УДК 517.988 : 519.632

Побудова двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійної задачі Нав'є

М. В. Сидоров
Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина

Рассмотрена однородная задача Навье для нелинейного уравнения четвертого порядка. Для построения двусторонних приближений к положительному решению этой задачи используются методы теории полуупорядоченных пространств, в частности, результаты В.И. Опойцева о разрешимости операторных уравнений с гетеротонным оператором. Работа и эффективность разработанного метода продемонстрирована вычислительным экспериментом для задачи со степенной нелинейностью.

Ключевые слова: *положительное решение, нелинейная задача Навье, гетеротонный оператор, двусторонние приближения.*

Розглядається однорідна задача Нав'є для нелінійного рівняння четвертого порядку. Для побудови двобічних наближень до додатного розв'язку цієї задачі використовуються методи теорії напівупорядкованих просторів, зокрема, результати В.І. Опойцева про розв'язність операторних рівнянь з гетеротонним оператором. Робота і ефективність розробленого метода продемонстрована обчислювальним експериментом для задачі зі степеневою нелінійністю.

Ключові слова: *додатний розв'язок, нелінійна задача Нав'є, гетеротонний оператор, двобічні наближення.*

A homogeneous Navier problem for a semilinear four-order elliptic equations has been considered. To construct two-way approximations to a positive solution of this problem the methods of the theory of semi-ordered spaces, in particular, the results of V.I. Opoĭcev on the solvability of operator equations with a heterotone operator has been used. The work and the effectiveness of the developed method have been demonstrated by a computational experiment for the problem with power non-linearity.

Key words: *positive solution, semilinear Navier problem, heterotone operator, two-sided approach.*

1. Постановка задачі

Розглянемо однорідну задачу Нав'є для нелінійного рівняння четвертого порядку:

$$\Delta^2 u = f(\mathbf{x}, u, -\Delta u) \text{ у } \Omega \subset \mathbf{R}^m, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \Delta u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m)$, Δ – оператор Лапласа, Δ^2 – бігармонічний оператор.

Вважатимемо, що $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ – обмежена область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, функція $f(\mathbf{x}, u, v)$ невід'ємна та неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, u, v, якщо $\mathbf{x} \in \Omega$, $u > 0$, $v > 0$.

Задача (1), (2) виникає, наприклад, при математичному моделюванні різних процесів теорії пружності. Дослідженню задачі (1), (2) присвячено багато робіт [6 – 11 та інші], але увага у цих роботах була зосереджена в основному на з'ясуванні умов існування та єдиності додатного розв'язку задачі чи на умовах наявності розв'язку з радіальною симетрією для випадку, коли Ω – одинична куля, і не було запропоновано ефективного алгоритму чисельного знаходження розв'язку.

Метою даної роботи є розробка нових ітераційних методів розв'язання крайової задачі (1), (2), які мають двобічний характер збіжності до шуканого розв'язку. Двобічні наближені методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь, засновані на використанні теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах, розроблялись у роботах [1 – 4]. Побудова двобічних наближень до розв'язків крайових задач для рівнянь вищих порядків не розглядалася. Отже, тема роботи є актуальною.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті в [1], і розповсюджує їх на рівняння вищих порядків.

2. Побудова двобічних наближень

Задачу (1), (2) замінимо еквівалентною системою нелінійних рівнянь. Поклавши $u_1 = u$, $u_2 = -\Delta u$, отримаємо задачу

$$-\Delta u_1 = u_2,\ -\Delta u_2 = f(\mathbf{x}, u_1, u_2) \text{ у } \Omega \subset \mathbf{R}^m, \tag{3}$$

$$u_1\big|_{\partial\Omega} = 0,\ u_2\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Для аналізу задачі (3), (4) та побудови двобічних наближень до її додатного розв'язку використаємо методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [2, 4].

Нехай $\mathbf{C}_2(\bar{\Omega}) = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2) : u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})\}$ – банахів простір неперервних у $\bar{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$ вектор-функцій з нормою $\|\mathbf{u}\|_2 = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|\}$, де $\|u_i\| = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} |u_i(\mathbf{x})|$, $i = 1, 2$. Виділимо у $\mathbf{C}_2(\bar{\Omega})$ конус

$$\mathbf{K}_+ = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbf{C}_2(\bar{\Omega}) : u_i(\mathbf{x}) \geq 0,\ \mathbf{x} \in \bar{\Omega},\ i = 1, 2\}$$

вектор-функцій з невід'ємними координатами. Зазначимо, що конус $\mathbf{K}_+$ у $\mathbf{C}_2(\bar{\Omega})$ є нормальним (і навіть гострим) [2, 4].

За допомогою конуса $\mathbf{K}_+$ у просторі $\mathbf{C}_2(\bar{\Omega})$ введемо напівупорядкованість за правилом: для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{C}_2(\bar{\Omega})$ $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$, якщо $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in \mathbf{K}_+$, тобто

$$\mathbf{u} \leq \mathbf{v} \text{, якщо } u_1(\mathbf{x}) \leq v_1(\mathbf{x}),\ u_2(\mathbf{x}) \leq v_2(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Від задачі (3), (4) перейдемо до системи інтегральних рівнянь Гаммерштейна

$$u_1(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) u_2(\xi) d\xi, \tag{5}$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) f(\xi, u_1(\xi), u_2(\xi)) d\xi, \tag{6}$$

де $G(\mathbf{x}, \xi)$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ у області Ω, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m)$, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$.

Розв'язком (узагальненим) задачі (3), (4) називатимемо вектор-функцію $\mathbf{u}^* \in \mathbf{C}_2(\bar{\Omega})$, яка є розв'язком системи (5), (6). Тоді функцію $u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x})$ природно назвати узагальненим розв'язком задачі (1), (2) Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор $\mathbf{T}$, який діє у $\mathbf{C}_2(\bar{\Omega})$ за правилом, яке визначається правою частиною системи рівнянь (5), (6):

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \left(\int_\Omega G(\mathbf{x},\xi)u_2(\xi)d\xi,\ \int_\Omega G(\mathbf{x},\xi) f(\xi, u_1(\xi), u_2(\xi))d\xi \right). \quad (7)$$

Оскільки $f(\mathbf{x}, u_1, u_2) \ge 0$, якщо $\mathbf{x} \in \Omega$, $u_1, u_2 \ge 0$, та $G(\mathbf{x},\xi) \ge 0$, $\mathbf{x}, \xi \in \Omega$, $\mathbf{x} \ne \xi$, то оператор $\mathbf{T}$ є додатним, тобто залишає інваріантним конус $\mathbf{K}_+$: $\mathbf{T}(\mathbf{K}_+) \subset \mathbf{K}_+$.

Припустимо, що функція $f(\mathbf{x}, u_1, u_2)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u})$, де неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ функція $\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \hat{f}(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2)$ монотонно зростає за v_1, v_2 і монотонно спадає за w_1, w_2 для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$. Тоді оператор $\mathbf{T}$ вигляду (7) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \left(\int_\Omega G(\mathbf{x},\xi)v_2(\xi)d\xi,\ \int_\Omega G(\mathbf{x},\xi) \hat{f}(\xi, v_1(\xi), v_2(\xi), w_1(\xi), w_2(\xi))d\xi \right). \quad (8)$$

Оператори $\mathbf{T}$ і $\hat{\mathbf{T}}$ є цілком неперервними [2, 4].

У конусі $\mathbf{K}_+$ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$, де $\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = (v_1^0(\mathbf{x}), v_2^0(\mathbf{x}))$, $\mathbf{w}^0(\mathbf{x}) = (w_1^0(\mathbf{x}), w_2^0(\mathbf{x}))$, умовами

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \ge \mathbf{v}^0,\ \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{w}^0, \mathbf{v}^0) \le \mathbf{w}^0,$$

тобто

$$\int_\Omega G(\mathbf{x},\xi)v_2^0(\xi)d\xi \ge v_1^0(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$\int_\Omega G(\mathbf{x},\xi) \hat{f}(\xi, v_1^0(\xi), v_2^0(\xi), w_1^0(\xi), w_2^0(\xi))d\xi \ge v_2^0(\mathbf{x}), \quad (10)$$

$$\int_\Omega G(\mathbf{x},\xi)w_2^0(\xi)d\xi \le w_1^0(\mathbf{x}), \quad (11)$$

$$\int_\Omega G(\mathbf{x},\xi) \hat{f}(\xi, w_1^0(\xi), w_2^0(\xi), v_1^0(\xi), v_2^0(\xi))d\xi \le w_2^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (12)$$

Якщо межа $\partial\Omega$ області Ω складається зі скінченної кількості кусків ліній $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, 2, ..., s$, де кожна $\sigma_i(\mathbf{x})$ – елементарна функція, то за допомогою методу R-функцій [5] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію $\omega(\mathbf{x})$ таку, що:

а) $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω;

б) $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$;

в) $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \ne 0$ на $\partial\Omega$.

Тоді сильно інваріантний конусний відрізок можна шукати у вигляді $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0> = <\boldsymbol{\alpha}\omega(\mathbf{x}), \boldsymbol{\beta}\omega(\mathbf{x})>$, де $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, $0 \le \alpha_1 < \beta_1$,

$0 \le \alpha_2 < \beta_2$, задовольняють системі нерівностей

$$\alpha_2 \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\omega(\xi)d\xi \ge \alpha_1\omega(\mathbf{x}),$$

$$\int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\hat{f}(\xi, \alpha_1\omega(\xi), \alpha_2\omega(\xi), \beta_1\omega(\xi), \beta_2\omega(\xi))d\xi \ge \alpha_2\omega(\mathbf{x}),$$

$$\beta_2 \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\omega(\xi)d\xi \le \beta_1\omega(\mathbf{x}),$$

$$\int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\hat{f}(\xi, \beta_1\omega(\xi), \beta_2\omega(\xi), \alpha_1\omega(\xi), \alpha_2\omega(\xi))d\xi \le \beta_2\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Сформуємо ітераційний процес за схемою

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)}), \quad \mathbf{w}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)}), \; k = 0,1,2,...,$$

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}^0, \; \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0,$$

тобто

$$v_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)v_2^{(k)}(\xi)d\xi, \tag{13}$$

$$v_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\hat{f}(\xi, v_1^{(k)}(\xi), v_2^{(k)}(\xi), w_1^{(k)}(\xi), w_2^{(k)}(\xi))d\xi, \tag{14}$$

$$w_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)w_2^{(k)}(\xi)d\xi, \tag{15}$$

$$w_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\hat{f}(\xi, w_1^{(k)}(\xi), w_2^{(k)}(\xi), v_1^{(k)}(\xi), v_2^{(k)}(\xi))d\xi, \tag{16}$$

$$v_1^{(0)}(\mathbf{x}) = v_1^0(\mathbf{x}), \; v_2^{(0)}(\mathbf{x}) = v_2^0(\mathbf{x}), \tag{17}$$

$$w_1^{(0)}(\mathbf{x}) = w_1^0(\mathbf{x}), \; w_2^{(0)}(\mathbf{x}) = w_2^0(\mathbf{x}). \tag{18}$$

З огляду на сильну інваріантність побудованого конусного відрізка та гетеротонність оператора $\mathbf{T}$, для якого оператор $\hat{\mathbf{T}}$ є супровідним, можна зробити висновок про те, що послідовність $\{\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не спадає за конусом $\mathbf{K}_+$, а послідовність $\{\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не зростає за конусом $\mathbf{K}_+$. Крім того, з нормальності конуса $\mathbf{K}_+$ і цілком неперервності оператора $\hat{\mathbf{T}}$ випливає існування границь $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$ і $\mathbf{w}^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} \le \mathbf{v}^{(1)} \le ... \le \mathbf{v}^{(k)} \le ... \le \mathbf{v}^* \le \mathbf{w}^* \le ... \le \mathbf{w}^{(k)} \le ... \le \mathbf{w}^{(1)} \le \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0.$$

Якщо отримали, що $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^* = \mathbf{u}^*$, то $\mathbf{u}^*$ – єдина на конусному відрізку $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 >$ нерухома точка оператора $\mathbf{T}$, а отже, $\mathbf{u}^*$ – єдиний на $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 >$ розв’язок крайової задачі (3), (4).

Теорема. Якщо система нерівностей (9) – (12) має розв’язок $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, такий, що $0 \le \alpha_1 < \beta_1$, $0 \le \alpha_2 < \beta_2$, то ітераційний процес (13) – (18) збігається: $\mathbf{v}_n \to \mathbf{v}^*$, $\mathbf{w}_n \to \mathbf{w}^*$, причому

$$\mathbf{v}^{(0)} \le \mathbf{v}^{(1)} \le ... \le \mathbf{v}^{(k)} \le ... \le \mathbf{v}^* \le \mathbf{w}^* \le ... \le \mathbf{w}^{(k)} \le ... \le \mathbf{w}^{(1)} \le \mathbf{w}^{(0)}.$$

Якщо ж при цьому $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^* = \mathbf{u}^*$, то $\mathbf{u}^*$ – єдина на $< \boldsymbol{\alpha}\omega(\mathbf{x}), \boldsymbol{\beta}\omega(\mathbf{x}) >$ нерухома точка оператора (7).

Зауважимо, що перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу є те, що на кожній k -й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку $\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x}))$:

$$\left\| \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{(k)} \right\|_2 \le \frac{1}{2} \left\| \mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k)} \right\|_2 .$$

Тоді, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності $\max\{\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w_1^{(k)}(\mathbf{x}) - v_1^{(k)}(\mathbf{x})),\ \max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w_2^{(k)}(\mathbf{x}) - v_2^{(k)}(\mathbf{x}))\} < 2\varepsilon$ і з точністю ε можна вважати, що $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x})$.

3. Результати обчислювального експерименту

Для проведення обчислювального експерименту була обрана задача

$$\Delta^2 u = \sqrt{u} \text{ у } \Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : |\mathbf{x}| < 1\} \subset \mathbf{R}^2, \tag{19}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,\ \Delta u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{20}$$

Заміною $u_1 = u$, $u_2 = -\Delta u$ задачу (19), (20) зводимо до системи диференціальних рівнянь

$$-\Delta u_1 = u_2,\ -\Delta u_2 = \sqrt{u_1} \text{ у } \Omega,$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = 0,\ u_2|_{\partial\Omega} = 0,$$

яку в свою чергу замінимо системою інтегральних рівнянь Гаммерштейна

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi) u_2(\xi) d\xi,\ u_2(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{u_1(\xi)} d\xi, \tag{21}$$

де $G(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho r_{\mathbf{x}\xi^1}}{r_{\mathbf{x}\xi}}$, де $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, точки ξ і ξ^1 симетричні відносно кола одиничного радіуса, $r_{\mathbf{x}\xi}$, $r_{\mathbf{x}\xi^1}$ – відстані між точками $\mathbf{x}$, ξ і $\mathbf{x}$, ξ^1 відповідно.

З системою (21) пов'яжемо гетеротонний оператор

$$\mathbf{T}(u_1, u_2) = \left(\int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi) u_2(\xi) d\xi,\ \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{u_1(\xi)} d\xi \right), \tag{22}$$

для якого супровідний оператор має вигляд

$$\hat{\mathbf{T}}(v_1, v_2, w_1, w_2) = \left(\int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi) v_2(\xi) d\xi,\ \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{v_1(\xi)} d\xi \right).$$

Для оператора (22) сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 >$, де

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = (v_1^0(\mathbf{x}), v_2^0(\mathbf{x})) = (\alpha_1\omega(\mathbf{x}), \alpha_2\omega(\mathbf{x})),$$

$$\mathbf{w}^0(\mathbf{x}) = (w_1^0(\mathbf{x}),\ w_2^0(\mathbf{x})) = (\beta_1\omega(\mathbf{x}),\ \beta_2\omega(\mathbf{x})),$$
$$0 \le \alpha_1 < \beta_1,\ 0 \le \alpha_2 < \beta_2,$$

а функція $\omega(\mathbf{x})$, що задовольняє умовам а) – в) з п. 2, обрана у вигляді $\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2)$.

Система нерівностей для визначення сталих α_1, α_2, β_1, β_2 має вигляд:

$$\alpha_2 \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\omega(\xi)d\xi \ge \alpha_1\omega(\mathbf{x}), \quad \sqrt{\alpha_1}\int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\sqrt{\omega(\xi)}d\xi \ge \alpha_2\omega(\mathbf{x}),$$
$$\beta_2 \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\omega(\xi)d\xi \le \beta_1\omega(\mathbf{x}), \quad \sqrt{\beta_1}\int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\sqrt{\omega(\xi)}d\xi \le \beta_2\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Розв'язком цієї системи нерівностей є, наприклад, числа $\alpha_1 = 0,000868$, $\alpha_2 = 0,00694$, $\beta_1 = 0,00321$, $\beta_2 = 0,0171$.

Було проведено десять ітерацій за схемою

$$v_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)v_2^{(k)}(\xi)d\xi, \quad v_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\sqrt{v_1^{(k)}(\xi)}d\xi,$$
$$w_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)w_2^{(k)}(\xi)d\xi, \quad w_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\sqrt{w_1^{(k)}(\xi)}\,d\xi,$$
$$v_1^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_1\omega(\mathbf{x}),\ v_2^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_2\omega(\mathbf{x}),$$
$$w_1^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_1\omega(\mathbf{x}),\ w_2^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_2\omega(\mathbf{x}).$$

В таблиці 1 наведено дані як змінюється оцінка $\varepsilon_i^{(k)} = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} \frac{1}{2}\left|w_i^{(k)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k)}(\mathbf{x})\right|$ норми похибки $\left\|u_i^* - u_i^{(k)}\right\|$ наближеного розв'язку $u_i^{(k)}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, в залежності від номера ітерації k, $k = 0, 1, ..., 10$. На рис. 1 наведено графіки перерізів верхніх $w_1^{(k)}(\mathbf{x})$, $w_2^{(k)}(\mathbf{x})$ та нижніх $v_1^{(k)}(\mathbf{x})$, $v_2^{(k)}(\mathbf{x})$ наближень при $x_2 = 0$ для $k = 0, 2, 6, 8, 10$.

Отже, з точністю $0,27 \cdot 10^{-4}$ наближеним розв'язком задачі (19) – (20) буде функція $u^{(10)}(\mathbf{x}) = u_1^{(10)}(\mathbf{x}) = \dfrac{v_1^{(10)}(\mathbf{x}) + w_1^{(10)}(\mathbf{x})}{2}$. На рис. 2 і 3 відповідно наведено поверхню та лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(10)}(\mathbf{x})$. Зауважимо, що розв'язок $u^{(10)}(\mathbf{x})$ має радіальну симетрію. Через це у таблиці 2 наведено знайдені з точністю $0,27 \cdot 10^{-4}$ значення наближеного розв'язку $u^{(10)}(\mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x}_i = (ih, 0)$, $h = 0,25$, $i = 0, 1, 2, 3$, розташованих на промені $\varphi = 0$, при цьому отримано, що $\left\|u^{(10)}\right\| = 0,00133$.

Таблиця 1. Значення оцінки похибки наближеного розв'язку

Номер ітерації k	$\varepsilon_1^{(k)}$	$\varepsilon_2^{(k)}$
0	$0,59\cdot10^{-3}$	$0,25\cdot10^{-2}$
1	$0,48\cdot10^{-3}$	$0,21\cdot10^{-2}$
2	$0,37\cdot10^{-3}$	$0,15\cdot10^{-2}$
3	$0,27\cdot10^{-3}$	$0,11\cdot10^{-2}$
4	$0,20\cdot10^{-3}$	$0,79\cdot10^{-3}$
5	$0,14\cdot10^{-3}$	$0,59\cdot10^{-3}$
6	$0,11\cdot10^{-3}$	$0,41\cdot10^{-3}$
7	$0,73\cdot10^{-4}$	$0,30\cdot10^{-3}$
8	$0,54\cdot10^{-4}$	$0,21\cdot10^{-3}$
9	$0,37\cdot10^{-4}$	$0,15\cdot10^{-3}$
10	$0,27\cdot10^{-4}$	$0,10\cdot10^{-3}$

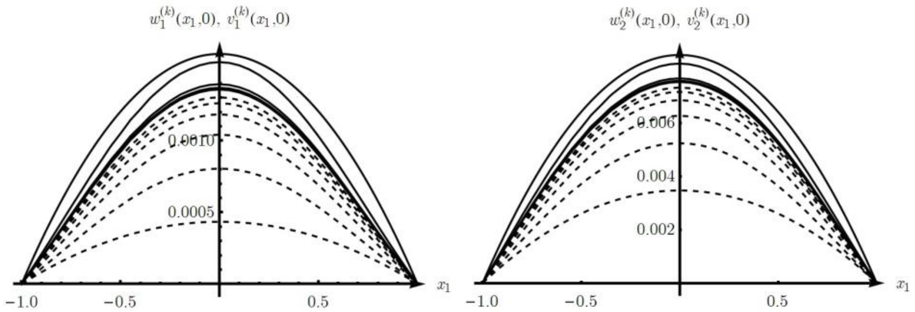
Таблиця 2. Значення наближеного розв'язку в точках $\mathbf{x}_i=(0,25i,\,0)$, $i=0,1,2,3$

$\mathbf{x}_i=(0,25i,\,0)$	$(0,\,0)$	$(0,25,\,0)$	$(0,5,\,0)$	$(0,75,\,0)$
$u^{(10)}(\mathbf{x}_i)$	0,001333	0,00121	0,00088	0,00044

4. Висновки

В роботі вперше запропоновано метод побудови двобічних наближень до додатного розв'язку однорідної задачі Нав'є для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором. Обчислювальний експеримент, проведений для задачі зі степеневою нелінійністю, продемонстрував можливості та ефективність метода. Запропонований підхід до чисельного розв'язання напівлінійних рівнянь вищих порядків може бути використаний при розв'язанні різних прикладних задач, математичними моделями яких є задача (1), (2).

Обмеженість використання запропонованого метода може бути пов'язана з тим, що функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ відома лише для певної кількості класичних областей. При розгляді задачі (1), (2) у областях некласичної геометрії або у областях, для яких функція Гріна відома, але має складний аналітичний вираз, для побудови відповідної (1), (2) системи інтегральних рівнянь можна використати підхід, заснований на використанні замість функції Гріна відповідної квазіфункції [5].



а) *б)*

Рис. 1. Графіки перерізів верхніх та нижніх наближень
$w_1^{(k)}(x_1, 0)$, $v_1^{(k)}(x_1, 0)$ *(а) та* $w_2^{(k)}(x_1, 0)$, $v_2^{(k)}(x_1, 0)$ *(б),* $k = 0, 2, 6, 8, 10$

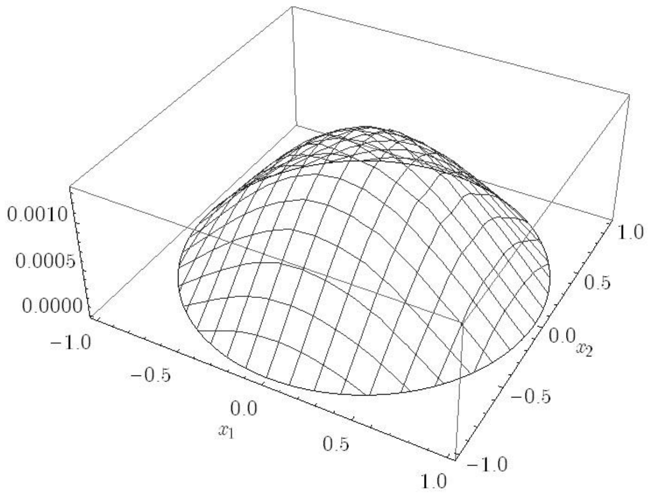


Рис. 2. Графік поверхні наближеного розв'язку $u^{(10)}(\mathbf{x})$

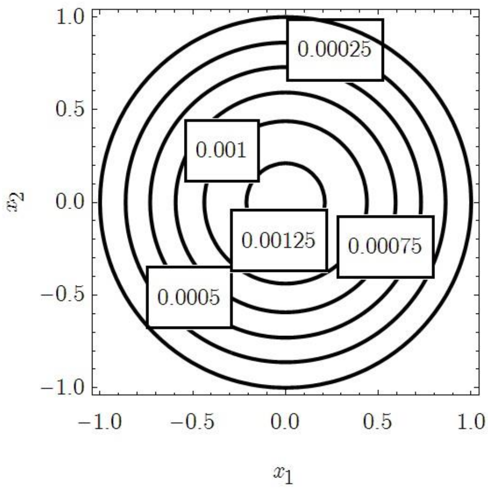


Рис.3. Графік та ліній рівня наближеного розв'язку $u^{(10)}(\mathbf{x})$

ЛІТЕРАТУРА

1. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2015. – № 3. – С. 107 – 120.
2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
3. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. – К.: Наук. думка, 1980. – 268 с.
4. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.
5. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
6. Baraket S., Bazarbacha I., Trabelsi N. Construction of singular limits for four-dimensional elliptic problems with exponentially dominated nonlinearity // Bulletin des Sciences Mathematiques. – 2007. – Vol. 131. – №. 7. – Pp. 670-685.
7. Dalmasso R. Uniqueness theorems for some fourth-order elliptic equations // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1995. – Vol. 123. – №. 4. – Pp. 1177-1183.
8. Dammak M. et al. Singular limits for 4-dimensional semilinear elliptic problems with exponential nonlinearity adding a singular source term given by Dirac masses //Differential and Integral Equations. – 2008. – Vol. 21. – №. 11-12. – Pp. 1019-1036.
9. Omrane I. B., Dammak M. A Generalized four dimensional Emden-Fowler equation with exponential nonlinearity // Communications in Applied Analysis. – 2009. – Vol. 13. – №. 3. – Pp. 431.
10. Peletier L. A., Van der Vorst R. Existence and non-existence of positive solutions of non-linear elliptic systems and the biharmonic equation // Differential and Integral Equations. – 1992. – Vol. 5. – №. 4. – Pp. 747-767.
11. Van der Vorst R. Fourth order elliptic equations with critical growth // Comptes Rendus-Academie des Sciences Paris Serie 1. – 1995. – Vol. 320. – Pp. 295-295.

Надійшла – 24.09.2017