

УДК 004.02:532.542+612.1

Математическое моделирование и 3D визуализация бинарных деревьев с минимумом самопересечений

В. А. Балабанов, Н. Н. Кизилова

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В работе предложен новый алгоритм построения трехмерного бинарного дерева, состоящего из трубок кругового сечения и заполняющего пространство, в случае, когда длины, диаметры, углы ветвления и число поколений изначально заданы. Разработана практическая реализация алгоритма, обеспечивающая построение трехмерной модели с минимумом самопересечений, образованной тройниками трубок, расположенных в одной плоскости. Алгоритм адаптирован для моделирования систем кровеносных сосудов, выполнения расчетов гемодинамических параметров и их визуализации на модели.

Ключевые слова: бинарное дерево; деревья, заполняющие пространство; артериальные русла; гемодинамика; трехмерная визуализация.

В роботі запропоновано новий алгоритм побудови тривимірного бінарного дерева, що складається з трубок кругового перерізу і заповнює простір у випадку, коли довжини, діаметри, кути розгалуження і число поколінь є заданими. Розроблена практична реалізація алгоритму, який забезпечує побудову тривимірної моделі з мінімумом самоперетинів, яка складається з трійників трубок, що розташовані в одній площині. Алгоритм адаптовано для моделювання систем кровоносних судин, проведення чисельних розрахунків гемодинамічних параметрів і їх візуалізації на моделі.

Ключові слова: бінарне дерево; дерева, що заповнюють простір; артеріальні русла; гемодинаміка; тривимірна візуалізація.

In the paper a new algorithm for constructing a 3d space-filling binary tree composed of circular cross section tubes, for the case when the lengths, the diameters, the branching angles and the number of generations are set initially, has been proposed. A practical implementation of the algorithm for 3d model, with a minimal number of intersections, formed by the trifurcated tubes within a single plane has been presented. The algorithm is adapted for simulating vascular systems, computing hemodynamic parameters and their visualizing on the model.

Key words: binary tree; space-filling trees; arterial vasculatures; 3d visualization.

1. Общая формулировка задачи и её актуальность

Бинарные деревья служат моделями многих ветвящихся систем, имеющих в природе: артериальные и венозные сосудистые русла, бронхиальное дерево и дыхательные пути, трофические системы простейших, корни и кроны растений, речные русла и другие проточные системы, обеспечивающие доставку/отток вещества к/от распределенной в пространстве системе стоков/источников – клеток, тканей и органов растений и животных [1]. Аналогичные транспортные системы используются в технических тепло- и массообменных системах. При определенных соотношениях между геометрическими параметрами бинарные деревья представляют собой оптимальные трубопроводы [2], обеспечивающие минимальные расходы энергии $W \rightarrow \min$ на транспортировку, что свойственно оптимальным системам [1,3]. Одним из важнейших свойств таких систем является отсутствие самопересечений. Для планарных деревьев это условие

можно выполнить, задавая законы самоподобия областей [2,4,5] или bottom-to-top алгоритм [6], основанный на закономерностях ветвлений артериальных русел [3-5]. Для 3d систем возможный top-to-bottom алгоритм генерации бинарных деревьев без самопересечений был предложен в [7].

В настоящей работе приведена программная реализация предложенного алгоритма и проанализированы результаты ее работы на моделях артериальных русел разных внутренних органов. Разработанный программный комплекс полезен для количественного анализа распределения давлений и скоростей кровотока во внутренних органах, диагностики патологий, планирования терапевтического или хирургического лечения. При этом максимально информативной визуальной моделью можно считать трехмерное изображение, для построения которого может использоваться анаглифная стереоскопическая графика [8].

2. Закономерности строения сосудистых русел

За более чем столетнюю историю детальных исследований геометрии сосудистых русел человека и животных было показано наличие определенных зависимостей между диаметрами, углами разветвлений (Рис.1) и длинами сегментов сосудов в виде закона Мюррея

$$d_0^\gamma = d_1^\gamma + d_2^\gamma, \quad (1)$$

где d_0 – диаметр родительского сосуда, $d_{1,2}$ – диаметры двух дочерних сосудов, $\gamma \approx 3$ ($\gamma = 2.55 - 3.02$ и $\gamma = 2.76 - 3.02$ для артериальных и венозных русел, $\gamma = 2.61 - 2.91$ для бронхиального дерева) [5].

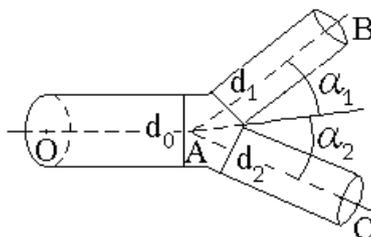


Рис. 1. Схема бифуркации проводящих элементов в бинарном дереве

Для углов ветвления $\alpha_{1,2}$ выполняются соотношения Розена [9]:

$$\alpha_1 = \arccos \left(\frac{(1 + \xi^3)^{\frac{4}{3}} + 1 - \xi^4}{2(1 + \xi^3)^{\frac{2}{3}}} \right), \quad \alpha_2 = \arccos \left(\frac{(1 + \xi^3)^{\frac{4}{3}} \xi^4 - 1}{2\xi^2(1 + \xi^3)^{\frac{2}{3}}} \right) \quad (2)$$

где $\xi = \min \{d_1, d_2\} / \max \{d_1, d_2\}$ – коэффициент асимметрии бифуркации.

Для длин сегментов выполняются соотношения (аллометрический принцип) [10]:

$$L_j = ad_j^\beta \quad (3)$$

где $\alpha \in [2.6; 7.59]$, $\beta \in [0.84; 1.16]$ (в среднем $\beta \sim 1$). Для внутриорганных артериальных русел имеются также аппроксимации зависимостей $L_j(d_j)$ полиномами и др. функциями, специфичными для различных органов [11].

На соответствующих математических моделях было показано, что соотношения (1)–(2) являются необходимыми условиями локальной [4] и глобальной [2] оптимальности бинарного дерева в смысле критерия $W \rightarrow \min$.

Строение систем дальнего транспорта жидкости у растений [5], проточных трофических систем у простейших [3] и других транспортных систем в живой и неживой природе также основано на соотношениях (1)–(3). Подробный обзор существующих алгоритмов построения и визуализации бинарных деревьев приведен в [6].

3. Описание алгоритма top-to-bottom

В связи с тем, что аналоги, рассмотренные выше, не удовлетворяют поставленной задаче, необходимо разработать метод 3d визуализации бинарного дерева, удовлетворяющего ограничениям (1)–(3) и критерию минимально возможного числа самопересечений.

Определение 1. Назовем бифуркацией плоскость, содержащую три узла (рис.1): родительский (А) и два дочерних (В,С), а также две дочерних трубки (АС и ВС), соединяющих родительский узел с дочерними, при этом углы ветвления в бифуркации соответствуют условию (2).

Определение 2. Назовем осью бифуркации прямую, которая является осью симметрии родительской трубки ОА (рис.1).

Определение 3. Назовем пересечением двух бифуркаций число, характеризующее ситуацию, при которой расстояние h_{ij} между осями трубок из первой и второй бифуркаций удовлетворяет условию $h_{ij} \leq (d_i + d_j) / 2$, причем одна бифуркация не является непосредственным потомком другой. Таким образом, число пересечений двух бифуркаций может принимать целочисленные значения $n_{ij} = 0 \div 4$. Числом пересечений в дереве будем называть сумму пересечений всех входящих в дерево бифуркаций.

Определение 4. Назовем поворотом дерева поворот плоскости каждой бифуркации в дереве на некоторый заданный угол вокруг ее оси. Поворот дерева является основой предложенного в работе метода и позволяет практически полностью устранить пересечения между ребрами в 2d модели дерева (Рис. 2).

Результатирующее количество пересечений, а значит и эффективность метода, зависит только от угла поворота, что обуславливает важность его правильного определения. Данный метод предполагает два варианта определения: ручную и автоматически посредством перебора всех углов поворота в заданном интервале с заданным шагом. При определении угла вручную и при использовании данного метода для визуализации деревьев, описывающих один класс деревьев, например, артериальные русла, для увеличения эффективности работы метода можно использовать статистический анализ корреляции угла поворота и числа

пересечений с целью поиска оптимального угла поворота, минимизирующего число пересечений.

Следует отметить, что число пересечений в полученной после поворота дерева 3d модели прямо пропорционально числу пересечений в исходной 2d модели. Таким образом, минимизируя число исходных пересечений, можно уменьшить их количество после поворота дерева. В связи с тем, что в 2d модели отсутствует информация о том, какой из узлов-потомков в каждой бифуркации «левый», а какой «правый», мы можем менять их местами, сохраняя отношение наследования и не нарушая планарную геометрическую модель бифуркации. С учетом этого возникает задача подготовки 2d модели к повороту дерева путем минимизации числа исходных пересечений. Для этого в модель вводится понятие расположения дочерних элементов в бифуркации относительно ее оси, которая может быть «левой» и «правой».



Рис. 2. Дерево до (а) и после (б) поворота

Определение 5. Назовем суммарной длиной ребер элемента сумму длин всех его потомков, включая его собственную длину.

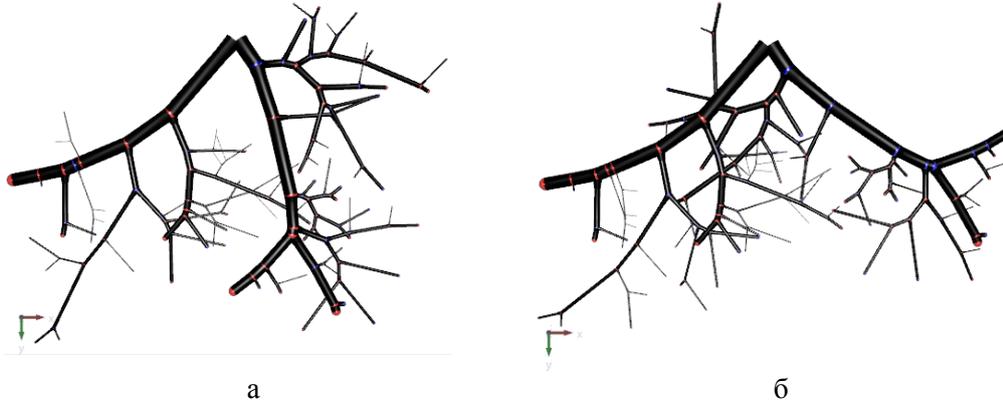
Определение 6. Назовем центральной осью дерева ось исходного родительского элемента этого дерева.

Определение 7. Назовем распределением бинарного дерева изменение расположения с «левого» на «правое» между потомками двух дочерних элементов данного узла так, чтобы дочерний элемент с меньшей суммарной длиной ребер находился ближе к оси дерева, а элемент большей суммарной длиной ребер – дальше. Распределение бинарного дерева позволяет вынести поддерева с большим числом и/или большими длинами ребер на периферию дерева, что увеличивает занимаемую им площадь, соответственно уменьшая число начальных пересечений (Рис. 3).

Предложенный подход не может гарантировать отсутствие самопересечений при 3d визуализации бинарного дерева, но позволяет существенно снизить их число.

Определение 8. Назовем уменьшением пересечения бифуркаций процесс, при котором из пары пересекающихся бифуркаций выбирается одна с меньшей суммарной длиной потомков, и поворачивается на некоторый угол, который уменьшает число пересечений этих бифуркаций. Процесс обхода дерева от

корня к листьям с уменьшением пересечения для каждой бифуркации назовем *уменьшением числа оставшихся пересечений*. При этом необходимо найти для каждого уменьшения такой угол поворота, при котором пересечение будет минимальным. Этот угол ищется путем перебора возможных значений угла в заданном промежутке с заданным шагом.



а б
Рис. 3. Дерево до (а) и после (б) распределения

Предложенный алгоритм схематически представлен на блок-схеме (Рис. 4).



Рис. 4. Блок-схема: основные этапы алгоритма

Для оценки числа пересечений между элементами вычисления расстояния между отрезками прямых в пространстве используется алгоритм Эберли [15].

4. Программная реализация

В соответствии с предложенным алгоритмом для заданного бинарного дерева трубок сначала вызывается функция распределения, затем функция наилучшего поворота дерева, и в завершении – функция уменьшения числа оставшихся пересечений. При неудовлетворительном результате последняя функция может быть вызвана повторно, вплоть до полного устранения пересечений. Стоимость работы алгоритма в худшем случае при наличии m итераций поворота узлов дерева и k итераций локального поворота бифуркаций эквивалентна

$$\theta(n) + m(\theta(n^2) + \theta(n)) + k(\theta(n^3) - \theta(n^2)) = k\theta(n^3) + (m-k)\theta(n^2) + (m+1)\theta(n)$$

и является кубической функцией от количества узлов.

Результатом работы алгоритма является построенная в пространстве геометрическая модель бинарного дерева трубок с минимальным числом самопересечений. Данный метод позволяет по заданному числу $2d$ бифуркаций построить $3d$ модель бинарного дерева трубок с минимальным количеством пересечений, сохраняя заданные диаметра, длины и углы ветвления. Метод оперирует со входной информацией, заданной в виде набора значений длин и диаметров каждой трубки в модели, плоскими углами ветвления в бифуркациях трубок, а также отношением родитель-потомок для каждого узла.

5. Адаптация алгоритма к использованию на классе артериальных русел

5.1. Общее описание. Гипотеза об оптимальном угле поворота

Описанный алгоритм построения бинарных деревьев без самопересечений был использован в разработанной программной системе $3d$ визуализации артериальных русел по результатам морфометрических измерений на препаратах [11] или сгенерированных самоподобных деревьев [12]. Из описания алгоритма следует, что эффективность его работы сильно зависит от выбранного начального угла поворота; при этом малое изменение значения угла приводит к большому изменению эффективности алгоритма, что обосновывает необходимость его правильного определения. Для этого можно использовать метод полного перебора углов поворота в заданном интервале с заданным шагом, выбирая угол, при котором количество пересечений будет минимальным. Однако вычислительная сложность этого процесса для одного шага является квадратичной функцией и эквивалентна $\theta(n^3) - \theta(n^2)$, а для m шагов ее сложность будет $m(\theta(n^3) - \theta(n^2))$. Даже учитывая вычислительные возможности современных рабочих станций, работа этого метода на больших объемах входных данных $\sim 10^9$ будет занимать продолжительное время. Поэтому для уменьшения времени работы алгоритма в ходе вычислительного эксперимента была выдвинута и обоснована гипотеза о существовании фиксированного угла поворота, оптимального для бинарных деревьев из класса артериальных систем, которая состоит в существовании оптимального

фиксированного значения угла поворота, при котором число пересечений для выбранного класса после поворота на этот угол близко к минимально возможному из всех углов поворота $\alpha \in [0; 180^\circ]$.

Для описания гипотезы в формализованном виде примем следующие обозначения:

A – некоторый класс систем (артериальные русла);

B – конкретный экземпляр бинарного дерева из класса A;

$f(B, \alpha)$ – функция зависимости числа пересечений после поворота B на заданный угол α ;

$\min(B)$ – минимально возможное число пересечений после поворота B на угол α .

Тогда принятую гипотезу можно записать в следующей форме:

$$\forall A : \exists \alpha : (\forall B \in A) \left(f(B, \alpha) \rightarrow \min_{\beta} f(B, \beta) \right)$$

Подтверждение этой гипотезы позволит заменить поиск наилучшего угла поворота с помощью перебора значений углов в заданном интервале с заданным шагом на фиксированное значение угла поворота, при котором число пересечений приближается к таковому при наилучшем угле поворота.

5.2. Проверка гипотезы

В целях проверки выдвинутая гипотеза была сужена на класс артериальных русел, после чего были собраны и проанализированы результаты зависимости числа пересечений от угла поворота для набора данных, полученных в ходе детальных измерений на коррозионных пластиковых препаратах внутриорганых артериальных русел человека [11]. Всего были исследованы по 6 образцов артериальных систем 6 внутренних органов: головного мозга, сердца, мышц, селезенки, почек и толстого кишечника. Соответственно, суммарное число обработанных органов равно 36, а число артерий в каждом из них составило порядка 10^3 . Для каждого дерева, представляющего орган, была построена таблица соответствия угла поворота дерева и результирующего числа самопересечений после поворота. При этом суммарное количество трубок сегментов сосудов по всем файлам составило порядка 28000.

5.3. Входные данные

Артериальное русло каждого органа было представлено в виде связного графа, вершины которого соответствовали узлам бифуркаций артерий, а ребра – артериальным сегментам. Каждому узлу был присвоен уникальный идентификатор, после чего регистрировались длины сосудистых сегментов между узлами ветвлений и диаметр сосудистого сегмента в его срединном сечении (Рис. 5).

Полное дерево артериального русла каждого органа было представлено в текстовом файле данных специального формата в кодировке Windows ANSI. Каждая строка файла данных содержит информацию о сосудистом сегменте, представленную идентификаторами начала и конца сегмента, значениями его диаметра и длины (в мм). Для хранения информации об идентификаторах сегмента используются целые числа, а о длине и диаметре – десятичные дроби с запятой или точкой в качестве разделителя целой и дробной частей. Точность

измерений значений длин и диаметров составила 0.05 мм, измерения проводились на сосудистых сегментах вплоть до самых малых представленных на слепке с $d > 0.1$ мм. Числа в строке разделены символом пробела (0x20 в кодировке ANSI) либо символом абзаца (0x09 в кодировке ANSI), конец каждой строки представлен последовательностью символов CR LF (0x0D 0x0A в кодировке ANSI)

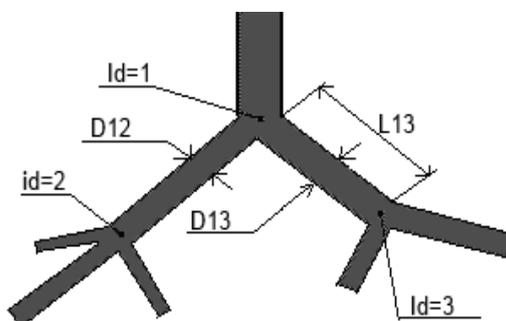


Рис. 5. Схема бифуркации: $Id=1$, $Id=2$, $Id=3$ – узлы последовательных бифуркаций, $D12$, $D13$ – диаметры дочерних сегментов, $L13$ – длина сегмента

5.4. Процесс генерации сводной таблицы

Список полных путей к файлам данных передавался в разработанный в рамках данной научной работы программный комплекс пространственной визуализации. Для каждого файла из переданного списка проводилась загрузка информации в программу, построение трехмерного дерева по загруженным данным и его распределение. После распределения осуществлялся полный перебор углов поворота в промежутке $\alpha \in]0; 180[$ с шагом в один градус. Для каждой итерации перебора углов исходное дерево поворачивалось на текущий угол, после чего подсчитывалось суммарное число пересечений в дереве после поворота. Текущий угол и подсчитанное число пересечений запоминались. После обработки всех файлов результаты заносились в сводную таблицу. В ней каждому файлу данных соответствовало два столбца, в первом находился номер итерации, равный углу поворота дерева в градусах, а во втором – суммарное количество пересечений в дереве после его поворота на угол, указанный в первом столбце. Полученная сводная таблица с количеством столбцов, равным удвоенному количеству входных файлов, и количеством строк, равным количеству итераций, дополнялась информацией о радианной мере угла поворота, именами обработанных файлов и временем, затраченным на обработку (в миллисекундах), после чего экспортировалась в таблицу Microsoft Office Excel 1997-2003 (Рис. 6).

Далее в полученной таблице вычислялось суммарное число пересечений N_1 для каждого угла поворота α в каждой модели одного из 6 типов внутриорганных русел; суммарное число пересечений N_2 по данному органу для фиксированного α ; среднее число пересечений N_3 на орган для заданного α .

	A	B	C	D	E	F	G
1	angle, balancir	Heart20.txt		Heart22.txt		Heart25.txt	
2	0	0	863	0	323	0	154
3	0,017453293	1	56	1	28	1	23
4	0,034906585	2	2	2	9	2	7
5	0,052359878	3	2	3	2	3	0
6	0,06981317	4	1	4	2	4	1
7	0,087266463	5	2	5	3	5	1
8	0,104719755	6	0	6	0	6	1
9	0,122173048	7	0	7	0	7	0
10	0,13962634	8	1	8	3	8	0
11	0,157079633	9	3	9	5	9	0
12	0,174532925	10	2	10	6	10	0
13	0,191986218	11	7	11	7	11	0
14	0,20943951	12	2	12	4	12	1

Рис. 6. Образец сводной таблицы, сгенерированной по результатам работы разработанного ПО

5.5. Выбор оптимального угла поворота дерева

Расчитанные значения $N_{1,3}$ далее анализировались с целью нахождения угла α , при котором N_3 минимально, максимальное количество пересечений по органам также минимально, а 3d геометрия построенного дерева близка к геометрии исходного артериального русла органа.

Для описания в формальном виде примем следующие обозначения:

$A_i, i = 1, \dots, 6$ – классы органов (мозг, печень, и т.д., по 6 экземпляров каждого класса);

$A_i^k, i = 1, \dots, 6, k = 1, \dots, 6$ – k -й экземпляр i -го класса органа.

Тогда имеют место следующие формулы:

– суммарное количество пересечений для экземпляров класса A_i при угле поворота α :

$$N_1 = \sum_{k=1}^6 f(A_i^k, \alpha);$$

– суммарное количество пересечений для всех органов при угле поворота α :

$$N_2 = \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 f(A_i^k, \alpha);$$

– среднее количество пересечений $N_3 = N_2 / 6^2$ для всех органов при угле поворота α ;

– минимальное среднее количество пересечений для всех органов при угле поворота в интервале $[0; \pi)$:

$$N_{\min} = \min_{\alpha \in [0; \pi)} N_3 \quad (4)$$

– максимальное количество пересечений на орган при угле поворота α :

$$N_{\max} = \max_{i=1..6, k=1..6} f(A_i^k, \alpha) \quad (5)$$

Тогда наша цель заключается в одновременной минимизации N_{\min} и N_{\max} .

В процессе анализа исходных данных было установлено, что для любого органа можно найти такой угол поворота дерева α , при котором число

пересечений после поворота не больше единицы. Было выявлено, что только для одного из 36 исследованных файлов данных $N_{\min} \neq 0$. Рассчитанные зависимости N_3 и N_{\max} от угла поворота для одного из файлов данных представлены на Рис.7. Глобальный минимум функции $N_3(\alpha)=1$ достигается при $\alpha=165$ град. (= -15 град.). При $\alpha=54$ град. суммарное число пересечений после поворота во всех 36 проанализированных органах было минимальным и составило $N_2=6$, а $N_{\max}=2$, причем для многих файлов данных $N_1=0$ (Табл. 1).

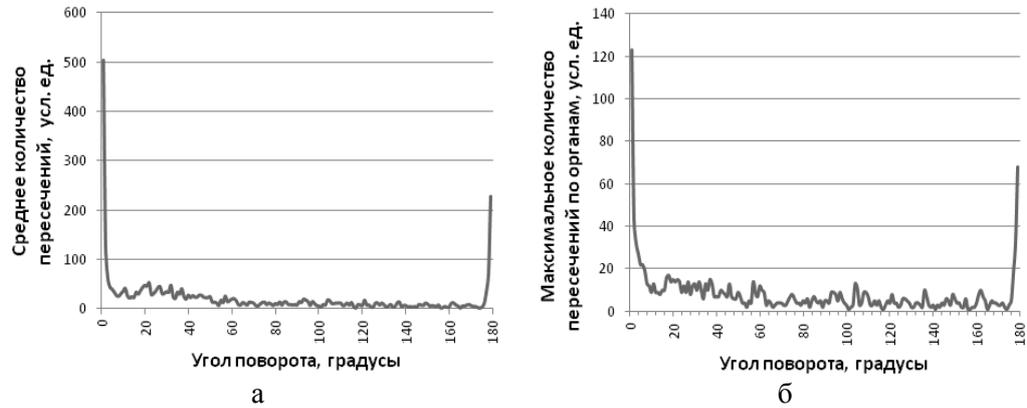


Рис. 7. Зависимости N_3 (а) и N_{\max} (б) от угла поворота дерева α для одного из файлов данных

Табл. 1. Значения N_1 для разных экземпляров артериальных русел мозга и печени при повороте дерева на угол $\alpha = 54^\circ$

имя файла	N_1	имя файла	N_1	имя файла	N_1
Brain15	0	Heart20	1	Kidney20	0
Brain18	0	Heart22	0	Kidney25	0
Brain20	0	Heart25	0	Kidney30	0
Brain22	0	Heart27	2	Kidney35	0
Brain25	0	Heart30	1	Kidney37	0
Brain30	0	Heart32	2	Kidney40	0
Brains	0	Hearts	6	Kidney	0
Liver30	0	Muscle16	0	Spleen30	0
Liver35	0	Muscle18	0	Spleen32	0
Liver40	0	Muscle20	0	Spleen35	0
Liver45	0	Muscle21	0	Spleen40	0
Liver50	0	Muscle28	0	Spleen45	0
Liver55	0	Muscle30	0	Spleen50	0
Liver	0	Muscle	0	Spleen	0
Summary	6	Mid	0,167		
Min	0	Max	2		

5.6. Программный комплекс для 3D визуализации и численных расчетов гемодинамических параметров артериальных систем

На основании сформулированных целей и задач, обзор существующих аналогов и результаты численного эксперимента по предложенному алгоритму были сформулированы следующие требования к разрабатываемому программному продукту:

1. Импорт данных, имеющих специальную структуру, из файлов формата Microsoft Office Excel 1997-2003, Microsoft Office Excel 2007-2010 и текстовых файлов;
2. Построение по импортированным данным 3d визуализации с широкими возможностями просмотра, включающими в себя свободное манипулирование положением камеры с помощью мыши;
3. Наличие автоматического режима расчета пространственной геометрической модели бинарного дерева с минимумом числа самопересечений;
4. Автоматический режим расчета, экспорта и визуализации гемодинамической информации на 3d модели с помощью градиентной карты;
5. Режим анаглифного стереоизображения для просмотра 3d модели с помощью очков с красным и синим светофильтрами;
6. Использование современной аппаратной базы рабочих станций для обеспечения минимальных временных затрат на расчеты и максимального быстродействия при визуализации.

Основные этапы жизненного цикла программы:

- 1) Импорт данных. Данные импортируются из текстового файла специального формата, или из файла таблицы Microsoft Office Excel, имеющего схожую структуру.
- 2) Настройка визуального представления данных. Состоит из выбора режима визуализации гемодинамики:
 - отображение карты величин давлений;
 - отображение карты объемного тока крови;
 - отображение карты сопротивлений сегментов кровотоку;
 - отсутствие визуализации гемодинамики.Также в этот этап включена настройка качества, или детализации представления и настройка цветовой схемы.
- 3) Поворот дерева. Этап преобразования плоскостной модели дерева в пространственную модель с минимумом самопересечений, представлен тремя режимами:
 - поворот на заданный угол, при котором пользователь самостоятельно вводит численное значение угла поворота;
 - поворот на фиксированный угол, оптимальный для класса артериальных русел;
 - автоматический расчет оптимального угла поворота. В этом режиме угол рассчитывается итеративно с использованием разработанного алгоритма.

Каждая итерация обрабатывается в отдельном потоке, число работающих одновременно потоков равно числу процессоров.

- 4) Устранение оставшихся пересечений. При необходимости, пользователь может запустить последний этап алгоритма для минимизации оставшихся пересечений.
- 5) Анаглифный режим. После построения визуального представления модели пользователь может переключиться в анаглифный стереорежим, предназначенный для просмотра стереоизображения с помощью очков с красным и синим светофильтрами.
- 6) Экспорт гемодинамических параметров. Программа поддерживает автоматический расчет параметров построенной сердечно-сосудистой системы и экспорт их в файл формата таблицы Microsoft Office Excel.

Результат построения и отображения 3D модели коронарного дерева с наложенной на него рассчитанной градиентной картой давлений представлен на рис.8.



Рис. 8. Основное окно визуализатора. Коронарное дерево. Градиентная карта давлений

7. Выводы

В работе рассмотрена важная научно-прикладная задача восстановления 3D структуры бинарных деревьев с минимальным количеством самопересечений.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

- 1) разработан метод автоматического расчета пространственной геометрии бинарного дерева трубок с минимальным количеством самопересечений при наличии набора заданных значений числа трубок, отношений родитель-потомок, длин, диаметров и углов ветвления в бифуркациях для каждой трубки;
- 2) на основе разработанного метода формально описан соответствующий алгоритм и проведена оценка вычислительной стоимости;

- 3) описанный алгоритм адаптирован на класс артериальных русел, после чего была сформулирована и доказана гипотеза о существовании единого для всего класса оптимального угла поворота дерева, а также проведена оценка эффективности работы алгоритма;
- 4) разработана практическая реализация алгоритма, эффективно использующая современную аппаратную базу для 3d и анаглифной визуализации артериальных русел как бинарных деревьев;
- 5) реализован автоматический расчет и визуализация с помощью градиентной карты гемодинамической информации на 3d модели, соответствующей артериальной системе внутреннего органа человека.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bejan A. Shape and Structure: from Engineering to Nature, Cambridge Univ. Press. – 2000. – 210p.
2. Черноусько Ф.Л. Оптимальная структура ветвящихся трубопроводов // Прикл. матем. мех. – 1977. – т.41, №2. – С.376–383.
3. La Barbera M. Principles of design of fluid transport systems in zoology // Science. – 1990. – v.249. – P.992–1000.
4. Образцов И.Ф. Оптимальные биомеханические системы. – М., 1989. – 196с.
5. Kizilova N.N. Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics. // Lecture Notes in Computer Sci. – 2004. – v.3044. – P.476–485.
6. Балабанов В. О, Кізілова Н. М. Математичне моделювання артеріальних систем як бінарних дерев, які заповнюють об'єм простору. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. Спецвипуск. – 2015. – С.27-32.
7. Балабанов В.А., Кизилова Н.Н. Новый алгоритм построения оптимальных транспортных систем, заполняющих заданную область. // Механика. Исследования и инновации. Вып. 9. Гомель, 2016. – С.18-26.
8. Бубнов Р.В., Киселева О.Г. Стереоскопическая визуализация биомедицинских объектов. // Биомед. инженерия. – 2011. – № 2. – С.54–57.
9. Розен Р. Принцип оптимальности в биологии. М.:Мир, 1968. – 212с.
10. Dawson C.A., Krenz G.S., Karau K.L., et al Structure-Function Relationships in the Pulmonary Arterial Tree. // J. Appl. Physiol. – 1999. – v.86. – P.569–583.
11. Зенин О.К. Артериальная система человека в цифрах и формулах. Донецк: "Донбасс", – 2002. – 196с.
12. Bondarenko M.Ye., Kizilova N.N. Pulse wave reflections in asymmetrically branching arterial networks. // Russian J.Biomech. – 2002. – N4. - P.52-62.