Oleksandr

*Student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 av.Svobody, Kharkiv 61022 Ukraine*

Chujko Vladyslav

*Student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 av.Svobody, Kharkiv 61022 Ukraine*

The respiratory ducts of animals and humans are presented by curved tubes with a complex geometry. The air moving through these structures is governed by a pressure drop between the inlet and outlet of the duct. The complex structures formed by thin walls and warmed by a constant blood flow at the body temperatures $T=36-39$ C provide the fast and efficient warming of the

inhaled air to the body temperature and its moistening up to 100% humidity. The Arctic animals possess the most efficient nasal ducts allowing the heating of the inhaled air from $T=-30-60\text{C}$ to $T=38-39\text{C}$ in the duct with the length $L=8-15$ only. The detailed geometry of the Arctic animals' nasal ducts have been obtained from the computed tomograms (CT) scans found in the open databases and previous publications. The highly porous structures observed on some slices are formed by fractal-like divisions of the walls protruded into the nasal lumen. Since the fractal structures are characterized by their fractal dimensions D , the relationships between the hydrodynamic properties and fractal dimensions of the porous structures of the Arctic animals' upper respiratory tract have been studied. The dimensions D of the cross sections of the tract have been calculated by the counting box method. The porosities of the samples, the tortuosity of the pores, and the equivalent hydraulic diameter D_h of the channel have been calculated. The Sierpinski fractals of various types have been used as models of porous structures, for which the parameters mentioned above, as well as hydraulic resistance to a stationary flow, have also been computed. A number of statistical dependencies between the calculated parameters have been revealed, but there is no correlation with D . It has been shown that the structures with different porosities and hydraulic resistance D_h can have the same values of D . Therefore, the choice of an adequate model based solely on D introduces significant errors in the calculations of air heating along the upper respiratory tract. The statistical dependences inherent in the natural samples studied can be obtained only on the basis of multifractal models in which the number and shape of the channels, as well as the scale of their decrease, change in a certain way at each generation.

Key words: *mathematical modeling, porous media, heat and mass exchange, fractal dimension.*

Исследование связи фрактальных и гидравлических свойств пористых структур верхних дыхательных путей некоторых арктических ЖИВОТНЫХ

Н.Н. Кизилова, А.В. Светличный, В.В. Чуйко

Кизилова Наталья Николаевна

*д.ф.-м.н., профессор,
Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, пл.Свободы,
4, Харьков, 61022 Украина*

Светличный Александр Владимирович

*студент
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы
4, Харьков 61022, Украина*

Чуйко Владислав Валериевич

*студент
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы
4, Харьков 61022, Украина*

Изучается связь между гидродинамическими параметрами пористых структур верхних дыхательных путей арктических животных. Фрактальная размерность D поперечных сечений компьютерных томограмм путей была вычислена методом counting box. Вычислены также пористости образцов, извилистость пор и эквивалентный гидравлический диаметр D_h канала. В качестве моделей пористых структур использованы фракталы Серпинского разных видов, для которых тоже рассчитаны вышеуказанные параметры, а также гидравлические сопротивления к стационарному течению. Выявлен ряд статистических зависимостей между рассчитанными параметрами, но показано отсутствие их корреляций с D . Анализ закономерностей, которые были вычислены для фрактальных пористых структур, показал, что одинаковые значения D могут иметь структуры с различными пористостями и гидравлическим сопротивлением, и поэтому выбор адекватной модели на основе только D вносит значительную погрешность в результаты расчетов нагрева воздуха при прохождении через верхние дыхательные пути. Статистические зависимости, присущие исследованным природным образцам, могут быть получены только на основе мультифрактальных моделей, в которых число и форма каналов, а также масштаб их уменьшения изменяются определенным образом на каждой генерации.

Ключевые слова: *математическое моделирование, пористые среды, тепломассоперенос, фрактальная размерность.*

1 Вступ

Пористі середовища широко поширені в природі і техніці, а дослідження деформацій пористих матеріалів та течій крізь них різних рідин та газів має велике прикладне значення [1]. На рівні великих масштабів це фільтрація ґрунтових вод, нафти або газу в ґрунтах з різними фізичними властивостями. В техніці фільтрація використовується для постачання, розділення, очищення сумішей. В біологічних тканинах рідини рухаються крізь пористі структури кісток, печінки, легенів та інших тканин. В мікро/нанопристроях використовуються мікро/нанофільтри для зміни фізичних властивостей рідин. У всіх випадках потрібно отримати робочі формули для ефективності відповідних фізичних процесів шляхом розв'язання задач прикладної математики,

для чого треба формалізувати опис властивостей пористих матеріалів, таких як пористість $\rho = V_p / V$ та гідравлічна провідність $K = \mu L Q / (\Delta P \cdot S)$, де V_p і V – об’єми пор та матеріалу, μ – в’язкість рідини, L і S – довжина та поперечний переріз зразка матеріалу, Q і ΔP – об’ємна витрата та перепад гідростатичних тисків крізь зразок. Обчислення значень ρ і K потребують складних експериментальних вимірювань, тому багато зусиль прикладається для математичного моделювання пористих матеріалів та обчислення їх властивостей на простіших формулах [1]. Наприклад, для ізометричних пор обчислення ρ замінюються обчисленнями просвітності $m = \Sigma_p / \Sigma$, де Σ_p – загальна площа пор на поперечному перерізі Σ зразка. Таким чином, обчислення ρ можуть проводитись на перерізах ґрунтів та матеріалів або комп’ютерних томограмах (КТ) біологічних тканин шляхом комп’ютерного аналізу зображень. Для обчислень K використовуються різні спрощені моделі пористих середовищ як сукупності трубок (модель Козені), кульок з заданими діаметрами d_0 (формула Кармана-Козені $K = \rho^3 d_0^2 / (\kappa(1 - \rho^2))$), де κ – коефіцієнт звивистості пор, який залежить від типу розташування кульок). Найбільш плідні підходи пов’язані з моделюванням пористих середовищ як фрактальних структур.

Фрактальні або самоподібні структури, розмірність Хаусдорфа для яких відрізняється від їх геометричної розмірності, утворюються шляхом виключення з перетину або з об’єму матеріалу деяких складових частин, які поступово самоподібно зменшуються з масштабом зменшення $r > 1$. Типовими прикладами фрактальних пористих структур є квадратний та трикутний килими Серпінського (Рис.1а,б), які можуть бути узагальнені на прямокутні (Рис.1в) або шестикутні перерізи; кругові фрактали (Рис.1г) [2] ті їх узагальнення на довільні n-кутні області, наприклад, 5-кутники Дюрера; губка Менгера (Рис.1д), піраміда Серпінського (Рис.1е) або їх узагальнення на вищевказані випадки. Фрактальні моделі мають пори різних розмірів від макро- до нанорозмірних, що відповідає реальним природним матеріалам, а кругові фрактали (рис.1г) складаються з пучків кругових трубок з постійними діаметрами, хоча існують і більш компактні упакування трубок з різними діаметрами [2]. Фрактальний підхід дозволяє отримати формули для проникливості пористого середовища [3], у тому числі для зв’язаних пор [4] та подвійно-пористих або тріщинуватих середовищ [5].

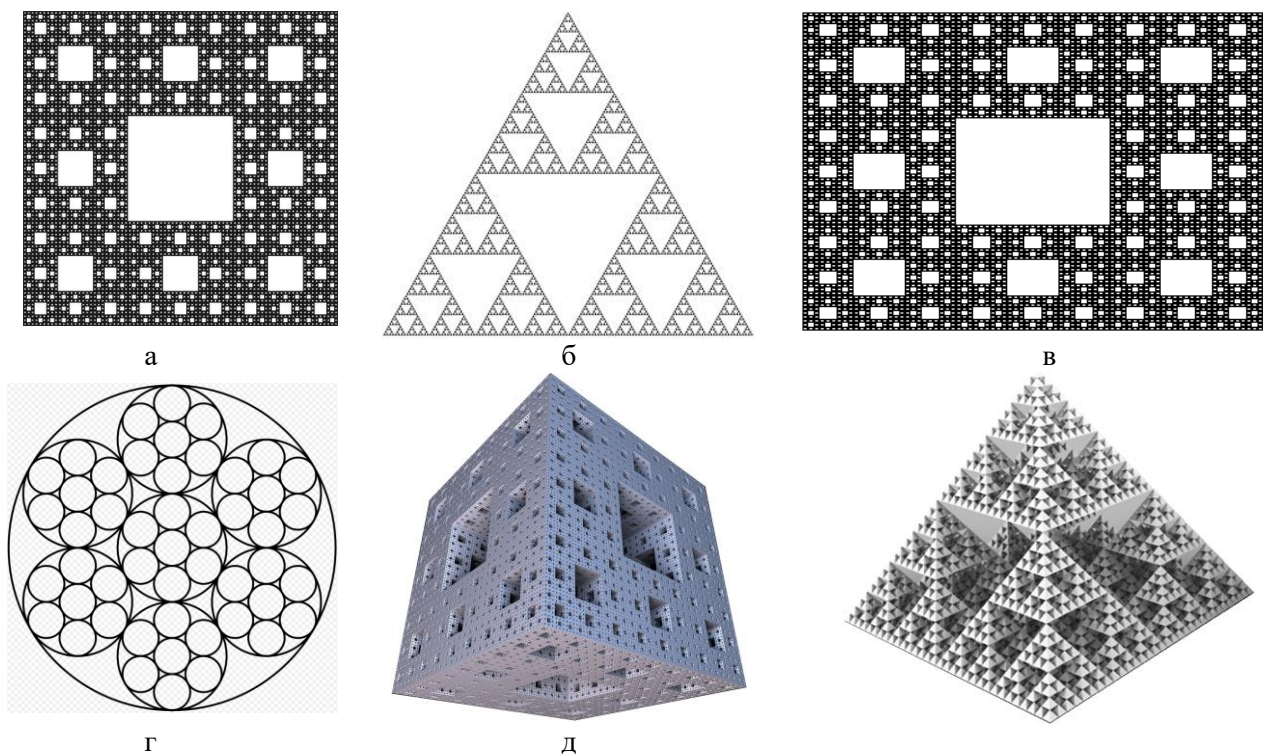


Рис.1. Квадратний (а), трикутний (б) та прямокутний (в) килими Серпінського, круговий фрактал (г), губка Менгера (д) та піраміда Серпінського (е).

Фрактальна розмірність D пористих матеріалів або їх моделей може бути обчислена як

$$D = \frac{\log(N)}{\log(r)}, \quad (1)$$

де N – мінімальне число елементів з масштабом зменшення r , яке потрібне для повного покриття відповідної фрактальної структури на площині або у просторі. Фрактальні розмірності структур, наведених на Рис.1а-е, складають $D=1.893$; 1.585 ; 1.893 ; 1.77 ; 2.276 ; 2 відповідно [1,2]. Таким чином, килими Серпінського як геометрично двовимірні структури, мають фрактальну розмірність $D < 2$, тривимірні губка Менгера та піраміда Серпінського мають $D < 3$. Ці геометричні моделі широко використовуються для моделювання шорстких поверхонь та пористих середовищ з різними фізичними властивостями, антен, сонячних панелей та інших технічних систем.

Для природних ґрунтів вимірювання дають значення $D=1.112-1.526$ [6]. Для пористих металів $D=1.25-1.43$, а залежність між фрактальною розмірністю та пористістю описувалася емпіричною формулою [7]

$$D = k_2 + \frac{k_2 - k_1}{1 + \exp((g - k_0) / k_3)}, \quad (2)$$

де $k_{0,1,2,3}$ - константи, різні для кожного з матеріалів.

Залежність (2) означає, що структури з різними фрактальними розмірностями можуть мати різну пористість та гідравлічну проникливість, і тому моделювання пористої структури фракталом з тією ж розмірністю може бути невірним з точки зору гідромеханіки. В даній роботі вивчається зв'язок фрактальних та гідравлічних властивостей деяких пористих структур, які зустрічаються в живій природі та відповідних фрактальних моделей.

2. Матеріали і методи

Зображення поперечних перетинів пористих структур верхніх дихальних шляхів арктичних тварин були отримані з опублікованих даних КТ-зображень [8]. Ці структури являють значний інтерес завдяки своїй здатності ефективно нагрівати та зволожувати повітря, яке вдихається, до температури тіла та 100% вологості [9]. Для обчислень були обрані КТ-зображення перерізів назальних пазух морської видри, яка має надзвичайно високе відношення поверхня/об'єм або $\zeta = \Sigma_p / A$ де A - загальний просвіт дихального шляху на зображенні (області білого кольору на рис.2).



Рис.2. КТ знімки верхніх дихальних шляхів арктичної видри.¹

Наведені на Рис.2а-и слайси мають продовжні координати $x=0.52$; 0.64 ; 0.74 ; 0.78 ; 0.81 ; 0.85 ; 0.92 ; 0.96 відповідно. Морські видри адаптовані до температури води -4°C та температури повітря до -70°C , тому що повітря, яке вони вдихають, проходить крізь пористі структури їхніх верхніх дихальних шляхів, які нагріті за допомогою циркулюючої крові до температури тіла

¹ <https://etda.libraries.psu.edu/catalog/25064>

38.8С, тому повітря швидко підігрівається під час проходження крізь пористі структури з великим коефіцієнтом ζ (Рис.2б,в). Фракталоподібні структури в верхніх частинах слайсів рис.2е-и відповідають області, яка розпізнає запахи та не приймають участь у нагріванні повітря. Детальний аналіз слайсів рис.2б,в показує, що пористі структури дихальних шляхів також утворені фракталоподібними розгалуженнями (L-дерева).

Значення Σ_p та A для кожного слайсу, які були облічені автоматично при проведенні КТ, наведені в [8]. Фрактальна розмірність кожної структури обчислювалась в даній роботі за допомогою алгоритму box counting вбудованих функцій Python 3.8.2.

3. Результати і обговорення

Значення Σ_p , A і фрактальних розмірностей зображень Рис.2а-и наведені в Табл.1. Таким чином, структури, які відповідні за нагрівання повітря, мають фрактальну розмірність, близьку до розмірності квадратного килима Серпінського. Використовуючи обчислені дані, можна розрахувати коефіцієнт ζ (периметр/переріз), безрозмірний фактор форми $\xi = \Sigma_p^2 / A$ та гідралічний діаметр $D_h = 4A / \Sigma_p$, який використовується в механіці рідини як характеристика гідралічного опору каналів довільної складної форми [10]. Для трубки кругового перерізу D_h дорівнює її діаметру, а для каналу квадратного перерізу D_h дорівнює стороні квадрата. Результати розрахунків також наведені в Табл.1. Методами статистичного аналізу показана наявність наступних залежностей між обчисленими параметрами (Табл.2).

Табл.1. Значення фрактальних розмірностей перерізів дихального шляху морської видри.

Слайс (рис.2)	а	б	в	г	д	е	є	и
D	1.82	1.822	1.779	1.813	1.759	1.757	1.745	1.650
Σ_p (мм)	270	1250	740	480	410	400	450	250
A (мм ²)	120	260	230	180	165	160	152	110
ζ	2.25	4.81	3.22	2.67	2.49	2.5	2.96	2.27
ξ	607.5	6012.6	2382.8	1281.6	1020.9	1000	1332	567.5
D_h (мм)	1.78	0.832	1.24	1.5	1.61	1.6	1.35	1.76

Табл.2. Статистичні залежності між параметрами з Табл.1, (R^2 - коефіцієнт детермінації).

$$\begin{aligned}
 A &= 5.92 \cdot \Sigma_p^{0.543}, R^2 = 0.942; & \xi &= 58.19 \cdot \zeta^{3.013}, R^2 = 0.964; \\
 \xi &= 0.168 \cdot \Sigma_p^{1.458}, R^2 = 0.992; & D_h &= 14.163 / \xi^{0.32}, R^2 = 0.963; \\
 D_h &= 23.8 / \Sigma_p^{0.459}, R^2 = 0.923; & \zeta &= 0.0042 \cdot A^{2.476}, R^2 = 0.893 \\
 \xi &= \zeta \Sigma_p; & D_h &= 4 / \zeta.
 \end{aligned}$$

Таким чином, пористі структури Рис.2б,в мають найвищі відношення ζ (периметр/площа перерізу). Їх форма найскладніша, що характеризується найбільшими значеннями звивистості $\xi > 2000$. Гідралічний діаметр цих перерізів найменший, що відповідає еквівалентним круговим трубкам з діаметрами $D_h < 1.25$ мм.

Згідно з підходом [1-6], математичною моделлю пористої структури слайсів Рис.2а-и може бути квадратний килим Серпінського (Рис.1а), а для слайсів Рис.2д-є – круговий фрактал. Згідно з (1), найближчу до цих слайсів фрактальну розмірність мають килими Серпінського з $N=7.5, r=3$ ($D=1.834$), $N=13, r=4$ ($D=1.85$), $N=19, r=5$ ($D=1.829$).

Для порівняння гідромеханічних властивостей розглянемо область із заданою площиною $A_0 = \text{const}$ та довільною початковою формою перерізу. Тоді початкові розміри квадратної, трикутної, прямокутної та діаметр кругової областей складуть, відповідно

$$a_{\square} = \sqrt{A_0}, a_{\Delta} = 2\sqrt{\frac{A_0}{\sqrt{3}}}, H = a_{\square} = \sqrt{\frac{A_0}{\lambda}}, a_O = 2\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}, \quad (3)$$

де $\lambda = W/H$ - фактор форми прямокутної області.

Значення Σ_p, A, m, D_h і ξ , розраховані з урахуванням (3) для квадратного, трикутного, і прямокутного (з початковими розмірами $a_{\square} \times \lambda a_{\square}$ = висота \times ширина) килимів Серпінського та кругового фракталу, наведені в Табл.3. Для $n \rightarrow \infty$ всі килими Серпінського перетворюються у Канторовий пил з нескінченим периметром $\Sigma_{p\infty} \rightarrow \infty$ та початковою площиною $A_{\infty} = A$. Залежності з Табл.2, обчислені для $n < 10$, наведені на Рис. 3. Безрозмірні залежності $m_n(n)$ ідентичні Рис.3б. Монотонно зростаючі залежності $\Sigma_{pn}(n)$ і $\xi_n(n)$ розташовані таким чином:

$$\Sigma_{\square, \lambda=5} > \Sigma_{\square, \lambda=4} > \Sigma_{\square, \lambda=3} > \Sigma_{\square, \lambda=2} > \Sigma_{\square, \lambda=1} > \Sigma_O > \Sigma_{\Delta},$$

$$\xi_{\square, \lambda=1} > \xi_O > \xi_{\Delta} > \xi_{\square, \lambda=2} > \xi_{\square, \lambda=3} > \xi_{\square, \lambda=4} > \xi_{\square, \lambda=5}.$$

Табл.3. Гідродинамічні параметри фрактальних структур, наведених на Рис.1а-г.

	Σ_{pn}	A_n	m_n	D_h	ξ_n
Рис.1а	$\frac{4}{5} \frac{8^n - 3^n}{3^n} a_{\square}$	$\frac{9^n - 8^n}{9^n} a_{\square}^2$	$1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$	$\frac{5(9^n - 8^n)}{6^n(8^n - 3^n)} a_{\square}$	$0.48 \frac{(8^n - 3^n)^2}{9^n - 8^n}$
Рис.1б	$3 \frac{3^n - 2^n}{2^n} a_{\Delta}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{4^n - 3^n}{4^n} a_{\Delta}^2$	$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$	$\frac{a_{\Delta}}{4\sqrt{3}} \frac{4^n - 3^n}{2^n(3^n - 2^n)}$	$12\sqrt{3} \frac{(3^n - 2^n)^2}{4^n - 3^n}$
Рис.1в	$\frac{2(\lambda+1)}{5} \frac{8^n - 3^n}{3^n} a_{\square}$	$\lambda a_{\square}^2 \frac{9^n - 8^n}{9^n}$	$1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$	$\frac{10\lambda a_{\square}}{(\lambda+1)} \frac{9^n - 8^n}{6^n(8^n - 3^n)}$	$\frac{4(\lambda+1)^2(8^n - 3^n)^2}{25\lambda(9^n - 8^n)}$
Рис.1г	$\pi a_O \frac{7^n}{3^n}$	$\pi a_O^2 \frac{7^n}{4 \cdot 9^n}$	$\left(\frac{7}{9}\right)^n$	$\frac{a_O}{16 \cdot 3^n}$	$4 \cdot 7^{n-1}$

У випадку каналів кругового, квадратного, прямокутного або трикутного перерізу, гідралічна провідність Z_{jn} відповідних фрактальних структур (Рис.1(а-г)) може бути обчислена за аналітичними формулами [8], які у безрозмірному вигляді $Z_{jn}^{\circ} = Z_{jn} A_0^2 / \mu L$ мають вигляд

$$Z_{\Delta n}^{\circ} = 20\sqrt{3} \sum_{k=1}^n 2^{4k} 3^{k-1}, Z_{\square n}^{\circ} \sim \kappa \sum_{k=1}^n 9^k 8^{k-1}, Z_{O n}^{\circ} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n (7 \cdot 3^4)^k, \quad (4)$$

причому для $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$ маємо $\kappa = 28.407; 8.746, 5.064; 3.768; 2.746$ відповідно.

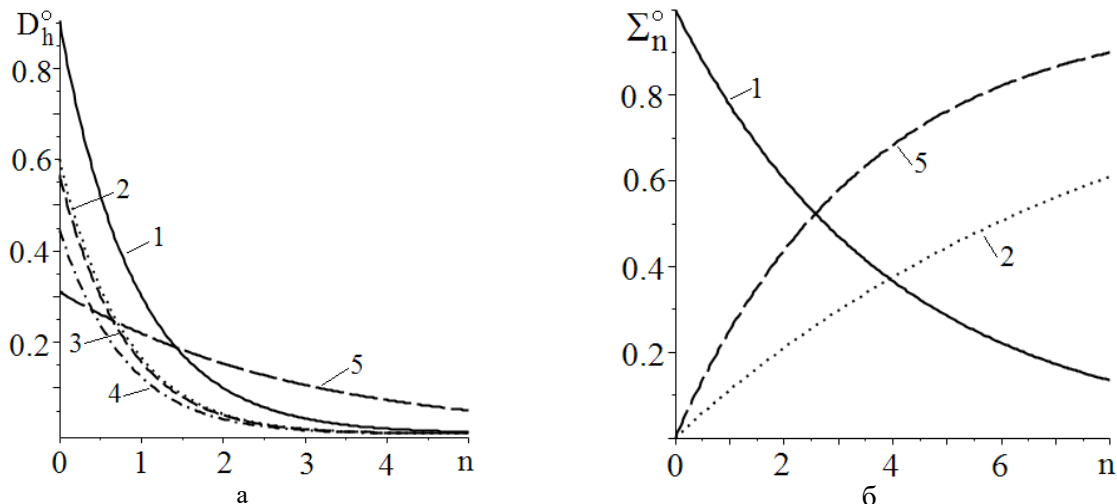


Рис.3. Безрозмірні залежності $D_h(n)$ та $\Sigma_{pn}(n)$ для розглянутих фрактальних структур.

Статистичний аналіз залежностей з Табл.3 виявив закономірності, які відповідають отриманим в Табл.2, тільки для $\zeta(A)$ квадратного та трикутного і залежності $\xi(\Sigma_p)$ трикутного килимів Серпінського. Таким чином, гідравлічний діаметр недостатньо точно описує реальне співвідношення периметр/переріз слайсів, поверхня/об'єм пористого матеріалу, звивистість пор та гідравлічний опір матеріалу, тому що гідравлічний діаметр трикутних, квадратних та прямокутних кожної з пор дорівнює радіусу вписаного кола і, таким чином, применшує площу перерізу та збільшує гідравлічний опір кожної з них, що вже після кількох ітерацій фракталу вносить суттєві похибки до загальної величини гідродинамічних параметрів.

4. Висновки

Моделі пористих середовищ, які обираються для моделювання процесів переносу тільки на основі відповідності фрактальних розмірностей [1,3-7], можуть вносити суттєву похибку до результатів розрахунків процесів тепломасопереносу, оскільки вони не відповідають статистичним залежностям між гідравлічними параметрами природних середовищ (пористість, відношення периметр/переріз, звивистість пор) та значенням гідравлічного опору каналу. Кращими математичними моделями можуть бути мультифрактальні структури, в яких за рахунок вибору значень N_p , r_p та форми каналів φ_p на кожному генерації мультифракталу можна забезпечити не тільки статистичні залежності вигляду (Табл. 2), що відповідають даним вимірювань на зразках матеріалу, але й фрактальні розмірності та гідравлічний опір каналу в цілому. Для розв'язання остатнього питання потрібні детальні чисельні CFD-розрахунки опору каналів вигляду (Рис.2) на основі методу скінчених елементів, що складає задачу подальших досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Agboola O., Onyango M.S., Popoola P., Oyewo O.A. *Fractal geometry and porosity. In: Fractal analysis - applications in physics, engineering and technology.* InTech Publ. 2017. <https://www.intechopen.com/books/fractal-analysis-applications-in-physics-engineering-and-technology>
2. Божокин С. В., Паришин Д. А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 128 с. <http://lms.physics.spbstu.ru/28200129.pdf>
3. Yu B., Liu W. Fractal analysis of permeabilities for porous media. *AIChE Journal.* 2004. 50(1). pp. 46-57. <https://aiche.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/aic.10004>
4. Fawziah U.Z., Rochmatulloh A.K., Feranie S., Tobing P.F.L., Latief F.D.E. Investigation on 3D fractal dimensi on as complexity parameter of interconnected pore in 3D porous media. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. 1204 012100. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1204/1/012100/pdf>
5. Miao T., Chen A., Xu Y., Cheng S., Yu B. A fractal permeability model for porous–fracture media with the transfer of fluids from porous matrix to fracture. *Fractals.* 2019. 27(6). 1950121. <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218348X19501214>
6. Dathe A., Thullner M. The relationship between fractal properties of solid matrix and pore space in porous media. *Geoderma.* 2005. 129. pp. 279–290. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0016706105000078>
7. Tang H.P., Wang J.Z., Zhu J.L., et al. Fractal dimension of pore-structure of porous metal materials made by stainless steel powder. *Powder Technology.* 2012. 217. pp. 383–387. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0032591011005961>
8. Quigley A.P. A comparative study of the anatomy and functional morphology of the mammalian nasal cavity. MS Thesis. Pennsylvania State University. 2015. 46p. https://etda.libraries.psu.edu/files/final_submissions/10836
9. Solberg S.B.B., Kjelstrup S., Magnanelli E., Kizilova N., Barroso I.L.C., Acquarone M., Folkow L. Energy-Efficiency of Respiration in Mature and Newborn Reindeer. *Journal of Comparative Physiology, Ser.B.* 2020. 190(4). <https://link.springer.com/article/10.1007/s00360-020-01284-3>

10. White F.M. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, 2003. 480 p.
http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TM240/Marchi/Bibliografia/White_2011_7ed_Fluid-Mechanics.pdf

REFERENCES

1. O. Agboola, M.S. Onyango, P. Popoola, and O.A. Oyewo, “Fractal geometry and porosity. In: *Fractal analysis - applications in physics, engineering and technology*.” InTech Publ. 2017. <https://www.intechopen.com/books/fractal-analysis-applications-in-physics-engineering-and-technology>
2. S.V. Bozhokin, and D.A. Parshin, Fractals and multifractals. Izhevsk. NIC “Regular and chaotic dynamics.” 128 c. 2001. [in Russian] <http://lms.physics.spbstu.ru/28200129.pdf>
3. B. Yu, and W. Liu, “Fractal analysis of permeabilities for porous media” *AIChE Journal*, 50, no.1, pp. 46-57, 2004. <https://aiche.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/aic.10004>
4. U.Z. Fawziah, A.K. Rochmatulloh, S. Feranie, et al. “Investigation on 3D fractal dimension as complexity parameter of interconnected pore in 3D porous media” *J. Phys. Conf. Ser.*, 1204, 012100, 2019. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1204/1/012100/pdf>
5. T. Miao, A. Chen, Y. Xu, et al. “A fractal permeability model for porous–fracture media with the transfer of fluids from porous matrix to fracture” *Fractals*, 27, no.6, 1950121, 2019. <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218348X19501214>
6. A. Dathea, and M. Thullner, “The relationship between fractal properties of solid matrix and pore space in porous media” *Geoderma*, 129, pp. 279–290, 2005. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0016706105000078>
7. H.P. Tang, J.Z. Wang, J.L. Zhu, et al. “Fractal dimension of pore-structure of porous metal materials made by stainless steel powder.” *Powder Technology*, 217, pp. 383–387, 2012.
8. A.P. Quigley, “A comparative study of the anatomy and functional morphology of the mammalian nasal cavity” MS Thesis. Pennsylvania State University. 46p. 2015. https://etda.libraries.psu.edu/files/final_submissions/10836
9. S.B.B. Solberg, S. Kjelstrup, E. Magnanelli, et al. “Energy-Efficiency of Respiration in Mature and Newborn Reindeer.” *Journal of Comparative Physiology, Ser.B*, 190, no.4, pp. 509-520, 2020. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00360-020-01284-3>
10. F.M. White, *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill. 480p. 2003. http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TM240/Marchi/Bibliografia/White_2011_7ed_Fluid-Mechanics.pdf

УДК 517.946.9

A method for solving a boundary value problem in a multilayered area

Elena Kobilskaya, Viktor Lyashenko

Elena Kobilskaya

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Kremenchuk Mykhailo Ostrohradsky National University, 20 Pershotravneva str., Kremenchuk, Ukraine, 39600
e-mail: kobilskaya1983@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-4210-1534>*

Viktor Lyashenko

*Doctor of Technical Sciences, Professor; Head of the Department of Mathematics and Computer Science, Kremenchuk Mykhailo Ostrohradsky National University, 20 Pershotravneva str., Kremenchuk, Ukraine, 39600
e-mail: viklyash2903@gmail.com ;
<https://orcid.org/0000-0002-4538-631X>*

A method of solving the boundary-value problems for heat conduction equation in a complex area – a multi-layered cylinder with internal heat sources in some layers and external ones in other layers, is proposed. A method of problem solution in conditions of uncertainty of one of the boundary condition at the layers interface with conductive heat exchange between the layers is reviewed. The principle of method is in the averaging of temperature distributions radially in the internal layers. A boundary condition of the impedance-type conjugation appears as a result of transformations at the layers interface. The analytical and numeric-analytical solutions of simplified problems have been obtained. The mathematical model of a thermal process in an electrical machine presented as a three-layer cylinder, where internal heat sources operate in one layer and heat is submitted to the other two by means of heat conduction, has been built as an example.

Ключові слова: *electric machine, mathematical model, temperature field, multi-layered cylinder*

Метод розв'язання крайових задач в багатошарових областях

О.Б. Кобильська, В.П. Ляшенко

**Кобильська Олена
Борисівна**

кандидат фізико-математичних наук, доцент; професор кафедри інформатики і вищої математики, Кременчуцький національний університет ім. Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 61046, Україна

**Ляшенко Віктор
Павлович**

доктор технічних наук, професор; завідувач кафедри інформатики і вищої математики, Кременчуцький національний університет ім. Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 61046, Україна

Запропонований метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багатошаровому циліндрі, де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а у іншій – зовнішні. Розглянуто метод розв'язку задачі в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів з кондуктивним теплообміном між шарами. Сутність методу полягає в усередненні температурних розподілів за радіусом у внутрішніх шарах. Процес усереднення температурного розподілу уздовж радіуса, якщо це дозволяє фізична модель задачі, знижує її розмірність, але у результаті перетворень з'являється на межі шарів гранична умова імпедансного типу. Шляхом послідовного усереднення за радіусом, використовуючи умову спряження на межі шарів визначається температурний розподіл в останньому шарі. Для визначення температурного розподілу в останньому шарі побудована кінцево-різницька схема Кранка-Ніколсон. Наступний крок визначення температурних розподілів у багатошаровому циліндрі полягає у зворотному розв'язанні задач від останнього шару до першого. Розв'язуючи задачу від останнього шару до першого на кожному шарі отримується матриця значень температур, що використовуємо для розв'язання задачі як граничну умову для наступного шару. Це дає можливість знайти температурний розподіл в усьому циліндрі. У якості прикладу побудована математична модель теплового процесу у електричній машині, яка представлена у вигляді тришарового циліндра, де в одному з шарів діють внутрішні джерела тепла, а до двох інших тепло передається теплопровідністю. Отримано аналітичний та чисельно - аналітичний розв'язок спрощених задач. Проведено чисельні розрахунки, знайдено розв'язок нелінійної задачі та побудовані графіки температурних розподілів.

Keywords: *електрична машина, математична модель, температурне поле, багатослойний циліндр*

Метод решения краевых задач в многослойных областях

Е.Б. Кобыльская, В.П. Ляшенко

**Кобыльская
Елена Борисовна**

кандидат физико-математических наук, доцент; профессор кафедры информатики и высшей математики, Кременчугский национальный университет им. Михаила Остроградского, ул. Первомайская, 20 39600, г. Кременчуг, Украина

**Ляшенко
Виктор Павлович**

доктор технических наук, профессор заведующий кафедрой информатики и высшей математики, Кременчугский национальный университет им. Михаила Остроградского, ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 61046, Украина

Предложен метод решения краевых задач для уравнения теплопроводности в сложной области – многослойном цилиндре, где в одной части слоев действуют внутренние источники тепла, а в другой - внешние. Рассмотрен метод решения задачи в условиях неопределенности одного из граничных условий на границе слоев с кондуктивным теплообменом между слоями. Сущность метода заключается в усреднении температурных распределений по радиусу во внутренних слоях. В результате преобразований на границе слоев появляется граничное условие сопряжения импедансного типа. В качестве примера построена математическая модель теплового процесса в электрической машине, которая представлена в виде трехслойного цилиндра, где в одном из слоев действуют внутренние источники тепла, а в двух других тепло передается теплопроводностью. Получено аналитическое и численно - аналитическое решение упрощенных задач. Проведены численные расчеты, найдено решение нелинейной задачи и построены графики температурных распределений. Предложенный метод решения особенно будет полезен при решении тепловых задач в сложных многослойных областях, например в электрических машинах или в валковых кристаллизаторах.

Ключевые слова: *электрическая машина, математическая модель, температурное поле, многослойный цилиндр*

1. Introduction

In the mathematical modelling problems of thermal processes a range of challenges related to nonlinear nature of the problems, complexity of investigation areas and boundary conditions at their interfaces, inhomogeneous medium limiting the investigation areas, as well as tridimensionality of the problems appears. For linear and some of the nonlinear problems with linear boundary conditions in canonical areas the analytical methods are applied (e.g. the Fourier method, the integral transformation method, the thermal potential method, the conformal representation method, the methods of problem linearization). These methods require of the researchers to simplify output problems of heat exchange to the level where problem solution becomes practically enforceable.

An important advantage of analytical solutions of heat exchange problems is a possibility to review their dependence on parameters in an explicit form. Analytical solutions help to sort out the determining criteria through all their diversity. It greatly facilitates the physical experiment set-up. The accurate analytical solutions often are used as standard solutions and serve as a test task for checking the adequacy of more complex nonlinear models.

In comparison with the above-mentioned analytical methods numerical methods give the opportunity to get a full quantitative description of heat exchange in the complex form constructions and use complex nonlinear mathematical models. Nonlinear mathematical models describe the investigated thermal processes more accurately in a wide range of geometrical and physical parameters [1-2].

Contemporary computer technologies allow using numerical methods to obtain mathematical prediction of thermal processes in quite complicated physical objects, particularly in modern electrical machines.

The electrical machines construction started to expand rapidly at the end of the XX century due to the development of small electrical machines for space, aircraft and electrical cars industries. A magnetic core and winding are active parts of any electrical machine. All the other parts are constructive ones which provide necessary toughness, durability, slewing capacity, and cooling. The range of operating temperatures of electrical machine plays an important role in their reliability.

The diversity of the types of electrical machines notwithstanding, they have a lot of common structural elements: a wire with low electrical resistance, an isolation material with high dielectric

properties, magnetic conductors with anisotropic properties in orthogonal directions. That allows building mathematical models of electromagnetic and thermal processes in electrical machine. The method of temperature field investigation in a three-layer cylinder has been reviewed in the paper with the example of mathematical model of thermal process in a simplest electrical machine.

Determination of three-dimensional temperature distributions generated by electromagnetic field activity in electrical machines is an extremely complicated problem of mathematical modelling and mathematical physics [3-8]. Electromagnetic fields are described by the models containing the Maxwell's equations system, the equation of charge continuity and the Ohm's law [9-12].

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{\kappa} \vec{J} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho_e, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0, \quad \vec{J} = \sigma_e \vec{E}.$$

Where $\vec{H}, \vec{E}, \vec{J}, \rho_e, \sigma_e$ are a magnetic field strength, an electric field strength, an electric current density, an electric charge density, an electrical conductivity. Presence of the fields and currents in an electrical machine stimulates an electrocaloric effect in the subareas where electrical current flows. So an energy equation must be added to the Maxwell's equation in the mathematical model in order to determine the temperature distributions in the windings and between them because the model will not be consistent without it. Furthermore, the electrical conductivity σ_e of electrical machine windings depends on the temperature. To determine the internal energy in electrical machine the following form of the thermal conductivity equation is used

$$\rho_n \frac{\partial e}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(T) \operatorname{grad} T) + W(P, t, T),$$

where λ, ρ_n are a thermal conductivity coefficient and winding materials density, respectively, $e = \int_{\Omega} c_v dT$ is a specific internal energy, c_v is a generalized thermal capacity of the environment, $W(P, t, T)$ is a density of heat sources in electrical machine windings. The displacement current $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ is neglected in many Maxwell's equations

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{\kappa} \vec{J} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

in comparison with the conduction current \vec{J} generated by the electrical current density. \vec{H} is a magnetic field intensity in electrical machine windings, \vec{E} is an electric field intensity, κ is a speed of light. Such assumptions are appropriate because the displacement current $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ in electrical machines has

much less influence on the temperature distribution than the conduction current \vec{J} . Also the Peltier heat which appears in the moving contacts is often neglected.

Accepting the abovementioned assumptions, the Maxwell's equations system can be written in the quasi-steady-state approximation in the area Ω , in the following non-dimensional form

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 4\pi\sigma_e \vec{E}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \vec{J} = \sigma_e \vec{E} = W(P, t).$$

Neglecting the displacement current $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ allows simplifying a mathematical model greatly by changing the equation system and turning it from the hyperbolic into parabolic. The model is significantly simplified by decreasing the number of boundary conditions.

Alternating electric current flowing through the electrical machine windings releases the energy in cases of both direct and backward current. Furthermore, electrical energy of alternating current causes the change of internal energy of conductors. Because of energy of alternating magnetic field and magnetic reversal, the coil cores are heated by the whirling currents. Electric and magnetic energy cause the rise of temperature of constructive elements. It is also called active energy, and the density of active heat sources can be determined by the formula

$$W = J \times U \times R / Z, \quad R = \frac{\rho_0 L (1 + \beta T)}{S}, \quad Z = \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

where S, ρ_0, X_L, U, Z, R are a wire section area, a specific resistance of winding wire, a winding inductance, a voltage in windings, an operating impedance, an active impedance. If the electrical machine power factor $\cos \varphi$ is known, the density of active heat sources is determined by the formula

$$W = \frac{J \times U \cos \varphi}{s}.$$

Mathematical models that permit to investigate electromagnetic and thermal fields in electrical machine can be designated as the models of processes in a complex area. Therefore, the simplest case of the heat exchange process in electrical machine can be presented as the temperature field in a three-layered cylinder, where the internal heat sources operate in one layer (winding) and external heat sources operate in other two layers. The simpler case of temperature field in a two-layered cylinder has been reviewed in [5, 6].

2. Purpose of the paper

Purpose of the paper is to construct a mathematical model of temperature field in a multi-layered cylinder where internal heat sources operate in one part of the layers and external sources operate in another part, using the simplest electrical machine as an example. It is also necessary to develop a method for determining the temperature field in a complex multilayer area.

A schematic illustration of a three-layered cylinder is shown in Fig.1.

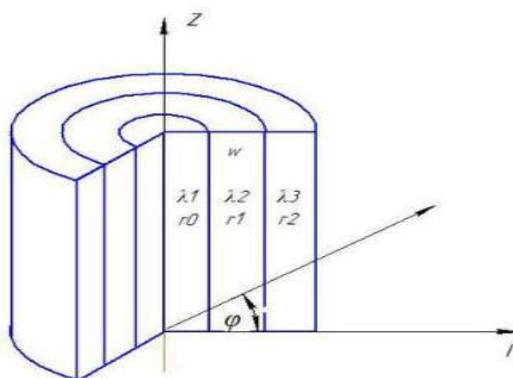


Figure 1. A three-layered cylinder with different thermal-physical characteristics of the layers.

3. Study resources and results

Let us consider the mathematical model of temperature field in a three-layered cylinder where internal heat sources work in one layer and heat is transferred by means of thermal conductivity to other two layers which have different thermal-physical properties. Internal heat sources constitute the Joule heat released while the electric current flows through one of the layers. Let us consider the temperature field of an electrical machine consisting of a two-layered rotor without heat sources and a stator with

the windings of a copper wire or aluminum inserts where an electric current flow generates the Joule heat (see Fig. 1).

Determination of the temperature distribution $T(r, z, t)$ in a three-layered cylinder, where internal heat sources operate in the external layer and heat is transferred from the external layer to the internal ones by means of thermal conductivity, can be presented as the following boundary problem on conjunction in the area $\Omega \times t: \{0 < r < r_0, 0 < z < l, 0 < t < t_0\}$

$$\lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - c_i \rho_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{S^2}, & r_1 \leq r < r_2 \\ 0, & 0 < r < r_0, r_0 < r < r_1, r > r_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$T_i(r, z, 0) = T_0, \quad (2)$$

$$T_i(r, 0, t) = T_0, \quad T_i(r, l, t) = T_0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} \right|_{r=r_2} = \left[-\alpha (T_3 - T_c) - \varepsilon \sigma (T_3^4 - T_c^4) \right], \quad (4)$$

$$T(r_{i-0}, z, t) = T_1(r_{i+0}, z, t), \quad i = 1 \dots 3, \quad (5)$$

$$\left. \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right|_{r=r_i-0} = \left. \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial r} \right|_{r=r_i+0}, \quad i = 1 \dots 3, \quad (6)$$

where $\lambda_i, c_i, \rho_i, i=1 \dots 3, T_c$ are the respective thermal-physical characteristics and parameters of the parts of an electrical machine, the ambient temperature $\alpha, I, \rho_0, \varepsilon, \sigma, \beta$ are a heat transfer coefficient, a current strength, a resistivity of the windings wire, an emissivity factor, the Stefan-Boltzmann constant and a temperature coefficient of resistance, respectively. S is a total section area of the wire in the stator windings, particularly $S_3 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ layer surface area S_3 .

The problem as arranged in (1)-(6) is non-linear, so the analytical solution for it does not exist. Let us simplify the problem according to the following algorithm.

It is enough to know the homogenized temperature distribution in the third and second layers to investigate the temperature distribution in the inner cylinder. So to determine the transmission rate of heat flowing through the inner cylinder surface, let us multiply the equation (1) by rdr and integrate over the layer thickness within the r_1 to r_2 limits

$$\lambda_3 r \left. \frac{\partial T_3}{\partial r} \right|_{r=r_1}^{r=r_2} + \lambda_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{r_1}^{r_2} T_3 r dr - c_3 \rho_3 \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_1}^{r_2} T_3 r dr = -\frac{I^2 \rho_0}{S_3^2} \int_{r_1}^{r_2} (1 + \beta T_3) r dr, \quad (7)$$

$$\lambda_3 r \left. \frac{\partial T_3}{\partial r} \right|_{r=r_1}^{r=r_2} = -r_2 \left(\alpha_3 (T_3 - T_c) + \varepsilon \sigma (T_3^4 - T_c^4) \right) - \lambda_3 r_1 \frac{\partial T_3(r_1, z, t)}{\partial r}.$$

After the transformations and using the ratio [13]

$$u_3(z, t) = \frac{2}{S_3} \int_{r_1}^{r_2} T_3(r, z, t) r dr, \quad (8)$$

the equation (7) can be displayed in the form of

$$\lambda_3 r_1 \frac{S_3}{2} \frac{\partial T_3(r_1, z, t)}{\partial r} = \frac{\lambda_3 S_3}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \frac{c_3 \rho_3 S_3}{2} \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta}{2 S_3} u_3 + \frac{I^2 \rho_0}{S_3^2} \left(\frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right) - r_2 \left[\alpha(u_3 - T_c) + \varepsilon \sigma(u_3^4 - T_c^4) \right]. \quad (9)$$

The proportion (9) will be reviewed as a boundary condition of impedance type at the interface of the outer and inner cylinders. With $u(z, t) \approx T_3(r_1, z, t) \approx T_2(r_1, z, t)$ and taking into account the direction of the heat flow, the condition (9) could be written as

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(r_1, z, t)}{\partial r} = \frac{\lambda_2}{r_1} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - \frac{c_3 \rho_3 \lambda_2}{\lambda_3 r_1} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta \lambda_2}{\lambda_3 r_1 S_3^2} T_2 + \frac{I^2 \rho_0 \lambda_2 (r_2^2 - r_1^2)}{\lambda_3 S_3^3 r_1} - \frac{\lambda_2 r_2^2}{r_1 S_3 \lambda_3} \left[\alpha(T_2 - T_c) + \varepsilon \sigma(T_2^4 - T_c^4) \right]. \quad (10)$$

After the determination of the boundary condition, the temperature distribution in the second layer of the cylinder can be reduced to the following problem with the condition that includes a tangent derivative alongside with a normal derivative by the direction of

$$\lambda_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0, \quad (11)$$

$$r_0 < r < r_1, \quad 0 < z < l, \quad t > 0$$

$$T_2(r, z, 0) = T_0, \quad (12)$$

$$T_2(r, 0, t) = T_0, \quad T_2(r, l, t) = T_l, \quad (13)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(r_1, z, t)}{\partial r} = \frac{\lambda_2}{r_1} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - \frac{c_3 \rho_3 \lambda_2}{\lambda_3 r_1} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta \lambda_2}{\lambda_3 r_1 S_3^2} T_2 + \frac{I^2 \rho_0 \lambda_2 (r_2^2 - r_1^2)}{\lambda_3 S_3^3 r_1} - \frac{\lambda_2 r_2^2}{r_1 S_3 \lambda_3} \left[\alpha(T_2 - T_c) + \varepsilon \sigma(T_2^4 - T_c^4) \right], \quad (14)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(r_{1+0}, z, t)}{\partial r} = \lambda_1 \frac{\partial T_1(r_{1-0}, z, t)}{\partial r}. \quad (15)$$

The second boundary condition in this problem arrangement (11)-(15) is indefinite. The method of determination of the temperature distribution in a multi-layered cylinder in the conditions of uncertainty is stepwise averaging of the temperature fields along the radius and the consequent determination of the temperature field in the first layer $0 < r < r_0$. After finishing the averaging the backward process of determination of the temperature distribution in the inner layers starts $r_0 < r < r_1$, $r_1 < r < r_2, \dots, r_{N-1} < r < r_N$.

If it is possible to neglect the temperature distribution along the radius in the second layer of the cylinder, then, after averaging by analogy with (8) we get the boundary condition at the interface of the first and second cylinders

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(r_0, z, t)}{\partial r} = \frac{\lambda_2}{r_0} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \frac{c_3 \rho_3 \lambda_2}{\lambda_3 r_0} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta \lambda_2}{\lambda_3 r_0 S_3^2} u_2 + \frac{I^2 \rho_0 \lambda_2 (r_2^2 - r_1^2)}{\lambda_3 S_3^3 r_0} -$$

$$- \frac{\lambda_2 r_2^2}{r_0 S_3 \lambda_3} [\alpha(u_2 - T_c) + \varepsilon \sigma (u_2^4 - T_c^4)] + \frac{\lambda_2}{r_0} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \frac{c_2 \rho_2}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0. \quad (16)$$

In this way the temperature distribution in the inner cylinder (layer S_I) is determined from the solution of the following problem in the area $\Omega_1 \times t = \{0 < r < r_0, \quad 0 < z < l, \quad t > 0\}$

$$\lambda_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial T_1}{\partial r}) + \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = 0, \quad (17)$$

$$T_1(r, z, 0) = T_0, \quad (18)$$

$$T_1(r, 0, t) = T_0, \quad T_1(r, l, t) = T_l, \quad (19)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r_0, z, t)}{\partial r} = \frac{2\lambda_1}{r_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - (\frac{\lambda_1 c_3 \rho_3}{\lambda_3 r_0} + \frac{\lambda_1 c_2 \rho_2}{\lambda_2 r_0}) \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta \lambda_1}{\lambda_3 r_0 S_3^2} u_1 + \frac{I^2 \rho_0 \lambda_1 (r_2^2 - r_1^2)}{\lambda_3 S_3^3 r_0} -$$

$$- \frac{\lambda_1 r_2^2}{r_0 S_3 \lambda_3} [\alpha(u_1 - T_c) + \varepsilon \sigma (u_1^4 - T_c^4)] = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial T_1(0, z, t)}{\partial r} = 0, \quad (21)$$

$$u_1(z, t) = \frac{2}{S_1} \int_0^{r_0} T_2(r, z, t) r dr, \quad S_1 = \pi r_0^2, \quad (22)$$

$$\lambda_1 r \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=0}^{r=r_0} + \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{r_0} T_1 r dr - c_1 \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{r_0} T_1 r dr = 0, \quad (23)$$

$$\lambda_1 r \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=0}^{r=r_0} = 2\lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - (\frac{\lambda_1 c_3 \rho_3}{\lambda_3} + \frac{\lambda_1 c_2 \rho_2}{\lambda_2}) \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta \lambda_1}{\lambda_3 S_3^2} u_1 + \frac{I^2 \rho_0 \lambda_1 (r_2^2 - r_1^2)}{\lambda_3 S_3^3} - \frac{\lambda_1 r_2^2}{S_3 \lambda_3} [\alpha(u_1 - T_c) + \varepsilon \sigma (u_1^4 - T_c^4)]. \quad (24)$$

By using (24) in (23) and taking into account (22) we get

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - (\frac{c_3 \rho_3}{3\lambda_3} + \frac{c_2 \rho_2}{3\lambda_2} + \frac{c_1 \rho_1}{3\lambda_1}) \frac{\partial u_1}{\partial t} + (\frac{I^2 \rho_0 \beta}{3\lambda_3 S_3^2} - \frac{r_2^2 2\alpha}{3S_3 \lambda_3}) u_1 + \frac{I^2 \rho_0 (r_2^2 - r_1^2)}{3\lambda_3 S_3^3} +$$

$$+ (\frac{r_2^2 2\alpha}{3S_3 \lambda_3} T_c + \frac{r_2^2 2\varepsilon \sigma T_c^4}{3S_3 \lambda_3}) - \frac{r_2^2 2\varepsilon \sigma}{3S_3 \lambda_3} u_1^4 = 0 \quad (25)$$

and come to the following boundary problem for a differential equation of the second order

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - a^2 \frac{\partial v}{\partial t} + Av + Cv^4 = B, \quad 0 < z < l, \quad t > 0 \quad (26)$$

$$v(z, 0) = T_0, \quad (27)$$

$$v(0, t) = T_0, \quad v(l, t) = T_l, \quad (28)$$

where

$$A = \left(\frac{I^2 \rho_0 \beta}{3\lambda_3 S_3^2} - \frac{r_2 2\alpha}{3S_3 \lambda_3} \right), \quad a^2 = \left(\frac{c_3 \rho_3}{3\lambda_3} + \frac{c_2 \rho_2}{3\lambda_2} + \frac{c_1 \rho_1}{3\lambda_1} \right), \quad C = -\frac{r_2 2\varepsilon \sigma}{3S_3 \lambda_3},$$

$$B = -\left(\frac{I^2 \rho_0 (r_2^2 - r_1^2)}{3\lambda_3 S_3^3} + \frac{r_2 2\alpha}{3S_3 \lambda_3} T_c + \frac{r_2 2\varepsilon \sigma T_c^4}{3S_3 \lambda_3} \right).$$

Supposing that $\varepsilon = 0$, the problem (26)-(28) can be solved by analytical means. After replacing the variables

$$v = e^{\mu z + \lambda t} u, \quad \mu = 0 \quad \lambda = \frac{A}{a^2}, \quad f(z, t) = B e^{-\lambda t},$$

the equation (26) can be reduced to

$$u_t = a^2 u_{zz} + f(z, t), \quad \forall t > 0, \quad 0 < z < l \quad (29)$$

with the nonhomogeneous boundary and initial conditions

$$u(z, 0) = \varphi(z) = T_0 e^{-\mu z}, \quad (30)$$

$$u(0, t) = \gamma_1(t) = T_0 e^{-\lambda t}, \quad u(l, t) = \gamma_2(t) = T_l e^{-\mu l - \lambda t}. \quad (31)$$

We seek the solution of the problem (29)-(31) as a sum of two functions

$$u(z, t) = v(z, t) + w(z, t), \quad (32)$$

where $v(z, t)$ is a new required function and $w(z, t)$ is an arbitrary function satisfying the nonhomogeneous boundary conditions

$$w(z, t) = \frac{z}{l} [\gamma_2(t) - \gamma_1(t)] + \gamma_1(t). \quad (33)$$

The function $v(z, t)$ should satisfy the nonhomogeneous equation

$$v_t - a^2 v_{zz} = \bar{f}(z, t), \quad (34)$$

where

$$\bar{f}(z, t) = f(z, t) - w_t - a^2 w_{zz}$$

and the additional initial and boundary conditions are

$$\begin{aligned} v(z, 0) &= \varphi(z) - w(z, 0), \\ v(0, t) &= \gamma_1(t) - w(0, t), \\ v(l, t) &= \gamma_2(t) - w(l, t). \end{aligned} \quad (35)$$

After inserting (33) into (35) the conditions become nonhomogeneous and the problem (34)-(35) is reduced to

$$u_t = a^2 u_{zz} + f(z, t), t > 0, \quad 0 < z < l$$

$$u(z, 0) = 0,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

The solution of this problem has a form

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \int_0^t \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 (t-\tau)} \sin \frac{n\pi}{l} z \sin \frac{n\pi}{l} \xi \right] f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_0^l G(z, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (36)$$

Therefore the problem (26)-(28) of determining the temperature distribution in the inner cylinder is completely solved. Then we build the finite-difference scheme of Crank-Nicolson [1–2]. In the area $\bar{\Omega} \times t \{0 \leq z \leq l, t > 0\}$ we apply the uniform grid by the length (coordinate z) of the cylinder $\bar{\omega}_h = \{z_m = mh, m = 0, 1 \dots M\}$; the time grid (coordinate t) $\bar{\omega}_{\Delta t} = \{t_j = j\Delta t, j = 0, 1 \dots j_0\}$ with the intervals: $h = l/M, \Delta t = t_0/j_0$.

The problem solution in the area Ω is sought as a solution of a system of nonlinear algebraic equations for the grid function u_{z_m, t_j} marked as u_i^j .

$$a^2 \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{2h^2} + Au_i^{j+1} + C(u_i^{j+1})^4 - B. \quad (37)$$

Let us review and solve the linearized problem. The obtained temperature values matrix is used for the solution of the problem (13)-(16) as a boundary condition.

For this purpose the finite-difference scheme of Douglas-Gann is built for by the alternating direction method [1–4] in the area $\bar{\Omega} \times t \{0 \leq r \leq r_0, 0 \leq z \leq l, t > 0\}$ with the intervals $h_1 = r_0/N, h_2 = l/M, \Delta t = t_0/j_0$ that has the form

$$\begin{aligned} \frac{u_{n,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^j}{\Delta t / 2} &= \frac{\lambda_2}{rc_2\rho_2} \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} + \\ &+ \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n,m-1}^j - 2u_{n,m}^j + u_{n,m+1}^j}{h_2^2}, \\ \frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{\Delta t / 2} &= \frac{\lambda_2}{rc_2\rho_2} \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} + \\ &+ \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n,m-1}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1} + u_{n,m+1}^{j+1}}{h_2^2} \end{aligned}$$

at the boundaries of the area

$$\frac{-u_{2,m}^{j+1} + 4u_{1,m}^{j+1} - 3u_{0,m}^{j+1}}{2h_1} = 0, \quad n = 0$$

for $n = N$ we substitute the value of the temperature distribution matrix at the boundary of an outer cylinder.

Fig. 2 shows the solution of the problem (34)-(35), that is the distribution of temperature in the inner layer of the cylinder along the coordinate z .

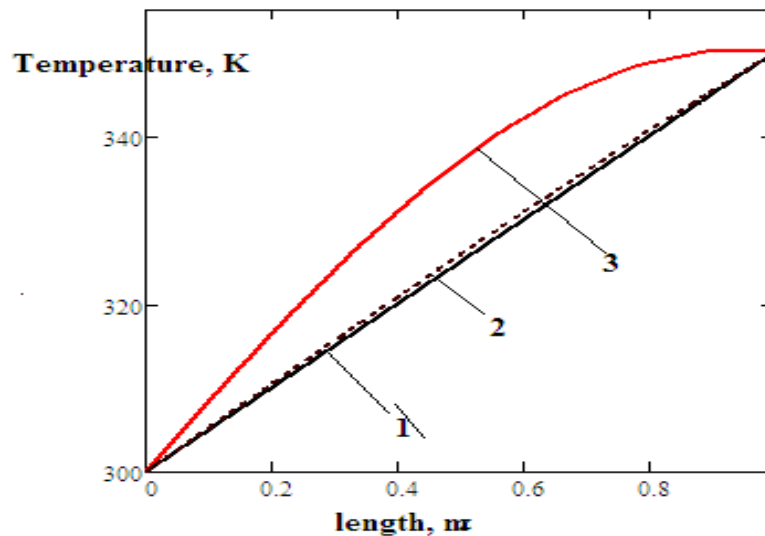


Figure 2. Solutions of the problem (34)-(35): curve 1- with $\alpha = 1$, curve 2- $\alpha = 10$, curve 3- $\alpha = 100 \frac{m^2}{K}$

4. Conclusions

The general mathematical model of heat conduction in a complex multi-layered area has been developed in the paper. The method of solving the boundary problems for the heat conductivity equation in a complex area – a multi-layered cylinder with internal heat sources in some layers and external sources in other layers in the conditions of uncertainty of one of the boundary conditions at the layers interface and with conductive heat exchange between the layers is proposed. The principle of method is averaging the temperature distributions by the radius in the internal layers if the boundary condition by the radius in one of the layers is not determined. Averaging the temperature distribution along the radius decreases its dimensionality if it is allowed by the physical model of the problem, but as a result of the transformations, the boundary condition of impedance type appears at the interface of the layers. The temperature distribution in the last layer is determined by the stepwise averaging by the radius and using the conjunction condition at the interface of the layers. The next step of determining the temperature distributions in the multi-layered cylinder is the backward problem solution, from the last layer to the first. The analytical solution of the simplified problem for the three-layered cylinder where internal heat sources operate in one layer and heat is transferred to other two layers by means of heat conductivity is obtained. The numerical experiments have been conducted and the approximate solution of the nonlinear problem has been obtained. The temperature distributions are presented as the graphs.

REFERENCES

1. A.A. Samarsky, P.N. Vabishchevich, *Computational Heat Transfer*. Moscow: Editorial URSS, 2003, 785 p. [in Russian].
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19459203>
2. R.D. Richtmyer, *Difference Methods for Initial Value Problems*. New York: Interscience, 1957, 405 p.
<https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1010073>
3. V. Lyashenko and E. Kobilskaya, "Contact of boundary-value problems and nonlocal problems in mathematical models of heat transfer," in *AMiTaNS'15*, AIP Conf. Proc. Vol. 1684, edited by M.D. Todorov (American Institute of Physics, Melville, NY, 2014), paper 080009, 10p. <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4934320>

4. P. Slesarenko, O.P. Demyanchenko, V. P. Lyashenko and E. B. Kobil'skaya "Numerical-analytical method in mathematical models of high-temperature processes". *Visnyk of Kherson National Technical University*, 3(54), pp. 467–471, 2015. [in Ukrainian]
http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILE=&2_S21STR=Vkhdtu_2015_3_90
5. V. P. Lyashenko, N.G. Kirilaha "Mathematical model of induction heat of a relative frame skew field". *Visnyk of Zaporizhzhya National University*, 3, pp. 64–69, 2002. [in Ukrainian]
<https://web.znu.edu.ua/herald/issues/2002/2002-mf-bio-3.pdf>
6. V. P. Lyashenko, T. A. Hryhorova, "Investigation of the temperature field of a two-layer cylinder with different thermophysical characteristics" *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»*, Vol. 890, pp.47–52, 2010 [in Ukrainian] -
http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMAM_2010_890_13_8
7. O.A. Troitsky, V.I. Stashenko, V.G. Ryzhkov, V.P. Lyashenko, and E.B. Kobil'skaya "Electroplastic drawing and new technologies for creating lightweight wires". *Problems of Atomic Science and Technology*, 4, pp.111–117, 2011.
<https://docplayer.ru/44685115-Novi-tehnologiyi-v-mashinobuduvanni.html>
8. V. Lyashenko and T. Hryhorova, "Generalized Mathematical Model of Thermal Diffusion in Powder Metallurgy," in *AMiTaNS'14, AIP Conf. Proc.* Vol. 1629, edited by M.D. Todorov (American Institute of Physics, Melville, NY, 2014), pp. 85–93.
<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4902262>
9. Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands, *The Feynman lectures on physics*, Vol. II: Mainly Electromagnetism and Matter. New York: New millennium edition, 2010, pp. 324–410.
https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_toc.html
10. M. P. Galanin and Yu. V. Popov, *Quasistationary electromagnetic fields in inhomogeneous media*. Moscow: Nauka, 1995, 320 p. [in Russian].
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23951992>
11. E. Tamm, *Fundamentals of the Theory of Electricity*. Moscow: Fizmatlit, 2003, 616 p. [in Russian].
http://www.samomudr.ru/d/Tamm%20I.E.%20Osnovy%20teorii%20Elektrichestva_616str_2003g.pdf
12. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*. Moscow: Nauka, 1982, 624 p. [in Russian].
https://radfiz.org.ua/files/k2/s3/TeopMex/Landau,Lifshic/Landay_VIII.pdf
13. A.V. Lykov, *Theory of Heat Conductivity*. Moscow: Gostekhizdat, 1967, pp. 31–32. [in Russian].
https://techliter.ru/load/uchebniki_posobyia_lekcii/termodinamika_teplotekhnika/teoriya_teploprovodnosti_lykov_a_v/68-1-0-166

ЛІТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. Москва: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19459203>
R.D. Richtmyer, *Difference Methods for Initial Value Problems*. New York: Interscience, 1957, 405 p. <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1010073>
2. Lyashenko V., Kobil'skaya E. Contact of boundary-value problems and nonlocal problems in mathematical models of heat transfer. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conf. Proc.*, June 28-July 3, 2015. American Institute of Physics, Melville, NY, 2015. P.080009-1 – 080009-10.
<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4934320>

3. Слесаренко А. П., Дем'янченко О. П., Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Чисельно-аналітичний метод у математичних моделях високотемпературних процесів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2015. Вип. 3(54). С. 467–471.
http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILE=&2_S21STR=Vkhdtu_2015_3_90
4. Ляшенко В.П., Кирилах Н.Г. Математична модель індукційного нагріву рухомого тіла. *Вісник Запорізького державного університету*. 2002. № 3. С.64–69.
<https://web.znu.edu.ua/herald/issues/2002/2002-mf-bio-3.pdf>
5. Ляшенко В. П., Григорова Т. А. Дослідження температурного поля двошарового циліндра з різними теплофізичними характеристиками. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»* 2010. № 890, Вип. 13. С. 47–52.
http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMAM_2010_890_13_8
6. Кобильська О. Б., Троицкий О.А., Сташенко В.И., Рыжков В.Г., Ляшенко В.П. Электропластическое волочение и новые технологии создания облегченных проводов. *Журнал «Вопросы атомной науки и техники»*. 2011. Вип. 4/2011. С. 111 – 117
<https://docplayer.ru/44685115-Novi-tehnologiyi-v-mashinobuduvanni.html>
7. Lyashenko V., Hryhorova T. Generalized Mathematical Model of Thermal Diffusion in Powder Metallurgy. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conf. Proc.*, June 26-July 1, 2014. American Institute of Physics, Melville, NY, 2014. P. 85–93. <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4902262>
8. Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands, *The Feynman lectures on physics, Vol. II: Mainly Electromagnetism and Matter*. New York: New millennium edition, 2010, pp. 324–410.
https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_toc.html
9. Галанин М.П., Попов Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование. Москва: Физматлит, 1995. 320 с.
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23951992>
10. Тамм И.Е. Основы теории электричества. Москва: Физматлит, 2003. 616 с.
http://www.samomudr.ru/d/Tamm%20I.E.%20Osnovy%20teorii%20Elektrichestva_616str_2003g.pdf
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Москва: Наука, 1982. 624 с.
https://radfiz.org.ua/files/k2/s3/ТеорМех/Landau,Lifshic/Landay_VIII.pdf
12. Лыков А.В. Теория теплопроводности. Москва: Гостехиздат, 1952. 392 с.
https://techliter.ru/load/uchebniki_posobyia_lekcii/termodinamika_teplotekhnika/teorija_teploprovodnosti_lykov_a_v/68-1-0-166

УДК 517.95

Особенности построения семейства атомарных радиальных базисных функций $P_{\text{lor},a}(x_1, x_2)$

В.М. Колодяжный, В.С. Селищев, О.Ю. Лисина

- Колодяжный Владимир Максимович** д. ф.-м. н., профессор;
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, ул. Ярослава Мудрого 25, г. Харьков, 61002, Украина
e-mail: vladmax1949@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0001-0000-0000>
- Селищев Владимир Сергеевич** ст. преподаватель;
Национальный аэрокосмический университет имени Н. Е. Жуковского «ХАИ», ул. Чкалова 27, г. Харьков, 61070, Украина
e-mail: sel_vol@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0001-6537-7763>
- Лисина Ольга Юлиевна** к. ф.-м. н., доцент;
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы 4, г. Харьков, 61022, Украина
e-mail: lisina_korovina@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0001-0000-0000>

Представлены результаты унифицированных алгоритмов вычисления атомарных (финитных) радиальных базисных функций семейства $P_{\text{lor},a}(x_1, x_2)$, которые являются бесконечно дифференцируемыми с конечным носителем в виде диска, решениями функционально-дифференциальных уравнений специального вида с двумя параметрами – r и a . Функции $P_{\text{lor},a}(x_1, x_2)$ используются при реализации бессеточных (со свободной сеткой) методов (в конкретном случае – метод коллокации) решения 2D-краевых задач математической физики.

Ключевые слова: функции с компактным носителем, финитные функции, атомарные функции, методы решения краевых задач со свободной сеткой (mesh-free), атомарные функции многих переменных, базисные функции.

Особливості побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій $P_{\text{lor},a}(x_1, x_2)$

- Колодяжний Володимир Максимович** д. ф.-м. н., професор;
Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Ярослава Мудрого 25, м. Харків, 61002, Україна
e-mail: vladmax1949@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0001-0000-0000>
- Селищев Володимир Сергійович** ст. викладач;
Національний аерокосмічний університет імені М. Е. Жуковського «ХАІ», вул. Чкалова 27, м. Харків, 61070, Україна
e-mail: sel_vol@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0001-6537-7763>
- Лісіна Ольга Юліївна** к. ф.-м. н., доцент;
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: lisina_korovina@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0001-0000-0000>

У багатьох методах вирішення крайових проблем за допомогою довільної сітки, таких як SDI (scattered data interpolation) та SPH (smoothed particle hydrodynamics), задля поліпшення точності розрахунків використовуються сімейства атомарних радіальних базисних функцій, що залежать від параметрів. Функції такого роду мають загальну назву «функції форми». При використанні у якості таких функцій поліномів або поліноміальних сплайнів вони мають назву

«базисні функції». Термін «радіальна» означає, що носієм функції є диск або шар. Термін «атомарна» означає, що носій функції обмежений, тобто функція є фінітною. У більшості випадків у англомовних публікаціях застосовують термін «фінітна». У статті наводиться алгоритм побудови такої функції, що є рішенням функціонально-диференційного рівняння

$$\Delta u(x_1, x_2) = \lambda \int_{\partial\Omega} u[a(x_1 - \xi_1), a(x_2 - \xi_2)] d\omega + \mu u(ax_1, ax_2)$$

де $\partial\Omega$ – коло радіуса r : $\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$, а $a > 1$. Породжена цим рівнянням функція $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ має два параметри: r та a . Варіювання цими параметрами дозволяє зменшити похибку у розрахунках крайової задачі Пуассона у кілька разів. У статті доказується теорема про існування такої однозначної функції. Доказ теореми дозволяє побудувати одновимірне перетворення Фур'є цієї функції у вигляді $Pl\tilde{p}_{a,r}(l) = \prod_{h=0}^{\infty} K_2[z(r, l, a, h)]$, де

$$K_2[z(r, l, a, h)] = \frac{4 \cdot \{1 - J_0[z(r, l, a, h)]\}}{[z(r, l, a, h)]^2}$$

наближення Тейлора (при $z \in [0; 8]$), а при $z > 8$ – за допомогою асимптотичного наближення Ганкеля функції $J_0(z)$. При цьому у колі точки $z = 8$ було виявлено досить велику похибку. Тому обчислення функції $K_2(z)$ у діапазоні $z \in [5, 288; 17, 004]$ проводилося за допомогою наближення Чебишова цієї функції у діапазоні $z \in [4, 6; 17, 2]$. Коефіцієнти Чебишова A_k (розраховувалися у системі Maple 18 з точністю 26 десяткових цифр) та діапазон було обрано за допомогою експерименту, ціллю якого було мінімізувати загальну похибку обчислення функції $Pl\tilde{p}_{a,r}(l)$. Завдяки використанню наближення Чебишова одержана функція $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ має більш ніж у два рази меншу похибку, ніж за обчисленням за попереднім алгоритмом. Довільне значення функції $Plop_{a,r}(l)$ обраховується за допомогою шеститочкової схеми Ейткена, яку можна вважати (деякою мірою) згладжувальним фільтром. Застосування шеститочкової схеми Ейткена вносить похибку, яка дорівнює 6% від загальної похибки обчислення функції $Plop_{a,r}(l)$, але допомагає значно зекономити час при формуванні АРБФ при вирішенні крайових проблем за допомогою методу колокації.

Ключові слова: функції з компактним носієм, атомарні функції, алгоритми обчислення функцій з компактним носієм, методи рішення крайових проблем з довільною сіткою (mesh-free), методи вирішення крайових проблем, атомарні функції багатьох змінних.

Some Features of the construction of a family of atomic radial basis functions $Plop_{r,a}(x_1, x_2)$

**Kolodyazhny
Vladimir**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;
Kharkiv National Automobile and Highway University,
st. Yaroslava Mudrogo 25, Kharkiv, 61002, Ukraine
e-mail: vladmax1949@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0001-0000-0000>*

**Selischev
Vladimir**

*Senior Lecturer;
National Aerospace University M.E. Zhukovsky "KHAI",
street Chkalova 27, Kharkiv, 61070, Ukraine
e-mail: sel_vol@ukr.net;
<https://orcid.org/0000-0001-6537-7763>*

**Lisina
Olga**

*PhD of Physical and Mathematical Sciences, docent;
V.N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Square 4, Kharkiv, 61022,
Ukraine
e-mail: lisina_korovina@ukr.net;
<https://orcid.org/0000-0001-0000-0000>*

A lot of methods for solving boundary value problems with the help of arbitrary grids, such as SDI (scattered data interpolation) and SPH (smoothed particle hydrodynamics), use families of atomic radial basis functions that depend on parameters to improve the accuracy of calculations. Those functions are commonly called "shape functions". When polynomials or polynomial splines are used as such functions, they are called "basis functions". The term "radial" means that the carrier of the function is a disk or a layer. The term "atomic" means that the support of the function is limited, i.e. the function is finite. The article presents an algorithm for constructing such a function, which is the solution of the functional-differential equation

$$\Delta u(x_1, x_2) = \lambda \iint_{\partial\Omega} u[a(x_1 - \xi_1), a(x_2 - \xi_2)] d\omega + \mu u(ax_1, ax_2)$$

where $\partial\Omega$ is the circle of radius r : $\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$, and $a > 1$. The function generated by this equation $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ has two parameters: r and a . Variation of these parameters allows reducing the error in the calculations of the Poisson boundary value problem by several times. The theorem of the existence of such an unambiguous function is proved in the article. The proof of the theorem allows us to construct one-dimensional Fourier transform of this function in the form $Pl\tilde{p}_{a,r}(l) = \prod_{h=0}^{\infty} K_2[z(r, l, a, h)]$, where $K_2[z(r, l, a, h)] = \frac{4 \cdot \{1 - J_0[z(r, l, a, h)]\}}{[z(r, l, a, h)]^2}$. Previously, function $K_2(z)$ has been calculated by using its Taylor approximation at $z \in [0; 8]$, and by using the asymptotic Hankel approximation of the function $J_0(z)$ at $z > 8$. Thus in a circle of a point $z = 8$ a fairly large error was found. Therefore, the calculation of the function $K_2(z)$ in the range $z \in [5, 288; 17, 004]$ has been carried out by Chebyshev approximation of this function in the range $z \in [4, 6; 17, 2]$. Chebyshev coefficients A_k (calculated in the Maple 18 system with an accuracy of 26 decimal digits) and the range have been chosen by the experiment aimed to minimize the overall error in calculating the function $Pl\tilde{p}_{a,r}(l)$. Due to using the Chebyshev approximation, the obtained function $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ has more than half as many errors as calculated by the previous algorithm. Arbitrary value of the function $Plop_{a,r}(l)$ is calculated by using a six-point Aitken scheme, which can be considered as a smoothing filter. The use of Aitken's six-point scheme introduces an error equal to 6% of the total function calculation error $Plop_{a,r}(l)$, but helps to save a lot of time in the formation of ARBF in solving boundary value problems using the method of collocation.

Keywords: functions with a compact support, atomic functions, algorithms for calculating functions with a compact support, shape functions, methods for solving boundary value problems with an arbitrary grid (mesh-free), methods of solving boundary value problems, atomic functions of many variables.

1 Вступление

Практическое применение атомарных радиальных базисных функций (АРБФ) многих переменных [1, 2] при реализации методов решения краевых задач математической физики со свободной сеткой вынудило авторов унифицировать алгоритмы вычисления указанных функций. Необходимость предлагаемого подхода связана с краевой проблемой (скачок решения на границе области) и некоторой нестабильности решения внутри области. Для улучшения качества приближенного решения краевой задачи обычно используются семейства радиальных базисных функций, зависящих от параметров. В частности, при использовании мультиквадратической функции вида $\sqrt{1 + \|x - x_j\|^2 / \alpha_j^2}$, применяемой в методах SDI (scattered data interpolation) и SPH (smoothed particle hydrodynamics), при решении задач гидродинамики [1, 2], таким параметрами являются величины α_j . При применении АРБФ варьируемыми параметрами могут быть коэффициент α и радиус r , которые присутствуют в порождающей функцию $Plop(x_1, x_2)$ функционально-дифференциальном уравнении [3]

$$\Delta u(x_1, x_2) = \lambda \iint_{\partial\Omega} u[a(x_1 - \xi_1), a(x_2 - \xi_2)] d\omega + \mu u(ax_1, ax_2), \quad (1)$$

где $\partial\Omega$ – окружность радиуса r : $\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$, а параметр $a \geq 2$. Наличие этих параметров позволяет обозначать данную функцию $Plop(x_1, x_2)$ в виде $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$.

2. Построение АРБФ $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$

Рассмотрим процедуру построения функции $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$, которая определяется следующей теоремой.

Теорема. Для уравнения (1) существует и единственно бесконечно дифференцируемое решение с компактным носителем в виде круга радиуса $R = \frac{ra}{a-1}$ нормированное условием

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Plop_{a,r}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$ только при следующих значениях коэффициентов:
 $\mu = -2\pi \cdot r \cdot \lambda$ и $\lambda = \frac{2 \cdot a^2}{\pi \cdot r^3}$; АРБФ $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ является инвариантной относительно операции вращения:

$$Plop_{a,r}(x_1, x_2) \equiv f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right); \quad (2)$$

преобразование Фурье функции $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ имеет вид

$$Pl\tilde{o}p_{a,r}(t_1, t_2) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{4 \cdot \left[1 - J_0\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)\right]}{\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)^2} \quad (3)$$

и является быстро убывающей при $t_1^2 + t_2^2 \rightarrow \infty$ функцией экспоненциального типа 1; функция $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ в квадрате $\left[-\frac{ra}{a-1}, \frac{ra}{a-1}\right] \times \left[-\frac{ra}{a-1}, \frac{ra}{a-1}\right]$, представляется в виде ряда Фурье [3]:

$$Plop_{a,r}(x_1, x_2) = \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} U_{pq} \cos\left(\frac{a-1}{a} p\pi x_1\right) \cos\left(\frac{a-1}{a} q\pi x_2\right), \quad (4)$$

где коэффициенты Фурье имеют вид $U_{00} = \frac{1}{4}$; $U_{p0} = \frac{1}{2} Pl\tilde{o}p_{a,r}\left(\frac{(a-1)}{a} \pi p, 0\right)$;

$$U_{0q} = \frac{1}{2} Pl\tilde{o}p_{a,r}\left(0, \frac{(a-1)}{a} \pi q\right); U_{pq} = Pl\tilde{o}p_{a,r}\left(\frac{(a-1)}{a} p\pi, \frac{(a-1)}{a} q\pi\right), p, q = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Будем обозначать через $U(t_1, t_2)$ двойное преобразование Фурье функции $u(x_1, x_2)$: $U(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2) e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dx_1 dx_2$. Применим к функционально-дифференциальному уравнению (1) двойное преобразование Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta u(x_1, x_2) e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lambda \int_{\partial\Omega} u[a(x_1 - \xi_1), a(x_2 - \xi_2)] d\omega + \mu u(ax_1, ax_2) \right\} e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dx_1 dx_2. \quad (5)$$

В соответствии со следствием из теоремы 5.4 из [5] имеем, что $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} f(x) \cdot e^{-i\xi x} dx = (i\xi)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\xi x} dx = -\xi^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\xi x} dx$.

Исходя из этого, для данного двумерного случая получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta u(x_1, x_2) e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\left(t_1^2 + t_2^2\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2) e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\left(t_1^2 + t_2^2\right) \cdot U(t_1, t_2).$$

Введение вспомогательных переменных $ax_1 - a\xi_1 = \eta_1$, $ax_2 - a\xi_2 = \eta_2$ позволяет переписать уравнение (5) в виде:

$$-\left(t_1^2 + t_2^2\right) \cdot U(t_1, t_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \oint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2} \lambda u \left(\frac{a\eta_1}{a}, \frac{a\eta_2}{a} \right) e^{-\frac{1}{a}(t_1\eta_1 + t_2\eta_2)} e^{-i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2)} d\omega d\frac{\eta_1}{a} d\frac{\eta_2}{a} + \frac{\mu}{a^2} U \left(\frac{t_1}{a}, \frac{t_2}{a} \right).$$

Изменив в правой части уравнения последовательность выполнения операций преобразования Фурье и интегрирования по контуру, получим [4, 7]:

$$-(t_1^2 + t_2^2) \cdot \tilde{u}(t_1, t_2) = \frac{1}{a^2} \tilde{u} \left(\frac{t_1}{a}, \frac{t_2}{a} \right) \cdot \left[\lambda \oint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2} e^{-i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2)} d\omega + \mu \right]. \quad (6)$$

Интегрирование вдоль окружности $\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$ дает возможность представить интеграл в правой части соотношения (6) в следующем виде [6]:

$$\begin{aligned} \oint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2} e^{-i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2)} d\omega &= \begin{cases} \xi_1 = r \cos(\varphi); \\ \frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} = \sin(\theta); \\ \xi_2 = r \sin(\varphi); \\ \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} = \cos(\theta); \\ d\omega = r d\varphi \end{cases} = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \cos \left[\sqrt{t_1^2 + t_2^2} \cdot \left(\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \cdot r \cos(\varphi) + \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \cdot r \sin(\varphi) \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + i \sin \left[\sqrt{t_1^2 + t_2^2} \cdot \left(\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \cdot r \cos(\varphi) + \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \cdot r \sin(\varphi) \right) \right] \right\} r d\varphi = \\ &= r \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} \left\{ \cos \left[r \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \sin(\varphi + \theta) \right] + i \cdot \sin \left[r \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \sin(\varphi + \theta) \right] \right\} d(\varphi + \theta) = \\ &= r \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \cos \left[r \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \sin(\varphi) \right] + i \cdot \sin \left[r \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \sin(\varphi) \right] \right\} d\varphi = \\ &= 2r \int_0^{\pi} \left\{ \cos \left[r \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \sin(\varphi) \right] + i \cdot \sin \left[r \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \sin(\varphi) \right] \right\} d\varphi = \\ &= 2\pi \cdot r \cdot \left[J_0 \left(r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \right) + i \cdot 0 \right] = 2\pi \cdot r \cdot J_0 \left(r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \right). \end{aligned}$$

То есть, $\oint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2} e^{-i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2)} d\omega = 2\pi r \cdot J_0 \left(r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \right)$, где $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi) d\varphi$ – функция Бесселя с нулевым индексом.

Таким образом, уравнение (6) может быть записано в следующем виде:

$$\tilde{u}(t_1, t_2) = -\frac{1}{a^2} \tilde{u} \left(\frac{t_1}{a}, \frac{t_2}{a} \right) \frac{\lambda \cdot 2\pi r \cdot J_0 \left(r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \right) + \mu}{(t_1^2 + t_2^2)}. \quad (7)$$

Выбираем коэффициент $\mu = -2\pi \cdot r \cdot \lambda$, что обусловлено необходимостью иметь дробь $\frac{\lambda \cdot 2\pi \cdot r \cdot J_0 \left(r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \right) + \mu}{(t_1^2 + t_2^2)}$ целой функцией (при $t_1^2 + t_2^2 \rightarrow 0$) [5].

В результате уравнение (7) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t_1, t_2) &= \tilde{u}\left(\frac{t_1}{a}, \frac{t_2}{a}\right) \frac{2\pi \cdot r \cdot \lambda \cdot \left[1 - J_0\left(r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)\right]}{a^2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left(r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)^2} = \\ &= \tilde{u}\left(\frac{t_1}{a}, \frac{t_2}{a}\right) \frac{2\pi r^3 \cdot \lambda \cdot \left[1 - J_0\left(r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)\right]}{\left(r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8), согласно [3, 5, 8], может быть представлено в виде бесконечного произведения:

$$\tilde{u}(t_1, t_2) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \frac{2\pi r^3}{a^2} \cdot \left[1 - J_0\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)\right]}{\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)^2}. \quad (9)$$

Сходимость произведения (9) гарантируется выбором коэффициента $\lambda = \frac{2a^2}{\pi r^3}$. Данное значение λ отвечает требованию, что выражение по знаменителю бесконечного произведения (9), должно стремиться к единице при $t_1^2 + t_2^2 \rightarrow 0$ [5].

После такого выбора λ выражение (9) преобразуется к виду, который является представлением обратного преобразования Фурье АРБФ $Pl\tilde{op}_{a,r}(x_1, x_2)$:

$$Pl\tilde{op}_{a,r}(t_1, t_2) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{4 \cdot \left[1 - J_0\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)\right]}{\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)^2}. \quad (10)$$

Если $\tilde{u}(t_1, t_2)$ рассматривать как функцию комплексных переменных, то она будет целой функцией экспоненциального типа 1.

Из теоремы Винера-Пэли [5, 6] вытекает, что обратное преобразование Фурье функции $\tilde{u}(t_1, t_2)$:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{h=0}^{\infty} \frac{4 \cdot \left[1 - J_0\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)\right]}{r^2 \cdot a^{-2h} \cdot (t_1^2 + t_2^2)} e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dt_1 dt_2,$$

будет функцией класса C^∞ с компактным носителем в виде круга с радиусом $R = \frac{ra}{a-1}$, вписанном в квадрат $[-R, R] \times [-R, R]$.

Искомая функция $u(x_1, x_2)$ будет четной относительно каждого своего переменного. Её представление в виде двойного ряда Фурье в действительной форме в квадрате может быть вычислено по формуле [2]:

$$u(x_1, x_2) = \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} U_{pq} \cos\left(\frac{a-1}{a} \cdot p\pi x_1\right) \cdot \cos\left(\frac{a-1}{a} \cdot q\pi x_2\right), \quad (11)$$

коэффициенты Фурье которого имеют следующей вид:

$$\begin{aligned}
 U_{00} &= 1/4; \quad U_{p0} = \frac{1}{2} \int_{-a/(a-1)}^{a/(a-1)} u(\xi_1, 0) \cos \left[\frac{(a-1)}{a} \cdot p\pi\xi_1 \right] d\xi_1; \\
 U_{0q} &= \frac{1}{2} \int_{-a/(a-1)}^{a/(a-1)} u(0, \xi_2) \cos \left[\frac{(a-1)}{a} \cdot q\pi\xi_2 \right] d\xi_2; \\
 U_{pq} &= \int_{-a/(a-1)}^{a/(a-1)} \int_{-\sqrt{a^2/(a-1)^2 - \xi_1^2}}^{\sqrt{a^2/(a-1)^2 - \xi_1^2}} u(\xi_1, \xi_2) \cos \left[\frac{(a-1)}{a} \cdot p\pi\xi_1 \right] \cos \left[\frac{(a-1)}{a} \cdot q\pi\xi_2 \right] d\xi_1 d\xi_2. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Так как функция $u(x_1, x_2)$ является финитной относительно переменных x_1 и x_2 , это позволяет заменить интегралы в (12) на несобственные. А так как функция $u(x_1, x_2)$ является четной относительно переменных x_1 и x_2 , можно заменить тригонометрические функции $\cos \frac{(a-1)p\pi\xi}{a}$ и $\cos \frac{(a-1)q\pi\eta}{a}$ на экспоненциальные $\exp \left[-i \frac{(a-1)p\pi\xi}{a} \right]$ и $\exp \left[-i \frac{(a-1)q\pi\eta}{a} \right]$. В результате получаем следующие представления для коэффициентов Фурье ряда (12):

$$\begin{aligned}
 U_{00} &= 1/4; \quad U_{p0} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi_1, 0) \exp \left[-i \frac{(a-1)p\pi\xi_1}{a} \right] d\xi_1 = \frac{1}{2} \tilde{u} \left[\frac{(a-1)p\pi}{a}, 0 \right]; \\
 U_{0q} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(0, \xi_2) \exp \left[-i \frac{(a-1)q\pi\xi_2}{a} \right] d\xi_2 = \frac{1}{2} \tilde{u} \left(0, \frac{(a-1)q\pi}{a} \right); \\
 U_{pq} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi_1, \xi_2) \exp \left[-i \frac{(a-1)p\pi\xi_1}{a} \right] \exp \left[-i \frac{(a-1)q\pi\xi_2}{a} \right] d\xi_1 d\xi_2 = \\
 &= \tilde{u} \left[\frac{(a-1)p\pi}{a}, \frac{(a-1)q\pi}{a} \right], \quad p, q = 1, 2, \dots \quad (13)
 \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что приведенное в формулах (11) и (12) решение $u(x_1, x_2)$ функционально-дифференциального уравнения (1), при заданном значении параметра a , является искомым АРБФ $Plor_{a,r}(x_1, x_2)$.

3. Оценка точности вычисления обратного преобразования Фурье $Pl\tilde{op}_{a,r}(t_1, t_2)$ АРБФ $Plor_{a,r}(x_1, x_2)$

Отметим, что функция $Pl\tilde{op}_{a,r}(t_1, t_2)$ (см. представление (10)) также, как и функция $Plor(x_1, x_2)$ [3, 8] инвариантна относительно операции вращения (2), то при выборе $l = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$

$$\text{имеем } Pl\tilde{op}_{a,r}(t_1, t_2) = Pl\tilde{op}_{a,r}(l) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{4 \cdot \left[1 - J_0 \left(\frac{r \cdot l}{a^h} \right) \right]}{\left(\frac{r \cdot l}{a^h} \right)^2}.$$

Введем вспомогательную функцию

$$z(r, l, a, h) = \frac{r \cdot l}{a^h}. \quad (14)$$

Тогда функцию $Pl\tilde{op}_{a,r}(l)$ можно представить в виде

$$Pl\tilde{op}_{a,r}(l) = \prod_{h=0}^{\infty} K_2 \left[z(r, l, a, h) \right], \quad (15)$$

где

$$K_2[z(r, l, a, h)] = \frac{4 \cdot \{1 - J_0[z(r, l, a, h)]\}}{[z(r, l, a, h)]^2}. \quad (16)$$

Оценим поведение функции $K_2[z(r, l, a, h)]$ при $h \rightarrow \infty$. При этом очевидно, что для любых аргументов r, l и $a > 1$ $z(r, l, a, h) = \frac{r \cdot l}{a^h} \rightarrow 0$. В окрестности нуля функцию Бесселя $J_0(z)$ можно

представить в виде разложения в ряд Тейлора, $J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{2n}}{(n!)^2}$ [7, 10].

Ряд Тейлора функции $K_2[z(r, l, a, h)]$ в окрестности нуля получает представление:

$$K_2[z(r, l, a, h)] = 1 - \frac{z^2(r, l, a, h)}{2^2 \cdot (2!)^2} + \frac{z^4(r, l, a, h)}{2^4 \cdot (3!)^2} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}(r, l, a, h)}{2^{2n-2} \cdot (n!)^2} + \dots \quad (17)$$

График функции $K_2(z)$ в диапазоне изменения величины $z, z \in [0; 8]$ в декартовой системе координат приведен на рис. 1.

Оценим погрешность метода вычисления функции $K_2(z)$ по ее разложению в ряд Тейлора в окрестности нуля (в диапазоне значений величины $z, z \in [0; 8]$). Известно, что минимальная относительная погрешность вычисления (округления) при помощи чисел с плавающей запятой равна половине младшего разряда мантииссы числа. Для 80-разрядных чисел с плавающей запятой длина мантииссы равна 64 разряда и, соответственно, минимальная относительная погрешность вычислений будет равна $\varepsilon_0 = 2^{-64} \approx 5,42 \cdot 10^{-20}$ [5]. Минимальную абсолютную погрешность при

значениях $z, z \in [0; 8]$ вычисляем как $\varepsilon_0 \cdot \left[K_2(z) + \max_n \frac{z^{2n}(r, l, a, h)}{2^{2n-2} \cdot (n!)^2} \right]$, т.е. сумма величин

функции и максимального абсолютного значения вычисляемых членов ряда Тейлора данной функции, умноженная на ε_0 . График минимальной абсолютной погрешности вычисления функции $K_2(z)$ с помощью ее ряда Тейлора в окрестности точки 0 приведен на рис. 2. Обозначим эту функцию через $MErK(z)$ и назовем ее методической погрешностью вычислений функции $K_2(z)$, т.к. изменения функции $K_2(z)$, вызванные значениями членов ряда, по абсолютной величине меньших $MErK(z)$ являются недостоверными. Другими словами, процесс вычисления

ряда (6) можно прекратить при выполнении неравенства $MErK(z) > \frac{z^{2n}}{2^{2n-2} \cdot (n!)^2}$.

Оценим абсолютную погрешность вычисления функции $K_2(z)$ в диапазоне изменения величины $z, z \in [0; 8]$. Алгоритм, составленный для оценки абсолютной погрешности функции $K_2(z)$ с помощью ее ряда Тейлора, привел к результатам, показанным на рис. 2.

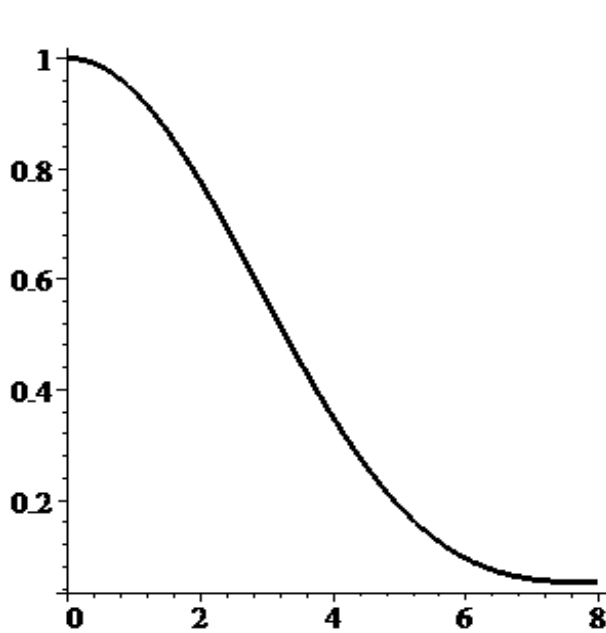


Рисунок 1 – График функции $K_2(z)$ в декартовой системе координат при $z \in [0; 8]$

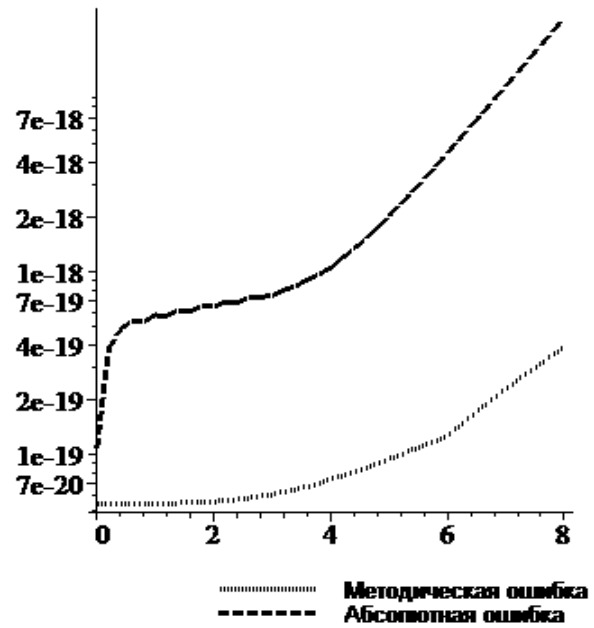


Рисунок 2 – Методическая и абсолютная погрешности вычисления функции $K_2(z)$ с помощью разложения Тейлора при $z \in [0; 8]$

Еще один алгоритм вычисления функции $K_2(z)$ применяется при больших значениях аргумента. Следуя представлению (16), видим, что можно записать

$$K_2(z) = \frac{4 \cdot [1 - J_0(z)]}{z^2}. \quad (18)$$

Обычно принято рассчитывать значения функции Бесселя $J_0(z)$ при значениях аргумента больших 8 с помощью асимптотического приближения Ханкеля [7, 10]: $J_0^H(z) = \sqrt{2/(\pi \cdot z)} \cdot [P(z) \cdot \cos(\zeta) - Q(z) \cdot \sin(\zeta)]$, где $\zeta = z - \frac{\pi}{4}$.

Согласно справочнику Абрамовитца и Стиган [10] полином $P(z)$ имеет представление:

$$P(z) = 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! \cdot (8z)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4! \cdot (8z)^4} + \dots + (-1)^k \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (4k-3)^2 \cdot (4k-1)^2}{(2k)! \cdot (8z)^{2k}} + \dots$$

Полином $Q(z)$ согласно [10] имеет следующее представление

$$Q(z) = -\frac{1}{8z} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! \cdot (8z)^3} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{5! \cdot (8z)^5} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (4k-1)^2 \cdot (4k+1)^2}{(2k+1)! \cdot (8z)^{2k+1}} + \dots$$

Проведем оценку методической погрешности при вычислении $J_0(z)$ с помощью асимптотического приближения Ханкеля. Так как ряды $P(z)$ и $Q(z)$ знакопеременные, то если рассмотреть в приближении Ханкеля функции $J_0(z)$ для n членов ряда $P(z)$ и m членов ряда $Q(z)$, то можно считать, что методическая погрешность для $P(z)$ представима как

$\left| P(z) - \sum_{i=1}^n P_i(z) \right| \leq |P_{n+1}(z)|$ и, соответственно, для $Q(z) - \sum_{i=1}^m Q_i(z) \leq |Q_{m+1}(z)|$. Здесь $P_{n+1}(z)$ – $n+1$ -й член ряда $P(z)$, а $Q_{m+1}(z)$ – $m+1$ член ряда $Q(z)$.

Если обозначить частное приближение Ханкеля функции $J_0^H(z)$ как $H_{n,m}(z)$, то

$$\begin{aligned} |J_0^H(z) - H_{n,m}(z)| &= \left| \sqrt{2/(\pi \cdot z)} \cdot [P(z) \cdot \cos(\varphi) - Q(z) \cdot \sin(\varphi)] - \right. \\ &\left. - \sqrt{2/(\pi \cdot z)} \cdot \left[\sum_{i=1}^n P_i(z) \cdot \cos(\varphi) - \sum_{i=1}^m Q_i(z) \cdot \sin(\varphi) \right] \right| \leq \\ &\leq \left| \sqrt{2/(\pi \cdot z)} \cdot [P_{n+1}(z) \cdot \cos(\varphi) - Q_{m+1}(z) \cdot \sin(\varphi)] \right| \leq \sqrt{2/(\pi \cdot z)} \cdot R(z), \end{aligned}$$

где $R(z) = \sqrt{P_{n+1}^2(z) + Q_{m+1}^2(z)}$. Это и будет максимальной погрешностью метода асимптотического приближения Ханкеля функции $J_0(z)$.

Вычислять значения функции $J_0(z)$ планируется с помощью асимптотического приближения Ханкеля при $z \geq 14,5$, то оценим абсолютную погрешность для функции $J_0^H(z)$ в диапазоне изменения величины z , $z \in [14,5; 19,0]$ для следующих вариантов n и m : (14; 13), (14; 14), (15; 14), (15; 15), (16; 15). Значения членов ряда $P(z)$ ($P_i(z)$) и членов ряда $Q(z)$ ($Q_i(z)$), предназначенных для оценки методической погрешности асимптотического приближения Ханкеля функции $J_0(z)$ приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1 – Значения членов ряда $P(z)$ ($P_i(z)$) при $z \in [14,5; 19,0]$

$P_i \setminus z$	14,5	15,25	16,0	16,75	17,5	18,25	19,0
P_{14}	3,880E-14	9,453E-15	2,465E-15	6,834E-16	2,005E-16	6,191E-17	2,005E-17
P_{15}	3,748E-14	8,256E-15	1,956E-15	4,948E-16	1,330E-16	3,776E-17	1,128E-17
P_{16}	4,147E-14	8,258E-15	1,777E-16	4,102E-16	1,010E-16	2,637E-17	7,268E-18
P_{17}	5,210E-14	9,379E-15	1,833E-16	3,862E-16	8,710E-17	2,091E-17	5,317E-18
P_{18}	7,375E-14	1,200E-14	2,131E-16	4,097E-16	8,465E-17	1,869E-17	4,384E-18

Исходя из данных табл. 1 при значениях $z \leq 15$ целесообразно взять для вычисления функции $P(z)$ 14 членов ряда; при $z \in (15,0; 16,25]$ – 15 членов ряда, при $z \in (16,25; 17,5]$ – 16 членов ряда и при $z \geq 17,5$ – 17 членов ряда.

Таблица 2 – Значения членов ряда $Q(z)$ ($Q_i(z)$) при $z \in [14,5; 19,0]$

$Q_i \setminus z$	14,5	15,25	16,0	16,75	17,5	18,25	19,0
Q_{13}	4,166E-14	1,067E-14	2,920E-15	8,477E-16	2,598E-16	8,366E-17	2,820E-17
Q_{14}	3,747E-14	8,681E-15	2,157E-15	5,714E-16	1,604E-16	4,751E-17	1,477E-17
Q_{15}	3,879E-14	8,123E-15	1,834E-15	4,432E-16	1,140E-16	3,104E-17	8,907E-18
Q_{16}	4,577E-14	8,666E-15	1,777E-15	3,920E-16	9,236E-17	2,312E-17	6,122E-18
Q_{17}	6,109E-14	1,046E-14	1,948E-15	3,921E-16	8,463E-17	1,948E-17	4,759E-18

Исходя из данных табл. 2 при значениях $z \leq 16$ целесообразно взять для вычисления функции $Q(z)$ 14 членов ряда, при $z \in (16,0; 17,5]$ – 15 членов ряда, при $z > 17,5$ – 16 членов ряда.

График методической и абсолютной погрешностей вычислений функции $K_2(z)$ с помощью асимптотического приближения Ханкеля при изменении величины z , $z \in [15; 19]$ представлен на рис. 3.

Для уменьшения погрешности вычислений функции $K_2(z)$ в диапазоне изменения величины z , $z \in [4,6; 17,2]$ используются многочлены Чебышева. Интерполирование функции $f(x) \in C[a, b]$ с использованием многочленов Чебышева базируется на минимизации выражения

$\omega_n(x) = \max \prod_{k=0}^n (x - x_k)$ путем соответствующего выбора узлов интерполяции.

Интерполяционный многочлен имеет вид: $P_n(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^n A_k T_k\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right)$, где

$$A_k = \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{\cos(2i+1)k\pi}{2n+2}, \quad k = \overline{0, n}, \quad T_k(x) - k\text{-й многочлен Чебышева.}$$

При $f(x) \in C^{(n+1)}[a, b]$ оценка погрешности приближения Чебышева имеет вид

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} \max |f^{(n+1)}(x)| \quad [10, 11].$$

При этом возникает проблема подбора количества коэффициентов n и диапазона $[a, b]$. Предполагая, что $|b-a|=12,6$, n выбрано равным 30, с учетом того, что последний член ряда $A_{29} < \varepsilon_0$ (где ε_0 – машинное эpsilon при расчетах с типами данных long double языка C++ и Extended языка Pascal). Расчеты коэффициентов A_k и T_k производились в среде Maple 18 с параметром количества десятичных цифр, равным $Digits=32$. Поэтому примерная точность вычислений – не менее 26 десятичных цифр. При этом, $|K_2(z) - P_{31}(z)| \leq \frac{(b-a)^{31}}{2^{63}(32)!} \max |K_2^{31}(z)| = \frac{0,1401 \cdot 12,6^{31}}{2^{63}(32)!} \approx 2,3878857 \cdot 10^{-20}$. В

качестве значений a и b выбраны $a = 4,6$ и $b = 17,2$.

Рассчитанная одновременно сумма абсолютной и методической погрешностей вычислений в диапазоне значений величины z , $z \in [4,6; 17,2]$ весьма мала (смотри рис. 4) и соответствует теоретическим сведениям об аппроксимации Чебышева [11].

Совмещенные оценки точности вычисления функции $K_2(z)$ различными методами показаны на рис. 5 и 6. На рис. 5 показано сравнение ошибок вычисления функции $K_2(z)$ с помощью разложения Тейлора и аппроксимации Чебышева при $z \in [5,15; 5,4]$. Очевидно, что при $z \leq 5,288$ декомпозиция Тейлора имеет меньшую погрешность вычислений, то есть $K_2(z)$ при $z \leq 5,288$ лучше вычислять с помощью декомпозиции Тейлора. А при $z > 5,288$ меньшая погрешность вычислений у аппроксимации Чебышева, то есть $K_2(z)$ при $z > 5,288$ лучше вычислять с помощью аппроксимации Чебышева. Таким образом, лучше всего в качестве точки перехода с вычисления $K_2(z)$ методом декомпозиции Тейлора на метод вычисления $K_2(z)$ с помощью аппроксимации Чебышева следует выбрать $z = 5,288$. При этом максимальная погрешность приближенно равна $2,63 \cdot 10^{-18}$.

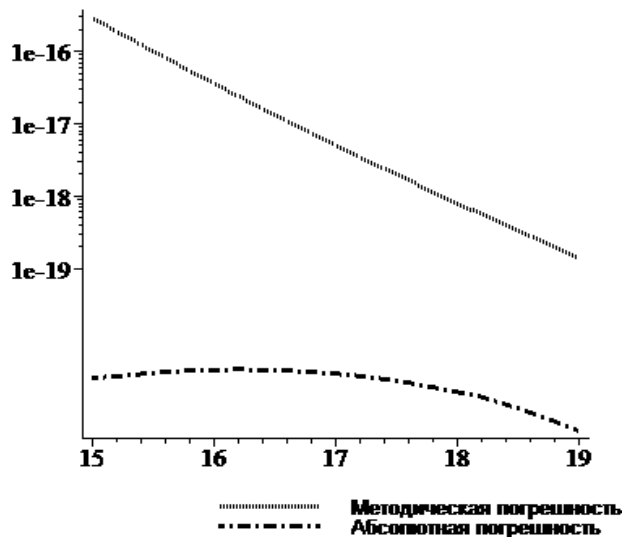


Рисунок 3 – Методическая и абсолютная погрешности вычисления функции $K_2(z)$ с помощью приближения Ханкеля при $z \in [15; 19]$

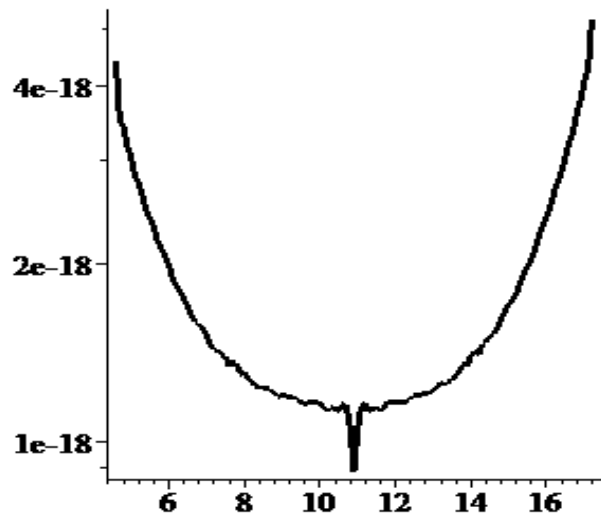


Рисунок 4 – Полная погрешность вычисления функции $K_2(z)$ с помощью аппроксимации Чебышева при $z \in [4,6; 17,2]$

На рис. 6 показано сравнение ошибок вычисления функции $K_2(z)$ с помощью аппроксимации Чебышева и приближения Ханкеля при $z \in [16,85; 17,15]$. Очевидно, что при $z \leq 17,004$ аппроксимация Чебышева имеет меньшую погрешность вычислений, то есть $K_2(z)$ при $z \leq 17,004$ лучше вычислять с помощью аппроксимации Чебышева. А при $z > 17,004$ меньшая погрешность вычислений функции $K_2(z)$ с помощью асимптотического приближения Ханкеля функции $J_0(z)$, то есть $K_2(z)$ при $z > 17,004$ лучше вычислять функцию $K_2(z)$ в помощью асимптотического приближения Ханкеля функции $J_0(z)$. Таким образом, лучше всего в качестве точки перехода с вычисления $K_2(z)$ методом аппроксимации Чебышева на метод вычисления функции $K_2(z)$ с помощью асимптотического приближения Ханкеля функции $J_0(z)$ следует выбрать $z = 17,004$. При этом максимальная погрешность приближенно равна $3,97 \cdot 10^{-18}$.

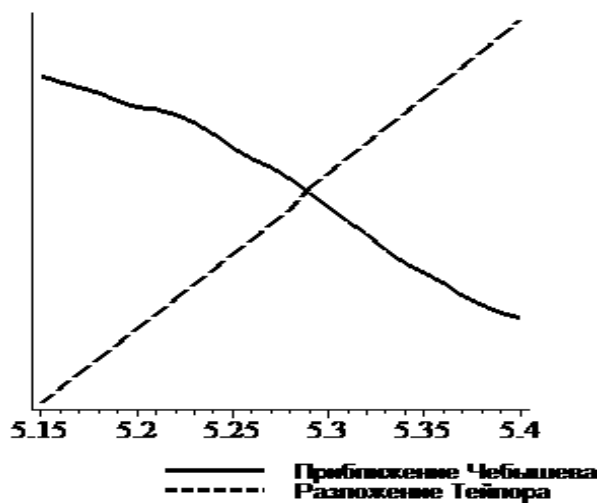


Рисунок 5 – Сравнение ошибок вычисления функции $K_2(z)$ с помощью разложения Тейлора и аппроксимации Чебышева при $z \in [5,15; 5,4]$

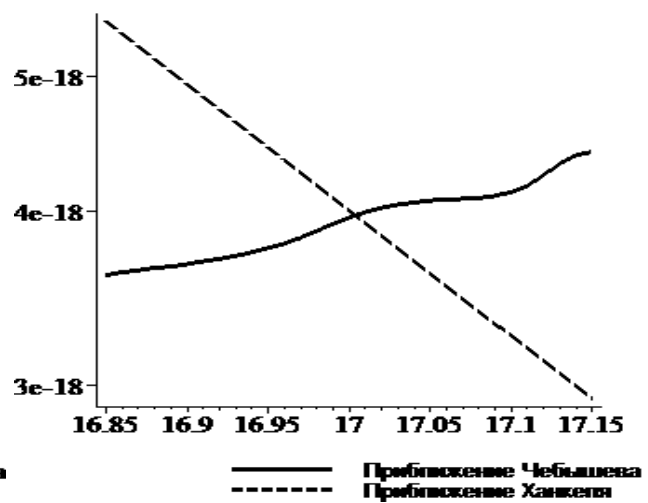


Рисунок 6 – Сравнение ошибок вычисления функции $K_2(z)$ с помощью аппроксимации Чебышева и с помощью асимптотического приближения Ханкеля при $z \in [16,85; 17,15]$

Из представления (16) следует, что при $h \rightarrow \infty$ функция $z(r, l, a, h) \rightarrow 0$ и $K_2[z(r, l, a, h)] \rightarrow 1$. При таком значении $K_2(z)$ минимальная абсолютная погрешность вычисления равна машинному эпсилон применяемого для расчетов типа данных Extended языка Pascal. Применяя для расчетов 80-разрядные числа с плавающей запятой, имеем значение машинного эпсилон равное $\varepsilon_0 = 2^{-64} = 5,4210 \cdot 10^{-20}$ [10, 11].

Отметим, что среди значений z , находящихся в окрестности нуля, важны только те, для которых величина $K_2(z)$ отличается от 1 на величину, большую ε_0 . Отсюда минимальное значение z , при котором величина $K_2(z)$ отлична от единицы, определяется неравенством

$$|K_2(z) - 1| \geq \varepsilon_0. \quad (19)$$

Подставляя выражение (17) в (19), получаем, $\left| -\frac{z_{\min}^2}{2^2 \cdot (2!)^2} + o(z_{\min}^2) \right| \approx \varepsilon_0$, откуда $z_{\min}^2 \approx 2^4 \cdot \varepsilon_0$ и

$$z_{\min} \approx 2^2 \cdot \sqrt{\varepsilon_0} = 9,3132 \cdot 10^{-10}, \quad (20)$$

где величина z_{\min} является нижней границей изменения z при вычислении коэффициентов обратного преобразования Фурье функции $Pl\tilde{o}\tilde{p}_{a,r}(l)$ в представлении (15).

Для более точного вычисления функции $Pl\tilde{o}\tilde{p}_{a,r}(x_1, x_2)$ следует выбирать большее количество расчетных точек по сравнению с формулой (4), а именно

$$Pl\tilde{o}\tilde{p}_{a,r}(x_1, x_2) = \frac{1}{k^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{pq} \cos\left(\frac{\pi}{k} \cdot px_1\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{k} \cdot qx_2\right), \quad (21)$$

где k можно принять равным 4, 8 или 16.

С целью определения значения $z(r, l, a, h)$ (при $h=0$), с которого начнем выполнение приближенных вычислений функции (15), оценим величину функции $K_2[z(r, l, a, h)]$ при $z \rightarrow +\infty$. При больших значениях z функцию Бесселя $J_0(z)$ можно заменить асимптотическим приближением Ханкеля [10] $J_0(z) \approx \sqrt{2/(\pi z)} \cdot \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$. Отсюда, при $z \rightarrow +\infty$ получаем

следующую оценку для $K_2[z(r, l, a, h)]$: $K_2[z(r, l, a, h)] \approx \frac{1 - 2\sqrt{1/\pi z(r, l, a, h)}}{z(r, l, a, h)^2} \leq \frac{1}{z(r, l, a, h)^2}$.

Таким образом, $K_2[z(r, l, a, h)] \rightarrow 0$ при $z \rightarrow +\infty$.

Расчеты показывают, что $Pl\tilde{o}\tilde{p}_{a,r}(z) \leq \varepsilon_0$ уже при значениях z , больших, чем $628 \cdot \pi$.

Таким образом, в качестве максимального значения для $z(r, l, a, 0)$ можно принять величину $z_{\max} = 628 \cdot \pi$ (как для случая обычной функции $Pl\tilde{o}\tilde{p}(z)$).

Для того, чтобы оценить максимальное количество элементов произведения (15) функции $Pl\tilde{o}\tilde{p}_{a,r}(z)$, вычислим

$$nn = \log_a \left(\frac{z_{\max}}{z_{\min}} \right) = \log_a \left(\frac{628 \cdot \pi}{9,3132 \cdot 10^{-10}} \right) \approx \log_a (2,1184 \cdot 10^{12}).$$

Так, для $a = 2,0$ величина $nn \approx 40,946$, для $a = 2,5$ – $nn \approx 30,975$, для $a = 3,0$ – $nn \approx 25,834$, для $a = 4,0$ – $nn \approx 20,473$, а для $a = 5,0$ – $nn \approx 17,635$.

Отсюда для приближенных расчетов функции $Pl\tilde{p}_{a,r}(z)$ формулу (15) можно заменить на формулу

$$Pl\tilde{p}_{a,r}(l) \approx \prod_{h=0}^{nn} K_2[z(r,l,a,h)]. \quad (22)$$

Формула (22) дает возможность рассчитать приближенное значение функции $Pl\tilde{p}_{a,r}(l)$ и построить ее графики для различных значений параметра a , (см. рис. 7). Графики абсолютных ошибок округления при вычислении функции $Pl\tilde{p}_{a,r}(l)$ для различных значений параметра a при $r=1$ приведены на рис. 8.

После замены формулы (15) приближенной формулой (22) в формуле (21) также можно заменить верхние границы суммирования конечными величинами, по параметру p это $m = k \cdot z_{\max} / \pi$, а по параметру q это $\sqrt{m^2 - p^2}$ (все точки преобразования Фурье должны находиться в круге радиуса m , иначе функция $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ не будет радиальной). При $k=8$ формула (21) приводится к следующему виду:

$$Plop_{a,r}(x_1, x_2) \approx \frac{1}{8^2} \cdot \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{\sqrt{m^2 - p^2}} U_{pq} \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot px_1\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot qx_2\right). \quad (23)$$

Функция $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ (23) является радиальной, эквивалентом которой будет одномерная функция $\hat{Plop}_{a,r}(v)$ (при $v = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$), построение которой можно осуществить по следующей формуле:

$$\hat{Plop}_{a,r}(v) = \frac{1}{8^2} \cdot \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{\sqrt{m^2 - p^2}} U_{pq} \cos\left(p \frac{\pi}{8} v\right) \cos\left(q \frac{\pi}{8} \cdot 0\right). \quad (24)$$

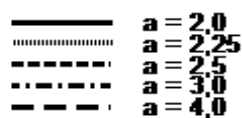
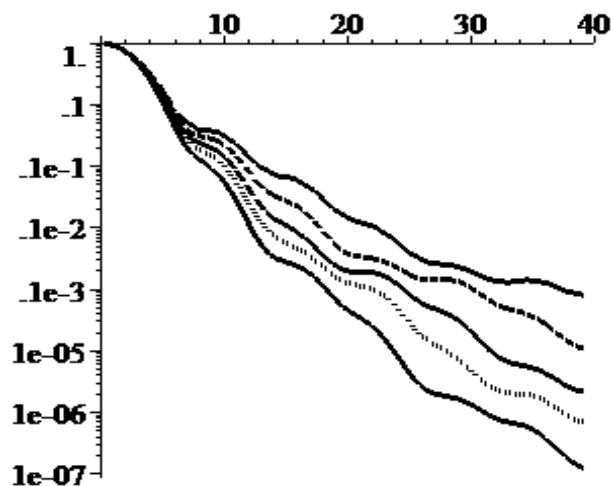


Рисунок 7 – Графики функций $Pl\tilde{p}_{a,r}(l)$ для различных значений параметра a , при $r=1$,

$$l \in [0; 40]$$

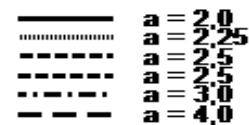
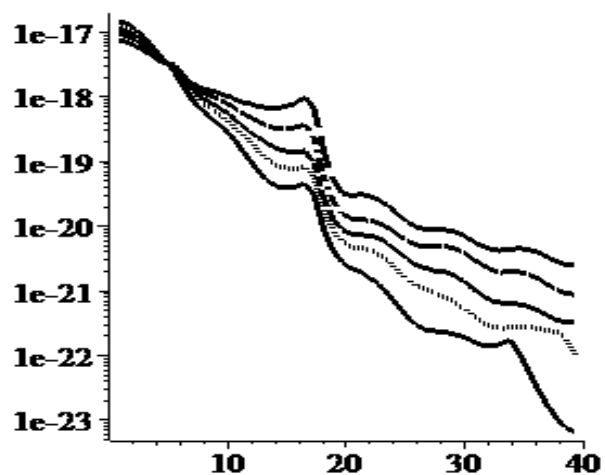


Рисунок 8 – Абсолютная ошибка округления функций $Pl\tilde{p}_{a,r}(l)$ для различных значений

$$\text{параметра } a, \text{ при } r=1, l \in [0; 40]$$

Таким образом, вычисления функции $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ для двух переменных можно свести к вычислению функции $\hat{Plop}_{a,r}(v)$ для одной переменной v , где $v \in \left[0; \frac{3 \cdot r \cdot a}{2 \cdot (a-1)}\right]$. Алгоритм вычислений будет следующим: разобьем отрезок $\left[0; \frac{3 \cdot r \cdot a}{2 \cdot (a-1)}\right]$ равномерно распределенными узлами, вычислим в них значения функции и расположим их в виде массива (файла). Произвольное значение функции $\hat{Plop}_{a,r}(v)$ будем вычислять с помощью интерполяции Лагранжа данной функции по равномерно распределенным узлам [9]. С целью уменьшения погрешностей, возникающих при интерполяции (в операциях деления), задаем количество узлов, равное $3 \cdot 2^{k-1}$, где k можно принять равным 15 или 16.

При замене формулы (21) на формулу (24) при вычислении функции $\hat{Plop}_{a,r}(v)$ точность ее вычисления зависит от параметра z_{\max} , для более корректного определения значения данной величины можно выяснить, какие максимальные изменения в значение функции $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ вносит слой двумерного преобразования Фурье с границами от z_{\max} до $z_{\max} + h$. Иначе говоря, нужно найти максимум выражения

$$\frac{1}{8^2} \left| \sum_{p=0}^{m_2} \sum_{q=0}^{\sqrt{m_2^2 - p^2}} U_{pq} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} px_1\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} qx_2\right) - \sum_{p=0}^{m_1} \sum_{q=0}^{\sqrt{m_1^2 - p^2}} U_{pq} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} px_1\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} qx_2\right) \right|,$$

где $m_1 = z_{\max} \cdot 8$, $m_2 = (z_{\max} + h) \cdot 8$. Расчеты данного выражения со значениями z_{\max} в диапазоне $[350\pi; 1850\pi]$ и $h = 50\pi$ для различных значений параметра a приведены в табл. 3.

Таблица 3 – Максимальное различие значений $\hat{Plop}_{a,r}(v)$ при изменении z_{\max} при различных значениях параметра a и $r=1$

Границы слоя		$a = 2,0$	$a = 2,25$	$a = 2,5$	$a = 3,0$	$a = 4,0$
z_{\max}	$z_{\max} + 50\pi$					
300π	350π	5,421E-20	2,168E-19			
350π	400π	0	1,084E-19	3,036E-18		
400π	450π		1,084E-19	3,253E-19		
450π	500π		2,711E-20	2,168E-19		
500π	550π		0	2,168E-19	3,947E-17	
550π	600π			2,168E-19	1,735E-17	
600π	650π			1,084E-19	6,831E-18	
650π	700π			2,711E-20	2,711E-18	
700π	750π			0	1,518E-18	
750π	800π				7,589E-19	7,137E-15
800π	850π				3,253E-19	4,446E-15
850π	900π				2,168E-19	2,457E-15
900π	950π				2,168E-19	1,132E-15
950π	1000π				2,168E-19	6,786E-16
1000π	1050π				2,168E-19	3,121E-16
1050π	1100π				2,168E-19	1,835E-16
1100π	1150π				2,168E-19	1,239E-16
1150π	1200π				2,711E-20	7,394E-17
1200π	1250π				2,711E-20	6,288E-17
1250π	1300π				1,084E-19	3,979E-17

Продолжение таблицы 3.

1300π	1350π					2,776E-17
1350π	1400π					1,952E-17
1400π	1450π					1,041E-17
1450π	1500π					7,156E-18
1500π	1550π					4,120E-18
1550π	1600π					2,494E-18
1600π	1650π					1,843E-18
1650π	1700π					1,301E-18
1700π	1750π					9,758E-19
1750π	1800π					8,674E-19
1800π	1850π					5,421E-19

Подберем на основании данных табл. 3 значения z_{\max} , при которых будем производить оценку погрешности вычисления семейства функций $\hat{Plop}_{a,r}(v)$ (приводятся в табл. 4).

Таблица 4 – Значения z_{\max} , подобранные для оценки погрешности вычисления функции $\hat{Plop}_{a,r}(v)$ при различных значениях параметра a и $r=1$

Параметр a	2,0	2,25	2,5	3,0	4,0
z_{\max}	350π	500π	700π	1250π	1800π

Графики абсолютных погрешностей при вычислении семейства функций $\hat{Plop}_{a,r}(v)$ при указанных в табл. 4 значениях величины z_{\max} приведены на рис. 9.

Приведенные в табл. 3 и на рис. 9 результаты дают возможность оценить полную погрешность вычисления функции $\hat{Plop}_{a,r}(v)$ при различных значениях параметра a (см. табл. 5).

Таблица 5 – Максимальные методическая, абсолютная и полная погрешности вычисления функции $\hat{Plop}_{a,r}(v)$ при различных значениях параметра a и $r=1$

Параметр a	2,0	2,25	2,5	3,0	4,0
Методическая погрешность	0	0	0	1,084E-19	5,421E-19
Абсолютная погрешность	2,139E-17	2,237E-17	2,371E-17	2,710E-17	3,424E-17
Полная погрешность	2,139E-17	2,237E-17	2,371E-17	2,721E-17	3,479E-17

Графики функций $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ при различных значениях параметра a приведены на рис. 10.

Как уже указывалось выше, произвольное значение функции $\hat{Plop}_{a,r}(v)$ получаем с помощью интерполяции Лагранжа по схеме Эйткена [9, 7]. По результатам погрешностей расчетов в качестве наиболее оптимальной для количества узлов, равном $N=49152$, выбираем шеститочечную схему Эйткена, или пятиточечную схему Эйткена при значениях параметра $a \leq 3$ (см. табл. 6).

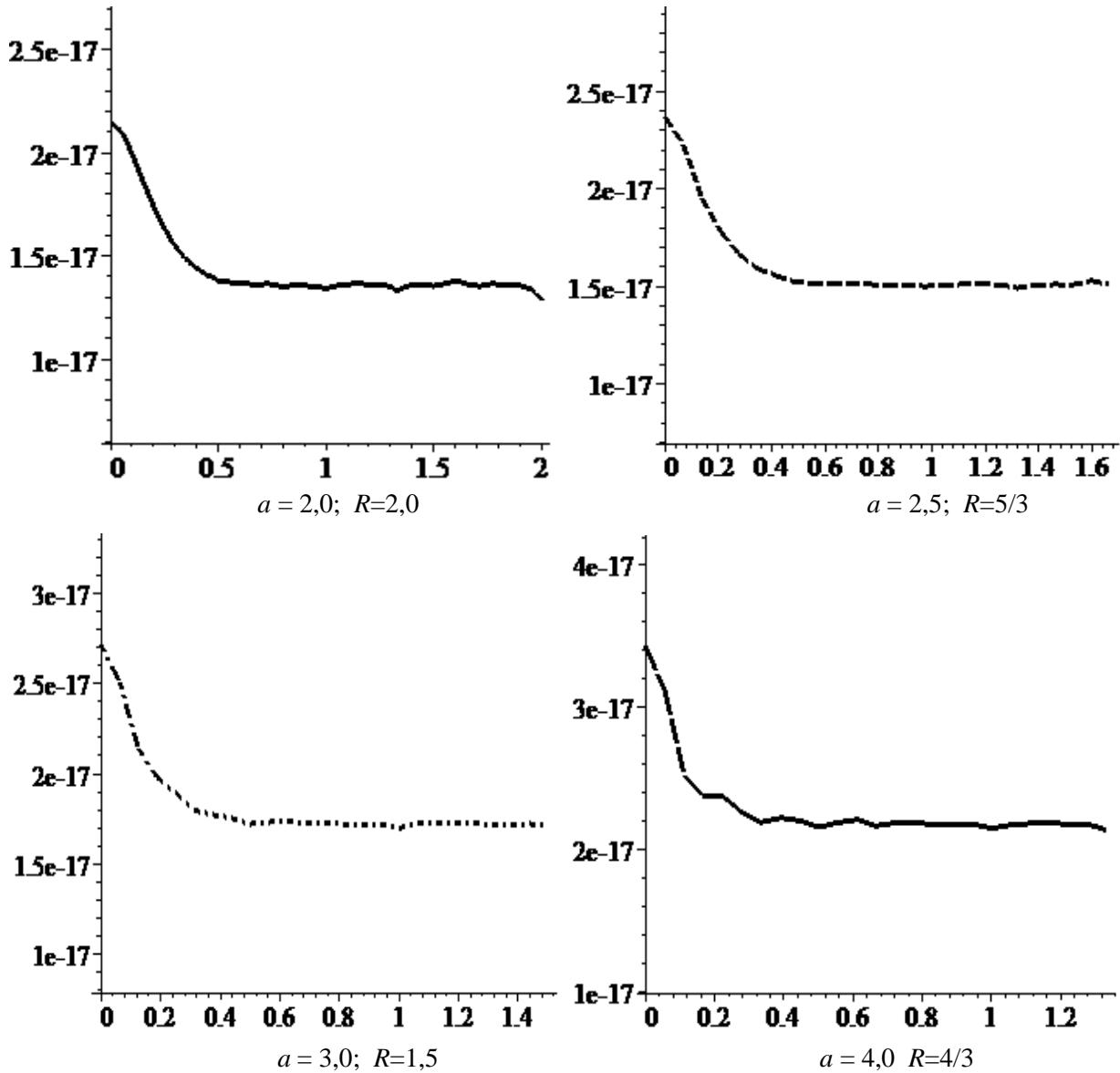


Рисунок 9 – Абсолютные погрешности при вычислении семейства функций $\hat{P}lor_{a,r}(v)$ при различных значениях параметра a и $r=1, R=3a/[2(a-1)]$

Таблица 6 – Максимальные погрешности интерполяционных схем Эйткена при интерполяции функции $\hat{P}lor_{a,r}(v)$ при различных значениях параметра a и $r=1$

значение a и эквивалентное значение R	4-х точечная схема Эйткена	5-ти точечная схема Эйткена	6-ти точечная схема Эйткена	7-ти точечная схема Эйткена
2,0 ($R=2,0$)	2,4069E-17	3,7947E-19	3,7947E-19	4,3368E-19
2,25 ($R=1,8$)	3,5128E-17	5,4210E-19	5,4210E-19	5,4210E-19
2,5 ($R=5/3$)	5,2150E-17	7,5894E-19	7,5892E-19	7,5894E-19
3,0 ($R=1,5$)	1,1362E-16	1,3010E-18	1,3010E-18	1,4095E-18
4,0 ($R=4/3$)	4,6306E-16	2,0600E-18	1,9516E-18	1,9516E-18

При сравнении данных, отображенных на рис. 9 и в табл. 6 видно, что погрешность интерполяционной схемы Эйткена с количеством узлов, равным шести (пяти), примерно в 15-20

раз меньше полной погрешности вычислений функции $\hat{Plop}_{a,r}(v)$. Кроме того данную схему приближения в какой-то мере можно считать сглаживающим фильтром [9]. Поэтому предлагается данной погрешностью пренебречь.

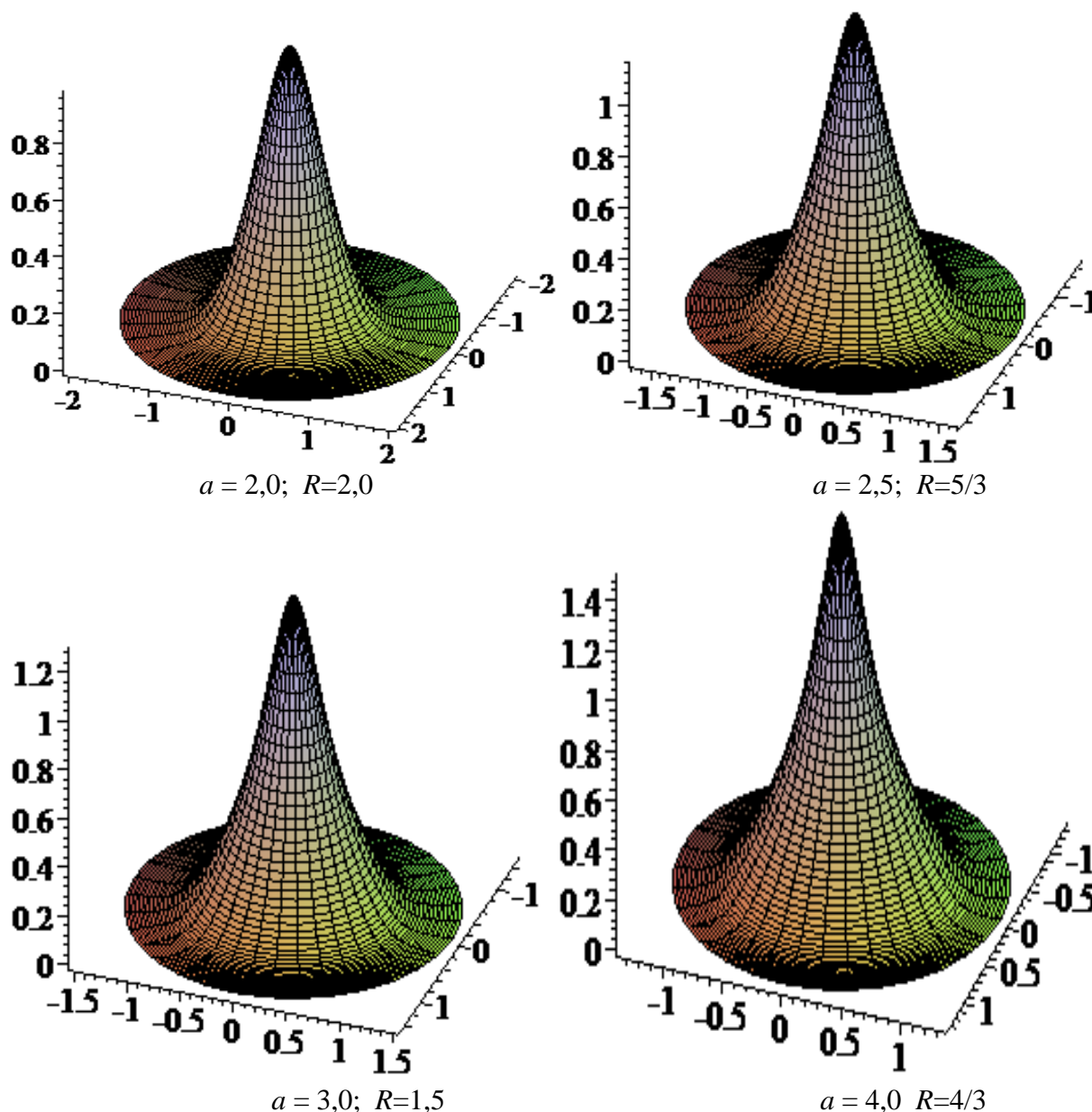


Рисунок 10 – Графики функций $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ при различных значениях параметра a и $r=1$

4. Выводы

Новизной полученных результатов является то, что модифицируется алгоритм вычисления функции $K_2(z)$ с помощью аппроксимации Чебышева, более точно найдены абсолютные и полные погрешности вычислений функций $\hat{Plop}_{a,r}(l)$ при значениях параметра a , равных 2,0; 2,5; 3,0; 4,0. Приведены графики абсолютных погрешностей вычислений и значений функций при указанных значениях a . Показано, что применение интерполяционного алгоритма Лагранжа (шеститочечная или пятиточечная схемы Эйткена) для определения произвольного значения функции $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ практически не влияет на ее погрешность вычисления.

Все эти улучшения алгоритмов привели к уменьшению погрешности вычисления функции $P_{\text{lop}_{a,r}}(x_1, x_2)$ более чем в два раза по сравнению с алгоритмом вычисления функции $K_2(z)$ без аппроксимации Чебышева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kanza E. J., PhD. Motivation for using radial basis functions to solve PDEs // Lawrence Livermore National Laboratory and Embry-Riddle Aeronautical University – August 24, 1999.
2. Liu G. R. Mesh Free Methods. Moving beyond the Finite Element Method. – London: CRC Press. – 2003. – 693 p.
3. Колодяжний В. М., Рвачов В. О. Фінітні функції, що породжені оператором Лапласа // Доповіді НАН України. – № 4. – 2004. – С. 17-22.
4. Будылин А. М. Ряды и интегралы Фурье. – Л.: СПбГУ. – 2002. – 127 с.
5. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука. – 1983. – 239 с.
6. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных – М.: Наука, 1971. – 430 с.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики: В 4-х томах. Т. 2. – М.: Наука. – 1974. – 655 с.
8. Kolodyazhnyi V. M. and Rvachev V. A. Atomic functions: Generalization to the multivariable case and promising applications // Cybernetics and Systems Analysis. – 43, N 6. – 2007. – С. 893-911.
9. Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А. Методы вычислений (Численный анализ. Методы решения задач математической физики) / – К.: Вища школа, 1977. – 400 с.
10. Абрамовитц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами: пер. с англ. / – М.: Наука, 1979. – 832 с.
11. Попов Б. А., Теслер Г. С. Вычисление функций на ЭВМ. Справочник / – К.: Наукова думка – 1984. – 600 с.

REFERENCES

1. Edward J. Kanza, PhD. *Motivation for using radial basis functions to solve PDEs*: Lawrence Livermore National Laboratory and Embry-Riddle Aeronautical University. August 24, 1999. [in English]
2. G. R. Liu *Mesh Free Methods. Moving beyond the Finite Element Method*. London: CRC Press, 2003. 693 p. [in English]
3. V. M. Kolodyazhnyi, V. A. Rvachev, *Finite functions generated by the Laplace operator*. Reports of the NAS of Ukraine, № 4. 2004. P. 17-22. [in Ukrainian]
4. A. M. Budylin *Fourier series and integrals*. L.: SPbSU, 2002, 127 p. [in Russian]
5. A. A. Karatsuba *Fundamentals of Analytical Number Theory*. M.: Nauka, 1983. 239 p. [in Russian]
6. L. I. Ronkin. *Introduction to the theory of entire functions of many variables*, M.: Nauka, 1971, 430 p. [in Russian]
7. V. I. Smirnov *The course of higher mathematics: In 4 volumes. T. 2*. M.: Nauka, 1974, 655 p. [in Russian]
8. V. M. Kolodyazhnyi, V. A. Rvachev “Atomic functions: Generalization to the multivariable case and promising applications”, *Cybernetics and Systems Analysis*, 43, N 6, P. 893-911, 2007. [in English]
9. I. I. Lyashko, V. L. Makarov, A. A. Skorobohat'ko *Методы вычислений (Численный анализ. Методы решения задач математической физики)*. К.: Vyshcha shkola, 1977, 400 p. [in Russian]
10. M. Abramovitz, I. Stegun *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables: per. from English*, M.: Nauka, 1979, 832 p. [in Russian]
11. B. A. Popov, G. C. Tesler *Calculation of functions on a computer. Handbook*. К.: Naukova dumka 1984, 600 p. [in Russian]

УДК 593.3

Гибридный адаптивный метод поиска корней негладкой функции в задаче определения собственных частот колебаний жидкости в резервуарах

Д.В. Листрова, Т.В. Мединцева, Г.А. Шелудько

**Листрова Дарья
Вадимовна**

студентка 5 курса учебно-научного института компьютерной физики и энергетики университета им. В.Н. Каразина
Площадь Свободы, Харьков, 61022, Украина
e-mail: dasha14.152@gmail.com
<https://orcid.org/000-0002-3202-8150>

**Мединцева Татьяна
Владимировна**

студентка 5 курса учебно-научного института компьютерной физики и энергетики университета им. В.Н. Каразина
Площадь Свободы, Харьков, 61022, Украина
e-mail: medintan@gmail.com
<https://orcid.org/000-0003-1037-3858>

**Шелудько Гелій
Артемович**

научный сотрудник
Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул.
Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина
<https://orcid.org/0000-0003-4171-9591>

Разработан гибридный адаптивный метод поиска корней негладкой функции одной переменной. Метод применен к решению характеристического уравнения в задаче определения собственных частот колебаний жидкости в резервуаре, имеющем форму оболочки вращения. Приведена формулировка указанной задачи, и разработан метод сведения этой задачи к решению нелинейного уравнения, которое является характеристическим для соответствующей проблемы собственных значений. Описан алгоритм адаптивного метода поиска корней негладкой функции, который основан на гибридизации известных методов. Проведено сравнение результатов вычислений корней функций, которые проводились с помощью метода дихотомии, метода «3/5» и разработанного метода. Установлено, что эффективность предложенного метода превышает эффективность обоих методов - гибридных. Рассмотрена задача о колебаниях жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре. Проведено сравнение результатов расчета частот колебаний жидкости с помощью различных методов.

Ключевые слова: гибридный адаптивный метод, корни негладких функций, колебания жидкости в жестких резервуарах, характеристическое уравнение

Hybrid adaptive method for finding the roots of a non-smooth function in the problem of determining the natural frequencies of fluid vibrations in reservoirs

D.V. Listrtova, T.V. Medintseva, G.A. Sheludko

Listrova Daria

Student
V. N. Karazin Kharkiv National University, 6 Peremohy place, Kharkiv,
Ukraine, 61022

Medintseva Tatyana

Student
V. N. Karazin Kharkiv National University, 6 Peremohy place, Kharkiv,
Ukraine, 61022

Sheludko Geliy

Researcher
Institute of Mechanical Engineering Problems A. N. Podgorny NASU, st.
Pozharsky, 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine

The article proposes a hybrid adaptive method for finding the roots of a non-smooth function of a single variable. The algorithm of adaptive root search method for non-smooth functions is presented. It assumes both adaptive reduction of a search step, and changing the search direction. It is found that the proposed approach allows us to detect the root even in the presence of a point of inflection. That is, for example, impossible for the Newton method. The accuracy of finding the root by using the

proposed algorithm does not depend on the type of functions, the choice of the initial approximation; the method allows finding the root with the given accuracy in any case. The comparison of the results of the root calculations is performed by using the dichotomy method, the "3/5" method and the proposed algorithm. It is established that the effectiveness of the developed method exceeds the efficiency of both hybrid methods when they are applied separately. The developed method is applied to the solution of the characteristic equation in the problem of determining the natural frequencies of oscillations of a liquid in a rigid tank having the form of a shell of revolution. The fluid in the tank is assumed to be perfect and incompressible, and its motion caused by the action of external loads is eddy. Under these assumptions, there exists a velocity potential to describe the fluid motion. The formulation of the problem is given and the method of its reducing to the solution of a nonlinear equation is presented. This equation is a characteristic one for the corresponding problem of eigenvalues. The methods of integral singular equations and the boundary element method for their numerical solution have been applied. The problem of fluid oscillation in a rigid cylindrical tank is considered. The results of numerical simulation of the fluid oscillation frequencies obtained by different methods for different number of nodal diameters are compared. It is noted that if the root of the characteristic equation is localized by using approximate methods, then its refinement can be carried out by using the proposed approach.

Key words: *hybrid adaptive method, roots of non-smooth functions, fluid oscillations in rigid reservoirs, characteristic equation.*

Гібридний адаптивний метод пошуку коренів негладкої функції в задачі визначення власних частот коливань рідини в резервуарах

Д.В. Лістрова, Т.В. Медінцева, Г.А. Шелудько

Лістрова Вадимівна	Дар'я	<i>Студентка навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики університету ім. В.Н. Каразіна Площа Свободи 6, м.Харків, Україна, 61022</i>
Медінцева Володимирівна	Тетяна	<i>Студентка навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики університету ім. В.Н. Каразіна Площа Свободи 6, м.Харків, Україна, 61022</i>
Шелудько Артемівч	Гелій	<i>Науковий співробітник Інститут проблем машинбудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10, Харків, Україна, 61046</i>

В статті запропоновано гібридний адаптивний метод пошуку коренів негладкої функції однієї змінної. Наведено алгоритм адаптивного методу пошуку коренів негладкої функції, який засновано на гібридизації деяких відомих методів визначення коренів функцій однієї змінної довільного вигляду. Запропоновано засоби як адаптивного зменшення шагу пошуку, так і зміни напрямку. Встановлено, що запропонований підхід дозволяє виявляти корінь навіть при наявності точки перегину, що, наприклад, неможливо для методу Ньютона. Тобто, точність знаходження кореня за допомогою запропонованого алгоритму не залежить від виду функції, вибору початкового наближення; метод в будь-якому випадку знайде корінь з заданою точністю. Проведено порівняння результатів обчислень коренів функцій, які проводилися за допомогою методу дихотомії, методу «3/5» і розробленого алгоритму. Встановлено, що ефективність запропонованого методу перевищує ефективність обох методів – гібридів, коли вони застосовуються окремо. Розроблений метод застосований до розв'язання характеристичного рівняння в задачі визначення власних частот коливань рідини в жорсткому резервуарі, що має форму оболонки обертаючого. Вважалось, що рідина в резервуарі є ідеальною та нестисливою, а її рух, викликаний дією зовнішніх навантажень, є безвихровим. В цих умовах існує потенціал швидкостей для опису руху рідини. Наведено формулювання зазначеної задачі та вказано метод зведення цієї задачі до розв'язання нелінійного рівняння, що є характеристичним рівнянням для відповідної проблеми власних значень. При цьому застосовувались методи інтегральних сингулярних рівнянь та метод граничних елементів для їх числового розв'язання. Розглянуто задачу про коливання рідини в жорсткому циліндричному резервуарі. Проведено порівняння результатів розрахунку частот коливань рідини, отриманих різними методами, для різної кількості вузлових діаметрів. Відзначено, що якщо локалізовано корінь характеристичного рівняння за допомогою наближених методик, то його уточнення може бути здійснено з використанням запропонованого підходу.

Ключові слова: *гібридний адаптивний метод, корені негладких функцій, коливання рідини в жорстких резервуарах, характеристичне рівняння*

1 Введение

Задачи поиска корней функций произвольного вида возникают во многих инженерных приложениях, при решении экстремальных задач. В задачах поиска оптимальных параметров элементов конструкций процедура нахождения корней и экстремумов негладких функций является одной из составляющих метода оптимизации. Так, в работе [1] подобные процедуры использованы при решении задачи об определении оптимальных параметров летательного аппарата, которые регулируют динамику полета. В [2] с помощью методов локализации корней и экстремумов получены оптимальные параметры крупногабаритных ветроустановок. Задачи отстройки аппаратуры от нежелательных резонансных частот приводят к необходимости

нахождения корней характеристических уравнений. В [3] рассмотрена задача об определении собственных частот сосудов высокого давления, частично заполненных жидкостью, в [4,5] определены собственные частоты колебаний жидкости в цилиндрических оболочках при наличии кольцевых и конических перегородок. Данная статья посвящена построению нового эффективного варианта поиска корня функции одной переменной. На сегодняшний день существует довольно много методов нахождения корня функции одной переменной, которые обладают разной эффективностью, а также имеют свои преимущества и недостатки: одни требуют большего времени для расчетов, но взамен дают более точный результат, другие расходуют меньше ресурсов в ущерб точности [6,7]. Поскольку человечество продолжает развиваться и стремиться к совершенству по мере своего развития, до сих пор разрабатываются новые методы, которые давали бы наиболее точный результат с наименьшей ресурсозатратностью [8,9]. В этой статье предложен новый метод, который удалось разработать, опираясь на уже существующие алгоритмы поиска корня нелинейной функции одной переменной [10], путем комбинирования различных методик с целью достижения наилучшего результата. Метод применен к уточненному расчету частот колебаний жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре.

2 Общая постановка задачи о колебаниях жидкости в жестком резервуаре и сведение ее к решению нелинейного уравнения

Рассматривается жесткая оболочка вращения, частично заполненная идеальной несжимаемой жидкостью, рис.2.1.

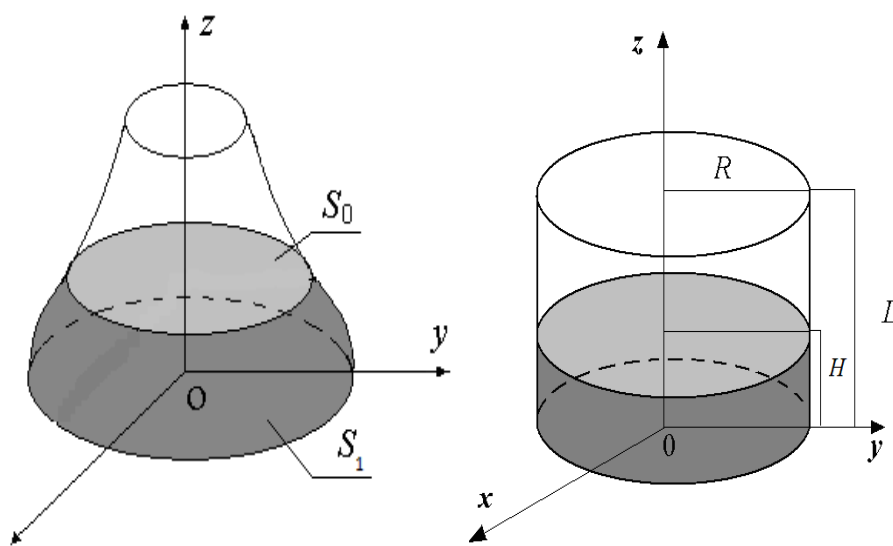


Рис. 2.1. Оболочки вращения, содержащие жидкость

Здесь S_0, S_1 - свободная поверхность жидкости и смоченная поверхность оболочки. Предположим, что с оболочкой связана декартова система координат $Oxyz$, при этом свободная поверхность жидкости в состоянии покоя совпадает с плоскостью $z = H$, H - уровень заполнения оболочки жидкостью.

Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение, индуцированное внешними воздействиями, является безвихревым. При этом можно ввести потенциал скоростей Φ , удовлетворяющий уравнению Лапласа [4]. Тогда проблема определения собственных частот жидкости в оболочке сводится к следующей краевой задаче для этого уравнения [5]:

$$\Delta \Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \Big|_{S_0} + g \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{n} - внешняя единичная нормаль к рассматриваемой поверхности, g - ускорение свободного падения, t - время.

Для однозначной разрешимости указанной краевой задачи необходимо выполнение условия Неймана в виде

$$\int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (2.2)$$

Требуется найти частоты и формы колебаний жидкости, заполняющей оболочку.

Поскольку рассматривается задача о колебаниях жидкости, неизвестный потенциал скоростей Φ можно представить следующим образом:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \quad i^2 = -1, \quad \mathbf{r} = (x, y, z). \quad (2.3)$$

Тогда краевая задача (2.1)-(2.2) сводится к проблеме собственных значений

$$\Delta \varphi = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\omega^2}{g} \varphi|_{S_0}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (2.4)$$

относительно собственных частот ω . Для определения функции φ использован метод граничных элементов в прямой формулировке, разработанный С. Brebbia в [11]. При этом используется интегральное представление

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{r(P, P_0)} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{r(P, P_0)} dS, \quad S = S_0 \cup S_1, \quad (2.5)$$

в котором точки P и P_0 находятся на поверхности интегрирования и представляют собой текущую точку на поверхности и точку коллокации [11], $r(P, P_0)$ – декартово расстояние между указанными точками. С использованием (2.5) и введением интегральных операторов \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{F} аналогично [5]

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\varphi &= 2\pi\mathbf{I}\varphi + \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{r(P, P_0)} dS, \quad \mathbf{B}\varphi_0 = \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS, \quad \mathbf{C}\varphi_0 = \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dS, \\ \mathbf{D}\varphi &= -\iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} dS, \quad \mathbf{F}\varphi_0 = \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS. \end{aligned} \quad (2.6)$$

приводим краевую задачу (2.4) к следующей операторной форме:

$$\mathbf{A}\varphi = \frac{\omega^2}{g} \mathbf{B}\varphi_0 - \mathbf{C}\varphi_0, \quad P_0 \in S_1, \quad \mathbf{D}\varphi = 2\pi\mathbf{I}\varphi_0 - \frac{\omega^2}{g} \mathbf{F}\varphi_0, \quad P_0 \in S_0. \quad (2.7)$$

В формулах (2.6) и (2.7) функции φ_0 и φ представляют собой неизвестные значения потенциала скоростей на свободной и смоченной поверхностях, ограничивающих объем жидкости, соответственно. Исключив из уравнений (2.7) функцию φ , приходим к проблеме собственных значений в операторной форме относительно неизвестных значений потенциала φ_0 на свободной поверхности

$$(\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} + 2\pi\mathbf{I})\varphi_0 - \lambda(\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{F})\varphi_0 = 0, \quad \lambda = \omega^2 / g. \quad (2.8)$$

Матричный вид операторов \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{F} с использованием метода граничных элементов [11] получен в [5].

Собственные значения и собственные векторы проблемы собственных значений (2.8) являются частотами и формами свободных колебаний жидкости в рассматриваемой оболочке вращения. Уравнение (2.8) далее используем как характеристическое уравнение для определения собственных значений в виде

$$\det[(\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} + 2\pi\mathbf{I}) - \lambda(\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{F})] = 0. \quad (2.9)$$

Отметим, что уравнение (2.9) является нелинейным, представляет собой характеристический многочлен, степень которого зависит от количества граничных элементов на свободной поверхности.

3. Адаптивный метод нахождения корней негладкой функции

Рассмотрим произвольную нелинейную функцию $f(x)$ на интервале $[a; b]$ (рис.3.1). Пусть известно, что корень находится в этом интервале, и требуется уточнить его местоположение.

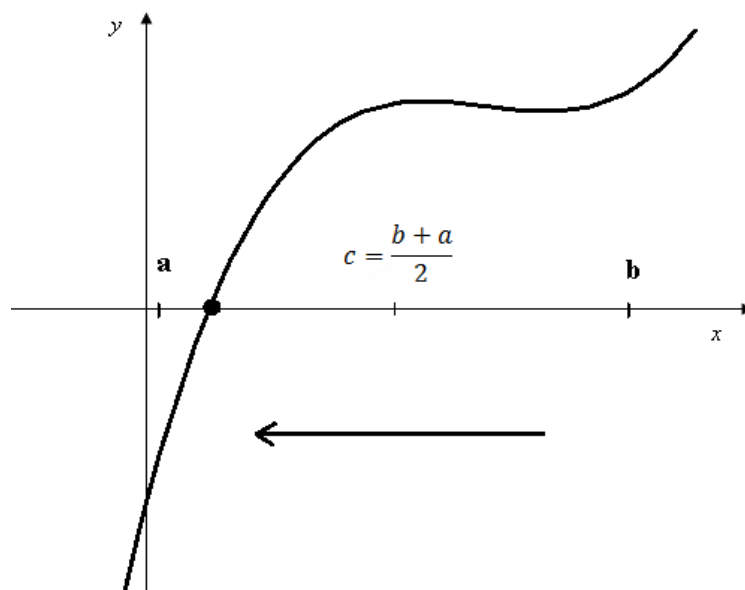


Рис. 3.1. Общий вид нелинейной функции

Метод, с помощью которого мы будем искать корень, является адаптивным и основан на гибридизации нескольких уже существующих алгоритмов [10].

Осуществляем первый шаг поиска с помощью деления интервала пополам. Полученную точку объявляем стартовой, и выполняем из нее «шаги» в сторону искомого корня. Определив среднюю точку на интервале, сравниваем знаки функции на границах интервала и в этой точке. Здесь взята идея метода дихотомии: отсекается тот участок, знаки у которого на конце участка и в точке совпадают [6]. Таким образом, интервал, в котором разыскивается корень, сразу сокращается вдвое. На рис.2 стрелка указывает направление, в котором будут производиться дальнейшие «шаги».

Далее нам нужно попасть в следующую точку, где может оказаться предполагаемый корень. Чтобы это осуществить, мы рассчитываем «шаг» с помощью «метода 3/5» [6]. Получаем следующую точку (рис.3.2).

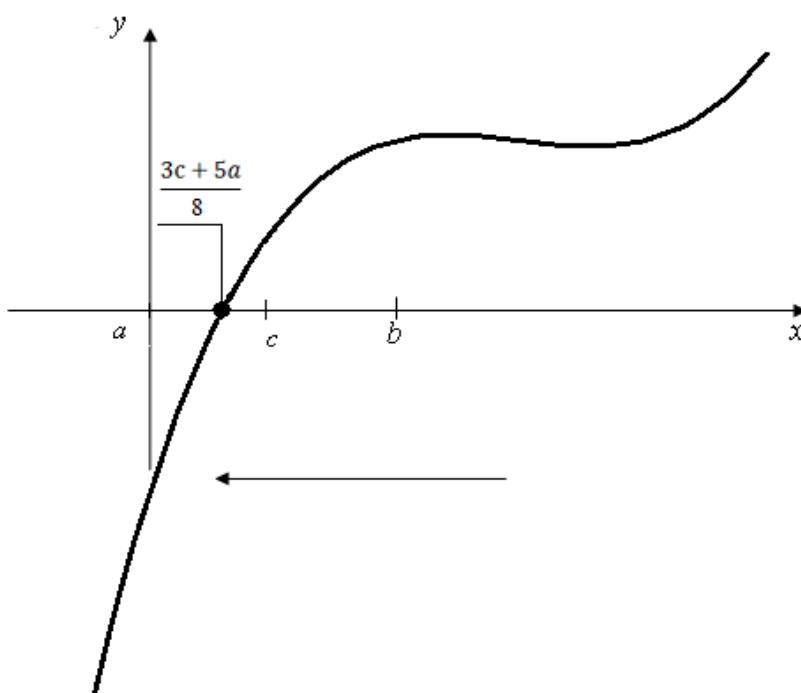


Рис. 3.2. Локализация корня

Далее вычисления происходят согласно методу дихотомии: сравниваются знаки, и отсекается участок, в котором корень не локализуется. Однако, если продолжать поиск таким образом, есть вероятность выйти за границы интервала или «переступить» корень. Для этого были введены дополнительные условия: на каждом шаге проверялось условие попадания полученной точки в заданный интервал. Направление поиска также меняется в зависимости от результата сравнения знаков. Также, результат применения формулы «3/5» изменялся путем деления пополам, если выяснялось, что шаг поиска слишком большой, а, если наблюдался выход за границы интервала, шаг делается в обратном направлении. Таким образом, мы видим, что гибридизация нескольких методов приближённого вычисления корня нелинейной функции одной переменной, даёт адаптивный алгоритм поиска.

Эффективность полученного метода оказалась выше, чем у методов дихотомии и «3/5» при их применении по отдельности. Об этом свидетельствуют данные, приведенные ниже.

Рассматривались функции $f_1(x) = e^x - e^{-x} - 2$ и $f_2(x) = 3x - 4 \ln x - 5 = 0$. В таблице 3.1 приведено сравнение результатов, полученных тремя методами: дихотомии, «3/5» и разработанного адаптивного метода. Сравнялись точность вычисления и количество сделанных шагов.

В таблице 3.1 приведено сравнение результатов, полученных тремя методами: дихотомии, «3/5» и разработанного адаптивного метода. С помощью каждого метода выполнялось 10 шагов.

Таблица 3.1. Сравнение эффективности методов поиска корней

Метод	$f_1(x), x^* = 0,8800$	$f_2(x), x^* = 0,3800$
Дихотомия	10 шагов и значение 0,8818	10 шагов и значение 0,3821
«3/5»	13 шагов и значение 0,8815	11 шагов и значение 0,3818
Гибридный	8 шагов и значение 0,8811	7 шагов и значение 0,3800

Результаты вычислений свидетельствуют об эффективности разработанного алгоритма для выбранных функций.

4 Расчет собственных колебаний жидкости в цилиндрическом резервуаре

Рассмотрим цилиндрическую оболочку с плоским дном, частично заполненную жидкостью.

Параметры резервуара следующие: радиус $R = 1$ м, длина $L = 2$ м. Уровень заполнения оболочки $H = 1.0$ м, рис.2.1.

В таблице 4.1 приведены частоты колебаний жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре, полученные различными методами. Аналитическое решение приведено в [12], значения частот в [13] получены с помощью QZ - алгоритма в обобщенной проблеме собственных значений.

Таблица 4.1. Сравнение частот колебаний жидкости, полученных разными методами

α	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Аналитическое решение	3.828108	1.7507975	3.0406821
Метод [13]	3.829121	1.7508223	3.0412861
Гибридный метод	3.828110	1.7507984	3.0406886

Результаты расчетов свидетельствуют о том, что применение гибридного адаптивного метода приводит к уточненным значениям частот в сравнении с результатами, полученными по методике, приведенной в работах [4,13]. Отметим, что если локализован корень характеристического уравнения с помощью приближенных методик, то его уточнение может быть осуществлено с использованием предложенного подхода.

5 Выводы

Рассматривая преимущества и недостатки разработанного метода поиска корней функций произвольного вида, можно отметить, что такой подход позволяет обнаруживать корень даже

при наличии точки перегиба, что, например, невозможно для метода Ньютона. То есть, точность нахождения корня с помощью предложенного алгоритма не зависит от вида функции, метод в любом случае найдет корень с заданной точностью. К недостаткам метода следует отнести необходимость предварительного отделения корней. В дальнейшем предполагается разработка гибридных адаптивных методов решения систем нелинейных уравнений и применение разработанных подходов к решению практических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Makeev V. I., Strelnikova E. A., Trofimenko P. E., Bondar A. V. On Choice of Design Parameters for an Aircraft. *Int. Appl. Mech.*, 2013. 49, N 5. P. 588 – 596.
2. Дегтярев К. Г., Стрельникова Е. А., Шелудько Г. А. Компьютерное моделирование лопастей ветроустановок с оптимальными параметрами. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.* № 19. 2012. С. 81-86.
3. Еселева Е.В, Гнитько В.И., Стрельникова Е.А., *Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью, Проблемы машиностроения.* 2006. №1. С.105-118.
4. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences.* 2016. Vol. 1. no. 1., P.14-27.
5. Gnitko, V., Naumenko, Y., Strelnikova E. Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 22 (4), pp.867-881, 2017.
6. Haeussler E.F., Paul R.S., Wood R.J. Introductory Mathematical analysis for Business, Economics, and Life and Social Sciences. *Printice Hall. Boston.* 2011.
7. Ugboh U.A., Esuabanna I.M. A new Numerical Method for finding Roots of Algebraic and Transcendental Equations. *American Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2019. 9(1). p. 6-11.
8. Victor Y. Pan et al. “Real root-finding”. In: SNC: International workshop on Symbolic-numeric computation (London, Ontario, Canada, 2007). *New York, NY, USA: Association for Computing Machinery.* 2007, pp. 161–169.
9. Fabrice Rouillier and Paul Zimmermann. Efficient isolation of polynomial’s real roots. *Journal of Computational and Applied Mathematics. 162.1 (Proceedings of the international conference on linear algebra and arithmetic 2004), pp. 33–50.*
10. Шелудько, Г. А. Гибридные методы в задачах оптимального проектирования. 1. Поисковые методы / Г. А. Шелудько, Е. А. Стрельникова, Б. Я. Кантор. *Харьков : Новое слово, 2008. 188 с.*
11. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F & Wrobel, L.C., Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: *Berlin and New York*, 1984.
12. R.A. Ibrahim. Liquid Sloshing Dynamics. *Cambridge University Press, New York, 2005.*
13. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D. , Naumenko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *J. Modern Technology & Engineering.* Vol.3. No.1. pp.15-52. 2018.

REFERENCES

1. Makeev V. I., Strelnikova E. A., Trofimenko P. E., Bondar A. V., “On Choice of Design Parameters for an Aircraft”, *Int. Appl. Mech.*, 49, N. 5, P. 588 – 596. 2013.

2. Degtyarev K. G., Strelnikova E. A., Sheludko G. A. “Kompyuternoe modelirovanie lopastey vetroustanovok s optimalnyimi parametrami”, *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»*”, issue 46, 2020, 2012, N 19, P. 81-86.
3. Eseleva E.V, Gnitko V.I., Strelnikova E.A., *Sobstvennyie kolebaniya sosudov vyisokogo davleniya pri vzaimodeystvii s zhidkostyu, Problemy mashinostroeniya*, 2006, N 1, S.105-118.
4. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., “Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles”. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016. Vol. 1, no. 1, P.14-27.
5. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. “Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles”, *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 22 (4), pp.867-881, 2017.
6. *Haeussler E.F., Paul R.S., Wood R.J. Introductory Mathematical analysis for Business, Economics, and Life and Social Sciences. Printice Hall, Boston, 2011.*
7. Ugboh U.A., Esuabanna I.M. “A new Numerical Method for finding Roots of Algebraic and Transcendental Equations” *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, 9(1), p. 6-11.
8. Victor Y. Pan et al. “Real root-finding”. *In: SNC: International workshop on Symbolic-numeric computation (London, Ontario, Canada, 2007). New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2007, pp. 161–169.*
9. Fabrice Rouillier and Paul Zimmermann. “Efficient isolation of polynomial’s real roots”. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 162.1 (Proceedings of the international conference on linear algebra and arithmetic 2004), pp. 33–50.
10. Sheludko, G. A. *Gibridnyie metodyi v zadachah optimalnogo proektirovaniya. 1. Poiskovyie metodyi / G. A. Sheludko, E. A. Strelnikova, B. Ya. Kantor, Harkov: Novoe slovo, 2008. 188 s.*
11. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F & Wrobel, L.C., *Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.*
12. R.A. Ibrahim. *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2005.
13. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. “Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles”, *J. Modern Technology & Engineering*, Vol.3, No.1, pp.15-52, 2018.

УДК 004.94

Моделювання динаміки громадської думки у сучасному суспільстві

М.Г. Моргун

**Моргун Микола
Геннадійович**

*аспірант
навчально-науковий інститут інформаційних та освітніх технологій,
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького,
бульвар Шевченка 81, м. Черкаси, 18031
e-mail: mykolamorhun4edu@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5520-3302*

В статті пропонується модель динаміки поглядів у сучасному суспільстві. Запропонована модель бере до уваги географічні особливості суспільства, такі як різна густина населення на території модельованого суспільства, різні погляди в його регіонах, географічне положення цих регіонів та їх відносні розміри. В моделі враховуються політичні партії та їх вплив на своїх учасників. Також, окрім різних типів взаємозв'язків між членами суспільства, врахований вплив засобів масової інформації (як залежних так і незалежних). У другій частині статті наведені деякі особливості комп'ютерної реалізації запропонованої моделі та оптимізації часу її виконання, а також проведені чисельні експерименти для перевірки коректності роботи отриманої моделі.

Ключові слова: модель, суспільна думка, погляд, партія, ЗМІ, суспільство.

Model of public opinion dynamics in modern society

Mykola Morhun

*PhD student
Bohdan Khmelnytsky Cherkasy National University, Shevchenko Boulevard 81,
18031, Cherkasy, Ukraine*

Nowadays more and more scientific interest is paid to social processes. It is relatively new, but a very important field of research because it impacts significantly many areas of modern life. The purpose of this article is to create a model of public opinion dynamics in modern society. The model is iterative and considers a number of features which are typical for modern society. One of the key components of the model is political parties. They have significant influence on the public opinion. The model takes into account the impact of mass media as well. It considers mass media both independent and controlled by a political party. Also the model considers influence of social networks, messengers and telephony. In addition, it takes into account geographical position of each state, the length of common border between states or social groups and differences in the population density in each of the states.

The model is developed with consideration for the future computer implementation, which significantly simplifies further steps. The model has been implemented in Python programming language with help of tkinter library for user interface and matplotlib for displaying the results. Some implementation advice and performance optimizations have been added. The implemented model has flexible and easy to understand and edit configuration, which makes it very convenient to use.

In the final part of the article the model has been tested against several cases where results can be predicted. The first case shows the debate of two political parties where the first one has a notable advantage. The second case shows polarization of the simulated society, where each ideology dominates in a separate region. The last case shows winning of a political party which has significant control over practically all mass media in the simulated society. After simulations, the model results are similar to expected ones. This similarity indicates the correctness of the created model.

Keywords: model, simulation, public opinion, view, political party, mass media, society.

Моделирование динамики общественного мнения в современном обществе

**Моргун Николай
Геннадьевич**

*аспірант
учебно-научный институт информационных и образовательных
технологий, Черкасский национальный университет имени Богдана
Хмельницкого, бульвар Шевченко 81, м. Черкассы, 18031*

В статье предлагается модель динамики взглядов в современном обществе. Предложенная модель учитывает географические особенности общества, такие как разная плотность населения на территории моделируемого

общества, различные взгляды в его регионах, географическое положение этих регионов и их относительные размеры. В модели учитываются политические партии и их влияние на своих участников. Также, кроме различных типов взаимосвязей между членами общества, учтено влияние средств массовой информации (как зависимых так и независимых). Во второй части статьи приведены некоторые особенности компьютерной реализации предложенной модели и оптимизации времени ее выполнения, а также проведены численные эксперименты для проверки корректности работы полученной модели.

Ключевые слова: модель, общественное мнение, взгляд, партия, СМИ, общество.

1 Вступ

Сьогодні, у вік інформаційних технологій, все більшої ваги набирає знання про суспільство, його поведінку, реакцію на той чи інший фактор. Знання настроїв у суспільстві, а також можливість передбачити їх подальший розвиток дає велику перевагу. За допомогою таких знань можна навіть передбачити подальшу долю держави, а відповідними важелями впливу – змінити її [1-6]. І хоча самому факту впливу на суспільство за допомогою інформації приділено не мало уваги [7-10], проте динаміка зміни поглядів у суспільстві не є досить добре дослідженою.

Для того, щоб отримати певний результат спочатку необхідно побудувати модель, яка буде спрощено відображати реальний процес, а потім – задаючи вхідні дані – можна буде отримати конкретний результат – передбачення розвитку подій [11].

В даному напрямку вже існують деякі напрацювання, наприклад [12 с. 580, 13-16]. Так у [13] зміна думок моделюється в часі покроково за допомогою зваженого усереднення позицій об'єктів. Недоліком моделі є незручність задання початкової конфігурації, яка зобов'язує вказати матрицю ваги впливу кожний з кожним.

В моделі [14] при обміні поглядами враховуються стійкість об'єкта до зовнішньої думки, розгляд альтернативних позицій у модельованому суспільстві та вплив сусідніх об'єктів. Проте в статті [14] аналізуються лише три фіксовані типи положення об'єктів та зв'язків між ними, які не можуть бути змінені без переробки самої моделі.

У [15] розглядається проблема консенсусу-поляризації щодо деякого питання. В основі лежить одновимірна модель, а погляди змінюються в залежності від поглядів оточення. Також досліджується час, який потрібний для консенсусу чи поляризації в залежності від параметрів моделі.

У статті [16] розглядається проблема збіжності поглядів при наявності екстремізму у суспільстві. Окрім значення погляду об'єкта також враховується його впевненість у його точці зору.

Проте вище зазначені моделі не враховують вплив ЗМІ, не дозволяють керувати територією модельованого суспільства, а також не розглядають різну густину населення та осередки однодумців.

В цій статті зроблена спроба побудувати модель для прогнозу динаміки поглядів у сучасному суспільстві.

2 Побудова моделі

Для задання моделі використаємо алгоритмічний підхід, тобто визначимо чітку послідовність дій, які повинні бути виконані для того щоб отримати результат.

Виходячи із того, що суспільство складається з індивідів, будемо моделювати його як сукупність деяких об'єктів – членів суспільства. Кожен об'єкт має свій стан, який відповідає його громадській позиції. Стан кожного об'єкта може змінюватися під впливом інших об'єктів, а також під дією засобів масової інформації, що є типовим для сучасного суспільства. Побудована модель є ітеративною, тобто зміна її стану відбувається в часі покроково.

Наведемо схематичний алгоритм роботи моделі (рис. 1):

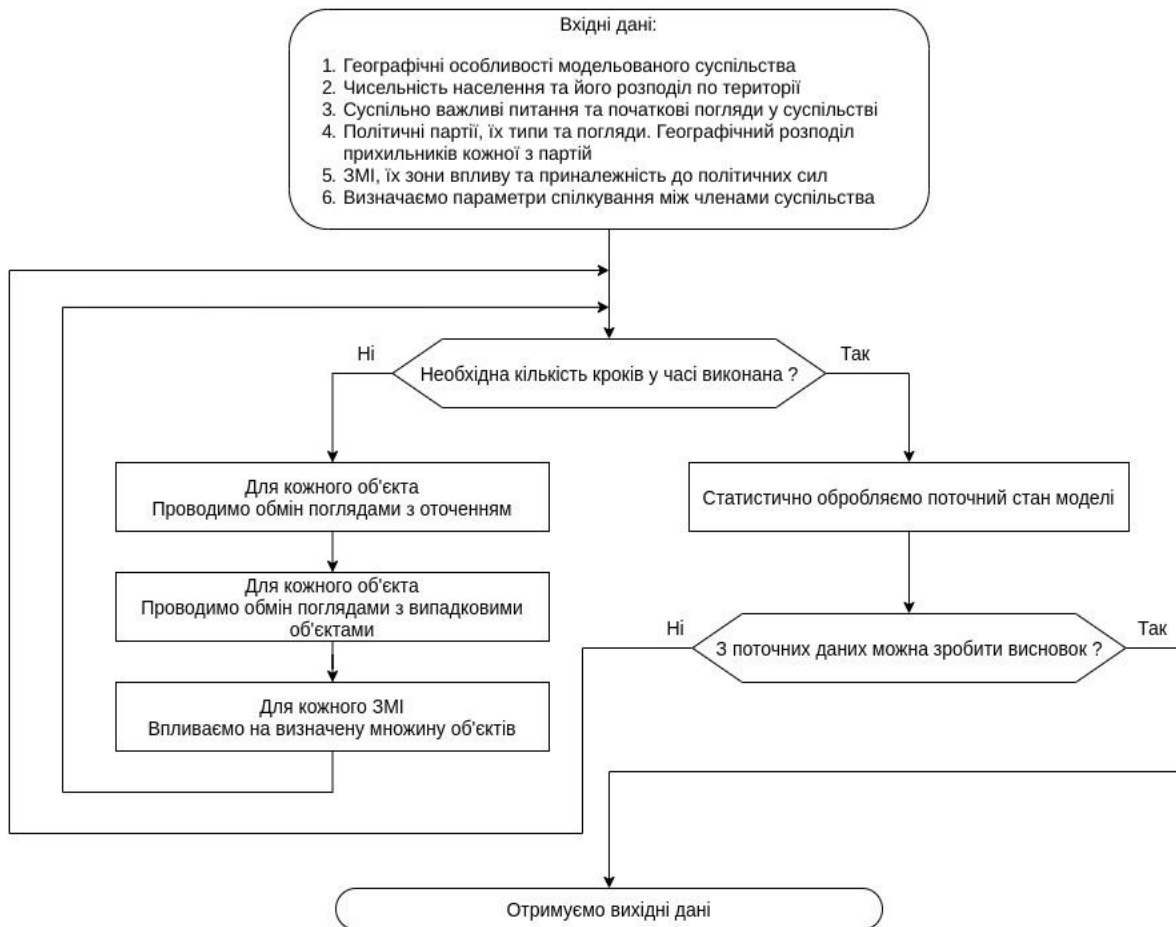


Рис. 1. Основні кроки в роботі моделі

Тепер розглянемо модель детальніше.

В наш час складно уявити життя людини поза межами суспільства. Кожне суспільство складається з індивідів, які входять до нього та підпорядковуються його правилам. Також кожне суспільство займає деяку територію, причому члени суспільства зазвичай розподілені по території нерівномірно. Побудову моделі розпочнемо з визначення географічних меж суспільства. Для цього на двовимірній координатній площині визначимо деякий контур – географічні межі суспільства. Для кращого відтворення реального суспільства у моделі, розіб'ємо вище визначений контур на регіони. Такий підхід дасть змогу контролювати густину населення по території, осередки за прихильністю до тої чи іншої ідеї, а також межування цих осередків один з одним та їх пропорції.

Кожне суспільство складається з індивідів. Наступним кроком побудови моделі є додання членів суспільства. У відповідності до даних які потрібно змоделювати, в кожний вище визначений регіон додамо об'єкти – члени суспільства. На даний момент побудови моделі кожен об'єкт характеризується координатами розміщення на площині.

Проте метою даної моделі є динаміка поглядів у суспільстві, а отже кожен об'єкт (член суспільства) повинен характеризуватися своєю соціальною позицією. Для того щоб модель була наближеною до реального суспільства, кожен об'єкт моделі повинен бути 'багатогранним', тобто мати свою власну думку в деякому наборі питань, які є важливими для модельованого суспільства. Для цього введемо поняття системи поглядів.

Система поглядів – це впорядкований набір значень в межах від -1 до 1 включно, кожне з яких відповідає ставленню до відповідного питання, що є важливим для модельованого суспільства. Розглянемо конкретний погляд у системі поглядів. Якщо значення погляду близьке до 1, то це означає, що даний об'єкт сильно підтримує питання до якого відноситься цей погляд. Якщо ж значення близьке до -1, то навпаки, сильно протестує. Якщо ж значення погляду близьке

до 0, то це означає, що даний об'єкт не має позиції по даному питанню, інакше кажучи, йому не важлива ця проблема (рис. 2).

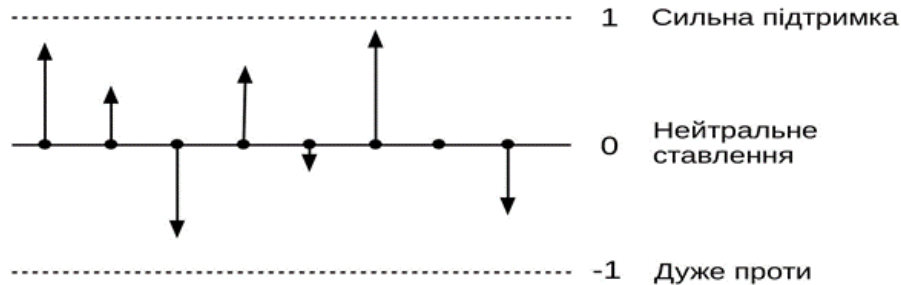


Рис. 2. Приклад системи поглядів

Для моделі необхідно вибрати кількість питань системи поглядів та їх інтерпретацію.

Кожне суспільство має в своєму складі одну чи більше груп людей з чітко визначеними поглядами. В сучасному суспільстві такі організації називаються політичними партіями. Розділимо всі партії на два види:

- Лідерські партії – партії члени яких підтримують думку сильного індивіда та слідуєть його вказівкам. Учасники лідерської партії мають погляди близькі до поглядів лідера, а також відносно легко змінюють їх, якщо думка лідера змінюється.
- Ідеологічні партії – партії члени яких згуртовані навколо спільної ідей. Наявність лідера не суттєва, так як головною є сама ідея. Учасники ідеологічної партії можуть бути байдужими до питань, які не стосуються ідеології цієї партії. Змінити думку учасника ідеологічної партії складніше ніж думку учасника лідерської партії.

Тепер необхідно визначити кількість партій у моделі, їхній тип та погляди. Після цього визначити кількість членів у кожній партії та їх географічне положення. Систему поглядів кожного партійця задаємо у відповідності до системи поглядів партії чи лідера з деяким випадковим відхиленням, що не перевищує наперед заданої межі. Також задаємо розміщення безпартійних громадян та надаємо їм випадкові погляди.

Кожен член суспільства не є ізольованим, а спілкується з іншими громадянами, при цьому таке спілкування впливає на його погляди тою чи іншою мірою.

Спочатку розглянемо індивіда. Кожен член суспільства має своє коло спілкування, в яке входять географічно близькі об'єкти, а також деяка кількість фіксованих віддалених об'єктів, спілкування з якими є регулярним. У сучасному суспільстві це досягається, зазвичай, за допомогою інтернет технологій (соціальні мережі, месенджери та ін.). Але окрім постійного кола спілкування, кожен член суспільства спілкується з незнайомими особами. Такий тип спілкування часто є 'одноразовим' або нерегулярним.

Також на вибір кола спілкування впливає приналежність людини до політичної партії. Партійний індивід буде віддавати перевагу спілкуванню з однопартійцями ніж з іншими учасниками суспільства.

Окрім спілкування між індивідами на погляди людини впливають засоби масової інформації (ЗМІ). Усі ЗМІ розділимо на залежні та незалежні.

- Залежні ЗМІ – мають власника, спонсора, який диктує яка інформація буде розповсюджуватися через цей засіб масової інформації. Часто власник ЗМІ є прихильником чи засновником одної з політичних партій.
- Незалежні ЗМІ – не мають наперед сформованої точки зору та дозволяють висвітлювати будь-яку точку зору.

Для моделі встановимо кількість та типи ЗМІ, а також області дії кожного з них.

Для того, щоб завершити побудову моделі, необхідно визначити спосіб обміну поглядами при спілкуванні. Покладемо, що якщо два індивіда спілкуються, то взаємодія є двосторонньою,

тобто погляди змінюються у обох учасників діалогу. При спілкуванні об'єкти обмінюються усіма поглядами по черговому.

Тепер розглянемо зміну конкретного погляду при спілкуванні. Нехай об'єкт А діє по погляду p_i на об'єкт В. Якщо значення поглядів мають протилежні знаки, то об'єкт А буде намагатися схилити об'єкт В до своєї точки зору, а отже погляди повинні зближуватися: об'єкт В змінює значення погляду в напрямку значення погляду об'єкта А. Розглянемо ситуацію, коли значення поглядів мають однаковий знак. Якщо погляд об'єкта А (що діє), більший за модулем, то погляд об'єкта В буде наближатися в напрямку погляду А. Якщо ж значення погляду об'єкта А менше за модулем за значення погляду В, то в такому випадку напрямок зміни погляду вибираємо випадковим чином (тобто об'єкт В може як ствердитися в цьому погляді, так і зменшити його абсолютне значення).

Важливим фактором є величина на яку змінюється погляд при взаємодії. Очевидно, що якщо об'єкт має модуль значення погляду близьким до одиниці, то величина його дії буде значною. З іншого боку, дія на нього буде мізерною (його важко переконати в протилежному). І навпаки: якщо значення погляду близьке до нуля, то дія, яку цей погляд спричиняє, є невеликою, але дія на цей погляд буде значною. Тобто при зміні погляду необхідно враховувати абсолютні значення кожного з поглядів. Пропонується формально це описати так:

$$\text{Вплив}_{\text{А на В по погляду } p_i} = \frac{\cos(B(p_i) \cdot \pi) + 1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\cos(A(p_i) \cdot \pi) + 1}{2} \right) \cdot k$$

де p_i – i -й погляд із системи поглядів, k – деяка константа, що обмежує зміну погляду в межах одного спілкування.

Окрім взаємодії один з одним, на погляди членів суспільства впливають ЗМІ. Кожне ЗМІ розповсюджує інформацію в деякій області суспільства або у всьому суспільстві, але очевидно, що всі члени суспільства не можуть прислухатися до конкретного ЗМІ. А тому кожне ЗМІ діє на кожен об'єкт з певною ймовірністю. Дана ймовірність залежить від типу ЗМІ та партійної приналежності самого об'єкта. Наприклад, якщо це ЗМІ партії, до якої належить об'єкт, то ймовірність того, що цей об'єкт сприйме інформацію вища ніж для нейтрального ЗМІ та ЗМІ, яке належить до іншої партії.

Кожне ЗМІ діє на своїх слухачів поглядами об'єкта, який в даний момент використовує це ЗМІ для висвітлення своєї точки зору. Вибір об'єкта, який доносить свої погляди через конкретне ЗМІ здійснюється на кожній ітерації. Якщо ЗМІ незалежне, то будь-який член суспільства може доносити свої погляди через нього. Якщо ж ЗМІ залежне, то коло об'єктів які можуть висловлювати свої погляди через це ЗМІ звужується до однопартійців власника цього ЗМІ.

3 Комп'ютерна реалізація моделі

Коли модель теоретично побудована необхідно перейти від теорії до практики, а саме створити комп'ютерну реалізацію моделі. Це дасть змогу отримати конкретні результати.

Спершу необхідно визначитися із інструментарієм, тобто засобами реалізації моделі. Автор статті розглядав дві основні альтернативи:

- C++ та Qt framework
- Python 3

Кожен з цих пунктів має як переваги так і недоліки. Важливо, щоб реалізована модель працювала згідно теоретичного опису. Тут перевагами C++ є строга типізація, що дозволить запобігти неправильному інтерпретуванню даних та зменшить час відлагодження програми. Також час виконання самої програми буде значно кращий. До недоліків можна віднести низький рівень програмування, що потребує більше часу на реалізацію. У випадку Python, доступна велика кількість бібліотек, що спрощує написання програмного продукту, але в той же час відсутність строгої типізації може стати проблемою при написанні складного програмного продукту. Також час роботи програми буде гірший. Після роздумів було обрано Python 3.

Для моделей, зазвичай, вимоги до графічного інтерфейсу користувача зводяться до зручної інтерпретації отриманих результатів. Для візуалізації результатів побудованої моделі можна

використати Python бібліотеку matplotlib. Для відображення самого інтерфейсу програми можна використати вбудовану бібліотеку Tkinter.

Також однією з важливих характеристик моделі є простота та зручність використання. Тобто користувач повинен мати можливість легко задати конфігурацію моделі та отримати результат. З цією метою конфігурація досліджуваної моделі була винесена в окремий файл, який складається з набору значень, що можуть бути легко відредаговані людиною. Також, за необхідністю, можна створити редактор параметрів моделі з графічним інтерфейсом користувача. Для прикладу, наведемо конфігурацію засобів масової інформації:

```
mass_media = [  
    ('Канал X1', 'Партія X', [1, 2, 4], 2),  
    ('Незалежне радіо', '', [1, 3], 1),  
    ...  
]
```

Значення кожного поля буде пояснено пізніше.

Розглянемо та обгрунтуємо основні значення файлу конфігурації.

Просторові межі суспільства будемо задавати як прямокутник, який складається з квадратів – областей. Такий підхід дає змогу легко задавати географію моделі. Якщо ж необхідно змодельовати не прямокутну фігуру, то її необхідно уявно вписати в прямокутник та задати густину населення 0 у не використовуваних областях.

Наступним кроком задамо глобальні параметри моделі. В цей список можна віднести кількість поглядів у системі поглядів, загальну кількість членів суспільства, глобальну конфігурацію зв'язків об'єктів (шаблон, який використовується для кожного об'єкта при визначенні кількості об'єктів постійного та випадкового спілкування. Для партійців він включає відношення між партійними та не партійними зв'язками), межі відхилення поглядів партійців від поглядів партії, тощо.

Далі задамо політичні партії. Після роздумів про зручне задання характеристик партії та приналежності об'єктів до неї, було обрано наступний формат. Кожна партія визначається таким рядом характеристик:

- Назва партії
- Тип партії: ідеологічна чи лідерська
- Базова система поглядів
- Кількість партійців у відсотках від загальної кількості населення
- Розподіл партійців по областях, у відсотках від кількості членів партії

На перший погляд, такий підхід може здатися не оптимальним. Але якщо задавати відсоток партійців від населення регіону, то в такому випадку складніше контролювати коректність конфігурації, так як дані розміщені у різних місцях. Якщо ж приналежність населення області до певної партії вказувати у властивостях цієї області, то тоді необхідно мати упорядкований список партій що є не логічним виходячи із сутності множини. Якщо ж додавати посилання на партію для кожного значення, то це суттєво ускладнить конфігурацію.

Далі задаємо розподіл безпартійного населення по території, аналогічно до розподілу партійців. У реалізації моделі можна трактувати безпартійних членів суспільства членами деякої нейтральної партії.

Пропонується використати наступну конфігурацію ЗМІ:

- Назва ЗМІ
- Власник ЗМІ. Значенням є назва партії, так як зазвичай залежні ЗМІ ведуть пропаганду певної ідеології, партії.
- Список областей які це ЗМІ охоплює
- Інтенсивність ЗМІ — число, яке показує на скільки інтенсивно це ЗМІ діє. Дозволяє не дублювати конфігурацію ЗМІ, якщо потрібно змінити його рівень впливу.

При створенні моделі із файлу конфігурації бажано перевіряти правильність задання параметрів та інформувати користувача у разі помилки у конфігурації.

Отримання конкретних даних моделі із конфігурації не є складним процесом, але варто відмітити кілька аспектів.

Найбільш складною по витраті часу в моделі є задача пошуку найближчих сусідів для кожного об'єкта. Тому раціонально знайти найближчих сусідів кожного об'єкта (у відповідності

до конфігурації) на етапі ініціалізації моделі та додати цю інформацію до його властивостей. Також, для кращої оптимізації, можна використати KDTree зі бібліотеки scipy (модуль spatial).

Для оптимізації роботи з числовими даними можна використати бібліотеку numpy.

Слід звернути увагу, що для членів суспільства, які належать до тої чи іншої політичної партії, необхідно знайти деяку кількість найближчих партійців. Але у випадку, якщо кількість партійців у області мала, відстань може бути значною, тобто локальна комунікація перестає бути локальною по факту. Для вирішення цієї проблеми потрібно обмежитися деяким радіусом (глобальний параметр моделі). У випадку, коли локальні зв'язки не можуть бути заповнені повною мірою, компенсуємо їх віддаленими зв'язками із однопартійцями.

Іншим аспектом реалізації може бути не ціле число партійців (як загальне, так і у регіоні, оскільки значення вираховується як відсотки). В такому випадку можна врахувати похибку округлення і додати не розподілені об'єкти в модель, скажімо в область із найбільшим числом однопартійців. Це ж саме вірно і для безпартійних членів суспільства.

Проведення моделювання є доволі прости процесом. На кожній ітерації проходимо по списку всіх об'єктів та проводимо взаємодії: постійні локальні, постійні віддалені, випадкові. Потім діємо на об'єкти, із заданою ймовірністю, за допомогою ЗМІ. Після проведення ітерації потрібно зберегти необхідний для відображення результатів набір даних.

Оскільки модель використовує випадкові числа, то для отримання точнішого результату необхідно зробити деяку кількість спроб для заданої характеристики моделі. Дана функція включена у реалізовану модель, та має ряд додаткових графіків. Також з додаткових функцій була додана можливість зберігати результати в файл, а потім, за необхідності, завантажити у програму, відобразити результати чи продовжити моделювання.

Для кращого бачення динаміки, деякі графіки має сенс зберігати регулярно протягом всього процесу моделювання, або ж зберігати динаміку процесу у відео файл.

4 Перевірка моделі чисельними експериментами

Для того щоб протестувати побудовану модель проведемо кілька чисельних експериментів, причому будемо задавати такі вхідні параметри моделі, для яких результат не викликати сумнівів. Це дасть змогу перевірити коректність побудованої моделі.

Для того щоб спростити аналіз, для наступних моделей задамо:

- система поглядів модельованого суспільства складається лише з одного погляду
- у суспільстві присутні лише дві політичні партії (назвемо їх А та В) з протилежними поглядами, які рівні за модулем. Покладемо абсолютне значення погляду рівним 0.65
- населення рівномірно розподілене по території модельованого суспільства та складає 1000 об'єктів.
- Задамо, що кожен об'єкт спілкується з 10-ма найближчими сусідами, а якщо він належить до політичної партії, то 6 із них повинні бути найближчими однопартійцями. Також кожен об'єкт постійно спілкується з 5-ма віддаленими об'єктами, 3 з яких однопартійці у випадку приналежності до партії. Кожен об'єкт має 4 випадкові комунікації за ітерацію.

Приклад 1.

Задамо, що партія А значно переважає партію В за чисельністю: до партії А входить 50% населення, а до партії В лише 15%. Покладемо, що ЗМІ відсутні.

При такому розкладі очевидно, що партія А зможе нав'язати свою ідеологію спочатку переважній більшості безпартійних об'єктів (так як безпартійний об'єкт зазнаватиме в середньому приблизно втричі більшого впливу з боку партії А чим партії В – це можна стверджувати з факту рівномірного розподілу населення по території), а потім, з їх допомогою впливати на членів партії В. Тобто весь процес завершиться домінуванням ідеології партії А.

Проведемо чисельні експерименти та наведемо кілька графіків (рис. 3-5):

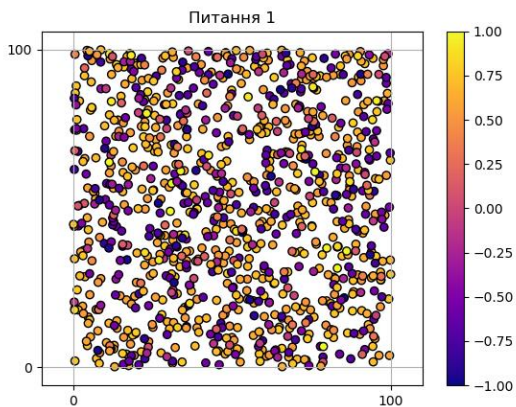


Рис. 3. Значення і розподіл по території досліджуваного питання до початку моделювання

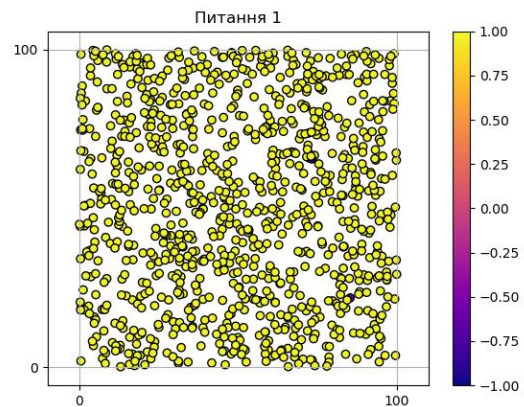


Рис. 4. Значення і розподіл по території досліджуваного питання після закінчення моделювання

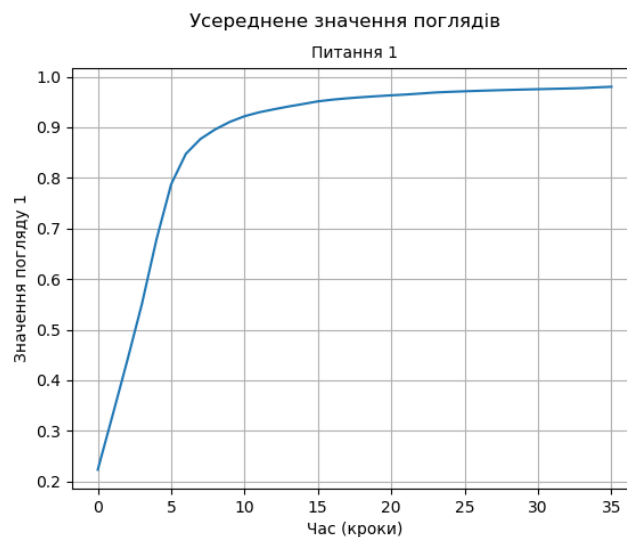


Рис. 5. Динаміка досліджуваного питання в часі

З рис. 3-5 бачимо, що суспільство приходить до консенсусу, причому перемогла ідеологія більш чисельної партії А.

Приклад 2.

Задамо модельовану територію розміром 2×1 . Покладемо, що до кожної партії входить 35% відсотків населення, причому усі члени партії А знаходяться у області зліва, а всі прихильники партії В – справа. Безпартійне населення розподілене рівномірно по території. Запишемо в конфігурацію відсутність впливу ЗМІ.

В такому випадку, кожна з партій переконає безпартійних громадян які знаходяться в області розміщення партії у своїх поглядах. Після цього настане поляризація суспільства.

Промодельуємо задану ситуацію (рис. 6-9).

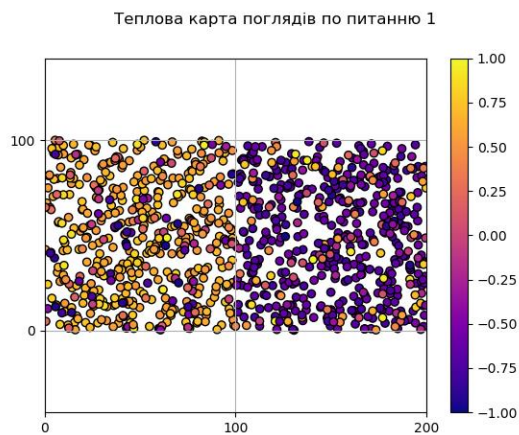


Рис. 6. Значення і розподіл по території досліджуваного питання до початку моделювання

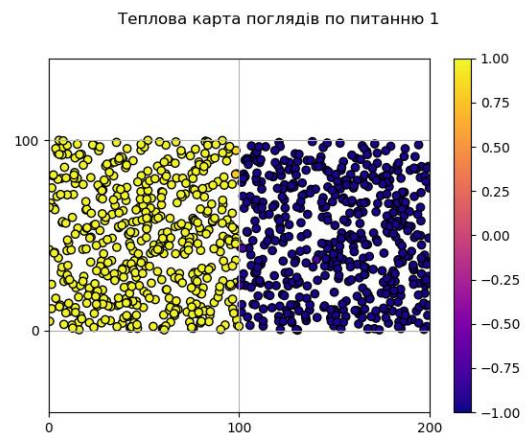


Рис. 7 Значення і розподіл по території досліджуваного питання після закінчення моделювання

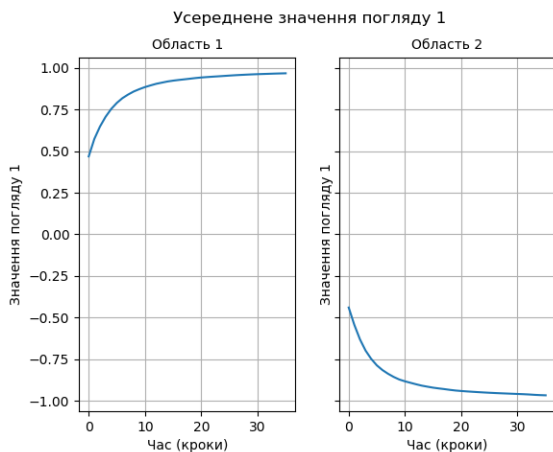


Рис. 8. Динаміка досліджуваного питання в часі, усереднена по областях



Рис. 9. Динаміка досліджуваного питання в часі, усереднена по всьому суспільству

Як видно з рис. 6-7, ідеологія кожної партії в своїй області поширюється на все більшу кількість населення і з часом суспільство стає поляризованим, а домінуюча думка в кожній з областей ще більше стверджується (рис. 8). І, як видно з рис. 9, при таких початкових умовах суспільство ділиться пополам за значенням досліджуваного погляду. Невеликі флуктуації пояснюються тим, що члени суспільства постійно обмінюються поглядами. Але загалом, суспільство по даному погляду стає максимально поляризованим.

Приклад 3.

Нехай до кожної з партій належить по 35% населення. Населення, як члени кожної з партій так і безпартійні об'єкти, розподілено рівномірно по території. Покладемо, що у суспільстві присутнє 1 незалежне ЗМІ, 1 ЗМІ що належить партії А та 10 ЗМІ підпорядкованих партії В. Усі ЗМІ діють на всій території модельованого суспільства.

В результаті партія В нав'яже свої погляди всьому суспільству завдяки домінуванню в інформаційному просторі.

Проведемо чисельні експерименти для перевірки припущення (рис. 10-12). З рис. 10-11 видно, що суспільство приходить до ідеології партії, якій підпорядкована домінуюча частина ЗМІ. З рис. 12 видно, що завдяки великій перевазі у розповсюдженні своєї ідеології через ЗМІ партія В дуже швидко схиляє все суспільство до своєї думки. Суспільство приходить до консенсусу.

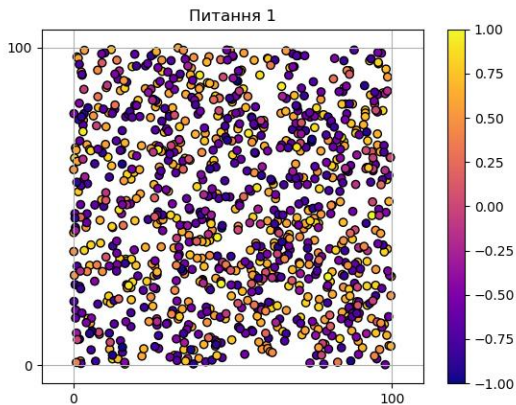


Рис. 10. Значення і розподіл по території досліджуваного питання до початку моделювання

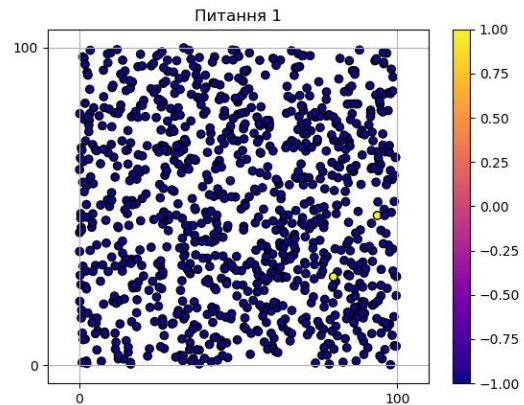


Рис. 11. Значення і розподіл по території досліджуваного питання після закінчення моделювання

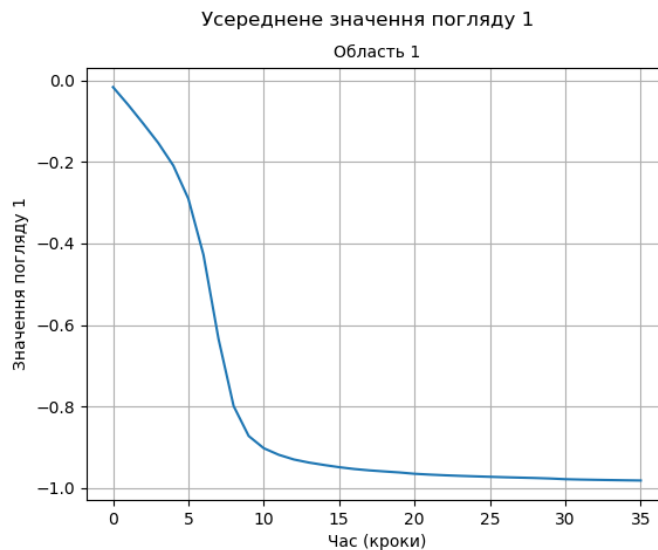


Рис. 12. Динаміка досліджуваного питання в часі

Як бачимо, теоретичні припущення збігаються з результатами отриманими з тестових запусків моделі, що свідчить про коректність побудови та реалізації моделі.

5 Висновок

В статті побудовано модель динаміки поглядів у сучасному суспільстві. Модель враховує ряд особливостей, що характерні саме для сучасного суспільства. Серед них: наявність політичних груп – партій, присутність у суспільстві засобів масової інформації, що, в свою чергу, можуть бути підпорядковані деякій політичній силі. На відміну від більшості класичних моделей, врахована наявність сучасних методів комунікації, таких як соціальні мережі, месенджери, телефонія. Окрім того враховується географічне розміщення регіонів, наявність у них спільних меж та неоднорідність густини населення по території модельованого суспільства.

При побудові моделі було також враховано той факт, що отримана модель повинна бути реалізована для проведення чисельних експериментів за допомогою комп'ютера. Тут важливим аспектом є зручність та простота задання початкової конфігурації моделі, що значно спрощує роботу з нею та дозволяє аналізувати значно більше різних конфігурацій.

Проведено чисельні експерименти, які підтверджують коректність роботи моделі. Також описані, з власного досвіду автора, деякі важливі деталі комп'ютерної реалізації цієї моделі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стадник А. Г. Інформаційна війна як комунікативна технологія впливу на масову свідомість та громадську думку. *Грані*. 2016. № 1. С. 111-115. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Grani_2016_1_22
2. Шпилик С. В. Інформаційна війна, пропаганда та пр: такі схожі й такі різні... *Галицький економічний вісник — Тернопіль : ТНТУ*, 2014. Том 47. № 4. С. 178-188. http://nbuv.gov.ua/UJRN/gev_2014_4_24
3. Хорошко В. Інформаційна війна. ЗМІ як інструмент інформаційного впливу на суспільство. Частина 1. *Безпека інформації*. 2016. Т. 22, № 3. С. 283-288. http://nbuv.gov.ua/UJRN/bezin_2016_22_3_9
4. Стадник А. Г. Основні моделі організації інформаційних війн та їх різновиди. *Соціальні технології: актуальні проблеми теорії та практики*. 2015. Вип. 67-68. С. 81-91. http://nbuv.gov.ua/UJRN/stapttp_2015_67-68_11
5. Сенченко М. Запорука національної безпеки в умовах інформаційної війни. *Вісник Книжкової палати*. 2014. № 6. С. 3-9. http://nbuv.gov.ua/UJRN/vkp_2014_6_2
6. Гапій В. Е. Пропаганда як інструмент впливу на підсвідомість людини в сучасній Україні. *Молодий вчений*. 2018. № 1(2). С. 636-641. [http://nbuv.gov.ua/UJRN/molv_2018_1\(2\)_20](http://nbuv.gov.ua/UJRN/molv_2018_1(2)_20)
7. Рубан А. О. Сучасні інформаційні комунікації та їх вплив на масову політичну свідомість і здоров'я людини. *Молодий вчений*. 2017. № 9.1. С. 143-147. http://nbuv.gov.ua/UJRN/molv_2017_9
8. Сахань, О. М. Незалежні засоби масової інформації як протидія деструктивному впливу влади на розвиток сучасного українського суспільства. *Національна юридична академія України ім. Ярослава Мудрого. Вісник Національної юридичної академії України ім. Ярослава Мудрого. Сер. Філософія, філософія права, політологія, соціологія*. 2010. №5, 2010. С. 142-153 <http://dspace.nlu.edu.ua/handle/123456789/3328>
9. Стефанчук, У. Інформаційні технології та їхній вплив на формування громадської думки в Україні. *Українська національна ідея: реалії та перспективи розвитку: Зб. наук. пр.* Львів, 2008. Вип. 20, С. 129-133. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/25656>
10. Курчина Т. О. Технології формування громадської думки через ЗМІ. *Українське журналістикознавство*. 2013. Вип. 14. С. 36-39. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Uzhz_2013_14_9
11. Стеценко І.В. Моделирование систем: навч. посіб. Черкаси: ЧДТУ, 2010. 399 с.
12. H. Gould, J. Tobochnik, W. Christian *An Introduction to Computer Simulation Methods, Third Edition*, 2007, ISBN: 0-8053-7758-1
13. R. Hegselmann U. Krause Opinion Dynamics and Bounded Confidence Models, Analysis, and Simulation. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation (JASSS)*. vol.5, no. 3, 2002. URL: <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/3/2.html>
14. F. J. León-Medina Endogenous Changes in Public Opinion Dynamics. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* 22(1) 4, 2019. URL: <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/22/2/4.html>
15. K. Sznajd-Weron J. Sznajd Opinion Evolution in Closed Community. *International Journal of Modern Physics*. C 11, January 2001. URL: https://www.researchgate.net/publication/1824618_Opinion_Evolution_in_Closed_Community
16. G. Deffuant Comparing Extremism Propagation Patterns in Continuous Opinion Models. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*. vol. 9 no. 3, 2006. URL: <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/9/3/8.html>

REFERENCES

1. Stadnyk A. H. "Information warfare as a communicative technology of influencing the mass consciousness and public opinion". *Hrani*. 2016. № 1. p. 111-115. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Grani_2016_1_22 [in Ukrainian].
2. Shpylyk S. V. "Information warfare, propaganda and PR: so similar and so different..." *Halyskyi economic bulletin — Ternopil, TSTU*, 2014. Vol. 47. № 4. p. 178-188 [in Ukrainian].
3. Khoroshko V. "Information warfare. Mass media as a tool of informational influence on society" Part 1. *Information security*. 2016. Vol. 22, № 3. p. 283-288. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/bezin_2016_22_3_9 [in Ukrainian].

4. Stadnyk A. H. "Basic models of information warfare organization and their varieties". *Social technologies: current issues of theory and practice*. 2015. Vol. 67-68. p. 81-91. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/staptp_2015_67-68_11 [in Ukrainian].
5. Senchenko M. "The key to national security in an information warfare" *Bulletin of the Book Chamber*. 2014. № 6. p. 3-9. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vkp_2014_6_2 [in Ukrainian].
6. Hapii V. E. "Propaganda as a tool to influence the human subconscious in modern Ukraine" *Young scientist*. 2018. № 1(2). p. 636-641. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/molv_2018_1\(2\)_20](http://nbuv.gov.ua/UJRN/molv_2018_1(2)_20) [in Ukrainian].
7. Ruban A. O. "Modern information communications and their impact on the mass political consciousness and human health." *Young scientist*. 2017. № 9.1. p. 143-147. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/molv_2017_9 [in Ukrainian].
8. Sakhan, O. M. "Independent mass media as counteraction to the destructive influence of the authorities on the development of modern Ukrainian society" *National Law Academy of Ukraine named after Yaroslav the Wise. Bulletin of the National Law Academy of Ukraine named after Yaroslav the Wise. Series Philosophy, philosophy of law, political science, sociology*. 2010. №5, 2010. p. 142-153 [in Ukrainian].
9. U. Stefanchuk "Information technologies and their influence on the formation of public opinion in Ukraine" *Ukrainian national idea: realities and prospects of development*. Lviv, 2008. Vol. 20, p. 129-133. [in Ukrainian].
10. Kurchyna T.O. "Technologies of forming public opinion through the media" *Ukrainian Journalism*. 2013. Vol. 14. p. 36-39. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Uzhz_2013_14_9 [in Ukrainian].
11. I. V. Stetsenko, *Systems modeling: textbook*. Cherkasy: CSTU, 2010, 399 p. [in Ukrainian].
12. H. Gould, J. Tobochnik, W. Christian *An Introduction to Computer Simulation Methods, Third Edition*, 2007, ISBN: 0-8053-7758-1
13. R. Hegselmann U. Krause "Opinion Dynamics and Bounded Confidence Models, Analysis, and Simulation" *Journal of Artificial Societies and Social Simulation (JASSS)*. vol.5, no. 3, 2002. URL: <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/3/2.html>
14. F. J. León-Medina "Endogenous Changes in Public Opinion Dynamics" *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* 22(1) 4, 2019. URL: <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/22/2/4.html>
15. K. Sznajd-Weron J. Sznajd "Opinion Evolution in Closed Community" *International Journal of Modern Physics*. C 11, January 2001. URL: https://www.researchgate.net/publication/1824618_Opinion_Evolution_in_Closed_Community
16. G. Deffuant "Comparing Extremism Propagation Patterns in Continuous Opinion Models" *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*. vol. 9 no. 3, 2006. URL: <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/9/3/8.htm>

УДК 004.2

Analysis of existing verification technologies for parallel programs

O.Yu. Moroz, O.G. Tolstoluzka, R.V. Savchenko

**Moroz
Olha Yuriivna***Senior lecturer of the Department of Theoretical and Applied Systems Engineering, Faculty of Computer Science; VN Karazin Kharkiv National University, 6 Svobody Square, Kharkiv, Ukraine, 61022**e-mail: o.moroz@karazin.ua**<https://orcid.org/0000-0002-4920-4093>.***Tolstoluzka
Olga Gennadiivna***Doctor of Technical Sciences, Senior Research Fellow, Professor of the Department of Theoretical and Applied Systems Engineering, Faculty of Computer Science; VN Karazin Kharkiv National University, 6 Svobody Square, Kharkiv, Ukraine, 61022**e-mail: elena.tolstoluzka@karazin.ua**<https://orcid.org/0000-0001-2741-180>.***Savchenko
Roman Valeriyovich***student of the Faculty of Computer Science; VN Karazin Kharkiv National University, 6 Svobody Square, Kharkiv, Ukraine, 61022**e-mail: roma.savchenko@gmail.com**<https://orcid.org/0000-0002-8184-1818>*

There have been large fluctuations in the perceived value of parallel computing in the last decades. Sometimes parallel computation has been viewed optimistically as the solution to all of our computational limitations. The conventional division of verification methods is analyzed. It has been concluded that synthetic methods of software verification can be considered as the most relevant, useful and productive ones. The relevance of the implementation of the methods of formal verification of software of computer systems, which supplement the traditional methods of testing and debugging, and make it possible to improve the program uptime and security, is noted. The formal verification methods of computer system software can guarantee that verification of the properties is performed by a system model. Nowadays, development of these methods is lying in the direction of reducing the formal verification total cost, support of modern programming concepts and minimization of "manual" work in the transition from the system model to its implementation. Their main feature is the ability to search for errors using a mathematical model without recourse to the existing software realization. It is very convenient and economical. There are several specific techniques used for a formal model analysis, such as a deductive analysis, model and consistence check. Every verification method is being used in particular cases, depending on the goal. Synthetic methods of software verification are considered as the most actual, useful and efficient, as they aim to combine the advantages of different verification approaches being free of their drawbacks. The significant progress in the development of such methods and their implementation in the industrial software development has been currently made.

Keywords: parallel programming; verification of programs; formal verification

Аналіз існуючих технологій верифікації паралельних програм

**Мороз
Ольга Юрїївна***старший викладач кафедри теоретичної та прикладної системотехніки факультету комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61077***Толстолузька
Олена Геннадіївна***д.т.н., с.н.с., професор кафедри теоретичної і прикладної системотехніки факультету комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61077***Савченко
Роман Валерійович***студент факультету комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61077*

Проведено аналіз загальноприйнятого поділу методів верифікації. Суть формальних методів полягає в створенні математичних моделей програм і вимог і в логічному аналізі відповідності між побудованими моделями. На сьогодні, формальні методи \neg це фундамент, на якому стоїть будівля програмної інженерії. Зроблено висновок, що найактуальнішими, найбільш корисними та продуктивними можна вважати синтетичні методи верифікації ПЗ. Зазначено, що актуальним є впровадження в практику методів формальної верифікації програмного забезпечення комп'ютерних систем, що доповнюють традиційні методи тестування і налагодження, і дозволяють підвищити безвідмовність і безпеку програм.

Ключові слова: паралельне програмування; верифікація програм; формальна верифікація

Анализ существующих технологий верификации параллельных программ

Мороз Ольга Юрьевна	<i>старший преподаватель кафедры теоретической и прикладной системотехники факультета компьютерных наук; Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 6, Харьков, Украина, 61077</i>
Толстолужская Елена Геннадиевна	<i>д.т.н., с.н.с., профессор теоретической и прикладной системотехники факультета компьютерных наук; Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 6, Харьков, Украина, 61077</i>
Савченко Роман Валерьевич	<i>студент факультета компьютерных наук; Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 6, Харьков, Украина, 61077</i>

Проведен анализ общепринятого распределения методов верификации. Суть формальных методов состоит в создании математических моделей программ и требований и в логическом анализе соответствия между построенными моделями. На сегодня, формальные методы \neg это фундамент, на котором стоит здание программной инженерии. Сделан вывод, что наиболее актуальными, наиболее полезными и продуктивными можно считать синтетические методы верификации ПО. Отмечено, что актуальным является внедрение в практику методов формальной верификации программного обеспечения компьютерных систем, дополняющие традиционные методы тестирования и отладки, и позволяют повысить безотказность и безопасность приложений.

Ключевые слова: параллельное программирование; верификация программ; формальная верификация

There have been large fluctuations in the perceived value of parallel computing in the last decades. Sometimes parallel computation has been viewed optimistically as the solution to all of our computational limitations. But there are those who argue that it is not worth the effort, given that the CPU speed continues to improve and memory cost to reduce. The perceptions tend to fluctuate between these two extremities due to a number of factors: constant changes in the “hot” issues to be addressed, availability to users of the programming environment, the computer market, vendors involved in building the supercomputers and the focus of the scientific community at any given moment and time. As a result, it is very difficult to judge objectively the value and prospects of parallel computing.

Verification of programs or computer systems is an activity aimed at determining their correctness or finding errors. This activity can take various forms: code inspection; static analysis (search for typical errors); testing (running the program on examples and checking the correctness of the results); simulation modeling (creation of a feasible model of the system and its inspection in a special environment); formal verification (construction of a logical model of the system and its analysis by means of mathematical logic). There are many approaches, but none of them can guarantee the correctness of really complex projects; the best results, as practice shows, are achieved by combining different methods. The essence of formal methods is to create mathematical models of programs and requirements and a logical analysis of the correspondence between the constructed models. Today, formal methods are the foundation on which the building of the software engineering stands. It should be noted that formal methods have long gone beyond the academic community and have become part of the industry, as well as part of the system development process (microprocessors and operating systems). In the information society, software development has become mass activity.

Software Testing is developing both as industry and science. Distributions occur, new directions and scientific flows appear; different techniques, methods and practices of software testing are used. It is often caused by the fact that companies or organizations pursue different goals or by specifics of testing the different product categories (medicine, tourism, education, finance, e-commerce, etc.).

STLC (Software Testing life cycle) means all actions which are performed during testing of software product.

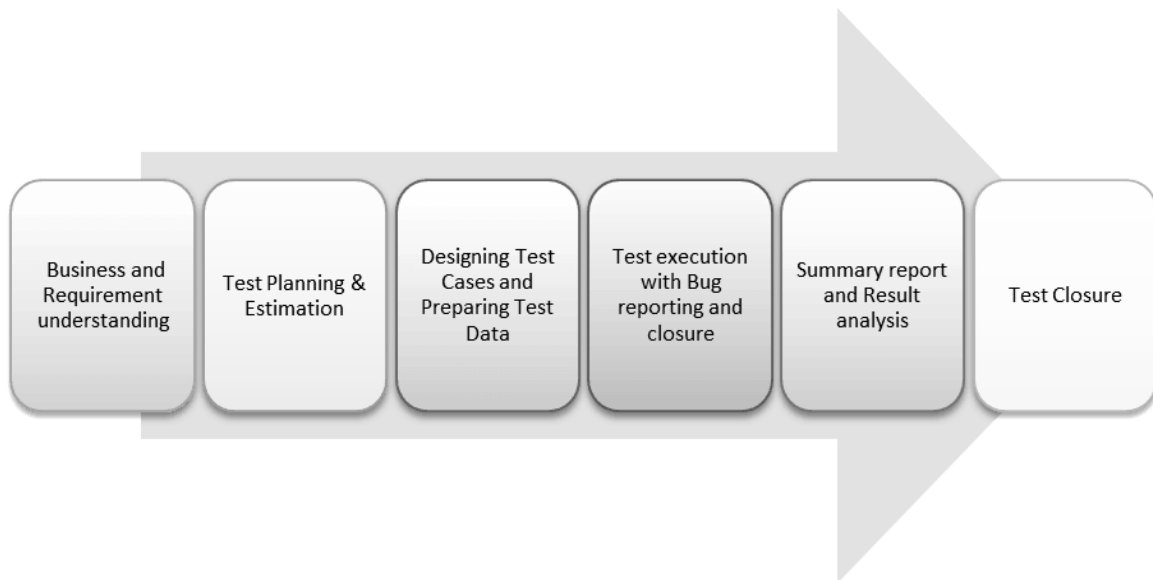


Figure 1. STLC (Software Testing life cycle)

Nowadays, ensuring high reliability and infallibility of modern management systems software is one of the main tasks of the IT industry. Therefore, the implementation of software engineering formal verification methods, which complement traditional testing and tune-up methods, and allow increasing software infallibility and security is highly relevant.

Software verification is more general concept than testing. The main goal of verification is to achieve a guarantee that a verified object (requirements or program code) meets the demands, is implemented without unexpected functions and suits design specifications and standards. The common division of verification methods is presented as a diagram in Fig. 2.

Software system validation is a process of proving that goals set for this system are achieved as a result of system development. In other words, validation is checking if the system meets the customer's expectations.

The main standard, which controls software verification planning and realization, is called IEEE 1012 for verification and validation processes [1]. This standard includes the description of different verification task sets which accord to diverse activities, recommended template of the inspection and confirmation plan, determination of 4 software criticality levels (from high to minimal).

Software expertise includes all verification methods, in which evaluation of the software life cycle artifacts is done by people. The main advantage of this method is the ability to detect 50-90% of errors [5]. However, it also has some drawbacks. Error search, evaluation and analysis of software properties are done by a human (usually it is a group of 2-5 persons). Therefore, experts, programmers with 10 or more years of work experience are required to perform this action.

Static analysis is an analysis performed without program execution. Its methods can be divided into two: the control to ensure that all formalized rules of correct construction of these artifacts are performed, and the search for some typical errors and defects based on some templates. [2]. Static analysis instruments often use both kinds of checking. Static analysis is considered to be the most often used verification method. Proven code correctness rules or common errors templates are being transferred to the development environments.

Static analysis advantages:

- Automatic analysis of multiple execution paths at one time.
- Detection of errors that occur only on single execution paths or on unusual input data.
- Ability to analyze on an incomplete set of input files.
- No overhead costs during program execution.

Drawbacks of this method:

- Lot of error responses.
- Manual checking of work results is required (needs significant time, human and material resources).

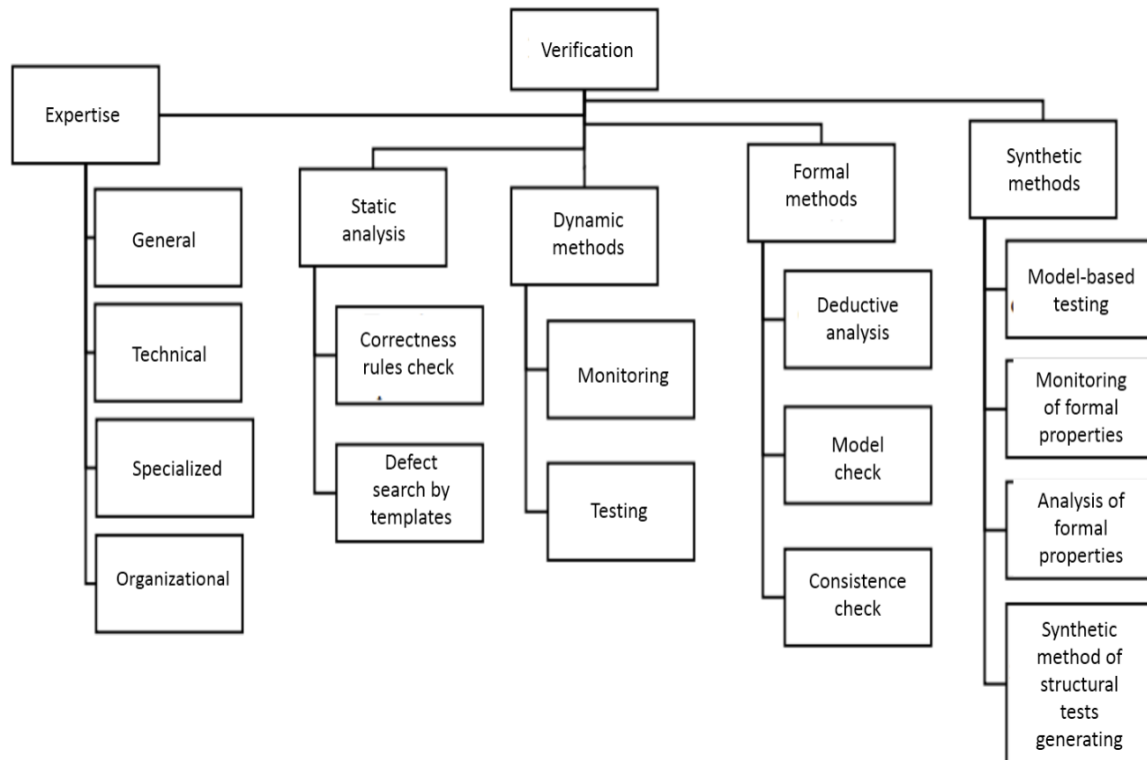


Figure 2. Common division of verification methods

Dynamic verification methods use results of real work of software system or its prototypes to verify the compliance of these results with the requirements and designs.

There are two main kinds of dynamic verification methods: monitoring, which provides only observation, recording and evaluation of the software normal working process, and testing, which runs software by using prepared scripts. The advantage of this method is good error detecting ability; the drawbacks include the need for a prepared input data set, runtime environment, as well as high demand for the resources.

Formal verification methods. Their main feature is an ability to search for errors by using mathematical model without recourse to existing realization of software. It is very convenient and economical. There are several specific techniques used for formal models analysis, such as a deductive analysis, a model and a consistence check. Unfortunately, construction of these models requires a correct and adequate model of software itself [4]. Only if model is created correctly, some of its properties could be analyzed automatically. However, in most cases specialists require deep knowledge of mathematical logic, algebra and must be experienced users of this device in order to do an effective analysis.

Compared to sequential writing, parallel programs are much more complicated. In sequential programming, a programmer develops an algorithm, then expresses it to the computer in a correct and understandable language, and makes it efficient to execute. Parallel programming has the same problems, but also a number of additional ones. They complicate the development and have no analogues in the consistent sphere. These problems include: data allocation management, parallelism

search and expression, computational load, as well as the proper implementation of a parallel algorithm, interprocessor communication management, and balancing. The algorithm takes turns considering each of these challenges.

Distribution of task data is another problem of parallel programming. Most conventional parallel computers have the concept of data locality. This means that you can get much faster access to data stored in memory that is “closer” to a particular processor. Data locality can also occur because each processor has its own local memory. Similarly, in a machine with allocated memory, this occurs through a cache processor that is in the shared memory system.

The programmer must pay attention to where the data is stored in relation to the processors that will access them, precisely because of the influence of data localization. The closer the data, the faster the processor will be able to access them and shut down. That is why the division of labor and the dissemination of data are closely linked. The optimal design of the program will take both aspects into account.

For a long time, the basis of parallel computing has been the automatic parallelization of a serial program by the compiler. Decades of work by compiler researchers have had little success, and automatic parallelization works only in limited conditions. In the best case, the languages are partially implicit, in which case a programmer gives the directives for parallelizing the compiler. Verilog, VHDL, Parallel Haskell, SISAL, Mitrion-C, and System C (for FPGA) are known as implicit parallel programming languages.

The tools for automatically generating code-based tests that use additional sources of information have been recently developed actively.

These sources include static code analysis, a formal analysis, earlier test monitoring, etc. Since this kind of instruments uses 3–4 different techniques, their methods are classified as a separate kind of synthetic verification methods [3]. They combine several approach types – static analysis, formal analysis of software properties and testing. In the last 10–15 years some of those methods such as primarily model-based testing and monitoring of formal properties have become independent research areas. Advantages and drawbacks of synthetic methods are determined by combination of verification methods used by a synthetic method.

The purpose of the work is to analyze the possibilities of using structures of the semantic-numerical specification to describe formally the objects of the model of planning parallel processes in the computer networks. This work contains the analysis of the existing methods of static and time model specification. The generalized model planning parallel processes in the computer networks is analyzed.

The formal description of input data of the planning model by the semantic-numerical specification is proposed. The implementation program of graphic editor for the graphic specification for the model planning parallel processes objects has been developed. The analysis of the resource model planning highlights its significance and necessity of an object format. With the help of the program we can construct a topology of the computer networks, C-graphs for C-programs, in order to understand and create structures of the semantic-numerical specification for input data of the planning model.

The formal verification methods of computer system software can guarantee that verification of the properties is performed by a system model. Nowadays, development of these methods is lying in the direction of reducing the formal verification total cost, support of modern programming concepts and minimization of “manual” work in the transition from the system model to its implementation.

Every verification method is being used in particular cases, depending on the goal. Synthetic methods of software verification are considered as the most actual, useful and efficient, as they aim to combine the advantages of different verification approaches being free of their drawbacks.

The significant progress in the development of such methods and their implementation in the industrial software development has been currently made.

ЛІТЕРАТУРА

1. IEEE 1012-2004 Standard for Software Verification and Validation. IEEE, 2005. p.153.
2. L. Yu A light-weight static approach to analyzing UML behavioral properties. L. Yu, R. B. France, I. Ray, K. Lano.. Proc. of 12-th IEEE International Conference on Engineering Complex Computer Systems (ICECCS 2007) pp. 56–63, 2007. p. 79.

<https://www.cs.colostate.edu/~iray/research/papers/iceccs07.pdf>

3. M. Broy *Model Based Testing of Reactive Systems*. M. Broy, B. Jonsson, J.-P. Katoen, M. Leucker, A.Pretschner (eds.). LNCS 3472, Springer, 2005. p. 273.
4. T. Ball *Thorough Static Analysis of Device Drivers*. In Proc. of EuroSys 2006. T. Ball, E. Bounimova, B.Cook, V. Levin, J. Lichtenberg, C. McGarvey, B. Ondrusek, S. K. Rajamani, A. Ustuner., ACM SIGOPS OperatingSystems Review, 2006. p. 74.
5. Y. K. Wong. *Modern Software Review: Techniques and Technologies*. IRM Press, 2006. p. 368.
6. Б.У. Бозм. *Инженерное проектирование программного обеспечения*. М.: Радио и связь, 1985. 368 с.

REFERENCES

1. IEEE 1012-2004 *Standard for Software Verification and Validation*. IEEE, 2005. p.153.
<https://people.eecs.ku.edu/~hossein/Teaching/Std/1012.pdf> [in English]
2. L. Yu *A light-weight static approach to analyzing UML behavioral properties*. L. Yu, R. B. France, I. Ray, K. Lano.. Proc. of 12-th IEEE International Conference on Engineering Complex Computer Systems (ICECCS 2007), pp. 56–63, 2007. p. 79.
<https://www.cs.colostate.edu/~iray/research/papers/iceccs07.pdf> [in English]
3. M. Broy *Model Based Testing of Reactive Systems*. M. Broy, B. Jonsson, J.-P. Katoen, M. Leucker, A.Pretschner (eds.). LNCS 3472, Springer, 2005. p. 273.
<https://www.springer.com/gp/book/9783540262787> [in English]
4. T. Ball *Thorough Static Analysis of Device Drivers*. In Proc. of EuroSys 2006. T. Ball, E. Bounimova, B.Cook, V. Levin, J. Lichtenberg, C. McGarvey, B. Ondrusek, S. K. Rajamani, A. Ustuner., ACM SIGOPS OperatingSystems Review, 2006. p. 74.
<https://dl.acm.org/doi/10.1145/1217935.1217943>[in English]
5. Y. K. Wong. *Modern Software Review: Techniques and Technologies*. IRM Press, 2006. p. 368
<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.174.4479&rep=rep1&type=pdf> [in English]
6. B.U. Boehm. *Engineering software design*. М.: Rado and communication, 1985. 368p.
http://www.library.univ.kiev.ua/ukr/elcat/new/detail.php3?doc_id=136392 [in Russian].

UDC 004.07

Development of basic approaches to creating hardware and software for radiation monitoring information systems

M. Stervoyedov, V. Terokhin, O. Ridozub, S. Fomin

Stervoyedov Nikolay*PhD (Technology), associate Professor; Head of the Department of electronics and control systems, V. N. Karazin Kharkiv national University, 6 Svobody square, Kharkiv-22, Ukraine, 61022**e-mail: stervoyedov@yahoo.com**<https://orcid.org/0000-0003-0136-6437>***Terokhin Vitaliy***Aspirant of the Department of electronics and control systems, V. N. Karazin Kharkiv national University, 6 Svobody square, Kharkiv-22, Ukraine, 61022**e-mail: kbs-com@karazin.ua**<https://orcid.org/0000-0001-7653-4488>***Ridozub Oleh***student of the faculty of Computer science, V. N. Karazin Kharkiv national University, 6 Svobody square, Kharkiv-22, Ukraine, 61022**e-mail: ridozub@gmail.com**<https://orcid.org/0000-0003-0136-6437>***Fomin Sergey***PhD (Technology), of physical and mathematical Sciences, senior researcher of the Department of nuclear and medical physics of the faculty of physics and technology, V. N. Karazin Kharkiv national University, 6 Svobody square, Kharkiv-22, Ukraine, 61022**e-mail: fomin@nas.gov.ua**<https://orcid.org/0000-0002-4714-6141>*

Basic approaches to creating hardware and software for radiation monitoring information systems have been developed in the article. A modern information system for radiation monitoring and control that requires a comprehensive approach and an iterative process of its creation has been developed. The proposed approach to integrating local measuring devices with cloud services, using M2M/IoT technology for remote measurements, advanced semiconductor sensors based on CdTe and CdZnTe radiation detectors, modern microcontroller and communication microchips is highly promising. Developed hardware and software solutions demonstrate increased accuracy due to hardware and software correction of measurement results. A variant of the architectural solution for building a platform for remote access to dosimetric and radiometric measurements is being developed. The solution lies in the direction of improving the parameters of detectors, as well as the characteristics of electronic modules of detecting systems and creating software for controlling the detection process, collecting and digital processing of information, and its adequate presentation to users online. The architecture and structural diagram of a dosimetric system, a sequence diagram, a diagram of a dosimetric system with a subsystem for data exchange over the Internet have been created. A new algorithm for measuring the exposure dose rate of ionizing radiation has been proposed. The block diagram of a microcontroller dosimeter has been developed. The algorithm for correcting the dependence of the sensitivity of the detector based on CdZnTe on the energy of the detected gamma quanta has already been proposed. The algorithm significantly reduces the uncertainty of measuring the radiation dose rate. The architecture and block diagram of the dosimetric system with the possibility of remote access and remote control of the main functions has been presented as well. The calculation of the exposure dose of gamma radiation and the power of the exposure dose with the energy dependence correction have been used. The system elements have proved to be useful for students' distant laboratory work during the quarantine.

Keywords: radiation monitoring, microcontroller, dosimeter, detector, microcontroller, semiconductor sensors, charge-sensitive amplifier, cloud services, remote user access..

Розробка основних підходів до створення апаратно-програмних засобів інформаційних систем радіаційного моніторингу

М.Г.Стервоєдов, В.Л.Терьохін, О.В.Рідозуб, С.П.Фомін

**Стервоєдов
Микола
Григорович***к.т.н., доцент; завідувач кафедри електроніки
та управляючих систем**Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна,
Майдан Свободи 4, Харків-22, Україна, 61022*

**Терьохін
Віталій
Леонідович** *аспірант кафедри електроніки та управляючих систем
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна,
Майдан Свободи 4, Харків-22, Україна, 61022*

**Рідозуб
Олег
Володимирович** *студент факультету Комп'ютерних наук
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна,
Майдан Свободи 4, Харків-22, Україна, 61022*

**Фомін
Сергій
Петрович** *к.ф.н, старший науковий співробітник кафедри ядерної та
медичної фізики фізико-технічного факультету
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна,
Майдан Свободи 4, Харків-22, Україна, 61022*

У цій статті розроблено базові підходи до створення апаратно-програмного забезпечення для інформаційних систем радіаційного контролю. Розроблено сучасна інформаційна система радіаційного контролю і моніторингу яка потребує комплексного підходу та ітеративного процесу її створення. При цьому, перспективним напрямком є запропонований підхід інтеграції локальних вимірювальних приладів з хмарними сервісами, застосування М2М/ІоТ технології для віддалених вимірювань, використання перспективних напівпровідникових сенсорів на основі CdTe і CdZnTe детекторів випромінювань, сучасної мікроконтролерної і комунікаційної мікросхемотехніки то що. Розроблені апаратні і програмні рішення мають підвищену точність за рахунок апаратно-програмної корекції результатів вимірювань. Розроблено варіант архітектурного рішення для побудови платформи для віддаленого доступу до дозиметричних та радіометричних вимірювань з пошуком шляхів вирішення цієї проблеми йде в напрямку поліпшення параметрів детекторів, удосконалення характеристик електронних модулів детектуючих систем і створення програмного забезпечення для управління процесом детектування, збором інформації, її цифрової обробки і адекватного представлення користувачам в on-line режимі. Створення архітектури та структурної схеми дозиметричної системи, діаграма послідовностей, схема дозиметричної системи з підсистемою обміну даними за допомогою Інтернет. Запропоновано новий алгоритм вимірювання потужності експозиційної дози іонізуючого випромінювання. Розробка структурної схеми мікроконтролерного дозиметра. Раніше був запропонований алгоритм корекції залежності чутливості детектора на основі CdZnTe від енергії реєстрованих гамма квантів. Алгоритм значно зменшує невизначеність вимірювання потужності дози опромінення. Також була розроблена архітектура і структурна схема дозиметричної системи з можливістю віддаленого доступу та дистанційного управління основними функціями. Використано обчислення експозиційної дози гамма випромінювання і потужності експозиційної дози зі корекцією енергетичної залежності. Також, елементи системи виявилися корисними для дистанційного виконання лабораторних робіт студентами під час карантину.

Ключові слова: *радіаційний моніторинг, мікроконтролерний дозиметр, детектор, мікроконтролер, напівпровідникові сенсори, зарядо - чутливий підсилювач, хмарні сервіси, віддалений доступ користувачів.*

Разработка основных подходов к созданию аппаратно-программных средств информационных систем радиационного мониторинга

Н.Г.Стервоедов, В.Л.Терехин, О.В.Ридозуб, С.П.Фомин

**Стервоедов
Николай
Григорьевич** *к.т.н., доцент; заведующий кафедры электроники
и управляющих систем
Харковський національний університет імені В.Н.Каразіна,
Площадь Свободы 4, Харьков-22, Украина, 61022*

**Терехин
Виталий
Леонидович** *аспірант кафедри електроніки та управляючих систем
Харковський національний університет імені В.Н.Каразіна,
Площадь Свободы 4, Харьков-22, Украина, 61022*

**Ридозуб
Олег
Владимирович** *студент факультета Компьютерных наук
Харковський національний університет імені В.Н.Каразіна,
Площадь Свободы 4, Харьков-22, Украина, 61022*

**Фомін
Сергій
Петрович** *к.ф.н, старший научный сотрудник кафедры ядерной и
медицинской физики физико-технического факультета
Харковський національний університет імені В.Н.Каразіна,
Площадь Свободы 4, Харьков-22, Украина, 61022*

В этой статье разработаны базовые подходы к созданию аппаратно-программного обеспечения для информационных систем радиационного контроля. Разработана современная информационная система радиационного контроля и мониторинга которая требует комплексного подхода и итеративного процесса ее создания. При этом, перспективным направлением является предложенный подход интеграции локальных измерительных приборов с облачными сервисами, применения M2M/IoT технологии для удаленных измерений, использования перспективных полупроводниковых сенсоров на основе CdTe и CdZnTe детекторов излучений, современной микроконтроллерной и коммуникационной микросхемотехники. Разработаны аппаратные и программные решения имеют повышенную точность за счет аппаратно-программной коррекции результатов измерений. Разработан вариант архитектурного решения для построения платформы для удаленного доступа к дозиметрическим измерениям с поиском путей решения этой проблемы идет в направлении улучшения параметров детекторов, усовершенствование характеристик электронных модулей детектирующих систем и создание программного обеспечения для управления процессом детектирования, сбором информации, ее цифровой обработки и адекватного представления пользователям в on-line режиме. Создание архитектуры и структурной схемы дозиметрической системы, диаграмма последовательностей, схема дозиметрической системы с подсистемой обмена данными посредством Интернет. Предложен новый алгоритм измерения мощности экспозиционной дозы ионизирующего излучения. Разработка структурной схемы микроконтроллерного дозиметра. Ранее был предложен алгоритм коррекции зависимости чувствительности детектора на основе CdZnTe от энергии регистрируемых гамма квантов. Алгоритм значительно уменьшает неопределенность измерения мощности дозы облучения. Также была разработана архитектура и структурная схема дозиметрической системы с возможностью удаленного доступа и дистанционного управления основными функциями. Использовано вычисление экспозиционной дозы гамма излучения и мощности экспозиционной дозы с коррекцией энергетической зависимости. Также, элементы системы оказались полезными для дистанционного выполнения лабораторных.

Ключевые слова: радиационный мониторинг, микроконтроллерный дозиметр, детектор, микроконтроллер, полупроводниковые сенсоры, зарядо - чувствительный усилитель, облачные сервисы, удаленный доступ пользователей.

Introduction

The amount of ionizing radiation energy absorbed by a human body determines the degree of radiation damage to the functional organs [1]. Therefore, the correct measurement of the radiation dosage and new ways to increase the accuracy or reduce the uncertainty of the measured and calculated dosimetric values present an immediate problem. The search for solutions to this problem is based on improving the parameters of detectors, enhancing the characteristics of electronic modules of detecting systems, as well as creating software for controlling the detection process, collecting and processing information, and adequately representing it to users online [2,3]. When developing software, it is necessary to consider the interaction of ionizing radiation with materials and objects that are irradiated. In particular, it is necessary to consider their heterogeneity and the energy dependence of the detector sensitivity - the so-called "course with rigidity" - in a wide range of energy and radiation intensity, which is a nontrivial task [4].

Rapid development of information technologies and modern electronic database provide new opportunities for creating systems for monitoring the radiation state of objects and the impact of the radiation load on living organisms. Also, they are using M2M / IoT solutions for remote measurements, advanced semiconductor sensors (e.g. based on CdTe and CdZnTe radiation detectors), modern microcontroller technology, etc.

General structure of hardware and software for radiation monitoring information systems

The extremely useful hardware and software solution for online access to the information about the measuring dose and spectral composition of radiation, as well as parameters of detectors and spectrodosimetric equipment is the integration of local solutions with cloud technologies such as the ThingSpeak, a service for receiving, analyzing, and visualizing data. This service is free and has built-in MATLAB package - a high-level language and interactive environment for programming, numerical calculations and visualization of results. When using the package you can analyze data, develop algorithms, create models and applications [5].

The connection of equipment, a dosimeter in our case, is performed according to the Fig. 1. The ESP32 electronic module - a microcontroller with a Wi-Fi interface should be integrated in the device as suggested in [6].

The developed scheme is particularly useful for educational purposes. Using this solution, students will have remote access to research equipment via their smartphones and be able to use such powerful tools as MATLAB and SIMULINK for calculations.

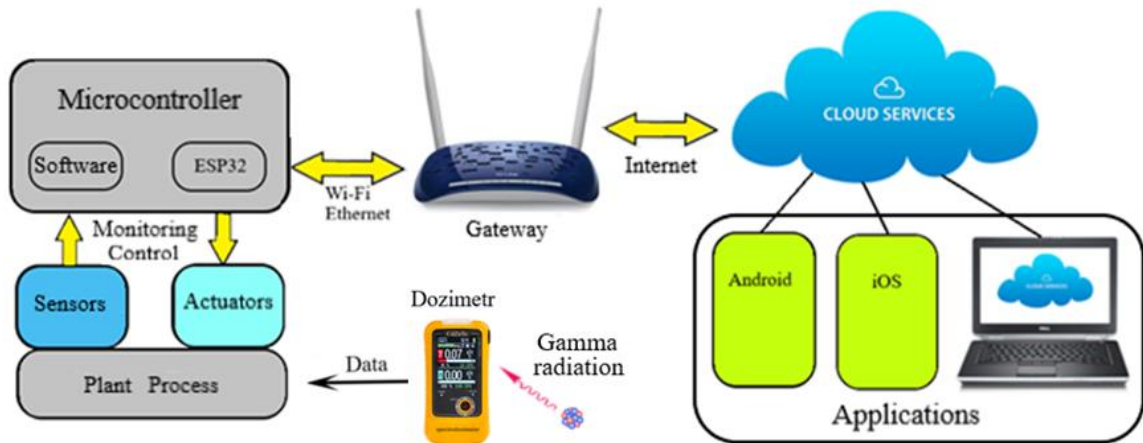


Fig. 1. The scheme of integrating the spectrodosimetric equipment with the cloud service.

The variation of the architectural solution for building a platform with remote access to dosimetric and radiometric measurements is presented in Fig. 2. The layout of the scheme for integrating dosimetric equipment with global networks is based on the STM32F4 Discovery microcontroller board and weither ESP8266 or ESP12 modules. Applying a single-board computer, for example, the Raspberry Pi and the ESP32-SX1278-Lora module is a cost-effective and robust option for creating a platform.

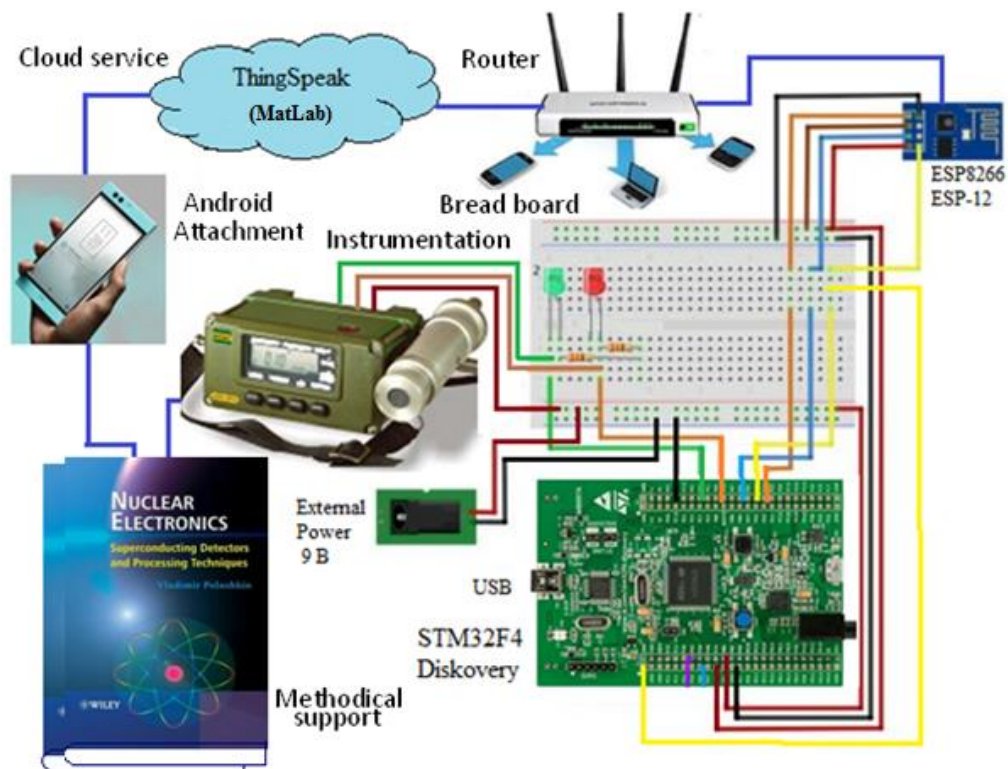


Fig. 2. The scheme for building a platform for remote user access to dosimetric and radiometric measurements.

The ^{137}Cs (662 Kev) gamma-ray spectrum view on a smartphone screen obtained by using the $\text{Cd}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}\text{Te}$ detector is shown in Fig. 3 [7].

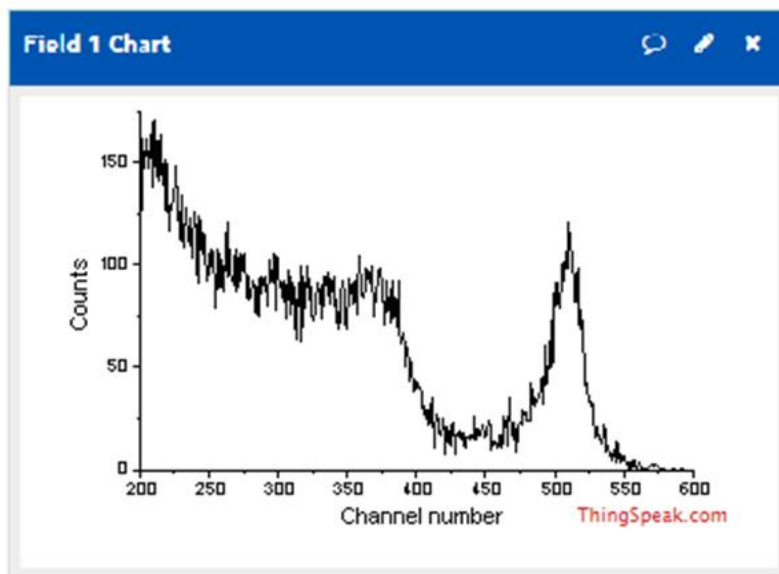


Fig. 3. Spectrum of 137Cs gamma quanta in a smartphone screen.

Development of architecture and block diagram of the dosimetric system

The graphical unified object modeling language UML-Unified Modeling Language is used for visual representation of the system functions. This modern tool is widely used in the development of software for modeling business processes, system design, and displaying organizational structures. The use case diagram developed by UML is presented in Fig. 4. This diagram visually represents various scenarios of interaction between actors (users) and precedents (use cases), and describes the functional aspects of the system (business logic).

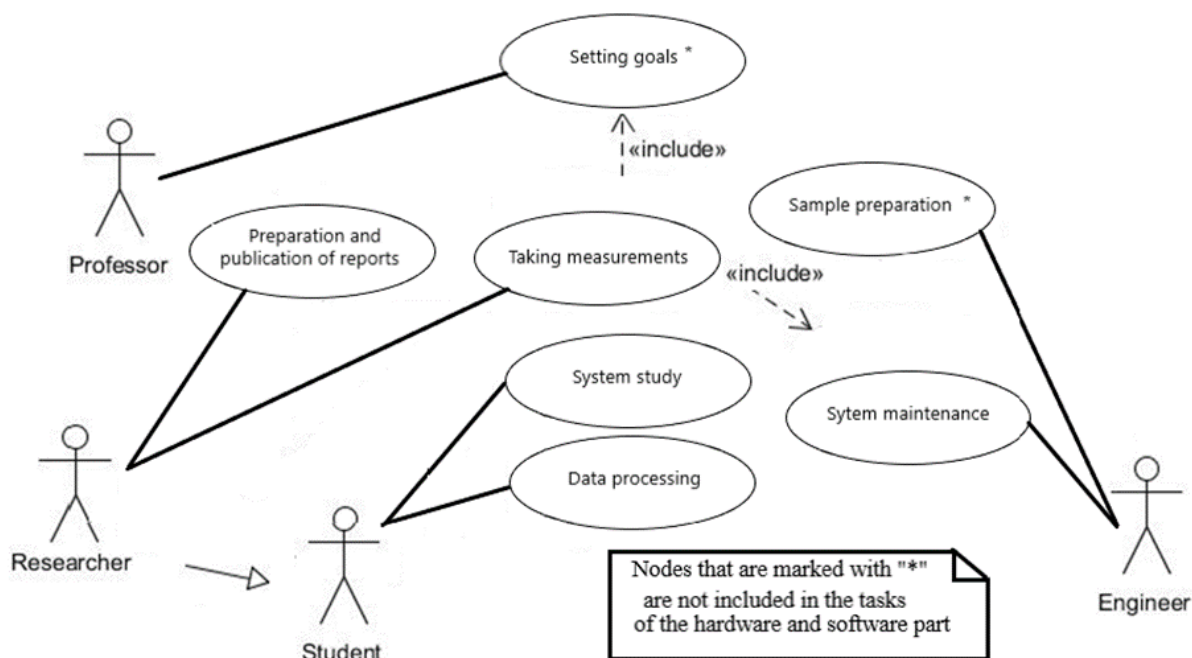


Fig. 4. UML use case diagram of the system functions.

According to the use case diagram, the system assumes that there are several classes of users who take part in the system operation.

There are two main types of users shown in the diagram: information consumers (students) and researchers who do not have direct access to the system hardware, and staff who have the necessary knowledge and authority to use complex devices of the dosimetry system to conduct experiments.

It is planned that the system will include a certain number of dosimetric laboratories and a number of users. The advantage of using a web service in this case is that the work of distributing information to any number of users is performed by the service's servers. The ThingSpeak cloud service also allows you to create a channel with multiple data fields that can be recorded from different data collectors.

The process of systems interaction over time is represented in the sequence diagram shown in Fig. 5.

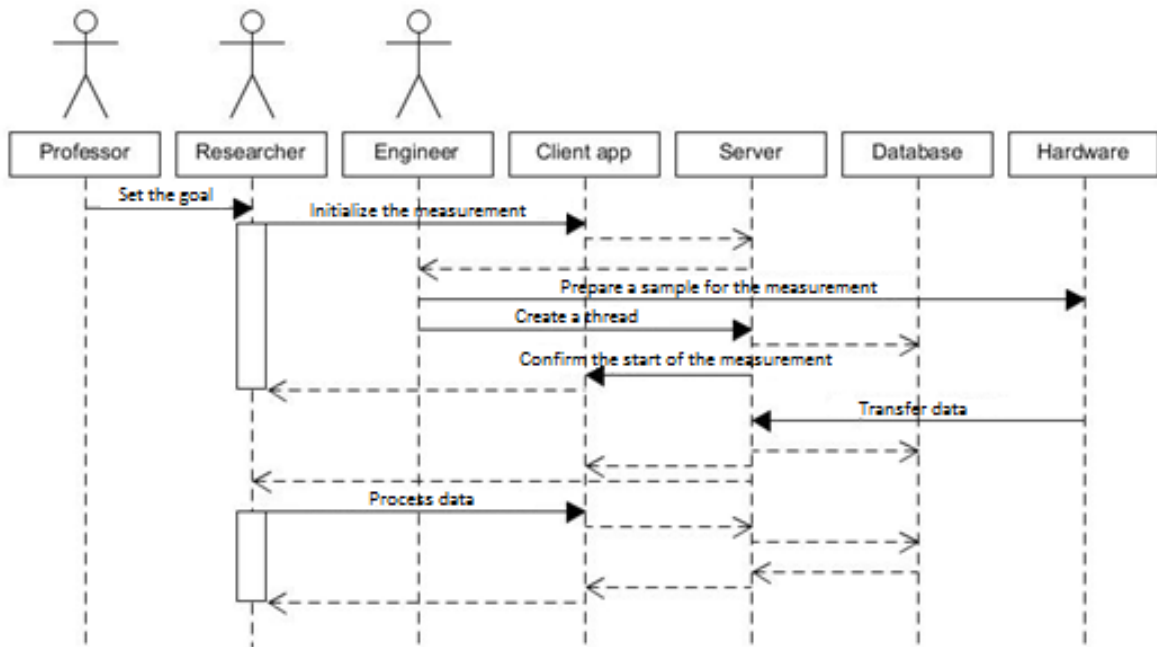


Fig. 5. UML sequence diagram of the system operation process.

Drawing up an idea of the necessary functions makes it possible to proceed to the system architecture development. As a result of collaboration with experts in the subject area, a block diagram of the dosimetric system has been developed (Fig. 6). The diagram includes both hardware and software subsystems.

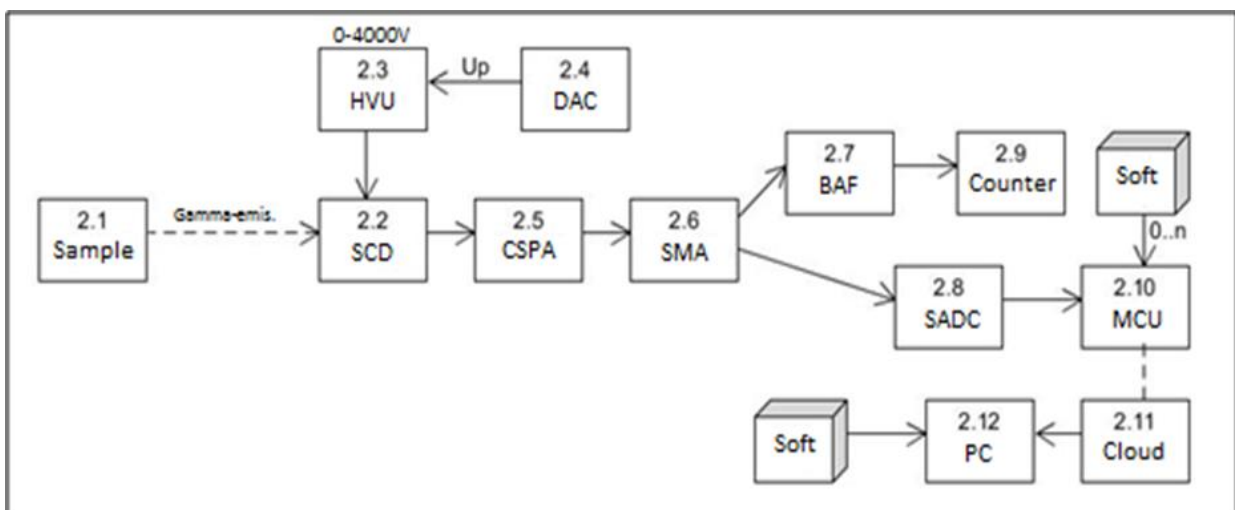


Fig. 6. The diagram of a dosimetric system with a subsystem for data exchange over the Internet.

The diagram shows the following components: 2.1-sample, 2.2-semiconductor detector, 2.3-high-voltage unit, 2.4-digital-to-analog converter, 2.5-charge-sensitive pre-amplifier, 2.6-spectrometric

amplifier, 2.7-amplifier and shaper unit, 2.8-spectrometric ADC, 2.9-counter, 2.10-microcontroller, 2.11-cloud service, 2.12-computer, software for dose determination and data processing.

A block diagram of a microcontroller dosimeter development

An algorithm for correcting the dependence of the sensitivity of the detector based on CdZnTe on the energy of the detected gamma quanta has been proposed previously [7]. The algorithm significantly reduces the uncertainty of measuring the radiation dose rate. The architecture and block diagram of the dosimetric system with the possibility of remote access and remote control of the main functions has been developed as well.

As can be seen from the proposed solutions, the necessary element of the system is an intelligent measuring dosimetric device that can be implemented on a modern microcontroller base.

The simplified block diagram of a microcontroller dosimeter is presented in Fig. 7. Electromagnetic radiation (γ) is detected by the CdZnTe detector (D). A stable bias voltage is applied to the detector via a software-controlled power supply unit (CHVPS). Pulses from the detector are fed to a spectrometric module consisting of a charge-sensitive pre-amplifier (PA) and a main amplifier-shaper (FA). Basically, amplifiers are programmed to generate the optimal signal-to-noise ratio and the required gain.

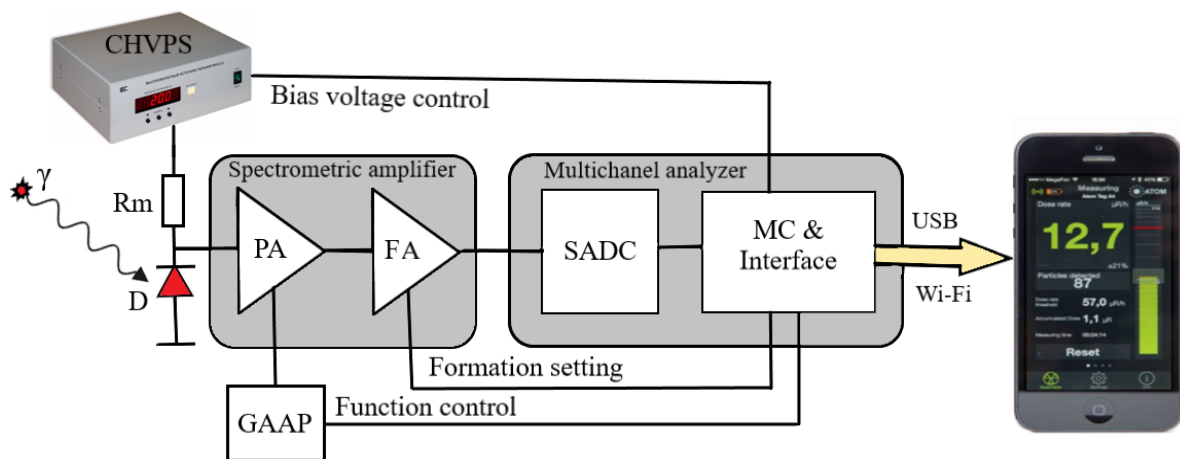


Fig. 7. The block diagram of the microcontroller dosimeter.

Voltage pulses whose amplitude is proportional to the energy of the detected gamma quanta are fed to the Board of a multi-channel amplitude analyzer. The analyzer consists of a spectrometric analog-to-digital Converter (SADC) and a microcontroller module (MS & Interface). In addition to counting the pulses from the registered gamma quanta, as it is done in a conventional dosimeter, the module generates exposure sets the necessary statistical accuracy of measurements, calculates correction coefficients and displays the measurement results. The module also provides the communication with a computer and the Internet services.

The module is proposed to be developed on the basis of a 32 - or 64-bit microcontroller. For example, it can be a STM32F407g-DISC1 debugging Board with a 32-bit ARM Cortex[®] - M4F microcontroller STM32F407VGT6 or a powerful Raspberry Pi 3 microcomputer on a 1.2 GHz 64-bit Quad-core ARM Cortex-A53 CPU.

To find the optimal modes of the semiconductor detector, a programmable power supply unit controlled by a computer or microprocessor has been developed (Fig. 8).



Fig. 8. Programmable high voltage power supply.

The device can be used to power photomultipliers, semiconductor ionizing radiation detectors and other low-power equipment, which requires high stability of the supplied voltage.

An example of using a programmable power supply to measure the dependence of the leakage current of a semiconductor ionizing radiation detector on the offset voltage is shown in Fig. 9.

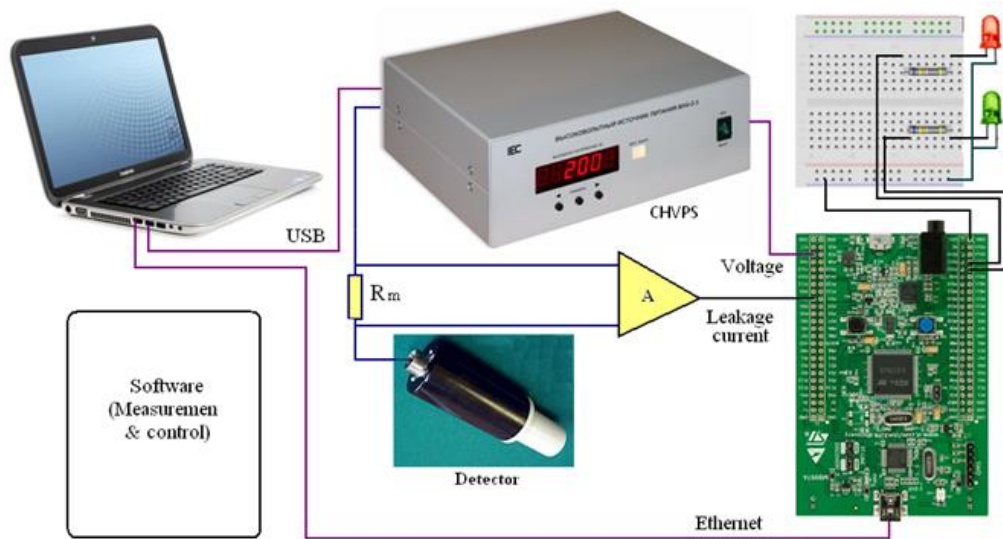


Fig. 9. The diagram of measuring the dependence of the leakage current on the offset voltage of the detector. R - measuring resistor, A - instrument amplifier with galvanic isolation.

The calculations of the exposure dose of gamma radiation and the exposure dose rate with the energy dependence correction.

Previously it has been suggested that the radiation dose measurement program operates in two modes : the preset exposure time mode or the set statistical uncertainty mode [6]. In the first mode, the spectrum set continues for the exposure time t . After the end of time t , the number of i pulses is recorded in each i - memory cell that is allocated for the multichannel amplitude analyzer, N_i which shows how many pulses of this amplitude are received by the ADC input. Accordingly, the number of registered quanta of this energy is the same. The total number of N_{total} pulses is calculated or calculated in parallel. In the second mode, N_{total} is a value that is calculated based on the time when the maximum number of no pulses is reached N_0 .

The calculations of the exposure dose of gamma radiation D_e and the power of the exposure dose $X_e = D_e/t$ (4) are performed accounting for the recorded dependence of the CdZnTe detector sensitivity on the radiation energy [8]. To do this, after the spectrum is set, the program calculates D_e in $[\mu r]$, using the formulas (1):

$$D_e = (A \langle E_{pulse} \rangle + B) * N_{total}, \quad (1)$$

where the average pulse amplitude $\langle E_{pulse} \rangle$ is calculated by using the formula (2):

$$\langle E_{pulse} \rangle = \sum_i i (i * n_i / N_{total}), \quad (2)$$

and $N_{total} = \sum_i n_i$ – the total sum of pulses in the spectrum, or the final (3):

$$D_e = A \sum_i i * n_i + B * \sum_i n_i, \quad (3)$$

The values of coefficients A and B are determined during calibration of the detector system using standard gamma-ray isotope sources.

The exposure dose rate of gamma radiation X_e in [μ r/s] is defined as:

$$X_e = D_e / t, \quad (4)$$

where t is the measurement time in seconds [s].

The calculated exposure dose value is transmitted via one of the interfaces to the dosimetric data representation subsystem.

Fully operational system, in addition to the program for determining radiation parameters, includes necessary software modules for adaptive control of the detector bias voltage, selection of time constants for forming circuits, setting of gain coefficients, and service programs.

Conclusions

The development of modern information systems for radiation monitoring and control requires a comprehensive approach and an iterative process of their development. The proposed promising approach is integrating local measuring devices with cloud services, using M2M/IoT technology for remote measurements, advanced semiconductor sensors based on CdTe and CdZnTe radiation detectors, modern microcontroller and communication microchips, etc. The developed hardware and software solutions have demonstrated high accuracy due to hardware and software correction of measurement results which are provided by a multi-channel amplitude analyzer implemented into the dosimetric system. The amplitude distribution which corresponds to the energy spectrum of radiation obtained during the exposure allows us to accurately calculate the exposure dose and the power of the exposure dose of gamma radiation. The ThingSpeak cloud service is used for providing users' access to information about the measuring dose, spectral composition of radiation, parameters of detectors and spectrodosimetric equipment. The developed equipment, algorithms, and programs are used for experimental research of radiation and nuclear-physical processes. The system elements have proved to be useful for students' distant laboratory work during the quarantine.

The work has been carried out with partial financial support from the UNTC Foundation, project No. 9903.

ЛІТЕРАТУРА

1. Григор'єва Л.І. Іонізуюче випромінювання та його вплив на людину. / Л.І. Григорєва, Ю.А. Томілі, І.М. Рожков. – Миколаїв : МДГУ ім. Петра Могили, 2008. – 208 с.
<https://kegt-rshu.in.ua/images/dustan/LLIT.pdf>
2. Кічно В.О. Основи радіобіології та радіоекології. Навчальний посібник / В.О. Кічно, С.В. Поліщук, І.М. Гудков – К. : Хай-Тек Прес, 2007. – 320 с.
<http://nubip.edu.ua/en/node/1184/3>
3. Захарченко А.А. Моделирование энергетической зависимости чувствительности CdTe (CdZnTe) детекторов гамма-излучения / А.А. Захарченко, Д.В. Наконечный, И.Н. Шляхов, А.В. Рыбка, В.Е. Кутний, М.А. Хажмурадов // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2007. – № 1. – С. 28–31.
<http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/52644/06-Zakharchenko.pdf?sequence=1>
4. Лазарев Ю. Ф. MATLAB і моделювання динамічних систем. Навчальний посібник. – Київ: НТУУ "КПІ", 2009.
https://kafpson.kpi.ua/Arhiv/Lazarev/mds_matlab.pdf

5. Ridozub, O., Terokhin, V., Stervoyedov, N., Fomin, S.. Сенсорний вузол для бездротової мережі радіаційного моніторингу. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», 2019, 44, 88-93с.
<https://periodicals.karazin.ua/mia/index>
6. Ажажа В.М. Приборы на основе CdTe и CdZnTe для технологического контроля и мониторинга радиационной обстановки на АЭС / В.М. Ажажа, В.Е. Кутний, А.В. Рыбка, Л.Н. Давыдов, И.Н. Шляхов, А.А. Захарченко, Д.В. Кутний, Д.В. Наконечный // Наука та інновації. – 2006. – Т. 2, № 6. – С. 31–38.
<http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/113940>
7. Захарченко А.А. Моделирование дозиметрических свойств детекторов гамма излучения на основе высокоомных полупроводников. Диссертация на соискание канд. физ. – мат. наук. Харьков, 2009 С. 28–31.
<http://dspace.nbu.gov.ua/bitstream/handle/123456789/52427/10-Zakharchenko.pdf?sequence=1>

REFERENCES

1. Grigoreva L. Ionizing radiation and its effect on humans. / L. I. Grigoreva L. A. Toml, and M. Rozhkov.–Mikolaiv: MDGU im.Petra Mogili, 2008 208p. <https://kegt-rshu.in.ua/images/dustan/LLIT.pdf> [in Russia]
2. Kitsno V. O. Fundamentals of radiobiology and radioecology. Textbook / V. O. Kitsno, S. V. Polishchuk, I. M. Gudkov-K.: hi-Tech Pres, 2007. – 320 p. <http://nubip.edu.ua/en/node/1184/3> [in Russia]
3. Zakharchenko A. A. Modeling of the energy dependence of the sensitivity Of CdTe (CdZnTe) detectors of gamma radiation / A. A. Zakharchenko, D. V. Nakonechny, I. N. Shlyakhov, A. V. Rybka, V. E. kutniy, M. A. Khazhmuradov // Technology and design in electronic equipment. - 2007. - no. 1. - Pp. 28-31. <http://dspace.nbu.gov.ua/bitstream/handle/123456789/52644/06-Zakharchenko.pdf?sequence=1> [in Russia]
4. Lazarev Y. MATLAB and dynamic system modeling. Textbook. Navalny Oleshko. - Kiev: NTU "KPI", 2009. https://kafpson.kpi.ua/Arhiv/Lazarev/mds_matlab.pdf [in Ukraine]
5. Ridozub, O., Terokhin, V., Stervoyedov, N., Fomin, S.. Sensor node for wireless radiation monitoring network. Bulletin of V. N. Karazin Kharkiv national University series " Mathematical modeling. Information technology. Automated control system ", 2019, 44, 88-93с.
<https://periodicals.karazin.ua/mia/index> [in Ukraine]
6. Azhazha V. Devices based on CdTe and CdZnTe for technological control and monitoring of the radiation situation at nuclear power plants / V. M. Azhazha, V. E. kutniy, A. V. Rybka, L. N. Davydov, I. N. Shlyakhov, A. A. Zakharchenko, D. V. kutniy, D. V. Nakonechny // Nauka ta innovatsii. - 2006. - Vol. 2, No. 6. - Pp. 31-38.
<http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/113940> [in Russia]
7. Zakharchenko A. Modeling of dosimetric properties of gamma radiation detectors based on high-resistance semiconductors. Dissertation for the competition for the candidate of physical and mathematical Sciences. Kharkiv, 2009 P. 28-31.
<http://dspace.nbu.gov.ua/bitstream/handle/123456789/52427/10-Zakharchenko.pdf?sequence=1> [in Ukraine]