

УДК 532.1+539.3

Анализ дискретных реологических моделей биоактивных мягких и жидких материалов

Н. Н. Кизилова¹, Е. Н. Соловьева²¹Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина²Харьковский национальный политехнический университет «ХПИ», Украина

В статье приведен анализ дискретных реологических моделей некоторых биологических тканей как биоактивных вязкоупругих деформируемых материалов. Изучены свойства моделей при статическом и динамическом изотоническом и изометрическом нагружениях. Получен общий вид кривых ползучести и релаксации для 3-х и 5-ти элементных моделей. Проведены численные расчеты кривых нагрузки и релаксации моделей и выполнена идентификация параметров моделей на основе данных экспериментов. Предложено обобщение реологических моделей вязкоупругих жидкостей на случай биоактивных жидкостей.

Ключевые слова: активные биоматериалы, вязкоупругие жидкости, реология, математическое моделирование.

У статті наведено аналіз дискретних реологічних моделей деяких біологічних тканин як біоактивних в'язкопружних деформівних матеріалів. Вивчено властивості моделей при статичному та динамічному ізотонічному та ізометричному навантаженні. Отримано загальний вигляд кривих повзучості та релаксації для 3-х і 5-ти елементних моделей. Виконані чисельні розрахунки кривих навантаження і релаксації моделей та проведено ідентифікацію параметрів моделей на основі даних експериментів. Запропоновано узагальнення реологічних моделей в'язкопружних рідин на випадок біоактивних рідин.

Ключові слова: активні біоматеріали, в'язкопружні рідини, реологія, математичне моделювання.

Analysis of discrete rheological models of muscle tissues and implants as bioactive viscoelastic deformable materials is presented. The properties of the models under static, dynamic, isotonic and isometric loadings have been studied. The general form of creep and relaxation curves for 3-element and 5-element models has been obtained. The numerical calculations for stress and relaxation curves of the models have been obtained. A validation of the models based on the measurement data has been carried out. A generalization of the rheological models for the case of bioactive viscoelastic fluids has been proposed.

Key words: active biomaterials, viscoelastic fluids, rheology, mathematical modeling

1. Введение

Биологические ткани при нагружении проявляют как пассивные механические свойства (деформации, течение, релаксация), так и активные, связанные с работой молекулярных моторов, сокращением волокон микроструктуры, цитоскелета, гладкомышечных клеток, скелетной мускулатуры [1]. При этом общая деформация ε складывается из пассивной ε_p и активной ε_a компонент $\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_a$. Для описания биоактивных свойств предложен ряд многоэлементных реологических моделей [2], для которых остается актуальной

проблема идентификации реологических параметров по данным экспериментов. Поскольку в реологические соотношения упругие, вязкие и активные свойства компонент ткани входят в виде комбинаций, процедура идентификации является неоднозначной.

В последние годы наблюдается значительный интерес к биоактивным материалам; с 2016 г. выходит специализированный журнал *Bioactive materials*. При этом рассматриваются не только биологические ткани, но и их искусственные заменители, импланты [3], а также синтетические материалы, способные преобразовывать разные виды энергии в направленное движение за счет химических реакций, изменений длины и пространственной структуры молекул (так называемых конформационных изменений), а также за счет перестройки микроструктуры. Современные нанотехнологии позволяют имитировать сократительную активность микроволокон, агрегатов микро- и наночастиц, создавая искусственные биоактивные твердые и жидкие материалы. Например, в пористых биоактивных материалах за счет сокращения волокон или перестройки микроструктуры происходит фильтрация заполняющих их жидкостей, активное впитывание жидкостей в биоактивную пористую губку, интенсификация химических реакций и перемешивания за счет сокращения.

В последние годы развивается новое направление механики жидкости - механика активных жидкостей [4-6]. В качестве таковых рассматриваются концентрированные суспензии жгутиковых и других клеток, способных перемещаться, химически/оптически управляемые коллоиды, суспензии микровиммеров (*microswimmers*) – неньютоновских жидкостей с внутренними степенями свободы. Предложены статистические и термодинамические модели активных жидкостей, однако их реологические свойства остаются малоизученными [7].

2. Дискретные реологические модели вязкоупругих биоактивных мягких материалов и их свойства

Простейшая модель биоактивной ткани была предложена для мышцы [1] в виде модели вязкоупругого тела Зенера, дополненной активным элементом (Рис.1а), который, в зависимости от деформации ε_2 пружины с модулем Юнга E_2 , создает мгновенное напряжение $f = k_1\varepsilon_2 + k_2\dot{\varepsilon}_2$. Таким образом, активная реакция ткани состоит в пропорциональной генерации напряжений, соответствующих сокращению и скорости сокращения упругого элемента E_2 . Постоянные $k_{1,2}$ играют роль управляющих параметров. В мышечной ткани активный элемент соответствует актиново-миозиновым мостикам, а $k_{1,2}$ - функции концентрации активатора сокращения. В искусственных активных материалах $k_{1,2}$ могут быть как функциями концентраций химически активных веществ, так и интенсивности оптического излучения, напряженности внешнего электрического или магнитного поля, температуры, сдвиговых или нормальных напряжений [8].

Для этой модели получим реологическое соотношение в виде

$$(k_2 + \mu)\dot{\sigma} + (k_1 + E_2)\sigma = E_1(E_2 + k_1)\varepsilon + (E_1(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)\mu)\dot{\varepsilon} + \mu k_2 \ddot{\varepsilon} \quad (1)$$

где σ, ε - общие напряжения и деформации в теле, $E_{1,2}$ - модули упругости упругих элементов, μ - коэффициент вязкости вязкого элемента.

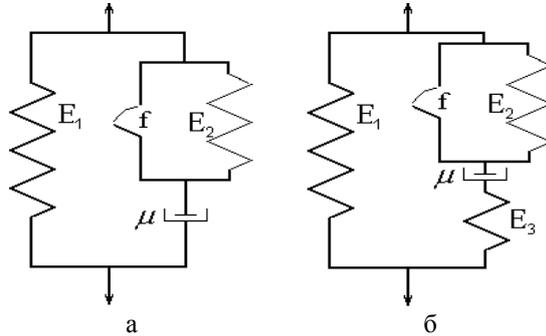


Рис.1. 4-х (а) и 5-ти (б) элементные реологические модели мышцы активного вязкоупругого материала

Исследуем поведение модели при (1) при изотоническом нагружении. Подставляя $\sigma = \sigma^* = \text{const}$ и решая полученное ОДУ для деформаций с граничными условиями $\varepsilon(0) = 0, \dot{\varepsilon}(0) = 0$, получим кривую ползучести

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^*}{E_1} \left(1 + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right), \quad \lambda_{1,2} = \frac{E_1(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)\mu \pm \sqrt{D_1}}{2\mu k_2}, \quad (2)$$

$$D_1 = (E_1(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)\mu)^2 - 4\mu k_2 E_1(E_2 + k_1)$$

После снятия нагрузки $\sigma^* = 0$ в некоторый момент времени $t = t_1$ получим релаксационную зависимость

$$\varepsilon_{\text{rel}}(t) = \frac{\varepsilon_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_2 e^{-\lambda_1(t-t_1)} - \lambda_1 e^{-\lambda_2(t-t_1)} \right) \quad (3)$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$ получено путем подстановки $t = t_1$ в (2). Для сравнения, в модели Зенера имеется только один релаксационный параметр $\tilde{\tau}_1 = (E_1 + E_2)\mu / E_1 E_2$.

Для исследования свойств модели при изометрическом нагружении подставим в (1) $\varepsilon = \varepsilon^* = \text{const}$ и решим полученное ОДУ для напряжений с граничным условием $\sigma(0) = \sigma_0 = (E_1 + E_2 + k_1)\varepsilon^*$. Получим

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon^* \left(1 - e^{-\lambda t} \right) + \sigma_0 e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{k_1 + E_2}{k_2 + \mu} \quad (4)$$

После снятия нагрузки $\varepsilon^* = 0$ в некоторый момент времени $t = t_1$, получим релаксационную зависимость

$$\sigma_{\text{rel}}(t) = \sigma_1 e^{-\lambda(t-t_1)} \quad (5)$$

где $\sigma_1 = \sigma(t_1)$ получено путем подстановки $t = t_1$ в (4). В модели Зенера $\lambda = E_2 / \mu$, что соответствует (4) при $k_{1,2} = 0$.

В динамических изотонических экспериментах, т.е. при периодическом нагружении $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$ в вязкоупругих материалах возникают колебания деформаций $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i(\omega t + \phi)}$, где ϕ - фазовый сдвиг. Аналогичные зависимости возникают при динамических изометрических экспериментах, причем с тем же фазовым сдвигом. Подставляя $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ в (1), получим для напряжений

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i(\omega t + \phi)}, \quad \sigma_0 = \frac{\varepsilon_0}{a_{12}^2 + a_{11}^2 \omega^2}, \quad \operatorname{tg}(\phi) = \frac{b_{11} a_{11} \omega^3 + (b_{12} a_{12} - a_{11} b_{13}) \omega}{(b_{12} a_{11} - b_{11} a_{12}) \omega^2 + b_{13} a_{12}}$$

где $a_{11} = k_2 + \mu$, $a_{12} = k_1 + E_2$, $b_{11} = \mu k_2$, $b_{12} = E_1(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)\mu$, $b_{13} = E_1(E_2 + k_1)$.

Для популярной 5-элементной дискретной модели мышцы (Рис.1б) реологическое соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} \mu k_2 \ddot{\sigma} + ((k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu)\dot{\sigma} + E_3(k_1 + E_2)\sigma = \\ = E_1 E_3 (E_2 + k_1)\varepsilon + (E_1 E_3 (k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu)\dot{\varepsilon} + \mu(E_1 + E_3)k_2 \ddot{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (6)$$

При изотоническом нагружении (6) дает кривые ползучести и релаксации деформаций такие же, как и (2), (3) соответственно, но при этом

$$\lambda_{1,2} = \frac{E_1 E_3 (k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu \pm \sqrt{D_2}}{2\mu(E_1 + E_3)k_2}, \quad (7)$$

$$D_2 = (E_1 E_3 (k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu)^2 - 4E_1 E_3 (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)k_2 \mu$$

При изометрическом нагружении модели (6) получим

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0 - E_1 \varepsilon^*}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) + E_1 \varepsilon^*, \quad \lambda_{1,2} = \frac{(k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu \pm \sqrt{D_3}}{2\mu k_2}, \quad (8)$$

$$D_3 = ((k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu)^2 - 4\mu k_2 E_3 (k_1 + E_2), \quad \sigma_0 = \left(E_1 + \frac{E_3 (E_2 + k_1)}{E_2 + E_3 + k_1} \right) \varepsilon^*$$

и после снятия нагрузки

$$\sigma_{\text{rel}}(t) = \frac{\sigma_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_2 e^{-\lambda_1(t-t_1)} - \lambda_1 e^{-\lambda_2(t-t_1)} \right), \quad (9)$$

где $\sigma_1 = \sigma(t_1)$ получено путем подстановки $t = t_1$ в (8).

В этом случае имеется два релаксационных параметра как деформаций, так и для напряжений, причем выражения для них существенно отличаются у моделей (1) и (6).

Оценивая величины первых и вторых производных кривых $\sigma(t), \varepsilon(t)$ (2)-(4), (7)-(9), получим общий вид кривых ползучести и релаксации (Рис.2).

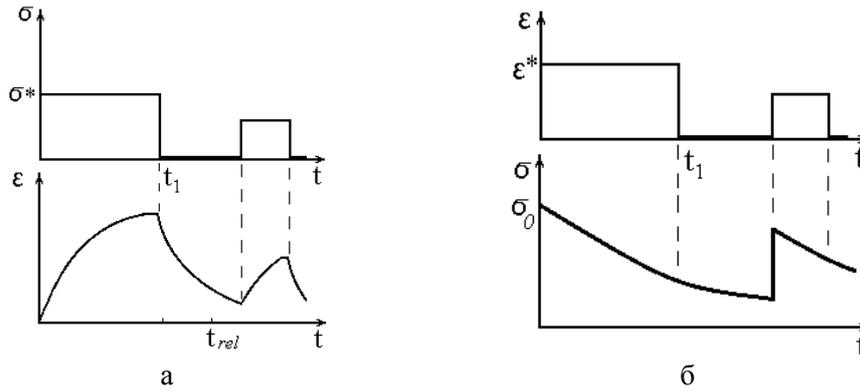


Рис.2. Кривые $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ для изотонического (а) и изометрического (б) экспериментов с моделями (1), (6).

При динамическом нагружении модели (6) получим

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0}{(a_{23} - a_{21}\omega^2)^2 + a_{22}^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{(b_{22}a_{23} - a_{22}b_{23})\omega + (b_{21}a_{22} - b_{22}a_{21})\omega^3}{b_{21}a_{21}\omega^4 + (b_{22}a_{22} - b_{21}a_{23} - b_{23}a_{21})\omega^2 + b_{23}a_{23}},$$

где $a_{21} = \mu k_2$, $a_{22} = (k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu$, $a_{23} = E_3(k_1 + E_2)$,
 $b_{21} = \mu(E_1 + E_3)k_2$, $b_{22} = E_1E_3(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu$,
 $b_{23} = E_1E_3(E_2 + k_1)$.

3. Новые модели биоактивных вязкоупругих жидкостей

По аналогии с биоактивными мягкими материалами можно предложить биоактивные жидкие материалы, которые могут заменять вязкоупругие гидрогели в тех случаях, когда для нативной ткани характерны те или иные реологические свойства. На Рис.3а приведена модификация модели Джеффри, реологическое соотношение для которой получим в виде

$$(k_2 + \mu_2)\dot{\sigma} + E_3(k_1 + E)\sigma = (\mu_1 + \mu_2)(E + k_1)\dot{\varepsilon} + (\mu_1\mu_2 + (\mu_1 + \mu_2)k_2)\ddot{\varepsilon}, \quad (10)$$

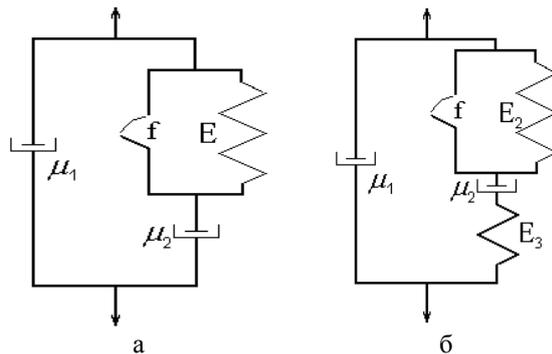


Рис.3. 4-х (а) и 5-ти (б) элементные реологические модели активной вязкоупругой жидкости

При изотоническом нагружении $\sigma = \sigma^* = \text{const}$ из (10) получим

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^*}{(\mu_1 + \mu_2)} t - \frac{\sigma^*}{(\mu_1 + \mu_2)\lambda_2} (1 - e^{-\lambda t}), \quad \lambda = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(E + k_1)}{\mu_1\mu_2 + (\mu_1 + \mu_2)k_2}, \quad (11)$$

а после снятия нагрузки $\sigma^* = 0$ в некоторый момент времени $t = t_1$, получим

$$\varepsilon_{\text{rel}}(t) = \frac{\varepsilon_1}{1 + t_1\lambda} (\lambda t - e^{-\lambda(t-t_1)}) \quad (12)$$

При изометрическом нагружении модели (10) получим

$$\sigma(t) = \varepsilon_1(k_1 + E)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{k_1 + E}{k_2 + \mu_2}, \quad (13)$$

причем после снятия нагрузки релаксационная кривая имеет тот же вид (13).

При динамическом нагружении модели (10) получим

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0}{a_{32}^2 + a_{31}^2\omega^2}, \quad \text{tg}(\phi) = \frac{(b_{32}a_{32} + b_{31}a_{31}\omega^2)\omega}{(b_{32}a_{31} - b_{31}a_{32})\omega^2},$$

где $a_{31} = k_2 + \mu_2$, $a_{32} = E_3(k_1 + E)$, $b_{31} = \mu_1\mu_2 + (\mu_1 + \mu_2)k_2$,
 $b_{32} = (\mu_1 + \mu_2)(E + k_1)$.

Замена в 5-элементной модели упругого элемента E_1 на аналогичный предыдущей модели вязкий элемент μ_1 (рис. 3б) приводит к реологическому соотношению

$$\mu_2 k_2 \ddot{\sigma} + (E_2 k_2 + \mu_2 (E_1 + E_2 + k_1)) \dot{\sigma} + E_2 (E_1 + k_1) \sigma = (E_1 + k_1) (\mu_1 + \mu_2) E_2 \dot{\varepsilon} + ((\mu_1 + \mu_2) k_2 E_2 + (E_1 + E_2 + k_1) \mu_1 \mu_2) \ddot{\varepsilon} + \mu_1 \mu_2 k_2 \ddot{\varepsilon}. \quad (14)$$

При изотоническом нагружении из (14) получим

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^*}{\mu_1 + \mu_2} \left(t + \frac{\lambda_1^2 (1 - e^{-\lambda_1 t}) - \lambda_2^2 (1 - e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \right), \quad (15)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\mu_1 + \mu_2) k_2 E_2 + (E_1 + E_2 + k_1) \mu_1 \mu_2 \pm \sqrt{D_4}}{2 \mu_1 \mu_2 k_2},$$

$$D_4 = ((\mu_1 + \mu_2) k_2 E_2 + (E_1 + E_2 + k_1) \mu_1 \mu_2)^2 - 4 (E_1 + k_1) (\mu_1 + \mu_2) E_2 \mu_1 \mu_2 k_2,$$

а после снятия нагрузки

$$\varepsilon_{\text{rel}}(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) t + \lambda_2^2 e^{-\lambda_1(t-t_1)} - \lambda_1^2 e^{-\lambda_2(t-t_1)}}{\lambda_2^2 (1 + \lambda_1 t_1) - \lambda_1^2 (1 + \lambda_2 t_1)}. \quad (16)$$

При изометрическом нагружении модели (14) получим

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{(\lambda_1 - \lambda_2)} (\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}), \quad \lambda_{1,2} = \frac{E_2 k_2 + \mu_2 (E_1 + E_2 + k_1) \pm \sqrt{D_5}}{2\mu_2 k_2} \quad (17)$$

$$D_5 = (E_2 k_2 + \mu_2 (E_1 + E_2 + k_1))^2 - 4\mu_2 k_2 E_2 (E_1 + k_1),$$

а после снятия нагрузки релаксационная кривая будет иметь тот же вид (17).

Оценивая величины первых и вторых производных кривых $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ (11)-(13), (15)-(17), получим общий вид кривых ползучести и релаксации (Рис.4).

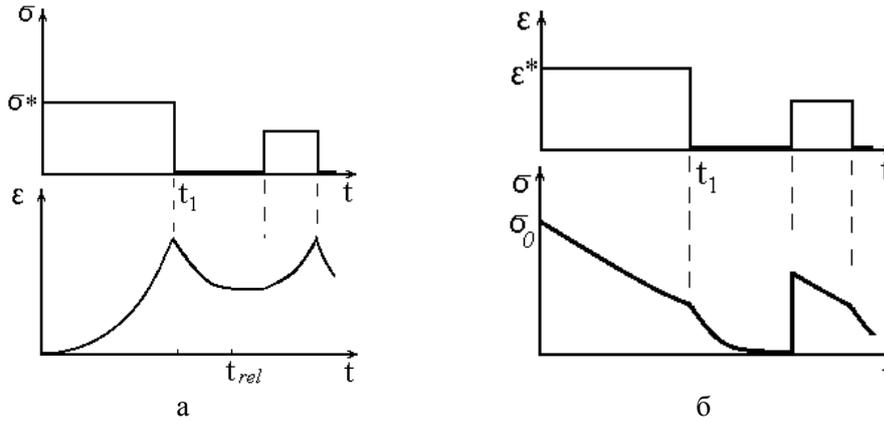


Рис.4. Кривые $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ для изотонического (а) и изометрического (б) экспериментов с моделями (10), (14)

При динамическом нагружении модели (14) имеем

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0}{(a_{43} - a_{41}\omega^2)^2 + a_{42}^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{a_{41}b_{41}\omega^5 + (b_{42}a_{42} - b_{41}a_{43} - b_{43}a_{41})\omega^3 + b_{43}a_{43}\omega}{(b_{42}a_{41} - b_{41}a_{42})\omega^4 + (b_{43}a_{42} - b_{42}a_{43})\omega^2},$$

где $a_{41} = \mu_2 k_2$, $a_{42} = E_2 k_2 + \mu_2 (E_1 + E_2 + k_1)$, $a_{43} = E_2 (E_1 + k_1)$, $b_{41} = \mu_1 \mu_2 k_2$, $b_{42} = (\mu_1 + \mu_2) k_2 E_2 + (E_1 + E_2 + k_1) \mu_1 \mu_2$, $b_{43} = (E_1 + k_1) (\mu_1 + \mu_2) E_2$.

4. Идентификация реологических параметров

Для выбора адекватной модели материала и идентификации реологических параметров используют экспериментальные кривые $\sigma(\varepsilon)$, релаксационные кривые $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$, а также амплитудно-фазовый спектр при периодических нагрузках $\sigma(t) \sim \sin(\omega t)$ и $\varepsilon(t) \sim \sin(\omega t)$. При этом наборы реологических коэффициентов $\{E_j, \mu_j\}$ могут не соответствовать значениям, характерным для модулей упругости и коэффициентов вязкостей компонент такни – волокнам актина, миозина, коллагена и тканевой жидкости. Кроме этого, параметры $k_{1,2}$ в

моделях (1), (6), (10), (14) остаются неопределенными, поскольку зависят от особенностей управления микроструктурой в данном биоактивном материале. Для разработки метода идентификации реологической модели и ее параметров были проведены численные расчеты кривых нагрузки и релаксации моделей (1), (6), (10), (14). В качестве значений $\{E_j, \mu_j\}$ выбирались параметры, соответствующие волокнам актина, миозина и коллагена из которых образованы активные биологические ткани. Волокна со сходными свойствами используются при создании заменителей и имплантов. Для управляющих параметров принималось $k_1 = k_2 = 1$. Некоторые результаты расчетов представлены на рис.5.

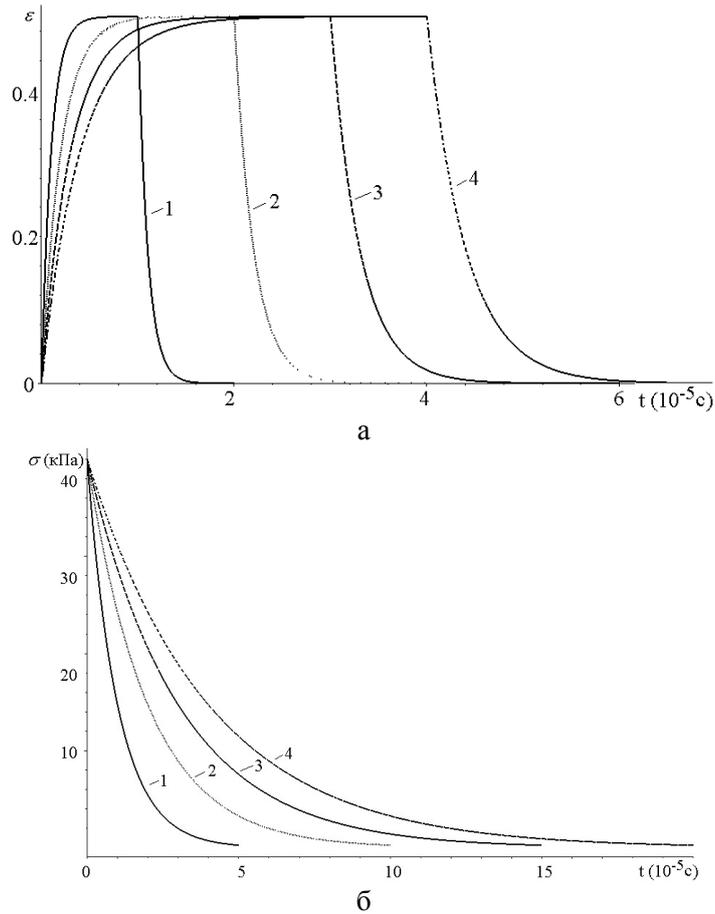


Рис.5. Зависимости $\varepsilon(t)$ (а) и $\sigma(t)$ (б) для модели (6) при $E_1 = 10^5$ Па, $E_2 = 10^6$ Па, $E_3 = 10^7$ Па, $\mu = 10^{-3}$ Па·с, $\sigma^* = 50$ кПа, $k_1 = 1$. Кривые 1-4 соответствуют значениям $k_2 = 1; 2; 3; 4$

При уменьшении модулей Юнга и увеличении вязкостей дискретных реологических элементов время релаксации деформаций в изотонических экспериментах и напряжений – в изометрических – увеличивается аналогично

кривым, изображенным на Рис. 5а и Рис.5б соответственно. При увеличении веса слагаемого, отвечающего биоактивному контролю по скоростям деформаций (рост k_2), время релаксации быстро увеличивается, а при большем весе контроля по величине деформации (рост k_1) – быстро уменьшается. Сопоставление релаксационных кривых моделей (1) и (6) с данными экспериментов по изометрическому и изотоническому нагружению скелетных мышц [9-11] показало, что модель (6) лучше описывает динамику участков ползучести и релаксации чем модель (1). Начальный выбор реологических параметров моделей, близких по значениям к основным компонентам мышечной ткани, позволяет относительно быстро проводить идентификацию параметров методом наименьших квадратов. Результаты идентификации приведены в Табл.1. Некоторые различия в модулях Юнга могут быть связаны с различными видами миозинов и числом волокон разного типа в мышцах животных разных видов.

Табл.1. Результаты идентификации параметров модели (6) для разных видов мышц

мышца	E_1 (МПа)	E_2 (МПа)	E_3 (МПа)	μ (сПз)	k_1	k_2
sartorius (лягушка, [9])	52.1	8.5	34.1	24.2	0.87	2.15
soleus (кот, [10])	45.2	9.3	29.6	28.7	0.67	3.42
gracilis anticus (крыса, [11])	46.9	7.9	31.2	34.1	0.79	3.90
gracilis anticus (кролик, [11])	51.4	8.2	33.8	31.4	0.78	2.87

4. Выводы и направления дальнейших исследований

Сравнительный анализ дискретных реологических моделей биоактивных вязкоупругих материалов в условиях изотонического и изометрического нагружения материала показал, что скорость деформирования и релаксационные кривые имеют различия для 3-х и 5-ти элементных моделей. Сопоставление теоретических зависимостей с результатами соответствующих экспериментов на мышцах показало, что 5-ти элементная модель лучше описывает динамику релаксации напряжений и деформаций и позволило идентифицировать реологические параметры, которые несколько отличаются у мышц разных животных, но имеют одинаковый порядок значений.

Полученные значения параметров могут быть использованы для анализа поведения биоактивных жидкостей (модели (10) и (14)), а также для подбора материалов для создания синтетических биоактивных материалов со сходными свойствами для использования их в качестве заменителей тканей, имплантов, стентов, графтов и др.

Предложены новые реологические модели биоактивных технических жидкостей. Исходя из требуемых динамических свойств жидкости, материал для ее изготовления (несущая жидкости, волокна, гранулы, активные компоненты) может быть подобран путем идентификации параметров соответствующей

моделі (10) или (14) подобно тому, как была проведена идентификация параметров моделей мышечной ткани разных животных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С.А. Лекции по биологической механике, – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 144с.
2. Філіппова О.М., Кізілова Н.М. Дослідження руху в'язкої рідини у в'язкопружній камері з біоактивного матеріалу. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2015. – Спецвипуск. – С.277–282.
3. Rezwana K., Chena Q.Z., Blakera J.J., Voccaccinia A.R. Biodegradable and bioactive porous polymer/inorganic composite scaffolds for bone tissue engineering. // *Biomaterials*. – 2006. – 27(18). – P. 3413–3431.
4. Kumar K.V., Bois J.S., Jülicher F., Grilli S.W. Pulsatory Patterns in Active Fluids. // *Phys. Rev. Lett.* – 2014. – v.112, 208101.
5. Marconi U.M.B., Maggi C. Towards a statistical mechanical theory of active fluids. // *Soft Matter*. – 2015. – v.11. – P.8768–8781.
6. Morozov A. From chaos to order in active fluids. Random flows in an active fluid become directional under confinement. // *Science*. – 2017. – 355(6331). – P. 1262–1263.
7. Heidenreich S., Dunkel J., Klapp H., Bär M. Hydrodynamic length-scale selection in microswimmer suspensions. // *Physical Review E*. – 2016. – v.94(2), 020601.
8. Alonso S., Strachauer U., Radszuweit M., Bär M., Hauser M. Oscillations and uniaxial mechanochemical waves in a model of an active poroelastic medium: Application to deformation patterns in protoplasmic droplets of *Physarum polycephalum*. // *Physica D*. – 2016. – v.318. – P.58–69.
9. Bressler B.H., Clinch N.F. The compliance of contracting skeletal muscle. // *J. Physiol.* – 1974. – v.237(3). – P. 477–493.
10. Joyce G.C., Rack P.M.H. Isotonic lengthening and shortening movements of cat soleus muscle. // *J. Physiol.* – 1969. – v.204(2). – P.475–491.
11. Bahler A.S., Fales J.T., Zierler K.L. The Dynamic Properties of Mammalian Skeletal Muscle. // *J. Gen. Physiol.* – 1968. – v.51 (3). – P. 369-384.