

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Серія

«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 45

Серія заснована 2003 р.

BULLETIN

of V.N. Karazin Kharkiv National University

Series

«Mathematical Modeling.
Information Technology.
Automated Control Systems»

Issue 45

First published in 2003

Харків
2020

Статті містять дослідження у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації. Висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Наказом Міністерства освіти і науки України від 17.03.2020 № 409 наукове фахове періодичне видання Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» включено до Категорії «Б» Переліку наукових фахових видань України за наступними спеціальностями: 113 – Прикладна математика; 122 – Комп'ютерні науки та інформаційні технології; 123 – Комп'ютерна інженерія; 125 – Кібербезпека.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 9 від 25.05.2020 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор),

д.ф.-м.н., академік НАН України, проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М. (заст. гол. редактора), д.т.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т. (заст. гол. редактора), д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Споров О.Є. (відповідальний секретар), к.ф.-м.н., доц. ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Замула О. А., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ФТІНТ імені Б.І. Веркіна НАН України

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Рассомахін С. Г., д.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В. Н. Каразіна

Стервєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Толстолузька О. Г. д.т.н., с.н.с., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Угрюмов М. Л., д.т.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шматков С. І., д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ФМІ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"

Стрельникова О.О., д.т.н., проф. Ін-т проблем машинобудування НАН України

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., кафедра прикладної інформатики, університет імені Миколая Коперника, м. Торунь (Польща)

Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Professor of Technical Informatics and Computer Systems, Institute of Informatics, Technical University of Clausthal, Germany

Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of computer science, Dep. of C. S., University of Nice-Sophia Antipolis, France

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 534.

Тел. +380 (57) 705-42-81, Email: journal-mia@karazin.ua.

Мова публікації: українська, англійська, російська.

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21578-11478 Р від 18.08.2015.

ЗМІСТ

▪ Д.М. Андрєва, Т.В. Вдовіченко, Н.М. Кізілова, А.С. Ніколаєв	4
Перспективні математичні методи для ранньої діагностики порушень системи кровообігу людини	
▪ І.В. Гарячевська, Д.О. Протектор	10
Безсітковий метод для числового вирішення рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку	
▪ Л.С. Глоба, Р.Л. Новогрудська, Б.О. Задєєнко	22
Онтологічна модель оцінки ефективності функціонування наукових установ	
▪ П.С. Гринєвич, Н.М. Кізілова	35
Дослідження хаотичної динаміки вертикальної стійки тіла людини на моделі переверненого маятника	
▪ О. Demyanchenko, Е. Kobilskaya, V. Lyashenko, Т. Nabok	41
The mathematical model of the thermal process in Spoke-Type Permanent Magnet Synchronous Machines	
▪ Н.М. Кізілова, Д.М. Паккі	50
Статистичний аналіз даних моніторингу коронарного кровотоку для гемодинамічної оцінки ступеня стенозу коронарних артерій	
▪ О.М. Мелкозьорова, С.Г. Рассомахін	56
Тестирование производительности программного обеспечения	
▪ V.V. Romanuke	67
Empirical probability distribution validity based on accumulating statistics of observations by controlling the moving average and root-mean-square deviation	
▪ CONTENTS	73

УДК 519.222+612.13

Перспективні математичні методи для ранньої діагностики порушень системи кровообігу людини

Д.М. Андрєєва, Т.В. Вдовіченко, Н.М. Кізілова, А.С. Ніколаєв

*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: andrejeva_darja@ukr.net*

Досліджені статистичні залежності між кривими об'ємної швидкості кровотоку вздовж аорти $Q_c(t)$, до верхніх $Q_1(t)$ і $Q_2(t)$ та до нижніх $Q_3(t)$ і $Q_4(t)$ кінцівок. Показано, що у більшості випробуваних криві $Q_1(t)$ і $Q_2(t)$ відповідають лінійній залежності, тоді як криві $Q_3(t)$ і $Q_4(t)$ слабкокорельовані, характеризуються запізненням, значною дисперсією та ознаками непередбачуваної (хаотичної) динаміки. Обчислені індекси коваріації χ_{ij} для всіх пар кривих, спектр та значення експонент Ляпунова λ_j . Показано, що у молодих здорових випробуваних всі значення $\chi_{ij} > 0.87$, спектр має 3-4 основні гармоніки, а $\lambda_j < 0$. У більшості літніх випробуваних $\chi_{ij} \in [0.35; 0.68]$, особливо для кривих нижніх кінцівок, спектр ускладнений, а $\lambda_j > 0$, що відповідає можливості розвинення хаотичної динаміки. У випробуваних без захворювань та вікових дегенеративних змін серцево-судинної системи спостерігаються окремі ускладнення спектру, наявність як $\lambda_j < 0$, так і $\lambda_j > 0$. Таким чином, значення χ_{ij} , λ_j і спектр дискретних сигналів можуть бути важливими параметрами для ранньої діагностики вікових змін та порушень системи кровообігу.

Ключові слова: математичне моделювання, статистичний аналіз, реовазограма, експертна система.

The aim of the study is elaboration of efficient mathematical models for early diagnostics of the cardiovascular diseases based on the blood flow rate curves $Q(t)$ measured noninvasively in different parts of human body. Ultrasound, rheography, magnetic resonance imaging techniques could be useful for the purpose. In this research a set of rheographic curves $Q(t)$ has been measured in the abdominal aorta $Q_c(t)$, left and right upper $Q_1(t)$ and $Q_2(t)$ and lower $Q_3(t)$ and $Q_4(t)$ extremities of 36 volunteers of the age 36-65. The correlation analysis has been used for each pair $\{Q_i(t), Q_j(t)\}$ of the measured discrete signals. Some statistical indexes significant for reliable early diagnostics of blood insufficiency due to arterial narrowing, improper control and age-related degenerative changes in the blood vessel walls have been found. It is shown that for the most subjects the digital curves $Q_1(t)$ and $Q_2(t)$ correspond well to a linear correlation with a small dispersion, while the curves $Q_3(t)$ and $Q_4(t)$ are usually weakly correlated and characterized by some time shift between them, significant dispersion and for some patients unpredictable (chaotic) dynamics. The covariance indices χ_{ij} for all the pairs $\{Q_i(t), Q_j(t)\}$ of the curves, their spectra and the Lyapunov exponents λ_j have been calculated. It is shown that for the young healthy subjects all the covariances $\chi_{ij} > 0.87$, the spectrum has 3-4 fundamental harmonics, and all Lyapunov exponents $\lambda_j < 0$ which corresponds to regular or quasi-regular dynamics. For most of the elderly subjects the covariances $\chi_{ij} \in [0.35; 0.68]$, especially in the curves measured in the lower extremities, the spectra are complicated, and Lyapunov exponents $\lambda_j > 0$ which corresponds to the possibility of chaotic dynamics. For the young healthy individuals without diseases and age-related degenerative changes of the cardiovascular system, some complications of the spectrum can be observed, the presence of both $\lambda_j < 0$ and $\lambda_j > 0$ can be seen. Thus, the values χ_{ij} , λ_j and the spectrum of curves can serve as important parameters for early diagnosis of age-related changes and circulatory disorders. They can be easily computed by using any type of cheap and noninvasive ultrasound or impedance rheography curves. Regular measurements and accumulation of data in a personal database can increase the quality of individual and mass healthcare.

Key words: mathematical modeling, statistical analysis, rheovasography, expert system.

Исследованы статистические зависимости между кривыми объемной скорости кровотока вдоль аорты $Q_c(t)$, в верхних $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ и в нижних $Q_3(t)$ и $Q_4(t)$ конечностях. Показано, что у большинства испытуемых кривые $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ соответствуют линейной зависимости, тогда как кривые $Q_3(t)$ и $Q_4(t)$ слабкоррелированы, характеризуются запаздыванием, значительной дисперсией и признаками непредсказуемой (хаотической) динамики. Вычислены индексы ковариации для всех пар кривых, их спектр и значения экспонент Ляпунова λ_j . Показано, что у молодых здоровых испытуемых все значения $\chi_{ij} > 0.87$, спектр имеет 3-4 основные гармоника, а $\lambda_j < 0$. У большинства пожилых испытуемых $\chi_{ij} \in [0.35; 0.68]$, особенно для кривых нижних конечностей, спектр кривых усложнен, а $\lambda_j > 0$, что соответствует возможности развития хаотической динамики. У испытуемых без заболеваний и возрастных дегенеративных изменений сердечно-сосудистой системы наблюдаются отдельные усложнения спектра, наличие как $\lambda_j < 0$, так и $\lambda_j > 0$. Таким образом, значения χ_{ij} , λ_j , и спектр сигналов могут быть важными параметрами для ранней диагностики возрастных изменений и нарушений системы кровообращения.

Ключевые слова: математическое моделирование, статистический анализ, реовазограмма, экспертная система.

1. Вступ

Реографія - це метод дослідження пульсових коливань кровонаповнення судин різних органів і тканин, який пов'язаний з графічною реєстрацією змін повного електричного опору Z_e тканин за допомогою кругових електродів (Рис.1а). Метод застосовується в клінічній діагностиці різних судинних порушень кровопостачання внутрішніх органів. Найбільш поширені на сьогодні реоенцефалографія - метод оцінки мозкового кровообігу та офтальмореографія - метод оцінки кровопостачання очних яблук та очних м'язів [1]. Оскільки зміни електричного опору тканин в біль-якому перерізі тіла людини пов'язані зі змінами об'єму крові, який притікає до органу в систолу та відтікає в діастолу, періодичні коливання $Z_e(t)$ можуть бути перераховані в коливання об'ємної витрати крові $Q(t)$ на відповідній ділянці тіла. Метод реографії простий, швидкий та дешевий у порівнянні з ультразвуковою або магніторезонансною технікою вимірювання [1,2]. Він дозволяє ефективно проводити діагностику кровообігу нижніх [3] та верхніх кінцівок [4], оцінювати ефективність лікування атеросклерозу [5] та ін. Розташування електродів під час вимірювання залежить від цілей дослідження. Отримані криві $Q(t)$ далі обробляються звичайними методами обробки кривих та статистичного аналізу часових рядів. Оскільки абсолютні і навіть відносні значення Z_e різних частин тіла мають значний індивідуальний розкид, найбільш достовірним є порівняльний аналіз параметрів кривих, наприклад, у лівій та правій кінцівках, до та після лікування або фізичного навантаження та ін.

Останнім часом поширюються нові методи математичного аналізу інформації у вигляді часових рядів [6], які дають можливість отримати показники, найбільш чутливі для будь-яких порушень кровопостачання, навіть коли симптоми ішемії ще відсутні. В даній роботі наведені перші результати застосування таких методів до аналізу реографічних кривих.

2. Матеріали і методи

Коливання об'ємної витратикрові $Q_j(t)$, що були виміряні з кроком $\Delta t = 4$ мс на поперечних перетинах грудної клітки ($j=c$), верхніх ($j=1,2$) та нижніх ($j=3,4$) кінцівок разом з електрокардіографічним (ЕКГ) сигналом (Рис.1а) були відібрані з відкритої бази даних фізіологічної інформації¹ для 36 випробуваних (18 чоловіків віком 36-54 р. та 18 жінок 40-65 р.). Приклад набору кривих для одного з випробуваних наведений на Рис.1б. Попередні дослідження реографічних даних показали, що у молодих здорових випробуваних спостерігається добре узгодження між всіма парами кривих $Q_j(t)$ у вигляді майже лінійних залежностей $Q_j(Q_k)$, тоді як у випробуваних старшого віку та у пацієнтів з порушеннями кровообігу в кінцівках спостерігаються нелінійні несиметричні залежності більшості з пар $Q_j(Q_k)$ з великим розкидом від скорочення до скорочення серця та навіть переходом до хаотичної динаміки [7]. Таким чином, використання кореляційного аналізу та методів оцінки міри хаотичності динамічних кривих можуть дати нові показники для медичної діагностики порушень кровообігу.

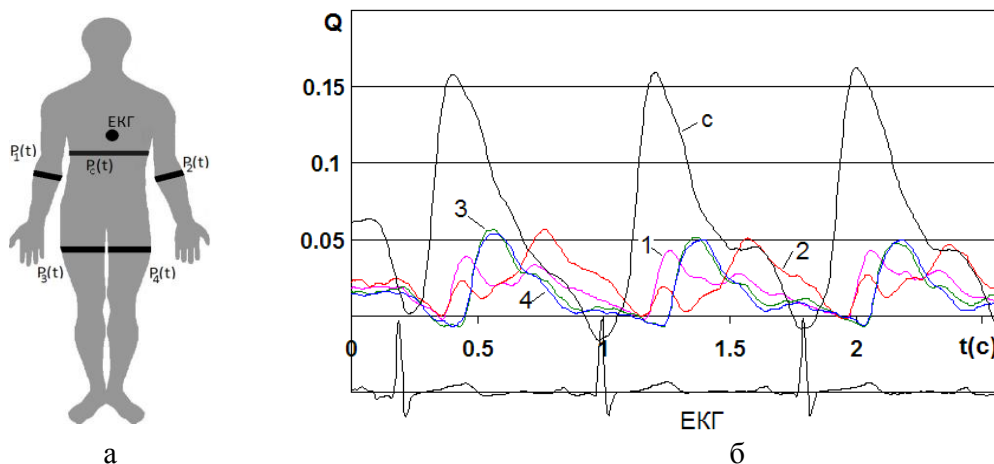


Рис.1. Розташування кругових електродів під час вимірювань (а) та приклад кривих $Q_c(t)$ і $Q_{2,4}(t)$ (б).

¹ www.physionet.org

Всі вибрані криві згладжувались методом зваженого ковзного середнього, що дозволяє зберігати значення локальних максимумів і мінімумів кривих:

$$F(t_i) = \frac{2}{s(s+1)} \sum_{j=1}^s j \cdot f(t_{i-j}), \quad s = \begin{cases} 1, & i = 1, n \\ 3, & i = 2, n-1, \\ 5, & 2 < i < n-1 \end{cases}$$

де $f(t_i)$ і $F(t_i)$ - вихідні і згладжені значення вимірних дискретних кривих.

Потім за піковими значеннями ECG на кривих $P_a(t)$, $P_d(t)$, $Q_a(t)$ виділялися окремі коливання. Оскільки ритм серцевих скорочень характеризується істотною варіабельністю і випадковими коливаннями амплітуди, все окремі коливання наводилися до стандартної довжини $t = T^* = 1$ та значенню максимуму $Q = Q^* = 1$, де T^* - безрозмірний період скорочень серця, а Q^* - максимальна швидкість притоку крові у систолу. Оскільки значення T^* і Q^* різні у різних пацієнтів різної маси та року, приведення до безрозмірного вигляду має важливе значення для виявлення внутрішньо групових закономірностей.

Спектральний аналіз кривих $Q_j(t)$ проводився за допомогою вбудованих функцій Python 3.8.2. Для розрахунків спектра використовувалося стандартне швидке дискретне перетворення Фур'є.

Наявність кореляції між усіма парами дискретних кривих вивчалася на основі лінійного коефіцієнта коваріації

$$\text{cov}(Q_i, Q_j) \equiv \chi_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (Q_i(t_n) - \langle Q_i \rangle) (Q_j(t_n) - \langle Q_j \rangle),$$

де $\langle Q_{i,j} \rangle$ - середні значення відповідних дискретних кривих.

В якості міри хаотичності динамічного процесу використовувалася експонента Ляпунова, яка обчислювалася за формулою [8]

$$\lambda = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{|x(t) - y(t)| \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \cdot \ln \frac{|x(t+\tau) - y(t+\tau)|}{|x(t) - y(t)|},$$

де $x(t)$ і $y(t)$ - дві динамічні траєкторії, що незначно відрізняються в початковий момент часу. Якщо динамічний процес стійкий, через час τ збурені траєкторії будуть відрізнятися від початкових як $|x(t+\tau) - y(t+\tau)| = |x(t) - y(t)| \exp(\lambda \tau)$, де $\lambda < 0$. Якщо $\lambda > 0$, процес може стати хаотичним.

3. Результати і обговорення

На Рис.2а-в представлені діаграми розсіювання для пар кривих Q_1 і Q_2 та Q_3 і Q_4 , що були виміряні в верхніх та нижніх кінцівках відповідно. Такі залежності характерні для більшості з випробуваних. Таким чином, коливання об'ємів крові, які постачаються в ліву та праву верхні кінцівки, майже синхронні як в систолу, так і в діастолу (Рис.2а,в). Коефіцієнт кореляції у всіх випадках близький до одиниці ($\kappa > 0.88$), а дисперсія незначна. Відповідна математична модель може ґрунтуватися на моделі артеріального русла кінцівки як лінійної або слабо нелінійної в'язкопружної камери [7]. Значні нелінійні коливання із запізненням між двома кінцівками спостерігалися тільки у двох випробуваних середнього віку з вираженим атеросклерозом. Аналогічні залежності між кровопостачанням в ліву та праву нижні кінцівки більш складні. У відносно молодих випробуваних залежності $Q_3(Q_4)$ мають вигляд коливань навколо лінійного тренду з відносно невеликою дисперсією (Рис.2б). У більшості випробуваних похилого віку ці залежності змінюють свою поведінку від скорочення до скорочення та непередбачено відбиваються вище або нижче лінії тренду (Рис.2г), що вказує на хаотичну поведінку. Остання може бути пов'язана з несиметричним розширенням, підвищеною звивистістю та тромбозом глибоких судин нижніх кінцівок.

Результати обчислення коефіцієнтів коваріації χ_{ij} для всіх пар дискретних кривих показали, що у молодих здорових випробуваних є значна кореляція параметрів центральної гемодинаміки та кровопостачання до всіх кінцівок, так саме як і між двома верхніми та двома нижніми кінцівками (Табл.1). При цьому всі значення $\chi_{ij} > 0.87$. У більшості літніх випробуваних кореляція між центральною та регіональною гемодинамікою слабка, так само як і кровопостачання до обох верхніх або обох нижніх кінцівок. При цьому $\chi_{ij} \in [0.35; 0.68]$; значення

χ_{ij} вище для верхніх кінцівок, але значно нижче для нижніх кінцівок (Табл.1), навіть коли випробувані на мають виражених симптомів недостатності кровопостачання до кінцівки.

Аналогічні висновки були отримані під час аналізу розрахунків експонент Ляпунова λ_j всіх вимірних дискретних сигналів (Табл.2).

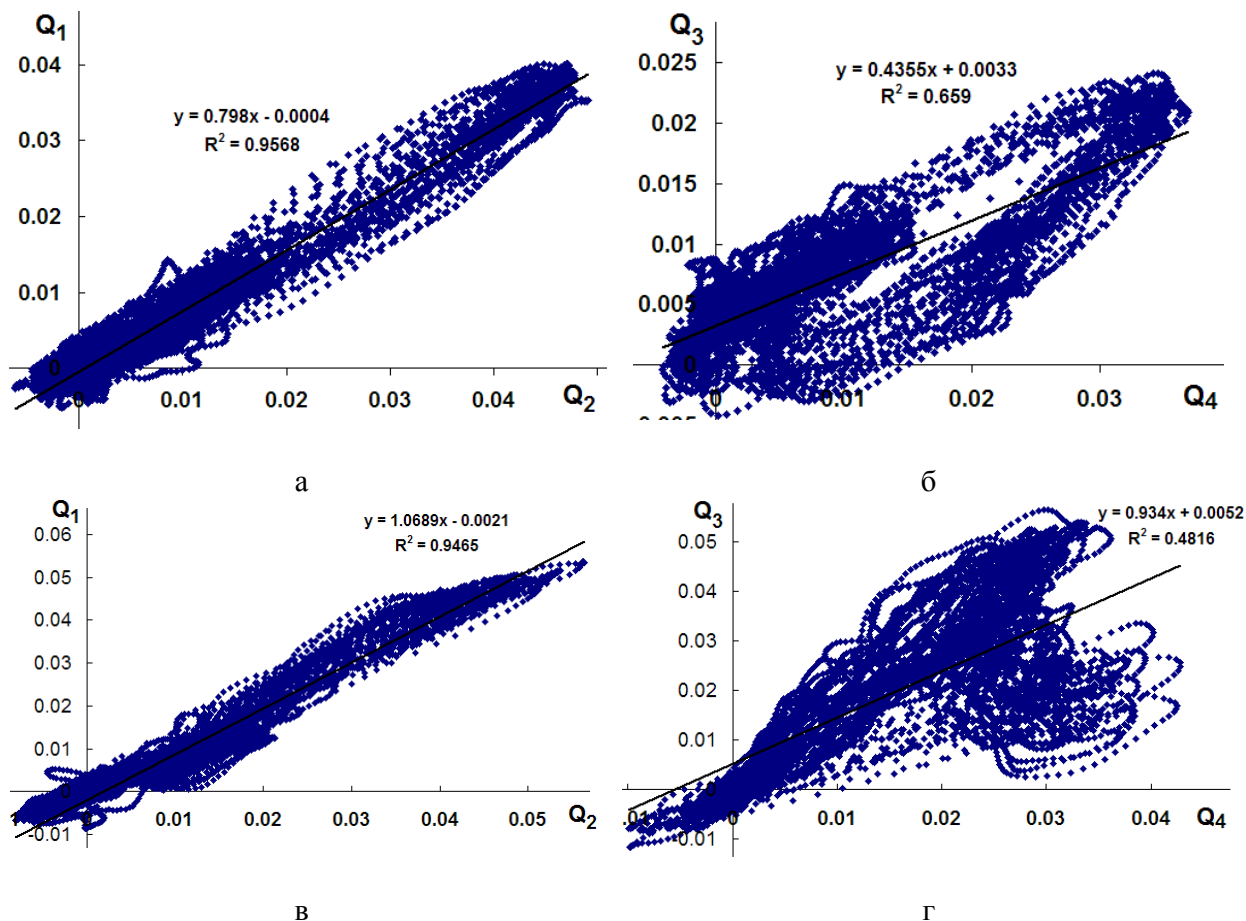


Рис.2. Діаграми розсіювання пар кривих Q_1 і Q_2 (а,в) і Q_3 і Q_4 (б,г) для випробуваних середнього (36 р.) (а,б) та похилого (65 р.) (в,г) віку.

Табл.1. Коефіцієнти коваріації для різних пар кривих для здорових кінцівок (нижче діагоналі) та з порушеннями кровотоку (вище діагоналі).

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Q_1	1	0.649	0.55	0.777
Q_2	0.93	1	0.519	0.872
Q_3	0.91	0.907	1	0.463
Q_4	0.915	0.912	0.98	1

Табл.2. Значення експонент Ляпунова для 7 груп випробуваних ($\cdot 10^{-3}$).

	Q_c	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
1	-0.95	0.3	-0.3	-0.035	-0.3
2	-0.48	0.5	0.6	0.4	0.85
3	-0.76	0.022	0.02	0.09	1.05
4	-1.2	-0.027	-0.07	0.03	0.037
5	0.0214	1.1	-1	0.5	0.92
6	0.1	0.1	0.18	0.19	0.0345
7	-1.4	-1	0.0854	-0.2	-0.5

У більшості випадків позитивні значення λ_j малі у порівнянні з часами, на яких можливий

перехід від регулярної динаміки до хаотичної з помітними змінами діаграм розсіювання (Рис.2), але наявність великого числа скорочень серця та можливого впливу протягом цього часу великої сукупності зовнішніх фізичних та внутрішніх фізіологічних факторів уможливорює перехід до непередбачуваних некорельованих осциляцій гемодинамічних параметрів у різних відділах зв'язаної системи кровообігу людини (наприклад, Рис.2в,г).

4. Висновки

Таким чином, на основі проведеного статистичного аналізу експериментальних кривих центральної $Q_c(t)$ та периферійної $Q_{1-4}(t)$ гемодинаміки були встановлені наступні закономірності:

- у молодих здорових випробуваних коефіцієнти коваріації χ_{ij} всіх пар кривих ($Q_i(t)$, $Q_j(t)$) мають значення $\chi_{ij} > 0.87$, що відповідає корельованості показників центрального та периферійного кровообігу, а також між правими та лівими верхніми та нижніми кінцівками. Спектр кривих $Q_j(t)$ має 3 (в окремих випадках 4) значущі гармоніки та значення експонент Ляпунова $\lambda_j < 0$, що відповідає регулярній динаміці;
- у більшості літніх випробуваних коефіцієнти коваріації $\chi_{ij} \in [0.35; 0.68]$; вони мають більші значення для верхніх та нижніх значень - для нижніх кінцівок. Спектр всіх кривих має >4 значущих гармонік, а практично всі $\lambda_j > 0$, що відповідає динамічним системам з хаотичною динамікою;
- у випробуваних без явних захворювань або вікових змін системи кровообігу спостерігаються ускладнення спектру, наявність значень як $\chi_{ij} > 0.87$, $\lambda_j < 0$, так і $\chi_{ij} < 0.87$, $\lambda_j > 0$.

Таким чином, значення χ_{ij} , λ_j і спектр дискретних сигналів є важливими параметрами для ранньої діагностики вікових змін та порушень системи кровообігу і потребують подальшого детального вивчення, зокрема на інших гемодинамічних кривих.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ронкин М. А., Иванов Л. Б. *Реография в клинической практике*. М.: МБН, 1997. 403 с.
2. Кизилова Н.Н. Сравнительный анализ ультразвуковых и реографических методов исследования пульсовых волн в артериях. *Тезисы докладов IX Всероссийской конференции по биомеханике*. Нижний Новгород: ИПФ РАН. 2008. С. 50-51.
3. Litvinenko A.F., Zubkova S.T. Rheovasography in diagnosis of circulatory disorders of the lower extremities in patients with diabetes mellitus. *Therapeutic Archive*. 1977. 49(5). pp. 25-30.
4. Kon M.V., Kolesnikova R.S. Rheovasography in the differential diagnosis of vascular diseases of the lower limb. *Clinical Medicine*. 1984. 62(8). pp. 51-54.
5. Lutsevich E.V., Bereshadenko D.D., Ivanov V.V., Bagauri N.M., Pechenaia N.A. Rheovasography in the Evaluation of Conservative Treatment Methods in Obliterating Atherosclerosis. *Surgery*. 1991. 4, pp. 105-108.
6. Кізілова Н.М., Соловійова О.М. Комп'ютерне моделювання в біомеханіці кровообігу. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. 41. С.39-45.
7. Kizilova N. Three chamber model of human vascular system for explanation the quasi-regular and chaotic dynamics of the blood pressure and flow oscillations. *Applied Non-Linear Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Vol. 181. 2016. pp. 209-220.
8. Pikovsky A., Politi A. *Lyapunov exponents. A tool to explore complex dynamics*. Cambridge University Press. 2016. 255p.

REFERENCES

1. Ronkin, M. A., Ivanov, L. B. Rheography in clinical practice. M.: MBN, 403 p. 1997. [in Russian]
2. Kizilova, N. "Comparative analysis of ultrasound and rheographic methods of the arterial pulse wave study." *Abstracts of IX Russian conference on biomechanics*. Nizny Novgorod: IAP RAS. pp. 50-51. 2008. [in Russian]

3. Litvinenko, A.F., Zubkova, S.T. "Rheovasography in diagnosis of circulatory disorders of the lower extremities in patients with diabetes mellitus." *Therapeutic Archive*. 49(5). pp. 25-30. 1977.
4. Kon, M.V., Kolesnikova, R.S. "Rheovasography in the differential diagnosis of vascular diseases of the lower limb." *Clinical Medicine*. 62(8). pp. 51-54. 1984.
5. Lutsevich, E.V., Bereshadenko, D.D., Ivanov, V.V., Bagauri, N.M., Pechenaia, N.A. "Rheovasography in the Evaluation of Conservative Treatment Methods in Obliterating Atherosclerosis." *Surgery*. 4, pp. 105-108. 1991.
6. Kizilova, N. Solovjova, H. "Computer modeling in biomechanics of blood circulation." V.N. Karazin Kharkov National University Vistnyk. Ser. "Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems». 41. С.39-45. 2019.
7. Kizilova, N. "Three chamber model of human vascular system for explanation the quasi-regular and chaotic dynamics of the blood pressure and flow oscillations." *Applied Non-Linear Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Vol. 181. pp. 209-220. 2016.
8. Pikovsky, A., Politi, A. *Lyapunov exponents. A tool to explore complex dynamics*. Cambridge University Press. 255p. 2016.

Кізілова Наталія Миколаївна – доктор ф.-м. наук, професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Kizilova Natalya M. - DSc, professor of the Department of Applied Mathematics, V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Кизилова Наталья Николаевна - доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики, Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Андреєва Дар'я Миколаївна – студентка факультету математики і інформатики, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків 22, Україна, 61022; e-mail: andrejeva_darja@ukr.net; ORCID: 0000-0002-1767-5392.

Andreieva Daria N. – student, Faculty of Mathematica and Informatics, V.N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; ; e-mail: andrejeva_darja@ukr.net; ORCID: 0000-0002-1767-5392.

Андреева Дарья Николаевна – студентка факультета математики и информатики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков 22, Украина, 61022; e-mail: andrejeva_darja@ukr.net; ORCID: 0000-0002-1767-5392.

Вдовіченко Тимофій Валерійович – студент факультету математики і інформатики, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків 22, Україна, 61022; e-mail: timvd152@gmail.com; ORCID: 0000-0003-0712-2003.

Vdovichenko Tymofii V. – student, Faculty of Mathematica and Informatics, V.N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; ; e-mail: timvd152@gmail.com; ORCID: 0000-0003-0712-2003.

Вдовіченко Тимофій Валерійович – студент факультета математики и информатики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков 22, Украина, 61022; e-mail: timvd152@gmail.com; ORCID: 0000-0003-0712-2003.

Ніколаєв Антон Сергійович – студент факультету математики і інформатики, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків 22, Україна, 61022; e-mail: tekent34@ukr.net; ORCID: 0000-0002-6840-5608.

Nikolaiev Anton S. – student, Faculty of Mathematica and Informatics, V.N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; ; e-mail: tekent34@ukr.net; ORCID: 0000-0002-6840-5608.

Николаев Антон Сергеевич – студент факультета математики и информатики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков – 22, Украина, 61022; e-mail: tekent34@ukr.net; ORCID: 0000-0002-6840-5608.

УДК 519.63

Безсітковий метод для числового вирішення рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку

І.В. Гарячевська, Д.О. Протектор

*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна**e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua*

У даній статті описується безсітковий метод, який призначений для числового вирішення нелінійного одновимірного нестационарного рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку. Безсіткова схема реалізується на основі методу колокації та радіальних базисних функцій. У цьому підході розв'язок диференціального рівняння Кортевега-де Фріза апроксимується радіальними базисними функціями, а метод колокації використовується для знаходження невідомих коефіцієнтів. В якості радіальних базисних функцій в статті використовуються Гаусова, зворотна квадратична, мультиквадратична, зворотна мультиквадратична функції, а також функція Ву з компактним носієм. Дискретизація за часом нелінійного одновимірного нестационарного рівняння Кортевега-де Фріза здійснюється з використанням θ -схеми. Даний метод має перевагу перед традиційними числовими методами, такими як метод скінченних різниць і метод скінченних елементів, так як не потребує побудови інтерполяційної сітки всередині області крайової задачі. У безсітковій схемі що розглядається, область розв'язку крайової задачі являє собою набір рівномірно або довільно розподілених вузлів, до яких «прив'язуються» базисні функції. В роботі представлені результати числових вирішень двох тестових задач, які отримані з використанням даного методу. Для оцінки точності апроксимації отриманих розв'язків в статті використовуються середня відносна похибка, середня абсолютна похибка та максимальна похибка. Числові експерименти демонструють високу точність і надійність даного методу вирішення нелінійного одновимірного нестационарного рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку.

Ключові слова: *нелінійне одновимірне рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку, нестационарна крайова задача, безсітковий метод, радіальні базисні функції з компактним носієм, метод колокації.*

В данной статье описывается бессеточный метод, предназначенный для численного решения нелинейного одномерного нестационарного уравнения Кортевега-де Фриза седьмого порядка. Бессеточная схема реализуется на основе метода коллокации и радиальных базисных функций. В этом подходе решение дифференциального уравнения Кортевега-де Фриза аппроксимируется радиальными базисными функциями, а метод коллокации используется для нахождения неизвестных коэффициентов. В качестве радиальных базисных функций в статье используются Гауссиан, обратная квадратичная, мультиквадратичная, обратная мультиквадратичная функции, а также функция Ву с компактными носителем. Дискретизация по времени нелинейного одномерного нестационарного уравнения Кортевега-де Фриза осуществляется с использованием θ -схемы. Данный метод имеет преимущество перед традиционными численными методами, такими как метод конечных разностей и метод конечных элементов, так как не требует построения интерполяционной сетки внутри области краевой задачи. В рассматриваемой бессеточной схеме область решения краевой задачи представляет собой набор равномерно или произвольно распределенных узлов, к которым «привязываются» базисные функции. В работе представлены результаты численных решений двух тестовых задач, полученные с использованием данного метода. Для оценки точности аппроксимации полученных решений в статье используются средняя относительная погрешность, средняя абсолютная погрешность и максимальная погрешность. Численные эксперименты демонстрируют высокую точность и надежность описываемого метода решения нелинейного одномерного нестационарного уравнения Кортевега-де Фриза седьмого порядка.

Ключевые слова: *нелинейное одномерное уравнение Кортевега-де Фриза седьмого порядка, нестационарная краевая задача, бессеточный метод, радиальные базисные функции с компактными носителем, метод коллокации.*

The meshless method for the numerical solution of the seventh-order nonlinear one-dimensional non-stationary Korteweg-de Vries equation is described in the article. The meshless scheme is based on the use of the collocation method and radial basis functions. In this approach, the solution is approximated by radial basis functions, and the collocation method is used to compute the unknown coefficients. The meshless method uses the following radial basis functions: Gaussian, inverse quadratic, multiquadric, inverse multiquadric and Wu's compactly supported radial basis function. Time discretization of the nonlinear one-dimensional non-stationary Korteweg-de Vries equation is obtained by using the θ -scheme. This meshless method is preferable to traditional numerical methods, such as the finite difference method and the finite element method, because it does not require an interpolation grid inside the domain of the boundary-value problem. In this meshless scheme the domain of a boundary-value problem is a set of uniformly or arbitrarily distributed nodes to which the basic functions are "tied". The paper presents the results of the numerical solutions of two benchmark problems which have been obtained by using this meshless approach. The graphs of the analytical and numerical solutions for the test problems have been created. Accuracy of the method is assessed in terms of the average relative error, the average absolute error, and the maximum error. Numerical experiments demonstrate high accuracy and robustness of the method for solving the seventh-order nonlinear one-dimensional non-stationary Korteweg-de Vries equation.

Keywords: *seventh-order nonlinear one-dimensional Korteweg-de Vries equation, non-stationary boundary-value problem, meshless method, compactly supported radial basis functions, collocation method.*

1 Вступ

У даній статті розглядається нелінійне одновимірне нестационарне рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \beta_1 u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \beta_3 \frac{\partial^5 u(x,t)}{\partial x^5} + \beta_4 \frac{\partial^7 u(x,t)}{\partial x^7} = 0 \quad (1.1)$$

де $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ – відомі постійні коефіцієнти, $x \in [a, b]$, $t \in [0, T]$.

Узагальнене рівняння Кортевега-де Фріза (1.1) широко використовується в прикладних науках і техніці. Рівняння Кортевега-де Фріза вперше було отримано в 1877 році французьким вченим Жозефом Бусінеском, і знову відкрито в 1895 році нідерландськими математиками Дідеріком Кортевегом і Густавом де Фрізом, які використовували його в якості нелінійної моделі для вивчення зміни форми довгих хвиль, що рухалися в прямокутному каналі. У випадку, коли $\beta_3 = \beta_4 = 0$ отримуємо найбільш відоме рівняння Кортевега-де Фріза [1], що описує поширення хвиль на мілководді та іонно-звукові хвилі в плазмі. Випадок $\beta_3 \neq 0, \beta_4 = 0$ досліджувався Хасімото [2] для хвиль на мілководді поблизу деякого критичного значення поверхневого натягу, а також був розглянутий чисельно при дослідженнях магнітоакустики та гідродинамічних хвиль в холодній беззіткневій плазмі Кавахарой [3], Какутані та Оно [4], відповідно. У статті основна увага приділяється випадку, коли в рівнянні (1.1) присутні обидва дисперсійних члена вищого порядку ($\beta_3 \neq 0, \beta_4 \neq 0$).

В останнє десятиліття широке застосування отримали безсіткові методи, які засновані на використанні радіальних базисних функцій. Дані методи є альтернативними по відношенню до традиційних числових методів, таких як метод скінчених різниць і метод скінчених елементів. Безсіткові методи дозволяють уникнути побудови інтерполяційної сітки всередині області крайової задачі, що робить їх обчислювально ефективними, оскільки генерація сітки, як і раніше, залишається найбільш трудомісткою частиною будь-якого числового моделювання, заснованого на використанні сіткових методів. Дослідження, що присвячені безсітковим методам, представлені в роботах [5, 10]. У 1990 році Едвард Канса [11] ввів схему вирішення диференціальних рівнянь з частинними похідними на основі методу колокації та радіальних базисних функцій. У цьому підході розв'язок диференціального рівняння апроксимується радіальними базисними функціями, а метод колокації використовується для знаходження невідомих коефіцієнтів. Гаусова, мультіквадратична, зворотна мультіквадратична та зворотна квадратична – це глобальні радіальні базисні функції, які широко використовуються для вирішення диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Метою даного дослідження є числове вирішення нелінійного одновимірного нестационарного рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій.

2 Ітераційний метод

Розглянемо нелінійне одновимірне нестационарне рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку (1.1) з наступними початковими

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [a, b] \quad (2.1)$$

та граничними умовами Діріхле

$$\begin{cases} u(a,t) = g_1(t) \\ u(b,t) = g_2(t) \end{cases}, \quad t \in [0, T] \quad (2.2)$$

Здійснивши дискретизацію за часом на основі θ -схеми, отримаємо:

$$u(x,t) \approx \theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n \quad (2.3)$$

$$\nabla u(x,t) \approx \theta \nabla u^{n+1} + (1-\theta) \nabla u^n \quad (2.4)$$

$$\nabla^3 u(x,t) \approx \theta \nabla^3 u^{n+1} + (1-\theta) \nabla^3 u^n \quad (2.5)$$

$$\nabla^5 u(x,t) \approx \theta \nabla^5 u^{n+1} + (1-\theta) \nabla^5 u^n \quad (2.6)$$

$$\nabla^7 u(x, t) \approx \theta \nabla^7 u^{n+1} + (1-\theta) \nabla^7 u^n \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \quad (2.8)$$

де $u^n = u(x, t^n)$, $t^n = n\tau$, n – крок ітерації, τ – крок за часом, $0 \leq \theta \leq 1$ – ваговий коефіцієнт,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}, \nabla^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3}, \nabla^5 = \frac{\partial^5}{\partial x^5}, \nabla^7 = \frac{\partial^7}{\partial x^7}.$$

Підставимо рівняння (2.3) - (2.8) в рівняння (1.1):

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \beta_1 \left(\theta u^{n+1} \nabla u^{n+1} + (1-\theta) u^n \nabla u^n \right) + \beta_2 \left(\theta \nabla^3 u^{n+1} + (1-\theta) \nabla^3 u^n \right) + \\ + \beta_3 \left(\theta \nabla^5 u^{n+1} + (1-\theta) \nabla^5 u^n \right) + \beta_4 \left(\theta \nabla^7 u^{n+1} + (1-\theta) \nabla^7 u^n \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Нелінійний член в рівнянні (2.9) лінеаризується наступним чином [12]:

$$u^{n+1} \nabla u^{n+1} = u^{n+1} \nabla u^n + u^n \nabla u^{n+1} - u^n \nabla u^n \quad (2.10)$$

Підставимо рівняння (2.10) в рівняння (2.9):

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \beta_1 \left(\theta \left(u^{n+1} \nabla u^n + u^n \nabla u^{n+1} \right) + (1-2\theta) u^n \nabla u^n \right) + \\ + \beta_2 \left(\theta \nabla^3 u^{n+1} + (1-\theta) \nabla^3 u^n \right) + \beta_3 \left(\theta \nabla^5 u^{n+1} + (1-\theta) \nabla^5 u^n \right) + \\ + \beta_4 \left(\theta \nabla^7 u^{n+1} + (1-\theta) \nabla^7 u^n \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Вважаючи $\theta = 1$, запишемо рівняння (2.11) в наступному вигляді:

$$u^{n+1} + \tau \left[\beta_1 \left(u^{n+1} \nabla u^n + u^n \nabla u^{n+1} \right) + \beta_2 \nabla^3 u^{n+1} + \beta_3 \nabla^5 u^{n+1} + \beta_4 \nabla^7 u^{n+1} \right] = u^n + \tau \beta_1 u^n \nabla u^n \quad (2.12)$$

Рівномірно оберемо $N-2$ точки колокації $\{x_i\}_2^{N-1}$ всередині області (a, b) та дві точки на границі області $x_1 = a$ та $x_N = b$. Наближений розв'язок рівняння (1.1) може бути сконструйований за допомогою радіальних базисних функцій $\varphi(r_{ij})$:

$$u^n(x_i) \approx \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi(r_{ij}) \quad (2.13)$$

де $r_j = \|x - x_j\|$ – евклідова відстань між вузлами, α_j^n – невідомі коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Підставивши рівняння (2.13) в рівняння (2.12), отримаємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для точок всередині області

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{ij}) + \tau \left[\beta_1 \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{ij}) \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi^{(1)}(r_{ij}) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi(r_{ij}) \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi^{(1)}(r_{ij}) \right) + \right. \\ \left. + \beta_2 \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi^{(3)}(r_{ij}) + \beta_3 \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi^{(5)}(r_{ij}) + \beta_4 \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi^{(7)}(r_{ij}) \right] = \\ = \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi(r_{ij}) + \tau \beta_1 \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi(r_{ij}) \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi^{(1)}(r_{ij}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

та для точок на границі області $x_1 = a$ та $x_N = b$:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{1j}) = g_1(t) \quad (2.15)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{Nj}) = g_2(t) \quad (2.16)$$

У даній роботі, в якості радіальних базисних функцій, використовуються наступні функції:

$$\varphi(r_{ij}) = e^{-(cr_{ij})^2} - \text{Гаусова} \quad (2.17)$$

$$\varphi(r_{ij}) = \sqrt{r_{ij}^2 + c^2} - \text{мультікватратична функція} \quad (2.18)$$

$$\varphi(r_{ij}) = \frac{1}{r_{ij}^2 + c^2} - \text{зворотна квадратична функція} \quad (2.19)$$

$$\varphi(r_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{(r_{ij}^2 + c^2)^3}} - \text{зворотна мультікватратична функція} \quad (2.20)$$

$$\varphi(r_{ij}) = (1 - cr_{ij})_+^7 (5 + 35cr_{ij} + 101c^2r_{ij}^2 + 147c^3r_{ij}^3 + 101c^4r_{ij}^4 + 35c^5r_{ij}^5 + 5c^6r_{ij}^6) - \text{функція Ву з} \quad (2.21)$$

компактним носієм

де $c \neq 0$ – параметр форми, що обирається довільно, $(1 - cr_{ij})_+^7$ – функція відсічення, що визначається як

$$(1 - cr_{ij})_+^7 = \begin{cases} (1 - cr_{ij})^7, & \text{якщо } 1 - cr_{ij} \geq 0 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (2.22)$$

Рівняння (2.12) являє собою рекурсивну формулу. Отже, дане диференціальне рівняння можна вирішувати крок за кроком, починаючи з початкових умов (2.1). Запишемо рівняння (2.13) разом з граничними умовами (2.2) в матричній формі:

$$[u]^n = A[\alpha]^n \quad (2.23)$$

де $[u]^n = [u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n]^T$, $[\alpha]^n = [\alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_N^n]^T$ та $A = [\varphi(r_{ij})]$, $1 \leq i, j \leq N$.

Матриця A може бути розділена на дві матриці A_d та A_b , що відповідають $N - 2$ точкам всередині області та двом точкам на границі області, наступним чином:

$$A = A_d + A_b \quad (2.24)$$

де

$$A_d = \begin{cases} \varphi(r_{ij}), & \text{якщо } 2 \leq i \leq N - 1, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (2.25)$$

$$A_b = \begin{cases} \varphi(r_{ij}), & \text{якщо } i = 1, N, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Об'єднавши рівняння (2.14) - (2.16) з урахуванням рівняння (2.24), отримаємо наступне матричне рівняння:

$$\left\{ A_d + \tau \left[\beta_1 \left(\text{diag} \left(B_d [\alpha]^n \right) A_d + \text{diag} \left(A_d [\alpha]^n \right) B_d \right) + \beta_2 C_d + \beta_3 D_d + \beta_4 E_d \right] + A_b \right\} [\alpha]^{n+1} = \\ = A_d [\alpha]^n + \tau \beta_1 \left(A_d [\alpha]^n \right) * \left(B_d [\alpha]^n \right) + [G]^{n+1} \quad (2.26)$$

де

$$\begin{aligned}
 B_d &= \begin{cases} \varphi^{(1)}(r_{ij}), & \text{якщо } 2 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \\
 C_d &= \begin{cases} \varphi^{(3)}(r_{ij}), & \text{якщо } 2 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \\
 D_d &= \begin{cases} \varphi^{(5)}(r_{ij}), & \text{якщо } 2 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \\
 E_d &= \begin{cases} \varphi^{(7)}(r_{ij}), & \text{якщо } 2 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

$\text{diag}(A_d[\alpha]^n)$ – діагональна матриця з елементами $A_d[\alpha]^n$ на головній діагоналі,

$$[G]^{n+1} = \left[g_1^{n+1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N-2}, g_2^{n+1} \right]^T, \text{ «} \cdot * \text{» означає покомпонентний добуток двох векторів.}$$

Рівняння (2.26) може бути вирішено відносно невідомих коефіцієнтів $[\alpha]^n$ методом Гаусса.

Підставляючи значення коефіцієнтів $[\alpha]^n$ в рівняння (2.13), отримуємо наближений розв'язок рівняння (1.1) на n -му кроці.

3 Числові результати

В цьому розділі демонструється застосування безсіткового методу для числового вирішення рівняння Кортевега-де Фріза на прикладі двох тестових задач та оцінюється точність отриманих розв'язків.

Для оцінки точності апроксимації в роботі використовуються середня відносна похибка $\text{rerr}(u)$, середня абсолютна похибка $\text{aerr}(u)$ і максимальна похибка $\text{merr}(u)$, які обчислюються за формулами:

$$\text{rerr}(u) = \sqrt{\frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (u_j - \tilde{u}_j)^2}{\sum_{j=1}^N u_j^2}} \tag{3.1}$$

$$\text{aerr}(u) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (u_j - \tilde{u}_j)^2} \tag{3.2}$$

$$\text{merr}(u) = \max_j |u_j - \tilde{u}_j| \tag{3.3}$$

де u_j та \tilde{u}_j є відповідно аналітичними та числовими розв'язками в вузлах $x_j \in [a, b]$, а N – загальна кількість інтерполяційних вузлів.

Задача № 1

Розглянемо нелінійне рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \beta_1 u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \beta_3 \frac{\partial^5 u(x,t)}{\partial x^5} + \beta_4 \frac{\partial^7 u(x,t)}{\partial x^7} = 0 \tag{3.4}$$

де $x \in [-20, 20]$, $d_x = 0.1$, $t \in [0, 10]$, $\tau = 0.01$, $\beta_1 = 6$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = -1$, $\beta_4 = \frac{769}{2500}$, $c = 0.1$.

Початкові умови задані у вигляді:

$$u(x,0) = \frac{86625}{591361} \operatorname{sech}^6\left(\frac{5x}{\sqrt{1538}}\right) \quad (3.5)$$

Граничні умови мають вигляд:

$$u(a,t) = \frac{86625}{591361} \operatorname{sech}^6\left[\frac{5}{\sqrt{1538}}\left(a - \frac{180000}{591361}t\right)\right] \quad (3.6)$$

$$u(b,t) = \frac{86625}{591361} \operatorname{sech}^6\left[\frac{5}{\sqrt{1538}}\left(b - \frac{180000}{591361}t\right)\right] \quad (3.7)$$

Аналітичний розв'язок задано рівнянням [13]:

$$u(x,t) = \frac{86625}{591361} \operatorname{sech}^6\left[\frac{5}{\sqrt{1538}}\left(x - \frac{180000}{591361}t\right)\right] \quad (3.8)$$

На рис. 1 представлена візуалізація наближеного розв'язку Задачі № 1.

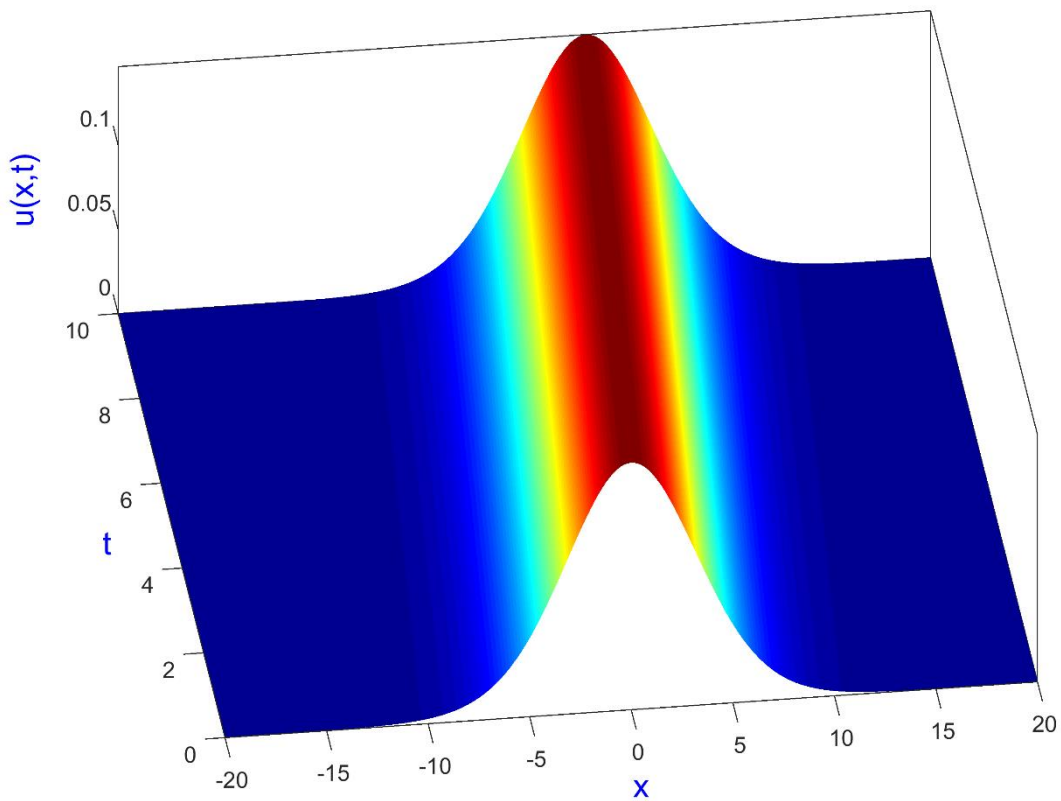


Рис. 1 Візуалізація наближеного розв'язку

В Таблиці 1 наведені похибки наближеного розв'язку Задачі № 1 в різні проміжки часу.

Таблиця 1. Похибки наближеного розв'язку Задачі № 1

t	$\operatorname{err}(u)$	$\operatorname{aerr}(u)$	$\operatorname{merr}(u)$
1	$7.98361413468731 \times 10^{-6}$	$8.90251166252210 \times 10^{-6}$	$2.73967997293928 \times 10^{-5}$
2	$1.30365699236829 \times 10^{-5}$	$1.45370522455223 \times 10^{-5}$	$4.08782804435931 \times 10^{-5}$
3	$1.64791284183743 \times 10^{-5}$	$1.83758421254748 \times 10^{-5}$	$4.98815848004597 \times 10^{-5}$
4	$1.89100266827542 \times 10^{-5}$	$2.10865317679884 \times 10^{-5}$	$5.53044721944423 \times 10^{-5}$
5	$2.08159518270299 \times 10^{-5}$	$2.32118249661440 \times 10^{-5}$	$5.77566265959756 \times 10^{-5}$
6	$2.23502675472742 \times 10^{-5}$	$2.49227372610114 \times 10^{-5}$	$6.15998871260765 \times 10^{-5}$
7	$2.36322270572377 \times 10^{-5}$	$2.63522476649887 \times 10^{-5}$	$6.45459904157625 \times 10^{-5}$
8	$2.47455738168823 \times 10^{-5}$	$2.75937383369796 \times 10^{-5}$	$6.74311969199454 \times 10^{-5}$
9	$2.57901867466870 \times 10^{-5}$	$2.87585840542116 \times 10^{-5}$	$6.78026595746228 \times 10^{-5}$
10	$2.73336652606637 \times 10^{-5}$	$3.04797137507376 \times 10^{-5}$	$7.30919652554840 \times 10^{-5}$

На рис. 2 представлений графік аналітичного та наближеного розв'язків Задачі № 1 в момент часу $t = 10$.

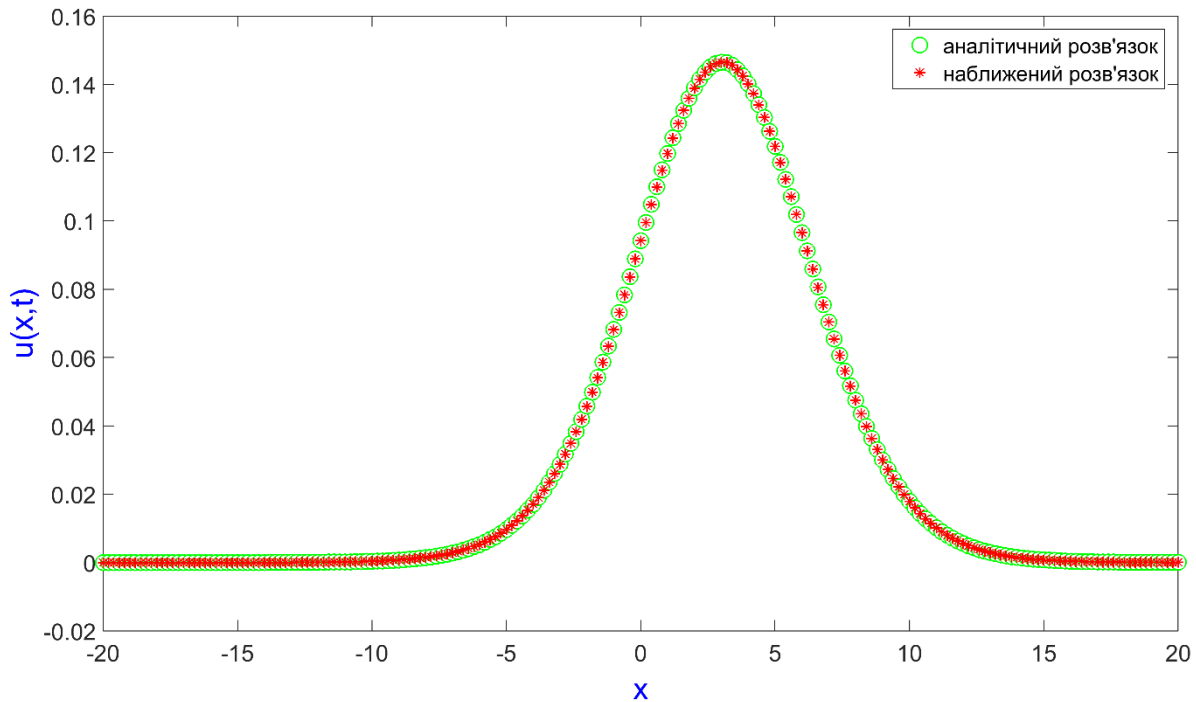


Рис. 2 Графік аналітичного та наближеного розв'язків в фіксований момент часу

Задача № 2

Якщо в рівнянні (1.1) коефіцієнти $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\beta_3 = -1$ та $\beta_4 = 0$, то дане диференціальне рівняння перетворюється в рівняння Кавахари. Розглянемо нелінійне рівняння Кавахари

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial^5 u(x,t)}{\partial x^5} = 0 \quad (3.9)$$

де $x \in [-20, 20]$, $d_x = 0.1$, $t \in [0, 10]$, $\tau = 0.01$, $c = 0.1$,

з наступними початковими

$$u(x,0) = \frac{105}{169} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{x}{2\sqrt{13}} \right) \quad (3.10)$$

та граничними умовами

$$u(a,t) = \frac{105}{169} \operatorname{sech}^4 \left[\frac{1}{2\sqrt{13}} \left(a - \frac{36}{169} t \right) \right] \quad (3.11)$$

$$u(b,t) = \frac{105}{169} \operatorname{sech}^4 \left[\frac{1}{2\sqrt{13}} \left(b - \frac{36}{169} t \right) \right] \quad (3.12)$$

Аналітичний розв'язок має вигляд [14]:

$$u(x,t) = \frac{105}{169} \operatorname{sech}^4 \left[\frac{1}{2\sqrt{13}} \left(x - \frac{36}{169} t \right) \right] \quad (3.13)$$

На рис. 3 представлена візуалізація наближеного розв'язку Задачі № 2.

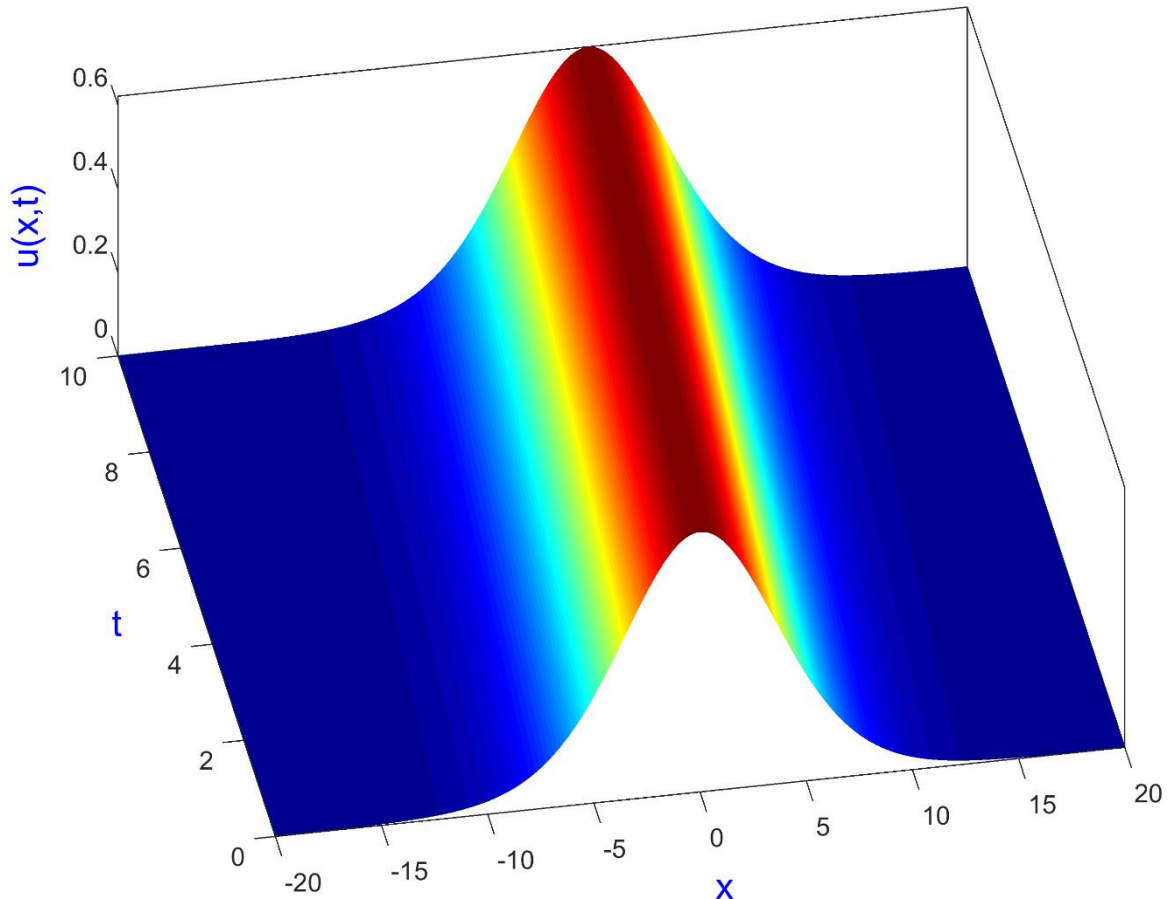


Рис. 3 Візуалізація наближеного розв'язку

В Таблиці 2 наведені середня відносна, середня абсолютна та максимальна похибки наближеного розв'язку Задачі № 2 в різні проміжки часу.

Таблиця 2. Похибки наближеного розв'язку Задачі № 2

t	$\text{rerr}(u)$	$\text{aerr}(u)$	$\text{merr}(u)$
1	$1.01845654833457 \times 10^{-5}$	$5.13791480772239 \times 10^{-5}$	$1.48729866269164 \times 10^{-4}$
2	$1.31931024613584 \times 10^{-5}$	$6.65566307802692 \times 10^{-5}$	$1.78449611171396 \times 10^{-4}$
3	$1.66445839390280 \times 10^{-5}$	$8.39686821017665 \times 10^{-5}$	$2.10307912127064 \times 10^{-4}$
4	$1.77826695990643 \times 10^{-5}$	$8.97101023103128 \times 10^{-5}$	$2.06880668735390 \times 10^{-4}$
5	$1.96234919736284 \times 10^{-5}$	$9.89966921970141 \times 10^{-5}$	$2.54983134358699 \times 10^{-4}$
6	$2.11327850898946 \times 10^{-5}$	$1.06610781478807 \times 10^{-4}$	$2.87461533342600 \times 10^{-4}$
7	$2.30503736222738 \times 10^{-5}$	$1.16284641393765 \times 10^{-4}$	$3.03083215576009 \times 10^{-4}$
8	$2.53819247640622 \times 10^{-5}$	$1.28046861750834 \times 10^{-4}$	$3.38620132809713 \times 10^{-4}$
9	$2.89427881906362 \times 10^{-5}$	$1.46010722560749 \times 10^{-4}$	$3.77481923822717 \times 10^{-4}$
10	$3.33752388589199 \times 10^{-5}$	$1.68371570502904 \times 10^{-4}$	$4.43853647666853 \times 10^{-4}$

На рис. 4 представлений графік аналітичного та наближеного розв'язків Задачі № 2 в момент часу $t = 10$.

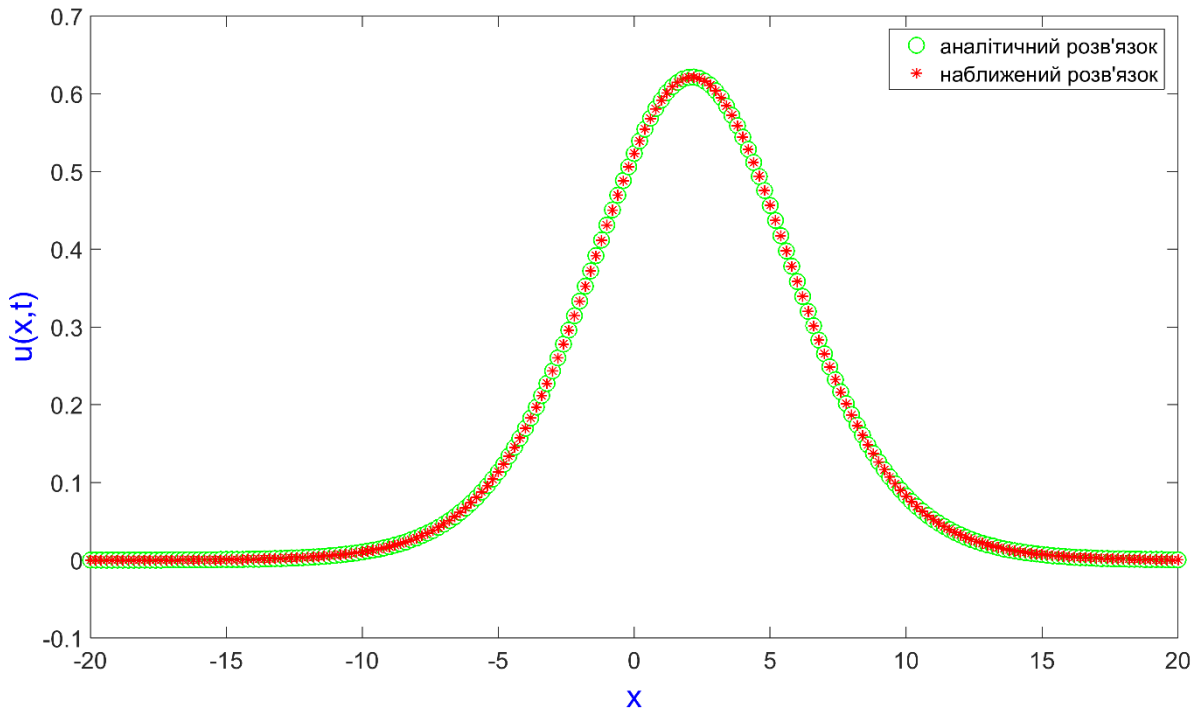


Рис. 4 Графік аналітичного та наближеного розв'язків в фіксований момент часу

На рис. 5 наведена візуалізація порівняння наближених розв'язків Задачі № 1 та Задачі № 2.

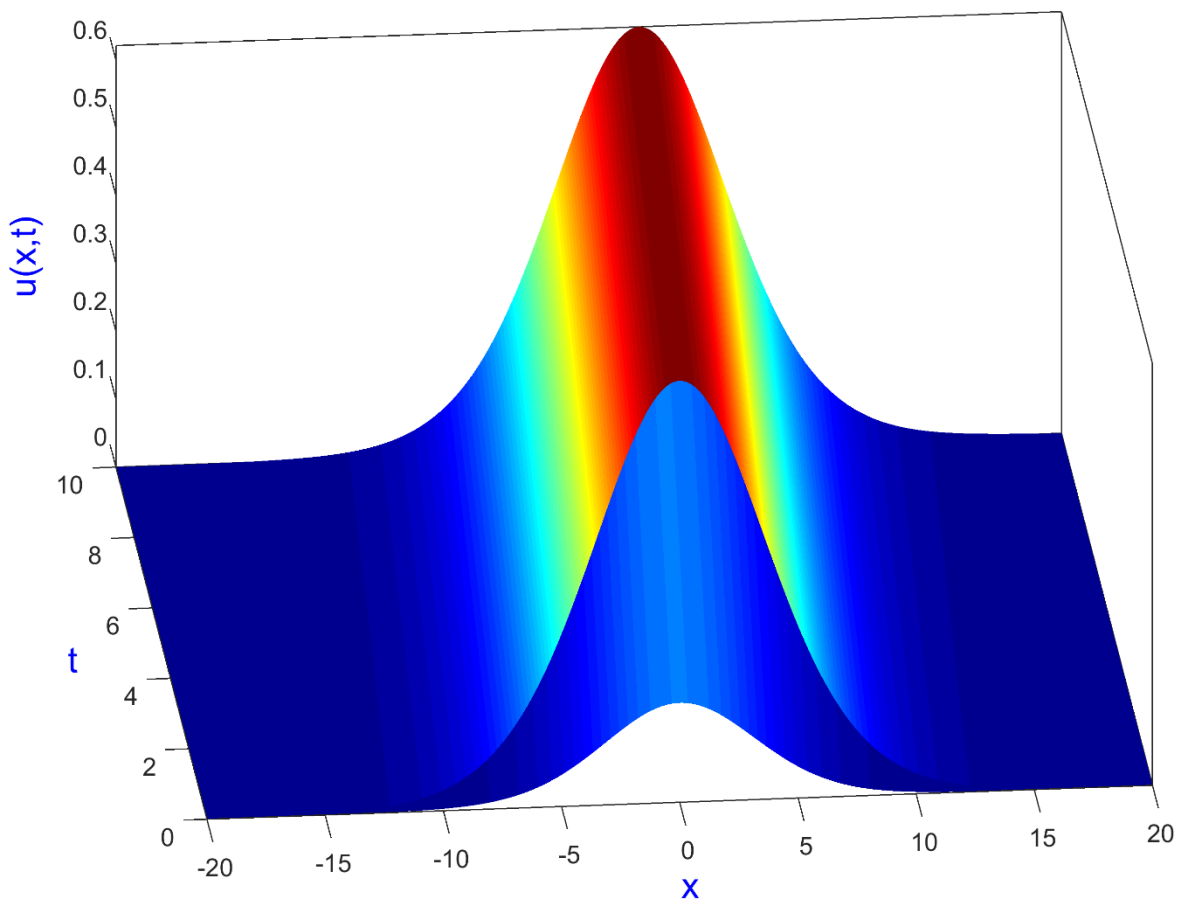


Рис. 5 Порівняння наближених розв'язків

4 Висновки

У статті описується безсітковий метод для числового вирішення нелінійного одновимірного нестационарного рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку. Безсіткова схема реалізується на основі методу колокації та радіальних базисних функцій. Розв'язок диференціального рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку апроксимується радіальними базисними функціями, а метод колокації використовується для знаходження невідомих коефіцієнтів. В якості радіальних базисних функцій в статті використовуються Гаусова, зворотна квадратична, мультикватрична, зворотна мультикватрична функції, а також функція Ву з компактним носієм. Дискретизація за часом нелінійного одновимірного нестационарного рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку здійснюється з використанням θ -схеми.

В роботі представлені результати числових вирішень двох тестових задач, які отримані з використанням даного методу. Для розглянутих задач побудовано графіки наближених та аналітичних розв'язків, а також пороховані середня відносна, середня абсолютна та максимальна похибки. Отримані результати свідчать про те, що дана схема є ефективним підходом для вирішення нелінійних рівнянь такого типу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Korteweg D. J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1895. Vol. 39, Issue 240. P. 422-443. doi: <https://doi.org/10.1080/14786449508620739>
2. Hasimoto H. Water waves. *Kagaku*. 1970. Vol. 40. P. 401-408. [in Japanese]
3. Kawahara T. Oscillatory Solitary Waves in Dispersive Media. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1972. Vol. 33. P. 260-264. doi: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.260>
4. Kakutani T., Ono H. Weak Non-Linear Hydromagnetic Waves in a Cold Collision-Free Plasma. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1969. Vol. 26. P. 1305-1318. doi: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.26.1305>
5. Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994. Vol. 37, Issue 2. P. 229-256. doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>
6. Belytschko T., Rongauz Y., Organ D. Meshless methods: An overview and recently developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996. Vol. 139. P. 3-47. doi: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01078-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01078-X)
7. Ingber M. S., Chen C. S., Tanski J. A. A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004. Vol. 60, Issue 13. P. 2183-2201. doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1043>
8. Гарячевська І. В., Протектор Д. О. Система комп'ютерного моделювання для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. Т. 43. С. 11-19. doi: <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2019-43-02>
9. Протектор Д. О., Лисин Д. А., Лисина О. Ю. Численный анализ решений двумерных задач теплопроводности по бессеточной схеме с использованием фундаментальных и общих решений. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2, № 1. С. 98-111. doi: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-8>
10. Протектор Д. О., Лисин Д. О., Лисина О. Ю. Система комп'ютерного моделювання для розв'язку тривимірних задач теплопровідності в анізотропному середовищі. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2019. Т. 84, № 1. С. 20-27. doi: [https://doi.org/10.30837/1563-0064.1\(84\).2019.184712](https://doi.org/10.30837/1563-0064.1(84).2019.184712)
11. Kansa E. J. Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – I surface approximations and partial derivative estimates.

- Computers & Mathematics with Applications*. 1990. Vol. 19. P. 127-145. doi: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90270-T](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90270-T)
12. Rubin S. G., Graves R. A. Jr. A Cubic Spline Approximation for Problems in Fluid Mechanics. NASA Technical Reports R-436. Washington, D.C.: NASA, 1975. 93 p.
 13. Ma W. X. Travelling wave solutions to a seventh order generalized KdV equation. *Physics Letters A*. 1993. Vol. 180, Issue 3. P. 221-224. doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)90699-Z](https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90699-Z)
 14. Sirendaoreji. New exact travelling wave solutions for the Kawahara and modified Kawahara equations. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2004. Vol. 19, Issue 1. P. 147-150. doi: [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(03\)00102-4](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(03)00102-4)

REFERENCES

1. D. J. Korteweg, and G. de Vries, "On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves" *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 39, no. 240, pp. 422-443, 1895. doi: <https://doi.org/10.1080/14786449508620739>
2. H. Hasimoto, "Water waves" *Kagaku*, vol. 40, pp. 401-408, 1970. [in Japanese]
3. T. Kawahara, "Oscillatory Solitary Waves in Dispersive Media" *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 33, pp. 260-264, 1972. doi: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.260>
4. T. Kakutani, and H. Ono, "Weak Non-Linear Hydromagnetic Waves in a Cold Collision-Free Plasma" *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 26, pp. 1305-1318, 1969. doi: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.26.1305>
5. T. Belytschko, Y. Y. Lu and L. Gu, "Element-free Galerkin methods" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, no. 2, pp. 229-256, 1994. doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>
6. T. Belytschko, Y. Rongauz and D. Organ, "Meshless methods: An overview and recently developments" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 3-47, 1996. doi: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01078-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01078-X)
7. M. S. Ingber, C. S. Chen, and J. A. Tanski, "A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 60, no. 13, pp. 2183-2201, 2004. doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1043>
8. I. V. Garyachevskaya, and D. O. Protektor, "Computer modeling system for the numerical solution of the one-dimensional non-stationary Burgers' equation" *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»*, vol. 43, pp. 11-19, 2019. doi: <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2019-43-02>
9. D. O. Protektor, D. A. Lisin and O. Yu. Lisina, "Numerical analysis of solutions of two-dimensional heat conduction problems by meshless approach using fundamental and general solutions" *Applied Questions of Mathematical Modelling*, vol. 2, no. 1, pp. 98-111, 2019. doi: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-8>
10. D. O. Protektor, D. A. Lisin and O. Yu. Lisina, "Computer modeling system for solving three-dimensional heat conduction problems in an anisotropic environment" *Radioelectronics & Informatics*, vol. 84, no. 1, pp. 20-27, 2019. doi: [https://doi.org/10.30837/1563-0064.1\(84\).2019.184712](https://doi.org/10.30837/1563-0064.1(84).2019.184712)
11. E. J. Kansa, "Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – I surface approximations and partial derivative estimates" *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 19, pp. 127-145, 1990. doi: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90270-T](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90270-T)
12. S. G. Rubin, and R. A. Jr. Graves, "A Cubic Spline Approximation for Problems in Fluid Mechanics", NASA Technical Reports R-436, Washington, D.C.: NASA, 1975.

13. W. X. Ma, “Travelling wave solutions to a seventh order generalized KdV equation” *Physics Letters A*, vol. 180, no. 3, pp. 221-224, 1993.
doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)90699-Z](https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90699-Z)
14. Sirendaoreji, “New exact travelling wave solutions for the Kawahara and modified Kawahara equations” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 19, no. 1, pp. 147-150, 2004. doi: [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(03\)00102-4](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(03)00102-4)

Гарячевська Ірина Василівна – кандидат технічних наук, доцент; директор навчально-наукового інституту комп’ютерної фізики та енергетики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4630-9519.

Протектор Денис Олегович – аспірант; навчально-науковий інститут комп’ютерної фізики та енергетики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: d.protector@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3323-7058.

Гарячевская Ирина Васильевна – кандидат технических наук, доцент; директор учебно-научного института компьютерной физики и энергетики, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022;
e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4630-9519.

Протектор Денис Олегович – аспірант; учебно-научный институт компьютерной физики и энергетики, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022;
e-mail: d.protector@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3323-7058.

Garyachevskaya Irina V. PhD, Associate Professor, Director of the Education and Research Institute Computer Physics and Energy V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4630-9519.

Protector Denys O. Postgraduate student of the Education and Research Institute Computer Physics and Energy V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: d.protector@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3323-7058.

УДК 519.711.2

Онтологічна модель оцінки ефективності функціонування наукових установ

Л.С. Глоба, Р.Л. Новогрудська, Б.О. Задюченко

Національний технічний університет України

*"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" проспект Перемоги 37, м.Київ, 03056, Україна**Національний центр «Мала академія наук України» вул. Дегтярівська 38/44, м.Київ, 04119, Україна
e-mail: rinan@ukr.net*

В статті представлено підхід до оцінки якості функціонування наукових установ на базі онтологій. На сьогоднішній день існує велика кількість наукових установ та профільних організацій ефективність функціонування яких напряму залежить якості послуг які вони надають. В процесі свого функціонування установи накопичують велику кількість інформації (наукові статті, звіти, рейтинги працівників, економічні показники та ін.) яка може бути використана для їх оцінки за загальнодержавними критеріями в автоматичному режимі. В наведеному дослідженні пропонується використовувати онтологічну модель для зберігання, представлення та маніпулювання такою інформацією. Онтологія дозволить не лише структурувати та систематизувати дані наукових установ, але і виконати процедуру оцінки якості за рахунок механізму онтологічного логічного виведення. Загальну онтологію для опису діяльності наукових установ представлено системою п'яти зв'язних компонент. Описано структуру такої системи, виділено базові елементи її онтологій, а також зв'язки між ними. Розроблено онтологію діяльності наукової установи на базі технологічної платформи ТОДАОС.

Ключові слова: наукова установа, оцінка якості, діяльність, модель представлення знань, онтологія, модель, клас, відношення.

The article presents an ontology-based approach to assessing the quality of functioning of scientific institutions. Today, there are a large number of scientific institutions and specialized organizations whose efficiency depends on the quality of the services they provide. A large amount of information concerning these institutions is produced during their functioning (scientific articles, reports, employee ratings, economic indicators, etc.). That information can be used for the automatic evaluation by some universal criteria. The study proposes to use an ontological model to store, process and present such information. Ontologies are new intelligent tools for finding resources on the Internet and new methods for representing and processing knowledge and queries. They are able to describe accurately and efficiently the semantics of data for a certain domain and solve the problem of incompatibility and inconsistency of concepts. The ontological approach allows improving the model based on basic ontologies by contiguous developing and completing those ontologies. The ontology will allow us not only to structure and systematize the data of scientific institutions, but also to perform the procedure of quality assessment through the mechanism of ontological logical inference. A general ontology for describing the activities of scientific institutions is represented by a system of five connected components. The structure of that system is described in the paper. Basic elements of its ontologies and the connections between them are highlighted. The ontology of the scientific institution activity is developed by using specific technological platform TEDAOS - "Transdisciplinary Educational Dialogues of Applications' Ontology Systems".

Keywords: scientific institution, quality assessment, activity, model of knowledge representation, ontology, model, class, relationship.

В статье представлены подход к оценке качества функционирования научных учреждений на базе онтологий. На сегодняшний день существует большое количество научных учреждений и профильных организаций эффективность функционирования которых напрямую зависит качества услуг, которые они предоставляют. В процессе своего функционирования учреждения накапливают большое количество информации (научные статьи, отчеты, рейтинги работников, экономические показатели и др.), которая может быть использована для их оценки общегосударственными критериями в автоматическом режиме. В приведенном исследовании предлагается использовать онтологическую модель для хранения, представления и манипулирования такой информацией. Онтология позволит не только структурировать и систематизировать данные научных учреждений, но и выполнить процедуру оценки качества за счет механизма онтологического логического вывода. Общую онтологию для описания деятельности научных учреждений представлено системой пяти связанных компонент. Описана структура такой системы, выделены базовые элементы ее онтологий, а также связи между ними. Разработан онтологию деятельности научного учреждения на базе технологической платформы ТОДАОС.

Ключевые слова: научное учреждение, оценка качества, деятельность, модель представления знаний, онтология, модель, класс, отношения.

1. Вступ

На сьогоднішній день існує велика кількість державних та приватних установ які надають послуги у різних сферах життєдіяльності суспільства. Затребуваність таких установ напряму залежить від ефективності їх функціонування. Особливо важливою характеристикою ефективності функціонування є для організацій задіяних в сфері науки та освіти, оскільки саме

від якості послуг, які вони надають залежить майбутній рівень розвитку держави та життєдіяльності її громадян. Саме тому на сьогодні існують певні загальноприйняті принципи оцінки таких організацій. Процес такої експертної оцінки наведено та затверджено у відповідних нормативних документах [1].

Бурхливий розвиток інформаційних технологій привів до появи великої кількості інформаційних систем, які можуть бути використані в процесі роботи співробітників різних організацій. Зазвичай такі системи надають можливість зберігати певну інформацію яка продукується організацією, реалізувати можливість документообігу та характеризуються наявністю в їх середовищі особистих інформаційних середовищ для кожного співробітника. Однак, використання таких систем саме для освітніх та наукових організацій не є достатньо обґрунтованим. Процес функціонування таких організацій пов'язаний з певними специфічними особливостями які не є характерними для іншого типу установ. Так, наприклад, важливими показниками освітнього та наукового процесів є кількість публікацій, цитування, різноманітні наукові індекси та рейтинги, участь у міжнародних проектах та програмах, виконані наукові теми, підготовлені спеціалісти різних кваліфікаційних рівнів за різними спеціальностями і спеціалізація ми та інше. Саме тому класичні інформаційні системи не є придатними для використання в таких організаціях.

В процесі свого функціонування установи накопичують велику кількість інформації (наукові статті, звіти, рейтинги працівників, економічні показники та ін.), яка може бути використана для їх оцінки за загальнодержавними критеріями. Для оцінки ефективності роботи організації використовується інформація, яка вже є накопиченою на рівні організації. Отже, систематизація та структуризація такої інформації не лише полегшить її обробку на рівні установи, але і може надати можливість використовувати її відповідним органам в процесі оцінки якості функціонування установи. Також, зважаючи на сучасний стан розвитку інформаційних технологій, важливо щоб така оцінка проводилась в автоматичному чи напівавтоматичному режимі. Для вирішення описаних задач необхідно реалізувати автоматизовану інформаційну технологію, яка б надавала можливість систематизації та структуризації інформації накопиченої на рівні організації та подальшої оцінки такої інформації за заданими заздалегідь критеріями. Розробка такої інформаційної технології може базуватися на інформаційному моделюванні з використанням сучасних засобів та моделей представлення знань.

У роботі наведено підхід до представлення інформації яка накопичується в різноманітних наукових установах за допомогою онтологічної моделі. Онтологічне представлення дозволить проводити оцінку якості функціонування наукових установ на базі загальнодержавних принципів такої оцінки. Інформація про організацію процесу оцінки, а також загальноприйняті критерії оцінювання також зберігатимуться в онтологічній моделі. Визначені в моделі асоціативні відношення між об'єктами, які представляють терміни предметної області дозволять пов'язати показники діяльності організації з критеріями за якими проводиться оцінка.

2. Огляд основних досліджень за напрямком та базові поняття

В останні роки, завдяки стрімкому розвитку та застосуванню технології штучного інтелекту для розробки інформаційних систем постала необхідність створення підходу орієнтованого на зручне для користувача представлення опису знань, які акумулюються в таких системах. Одним з таких підходів є розробка карт знань. Карта знань - це інструмент, який представляє обрану область знань та зв'язки всередині неї у графічній формі [2]. Термін картографування знань визначається як процес, методи та інструменти аналізу областей знань з метою виявлення особливостей чи значення та візуалізації їх у вичерпній, прозорій формі такі, що чітко підкреслюються важливі для бізнесу функції [3].

На сьогоднішній день виділяють декілька видів карт знань:

- ієрархічна карта знань – представляють концепти залежності між якими можна представити відношенням підпорядкування,
- мережева карта знань – структура, яка задає відношення між концептами у вигляді графу,
- карта процесу знань (потоків знань) - використовується як інструмент для опису процесів.

– карта джерела знань – описує поняття предметної області та зв'язки між ними в рамках певної сфери знань.

У роботі [4] наведено декілька категорій, які стосуються карт знань.

1. Зміст карти: Описує елементами карти знань
2. Користувачі: Деякі карти знань можуть бути лише для особистого використання, а деякі для використання цілою організацією.
3. Форма карти: Задає та описує спосіб представлення карти знань, її форму візуального представлення. (таблиця, концептуальна схема, діаграма процесу, ієрархічний список).
4. Спосіб створення карти: карти можуть створюватися автоматично, вручну, редагуватися ітеративно, тощо.

Навігація на основі карти знань видається цілком природною для розуміння користувачем, оскільки представляє опис концепті та зв'язків між ними у візуальній формі. В свою чергу, візуалізація та пошук знань є ключовими прийомами здійснення ефективного управління знаннями [5]. Важливим також, є те, що карти знань не лише переставляють інформацію у формі, яка зрозуміла користувачу, але і розроблені за стандартами «зрозумілими» для машинної обробки.

Карта знань - це, як правило, візуальне зображення «знань про знання», а не самого знання. Такий підхід, в основному допомагає виявити джерела знань та структуру знань, представляючи елементи та структурні компоненти досліджуваних областей різних галузей знань. Оскільки карта знань відображає верхній рівень представлення знань (візуальне представлення), її розробка повинна бути підкріплена певною загальноприйнятою методикою, моделлю чи стандартом представлення знань. Останні, в свою чергу, дозволяють саме описати знання в тій формі, яка буде прийнятною для подальшої обробки методами штучного інтелекту.

Розглянемо більш детально існуючі моделі представлення знань, які використовуються саме для вирішення задачі представлення знань певної предметної області.

Продукційні моделі представлення знань. Продукції є найбільш популярними засобами представлення знань в інформаційних системах. Продукційна модель – це модель, заснована на правилах, яка дозволяє представити знання у вигляді пропозицій типу «Якщо (умова), то (дія)». [6, 7]. Під "умовою" (антицедентом) розуміється деяка пропозиція – зразок, за яким здійснюється пошук у базі знань, а під "дією" (консеквентом) – дії, що виконуються при успішному результаті пошуку (вони можуть бути проміжними, виступаючими далі як умови, і термінальними або цільовими, завершальними для роботи системи). Найчастіше висновок на такій базі знань буває прямий (від даних до пошуку мети) або зворотний (від цілі для її підтвердження до даних).

Будь-яке правило продукційної моделі складається з однієї або кількох пар атрибут-значення. У робочій пам'яті продукційної системи зберігаються пари атрибут-значення, істинність яких встановлена в процесі виконання конкретного завдання. Вміст робочої пам'яті змінюється в процесі виконання завдання [8]. При описі знань конкретної предметної області для структуризації ресурсів окрему сутність предметної області розглядають як об'єкт, а дані, що зберігаються в робочій пам'яті, представляють значення, які приймають атрибути цього об'єкта. Однією з переваг такого представлення знань є уточнення контексту, в якому застосовуються правила. Правила з бази правил можуть спрацьовувати більше одного разу в процесі одного логічного висновку, оскільки одне правило може застосовуватися до різних екземплярів об'єкта (але не більше одного разу до кожного екземпляру).

Фреймові моделі представлення знань. Фреймова модель ґрунтується на такому понятті як фрейм (англ. frame – рамка, каркас). Фрейм – це структура даних для представлення деякого концептуального об'єкта [9]. Інформація, що відноситься до фрейму, міститься в складових його слотів. Слоти можуть бути термінальними або бути фреймами, таким чином утворюючи цілу ієрархічну мережу. Фрейм має майже однорідну структуру і складається зі стандартних одиниць. Кожна така одиниця (слот) містить назву і має своє значення [10]. Формально фрейм – це тип даних виду:

$$F = \langle N, S_1, S_2, S_3 \rangle,$$

де N – ім'я об'єкту;

S_1 – множина слотів, що містять факти, які визначають декларативну семантику фрейму;
 S_2 – множина слотів, що забезпечують зв'язки з іншими фреймами (каузальні, семантичні і т. д.);

S_3 – множина слотів, що забезпечують перетворення, які визначають процедурну семантику кадру.

Склад фреймів і слотів в кожній конкретній фреймовій моделі може бути різний, проте в рамках однієї системи доцільно єдине представлення для усунення зайвого ускладнення [11, 12]. У цілому фреймова модель допускає відношення всіх властивостей декларативних і процедурних знань. Глибина вкладеності слотів у фреймі (число рівнів) залежить від предметної області та мови, що реалізує модель.

Сукупність упорядкованих фреймів називається сценарієм. Структура фрейму зазвичай використовується для «розуміння» природних мов, а також для опису механічних пристроїв та процесу їх функціонування. Це пов'язано з тим, що механічні пристрої складаються з великої кількості елементів, які пов'язані між собою. Кожен фрейм може зберігати інформацію про конкретний елемент, а сукупність фреймів поєднаних між собою буде сценарієм, представляючим певний механічний пристрій. [13].

Логічні моделі представлення знань. Логічна (предикатна) модель представлення знань заснована на алгебрі висловлювань та предикатів, на системі аксіом цієї алгебри та її правилах виводу. З предикатних моделей найбільше поширення отримала модель предикатів першого порядку, що базується на термах та предикатах. Всі знання про предметну область в такій моделі описуються у вигляді формул такої логіки або правил виводу [14]. Опис у вигляді формул дає можливість представити декларативні знання, а правила виводу – процедурні знання. Модель предметної області за допомогою логічної моделі можна визначити спрощено у вигляді: <Модель предметної області> = <понятійні знання> + <конструктивні знання>. Логічні моделі зручні для представлення логічних взаємозв'язків між фактами, вони формалізовані, для їх використання є зручний і адекватний інструментарій, наприклад, мова логічного програмування Пролог [15]. В основі моделей такого типу лежить формальна система, що задається четвіркою виду:

$$M = \langle T, P, A, B \rangle,$$

де множина T є множиною базових елементів різної природи.

множина P є множиною синтаксичних правил.

множина A є множиною аксіом.

множина B є множиною правил виведення.

Онтологічні моделі. Одним із існуючих на сьогоднішній день підходів до ідентифікації предметної області, заснованих на ідеї концептуального моделювання, є онтологічне моделювання. Концептуальна або понятійна модель предметної області описує її як сукупність понять (концептів, термінів) і відношень між ними, яким відповідають сутності з реального світу [16]. Цьому відповідає класичне представлення онтологічної моделі, в якому онтологія задається трьома кінцевими підмножинами: концептів, зв'язків і функцій інтерпретації. При моделюванні предметної області як сфери діяльності, відношення між поняттями також є поняттями, що описують відношення [17]. Поняття, віднесені до класу відношень, використовуються для опису процесів і явищ реального світу. Змістовна модель предметної області для понятійної моделі задається орієнтованим поміченим графом, вершини якого інтерпретуються як інформаційні елементи, що відповідають реальним об'єктам предметної області. Виділяються два типи відношень в об'єднанні моделей: змістовні, що визначають відношення одного інформаційного елемента до іншого, і понятійні, що визначають відношення елемента до концепту з понятійної ПО [18].

Формально онтологічна модель може бути задана як:

$$O = \langle C, R, F \rangle,$$

де C – кінцева множина концептів (понять) предметної області,

R – кінцева множина відношень між концептами,

F – кінцева множина функцій інтерпретації, заданих на концептах і/або відношеннях.

Онтологічний підхід дозволяє проводити постійне удосконалення моделі на основі базових онтологій шляхом їх добудови та розвитку [19]. Онтологія включає як опис предметної області, так і опис релевантних їй ресурсів. Частина онтології, що описує конкретну предметну область, включає в себе сукупність термінів і відношень семантично значущих для даної предметної області, а також правил, згідно з якими можна будувати твердження про елементи предметної області [20].

Проведений аналіз дозволяє стверджувати, що вибір виду моделі представлення знань залежить від вимог які висуваються до проєктованої системи. Так, з розглянутих моделей, продукційні доцільно використовувати в випадку розробки системи направленої на реалізацію експертних висновків з жорсткою структурою «причина-наслідок»; фреймові моделі використовуються для реалізації сценарного підходу з метою створення систем орієнтованих на прогнозування та моделювання майбутніх подій; логічні моделі застосовуються для представлення інформації у вигляді формальних математичних структур, які доцільно використовувати за необхідності оптимізації чи автоматизації певних процесів під час проєктування інформаційних систем; онтологічні моделі можливо застосовувати як з метою представлення інформації в процесі проєктування системи, так і для подальшого оперування такою інформацією. Саме онтологічні моделі можна використовувати як універсальний засіб для інтеграції даних та знань із різномірних джерел інформації. Використання онтологій дозволяє структуризувати, систематизувати та класифікувати інформацію. Важливою характеристикою онтологічних моделей представлення знань є те, що структура онтологічної моделі апріорі вписується в парадигму семантичної павутини, що робить можливим автоматизоване налаштування та використання розробленої онтології в Інтернет середовищі. Така характеристика є затребуваною з точки зору розробки сучасних інформаційних систем, основною вимогою до яких є надання он-лайн доступу користувачам у режимі реального часу. Ще однією особливістю онтологічних моделей є можливість проведення логічних висновків, за рахунок наявних в моделі відношень асоціативного виду. Логічні висновки дозволяють організувати змістовний пошук по інформаційному простору моделі, а також проводити певні заключення (умовиводи) по знанням, які зберігаються в моделі. Саме така особливість може бути покладена в основу оцінки якості показників певної предметної області, якщо дані та знання такої предметної області представити за допомогою онтологій.

3. Система онтологій для моніторингу та оцінки діяльності наукових установ

В процесі організації наукової діяльності, з послідуною її оцінкою, задіяні декілька основних процесів: організація діяльності функціонування установи; визначення показників, за якими можна виявити рівень виконання певного виду діяльності в науковій установі; наявність критеріїв оцінки таких показників, за допомогою яких можна виконати якісну оцінку досягнень організації та встановити чи відповідає її діяльність затребуваним вимогам; організація безпосередньо процесу оцінювання установи з визначенням послідовності дій, обігу відповідних документів та задіяних організацій.

Виходячи з цього, пропонується в онтології діяльності наукових установ виділити декілька онтологій. В результаті такого виділення загальна онтологія діяльності наукових установ буде являти собою систему онтологій, кожна з яких буде описувати відповідний підпроцес в рамках як діяльності самої установи, так і процесу її оцінки зовнішніми організаціями та міністерствами. Сама ж система дозволить в повній мірі описати усі необхідні елементи, процеси та їх значення для визначення рівня ефективності діяльності установи.

Система онтологій для моніторингу та оцінки діяльності наукових установ являє собою сукупність декількох компонентів (Рис. 1). Розроблена система включає такі онтології як:

– Онтологія діяльності наукових установ (ОДНУ) – відображає усі можливі процеси які відбуваються в рамках наукового процесу в межах діяльності наукових установ. ОДНУ описує процес функціонування та взаємодії наукових установ, об'єкти та суб'єкти які мають відношення до такого процесу, базові елементи які задіяні на всіх рівнях нагляду, моніторингу та оцінки наукового процесу який проходить в певній науковій установі. Онтологія діяльності є інтегральною онтологією та поєднує наступні онтології: онтологія організації наукової діяльності, онтологія оцінювання ефективності діяльності, онтологія моніторингу наукової діяльності.

– Онтологія організації діяльності установи (ООДУ) – описує загальні поняття, які стосуються організації наукової діяльності в цілому. Онтологія організації наукової діяльності є онтологією верхнього рівня, та включає загальні поняття стосовно процесу організаційного процесу, який відбувається в установах різного типу та виду.

– Онтологія показників діяльності установи (ОПДУ) – дозволяє детально описати показники по усім аспектам діяльності установи. На базі таких показників з врахуванням критеріїв оцінки в подальшому можна проводити якісну оцінку діяльності установи.

– Онтологія оцінювання діяльності наукових установ (ООДНУ) вводить поняття, які дозволяють провести оцінку ефективності наукової діяльності певної наукової установи в рамках її державної перевірки або встановлення її наукового рівня. ООДНУ включає в себе дві онтології, описують усі необхідні для оцінки установи елементи.

– Онтологія критеріїв оцінювання діяльності установи (ОКОДУ) – задає критерії для оцінки ефективності діяльності установи. Поняття ОКОДУ є контекстно-незалежними структурами для відображення показників діяльності установи в розрізі оцінки такої діяльності. В онтології, також, визначено шкалу за якою проводиться оцінка. Можна стверджувати, що використовуючи елементи ООЕД є можливість виконати оцінку індексу якості виконаних робіт в процесі функціонування певної установи.

– Онтологія організації оцінювання діяльності установи (ООООДУ) описує сам процес проведення оцінки відповідними органами. Така онтологія включає елементи для визначення послідовності дій в процесі оцінювання, обігу відповідних документів та задіяних в процесі оцінювання організацій та підрозділів.

– Онтологія предметної області – базується на системній класифікації наукової діяльності, організаційній структурі підпорядкованості організацій, градації і класифікації документів для оцінки діяльності установ. Онтологія предметної області задає структури для безпосереднього опису наукового та організаційного процесу, який відбувається в організації.



Рис. 1. Система онтологій діяльності наукових установ

Екземпляри класів і відношень, визначених у онтології діяльності наукових установ, утворюють інформаційне наповнення банку даних, який містить терміни, що представляють поняття предметної області. Вихідними даними для моделі представлення знань, що характеризують предметну область, є різноманітні нормативні документи, які регламентують процес наукової діяльності, організацію такого процесу, моніторингові засоби та методику оцінювання якості його проведення. Також, у якості вихідних даних для наповнення моделі предметної області виступають різноманітні підручники, посібники, періодика, інформаційні

ресурси та інше, що містять наукову інформацію яка формує основу наукової діяльності. Така інформація є базою для формування простору знань, яким оперує наука у певній предметній області.

4. Елементи онтологій для моніторингу та оцінки діяльності наукових установ

В процесі побудови онтологічної моделі виникає необхідність опису її елементів. Онтологічна модель включає наступні елементи:

Онтологічна модель = <класи, атрибути, відношення, типи значень атрибутів, обмеження на значення атрибутів, екземпляри класів>,

де *класи* – елемент онтологічної моделі, який описує поняття деякої предметної або проблемної області;

атрибути – елементи онтологічної моделі, які описують властивості понять і відношень;

відношення – задаються на класах, та відображають або зв'язок класів між собою або зв'язок класів з даними чи атрибутами. Існують відношення наступних видів:

- асоціативне відношення – за рахунок чого дозволяє здійснювати змістовний пошук по інформаційному простору онтології,
- відношення «частина-ціле» – дозволяє встановлювати зв'язки між класами на рівні ієрархії,
- відношення наслідування – використовується для передачі атрибутів і відношень від батьківського класу до дочірнього,
- відношення «клас-дані» – дозволяє пов'язувати екземпляри понять з класом;

типи значень атрибутів – задають стандартні типи для значень атрибутів класів (наприклад: string, integer, real, date);

обмеження на значення атрибутів понять і відношень – використовується не для всіх атрибутів, а лише для тих, значення яких повинні лежати в деякій області, не можуть бути менше/більше заданої величини або визначаються певним правилом. Так, наприклад, на значення атрибута «дата початку» класу C_i онтології O_i накладається обмеження $T(\text{data}) = \text{date}$ $F(T) > 0$.)

екземпляри класів – елемент онтології який відображає конкретні дані предметної області, які підпорядковуються структурі онтологічної моделі.

Таким чином, онтологія являє собою ієрархію понять (або класів), пов'язаних відношеннями. Використання відношень асоціативного типу дозволяє визначити онтологічну модель не тільки як ієрархічну структуру, але і як структуру, що враховує змістовний сенс зв'язку між реальними об'єктами. Різні властивості кожного поняття описуються на основі атрибутів понять і обмежень, накладених на область їх значень.

Описані елементи онтологічної моделі повинні бути присутніми у всіх онтологіях запропонованої в розділі 3 системи онтологій. Процес детального опису елементів онтології є важливим етапом проектування загальної онтологічної моделі, який дозволить задати структури для подальшого наповнення онтології інформацією предметної області (екземплярами класів).

5. Онтологія організації діяльності установи

Для прикладу наведемо опис однієї компоненти системи онтологій для моніторингу та оцінки діяльності наукових установ – Онтології організації діяльності установи. Наведемо опис елементів онтології, її класи, атрибути та відношення онтології.

Онтологія організації діяльності установи включає дев'ять класів, які описують загальні поняття, які стосуються організації діяльності установи. Ці класи пов'язані відношеннями різних типів. Різні властивості кожного поняття описуються на основі атрибутів понять і обмежень, накладених на область їх значень. Наведемо класи Онтології організації наукової діяльності наукової діяльності.

Персона. До цього класу відносяться поняття, пов'язані з суб'єктами наукової діяльності: дослідниками, співробітниками і членами організацій. Атрибутами персони є: персональні дані (прізвище, ім'я, по батькові, дата народження, телефон, адреса проживання, паспортні данні), вчений ступінь, звання, напрямки наукової діяльності, нагороди, публікації, наукові теми.

Організація. Поняття цього класу описують різні наукові організації, такі як наукові інститути, академії, університети, міністерства, співтовариства і асоціації, дослідницькі групи та інші неформальні наукові об'єднання. Атрибутами організації є: назва (повна та скорочена), місце розташування, реквізити установи.

Захід. У цей клас входять поняття, що описують науково-організаційну або науково-дослідну діяльність. До класу входять такі наукові заходи як: конференції, семінари, воркшопи, дослідницькі поїздки, проекти, програми і т.д. До атрибутів класу «Захід» відносяться: назва, місце проведення, дата початку, дата закінчення, ступінь завершеності, тематика, назва та реквізити організатора, відповідальний за захід (як від установи, яка проводить захід, так і від певної установи яка приймає участь у заході).

Діяльність. Клас описує усі види діяльності які відбуваються в науковій організації (наприклад, такі як дослідження, проект, програма досліджень, публікація). Поняття класу «Діяльність» є сполучною ланкою між класами які описують початок та кінець процесу наукової діяльності, а також підключають учасників такої діяльності та класи предметної області, які визначають наукові аспекти такої діяльності. Таким чином, можна сказати, що клас «Діяльність» задає ланцюг понять типу: вид діяльності – учасники діяльності – методом і об'єктом дослідження з предметної області які фігурують в процесі діяльності – отриманий науковий результат (як з організаційної, так і з наукової точки зору).

Публікація. Цей клас слугує для опису різного роду публікацій: у періодичних виданнях і тих, які видаються в результаті проведення конференцій, наукових заходів і т. д.). До атрибутів публікації належать: назва, автори, короткий опис (анотація, ключові слова), дата публікації та мова публікації, характеристики журналу у якому розміщена публікація (назва, вид, том, серія, номер, рік видання, відповідальні редактори, періодичність, показники цитованості, ISSN, URL)

Місцезнаходження. Цей клас понять дозволяє описувати географічну та адміністративно-територіальну локалізацію усіх концептів, які задані класами онтологічної моделі (об'єктів дослідження, організацій і т.д.). Атрибутами цього класу є назва місця розташування, географічний тип, адміністративно-територіальна приналежність, країна розташування, повна адреса.

Література. Клас описує літературу (представлену в друкованому або електронному форматах), яка використовується і продукується в процесі наукової діяльності (монографії, книги, підручники, статті, праці конференцій, періодичні видання, звіти, результати експериментів та досліджень, фото та відеоматеріали, тощо). До атрибутів публікації належать: назва, короткий змістовний опис, дата та мова публікації, реквізити публікації (друкарські характеристики), вид публікації.

Документація. Цей клас служить для опису різного роду документації. Можна виділити декілька груп документації: законодавча (яка задає норми організації наукового процесу на рівні країни), стандартизована (ГОСТ, ДСТУ, ISO), внутрішня документація (організаційна документація, яка регламентує роботу на рівні однієї організації). До атрибутів документації відносяться: назва, короткий змістовний опис, дата та мова публікації, реквізити публікації (друкарські характеристики), вид публікації.

Науково-навчальні матеріали. Цей клас містить поняття які визначають наукову літературу, яка використовується в процесі наукової діяльності. До цього класу можна віднести такі поняття як: існуючі монографії, книги, підручники, довідники, навчальні посібники, мануали, репозитарії та класифікатори. До атрибутів класу відносяться: назва, опис, дата публікації та мова.

Класи онтології організації наукової діяльності пов'язані наступними асоціативними відношеннями:

«бути автором» – використовується для встановлення зв'язку між *Персоною*, яка є автором публікації, і самою *Публікацією*;

«входити у» – пов'язує клас *Організація* і *Персона* у разі, коли персона будь-яким чином відноситься до організації;

«бути учасником» – пов'язує *Захід* з *Персоною* або *Організацією*, що бере участь у даній події;

«бути організатором» – встановлює зв'язок між *Подією* і *Персоною* або *Організацією*, що є організатором події;

«наукові праці» – задає зв'язок між *Заходом* і *Публікаціями*, що висвітлюють цей захід;
«бути виданим у» – пов'язує *Публікацію* і *Організацію*, що видає наукові публікації;
«розташовуватися» – описує місце розташування *Організації*;
«описувати» – пов'язує *Публікацію* з будь-яким поняттям *Онтології знань*.

«частина діяльності» – пов'язує *Діяльність* з *Об'єктами*, *Методами* та *Результатами* дослідження.

Структурні відношення «частина-ціле» пов'язують наступні класи онтології організації наукової діяльності:

Відношенням «частина-ціле» описується зв'язок між класом *Література* і класами *Документація*, *Навчальні матеріали* та *Публікація*. Останні є підкласом класу *Література*.

«Частина-ціле» актуальне для класу *Персона* і класів *Дослідники*, *Співробітники* і *Члени організації*.

Клас *Організація* є цілим для *Організацій*, *Наукових спільнот* і *Асоціацій*, *Інститутів*, *Дослідницьких груп* та інших об'єднань.

Відношенням «частина-ціле» зв'язується клас *Захід* з *Конференціями*, *Дослідницькими поїздками*, *Проектами*, *Програмами*.

Зв'язок класу *Документація* з документами типу *ГОСТ*, *ДСТУ*, *ISO* та ін. здійснюється за допомогою відношення «частина-ціле».

Відношення «частина-ціле» описує зв'язок класу *Навчальні матеріали* з *Підручниками*, *Довідниками*, *Навчальними посібниками*, *Мануалами*.

Відношення наслідування. Відношення наслідування використовується для відображення наслідування атрибутів дочірніми класами від батьківських. Для класів ООнд які мають підкласи відношення наслідування передає всі їх атрибути до дочірніх підкласів.

Відношення виду «*клас-дані*» використовується для зв'язку конкретних екземплярів понять з класом. Описане відношення актуально для всіх класів даної онтології.

Інші онтології система онтологій для моніторингу та оцінки діяльності наукових установ описуються аналогічно.

6. Платформа розробки онтологічних рішень ТОДАОС

Практична реалізація онтологічної моделі для моніторингу та оцінки діяльності наукових установ та її наповнення виконувалось використовуючи платформу «Трансдисциплінарні Освітні Діалоги Аплікаційних Онтологічних Систем» (ІТ ТОДАОС) [Рис. 2]. Платформа ТОДАОС надає множину програмно-інформаційних засобів для збереження та обробки знань за рахунок можливості розробки онтологій.

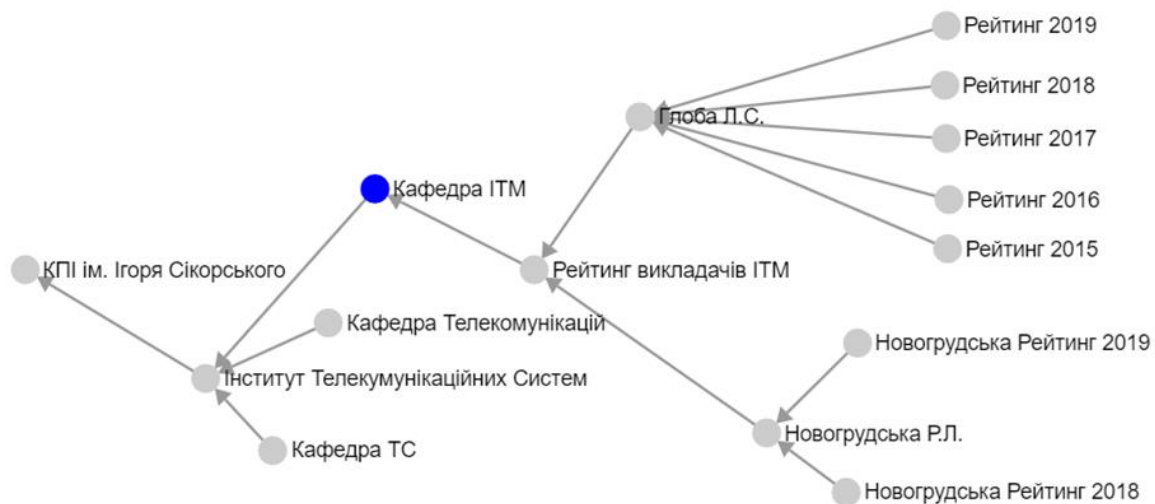


Рис. 2. Фрагмент онтологічної моделі для моніторингу та оцінки діяльності наукових установ розробленої з використанням платформи ТОДАОС

Платформа ТОДАОС призначена для підтримки процесів лінгвістично-семантичного аналізу великих обсягів просторово розподіленої неструктурованої інформації (Big Data), їх

структуризації, встановлення контекстних зв'язків між документами, що обробляються, прогнозування та підтримки процесів раціонального вибору з наступним формуванням інформаційно-аналітичних WEB-орієнтованих рішень [21]. IT-ТОДАОС забезпечує (Рис. 3) [22]:

- мережеву взаємодію з неструктурованою і слабо структурованою інформацією великих обсягів;
- лінгвістично-семантичний аналіз контенту,
- агрегування та рейтингування інформаційних ресурсів,
- Трансдисциплінарну інтеграцію з іншими мережевими інформаційними системами та WEB-орієнтованими додатками,
- Таксономізацію наративів довільних документів та відображення їх структури, включаючи міжконтекстні зв'язки,
- Створення онтологічних інтерактивних документів,
- Виявлення латентної інформації в інформаційних ресурсах, що аналізуються,
- Глибинне та машинне навчання,
- Підтримку форматів і протоколів Semantic Web,
- Опрацювання Big Data.

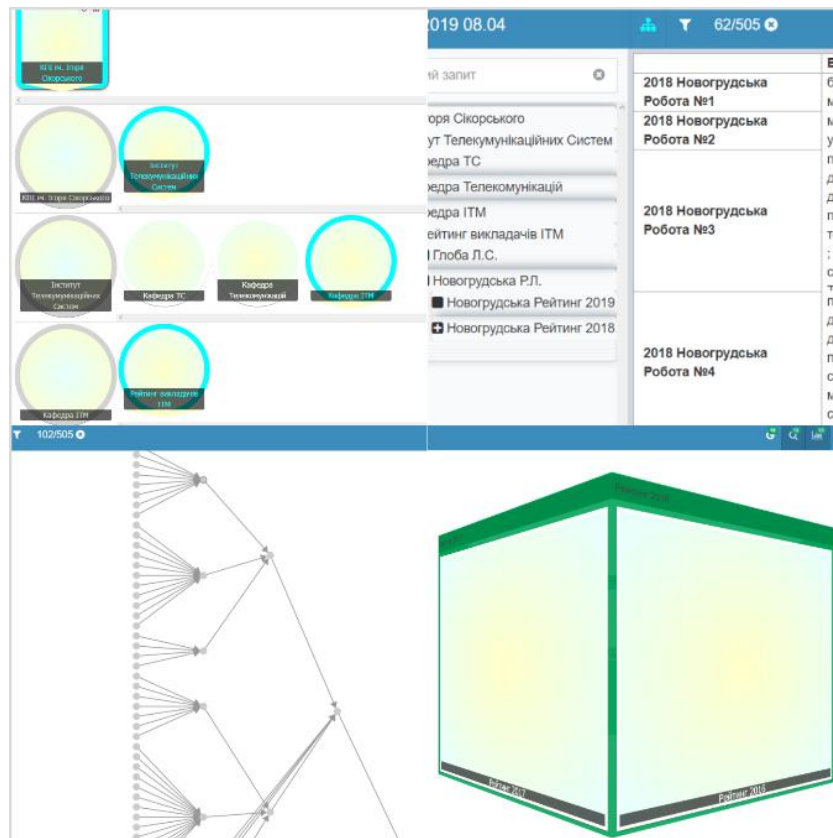


Рис. 3. Інтерфейси платформи ТОДАОС

Одною з основних характерних особливостей програмної платформи ТОДАОС, є наявність у номенклатурі засобів онтологічного інтерфейсу. Онтологічний інтерфейс передбачає можливість інтеграції розробленої користувачем онтології з мережевими інформаційними ресурсами та інтерактивними системами знань, що забезпечує адаптивність під тематичний профіль діяльності кожного суб'єкта-користувача в середовищі IT-ТОДАОС. Онтологічний інтерфейс реалізується процедурою активації множинних бінарних відношень таксономій. Це інтелектуальний засіб взаємодії користувача з інформаційною системою на основі онтології, що дозволяє візуалізувати результати інтеграції та агрегації розподілених інформаційних ресурсів у процесі організації комунікації користувачів у легкодоступній наочній формі [23].

7. Висновки

У статті наведено підхід до оцінки якості функціонування наукових установ на основі онтологічної моделі. Онтологія дозволяє структурувати та систематизувати інформацію накопичену науковими установами для її подальшого використання в процесі оцінки ефективності функціонування установи. Загальну онтологію моніторингу та оцінки діяльності наукових установ представлено системою взаємозв'язаних компонент, кожна з яких дозволяє описати відповідний підпроцес в рамках як діяльності самої установи, так і процесу її оцінки зовнішніми організаціями та міністерствами. Сама ж система дозволить в повній мірі описати усі необхідні елементи, процеси та їх значення для визначення рівня ефективності діяльності установи. Проведено опис елементів усіх компонент системи онтологій моніторингу та оцінки діяльності наукових установ. Практичну розробку запропонованої онтологічної моделі виконано з використанням платформи розробки онтологічних рішень ТОДАОС.

Майбутні дослідження будуть направлені на подальше наповнення розробленої у ТОДАОС онтології інформацією предметної області. З використанням запропонованої онтологічної моделі планується розробити та описати метод оцінки якості діяльності наукових установ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Методика оцінювання ефективності діяльності наукових установ Національної академії наук України: затв. постановою Президії НАН України від 15.03.2017 № 7. 2017. 42 с.
2. Ermine J.L., Boughzala I and Tounkara T. Critical Knowledge Map as a Decision Tool for Knowledge Transfer Actions. *Electronic Journal of Knowledge Management*. 2006. Vol. 4, No.2. P. 129-140.
3. Erduran-Avci, D., Unlu, P., Yagbasan, R. Using concept maps as a method of assessment in work-energy subject. *J. Applied Sci.* 2009. No 9. P. 427-437.
4. Eppler M. A Process-Based Classification of Knowledge Maps and Application Examples. *Knowledge and Process Management*. 2008. Vol. 15, No. 1. P. 59–71.
5. Chung Y.C., Hsu Y.W., Tsai C.H. and Tsai S.C. Relationship between organizational cultures, information technology involvement, degrees of knowledge management implementations and performance of new product developments. *Inform. Technol. J.* 2010. Vol. 9. P. 1504-1516.
6. Болотова Л.С., Смолянинов А.А. Неформальные модели представления знаний в системах искусственного интеллекта: Учебное пособие. М.: Московский институт радиотехники, электроники и автоматики, 1999. 100 с.
7. Макаллистер Дж. Искусственный интеллект и Пролог на микро ЭВМ. М.: Машиностроение, 1990. 240 с.
8. Джарратано Дж., Райли Г., Экспертные системы: принципы разработки и программирование. М: Вильямс, 2007. 1152 с.
9. Шакирова Ю.К., Маденова А.Е., Савченко Н.К., Абилдаева Г.Б., Воробьева Е.А. Системы поддержки принятия решений в образовании. *Дистанционное и виртуальное обучение*. 2016. №2. С. 69-73.
10. Змитрович А.И. Интеллектуальные информационные системы. Мн.: НТООО «ТетраСистемс», 1997. 368 с.
11. Круглов В.В., Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. 256 с.
12. Пупков К.А., Коньков В.Г. Интеллектуальные системы. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 348 с.
13. Helbig H. Knowledge Representation and the Semantics of Natural Language. Berlin: Springer, 2006. 650 p.
14. Gruber T.R. Towards Principles for the Design of Ontologies Used for Knowledge Sharing. *Int. J. Hum.-Comp. Stud.* 1995. Vol. 43, No. 5–6. P. 907 – 928.
15. Люгер Дж. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем: Пер. с англ. / Джордж Ф. Люгер. М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. 864 с.
16. Guarino N. Formal Ontology in Information Systems. *Proceedings of FOIS'98*. 1998. P. 3-15
17. Guarino N., Giarretta P. Ontologies and Knowledge Bases Towards a Terminological Clarification. *Towards Very Large Knowledge Bases: Knowledge Building & Knowledge Sharing*. 1995. P. 25-32.

18. Guarino N. The Ontological Level: Revisiting 30 Years of Knowledge Representation. *Conceptual Modeling: Foundations and Applications*. 2009. P. 52 – 67.
19. Боровикова О.И., Загорулько Ю.А., Сидорова Е.А., Подход к автоматизации сбора онтологической информации для интернет-портала знаний. *Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии: труды международной конференции “Диалог 2005”* (Звенигород, 1-5 июня 2005 г.). Москва.: Наука, 2005. С.65-70.
20. Globa L. S., Novogradskaya R. L., Koval A. V. Ontology Model of Telecom Operator Big Data. *Proceedings of IEEE International Black Sea Conference on Communications and Networking*. 2018. IEEE Digital Library, 8433710. P. 1-5. doi: 10.1109/BlackSeaCom.2018.8433710.
21. Shapovalov, Y. B., Shapovalov, V. B., Stryzhak, O. Y. Ontology-Based Systemizing of the Science Information Devoted to Waste Utilizing by Methanogenesis. *International Journal of Computer, Electrical, Automation, Control and Information Engineering*. 2018. Vol. 12, No. 12. P. 1009–1014.
22. Величко В. Ю., Попова М.А., Приходнюк В. В., Стрижак О. Є. ТОДАОС – ІТ-платформа формування трансдисциплінарних інформаційних середовищ. *Системи озброєння і військова техніка*. 2017. № 1. С. 10-19.
23. Попова М.А., Стрижак О.Є. Онтологічний інтерфейс як засіб представлення інформаційних ресурсів в ГІС-середовищі. *Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия: География*. 2013. № 1, Том 26 (65). С. 127-135.

REFERENCES

1. National Academy of Sciences of Ukraine. (15.03.2017). No 7, *Methodology for evaluating the effectiveness of the activities of scientific institutions*. [Online]. Available: <http://www.nas.gov.ua/legaltexts/DocPublic/P-180711-241-1.pdf>.
2. J.L. Ermine, I. Boughzala, and T. Tounkara, "Critical Knowledge Map as a Decision Tool for Knowledge Transfer Actions", *Electronic Journal of Knowledge Management*, vol. 4, no. 2, pp. 129-140, 2006.
3. D. Erduran-Avci, P. Unlu, and R. Yagbasan, "Using concept maps as a method of assessment in work-energy subject", *J. Applied Sci.* No. 9, pp. 427-437, 2009.
4. M. Eppler, "A Process-Based Classification of Knowledge Maps and Application Examples", *Knowledge and Process Management*, vol. 15, no. 1, pp 59–71, 2008.
5. Y.C. Chung, Y.W. Hsu, C.H. Tsai and S.C. Tsai, "Relationship between organizational cultures, information technology involvement, degrees of knowledge management implementations and performance of new product developments", *Inform. Technol. J.*, Vol. 9, pp. 1504-1516, 2010.
6. L.S. Bolotova, and A.A. Smolyaninov, *Informal models of knowledge representation in systems of artificial intelligence*. Moscow, Russia: Institute of Radio Engineering, Electronics and Automation (TU), 1999.
7. J. McAllister, *Artificial Intelligence and Prologue on Microcomputers*. Moscow, Russia: Mechanical Engineering, 1990.
8. J. Jarratano, and G. Riley, *Expert Systems: Principles of Development and Programming*. Moscow, Russia: Williams, 2007.
9. Yu. Shakirova, A.E. Madenova, NK Savchenko, G.B. Abildayeva, and E.A. Vorob'eva, "Support Systems in Education", *Distance and virtual training*, vol. 2, pp. 69-73, 2016
10. A.I. Zmitrovich, *Intelligent information systems*. Mn.: TetraSystems Scientific Society, 1997.
11. V.V. Kruglov, and M.I. Dly, *Intelligent information systems: computer support for fuzzy logic and fuzzy inference systems*. Moscow, Russia: Publisher of Physical and Mathematical Literature, 2002.
12. K.A. Pupkov, and V.G. Skates, *Intellectual systems*. Moscow, Russia: Publishing house of MGTU them. NE Bauman, 2003.
13. H. Helbig, *Knowledge Representation and the Semantics of Natural Language*. Berlin, Germany: Springer, 2006.
14. T.R. Gruber, "Towards Principles for the Design of Ontologies Used for Knowledge Sharing", *Int. J. Hum.-Comp. Stud.*, vol. 43, no. 5–6, pp. 907 – 928, 1995.
15. George F. Luger, *Artificial Intelligence: Strategies and Methods for Solving Complex Problems*. Moscow, Russia: Williams Publishing House, 2003.
16. N. Guarino, "Formal Ontology in Information Systems", *Proceedings of FOIS'98*, pp. 3-15,

- 1998.
17. N. Guarino, and P. Giaretta, "Ontologies and Knowledge Bases Towards a Terminological Clarification", *Towards Very Large Knowledge Bases: Knowledge Building & Knowledge Sharing*, pp. 25-32, 1995.
 18. N. Guarino, "The Ontological Level: Revisiting 30 Years of Knowledge Representation" *Conceptual Modeling: Foundations and Applications*, pp. 52 – 67, 2009
 19. O.I. Borovikova, Yu.A. Zagorulko, and E.A. Sidorova, "An approach to the automation of the collection of ontological information for the Internet portal of knowledge", in *Proc. Dialog'2005 Int. Conf. Comp. Ling. Intel. Techn.*, 2005, pp. 65–70.
 20. L. S. Globa, R.L. Novogradskaya, and A.V. Koval, "Ontology Model of Telecom Operator Big Data. Proceedings of IEEE", in *International Black Sea Conference on Communications and Networking (BlackSeaCom), 2018*, pp. 1-5. doi: 10.1109/BlackSeaCom.2018.8433710.
 21. Y.B. Shapovalov, V.B. Shapovalov, and O.Y. Strizhak, "Ontology-Based Systemization of Science Information Devoted to Waste Utilizing by Methanogenesis", *International Journal of Computer, Electrical, Automation, Control and Information Engineering*, vol. 12, no. 12, pp. 1009-1014, 2018.
 22. V.Yu. Velychko, M.A. Popova, V.V. Prykhodniuk, and O.E. Strizhak, "TEDAOS - IT platform for the formation of transdisciplinary information environments", *Weap. Sys. Milit. Equip.*, no. 1, pp. 10-19, 2017.
 23. M.A. Popova, and O.E. Strizhak, "Ontological interface as a means of presenting information resources in a GIS environment", *Scient. Not. Taurida Nat. Univ.*, vol. 26(65), no. 1, pp. 127-135, 2013.

Глоба Лариса Сергіївна – д.т.н., професор; завідувач кафедри інформаційно-телекомунікаційних систем; Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", проспект Перемоги 37, м.Київ-56, Україна, 03056; e-mail: lgloba@its.kpi.ua; ORCID 0000-0003-3231-3012.

Globa Larisa S. – Doctor of Technical Sciences, Professor; Head of the Department of Information and Telecommunication Systems; National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37 Peremohy Ave., Kyiv-56, Ukraine, 03056; e-mail: lgloba@its.kpi.ua; ORCID 0000-0003-3231-3012.

Глоба Лариса Сергеевна – д.т.н., професор; заведуючий кафедрою інформаційно-телекомунікаційних систем; Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", проспект Перемоги 37, Київ-56, Україна, 03056; e-mail: lgloba@its.kpi.ua; ORCID 0000-0003-3231-3012.

Новоградська Ріна Леонідівна – к.т.н., доц., старший науковий співробітник, Національний центр «Мала академія наук України», вул. Дегтярівська 38/44, м.Київ, Україна, 04119; e-mail: rinan@ukr.net; ORCID: 0000-0002-0258-1713.

Novogradskaya Rina L. – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher, National Center "Small Academy of Sciences of Ukraine", str. Degtyarevskaya 38/44, Kyiv, Ukraine, 04119; e-mail: rinan@ukr.net; ORCID: 0000-0002-0258-1713

Новоградская Рина Леонидовна – к.т.н., доц., старший научный сотрудник, Национальный центр «Малая академия наук Украины», ул. Дегтяревская 38/44, Киев, Украина, 04119; e-mail: rinan@ukr.net; ORCID: 0000-0002-0258-1713.

Задоеенко Богдан Олександрович – студент, Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", проспект Перемоги 37, м.Київ-56, Україна, 03056; e-mail: zadoenko.bogdan@gmail.com.

Zadoienko Bohdan O. – student, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37 Peremohy Ave., Kyiv-56, Ukraine, 03056; e-mail: zadoenko.bogdan@gmail.com.

Задоеенко Богдан Александрович – студент, Национальный технический университет Украины "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", проспект Перемоги 37, Київ-56, Україна, 03056; ; e-mail: zadoenko.bogdan@gmail.com.

УДК 519.71:534.1

Дослідження хаотичної динаміки вертикальної стійки тіла людини на моделі переверненого маятника

П.С. Гриневич, Н.М. Кізілова

*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: grinevich.fb@gmail.com*

Досліджуються функції управління вертикальною стійкою людини з урахуванням нелінійної динаміки коливань центру маси (ЦМ) (X_C, Y_C) тіла. Часові ряди $X_C(t), Y_C(t)$ вимірювалися за допомогою стабілографічної платформи у 28 молодих здорових волонтерів; три види стійки на двох ногах з відкритими та заплеченими очима і балансування на одній нозі були досліджені. Для кожного випадку на основі математичної моделі переверненого маятника обчислені функції керування його вертикальним положенням $u(t)$ у вигляді $u(t) = k_1(r(t) - r_0) + k_2(\dot{r}(t) - \dot{r}_0)$, де $r(t)$ – радіус-вектор ЦМ, r_0 – його середнє за час випробувань значення, $(\cdot)'$ означає похідну за часом. За допомогою статистичного аналізу показана відсутність кореляцій між функціями керування як для різних випробуваних, так і для різних положень тіла одного випробуваного. Грунтуючись на обчисленнях експоненти Ляпунова, проведена класифікація випробуваних на групи з стійким, слабко та сильно нестійким керуванням вертикальним положенням тіла. Обговорюється моделювання таких динамічних систем в рамках моделей недетермінованого хаосу з нелінійним керуванням.

Ключові слова: математичне моделювання, перевернений маятник, функція керування, експонента Ляпунова, хаотична динаміка, опорно-рухова система, медична діагностика.

Исследуются функции управления вертикальной стойкой человека с учетом нелинейной динамики колебаний центра массы (ЦМ) (X_C, Y_C) тела. Временные ряды $X_C(t), Y_C(t)$ измерялись с помощью стабилографической платформы у 28 молодых здоровых волонтеров; три вида стойки на двух ногах с открытыми и закрытыми глазами и балансирование на одной ноге были исследованы. Для каждого случая на основе математической модели перевернутого маятника вычисленные функции управления его вертикальным положением $u(t)$ в виде $u(t) = k_1(r(t) - r_0) + k_2(\dot{r}(t) - \dot{r}_0)$, где $r(t)$ - радиус-вектор ЦМ, r_0 - его среднее за время испытаний значение, $(\cdot)'$ означает производную по времени. С помощью статистического анализа показано отсутствие корреляций между функциями управления как для разных испытуемых, так и для различных положений тела одного волонтера. Основываясь на вычислениях экспоненты Ляпунова, проведена классификация испытуемых на группы с устойчивым, слабо и сильно неустойчивым управлением вертикальным положением тела. Обсуждается моделирование таких динамических систем в рамках моделей недетерминированного хаоса с нелинейным управлением.

Ключевые слова: математическое моделирование, перевернутый маятник, функция управления, экспонента Ляпунова, хаотичная динамика, опорно-двигательная система, медицинская диагностика.

Different postures of human body are studied in medicine and biology for quantitative estimation and clinical diagnostics of impairments and diseases of the musculoskeletal, nervous and vestibular systems. Human body is composed of ~200 bones and ~600 muscles, and its upright position is unstable due to high complexity of the system and its control mechanisms. Among different techniques of the body sway recording the stabilography is one of the simplest and cheapest. The stabilography uses a force platform that can measure the reaction forces in the areas of contact between platform and human feet. The platform is portable and can be connected to any laptop via a USB port. The functions controlling a person's upright position have been studied in the paper accounting for the nonlinear dynamics of oscillations of projection (X_C, Y_C) of the center of mass (CM) of a human body on a horizontal plane. The time series $\{X_C(t), Y_C(t)\}$ have been measured on 28 healthy volunteers (age 21-42, height 156-182 cm, body mass 48-84.8 kg). The volunteers have been asked to keep a posture on two feet, as well as similar postures with body mass shifted onto the left and then onto the right foot. Each posture has been repeated for 30 second with open and closed eyes separately. After a short break a test of balancing on the left and then on the right foot has been performed. Basing on the mathematical model of the inverted pendulum, the control functions $u(t)$ in the form $u(t) = k_1(r(t) - r_0) + k_2(\dot{r}(t) - \dot{r}_0)$ where $r(t)$ is the radius-vector of the CM, r_0 is its averaged value over time, $(\cdot)'$ is the time derivative, have been calculated for each case. The absence of correlation between the control functions for different subjects and for different body postures of the same volunteer has been shown by using statistical analysis. The individuals have been classified into the groups with stable, weak and highly unstable control of the upright position of the body by calculating the Lyapunov exponent. The modeling of such systems in the framework of nondeterministic chaos models with nonlinear control has been discussed.

Keywords: mathematical modeling, inverted pendulum, control function, Lyapunov exponent, chaotic dynamics, musculoskeletal system, medical diagnostics..

1 Вступ

Дослідження динамічних параметрів вертикальної стійки людини є важливою складовою компонентою медичної діагностики захворювань як опорно-рухової (ОРС), так і нервової, вестибулярної та ряду інших систем людини [1]. За допомогою спектрального та вейвліт-аналізу була показана наявність як квазі-регулярних, так і хаотичних режимів коливань центру мас (ЦМ) проекції тіла людини на горизонтальну поверхню стабілографічної платформи [2], в залежності

від її віку та наявності захворювань. Останнім часом посилилася зацікавленість до вивчення особливостей хаотичної динаміки, розробки відповідних математичних моделей та індексів, що могли б використатися в клінічній діагностиці. Одним з таких важливих параметрів є максимальна експонента Ляпунова (largest Lyapunov exponent, LLE).

Експонента Ляпунова характеризує швидкість сепарації $\delta \vec{r}(t) = |\vec{r}_0(t) - \vec{r}(t)|$ в фазовому просторі траєкторій динамічної системи $\vec{r}_0(t)$ і $\vec{r}(t)$, які в початковий момент часу $t=0$ знаходилися нескінченно близько одна від одної $\delta \vec{r}_0 = |\vec{r}_0(0) - \vec{r}(0)| < \varepsilon$. Якщо $|\vec{r}_0(t) - \vec{r}(t)| = \delta \vec{r}_0 \cdot \exp(\lambda t)$, то $\lambda_L = \text{Re}(\lambda)$ називається експонентою Ляпунова. Якщо система нестійка, $\text{Re}(\lambda) > 0$. У випадку, коли траєкторії описуються системою n лінійних звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку з постійними коефіцієнтами

$$\vec{r}'(t) = A \cdot \vec{r}(t) + \vec{f}(t) + \vec{u}(t), \quad (1)$$

де A - матриця коефіцієнтів системи, $\vec{f}(t)$ - зовнішні сили, $\vec{u}(t)$ - функція керування, то дійсні частини власних чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ є експонентами Ляпунова. Якщо $\text{Re}\{\lambda_j\}_{j=1}^n \equiv \lambda_{Lj} > 0$, всі траєкторії сходяться в одній точці. Значення $(\lambda_{Lj})^{-1}$ називаються часом Ляпунова. Це є час, за який відстань між сусідніми траєкторіями системи зростає в e разів. В консервативній системі $\sum_j \lambda_j = 0$, а в дисипативній системі $\sum_j \lambda_j < 0$.

Особливий інтерес представляє максимальна експонента Ляпунова LLE

$$\lambda_{\max} = \limlim_{t \rightarrow \infty, \delta \vec{r}_0 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\delta \vec{r}(t)|}{|\delta \vec{r}_0|} \right) \right). \quad (2)$$

Максимальний час Ляпунова LLE^{-1} - це інтервал часу, протягом якого можливо передбачати еволюцію системи, тому що зміни її начального стану при $t < (\lambda_{\max})^{-1}$ не ведуть до суттєвої зміни її поведінки, але при $t \gg (\lambda_{\max})^{-1}$ «пам'ять» о параметрах початкового стану втрачається. Максимальний час Ляпунова задає міру для передбачуваності системи, але часто становлять інтерес оцінки локальної передбачуваності навколо деякої точки в фазовому просторі - так званої короткочасної (short-time) експоненти Ляпунова (STEL). Якщо динаміка системи визначається нелінійною системою ЗДУ, для обчислення значень λ_j використовують інші методи і чисельні алгоритми (лінеаризації та послідовних наближень). А.М. Ляпунов показав, що якщо система першого наближення регулярна, а її $LLE < 0$, то рішення вихідної системи асимптотично стійко. Пізніше О. Перон продемонстрував, що вимога регулярності першого наближення є істотною, і є приклади, коли $LLE < 0$ вздовж нульового рішення першого наближення, але це рішення є нестійким за Ляпуновим. Крім того, значення $LLE > 0$ можуть не означати перехід системи до хаосу.

Наявність хаотичної динаміки у вигляді випадкових змін знаків STEL електроенцефалограм, електроміограм, мовних сигналів та стабілограм була показана в ряді публікацій [1-6]. Було виявлено, що функції керування осциляціями во фронтальній (вліво-вправо) та сагітальній (вперед-назад) площинах мають різні властивості. Осциляції ЦМ можна представити у вигляді суми квазіперіодичної та стохастичної компонент, причому друга компонента не має само подібності і тому не є детермінованим хаосом [5]. Показники LLE і STEL можуть вказувати на вікові порушення ОРС [6], але у здорових випробуваних потрібно вживати синтетичні коефіцієнти LLE і STEL для ускладнених сигналів, наприклад, у вигляді амплітуд осциляцій між різними сегментами тіла або з додаванням додаткового руху верхніми кінцівками, несподіваним рухом стабілографічної платформи та інших [4]. В даній роботі вивчається хаотична динаміка осциляцій тіла здорових волонтерів з виключенням зорового контролю для різних станів тіла.

2 Матеріали та методи

Координати $(X_C(t), Y_C(t))$ проекції ЦМ тіла волонтерів на горизонтальну поверхню вимірювалися за допомогою стабілографічної платформи лабораторії біомеханіки Інституту патології хребта і суглобів ім. М.І. Ситенко [1,2] (12 юнаків та 16 дівчат віком 31 ± 11 і 33.5 ± 16.5 , масою 71.4 ± 13.4 кг і 64.4 ± 16.4 кг та зростом 182 ± 8 кг і 169 ± 13 см відповідно).

Процедура вимірювання складалася з (i) утримання спокійної двохопornoї стійки в положенні «смирно» (Рис.1а), потім «вільно» з переносом маси тіла на (ii) праву та (iii) ліву ноги, балансування на (iv) правій та (v) лівій ногах, по 30 с кожний тест. Після три перші тести повторювалися з заплющеними очима (vi), (vii), (viii). Набори часових рядів $(X_C(t), Y_C(t))$ для восьми тестів зберігалися в базі даних. Після згладжування кривих методом зваженого середнього, який дозволяє зберігати значення локальних максимумів і мінімумів функції, шляхом виключення з залежностей часу, будувалися траєкторії $Y_C(X_C)$ (Рис.1б).

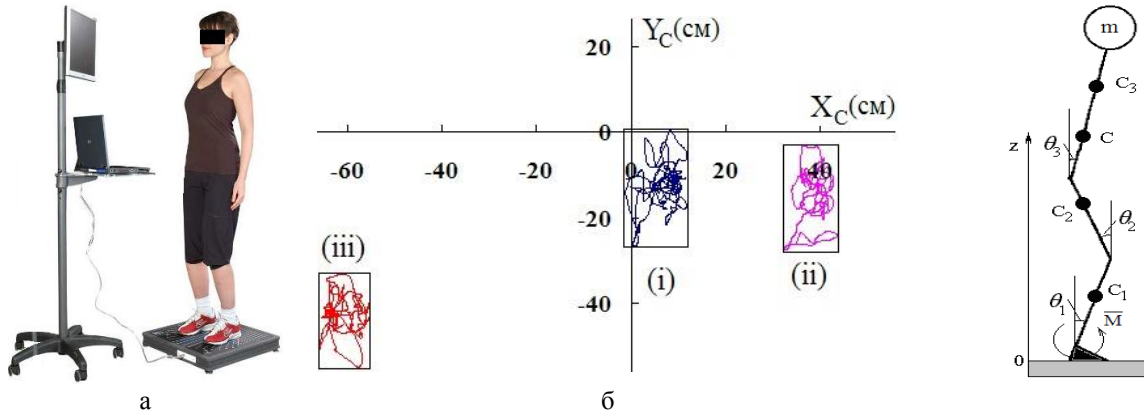


Рис.1 Платформа стабілографа разом з комп'ютерною системою (а), вигляд траєкторій $(X_C(t), Y_C(t))$ для тестів (i), (ii) та (iii) (б) і три ланкова модель тіла людини (в).

Прямокутники на Рис.1б показують амплітуди коливань ЦМ у фронтальній (вздовж OY) та сагітальній (вздовж OX) площинах. Асиметрія розташування ЦМ та хаотична динаміка властиві кожному з тестів. При балансуванні з заплющеними очима амплітуда коливань зростає в середньому в 2 рази, тоді як при балансі на одній нозі спостерігається парадоксальна стабілізація коливань за рахунок більш чіткого керування [1,2]. Далі проводилося чисельне диференціювання кривих $X_C(t), Y_C(t)$ і будувалися фазові криві $f'(f), f''(f), f'''(f)$, де $f = \{X_C, Y_C\}$. Далі проводились обчислення експоненти Ляпунова з використанням алгоритму Вольфа [7]:

- 1) Фіксуємо деякий малий зсув τ кривих $X_C(t), Y_C(t)$ за часом;
- 2) Визначаємо початкове положення $X_C(0), Y_C(0)$ кривих;
- 3) Знаходимо таке значення t_1 , щоб $|X(t_1) - X(0)| < \varepsilon$, де ε - задане мале значення, яке перевищує частоту дискретизації кривих $X_C(t), Y_C(t)$;
- 4) Якщо такого значення t_1 не існує, обираємо t_1 таке, щоб $|X(t_1) - X(0)| = \min_k |X(t_k) - X(0)|$;
- 5) Обчислюємо перше наближення експоненти Ляпунова $\lambda_1(0) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{|X(t_1 + \tau) - X(\tau)|}{|X(t_1) - X(0)|}$;
- 6) Знаходимо t_2 так само як в 3)-4);
- 7) Обчислюємо друге наближення експоненти Ляпунова $\lambda_1(\tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{|X(t_2 + \tau) - X(2\tau)|}{|X(t_2) - X(\tau)|}$;
- 8) Повторюємо 6)-7) і обчислюємо наближення $\lambda_1(2\tau), \lambda_1(3\tau), \dots$ до досягнення потрібного часу t , після чого повертаємося до 1), трохи збільшуємо значення τ та знаходимо наближення $\lambda_2(0), \lambda_2(\tau), \lambda_2(2\tau), \lambda_2(3\tau), \dots$;
- 9) Після кількох ітерацій алгоритму 1)-8) остаточно обчислюємо експоненту Ляпунова як

$$\lambda = \left(\frac{m+2}{2}\right)^{-1} \sum_{k=m/2}^m \left(\frac{n_k+2}{2}\right)^{-1} \sum_{j=n_k/2}^{n_k} \lambda_k(j\tau). \quad (3)$$

3 Математична модель

Найбільш поширеною моделлю ОРС людини є багатоланковий перевернутий маятник [1,2]. В одноланковій моделі управління вертикальним положенням тіла здійснюється за допомогою моменту сил, які прикладені в точці «підвісу» маятника (тобто в гомілковостопному суглобі) за

рахунок напруження-розслаблення всіх м'язів ніг. Найпростіше рівняння коливань такого маятника без урахування тертя в точці підвісу та ін. чинників) має вигляд:

$$\left(m + \frac{J_x}{L^2}\right)\ddot{x}(t) - mgx(t) = u_x(t), \quad \left(m + \frac{J_y}{L^2}\right)\ddot{y}(t) - mgy(t) = u_y(t), \quad (4)$$

де m – маса тіла, $J_{x,y}$ – моменти інерції відносно осей OX, OY , $g=9.81$ м/с² – прискорення вільного падіння $\ddot{u}(t)=(u_x(t), u_y(t))$ – управління коливаннями у фронтальній та сагітальній площинах. Система (4) може бути зведена до системи вигляду (1) з $n=4$. Після підстановки в (4) вимірних кривих $X_C(t), Y_C(t)$, функції керування $u_x(t), u_y(t)$ можуть бути безпосередньо обчислені.

Для р-ланкового маятника положення j -го ланцюга визначається кутом $\theta_j(t)$ його нахилу до вертикалі, а система (4) набуває вигляд [8] (приклад для $p=3$ наведений на Рис.1в):

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2} \bar{\theta} + C(\dot{\bar{\theta}})^2 + N \cdot \bar{\theta} = 0, \quad (5)$$

де $\bar{\theta}^T = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$, T - транспозиція, M , C і N – матриці мас-інерційних, Коріолісових і гравітаційних коефіцієнтів. Для звиклої спокійної стойки кути відхилення та їх похідні за часом малі, і (5) зводиться до лінійної системи, або до системи вигляду (1) з $n=4p$. Методи розв'язання нелінійних систем (5) для ОРС людини широко обговорюються в літературі [1,2,8].

4 Результати та обговорення

Типовий приклад функцій керування $(u_x(t), u_y(t))$, обчислений з (4) для двохопної стойки одного з досліджуваних, наведений при наявності (Рис.2а) та відсутності (Рис.2б) додаткового зорового контролю за підтриманням пози. Самокореляції для кожної з залежностей, а також кореляції між $u_x(t)$ і $u_y(t)$ відсутні, що вказує на незв'язаний характер обробки сигналів, які виходять з кожного з півкруглих каналів органу рівноваги, нервовою системою. Можливі взаємозв'язки такими сигналами поки що недостатньо вивчені [8]. Найпростіший підхід, який розглядає окремо керування за кутом відхилення тіла від вертикалі та за швидкістю відхилення у вигляді $u_x(t) = k_{x1}(X(t) - X_0) + k_{x2}(X'(t) - X'_0)$, $u_y(t) = k_{y1}(Y(t) - Y_0) + k_{y2}(Y'(t) - Y'_0)$, показує, що не існує постійних коефіцієнтів k_{x1} , k_{x2} , k_{y1} , k_{y2} . Амплітуди керування вищі, а спектр більш складніший під час заплещених очей, що відповідає майже подвійному зростанню амплітуди самих коливань, що було виявлено в [1,2].

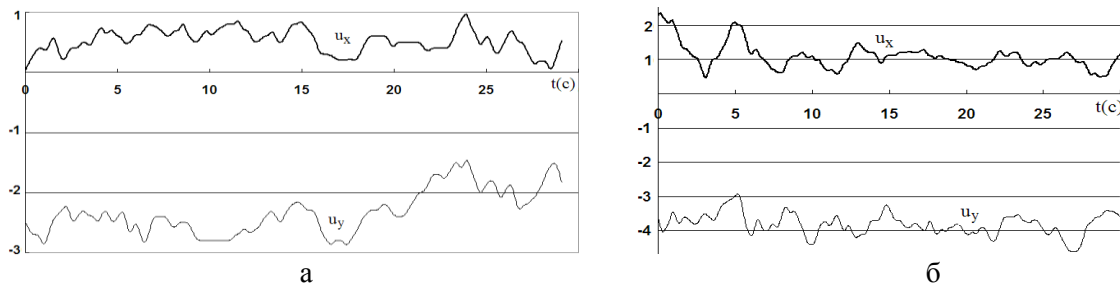


Рис.2 Керування $u_x(t), u_y(t)$ для 30 с двохопної стойки з розплющеними (а) та заплещеними (б) очима для одного з випробуваних.

Середні значення $\langle LLE \rangle$ для групи досліджених випробуваних для кожного з виконаних тестів наведені на Рис.3а. Загальні значення для здорових випробуваних ($LLE < 0.2$) значно менші ніж аналогічні коефіцієнти, обчислені для груп літніх випробуваних та пацієнтів з патологіями ОРС ($0.4 < LLE < 0.6$) [4-6]. При переході від двохопної (і) до переносу маси тіла на одну ногу (ii), (iii), невизначеність коливань в середньому підвищується, хоча для окремих випробуваних спостерігалася і протилежна динаміка. При переході до тестів із заплещеними очима хаотичність коливань різко зростала (iv), але з часом при переході до (v) і (vi) поступово зменшувалась, можливо, за рахунок звикання системи контролю до тестів такого вигляду. Балансування на одній нозі характеризувалося меншими значеннями $\langle LLE \rangle$, можливо, за рахунок додаткового напруження системи керування, що відповідає попереднім даним [1,2]. Індивідуальний розкид значень LLE також дуже значний, за виключенням балансу на одній нозі (Рис.3б). Для додаткової перевірки даних Рис.3а,б треба провести тести і-viii в іншому порядку,

для виключення адаптації системи контролю (нервової, візуальної, слухової, тактильної), що буде зроблено в подальших експериментальних дослідженнях.

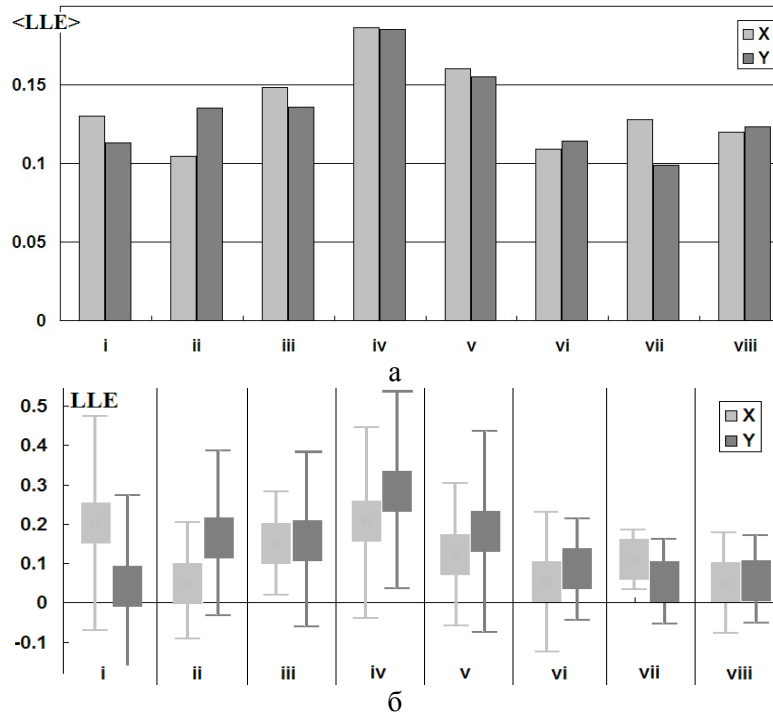


Рис.3 Осереднені за групою значення $\langle LLE \rangle$ для координат $X(t)$, $Y(t)$ (а) та значення з дисперсією (б) для тестів i-viii.

5 Висновки

Таким чином, підтвердилися висновки попередніх досліджень о наявності позитивних значень LLE стабілограм як на всьому часі вимірювань, так і короточасних (STLE) навіть для комфортних двоопорних положень тіла (i)-(iii). Середні за групою молодих здорових випробуваних значення $LLE < 0.2$ значно нижче, чем значення, які були раніше обчислені для літніх випробуваних та пацієнтів з порушеннями OPC та нервової системи.

Функції керування вертикальним положенням тіла були обчислені для кожного вимірювання у вигляді лінійної комбінації контролю за відхиленням ЦМ та швидкістю відхилення згідно [8]. Показана відсутність кореляцій між функціями керування як для різних випробуваних, так і для різних положень тіла одного випробуваного, що вказує на складний стохастичний характер процесу керування. На основі середніх значень LLE, STLE та індивідуальних відхилень можна провести класифікацію функцій керування випробуваних на групи з стійким ($LLE < 0.1$), слабо ($LLE < 0.15$) та сильно ($LLE > 0.15$) нестійким керуванням вертикальним положенням тіла. Таким чином, результати дослідження вказують, що значення LLE, STLE можуть використовуватися як прогностичні індекси системи контролю OPC індивіда навіть у молодих потенційно здорових досліджених. Крім того, необхідні більш детальні дослідження OPC як динамічної системи в рамках моделей недетермінованого хаосу з нелінійним керуванням.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kizilova N., Karpinsky M., Griškevičius J., Daunoravičienė K. Posturographic study of the human body vibrations for clinical diagnostics of the spine and joint pathology. *Mechanika*. 2009. N6(80). P.37-41.
2. Kizilova N., Karpinsky M., Karpinska E. Quasi-regular and chaotic dynamics of postural sway in human. *Applied Non-Linear Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Vol. 93. 2014. P.103-114.
3. Kumar A., Mullick S.K. Nonlinear dynamical analysis of speech. *JASA*. 1996. 100. P. 615-629.
4. Liu K., Wang H., Xiao J., Taha Z. Analysis of human standing balance by largest Lyapunov exponent. *Computational Intelligence and Neuroscience*. 2015. Vol. 2015. 158478.

5. Tokita T., Ito Y., Mizuta K. Analysis of standing posture regulation from the viewpoint of complex systems. *Equilibrium Research*. 2007. Vol. 66 (1). P. 17-25.
6. Khayat O., Nowshiravan-Rahatabad F. Complex feature analysis of center of pressure signal for age-related subject classification. *Annals of Military & Health Sciences Research*. 2014. Vol. 12(1). P. 2-7.
7. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*. 1985. Vol. 16. P. 285–317.
8. Latash M.L., Zatsiorsky V.M. *Classics in Movement Sciences*. Human Kinetics. 2001. 452p.

REFERENCES

1. Kizilova, N., Karpinsky, M., Griškevičius, J., Daunoravičienė, K. “Posturographic study of the human body vibrations for clinical diagnostics of the spine and joint pathology.” *Mechanika*. 2009. N6(80). P.37-41.
2. Kizilova, N., Karpinsky, M., Karpinska, E. “Quasi-regular and chaotic dynamics of postural sway in human.” *Applied Non-Linear Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Vol. 93. 2014. P.103-114.
3. Kumar, A., Mullick, S.K. “Nonlinear dynamical analysis of speech.” *JASA*. 1996. 100. P. 615-629.
4. Liu, K., Wang, H., Xiao, J., Taha, Z. “Analysis of human standing balance by largest Lyapunov exponent.” *Computational Intelligence and Neuroscience*. 2015. Vol. 2015. 158478.
5. Tokita, T., Ito, Y., Mizuta, K. “Analysis of standing posture regulation from the viewpoint of complex systems.” *Equilibrium Research*. 2007. Vol. 66 (1). P. 17-25.
6. Khayat, O., Nowshiravan-Rahatabad, F. “Complex feature analysis of center of pressure signal for age-related subject classification.” *Annals of Military & Health Sciences Research*. 2014. Vol. 12(1). P. 2-7.
7. Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., Vastano, J.A. “Determining Lyapunov exponents from a time series.” *Physica D*. 1985. Vol. 16. P. 285–317.
8. Latash, M.L., Zatsiorsky, V.M. *Classics in Movement Sciences*. Human Kinetics. 2001. 452p.

Кізілова Наталія Миколаївна – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Kizilova Natalya M. - DSc, professor of the Department of Applied Mathematics, V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Кизи́лова Наталья Николаевна - доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Грине́вич Павло Сергі́йович – студент факультету математики і інформатики, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків 22, Україна, 61022; e-mail: grinevich.fb@gmail.com; ORCID: 0000-0002-8671-4164.

Grynievich Pavlo Sergijovych – student, Faculty of Mathematica and Informatics, V.N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; ; e-mail: grinevich.fb@gmail.com; ORCID: 0000-0002-8671-4164.

Грине́вич Павел Серге́евич – студент факультета математики и информатики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков – 22, Украина, 61022; e-mail: grinevich.fb@gmail.com; ORCID: 0000-0002-8671-4164.

УДК 517.946.9

The mathematical model of the thermal process in Spoke-Type Permanent Magnet Synchronous Machines

¹ Olga Demyanchenko, ² Elena Kobil'skaya, ² Viktor Lyashenko, ² Tetiana Nabok

¹ Mariupol, Azov maritime institute of National university "Odessa maritime academy",
13 Stroiteley str., 87517 Mariupol, Ukraine

² Kremenchuk Mykhailo Ostrohradsky National University,
20 Pershotravneva str., 39600 Kremenchuk, Ukraine
kobil'skaya1983@gmail.com

This paper presents the mathematical model for the prediction of temperature field distribution in spoke-type permanent magnet synchronous machines. The mathematical model which takes into account both radial and axial heat transfer streams is presented as a boundary problem in a multilayer non-canonical region with conjugation conditions at the boundaries of the layers, with different thermal physical properties. The entire study area is divided into five simple subdomains: a shaft, an inner fan-shaped magnet, an outer fan-shaped magnet, a slot, and a slot opening. Moreover, on the border of a slot and the inner and outer fan-shaped magnets in a slot opening, a perfect thermal contact is maintained. The problem is solved by the finite element method. The model allows controlling the temperature field of the machine in the real-time and calculating the temperature of its individual parts which is necessary for its proper maintenance.

Key words: electric machine, mathematical model, temperature field, finite element method.

У роботі представлена математична модель розподілу температурного поля в синхронній машині з постійним, у формі спиць, магнітом. Математична модель враховує як радіальний так і осьовий потоки передачі тепла і представляє собою крайову задачу в багатошаровій неканонічній області з умовами спряження на границях шарів, з різними теплофізичними властивостями. Вся область дослідження розділена на п'ять типів простих підобластей, а саме вал, внутрішній віялоподібний магніт, зовнішній віялоподібний магніт, пазовий отвір і паз. Причому, на границі внутрішнього і зовнішнього віялоподібних магнітів пазового отвору і пазу має місце ідеальний тепловий контакт. В даній машині 4 пари полюсів і 9 слотів. Джерело тепла рівномірно розподілено в обмотках статора. У центрі слота розташовується обмотка, площа якої дорівнює сумі площ всіх мідних проводів. Задача розв'язується методом кінцевих елементів. У порівнянні з існуючими математичними моделями теплових процесів в синхронній машині з постійним, у формі спиць, магнітом, оригінальність цього дослідження полягає в побудові комплексної теплової моделі, яка враховує характер теплового обміну на межі розділу складових частин машини. Результати проведених досліджень є основою для проектування синхронної машини з постійним, у формі спиць, магнітом, розробки алгоритму керування температурним полем синхронної машини, дозволяють враховувати температурні ефекти, особливо в тих підобластях, де робоча температура може змінюватися. Запропонована математична модель температурного поля в електричній машині дозволяє контролювати температуру в режимі реального часу. Модель дозволяє розраховувати температуру окремих частин машини, що важливо для швидкого регулювання умов її експлуатації і охолодження.

Ключові слова: електрична машина, математична модель, температурне поле, метод кінцевих елементів.

В данной статье представлена математическая модель распределения температурного поля в синхронных машинах с постоянными спицевидными магнитами. Математическая модель учитывает как радиальный так и осевой потоки передачи тепла и представляет собой краевую задачу в многослойной неканонической области с условиями сопряжения на границах слоев, с различными теплофизическими свойствами. Вся область исследования делится на пять типов простых подобластей, включая вал, внутренний веерообразный магнит, внешний веерообразный магнит, пазовое отверстие и паз. Причем, на границе внутреннего и внешнего веерообразных магнитов пазового отверстия и пазы имеет место идеальный тепловой контакт. Задача решается методом конечных элементов. Модель позволяет рассчитывать температуру отдельных частей машины, что важно для быстрого регулирования условий ее эксплуатации и охлаждения.

Ключевые слова: электрическая машина, математическая модель, температурное поле, метод конечных элементов.

1 Introduction

High-speed electric machines with excitation from permanent magnets are widely used in various industries, including automotive industry. Recently, interior permanent magnet synchronous motors have become known as a good candidate for hybrid electric vehicle traction drive application due to their unique merits. Synchronous electric machine with different geometry and permanent magnets (PMSG) became the object of numerous studies. In this paper we consider electric machine with a spoke-type PM rotor and an internal permanent magnet [1-2]. In [1-2] the magnetic field in the spoke-type PM rotor is investigated, and an attempt to account for the impact of the end effects (form of end winding reactance or magnetic leakage flux) in a two dimensional approximation is made. The analytical model for the prediction of magnetic field distribution in spoke-type permanent magnet synchronous machines with rectangular magnets and magnetic bridges is presented in [1]. The

equivalent stator slot model used in temperature field of high torque-density permanent magnet synchronous in-wheel motor is investigated in [3]. The new layered winding model based on the law of heat transfer in a stator slot is advanced in this paper. Service life and electromagnetic performance of high torque-density permanent magnet synchronous in-wheel motor are related directly to winding temperature [2]. Interior permanent magnet (IPM) synchronous machines which characterized by high efficiency and power density are employed in commercialized electrified power trains and other electric vehicles [4-5].

The thermal field distribution of two conditions: the rated speed and rated load condition; the low speed and rated load condition is analyzed in [6]. The influences of temperature variation on the characteristics and performance of spoke-type interior permanent magnet (IPM) machines are considered in [7]. Key machine performance metrics, such as flux linkages, torque, and inductance variations as the functions of temperature are simulated and discussed. However, the complete mathematical model of the thermal process in the permanent magnet synchronous machines which makes possible to determine the temperature regime at any point given has not been considered before.

The mathematical model of the thermal process in an electric machine created in [7-8], is presented in the form of a three-layer cylinder, in which the internal heat sources operate in one layer, while the heat is transferred to another by thermal conductivity. The multilayer cylinder, where the internal sources of heat operate in one part of the layers and the external ones in the other part is suggested as the model for solving boundary value problems for the heat conduction equation in a complex region. The method of solving the problem in conditions of uncertainty/absence of one of the boundary conditions on the boundary of the layers with conductive heat exchange between the layers is proposed. The essence of the method is to average the temperature distributions along the radius in the inner layers. As a result of transformations at the boundary of the layers, the boundary condition of the conjugation of the impedance type appears. The mathematical model of the temperature field of the radial section of an electric machine is proposed in [9]; the temperature distributions in the separate subdomains of the machine are considered and then the summation of the resulting solutions is performed. The complete mathematical model of the thermal process in synchronous machines with spoke-type permanent magnet is investigated in the paper. The temperature distributions in the windings and in the air gap are very important for designing an electric machine and analyzing its temperature field of the whole machine. Stator and rotor sheets have open, semi-closed or closed grooves in which current conductors (windings) are located. In the stator semi-enclosed grooves of rectangular or oval shape are most commonly used, in high-power machines - open grooves of a rectangular shape. The distribution of the conductors in the slots has a certain influence on the maximum temperature of the windings [10].

In comparison with other studies of thermal processes in a permanent magnet synchronous machine [11-15], the originality of this study lies in creating the complete mathematical model of the thermal process in synchronous machines. Moreover, the synchronous machine is represented as a multi-layered region with different thermal physical characteristics of the layers. Let us consider a synchronous machine with a spoke type permanent magnet rotor in the form as in [1]. Fig. 1 shows an example of spoke type permanent magnet rotor.

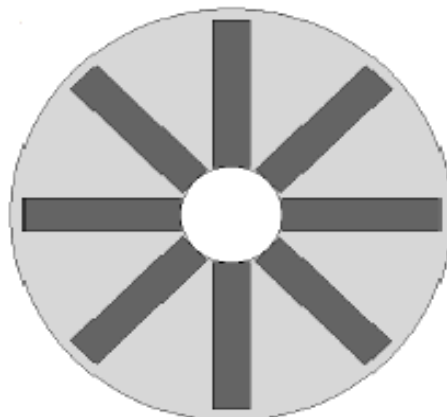


Figure 1. Spoke type permanent magnet rotor with eight poles

2 Purpose of the Paper

The purpose of this paper is to create and consider the complete mathematical model of the thermal process in spoke-type permanent magnet synchronous machines with four pairs of poles and nine slots, which takes into account the nature of the heat exchange at the interface between the parts of the machine.

3 Study resources and results

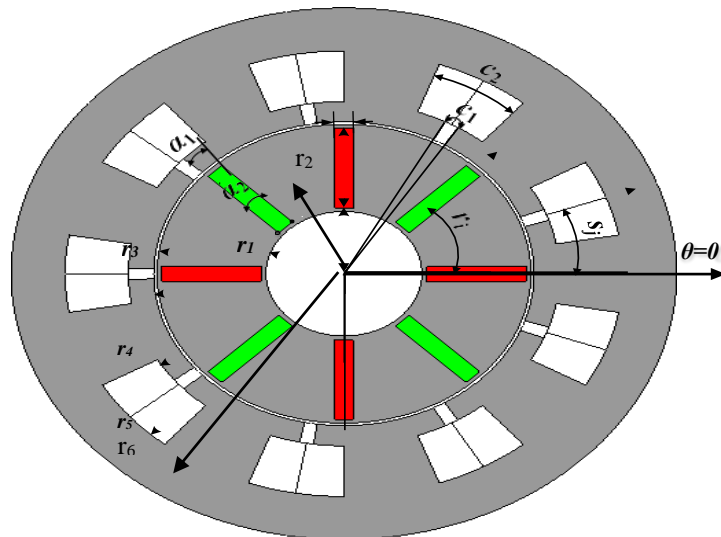


Figure 2. Machine geometry

In this paper, a mathematical model for the rotor shown in Fig. 2 is created.

Fig. 2 shows the model with rectangular magnets and magnetic bridges [1], where θ is the circumferential position, the position of initial axis is defined as $\theta=0$; r_i is the angular position of the i -th magnet with reference to initial axis; s_j is the angular position of the j -th slot; α_1 is the width angle of the magnet outer edge; α_2 is the width angle of the magnet inner edge; c_1 is the width angle of the slot opening; c_2 is the width angle of the slot; r_1, r_3, r_4 and r_5, r_6 are the radii of the shaft, the stator bore, the slot top, the slot bottom, and the machine respectively.

To achieve the goal, the entire field domain is divided into simple subdomains of five types (Fig. 3), i.e. a shaft (I), an inner fan-shaped magnet (II), an outer fan-shaped magnet (III), a slot opening (IV) and a slot (V). There are four pairs of poles and nine slots in the considered machine. Besides, there is a perfect thermal contact on the border of the slot and the inner and outer fan-shaped magnets.

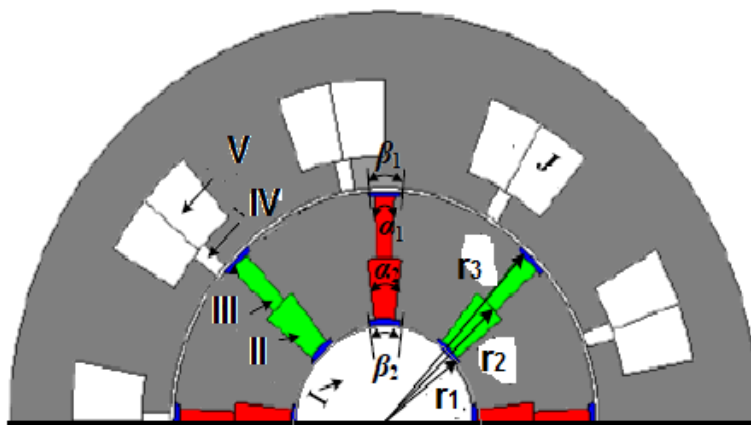


Figure 3. Subdomains of electric machine

Determination of the temperature distribution $T(r, \varphi)$ in the multilayer region $\Omega: \{0 < r < r_6, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, where the internal heat source is concentrated in the windings (region V), can be written as a boundary value problem with conjugation conditions in the form

$$\lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \lambda_i \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_i}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0}{S^2}, & r_4 \leq r < r_5, s_j - \frac{c_2}{2} < \varphi < s_j + \frac{c_2}{2}, j = 1, 2, \dots \\ 0, & 0 < r < r_1, r_5 \leq r < r_6, (0 < \varphi < 2\pi), r_1 < r < r_2, (r_i - \frac{\alpha_2}{2} < \varphi < r_i + \frac{\alpha_2}{2}) \\ r_2 < r < r_3, (r_i - \frac{\alpha_1}{2} < \varphi < r_i + \frac{\alpha_1}{2}), r_3 < r < r_4, (s_j - \frac{c_1}{2} < \varphi < s_j + \frac{c_1}{2}) \end{cases} \quad (1)$$

$$\lambda T_{3r}(r_3, \varphi) = -\alpha(T_3 - T_c) - \varepsilon \sigma (T_3^4 - T_c^4), \quad (2)$$

$$T_{ir}(r_i - 0, \varphi) = T_{ir}(r_i + 0, \varphi), \quad (3)$$

$$T_i(r_i - 0, \varphi) = T_i(r_i + 0, \varphi), \quad i = 1, 2, 4 \quad (4)$$

$$\lambda T_{4r}(r_3, \varphi) = -\alpha(T_4 - T_c) - \varepsilon \sigma (T_4^4 - T_c^4), \quad (5)$$

$$\lambda T_{5r}(r_5, \varphi) = -\alpha(T_5 - T_c) - \varepsilon \sigma (T_5^4 - T_c^4), \quad (6)$$

λ_i are the coefficients of heat conductivity of the rotor, stator iron, conductors of electric current and isolation, respectively, T_c is the ambient temperature, $\alpha_i, I, \rho_0, \varepsilon, \sigma$ are the corresponding heat transfer coefficient, the current strength, the resistivity of current conductors, the emissivity factor, the Stefan-Boltzmann constant, $T_1 - T_5$ are the machine subdomain temperatures, $T_{1r} - T_{5r}$ are the temperature derivatives in the corresponding subdomains.

An perfect thermal contact takes place at the boundaries of the second and fourth regions. When describing the perfect thermal contact at the boundary of the inner and outer fan-shaped magnet, the slot and slot opening, the equality of temperatures and heat fluxes at the boundary surfaces is considered.

Here S is the area of the slot, that is, the region V. The parameters for the calculations have been taken from [1]. The following assumptions for calculating the temperature field have been taken by using the finite element method. The convective and radiation heat exchange has been considered. Radiation heat transfer always occurs, especially when the speed of the rotor rotation is very small or the rotor is still. The heat source is evenly distributed in the stator windings. The winding is in the center of the slot, the area of which is equal to the total area of all copper wires.

TABLE 1. Thermal parameters of the machine materials

Position	Materials	Thermal coefficient (W/m K)
Shaft	45#	50.2
Rotor core	DW 310-35	42.5
Winding	Copper	387

The solution of the problems (1) - (6) in the Partial Differential Equation (PDE) Toolbox is implemented with the help of finite elements [16-18].

At first, the complex form of the region is constructed by combining intersection and subtraction operations. Then we set Equation 1 and, after specifying the coefficients of the differential equation, construct the computing grid using the Delaunay triangulation. The fundamental property is the Delaunay criterion. In the case of 2-D triangulations, this is often called the empty circumcircle

criterion. For a set of points in 2-D, a Delaunay triangulation of these points ensures the circumcircle associated with each triangle contains no other point in its interior.

We divide the domain Ω into triangles $\Delta_i, i=1,2,\dots,n$. Such a partition is called triangulation. Triangles with two vertices on the boundary of the region may have a curved side. We replace this side with a segment of a straight line and denote the resulting region by $\bar{\Omega}_n$. Then we number the vertices of the triangles which are called triangulation nodes. Let D_1 be the set of nodes belonging to the boundary D_2 be the set of internal nodes, and $D = D_1 \cup D_2$ be the set of all knots of triangulation. Further, finite elements are constructed, triangles in this case.

Consider any triangle $\Delta_i \subset \bar{\Omega}_n$. For each vertex of this triangle we define the function $\psi_{j_i}^i(r, \varphi)$, which is equal to one at this vertex and to zero at other vertices (here i is the number of the triangle, j is the number of the vertex in the set of all nodes D). The simplest function is a linear function in the form $z = ar + b\varphi + c$, moreover, $z = 1$ in one of the vertices of the triangle and $z = 0$ in the other two vertices. We associate an arbitrary parameter to the j -th node, $\bar{u}_j, j=1,\dots,J$. Let the vertices of a triangle Δ_i have numbers j_1, j_2, j_3 in the set D . We define a new function

$$\varphi_i(r, \varphi) = \begin{cases} \bar{u}_{j_1}\psi_{j_1}^i(r, \varphi) + \bar{u}_{j_2}\psi_{j_2}^i(r, \varphi) + \bar{u}_{j_3}\psi_{j_3}^i(r, \varphi), & (r, \varphi) \in \Delta_i \\ 0, & (r, \varphi) \notin \Delta_i \end{cases}$$

The function $\varphi_i(r, \varphi)$ is called a finite element. After the region Ω has been triangulated, a finite element mesh has been regularized. The finite element mesh has been rearranged in such a way that the irregularity of all finite elements does not exceed the value set in the PDE Tool. Then we build the system of equations.

Fig. 4 shows that the highest temperature is observed in the windings of an electric machine. A significant number of failures of an electric machine is associated with the stator windings. The statistics of failures in electric machine operations indicates that they occur due to overheating of the windings. The temperature of the electric machine during operation increases with increasing current strength of the device; this can be caused by a decrease in the supply voltage to 95% and below.

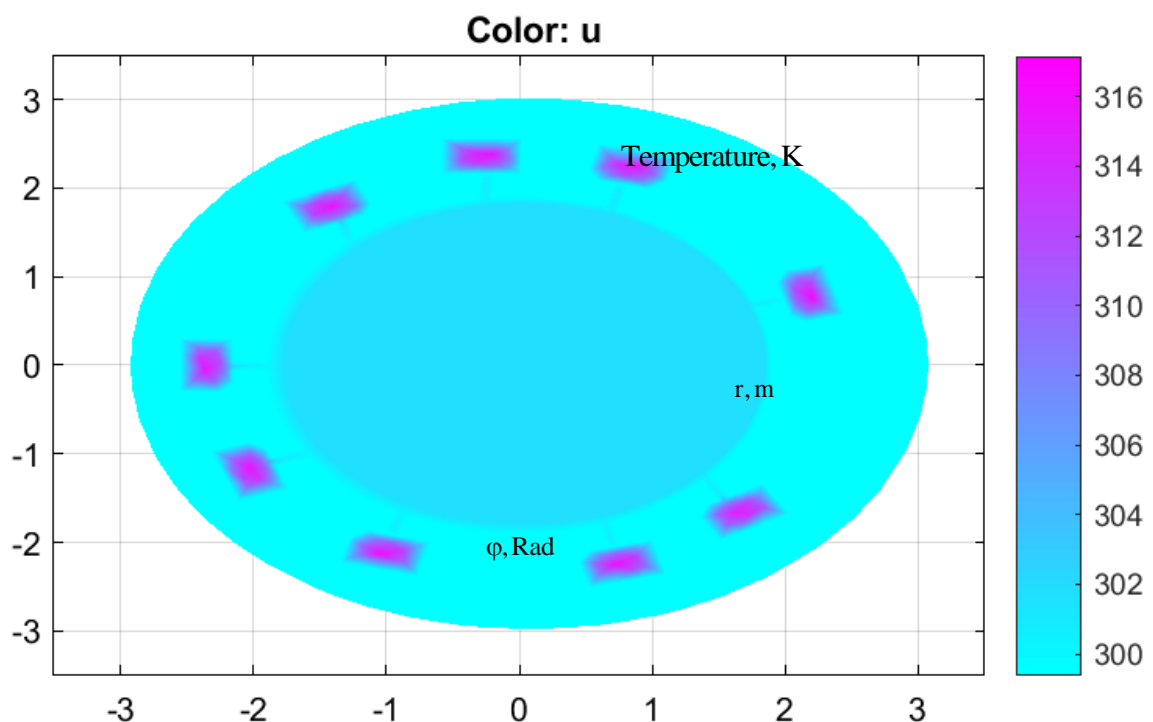


Figure 4. Solution of the problem (1) – (6)

The following parameters of the electric machine were used. Geometric dimensions of the electric machine as in [1]. Current density in DRM slots is $J = 10^6 \frac{A}{m^2}$. Number of pole pairs is 4, number of slots is 9. Thermal parameters of the machine materials are presented in table 1.

5 Conclusions

The complete mathematical model of the thermal process in spoke-type permanent magnet synchronous machines is proposed in this article. The investigated field consists of five subdomains. There is an perfect thermal contact on the border of the inner and outer fan-shaped magnets, the slot and the slot opening. When describing perfect thermal contact (boundary conditions of the fourth kind), boundary conditions consider the equality of temperatures and heat flow on the surfaces. The boundary conditions of the fourth kind essentially give the rule of coupling of temperature fields of the study volume and the external body, where the heat is transferred by heat conduction. The problem is solved by the finite element method. The solution to the problem described in the mathematical model is implemented in the Partial Differential Equation (PDE) Toolbox. To implement the solution algorithm, a regularized computational grid has been constructed by using Delaunay triangulation. The results present in this paper set a foundation for developing a control algorithm which takes the temperature effects into consideration, especially in the cases where operating temperature varies significantly. This proposed mathematical model of the temperature field allows controlling temperature of the whole machine. The model allows calculating the temperature of individual parts of the machine. This is important for quick adjusting its operating and cooling conditions.

REFERENCES

1. Peixin Liang, Feng Chai, Yi Li, and Yulong Pei, “Analytical Prediction of Magnetic Field Distribution in Spoke-Type Permanent-Magnet Synchronous Machines Accounting for Bridge Saturation and Magnet Shape”, *IEEE Trans.on Industrial Electronics*, vol. 64, Issue 5, pp. 3479–3488, 2017.
2. Petter Eklund, Jonathan Sjölund, Sandra Eriksson, Mats Leijon, “Magnetic End Leakage Flux in a Spoke Type Rotor Permanent Magnet Synchronous Generator”, *International Scholarly and Scientific Research & Innovation*, vol. 11, no 3, pp. 605–610, 2017.
3. Peixin Liang, Yulong Pei, Feng Chai and Shukang Cheng, “Equivalent stator slot model of temperature field for high torque-density permanent magnet synchronous in-wheel motors accounting for winding type”, *COMPEL International Journal of Computations and Mathematics in Electrical*, vol.35, no 2, pp. 3457–3462, 2016.
4. N. Bracikowski, M. Hecquet, P. Brochet, and S. V. Shirinskii, "Multiphysics Modeling of a Permanent Magnet Synchronous Machine by Using Lumped Models", *IEEE Trans. Ind. Electron*, vol. 59, no. 6, pp. 2426-2437, 2012.
5. T. Sun and J. Wang, “Extension of Virtual-Signal-Injection-Based MTPA Control for Interior Permanent-Magnet Synchronous Machine Drives Into the Field-Weakening Region”, *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 62, no. 11, pp. 6809-6817, 2015.
6. Jingang Bai, Yong Liu , Yi Sui, Chengde Tong, Quanbin Zhao and Jiawei Zhang, “Investigation of the Cooling and Thermal-Measuring System of a Compound-Structure Permanent-Magnet Synchronous Machine” , *Energies*, vol. 7, pp. 1393–1426, 2014.
7. Viktor Lyashenko, Elena Kobilskaya, Maryna Martynenko And Olga Demyanchenko, “Thermal process mathematical model in electrical machine” , in *Proceedings of the International Conference MEES'17, IEEE, Kremenchuk*, 2017, pp. 296–299.
8. A. Zaika, O. Hrytsiuk, E. Kobilskaya, and V. Lyashenko, “The generalized mathematical model of heat conduction in a complex multi-layered area”, *AIP Conference Proceedings*. vol. 1895, pp. 090004–090014, 2017.
9. A. Zaika, O. Demyanchenko ,O. Hrytsiuk, E. Kobilskaya, and V. Lyashenko, T. Hryhorova, “Mathematical model of heat transfer in an electric machine”, *AIP Conference Proceedings*. vol. 2025, pp. 080006-1–080006-7, 2018.

10. B. I. Kopylov, *Mathematical Models of Electric Machines*. Moscow: Vysshaya shkola, 1987 [in Russian]
11. A.A. Zhelezniak, L. N. Bezmennikova, V.A. Zhukov and V.L. Erofeev, "Diagnosis of Thermal Processes in Motors of the Electrical Objects" in *International Conference on Information Technologies in Business and Industry, Journal of Physics*. Series 803, Tomsk Polytechnic University, Tomsk. Russia, 2017, pp. 012184–012190.
12. V.V. Prus, M.V. Zagirnyak, I.A. Kolotylo, D. Miljavec, "Estimate and taking into account change of steel losses in induction motors in process of their aging", in *Proceedings of International IEEE Conference EUROCON*, Saint Petersburg, 2009, pp 790–795.
13. X. Ge, Z. Q. Zhu, J. B. Li, and J. T. Chen, "A spoke-type IPM machine with novel alternate airspace barriers and reduction of unipolar leakage flux by step-staggered rotor" , in *IEEE International Electric Machines Drives Conference (IEMDC)*, Coeur d'Alene, ID, USA, May 2015, pp. 53–59.
14. Xypteras, J.; Hatziathanassiou, V. "Thermal analysis of an electrical machine taking into account the iron losses and the deep-bar effect", *EEE Trans. Energy Conver.*, vol.14, pp. 996–1003,1999.
15. V. Lyashenko, E. Kobil'skaya, O. Demyanchenko, "Mathematical Model with complex heat transfer conductions in the spherical area", *Transactions of Kremen'chuk Mykhailo Ostrohrad'skyi National University*, vol. 6/2017 (106), pp. 37–43, 2017. [in Ukrainian]
16. Jeffery Cooper, *Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB*. Boston: Birkhäuser, 1998.
17. V.E. Shmelev, *Partial differential equations toolbox. Toolbox for solution of differential equations in partial derivatives* [in Russian]. <http://matlab.exponenta.ru/pde/book1/index.php> [in Russian]
18. F. Hurtado, M. Noy, J. Urrutia. "Flipping edges in triangulations", *Urrutia Discrete & Computational Geometry*, vol.22 (3), 333–346, 1999.

ЛІТЕРАТУРА

1. Peixin Liang, Feng Chai, Yi Li, and Yulong Pei. Analytical Prediction of Magnetic Field Distribution in Spoke-Type Permanent-Magnet Synchronous Machines Accounting for Bridge Saturation and Magnet Shape. *IEEE Trans.on Industrial Electronics*. 2017. Vol. 64, Issue: 5. P. 3479– 3488.
2. Eklund Petter, Sjölund Jonathan, Eriksson Sandra, Leijon Mats. Magnetic End Leakage Flux in a Spoke Type Rotor Permanent Magnet Synchronous Generator. *International Scholarly and Scientific Research & Innovation*. 2017. Vol. 11, № 3. P. 605–610.
3. Peixin Liang, Yulong Pei, Feng Chai and Shukang Cheng. Equivalent stator slot model of temperature field for high torque-density permanent magnet synchronous in-wheel motors accounting for winding type. *COMPEL International Journal of Computations and Mathematics in Electrical*. 2016. Vol.35, № 2. P. 713–727.
4. Bracikowski N., Hecquet M., Brochet P., and Shirinskii S. V.. Multiphysics Modeling of a Permanent Magnet Synchronous Machine by Using Lumped Models. *IEEE Trans. Ind. Electron*. 2012. Vol. 59, № 6. P. 2426-2437.
5. Sun T., Wang J. Extension of Virtual-Signal-Injection-Based MTPA Control for Interior Permanent-Magnet Synchronous Machine Drives Into the Field-Weakening Region. *IEEE Trans. Ind. Electron*. 2015. Vol. 62, № 11. P. 6809-6817.
6. Jingang Bai, Yong Liu , Yi Sui, Chengde Tong, Quanbin Zhao and Jiawei Zhang. Investigation of the Cooling and Thermal-Measuring System of a Compound-Structure Permanent-Magnet Synchronous Machine. *Energies*. 2014. Vol. 7. P. 1393–1426.
7. Lyashenko Viktor, Kobil'skaya Elena, Martynenko Maryna And Demyanchenko Olga. Thermal process mathematical model in electrical machine. *Modern Electrical and Energy Systems (MEES)*:

- 2017 year: Proceedings of the International Conference, 15-17 Nov. 2017. Kremenchuk: KrNU, 2017. P. 296–299.
8. Zaika A., Hrytsiuk O., Kobil'skaya E., and Lyashenko V. The generalized mathematical model of heat conduction in a complex multi-layered area. *AIP Conference Proceedings*. 2017. Vol. 1895. P. 090004–090014.
 9. Zaika A., Demyanchenko O., Hrytsiuk O., Kobil'skaya E., and Lyashenko V., Hryhorova T.. Mathematical model of heat transfer in an electric machine. *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 2025. P. 080006-1–080006-7.
 10. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин: Учеб. для вузов. Москва: Высшая шк., 1987 248 с.
 11. Zhelezniak A.A., Bezmennikova L. N., Zhukov V.A. and Erofeev V.L. Diagnosis of Thermal Processes in Motors of the Electrical Objects. *International Conference on Information Technologies in Business and Industry*: 2017 year: Journal of Physics: Conference Series, Vol. 803, 21–26 September 2016. Tomsk, Russian Federation. P. 012184–012190.
 12. Prus V.V., Zagirnyak M.V., Kolotylo I.A., Miljavec D. Estimate and taking into account change of steel losses in induction motors in process of their aging *EUROCON: 2009 year: Proceedings of International IEEE Conference*, 18-23 May 2009. Saint Petersburg, Russian Federation. P. 790–795.
 13. X. Ge, Z. Q. Zhu, J. B. Li, and J. T. Chen. A spoke-type IPM machine with novel alternate airspace barriers and reduction of unipolar leakage flux by step-staggered rotor. *IEEE International Electric Machines Drives Conference (IEMDC)*: 2015 year: Proceedings of IEMDC, 10-13 May 2015. Coeur d'Alene, ID, USA. P. 53–59.
 14. Хуптерас J., Хатзиатанассиу V. Thermal analysis of an electrical machine taking into account the iron losses and the deep-bar effect. *IEEE Trans. Energy Convers.* 1999. № 14. P. 996–1003.
 15. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Дем'янченко О. П. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатошарових областях. *Вісник КрНУ ім. М. Остроградського*. 2017. Вип. 6, Ч. 1. С. 37–43.
 16. Cooper Jeffery. Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB. Boston: Birkhäuser, 1998. 533 p.
 17. Шмелев В. Е. Partial Differential Equations Toolbox. Инструментарий решения дифференциальных уравнений в частных производных: учебное пособие. URL:<http://matlab.exponenta.ru/pde/index.php>
 18. Hurtado F., M. Noy, J. Urrutia. Flipping edges in triangulations. *Discrete & Computational Geometry*. 1999. Vol. 22 (3). P. 333–346.

Дем'янченко Ольга Пантеліївна – старший викладач кафедри природничонаукових та гуманітарних дисциплін, Азовський морський інститут Національного університету "Одеська морська академія", вул. Чорноморська, 19, м. Маріуполь Україна, 87517; e-mail: olgademyanchenko@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4693-0364

Дем'янченко Ольга Пантеліївна – старший преподаватель кафедры естественнонаучных и гуманитарных дисциплин, Азовский морской институт Национального университета "Одесская морская академия", ул. Черноморская, 19, г. Мариуполь Украина, 87517; e-mail: olgademyanchenko@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4693-0364

Demyanchenko Olga Panteleivna – Senior Lecturer, Department of "Natural Science and Humanitarian Disciplines", Mariupol, Azov maritime institute of National university "Odessa maritime academy" 19, Chornomors'ka str. Ukraine, 87517, Mariupol e-mail: olgademyanchenko@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4693-0364

Кобильська Олена Борисівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент; доцент кафедри інформатики і вищої математики, Кременчуцький національний університет ім. Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 61046, Україна; e-mail: kobilskaya1983@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4210-1534.

Кобыльская Елена Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры информатики и высшей математики, Кременчугский национальный университет им. Михаила Остроградского, ул. Первомайская, 20 39600, г. Кременчуг, Украина; e-mail: kobilskaya1983@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4210-1534.

Kobilskaya Elena Borisovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Kremenchuk National University named after Mikhail Ostrogradsky, 39600, 20, Pershotravneva Street, Kremenchuk, Ukraine; e-mail: kobilskaya1983@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4210-1534.

Ляшенко Віктор Павлович – доктор технічних наук, професор; завідувач кафедри інформатики і вищої математики, Кременчуцький національний університет ім. Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 61046, Україна; e-mail: viklyash2903@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4538-631X

Ляшенко Виктор Павлович – доктор технических наук, профессор заведующий кафедрой информатики и высшей математики, Кременчугский национальный университет им. Михаила Остроградского, ул. Первомайская, 20, г. Кременчук, 61046, Украина; e-mail: viklyash2903@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4538-631X

Lyashenko Viktor Pavlovich – Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Department of Mathematics and Computer Science, Kremenchuk National University named after Mikhail Ostrogradsky, 39600, 20, Pershotravneva Street, Kremenchuk, Ukraine; e-mail: viklyash2903@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4538-631X

Набок Тетяна Андріївна – старший викладач кафедри інформатики і вищої математики, Кременчуцький національний університет ім. Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 61046, Україна; e-mail: nabok@gmail.com; ORCID: 0000-0002-1501-9009

Набок Татьяна Андреевна – старший преподаватель кафедры информатики и высшей математики, Кременчугский национальный университет им. Михаила Остроградского, ул. Первомайская, 20 39600, г. Кременчуг, Украина; e-mail: nabok@gmail.com; ORCID: 0000-0002-1501-9009

Nabok Tatyana Andreevna – Senior Lecturer, of the Department of Mathematics and Computer Science, Kremenchuk National University named after Mikhail Ostrogradsky, 39600, 20, Pershotravneva Street, Kremenchuk, Ukraine; e-mail: nabok@gmail.com; ORCID: 0000-0002-1501-9009

УДК 519.222+612.13

Статистичний аналіз даних моніторингу коронарного кровотоку для гемодинамічної оцінки ступеня стенозу коронарних артерій

Н.М. Кізілова, Д.М. Паккі

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Україна
email: dimapakki95@gmail.com

Досліджуються статистичні залежності між кривими тиску $P_a(t)$, $P_d(t)$ і швидкості кровотоку $V_a(t)$, що зареєстровані in vivo в коронарних артеріях пацієнтів безпосередньо до і після ділянки стенозу в рамках стандартної клінічної процедури розрахунку динамічних індексів FFR, HSR, CFR, і ряду інших, які загальноприйняті в хірургічній практиці. Показано, що при незначному стенозі, який не вимагає оперативного втручання, є кореляція між кривими, а їх спектр представлений трьома основними гармоніками. При значному стенозі, що вимагає негайного стентування, позитивна кореляція між $P_a(t)$ і $P_d(t)$ виражена слабше, а з кривою $V_a(t)$ є негативна кореляція. Спектр кривих значно складніший і містить високочастотні гармоніки. Для пацієнтів з так званої «сірої зони» експертне рішення про необхідність стентування може бути прийнято на підставі появи додаткових гармонік в спектрі і негативної кореляції між кривими $P_a(t)$, $P_d(t)$ і $V_a(t)$. Запропонований підхід може бути використаний для автоматичного прийняття рішення на основі машинного навчання і розробки відповідних математичних моделей.

Ключові слова: математичне моделювання, статистичний аналіз, стеноз, коронарні артерії, експертна система.

The purpose of the article is the exploration of features of, and the relationships between the patient's medical data. The data have been obtained by measuring the pressure of blood flow before the stenosis - $P_a(t)$, after the stenosis - $P_d(t)$, the flow velocity - $V_a(t)$, and ECG. The statistical relationship between the pressure curves $P_a(t)$, $P_d(t)$ and the blood flow velocity $V_a(t)$ recorded in vivo in the coronary arteries of patients before and after stenosis, as a part of a standard clinical procedure for calculating dynamic indices such as FFR, HSR, CFR, and others accepted universally in surgical practice have been studied. It is shown that in the case of insignificant stenosis which does not require surgical intervention, there is a correlation between the curves, and their spectrum is represented by three main harmonics. In the case of significant stenosis which requires immediate stenting, the positive correlation between $P_a(t)$ and $P_d(t)$ is less pronounced, and there is a negative correlation with the $V_a(t)$ curve. The spectrum of the curves is much more complex and contains high-frequency harmonics. The 2-phase relaxation with two different relax-times for the curves of pressure has been explored. To develop the mathematical model for automatic detecting of threshold values of stenosis level the additional spectral analysis has been performed. For patients in the so-called "gray zone", an expert decision on the need for stenting based on the appearance of additional harmonics in the spectrum and a negative correlation between the $P_a(t)$, $P_d(t)$ and $V_a(t)$ curves can be made. The proposed approach can be used for automatic decision-making based on machine learning and the development of appropriate mathematical models.

Key words: mathematical modeling, statistical analysis, stenosis, coronary arteries, expert system.

Исследуются статистические зависимости между кривыми давления $P_a(t)$, $P_d(t)$ и скорости кровотока $V_a(t)$, зарегистрированные in vivo в коронарных артериях пациентов непосредственно до и после участка стеноза в рамках стандартной клинической процедуры расчета динамических индексов FFR, HSR, CFR, и ряда других, общепринятых в хирургической практике. Показано, что при незначительном стенозе, не требующем оперативного вмешательства, имеется корреляция между кривыми и их спектр представлен тремя основными гармониками. При значительном стенозе, требующем немедленного стентирования, положительная корреляция между $P_a(t)$ и $P_d(t)$ выражена слабее, а с кривой $V_a(t)$ имеется отрицательная корреляция. Спектр кривых значительно сложнее и содержит высокочастотные гармониками. Для пациентов из так называемой «серой зоны» экспертное решение о необходимости стентирования может быть принято на основании появления дополнительных гармоник в спектре и отрицательной корреляции между кривыми $P_a(t)$, $P_d(t)$ и $V_a(t)$. Предложенный подход может быть использован для автоматического принятия решения на основе машинного обучения и разработки соответствующих математических моделей.

Ключевые слова: математическое моделирование, статистический анализ, стеноз, коронарные артерии, экспертная система.

1. Вступ

Стеноз коронарних артерій є однією з провідних причин погіршення якості життя, розвинення серцевої недостатності та інфаркту міокарда не тільки у літніх, а й у відносно молодих пацієнтів [1]. Стеноз є звуження судини, яке поступово розвивається внаслідок пошкодження її стінки, зміни структури і накопичення всередині кальцію, ліпідів та інших компонент у вигляді атеросклеротичної бляшки, закупорки тромбом, а також інших причин. Внаслідок звуження артерії кровоток через звужену ділянку різко знижується, а розташовані нижче за течією тканини відчують нестачу кисню і поживних речовин (ішемію). На жаль, симптоми стенозу коронарних артерій проявляються лише на досить пізніх стадіях, коли ступінь звуження становить 50% і вище від вихідної площі просвіту артерії і коли в більшості випадків потрібно невідкладне розширення ділянки стенозу шляхом введення стента (операція

стенування). Для прийняття рішення про необхідність стентування проводиться *in vivo* моніторинг гемодинамічних параметрів безпосередньо поблизу ділянки стенозу, а для прийняття рішення щодо стентування використовуються різні загальноприйняті індекси недостатності кровопостачання [2-5]:

- 1) Stenotic index $SI = D_{\min}/D_N$ (%) – відношення мінімального діаметра на ділянці стенозу D_{\min} до діаметру судини без стенозу D_N , або аналогічний індекс, який розрахований за відповідними площами просвіту судини, minimal lumen area $MLA = A_{\min}/A_N$ (%);
- 2) Fractional flow reserve $FFR = P_d/P_a$, де P_a і P_d – тиску, виміряні безпосередньо перед і після стенозу (Рис.1а) відразу після введення судинорозширювального агента, що різко знижує вплив опору системи мікроциркуляції на результати вимірювання; індекс показує втрати тиску на стенозі;
- 3) Hyperemic Stenosis Resistance $HSR = (P_a - P_d)/Q_a$, де Q_a – максимальна швидкість кровотоку, що виміряна перед стенозом; індекс характеризує гідравлічний опір стенозу;
- 4) Coronary flow reserve $CFR = V_{hyp}/V_{rest}$, де V_{hyp} і V_{rest} – середні швидкості кровотоку при гіперемії і в спокої; індекс показує резервні можливості ділянки руслу до її швидкої перебудови в умовах гіперемії;
- 5) Index of microvascular resistance $IMR = V_{hyp} \cdot P_d$ дозволяє оцінити витрати енергії за рахунок гідравлічного опору ділянки руслу;
- 6) Instantaneous wave-free ratio $iFR = P_d/P_a$ і instantaneous wave-free pressure gradient $iFG = (P_a - P_d)/L$ – відношення тисків і градієнт тиску на ділянці стенозу, які виміряні під час діастолі, коли вплив відбитих пульсових хвиль на результати вимірювання мінімальний без введення судинорозширювального агента (Рис.1б).

На сьогоднішній день немає єдиного підходу до використання індексів 1) -6) при прийнятті рішення про вибір лікування у конкретного пацієнта. Індекс FFR вважається «золотим стандартом» [5], проте багато хто воліє більш прості індекси SI і MLA, або ж індекс iFR, який не вимагає ін'єкцій вазодилаторів хоча складніший для розрахунків. У відповідності зі стандартами прийняття рішення на основі FFR, пацієнти з $FFR > 0.8$ не вимагають оперативного втручання, так як стеноз не викликає критичного зменшення коронарного кровотоку. Пацієнти з $FFR < 0.7$ вимагають негайної імплантації стента, а для пацієнтів з $FFR = 0.7-0.8$ (так звана «сіра зона») рішення приймається консиліумом лікарів на основі лікарського досвіду та інтуїції. Таким чином, задача порівняльної ефективності різних показників, виявлення їх фізичного сенсу на математичних моделях і розробка індексів для прийняття рішень для пацієнтів «сірої зони» залишається актуальною. У даній роботі наведені результати статистичного аналізу кривих $P_a(t)$, $P_d(t)$, $Q_a(t)$ і кореляції параметрів цих кривих з індексами SI, MLA і FFR, що потрібні для подальшої розробки математичних моделей, які могли б використовуватися при прийнятті рішення про необхідність стентування для конкретного пацієнта в реальному часі, в тому числі з використанням методів штучного інтелекту [6].

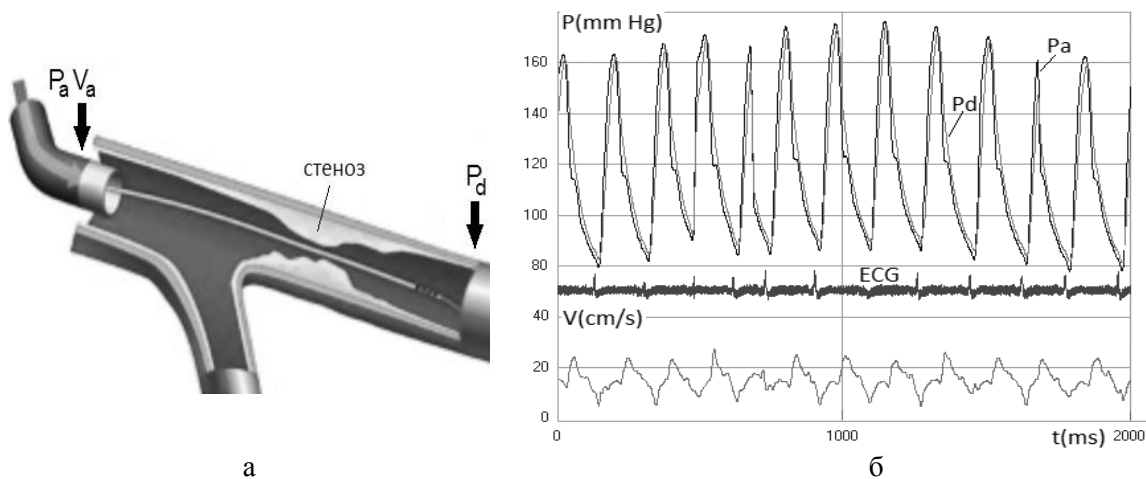


Рис.1. Стеноз ділянки артерії і локалізація місць вимірювання параметрів кровотоку (а) з прикладами виміряних залежностей $P_a(t)$, $P_d(t)$, $V_a(t)$ до введення вазодилатора (б).

2. Матеріали і методи

Залежності $P_a(t)$, $P_d(t)$, $Q_a(t)$ (Рис.2а-в), які були виміряні на різних групах пацієнтів за допомогою стандартної методики Volcano CORE™/CORE™™Mobile/S5/S5i™ FFR/IFR® Software with Case Manager, були взяті з відкритої бази даних. Вимірювання проводились з кроком за часом $\Delta t = 5$ мс. Під час вимірювань трубка катетера вводиться в коронарну артерію, в якій раніше за даними комп'ютерної томографії (КТ) або ангіографії (АГ) було виявлено стеноз (Рис.1а). Після фіксації внутрішня частина катетера (тонкий гнучкий дріт) просувається крізь стеноз і фіксується на деякій відстані (~ 1 см) за ним. Тиски $P_a(t)$, $P_d(t)$ і швидкість кровотоку $V_a(t)$ вимірюються в стані спокою синхронно з кардіограмою (ECG) Рис.1б. Піки амплітуди ECG відповідають часу початку скорочення серця. Після цього через катетер вводиться порція вазодилатора, гідравлічний опір мікросудин різко падає, кровоток зростає, і при цьому знову вимірюються криві $P_a(t)$, $P_d(t)$, $Q_a(t)$. Всього для аналізу було відібрано 30 наборів даних зі значеннями $FFR > 0.8$ (9 пацієнтів), $FFR < 0.7$ (11 пацієнтів) і $0.7 < FFR < 0.8$ (10 пацієнтів).

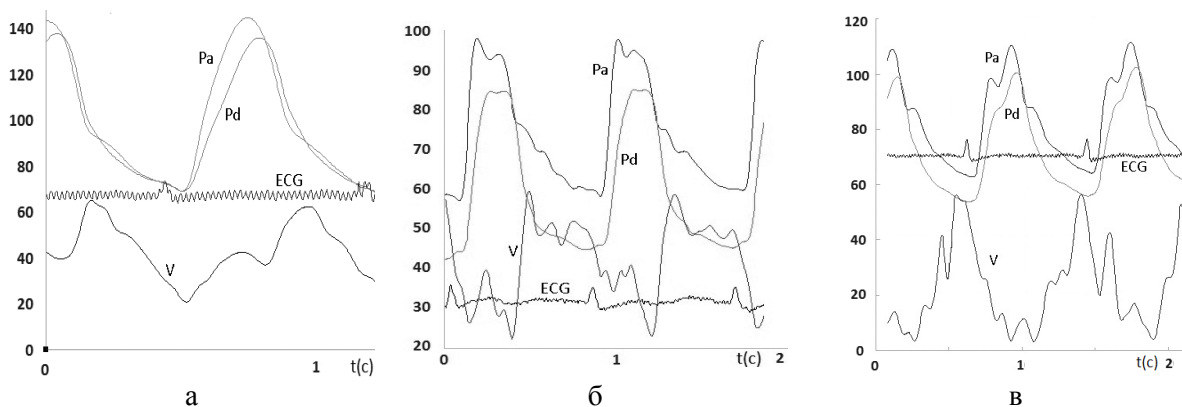


Рис.2. Типові залежності $P_a(t)$, $P_d(t)$, $V_a(t)$ при гиперемії для здорового пацієнта (а), який потребує негайного стентування (б) і пацієнта із «сірої зони» (в).

Раніше зазначалося (див. згляд літератури в [4,6,7]), що при помірному стенозі ($MLA > 80\%$, $FFR > 0.85$) динаміка кривих $P_a(t)$ і $P_d(t)$ в діастолу відрізняється незначно (Рис.2а). При критичному стенозі ($MLA < 50\%$, $FFR < 0.7$) на кривих $P_d(t)$ з'являється двухфазна релаксація з двома різними часами - швидка і повільна (Рис.2б). Для пацієнтів з «сірої зони» (Рис.2в) спостерігається проміжна реакція, яку важко описати однозначними наборами значень SI, MLA, FFR та ін. Було показано, що різні види залежностей $P_a(t)$, $P_d(t)$, $V_a(t)$ можна пояснити на основі трьохкамерної моделі артерії, в якій середня камера відповідає ділянці стенозу з підвищеним гідравлічним опором [7]. При певних наборах значень параметрів моделі вдається описати всі три види залежностей (Рис.2а-в), включаючи чітку релаксацію з двома часами загасання тиску. У зв'язку з труднощами оцінки локальних біомеханічних параметрів моделі [7], великий інтерес представляє можливість додаткової класифікації ступеня вираженості стенозу шляхом статистичного аналізу зареєстрованих гемодинамічних кривих.

Всі виміряні криві згладжувались методом зваженого ковзного середнього, що дозволяє зберігати значення локальних максимумів і мінімумів функції:

$$F(t_i) = \frac{2}{s(s+1)} \sum_{j=1}^s j \cdot f(t_{i-j}), \quad s = \begin{cases} 1, & i = 1, n \\ 3, & i = 2, n-1, \\ 5, & 2 < i < n-1 \end{cases}$$

де $f(t_i)$ і $F(t_i)$ - вихідні і згладжені значення виміряних дискретних кривих.

Потім за піковими значеннями ECG на кривих $P_a(t)$, $P_d(t)$, $Q_a(t)$ виділялися окремі коливання. Оскільки ритм серцевих скорочень характеризується істотною варіабельністю і випадковими коливаннями амплітуди, всі окремі коливання наводилися до стандартної довжини $t = T^* = 1$, де T^* - безрозмірний період скорочень серця, і значенню максимуму $P = P^* = 1$, де P^* - систолічний тиск. Оскільки значення T^* і P^* різні як у різних пацієнтів, так і у одного пацієнта до і після введення вазодилатора, приведення до безрозмірного вигляду має важливе значення для усунення коливань, які обумовлені не мірою стенозу артерії, а різними фізіологічними і зовнішніми факторами.

Спектральний і кореляційний аналіз кривих $P_a(t)$, $P_d(t)$, $Q_a(t)$ проводився за допомогою вбудованих функцій Python 3.8.2. Для розрахунків спектра використовувалося дискретне перетворення Фур'є

$$X_j = \sum_{k=1}^N F_k \exp\left(-\frac{2\pi i}{N+1} kj\right), j=1,2,\dots,N.$$

3. Результати і обговорення

На Рис.3а-в представлені результати спектрального аналізу кривих $P_a(t)$, $P_d(t)$, $V_a(t)$, які були наведені на Рис.2а-в. Аналогічні залежності були отримані для всіх 30 наборів даних в спокої і після введення вазодилататора. В Табл.1 представлені результати розрахунків коефіцієнтів кореляції всіх пар кривих з набору $P_a(t)$, $P_d(t)$, $V_a(t)$.

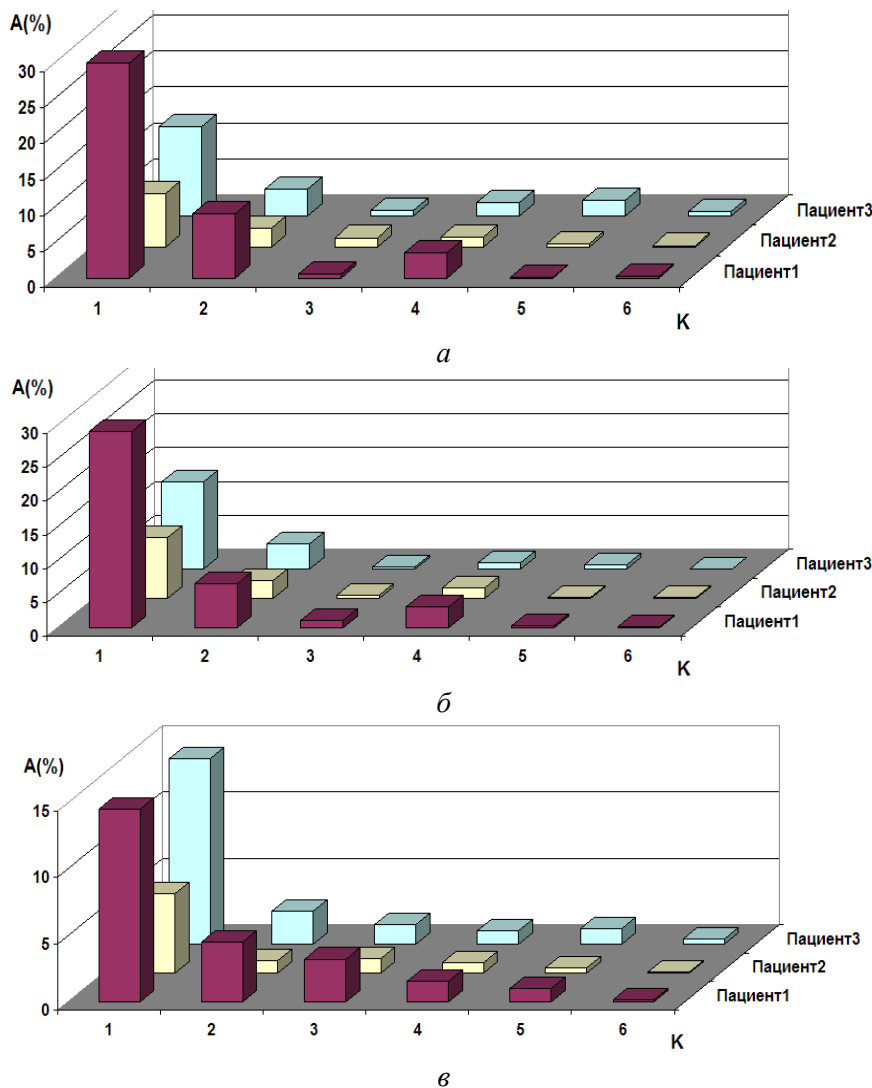


Рис.3. Амплітуди $A(\%)$ перших $K=6$ гармонік кривих $P_a(t)$ (а), $P_d(t)$ (б), $V_a(t)$ (в) для пацієнтів, які представляють три групи з різною виразністю стенозу коронарних артерій.

Основна гармоніка спектра кривих тиску і швидкості відповідає скороченням серця, які генерують збурення тиску і швидкості за рахунок різкого збільшення артеріального тиску на вході в русло і вбросу порції крові з лівого шлуночка. Збурення поширюється вздовж русла, що генерує відбиті хвилі на ділянках розгалужень артерій та інших неоднорідностях, в тому числі на вхідній і вихідній ділянках стенозу. Основними гармоніками спектра тиску у випадку $FFR > 0.8$ (пацієнт 1 на Рис. 3) як до, так і після введення вазодилататора є 1, 2 і 4 гармоніки. В спектрі швидкості присутні перші 5-6 гармонік і їх частки монотонно зменшуються. У пацієнтів зі

значним стенозом (FFR <0.7, пацієнт 2 на Рис.3) спектр тиску ускладнюється: вклад 1-й гармоніки різко знижується і зростає частка 2-4 гармонік, а в деяких випадках і 5-й гармоніки. В спектрі швидкості також значно зменшується внесок 1-й гармоніки, а розподіл решти по амплітуді стає немонотонним. У пацієнтів з «сірої зони» (пацієнт 3 на Рис.3) проявляються риси як першої, так і другої груп, в залежності від ступеня впливу стенозу на уповільнення течії крові за рахунок відбитих хвиль та підвищеного гідравлічного опору стенозу. Таким чином, зниження амплітуди основної гармоніки, поява в спектрі тиску 3-й і 5-й гармонік, немонотонність амплітуд гармонік швидкості можна вважати додатковими параметрами, які дозволяють виділити з групи пацієнтів з «сірої зони» таких, які потребують негайного стентування.

Табл.1. Коефіцієнти кореляції різних пар кривих для пацієнтів 1-3.

	$\kappa(P_a, P_d)$	$\kappa(P_a, V_a)$	$\kappa(P_d, V_a)$
Пацієнт1	0.9419	0.1522	0.2613
Пацієнт2	0.9576	-0.6108	-0.6419
Пацієнт3	0.8809	-0.5791	-0.6514

У всіх досліджених випадках спостерігалася позитивна кореляція ($\kappa \sim 0.9$) кривих $P_a(t)$ і $P_d(t)$ (Табл.1). У пацієнтів з FFR >0.8 кореляції тисків і швидкості були незначні, але також з $\kappa > 0$, тоді як у випадку FFR <0.7 ці кореляції були завжди нештивними. В групі «сірої зони» у випадках з описаними вище змінами спектра коефіцієнти кореляції були також негативними, що може служити додатковим діагностичним параметром для прийняття рішень.

4. Висновки

На основі проведеного статистичного аналізу встановлено закономірності у вигляді співвідношень між амплітудами гармонік і коефіцієнтами кореляцій кривих тисків $P_a(t)$, $P_d(t)$ і швидкості, які дозволяють виділити в групі пацієнтів «сірої зони» ті стенози, які вимагають негайного стентування. В інших випадках потрібне додаткове обстеження з метою виявлення стенозів, які найбільше істотно впливають на погіршення кровопостачання міокарда. Отримані набори додаткових діагностичних параметрів легко формалізуються, можуть бути протестовані на математичних моделях вигляду [4,6,7], використані для машинного навчання і впровадження методів штучного інтелекту для прийняття рішень в реальному часі в практиці кардіохірурга.

ЛІТЕРАТУРА

1. Mensah G.A., Wei G.S., Sorlie P.D., et al. Decline in cardiovascular mortality: possible causes and implications. *Circulation Research*. 2017. 120(2). pp. 366–380.
2. Sen S., Escaned J., Malik I.S., et al. Development and validation of a new adenosine-independent index of stenosis severity from coronary wave-intensity analysis. *Journal of American College of Cardiology*. 2012. 59(15). pp. 1392-402.
3. Kizilova N. Diagnostics of coronary stenosis: analysis of arterial blood pressure and mathematical modeling. *Biomedical Engineering Systems and Technologies. Springer Series on Communications in Computer and Information Science*. Plantier, G., Schulz, T., Fred, A., Gamboa, H. (Eds.) 2015. pp. 299-312.
4. Solovyova H., Kizilova N., Mizerski J. Nonlinear model of blood flow through stenosed coronary arteries. Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics, Kharkov, Ukraine. 2016. pp. 384-389.
5. Mangiacapra F., Bressi E., Sticchi A., Morisco C., Barbato E. Fractional flow reserve (FFR) as a guide to treat coronary artery disease. *Expert Reviews of Cardiovascular Therapy*. 2018. 16(7). pp. 465-477.
6. Kizilova N. Multidisciplinary Approaches in cancer diagnosis and treatment: towards patient-specific predictive oncology. *Acta Scientific Cancer Biology*. 2019. 3(8). pp. 1-2.
7. Kizilova N. Three chamber model of human vascular system for explanation the quasi-regular and chaotic dynamics of the blood pressure and flow oscillations. *Applied Non-Linear Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Vol. 181. Jan Awrejcewicz (ed). 2016. pp. 209-220.

REFERENCES

1. Mensah, G.A., Wie, G.S., Sorlie, P.D., et al. „Decline in cardiovascular mortality: possible causes and implications.” *Circulation Research*. 120(2). pp. 366–380. 2017.
2. Sen, S., Escaned, J., Malik, I.S., et al. “Development and validation of a new adenosine-independent index of stenosis severity from coronary wave-intensity analysis.” *Journal of American College of Cardiology*. 59(15). pp. 1392-402. 2012.
3. Kizilova, N. „Diagnostics of coronary stenosis: analysis of arterial blood pressure and mathematical modeling.” *Biomedical Engineering Systems and Technologies. Springer Series on Communications in Computer and Information Science*. Plantier, G., Schulz, T., Fred, A., Gamboa, H. (Eds.) pp. 299-312. 2015.
4. Solovyova, H., Kizilova, N., Mizerski, J. “Nonlinear model of blood flow through stenosed coronary arteries.” Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics, Kharkov, Ukraine. pp. 384-389. 2016.
5. Mangiacapra, F., Bressi, E., Sticchi, A., Morisco, C., Barbato, E. „Fractional flow reserve (FFR) as a guide to treat coronary artery disease.” *Expert Reviews of Cardiovascular Therapy*. 16(7). pp. 465-477. 2018.
6. Kizilova, N. „Multidisciplinary Approaches in cancer diagnosis and treatment: towards patient-specific predictive oncology. *Acta Scientific Cancer Biology*. 3(8). pp. 1-2. 2019.
7. Kizilova, N. „Three chamber model of human vascular system for explanation the quasi-regular and chaotic dynamics of the blood pressure and flow oscillations.” *Applied Non-Linear Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Vol. 181. Jan Awrejcewicz (ed). pp. 209-220. 2016.

Кізілова Наталія Миколаївна – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Kizilova Natalya M. - DSc, professor of the Department of Applied Mathematics, V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Кизилова Наталья Николаевна - доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики, Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Паккі Дмитро – студент факультету математики і інформатики, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків 22, Україна, 61022; e-mail: dimapakki95@gmail.com ; ORCID: 0000-0003-4381-0348.

Pakki D. – student, Faculty of Mathematica and Informatics, V.N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; e-mail: dimapakki95@gmail.com; ORCID: 0000-0003-4381-0348.

Пакки Дмитрий – студент факультета математики и информатики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков – 22, Украина, 61022; e-mail: dimapakki95@gmail.com; ORCID: 0000-0003-4381-0348.

УДК 004.415.53

Тестирование производительности программного обеспечения

О.М. Мелкозьорова, С.Г. Рассомахін

*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
olja.mex@gmail.com*

В настоящее время качество программного обеспечения имеет очень высокий приоритет. Грамотный подход к решению данной проблемы частично обеспечивает автоматизированное тестирование. Для его введения необходимо обеспечить определенные условия и провести соответствующие мероприятия. Система, которая подлежит тестированию, должна быть таковой, чтобы ее можно было легко тестировать. Одно из самых важных мероприятий - выбор инструмента для автоматизированного тестирования, к нему предъявляется ряд требований. Он должен обеспечивать: внедрение автоматизированных тест-кейсов, мониторинг и контроль выполнения автоматизированных тестов, должно поддерживаться интерпретирование, видны результаты прохождения тестов в виде отчетов, логирования, графиков [1]. Этим требованиям отвечает инструмент для тестирования производительности Jmeter. Jmeter поддерживает технологию автоматизированного тестирования записи и воспроизведения, чем обеспечивает возможность внедрения автоматизированных тест-кейсов. Для демонстрации результатов тестирования в виде таблиц, графиков, диаграмм есть компоненты «Слушатели» (Listeners). В статье приведен обзор существующих на данный момент типов тестирования производительности. Рассмотрен тест план с использованием инструмента Jmeter, показана возможность составления тестов и их анализа для получения результата при обеспечении соответствующего качества и удобства использования. Тестирование программного обеспечения – один из наиболее важных этапов при разработке программных продуктов. Универсальный подход к разработке тестов усложняется большими объемами данных, наличием разнообразных методик и инструментов. Особую значимость имеет тестирование вычислительной производительности приложений. По сравнению с другими видами тестирования, то именно этот вид тестирования крайне сложен и требует определенных навыков персонала. Производительность в основном испытывается автоматизированными методами, однако при параметрическом исследовании программ важным становится статистическое тестирование.

Ключевые слова: *тестирование производительности, автоматизация, инструмент, Jmeter, нагрузка.*

У теперішній час якість програмного забезпечення має високий пріоритет. Грамотний підхід до вирішення цієї проблеми частково забезпечує автоматизоване тестування. Для його введення необхідно забезпечити певні умови та провести відповідні заходи. Система, яку треба тестувати також повинна бути такою, що її можна було легко тестувати. Одне з найважливіших заходів – вибір інструменту, до нього пред'являється ряд вимог, він повинен забезпечувати: впровадження автоматизованих тест-кейсів, моніторинг та контроль виконання автоматизованих тестів, повинно підтримуватися інтерпретування, видно результати проходження тестів у вигляді звітів, логування, графіків [1]. Цим вимогам відповідає інструмент для тестування продуктивності Jmeter. Jmeter підтримує технологію автоматизованого тестування запису та відтворення (Record and playback), чим забезпечує можливість введення автоматизованих тест-кейсів. Для демонстрації результатів тестування у вигляді таблиць, графіків, діаграм є спеціальні компоненти „Слухачі” (Listeners). У статті наведено огляд існуючих типів тестування продуктивності. Розглянуто тест план з використанням інструменту Jmeter, показана можливість складання тестів та їх аналізу для отримання результату при забезпеченні відповідної якості та зручності використання. Тестування програмного забезпечення – один з найбільш важливих етапів при розробці програмних продуктів. Універсальний підхід до розробки тестів ускладнюється великим об'ємом даних, наявністю різноманітних методик та інструментів. Особливу важливість має тестування обчислювальної продуктивності додатків. У порівнянні з іншими типами тестування, саме цей вид вкрай складний та потребує певних навичок персоналу. Продуктивність в основному випробовується автоматизованими методами, однак при параметричному дослідженні програм стає важним статистичне тестування.

Ключові слова: *тестування продуктивності, автоматизація, інструмент, Jmeter, навантаження.*

Currently, software quality is of high priority. A competent approach to this issue is partially provided by automated testing. For the introduction of such testing it is necessary to provide certain conditions and take appropriate measures. The system to be tested should be easy to test. Choosing the proper testing tool is one of the most important measures and has a number of particular requirements. It must provide for the introduction of automated test cases, monitoring and control of automated tests and must support the interpretation of test results, as well as the presentation of test results in the form of reports, logging or graphs [1]. The Jmeter performance testing tool meets all of those requirements. Jmeter supports automated recording and playback testing technology, which supports the introduction of automated test cases. To demonstrate the test results in the form of tables, graphs, charts (View Result Tree), the "Listeners" special components are provided. The article presents an overview of existing types of performance testing. The test plan by using the Jmeter tool is considered. The possibility of obtaining the results by compiling and analyzing tests while ensuring the appropriate quality and usability is shown. Software testing is one of the most important steps in software development. The universal approach to test development is complicated by large amount of data, as well as the availability of various testing techniques and tools. The computing performance testing of applications is of particular importance. Compared to other types of testing, it is extremely complex and requires specific skills. Performance is mainly tested by automated methods, but in the parametric study of applications, statistical testing becomes important.

Keywords: *performance testing, automation, tool, Jmeter, load.*

1 Принципы тестирования производительности

Тестирование производительности играет важную роль для достижения необходимого уровня качества программного продукта, а также обеспечения удобства его использования (Usability) потенциальным пользователем. Характеристики функциональной пригодности и удобства использования тестируемых приложений оцениваются при условиях интенсивной нагрузки и длительного использования. Эффективность испытуемой системы по показателю производительности оценивается в соответствии с международным стандартом ISO 25010 [1].

Общепринятыми являются три основных показателя, характеризующих производительность программного продукта [2]:

Оценка времени отклика. Это самая распространенная задача при тестировании производительности. Этот аспект тестирования определяет способность компонентов или системы отвечать пользователю или системе за определенное время при определенных условиях.

Использование ресурсов. Доступность ресурсов (например, распределение оперативной памяти) может быть исследовано при проведении определенных тестов по производительности.

Мощность. Если поведение системы при требуемой мощности ограничивает систему (например, количество пользователей или объем данных), тесты по производительности могут быть необходимы, чтобы оценить пригодность архитектуры системы.

Тестирование производительности происходит экспериментально, при этом должны быть доступны измерения и анализ специфических системных параметров. Тестирование может быть проведено итерационно при системном анализе, дизайне и имплементации архитектурного решения.

При тестировании производительности используются следующие принципы [2]:

тесты должны отвечать ожиданиям пользователей, дизайнеров и персонала;

тесты должны быть воспроизводимыми, то есть повторение тестов на неизменной системе должно приводить к статистически идентичным результатам;

результаты по тестированию производительности должны быть понятны и легко сопоставимы с ожиданием пользователя;

тесты могут быть проведены с использованием доступных ресурсов – на полной или частичной системе;

тесты должны быть доступны и исполняемы в отведенное время.

2 Типы тестирования производительности

Для тестирования производительности могут быть определены различные типы тестов, которые зависят от целей тестирования [2,3,4].

Термин «тестирование производительности» (Performance Testing) включает в себя любое тестирование, которое сфокусировано на производительности (ответной реакции, скоростных показателях) системы или компонентов под различными объемами и характерами нагрузки.

Нагрузочное тестирование (Load Testing) фокусируется на способности системы справляться с возрастающими уровнями ожидаемой нагрузки, возникающей в результате запросов конкурирующих пользователей или процессов. Кроме того, это исследование робастности (запаса прочности) – способности системы сохранять заданные показатели качества при допустимых пределах нагрузки и при некотором превышении этих пределов.

Стрессовое тестирование (Stress Testing) фокусируется на способности системы или компонентов поддерживать пиковые нагрузки, которые находятся на уровне или превышают пределы ожидаемых. Фактически, это исследование поведения приложения при «аномальных» изменениях нагрузки. Данный тип тестирования также используется для того, чтобы оценить способность системы поддерживать показатели, такие как доступная компьютерная мощность, доступная полоса пропускания и память.

Тестирование масштабируемости (Scalability Testing) проверяет способность системы увеличивать свою производительность. Цель этих тестов – определить способность системы расти (например, с большим количеством пользователей, с большим объемом данных) без нарушения определенных требований по производительности. Другими словами, это исследование способности приложения увеличивать показатели производительности в соответствии с увеличением количества доступных приложению ресурсов.

Объемное тестирование (Volume Testing) – исследование производительности системы при обработке различных объемов данных.

Всплесковое тестирование (Spike testing) – основывается на способности системы отвечать корректно при внезапных всплесках пиковых нагрузок и возвращении впоследствии к номинальному состоянию.

Тестирование на выносливость (Endurance Testing) фокусируется на стабильности системы. Этот тип тестирования проверяет наличие проблем с ресурсами (например, нехватка памяти, соединение с базой данных, потоками), которые влияют на производительность, или могут служить причинами сбоев в критических точках.

Тестирование надежности (Reliability Testing) – очень близкое по своему смыслу к предыдущему виду тестирования. Это проверка способности приложения выполнять свои функции в заданных условиях на протяжении заданного времени или заданного количества операций.

Конкурентное тестирование (Concurrency Testing) фокусируется на влиянии ситуации, в которой одновременно происходят множественные специфические действия (например, одновременная работа большого количества пользователей). При этом исследуется поведение системы при обработке большого количества одновременно поступающих запросов, что вызывает конкуренцию между запросами за ресурсы (базу данных, память, канал передачи данных, дисковую систему). Иногда под конкурентным тестированием понимают также исследование работы многопоточного приложения и корректность синхронизации действий.

Тестирование мощности (Capacity Testing) определяет, как много пользователей может обслуживать система.

При тестировании производительности различают статическое и динамическое тестирование.

Статическое тестирование зачастую более важно для тестирования производительности, чем тестирование функциональной пригодности. Это является следствием того, что очень много критических дефектов вносятся в архитектуру и дизайн системы на этапе проектирования. Дефекты могут возникать из-за недопонимания или недостатка знаний дизайнеров и архитекторов. Функциональные требования, цели использования, ожидаемая нагрузка и существующие ограничения могут быть недостаточно изучены в условиях дефицита времени.

Мероприятия при тестировании производительности могут предусматривать:

- просмотр требований, которые сфокусированы на аспектах производительности и рисков;
- просмотр схем баз данных, диаграмм, процедур и запросов;
- просмотр систем и архитектуры;
- просмотр критических сегментов и системного кода (например, алгоритмов).

Динамическое тестирование должно проводиться на всех уровнях тестирования, то есть во время модульного, интеграционного, системного и приемочного.

3 Использование инструмента JMeter для тестирования производительности

Apache JMeter – открытое программного обеспечение. Это приложение, которое используется Java для тестирования функционального поведения и производительности приложений [4].

Рассмотрим пример, в котором для исследования производительности была использована версия Apache JMeter (2.11.20151206) (рисунок 3.1), на виртуальной машине VirtualBox под управлением операционной системы Ubuntu. Тестированию подвергалось веб-приложение. Для тестирования был записан тест-план для трех ссылок (рисунок 3.2).

Перечень элементов, из которых возможно составление тест планов в JMeter:

- Группы потоков (Thread groups);
- Логические контроллеры (Logic controller);
- Типовые контроллеры (Sample generating controller);
- Слушатели (Listeners);
- Таймеры (Timers);
- Соответствия (Assertions);

- Конфигурационные элементы (Configuration elements).

Thread groups – начальные точки любого тест плана (рисунок 3.2). Все контроллеры и образцы должны быть в группе потоков. Другие элементы, такие как слушатели, могут располагаться под тест паном, в котором они применяются для всех потоков групп. Элемент группы потоков управляет количеством потоков, который JMeter будет использовать для выполнения теста.

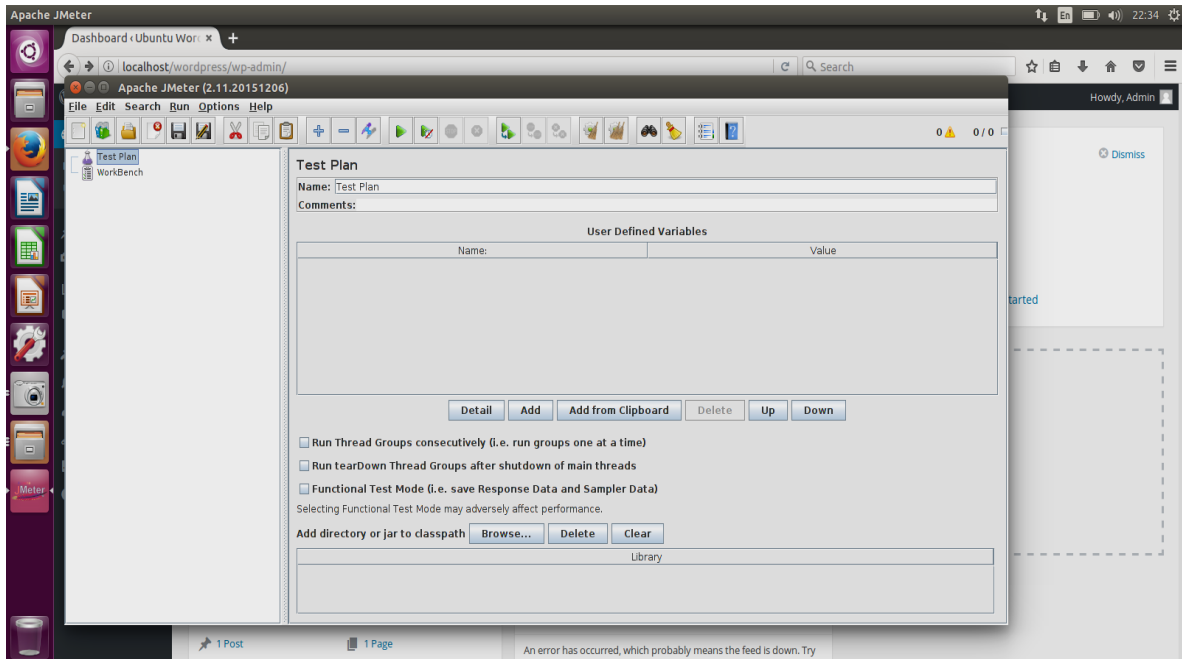


Рисунок 3.1 – Графический интерфейс инструмента для измерения производительности Apache JMeter

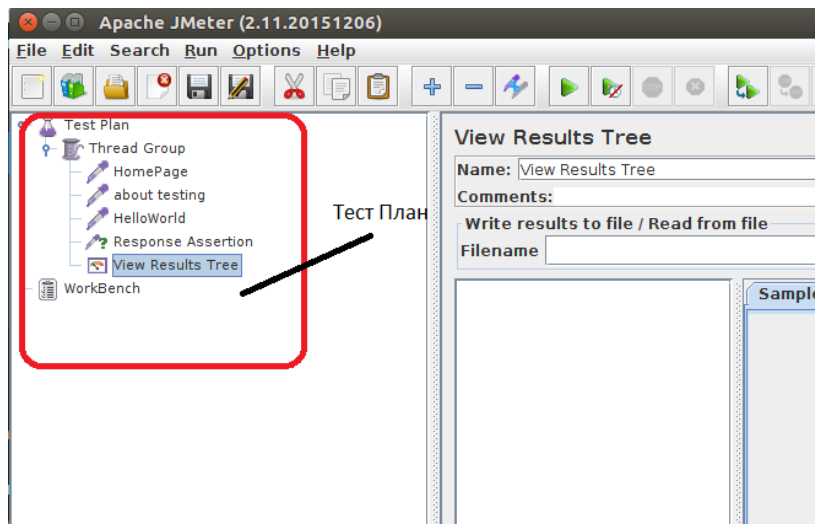


Рисунок 3.2 – Составление тест плана Apache JMeter

Listener – это компонент, который показывает результаты образцов. Результаты могут быть показаны в дереве, таблице, графах или записаны в лог-файл. К примеру, в тест-плане на рисунке 3.2 выбран Listener view result tree, при помощи которого получают результаты в виде таблиц и графиков (рисунки 3.3, 3.4, 3.5).

При системном динамическом тестировании систему тестируют в зависимости от характера нагрузки. При этом можно выделить возможные варианты тестов:

Наращивание нагрузки (Ramp up) – позволяет определить точку насыщения (Saturation point), т.е. показатель нагрузки, при которой производительность системы начинает ухудшаться. Проведение нескольких Ramp up тестов при увеличении доступных аппаратных ресурсов позволяет определить степень масштабируемости системы (Scalability).

Низкая, средняя и высокая нагрузка (Low, Mid, High-Load) – позволяет определить время отклика системы

Тест на выживание (Longevity Test) показывает способность системы работать под достаточно высокими нагрузками.

Requests	Executions			Response Times (ms)						Network (KB/sec)		
	Label	#Samples	KO	Error %	Average	Min	Max	90th pct	95th pct	99th pct	Throughput	Received
Total	3	0	0.00%	686.00	171	1691	1691.00	1691.00	1691.00	1.39	7.46	0.53
HelloWorld	1	0	0.00%	171.00	171	171	171.00	171.00	171.00	5.85	31.49	2.30
about testing	1	0	0.00%	196.00	196	196	196.00	196.00	196.00	5.10	27.47	2.01
HomePage	1	0	0.00%	1691.00	1691	1691	1691.00	1691.00	1691.00	0.59	3.16	0.21

а – один пользователь

Requests	Executions			Response Times (ms)						Network (KB/sec)		
	Label	#Samples	KO	Error %	Average	Min	Max	90th pct	95th pct	99th pct	Throughput	Received
Total	60	0	0.00%	6712.95	1202	15346	12743.80	14691.15	15346.00	2.61	14.04	0.99
about testing	20	0	0.00%	5590.90	2960	11967	8934.90	11817.05	11967.00	1.60	8.61	0.63
HelloWorld	20	0	0.00%	2726.60	1202	6194	4079.80	6089.45	6194.00	1.95	10.49	0.77
HomePage	20	0	0.00%	11821.35	8851	15346	15002.10	15330.35	15346.00	1.30	6.95	0.45

б – двадцать пользователей

Requests	Executions			Response Times (ms)						Network (KB/sec)		
	Label	#Samples	KO	Error %	Average	Min	Max	90th pct	95th pct	99th pct	Throughput	Received
Total	90	0	0.00%	9888.14	762	17887	16642.40	17493.40	17887.00	2.79	14.99	1.06
about testing	30	0	0.00%	9411.87	6048	16852	13421.00	16752.45	16852.00	1.48	7.97	0.58
HelloWorld	30	0	0.00%	6208.00	762	12802	10199.10	12660.65	12802.00	2.18	11.72	0.86
HomePage	30	0	0.00%	14044.57	10973	17887	17545.20	17792.95	17887.00	1.67	8.94	0.58

в – тридцать пользователей

Requests	Executions			Response Times (ms)						Network (KB/sec)		
	Label	#Samples	KO	Error %	Average	Min	Max	90th pct	95th pct	99th pct	Throughput	Received
Total	150	0	0.00%	16015.81	1068	29622	23844.70	25834.25	29616.90	2.90	15.55	1.10
about testing	50	0	0.00%	14687.74	10782	29622	20876.00	25701.00	29622.00	1.47	7.91	0.58
HelloWorld	50	0	0.00%	11765.00	1068	20325	16962.20	19746.70	20325.00	2.32	12.52	0.91
HomePage	50	0	0.00%	21594.70	16090	29612	25953.50	27546.05	29612.00	1.69	9.01	0.59

г – пятьдесят пользователей

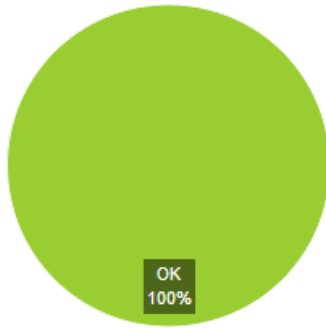
Requests	Executions			Response Times (ms)						Network (KB/sec)		
	Label	#Samples	KO	Error %	Average	Min	Max	90th pct	95th pct	99th pct	Throughput	Received
Total	300	0	0.00%	28937.40	263	72619	38236.30	42575.30	60841.37	2.95	15.84	1.12
about testing	100	0	0.00%	27553.36	20936	72619	38329.30	57033.75	72515.62	1.31	7.05	0.52
HelloWorld	100	0	0.00%	25833.86	263	46713	29418.70	38150.05	46689.90	1.88	10.13	0.74
HomePage	100	0	0.00%	33424.98	24830	44574	40439.40	42043.90	44570.40	2.24	11.96	0.78

д – сто пользователей

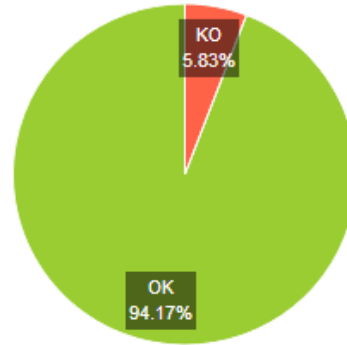
Requests	Executions			Response Times (ms)						Network (KB/sec)		
	Label	#Samples	KO	Error %	Average	Min	Max	90th pct	95th pct	99th pct	Throughput	Received
Total	600	35	5.83%	83855.28	1341	298704	161982.70	224214.60	291610.34	1.96	10.22	0.70
about testing	200	0	0.00%	76435.19	3699	224511	138996.50	194904.25	211290.60	0.80	4.29	0.31
HelloWorld	200	0	0.00%	56802.41	1341	169677	88192.50	127971.45	161631.09	1.09	5.89	0.43
HomePage	200	35	17.50%	118328.24	51271	298704	261944.20	285946.95	297426.02	0.67	3.24	0.19

е – двести пользователей

Рисунок 3.3 – Статистика часа отклика для различного количества пользователей



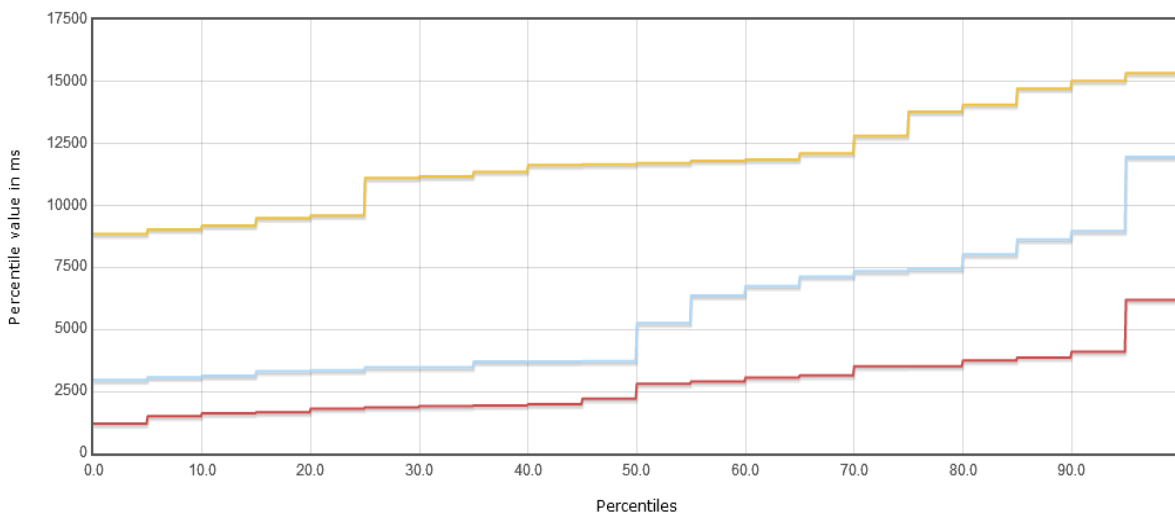
а – один пользователь



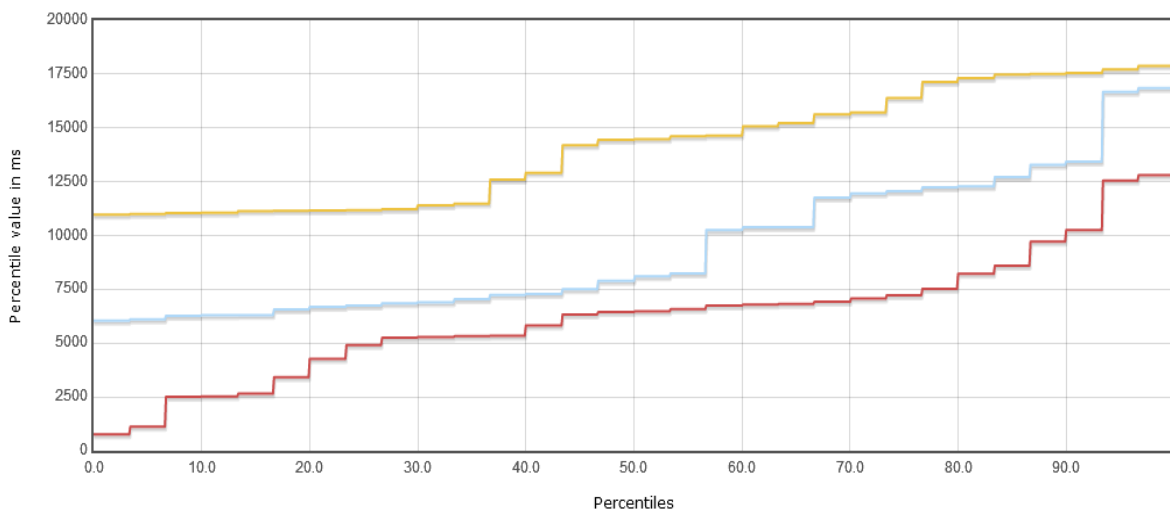
б – двести пользователей

Рисунок 3.4 – Описание запроса (Summary Request)

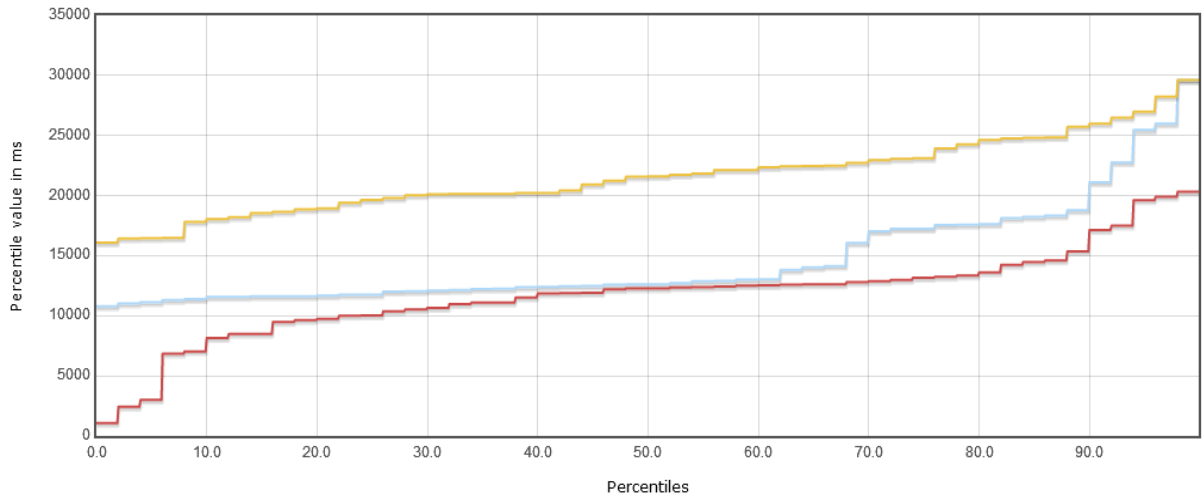
Тест „час пик” (Rush Hour Test) позволяет оценить реакцию системы на резкое изменение нагрузки. Рассмотрим статистику выполнения тестов на производительность для различного количества пользователей (рисунок 3.3, 3.4, 3.5). При увеличении количества пользователей было бы неплохим результатом линейное увеличение время отклика. В таблицах 3.1 и 3.2 приведены реальное и ожидаемое поведение системы. По этим данным построен график зависимости времени отклика от количества пользователей (рисунок 3.6).



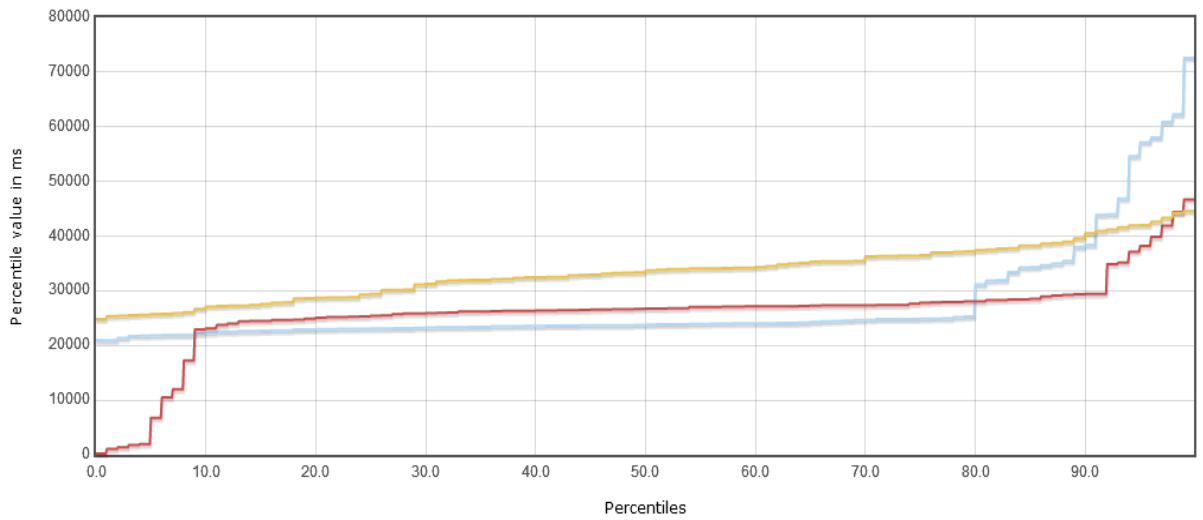
а – двадцать пользователей



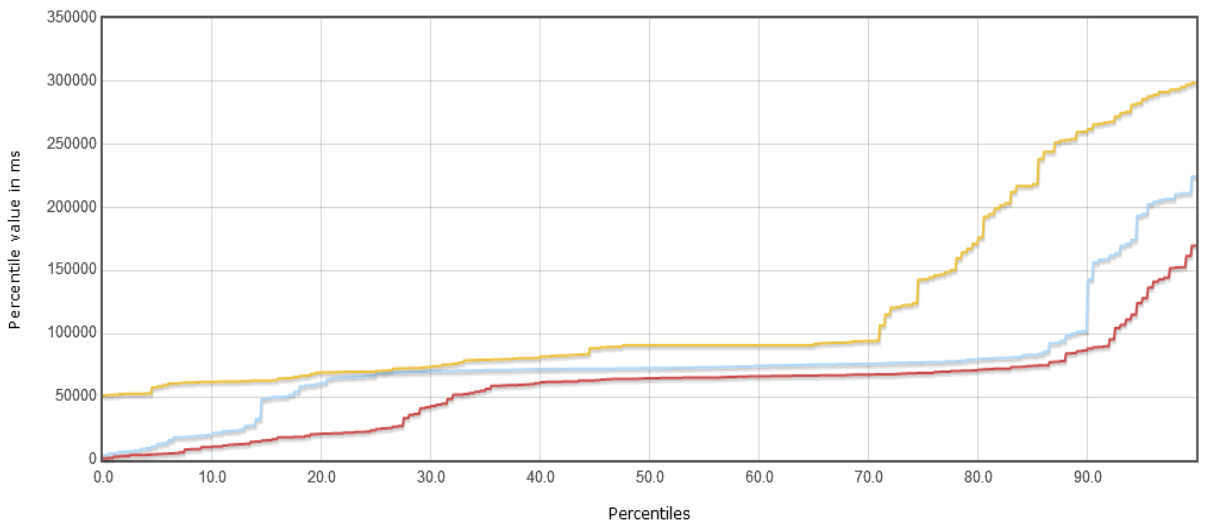
б – тридцать пользователей



в – пятьдесят пользователей



г – сто пользователей



д – двести пользователей

Рисунок 3.5 – Среднее время отклика сервера на запрос пользователя при разной нагрузке сервера

Таблиця 3.1 – Реальное поведение системы

Ссылка	Количество пользователей						
	1	20	30	50	100	200	300
1	171	5590	9411	14687	27553	76435	119345
2	196	2726	6208	11765	2533	56802	123664
3	1691	11821	14044	21594	33424	118328	123820

Таблиця 3.2 – Ожидаемое поведение системы

Ссылка	Количество пользователей						
	1	20	30	50	100	200	300
1	171	3420	5130	8550	17100	34200	51300
2	196	3920	5880	9800	19600	39200	58800
3	1691	33820	50730	84550	169100	338200	507300

Пример составления тест-план показан на рисунке 3.7. В него следует добавить Thread Group – Requesting home page, HTTP запрос, Слушатели (Listeners) View Result.

Tree Graph Results – дерево ответов всех образцов, позволяют увидеть отклик для всех образцов. В добавление к показу отклика индицируется время этого отклика (Sampler Result – рисунок 3.8) и некоторые коды этих откликов (например, в HTML формате – рисунок 3.9).

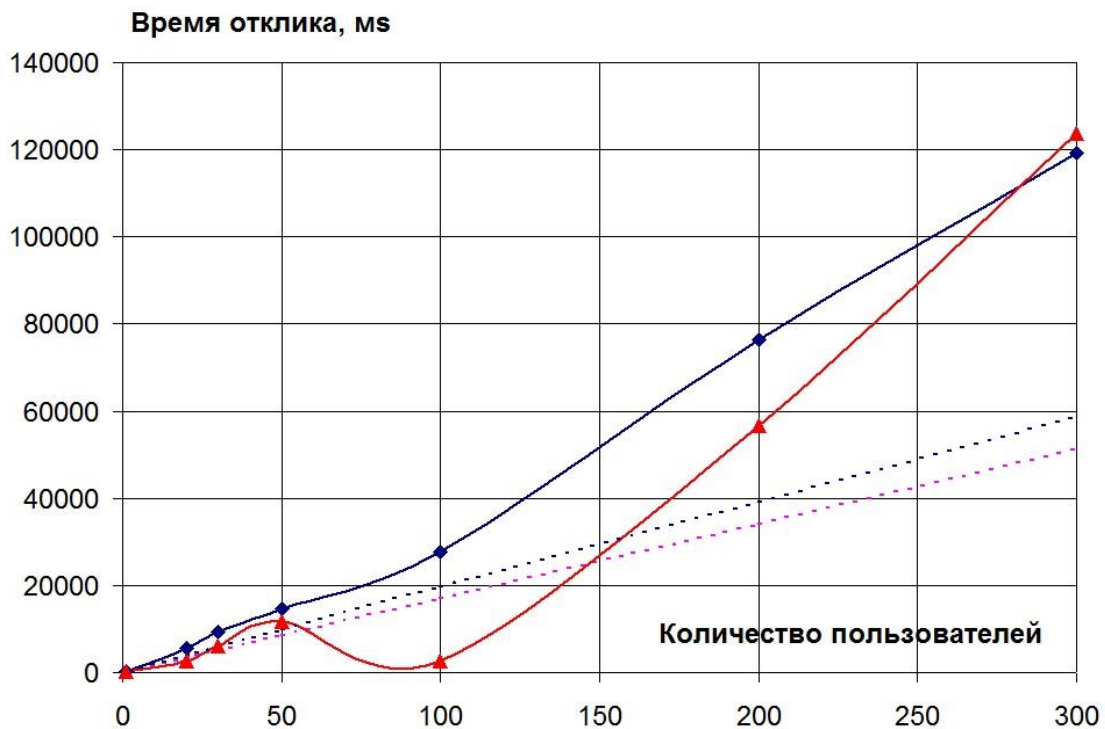


Рисунок 3.6 – Зависимость времени отклика от количества пользователей основная линия – реальное поведение системы, пунктирная линия – ожидаемый результат

Инструмент Jmeter также позволяет тестировать API (Application programming interface). У этого вида тестирования существуют преимущества, в сравнении с GUI (Graphic User interface) тестированием:

- 1) На этапе раннего тестирования, поскольку вначале разрабатывается API, а потом уже графический интерфейс, существует возможность проверить логику раньше, чем появится GUI.
- 2) Графического интерфейса вообще может не быть.

3) Скорость – вызвать один запрос занимает доли секунды. А вот через интерфейс повторить процедуру бывает сложно.

4) Автоматизация – даже если нет автоматизированных тестов на уровне API приложения, всегда можно их создать вручную через Jmeter.

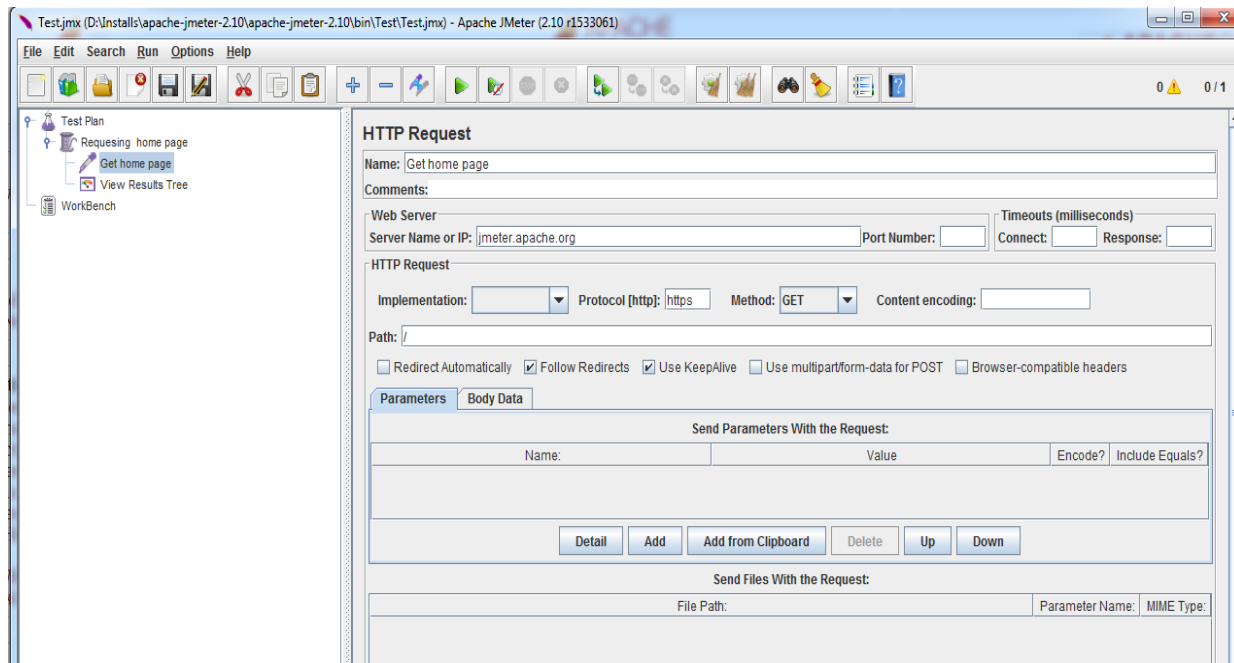


Рисунок 3.7 - Заполнение HTTP запроса

После запуска тест плана, можно увидеть ответ на запрос (рисунок 3.8), сообщение (отклик 200 OK). Если имеются какие-либо проблемы, то сообщение будет выглядеть следующим образом – рисунок 3.9. Результат запуска тест-плана при выполнении Graph Result показан на рисунке 3.8.

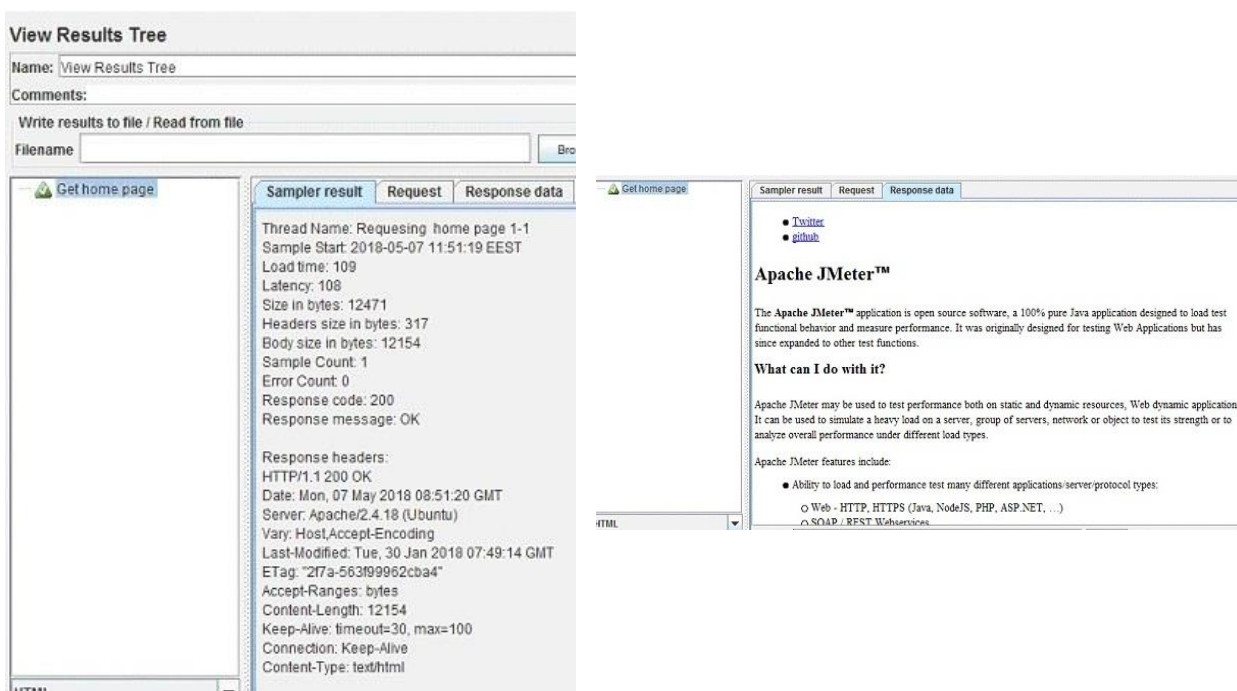


Рисунок 3.8 – Результат запуска тест-плана при выполнении View Result Tree

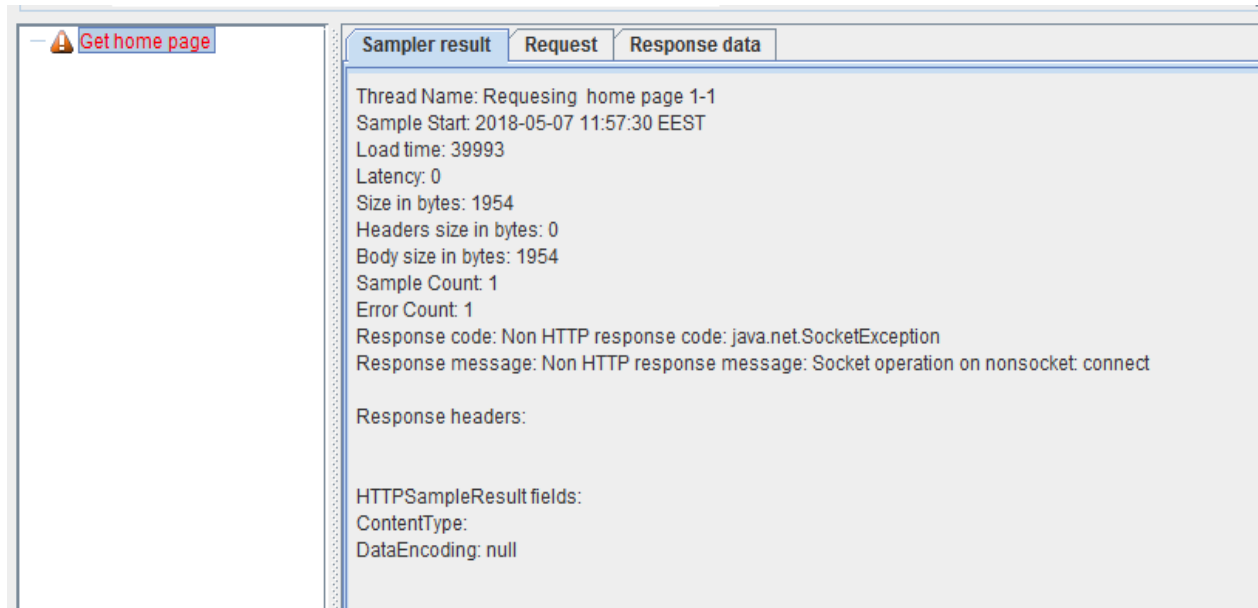


Рисунок 3.9 - Результат запуску тест-плану при виконанні View Result Tree

Выводы

Тестирование производительности – очень сложный и ответственный этап разработки программного обеспечения. Рассмотренная классификация видов тестовых испытаний является, фактически, полнофункциональной замкнутой системой всесторонней оценки качества программных продуктов. При динамическом системном тестировании приложений, тесты разрабатываются на основе функциональных требований исходя из уровня предполагаемой нагрузки на проектируемую систему.

Одним из наиболее эффективных инструментов автоматизированной реализации объективной количественной оценки показателей качества является приложение JMeter. Рассмотренные этапы использования данного инструмента можно рассматривать, как практическое руководство для специалистов-тестировщиков. Особенно ответственным является этап составления тест-плана, которому мы уделили особое внимание в тексте данной работы. Приведенная схема тестирования производительности веб-приложения, иллюстрирует возможности получения количественных данных для анализа производительности в условиях различных уровней нагрузки. Удобство и практическая ценность JMeter заключается в достаточной информативности и иллюстративности результатов испытаний (таблицы и графики) для всестороннего анализа выполнения требований по производительности.

Существенным преимуществом инструмента JMeter является его приспособленность для осуществления API тестирования, позволяющего не только оценить комфортность перспективной эксплуатации программного продукта, но и выявить возможные дефекты логики выполнения вычислительных алгоритмов.

ЛІТЕРАТУРА

1. URL: <https://iso25000.com/index.php/en/iso-25000-standards/iso-25010> (Last accessed: 23.03.2020).
2. Advanced-Test-Automation-Engineer-Syllabus-GA-2016 URL: <https://www.istqb.org/downloads/category/48-advanced-level-test-automation-engineer-documents.html> (Last accessed: 23.03.2020).
3. Куликов С. Тестирование программного обеспечения. Базовый курс. 2017. 297 с. URL: http://svyatoslav.biz/software_testing_book/ (Last accessed: 23.03.2020).
4. Jmeter URL: <https://jmeter.apache.org/> (Last accessed: 23.03.2020).

REFERENCES

1. URL: <https://iso25000.com/index.php/en/iso-25000-standards/iso-25010> (Last accessed: 23.03.2020). [in English]
2. Advanced-Test-Automation-Engineer-Syllabus-GA-2016 URL: <https://www.istqb.org/downloads/category/48-advanced-level-test-automation-engineer-documents.html> (Last accessed: 23.03.2020). [in English]
3. Kulikov S. Software Testing. Basic course. 2017.297 s. URL: http://svyatoslav.biz/software_testing_book/ (Last accessed: 03.23.2020). [In Russian]
4. Jmeter URL: <https://jmeter.apache.org/> (Last accessed: 23.03.2020). [in English]

Мелкозьорова Ольга Михайлівна – кандидат технічних наук; доцент кафедри безпеки інформаційних систем і технологій, Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: olja.mex@gmail.com; ORCID: 0000-0002-1134-2925.

Melkozerova Olga M., PhD; Associate Professor of Information Systems and Technologies Security Department V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, ; e-mail: olja.mex@gmail.com; ORCID: 0000-0002-1134-2925.

Мелкозерова Ольга Михайловна – кандидат технических наук, доцент кафедры безопасности информационных систем и технологий, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: olja.mex@gmail.com; ORCID: 0000-0002-1134-2925.

Рассомахін Сергій Геннадійович – доктор технічних наук; завідувач кафедри безпеки інформаційних систем і технологій, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: rassomakhin@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-1394-3588.

Rassomakhin Sergiy G., PhD; Doctor of Science, Professor, Head of Department of Information Systems and Technologies Security V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, e-mail: rassomakhin@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-1394-3588.

Рассомахин Сергей Геннадиевич – доктор технических наук, заведующий кафедры безопасности информационных систем и технологий, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: rassomakhin@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-1394-3588.

UDC 519.252+519.226

Empirical probability distribution validity based on accumulating statistics of observations by controlling the moving average and root-mean-square deviation

V.V. Romanuke

O.S. Popov Odessa National Academy of Telecommunications, Ukraine

e-mail: romanukevadimv@gmail.com

Knowing probability distributions for calculating expected values is always required in the engineering practice and other fields. Commonly, probability distributions are not always available. Moreover, the distribution type may not be reliably determined. In this case, an empirical distribution should be directly built based just on observations. So, the goal is to develop a methodology of accumulating and processing observation data so that the respective empirical distribution would be close enough to the unknown real distribution. For this, criteria regarding sufficiency of observations and the distribution validity are to be substantiated. As a result, a methodology is presented that considers the empirical probability distribution validity with respect to the parameter's expected value. Values of the parameter are registered during a period of observations or measurements of the parameter. On this basis, empirical probabilities are calculated, where every next period the previous registration data are used as well. Every period gives an approximation to the parameter's expected value using those empirical probabilities. The methodology using the moving averages and root-mean-square deviations asserts that the respective empirical distribution is valid (i. e., it is sufficiently close to the unknown real distribution) if the parameter's expected value approximations become scattered very little for at least the three window multiple-of-2 widths by three successive windows. This criterion also implies the sufficiency of observation periods, although the sufficiency of observations per period is not claimed. The validity strongly depends on the volume of observations per period.

Key words: *empirical probability distribution; accumulation of statistics; a moving average; root-mean-square deviation; observations; measurements; an expected value approximation.*

Знання розподілів ймовірностей для обчислення очікуваних значень завжди потрібно в інженерній практиці та інших сферах. Зазвичай ймовірнісні розподіли не завжди доступні. Більше того, тип розподілу може бути невірно визначений. У цьому випадку емпіричний розподіл має бути побудований безпосередньо на основі спостережень. Тому мета полягає у розробці такої методології накопичення та обробки даних спостережень, щоб відповідний емпіричний розподіл був досить близьким до невідомого реального розподілу. Для цього слід обґрунтувати критерії щодо достатності спостережень та обґрунтованості розподілу. В результаті представляється методологія, яка розглядає обґрунтованість емпіричного розподілу ймовірностей відносно очікуваного значення параметра. Значення параметра реєструються протягом періоду спостережень або вимірювань цього параметра. На цій основі обчислюються емпіричні ймовірності, де кожного наступного періоду попередні дані реєстрації також використовуються. Використовуючи ці емпіричні ймовірності, кожен період дає апроксимацію очікуваного значення параметра. Використовуючи ковзні середні та середньоквадратичні відхилення, методологія стверджує, що відповідний емпіричний розподіл є дійсним (тобто він достатньо близький до невідомого реального розподілу), якщо апроксимації очікуваного значення параметра стають дуже мало розсіяними принаймні для трьох вікон, довжини яких кратні 2, упродовж трьох послідовних вікон. Цей критерій також передбачає достатність періодів спостережень, хоча про достатність спостережень за період не стверджується. Обґрунтованість сильно залежить від обсягу спостережень за період.

Ключові слова: *емпіричний розподіл ймовірностей; накопичення статистики; ковзне середнє; середньоквадратичне відхилення; спостереження; вимірювання; апроксимація очікуваного значення.*

Знание распределений вероятностей для вычисления ожидаемых значений всегда нужно в инженерной практике и других сферах. Обычно вероятностные распределения не всегда доступны. Более того, тип распределения может быть неверно определен. В этом случае эмпирическое распределение должно быть построено непосредственно на основе наблюдений. Поэтому цель заключается в разработке такой методологии накопления и обработки данных наблюдений, чтобы соответствующее эмпирическое распределение было достаточно близким к неизвестному реальному распределению. Для этого следует обосновать критерии достаточности наблюдений и обоснованности распределения. В результате представляется методология, которая рассматривает обоснованность эмпирического распределения вероятностей относительно ожидаемого значения параметра. Значения параметра регистрируются в течение периода наблюдений или измерений этого параметра. На этой основе вычисляются эмпирические вероятности, где в каждом следующем периоде предварительные данные регистрации также используются. Используя эти эмпирические вероятности, каждый период дает аппроксимацию ожидаемого значения параметра. Используя скользящие средние и среднеквадратические отклонения, методология утверждает, что соответствующее эмпирическое распределение является действительным (то есть оно достаточно близко к неизвестному реальному распределению), если аппроксимации ожидаемого значения параметра становятся очень мало рассеянными по крайней мере для трёх окон, длины которых кратны 2, в течение трёх последовательных окон. Этот критерий также предусматривает достаточность периодов наблюдений, хотя о достаточности наблюдений за период не утверждается. Обоснованность сильно зависит от объёма наблюдений за период.

Ключевые слова: *эмпирическое распределение вероятностей; накопление статистики; скользящее среднее; среднеквадратическое отклонение; наблюдения; измерения; аппроксимация ожидаемого значения.*

The problem of probability distribution estimations

The engineering practice and many other fields dealing with uncertainties always require knowing probability distributions for calculating expected values. Commonly, probability distributions are not always available, unless a presumption about a distribution is given a priori. Even the type of the probability distribution may be unknown [1]. In particular, however, if the probability distribution type is presumed to be given, the distribution parameters still need to be estimated [2]. This leads to a series of additional tasks like substantiation of the estimation procedure for each parameter, suggestion of a criterion of reliability or validity, control of stability, preservation of unbiasedness, etc. On the other hand, when the distribution type is unknown or its determination requires resources which exceed available or reasonable expenses, the problem of probability distribution estimation might be solved without learning the distribution type [3]. In this case, an empirical distribution is built directly from the observations [1, 2, 4]. Nevertheless, this approach can lead to multiple probability distribution estimations inasmuch as criteria of validity and sufficiency of observations have not been suggested and studied yet [5].

Goal

Due to the lack of a theoretical approach to building valid and stable empirical distributions directly, the goal is to develop a methodology of accumulating and processing observation data so that the respective empirical distribution would be close enough to the unknown real distribution. Therefore, a criterion of sufficiency of observations should be formulated. Besides, a supporting criterion of the distribution validity is to be substantiated. The methodology will be thoroughly discussed and practical aspects of its implementation will be underlined.

Empirical probabilities obtained from observations

Let x be a value of a parameter whose probability distribution is to be estimated. The step along the abscissa axis of the distribution is defined by the accuracy of measuring or observing this parameter. Indeed, if x_{\min} is the minimal value of the parameter, whose accuracy is α , then only probabilities of values

$$x_{\min}, x_{\min} + \alpha, x_{\min} + 2\alpha, \dots, x_{\min} + h_{\max}\alpha \quad (1)$$

are of interest, where h_{\max} is an integer and $x_{\max} = x_{\min} + h_{\max}\alpha$ is the maximal value of the parameter.

Suppose that value $x = x_{\min} + h\alpha$ is registered $u_h^{(1)}$ times during a period of observations or measurements of the parameter. Obviously, $u_h^{(1)} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ by $h = \overline{0, h_{\max}}$. Then the very first rough distribution estimation is a set of relative frequencies

$$P_h^{(1)} = u_h^{(1)} / \sum_{i=0}^{h_{\max}} u_i^{(1)} \quad \text{by } h = \overline{0, h_{\max}}. \quad (2)$$

Relative frequencies (2) are empirical probabilities after the first (initial) observation period.

Accumulation of statistics

The next period the parameter is continued to be observed (measured), and value $x = x_{\min} + h\alpha$ is registered $u_h^{(2)}$ times, $u_h^{(2)} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. The second estimation of the distribution can use now both counts $\{u_h^{(2)}\}_{h=0}^{h_{\max}}$ and $\{u_h^{(1)}\}_{h=0}^{h_{\max}}$. Therefore, a set of empirical probabilities

$$P_h^{(2)} = (u_h^{(1)} + u_h^{(2)}) / \sum_{i=0}^{h_{\max}} (u_i^{(1)} + u_i^{(2)}) \quad \text{by } h = \overline{0, h_{\max}} \quad (3)$$

becomes the second distribution estimation.

This process can be continued until a stop criterion fires or by other critical circumstances (events). In general, when value $x = x_{\min} + h\alpha$ is registered $u_h^{(m)}$ times during the m -th period of observations, a set of empirical probabilities

$$P_h^{(m)} = \sum_{j=1}^m u_h^{(j)} / \sum_{i=0}^{h_{\max}} \sum_{j=1}^m u_i^{(j)} \quad \text{by } h = \overline{0, h_{\max}} \quad (4)$$

becomes the m -th distribution estimation, $m = 1, 2, 3, \dots$ (there is no constraint to the number of observation periods).

A sequence of the parameter's expected value approximations

It is uncertain whether empirical probabilities (4) obtained from a series of periods of observations are close enough to the unknown real distribution. This is so because they cannot be compared, even roughly, to an available pattern. Nevertheless, such a pattern may exist for the parameter. Therefore, it is reasonable to consider an approximation to the parameter's expected value using empirical probabilities (4):

$$\tilde{x}_m = \sum_{h=0}^{h_{\max}} (x_{\min} + h\alpha) P_h^{(m)} = \sum_{h=0}^{h_{\max}} \left((x_{\min} + h\alpha) \sum_{j=1}^m u_h^{(j)} \right) / \sum_{i=0}^{h_{\max}} \sum_{j=1}^m u_i^{(j)} \quad \text{by } h = \overline{0, h_{\max}} \text{ and } m = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Eventually, the expected value approximations $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots$ can be used to develop and substantiate the criteria of sufficiency of observations and the distribution validity.

The moving average and root-mean-square deviation

Obviously, using the law of large numbers, the sequence of the parameter's expected value approximations $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots$ is expected to converge to the unknown expected value of this parameter (if the observations or measurements are performed methodologically and instrumentally unbiased). Although some information about the unknown expected value may be available, it is still impossible to confidentially claim how close the approximations are to the unknown value. However, it is possible to study how badly approximations $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots$ are scattered, and whether the scattering decreases as m increases.

Let Δt be a window between measurement periods $(l-1)\Delta t + 1$ and $l\Delta t$, where $\Delta t \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (the case with $\Delta t = 1$ does not make sense as then the window is "singular"), $l = 1, 2, 3, \dots$ (there is no constraint to the number of such windows). Then the average of the parameter's expected value approximations across this window is

$$\tilde{x}[(l-1)\Delta t + 1, l\Delta t] = \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=(l-1)\Delta t + 1}^{l\Delta t} \tilde{x}_m \quad (l = 1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

The root-mean-square deviation of this average (across window Δt) is the square root of its variance:

$$\sigma_{\tilde{x}}[(l-1)\Delta t + 1, l\Delta t] = \sqrt{\frac{1}{\Delta t} \sum_{m=(l-1)\Delta t + 1}^{l\Delta t} (\tilde{x}_m - \tilde{x}[(l-1)\Delta t + 1, l\Delta t])^2} \quad (l = 1, 2, 3, \dots) \quad (7)$$

The moving average (6) and the respective root-mean-square deviation (7) depend on the window. Fig. 1 shows an example of calculating values (6) and (7) by $\Delta t = 400$ along 2000 observation periods. The averages in windows 2 — 5 are rather close. Fig. 2 shows how the moving averages and deviations change when the window is twice as narrow as the previous one.

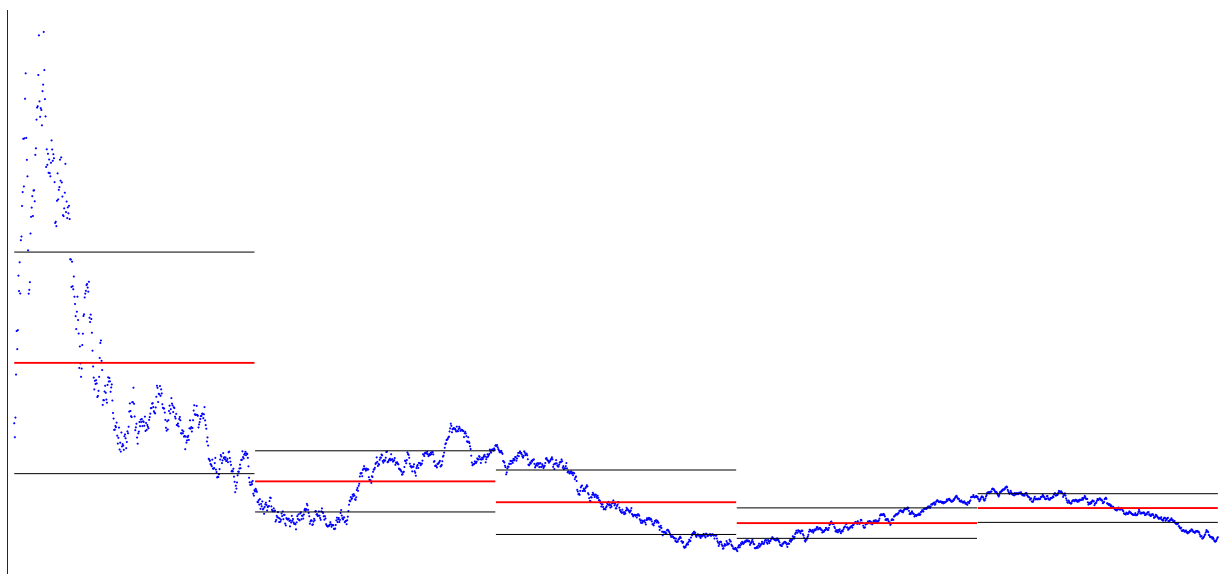


Fig. 1. An example of the moving averages and the respective deviations bounding the averages by $\Delta t = 400$

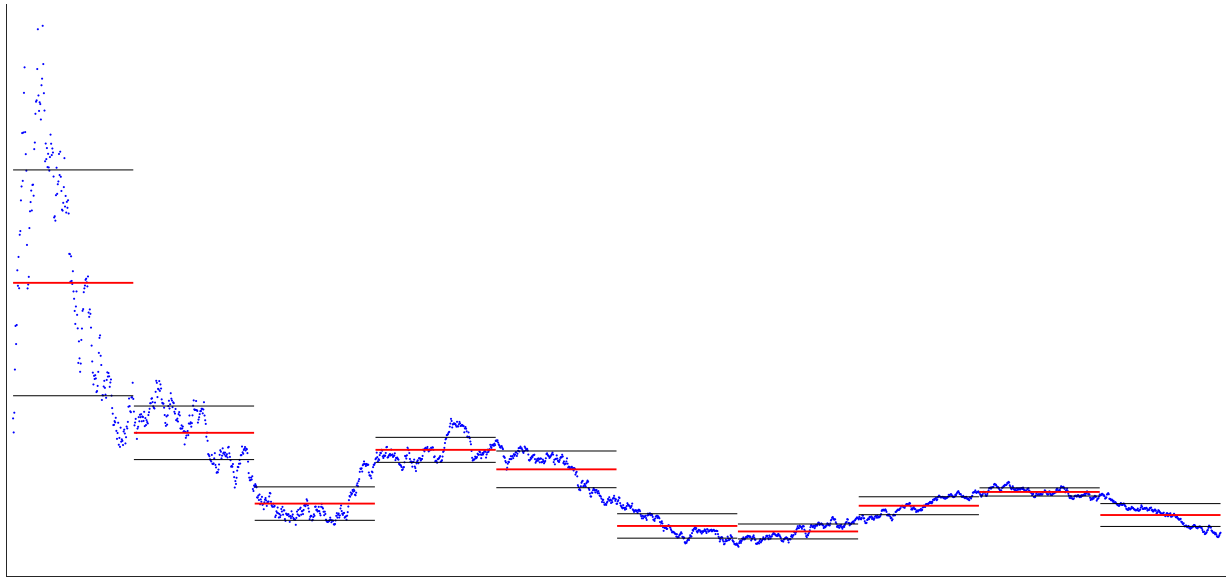


Fig. 2. The example (see Fig. 1) of the moving averages and the bounding deviations by $\Delta t = 200$

It is well seen from the shown example how the moving averages may disperse as the window is made narrower. Indeed, the example supplemented with Fig. 3 by $\Delta t = 50$ (an extremely short length for this example) shows that the narrow moving averages roughly reproduce the wave with two maxima and the minimum between them.

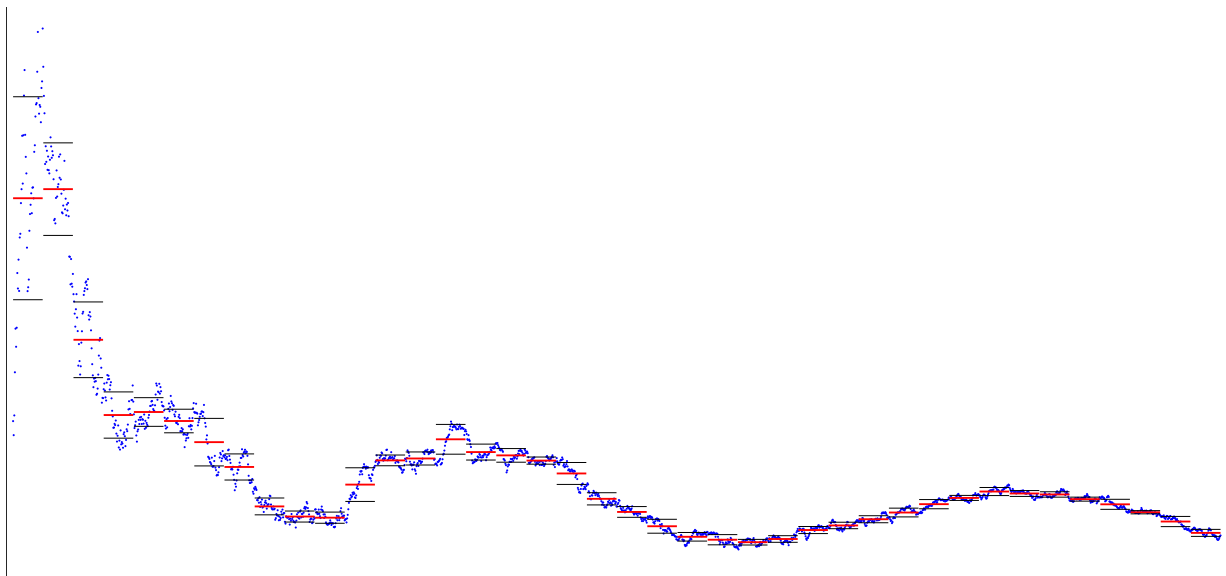


Fig. 3. The example (see Fig. 1) of the moving averages and the bounding deviations by $\Delta t = 50$

So, how to select an appropriate window width in order to conclude on the sufficiency of observations? Obviously, a single window width can hardly be selected and, therefore, a few window widths are to be studied until the most appropriate window width is empirically found.

Validity of the empirical probability distribution

At first glance, the most preferable relationship here is to have a descending sequence of deviations:

$$\sigma_{\tilde{x}}[(l-1)\Delta t + 1, l\Delta t] > \sigma_{\tilde{x}}[l\Delta t + 1, (l+1)\Delta t] \quad (8)$$

(not for every l but starting with some l). Another potential condition is to require that the succeeding neighboring averages be not farther from each other than the preceding neighboring averages, i.e.

$$|\tilde{x}[l\Delta t + 1, (l+1)\Delta t] - \tilde{x}[(l-1)\Delta t + 1, l\Delta t]| \geq |\tilde{x}[(l+1)\Delta t + 1, (l+2)\Delta t] - \tilde{x}[l\Delta t + 1, (l+1)\Delta t]|. \quad (9)$$

Nevertheless, requirements (8) and (9) are too primitive and can be satisfied only in special cases with wide windows. Even the example in Fig. 1, which seems to fit for (8) and (9), satisfies neither (8) nor (9). So, requirements (8) and (9) must be converted into more flexible conditions. Thus, the following

two inequalities should additionally hold starting at some l_* for the narrowest window τ_* :

$$\eta(l_*) = \frac{\sigma_{\tilde{x}}[(l_* - 1)\tau_* + 1, l_*\tau_*]}{\tilde{x}[(l_* - 1)\tau_* + 1, l_*\tau_*]} < \varepsilon \quad \text{and} \quad \mu(l_*) = \frac{\max_{m=(l_* - 1)\tau_* + 1, l_*\tau_*} |\tilde{x}_m - \tilde{x}[(l_* - 1)\tau_* + 1, l_*\tau_*]|}{\tilde{x}[(l_* - 1)\tau_* + 1, l_*\tau_*]} < \lambda\varepsilon \quad (10)$$

for some $\varepsilon > 0$ and $\lambda \geq 1$. In practice, it is relevant to set $\varepsilon = 0.005$, $\varepsilon = 0.001$, or even less. Now, the example in Fig. 3 seemingly satisfies requirements (10), but that wave is a sign of an instable empirical distribution. To spot such cases, it is better to widen the window and see whether both inequalities in (10) are still true. Having satisfied requirements (10) by $\tau_* = \Delta t$, the widening can be fulfilled for $\tau_* = 2\Delta t$ and $\tau_* = 4\Delta t$ (this can be named a rule of three windows). If the rule of three windows is satisfied at windows l_* , $l_* + 1$, $l_* + 2$, the observations are sufficient to estimate the probability distribution. Therefore, validity of the empirical probability distribution is ensured by requirements (10) which should hold for at least the three window widths by three successive windows.

An example based on the example in Fig. 1 — 3 is presented in Fig. 4 showing how the validity is achieved for the requirements by $\varepsilon = \lambda = 0.001$ (there are 4400 observation periods altogether, for which window widths of 100, 200, and 400 are used). It should be noted that the observation period in this case comprises from 800 to 1000 measurements for $x_{\min} = 1$, $\alpha = 1$, $x_{\max} = 60$. The expected value of the parameter (unknown to the observer) is 12.6021, which is shown in Fig. 1 as the horizontal line on the plots of the parameter's expected value approximations, the moving averages and deviations.

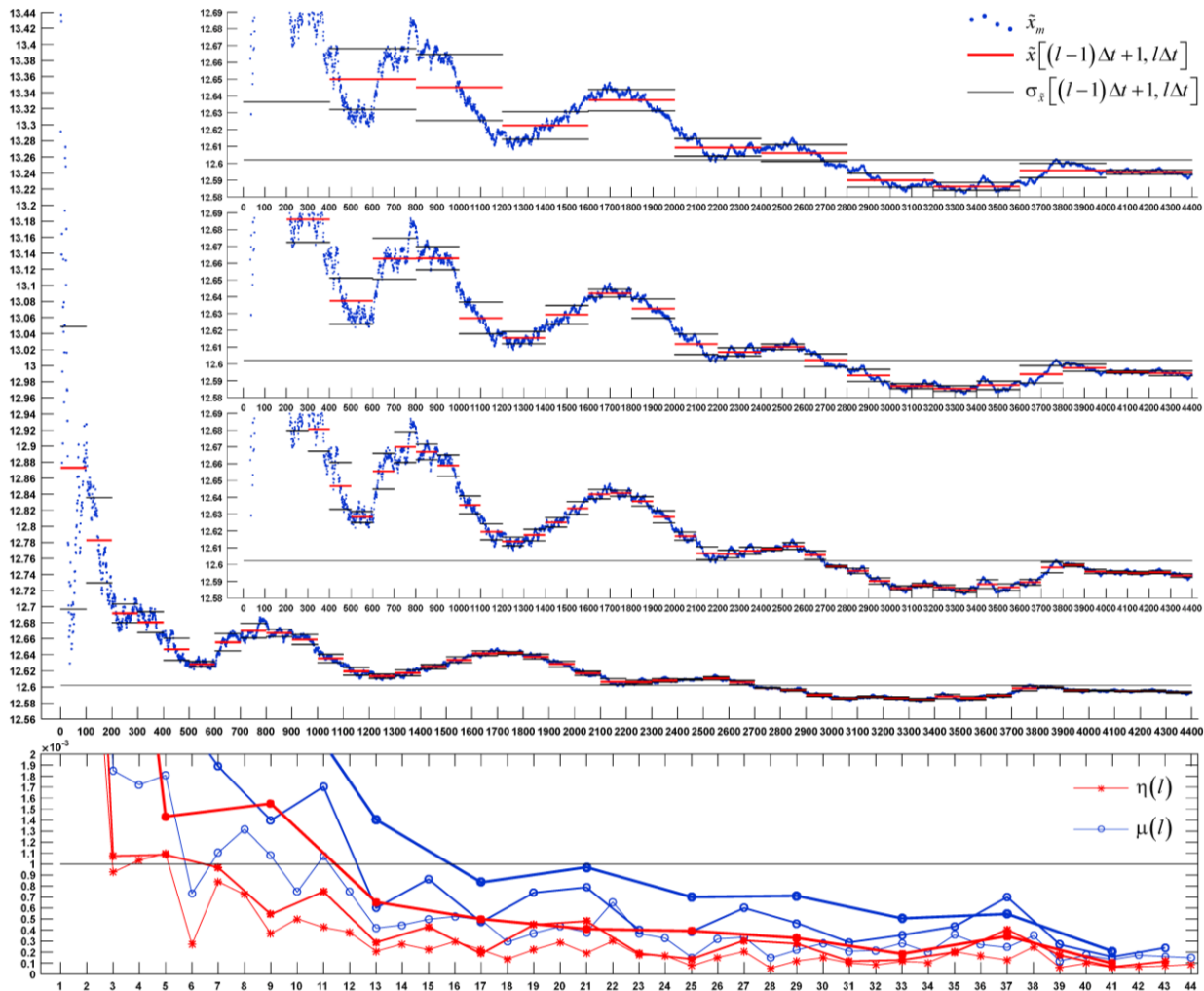


Fig. 4. The averages and the bounding deviations for the three window widths, where the functions in requirements (10) are plotted below (the thicker line corresponds to the wider window) along with the horizontal level of $\varepsilon = \lambda = 0.001$ showing that 1600 observation periods (in this case) are sufficient to obtain a valid empirical probability distribution (starting off 1600 observation periods, the difference between the moving average and the unknown expected value of the parameter does not exceed 0.3648 %)

Discussion and conclusion

In practice, it is worth remembering that the validity strongly depends on the volume of observations per period. The bigger is this volume, the faster is the convergence. Otherwise, when the number of observations per period is relatively small, a much greater number of observation periods may be required. Besides, the empirical probability distribution validity herein is substantiated with respect to the parameter's expected value. So, if the parameter is badly influenced by a lot of weakly controllable factors, then either ε and λ should be increased or the duration of observations should be prolonged.

In general, the presented methodology of accumulating and processing observation data is based on the rule of three windows, where the moving averages and root-mean-square deviations are used. It asserts that the respective empirical distribution is valid (i.e., it is sufficiently close to the unknown real distribution) if the parameter's expected value approximations become scattered very little for at least the three window multiple-of-2 widths by three successive windows. This criterion also implies the sufficiency of observation periods, although the sufficiency of observations per period is not claimed.

REFERENCES / ЛІТЕРАТУРА

1. M. Melucci, "A brief survey on probability distribution approximation", *Computer Science Review*, vol. 33, pp. 91 – 97, 2019.
2. P. Samui, D. Tien Bui, S. Chakraborty, R. C. Deo, *Handbook of Probabilistic Models*. Butterworth-Heinemann, 2020, 590 p.
3. V. V. Romanuke, "Evaluating validity of the statistic frequencies distribution of a variate with undefined mathematical expectation and variance", *Herald of the National Technical University "KhPP". Subject issue: Information Science and Modelling*, no. 21, pp. 152 – 161, 2010.
4. D. S. Wilks, "Empirical Distributions and Exploratory Data Analysis", in: *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences (Fourth Edition)*. D. S. Wilks (Ed.), Elsevier, 2019, pp. 23 – 75.
5. V. V. Romanuke, "Wind farm energy and costs optimization algorithm under uncertain parameters of wind speed distribution", *Studies in Informatics and Control*, vol. 27, iss. 2, pp. 155 – 164, 2018.

Romanuke Vadim Vasylyovych — doctor of technical sciences, professor; professor of department of information technologies, O. S. Popov Odessa National Academy of Telecommunications, Kuzneczna str., 1, Odessa, Ukraine, 65029; e-mail: romanukevadimv@gmail.com;
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3543-3087>.

Романюк Вадим Васильович — доктор технічних наук, професор; професор кафедри інформаційних технологій, Одеська національна академія зв'язку ім. О. С. Попова, вул. Кузнечна, 1, Одеса, Україна, 65029; e-mail: romanukevadimv@gmail.com;
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3543-3087>.

Романюк Вадим Васильевич — доктор технических наук, профессор; профессор кафедры информационных технологий, Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова, ул. Кузнечная, 1, Одесса, Украина, 65029; e-mail: romanukevadimv@gmail.com;
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3543-3087>.

CONTENTS

▪ D.N. Andreieva, T.V. Vdovichenko, N.N. Kizilova, A.S.Nikolaev	4
Promising mathematical methods for early diagnosis of human circulatory disorders	
▪ I.V. Garyachevskaya, D. O.Protektor	10
A meshless method for the numerical solution of the seventh-order Korteweg-de Vries equation	
▪ L. S. Globa, R. L. Novogradskaya, B. A. Zadoienko	22
Ontological model for assessing the effectiveness of functioning scientific institutions	
▪ P.S. Grynievich, N.N. Kizilova	35
Investigation of the chaotic dynamics of the vertical stance of a human body on the model of an inverted pendulum	
▪ O. Demyanchenko, E. Kobilskaya, V. Lyashenko, T. Nabok	41
The mathematical model of the thermal process in Spoke-Type Permanent Magnet Synchronous Machines	
▪ N.N. Kizilova, D.M. Pakki	50
Statistical analysis of coronary blood flow monitoring data for hemodynamic assessment of the degree of coronary artery stenosis	
▪ O.M. Melkozerova, S.G. Rassomakhin	56
Software performance testing	
▪ V.V. Romanuke	67
Empirical probability distribution validity based on accumulating statistics of observations by controlling the moving average and root-mean-square deviation	
▪ CONTENTS	73

Наукове видання

**Вісник Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна**

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 45

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О.О. Афанасьєва

Підписано до друку 25.05.2020 р.
Формат 60x84/8. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. – 8,5.
Обл.– вид. арк. – 9,1.
Наклад 50 пр. Зам. №
Безкоштовно

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09

Видавництво Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
тел.: 705-24-32