

УДК 519.6, 539.3

## Обратная задача теории бифуркаций для уравнений Кармана

В. Я. Адлуцкий, В. А. Громов, Н. И. Ободан

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Украина*

В работе рассматривается подход к решению обратной задачи теории бифуркаций: подход основывается на построении решений прямой задачи теории бифуркаций для данных уравнений с последующим выявлением характерных последовательностей решений, фиксируемых на ветвях первичного и вторичного ветвления соответствующей краевой задачи. Для построения предвестников бифуркаций (характерных последовательностей) использовалась кластеризация последовательностей решений, фиксируемых на указанных ветвях решения. Данный подход был применён для решения обратной задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана

**Ключевые слова:** обратная задача теории бифуркаций, нелинейная краевая задача для уравнений в частных производных, уравнения Кармана.

У роботі розглянуто підхід до розв'язання оберненої задачі теорії бифуркацій: підхід базується на побудові розв'язків прямої задачі теорії бифуркацій для зазначених рівнянь з наступним виявленням характерних послідовностей розв'язків, що фіксуються на гілках первинного і вторинного розгалуження відповідної крайової задачі. Для побудови передвісників бифуркації (характерних послідовностей) було використано кластеризацію послідовностей розв'язків, які фіксуються на цих гілках. Даний підхід було застосовано для розв'язання оберненої задачі теорії бифуркацій для рівнянь Кармана.

**Ключові слова:** обернена задача теорії бифуркацій, нелінійна крайова задача для рівнянь в частинних похідних, рівняння Кармана.

The paper is concerned with an approach to solve inverse bifurcation problem. The approach employs solution belonged to bifurcation paths of the problem in question in order to cluster consequences of them to reveal typical consequences (bifurcation precursors, early-warning signs). The approach was applied to solve inverse bifurcation problem for von Karman equations.

**Keywords:** inverse bifurcation problem, nonlinear boundary problem for PDEs, von Karman equations.

### 1. Введение

Значительное число явлений, определяемых качественной сменой поведения нелинейных систем, делает необходимым анализ явлений, непосредственно предшествующих бифуркации – такого рода феномены получили название предвестников бифуркации [1]. Именно в определении и анализе предвестников бифуркации и заключается обратная задача теории бифуркаций.

Магистральным направлением здесь является анализ динамических систем с шумами различной природы, причём предвестником бифуркации служит резкое увеличение амплитуды шума при приближении к точке бифуркации, а также изменение его характеристик. Такого рода предвестники получили название шумовых. Здесь возможно построение предвестников бифуркации для детерминированных систем с аддитивным шумом той или иной природы и для стохастических систем [6]. Так, в работе [10] исследуется изменение спектра шума при приближении к аттрактору типа предельный цикл; серия работ [4, 9]

посвящена предбифуркационному усилению шума в нелинейных отображениях. Работа [1] ставит цель не просто предсказать приближение бифуркации, но и определить её тип по виду распределения случайных составляющих наблюдаемой системы. Существенным недостатком шумовых предвестников является необходимость наличия для их вычисления весьма длинных последовательностей наблюдений, что редко возможно для реальных данных [6].

В некоторой степени, указанного недостатка лишены топологические предвестники. Так, в работе [7] рассматривается предвестник, основанный на статистическом анализе структуры последовательности, генерируемой отображением Пуанкаре исследуемой системы. Метод основывается на независимости указанной структуры от конкретного вида дифференциальных уравнений в окрестности той или иной бифуркации и существовании характерных последовательностей наблюдений в данной окрестности. В частности, в указанной статье авторы рассматривают случай бифуркации удвоения периода предельного цикла. В целом, применение топологических предвестников для предсказания бифуркаций в конкретной системе требует знания возможных бифуркаций.

Ещё один способ построения топологических предвестников, связанный с обнаружением неустойчивых предельных циклов, представлен в работах [8]. В работе [3] решается обратная задача теории бифуркаций для суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа (бифуркации рождения цикла); представлены результаты вычислительного и натурального эксперимента. Здесь в качестве предвестника бифуркации выступает явление когерентного резонанса, состоящее в возникновении согласованности в индуцированных шумом колебаниях различных элементов системы.

В настоящей работе предлагается подход к решению обратной задачи бифуркации для нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана, в рамках которого в качестве предвестников бифуркации выступают характерные последовательности решений, предшествующих бифуркации.

## 2. Прямая задача теории бифуркаций в уравнениях Кармана

Нелинейная краевая задача для уравнений Кармана формулируется на цилиндрической поверхности  $\Omega = \{x_1^{\min} \leq x_1 \leq x_1^{\max}; x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max}; x_2^{\min} = x_2^{\max} \bmod 2\pi\} \subset R^1 \times S^1$ , граничные контура которой даются выражением  $\Gamma \equiv \partial\Omega = \{x_1 = x_1^{\min}\} \cup \{x_1 = x_1^{\max}\}, x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max}$ . Соответствующая система уравнений в частных производных записывается в виде:

$$\begin{aligned} a_1 \nabla_k^4 u_1 + L(u_1, u_2) - \nabla_k^2 u_2 &= \lambda, \\ a_2 \nabla_k^4 u_2 - \frac{1}{2} L(u_1, u_1) - \nabla_k^2 u_1 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_k^2 \alpha &\equiv k_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + k_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2}; \\ L(\alpha, \beta) &\equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2}. \end{aligned}$$

Здесь и далее  $X = (x_1, x_2)$ ;  $U \equiv U(X) \equiv (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))$  – вектор неизвестных функций задачи;  $\lambda$  – параметр задачи;  $k_1, k_2, a_1, a_2$  – некоторые константы. Для построения краевой задачи уравнения (1) должны быть дополнены условиями на границе  $\Gamma$ :

$$S(U, \lambda)|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Для решения указанной нелинейной краевой задачи использовался нелинейный обобщённый метод Канторовича, который в сочетании с методом анализа структуры ветвления и построения ветвей решения нелинейной краевой задачи [5] позволил установить бифуркационную структуру указанной нелинейной краевой задачи, построить ветви решения, установить области существования (по параметру и по нормам решения) характерных решений, связанных с полученными ветвями. Здесь было установлено существование ветвей первичного и вторичного ветвления, для которых связанные с ними решения характеризуются равноотстоящими и неравноотстоящими положениями максимумов функции  $u_1$  в направлении  $x_2$  соответственно. Ветви вторичного ветвления соединяют между собой ветви первичного ветвления с различным числом максимумов.

В табл. 1 сведены характерные решения, существующие при различных значениях параметра. Информация о каждом решении представлена в виде:

решение при  $x_1 = \frac{1}{2}(x_1^{\min} + x_1^{\max}) = const$ , величины  $\|u_1\|_{L_2}$ ,  $\frac{\|u_1\|_{L_2}}{\|u_1\|_C}$ ,

$\frac{\|u_1\|_{W_2^2}}{\|u_1\|_C}$  (если решение данного типа встречается при данном значении

параметра на нескольких ветвях\участках ветви, то приведено несколько значений) и краткое описание ветви, на которой фиксируется решение (здесь для ветвей первичного ветвления указывается число максимумов и указание на то, минимум или максимум наблюдается на данном решении при  $x_2 = 0$ ; для решений ветвей вторичного ветвления также указывается число максимумов и – через двоеточие – информация о ветвях первичного ветвления, которые соединяет данная ветвь вторичного ветвления).

Табл. 1. Области существования решений

Значение параметра	Решение			Решение			Решение			Решение			Решение		
	$\ u_1\ _{L_2}$	$\frac{\ u_1\ _{L_2}}{\ u_1\ _C}$	$\frac{\ u_1\ _{W_2^2}}{\ u_1\ _C}$	$\ u_1\ _{L_2}$	$\frac{\ u_1\ _{L_2}}{\ u_1\ _C}$	$\frac{\ u_1\ _{W_2^2}}{\ u_1\ _C}$	$\ u_1\ _{L_2}$	$\frac{\ u_1\ _{L_2}}{\ u_1\ _C}$	$\frac{\ u_1\ _{W_2^2}}{\ u_1\ _C}$	$\ u_1\ _{L_2}$	$\frac{\ u_1\ _{L_2}}{\ u_1\ _C}$	$\frac{\ u_1\ _{W_2^2}}{\ u_1\ _C}$	$\ u_1\ _{L_2}$	$\frac{\ u_1\ _{L_2}}{\ u_1\ _C}$	$\frac{\ u_1\ _{W_2^2}}{\ u_1\ _C}$
	Описание			Описание			Описание			Описание			Описание		
$\lambda = 0.9$															
	11.2	0.76	14.1	5.94	0.97	17.1	16.5	0.98	8.9	52.1	1.03	6.65	15.1	1.05	25.6

			26.4	1.04	14.9	51.2	1.02	14.8	67.3	1.07	9.06				
	3l: 6 <sub>min</sub> → 5 <sub>min</sub>			5 <sub>max</sub> (5 <sub>min</sub> )			4 <sub>min</sub> (4 <sub>max</sub> )			3 <sub>max</sub> (3 <sub>min</sub> )			6 <sub>min</sub> (6 <sub>max</sub> )		
$\lambda = 0.8$															
	6.67	0.54	8.71	7.14	0.67	5.31	65.9	0.72	4.81	7.12	0.74	12.1	50.5	0.94	8.3
	3l: 5 <sub>min</sub> → 4 <sub>min</sub>			2l: 6 <sub>min</sub> → 4 <sub>min</sub>			3l: 5 <sub>max</sub> → 3 <sub>max</sub>			2l: 5 <sub>min</sub> → 4 <sub>max</sub>			2l: 4 <sub>max</sub> → 3 <sub>max</sub>		
	18.4	0.99	9.2	55.1	1.02	7.55	23.0	1.03	15.2						
	48.0	1.02	13.6	64.6	1.07	8.86	10.5	1.04	17.7						
4 <sub>min</sub> (4 <sub>max</sub> )			3 <sub>max</sub> (3 <sub>min</sub> )			5 <sub>max</sub> (5 <sub>min</sub> )									
$\lambda = 0.7$															
	8.48	0.49	7.18	23.2	0.61	6.97	32.2	0.64	8.36	8.82	0.7	10.7	12.7	0.7	10.1
				16.2	0.78	11.5	15.1	0.76	11.6				25.1	0.72	7.81
													24.8	0.72	7.83
													12.6	0.7	10.1
	3l: 5 <sub>min</sub> → 4 <sub>min</sub>			3l: 5 <sub>max</sub> → 3 <sub>max</sub>			3l: 5 <sub>max</sub> → 3 <sub>max</sub>			2l: 5 <sub>min</sub> → 4 <sub>max</sub>			2l: 5 <sub>max</sub> → 3 <sub>min</sub>		
			3l: 6 <sub>min</sub> → 5 <sub>min</sub>									2l: 6 <sub>min</sub> → 5 <sub>min</sub>			
13.1	0.77	10.9	36.7	0.81	6.95	79.2	0.98	6.28	20.0	0.99	9.8	52.1	1.03	6.55	
13.0	0.77	10.9	35.7	0.81	7.01				44.0	1.03	12.4	62.7	1.06	7.86	
15.3	0.81	12.3													
15.3	0.81	12.2													
4l: 5 <sub>max</sub> → 3 <sub>min</sub>			3l: 5 <sub>max</sub> → 3 <sub>min</sub>			2l: 4 <sub>max</sub> → 3 <sub>max</sub>			4 <sub>min</sub> (4 <sub>max</sub> )			3 <sub>max</sub> (3 <sub>min</sub> )			
2l: 6 <sub>max</sub> → 5 <sub>min</sub>			3l: 6 <sub>max</sub> → 5 <sub>min</sub>												

$\lambda = 0.6$										
	12.4 .49 6.1 22.3 .61 6.2	13.4 0.68 8.91 30.4 0.78 7.07	23.0 0.82 9.67 35.3 0.91 8.01	22.4 0.97 10.4 39.2 1.02 11.3	57.9 1.03 7.19 58.3 1.06 7.24					
	3l: 5 <sub>min</sub> → 4 <sub>min</sub>		2l: 5 <sub>min</sub> → 4 <sub>max</sub>		3l: 5 <sub>min</sub> → 3 <sub>max</sub>		4 <sub>min</sub> (4 <sub>max</sub> )		3 <sub>max</sub> (3 <sub>min</sub> )	
$\lambda = 0.5$										
	25.8 0.85 8.82	27.3 0.89 9.16	26.2 0.92 10.4	24.5 0.95 10.5 25.1 1.01 10.8						
	2l: 5 <sub>min</sub> → 4 <sub>max</sub>		3l: 5 <sub>min</sub> → 4 <sub>min</sub>		2l: 6 <sub>min</sub> → 4 <sub>min</sub>		4 <sub>min</sub> (4 <sub>max</sub> )			

### 3. Обратная задача теории бифуркаций

Обратная задача определения апостериорного бифуркационного состояния может быть сформулирована как

$$C_{\text{bif}} = \operatorname{argmin}_{C \in \mathfrak{Z}} \rho_C(C, C^*) \quad (3)$$

где  $\rho_C(C, C^*)$  – расстояние в евклидовой метрике между подмножеством  $C^*$  последовательности наблюдаемых и последовательностью  $C$  возможных решений уравнений Кармана,  $\mathfrak{Z}$  – множество предвестников бифуркации.

Наблюдаемая последовательность решений  $C^* = \{U^*(1), U^*(2), \dots, U^*(N)\}$ , отражает изменение решений уравнений Кармана, описываемых с помощью значений функций решения в точках области определения  $U^*(i) = \{U_k^* i\}$ ,  $k = \overline{1, K}$  для элемента последовательности решений с номером  $i$ . Здесь и далее  $N$  – номер решения в последовательности, для которого осуществляется идентификация.

Предвестник бифуркации также представляет собой характерную последовательность решений  $C = \{U_C(N - i_0^{(C)}), U_C(N - i_1^{(C)}), \dots, U_C(N - i_C^{(C)})\}$ , которую можно поставить в соответствие номерам наблюдений  $N - i_0^{(C)}, N - i_1^{(C)}, \dots, N - i_C^{(C)}$ , где величины  $i_0^{(C)}, i_1^{(C)}, \dots, i_C^{(C)}$  характерны для данного конкретного предвестника (обычно,  $i_0^{(C)} = 0$ ). Евклидово расстояние  $\rho_C(C, C^*)$  для номера  $N$  вычисляется как сумма евклидовых расстояний между

наблюдаемыми  $U^*(N - i_s^{(C)})$  и характерными для данного предвестника  $U_C(N - i_s^{(C)})$  формами деформации:

$$\rho_C(C, C^*) = \sum_{s=0}^{i_C} \rho(U_C(N - i_s^{(C)}), U^*(N - i_s^{(C)})) \quad (4)$$

Под моделью обратной задачи будем понимать функциональное отображение  $F : C^* \rightarrow \mathfrak{Z}$ , ставящее в соответствие последовательности наблюдаемых форм деформации  $C^*$  конкретный предвестник из  $\mathfrak{Z}$ .

**4. Метод решения обратной задачи теории бифуркаций**

Для построения топологических предвестников бифуркации для решения обратной задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана осуществлялось выявление характерных последовательностей решений путём кластеризации решений, соответствующих совокупности ветвей первичного и вторичного решения рассматриваемой нелинейной краевой задачи: в такой постановке каждый кластер будет связан с некоторым участком ветви первичного либо вторичного ветвления.

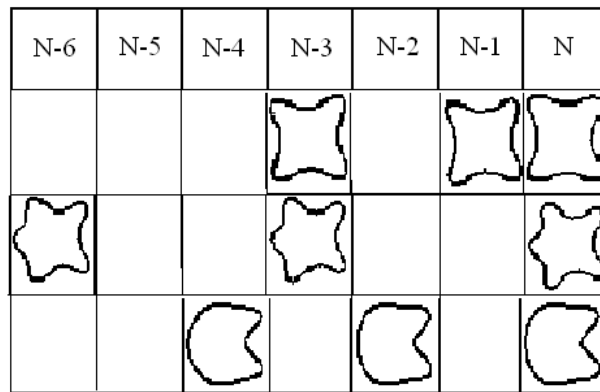


Рис. 1. Примеры центров кластеров (предвестников бифуркации)

В качестве иллюстрации на рис. 1 представлены две последовательности решений. Обе последовательности отвечают значению параметра  $\lambda = 0.92$  и локальному возмущению (одного и того же типа), но разной амплитуды ( $A = 50.0 H$  и  $A = 100.0 H$ , соответственно). Первая последовательность типична движению в окрестности ветви решения, исходящей из нуля, вторая – движению в окрестности ветви первичного ветвления.

Алгоритм решения обратной задачи бифуркации может быть разделён на две части: в рамках первой части осуществляется генерация обучающей выборки с последующей её кластеризацией, в рамках второй – идентификация наблюдаемых последовательностей решений.

**5. Формирование выборки и построение предвестников бифуркации**

Каждое из полученных решений нормализовались путём отнесения значений найденных решений к соответствующим максимальным значениям: в

дальнейшем это позволило осуществлять кластеризация не характерных амплитуд, но характерных решений.

Интересно то, что использование векторов, состоящих из последовательно фиксируемых решений, оказалось менее эффективными для решения обратной задачи теории бифуркаций, чем векторов, составленных в соответствии с некоторым шаблоном: под шаблоном здесь понимается фиксированная последовательность расстояний между позициями наблюдений в последовательности, которые займут соседние позиции в формируемом векторе выборки. В алгоритме использовались выборки, полученные с помощью всех возможных шаблонов длины четыре. В качестве расстояния везде использовалось евклидово; вектора формировались из значений наблюдений в точках фиксированной сетки.

Для генерации обучающей выборки использовались последовательности решений, фиксируемых на ветвях первичного и вторичного ветвления нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана [5]. Вектора обучающей выборки подвергались кластеризации с использованием модифицированного алгоритма Уишарта [2, 11].

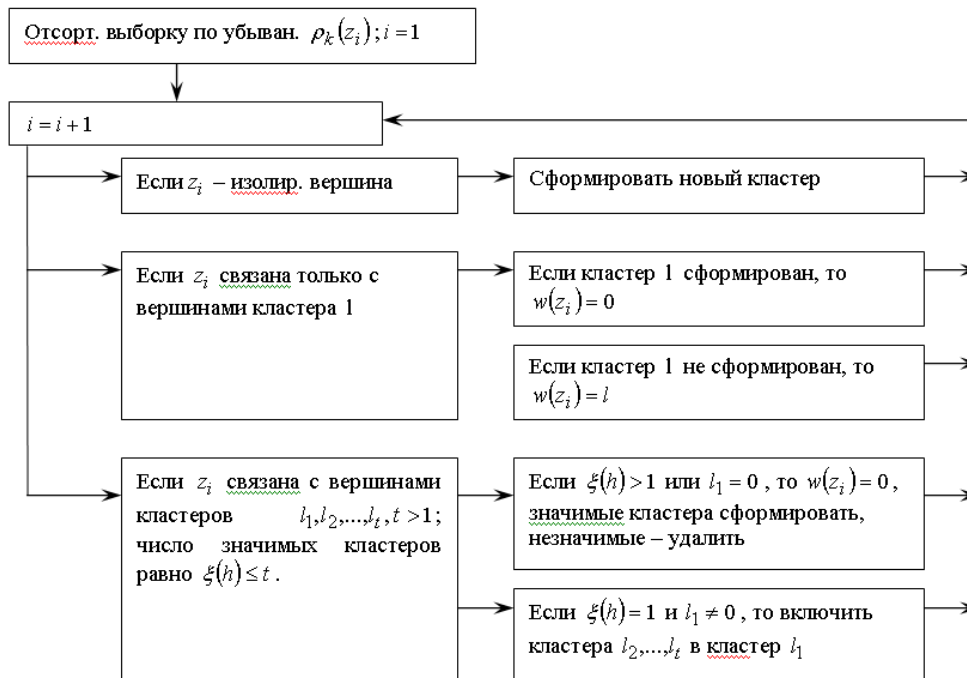


Рис 2. Алгоритм кластеризации Уишарта

Алгоритм основывается на аппарате теории графов; блок-схема алгоритма представлена на рис. 2. При описании алгоритма использованы следующие обозначения  $z_i$  – вектора выборки (последовательности решений, фиксируемых

на ветвях),  $i = \overline{1, n}$ ;  $w(z_i)$  – номер кластера;  $\rho_k(z_i)$  – расстояния до  $k$ -ближайшего соседа;  $Vol_k(z_i)$  – объём гипершара радиуса  $d_k(z_i)$ ;

$p(z_i) = \frac{k}{\text{Vol}_k(z_i)n}$ ;  $G(Z_n, \Theta_n)$  – граф отношения “сходства” (вершины  $Z_n$  – вектора выборки  $z_i$ , рёбра  $U_n = \{d(z_i, z_j) \leq d_k(z_i), i \neq j\}$ );  $G(Z_i, \Theta_i)$  – порождённый подграф графа  $G$  ( $Z_i = \{z_j, j = \overline{1, i}\}$ ), а  $\Theta_i$  – подмножество всех рёбер  $\Theta_n$ , конечные вершины которых принадлежат  $Z_i$ ). Кластер  $c_l$ ,  $l > 0$  считается значимым по высоте, если  $\max\{p(z_i) - p(z_j) \mid \forall z_i, z_j \in c_l\} \geq h$ .

Для генерации последовательностей, позволяющих сформировать тестирующее множество, осуществлялось решение уравнений Кармана при наличии локального возмущению импульсного типа с помощью пакета прикладных программ COSMOS/M 2.6.

$\lambda$ \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0.99														
0.90														
0.80														
0.70														
0.60														

Рис. 3. Примеры последовательностей решений для генерации тестирующего множества для различных значений параметра  $\lambda$

## 6. Процедура идентификации

Для идентификации последовательности наблюдений использовались центры полученных кластеров, рассчитанные для всех используемых шаблонов. Процедура идентификации опирается на понятие расстояние между решением и кластером: под расстоянием  $d_{ij}$  между  $i$ -м решением и  $j$ -м кластером, будем понимать величину, которая вычислялась следующим образом: для позиции рассматриваемого,  $i$ -го, решения, из предшествующих решений последовательности решений составлялись векторы в соответствии с шаблоном, по которому был сформирован  $j$ -й кластер, таким образом, чтобы последняя позиция в шаблоне совпадала с позицией рассматриваемого решения. Далее рассчитывалось евклидово расстояние между построенным таким образом вектором решением и центром кластера.

Среди всех кластеров, отвечающих всем шаблонам, отыскивался кластер, для которого данное расстояние было меньше, чем некоторое пороговое значение, то последовательность решений считалась идентифицированной, и ведущей к решению, связанному с участком ветви, которому отвечает кластер. В противном случае – последовательность считалась неидентифицированной, а точка добавлялась к множеству непрогнозируемых точек.



### 7. Обратная задача теории бифуркаций для цилиндрической оболочки при импульсном воздействии

В качестве примера решения обратной задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана рассматривается задача идентификации поведения цилиндрической оболочки при импульсных воздействиях.

Применение описанного выше алгоритма позволило построить множество предвестников бифуркации для решения указанной задачи. Анализ полученных кластеров позволил установить их соответствие участкам ветвей первичного и вторичного ветвления, полученных в рамках решения прямой задачи теории бифуркаций. Следует подчеркнуть, что центр каждого из кластеров может рассматриваться как усреднённое представление различных вариантов поведения теряющей устойчивость тонкостенной системы в окрестности соответствующего участка закритической ветви. Следует подчеркнуть, что центр каждого из кластеров может рассматриваться как усреднённое представление различных вариантов поведения теряющей устойчивость тонкостенной системы в окрестности соответствующего участка закритической ветви. Одному участку закритической ветви между двумя соседними экстремумами обычно отвечают один-три кластера.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Рис. 4. Идентификация последовательности решений, фиксируемой перед и после бифуркации (средняя строка) с помощью одного из полученных кластеров (нижняя строка). Для сравнения в верхней строке приведена последовательность решений, фиксируемая на тех же номерах наблюдений в окрестности исходящей из нуля ветви.

В среднем участок ветви, отвечающий одному кластеру, соответствует 5-7% вариации в значении параметра. Таким образом, общее число кластеров также невелико, что делает возможным быстрое решение обратной задачи теории бифуркаций. На рис. 4 представлена процедура идентификации наблюдаемой последовательности решений: в средней строке представлена последовательность решений, фиксируемая перед и после бифуркации; в нижней строке – кластер, который алгоритм соотнёс с данной последовательностью; в квадрат помещена часть последовательности, для которой кластер “сработал”. Для сравнения в верхней строке приведены последовательность решений, фиксируемая на тех же номерах наблюдений в окрестности исходящей из нуля ветви решения (хаотическая смена решений).

Здесь было установлено, что для корректной идентификации предбифуркационного состояния достаточно осуществлять сопоставление результатов наблюдений с центрами кластеров на последовательности форм, фиксируемой перед началом бифуркационного процесса. Точность процесса

ідентифікації составила 97%.

### 8. Выводы

1. Сочетание решения прямой задачи теории бифуркаций с кластеризацией решений прямой задачи, фиксируемых на ветвях первичного и вторичного ветвления, позволяет построить множество топологических предвестников бифуркации, позволяющих не просто отличать предбифуркационное состояние от состояния, не ведущего к бифуркации, но и различать состояния, предшествующие различным типам бифуркации, наблюдаемых в нелинейной краевой задаче для уравнений Кармана.

2. Предложенный подход к решению обратной задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана позволяет идентифицировать предбифуркационные состояния с высокой степенью точности.

3. Указанные обстоятельства позволяют использовать рассматриваемый подход к решению обратной задачи теории бифуркаций для решения задачи аварийной идентификации тонкостенных систем.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Зульпукаров М.-Г.М., Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В. Обратная задача теории бифуркаций в динамических системах с шумом // Препринт ИПМ РАН. – 2005. [http://keldysh.ru/papers/2005/prep39/prep2005\\_39.pdf](http://keldysh.ru/papers/2005/prep39/prep2005_39.pdf)
2. Лапко А.В., Ченцов С.В. Непараметрические системы обработки информации. – Новосибирск: Наука, 2000. – 352 с.
3. Kiss I.Z., Hudson J.L. Experiments on coherence resonance: Noisy precursors to Hopf bifurcations // *Physical Review E*. - 2003. - Vol. 67. - P. 15-19.
4. Kravtsov Yu.A., Surovyatkina E.D. Nonlinear saturation of prebifurcation noise amplification // *Physics Letters A*. - 2003. - Vol. 3199, № 3-4. - P. 348–351.
5. Obodan N.I., Lebedeyev O.G., Gromov V.A. Nonlinear behavior and stability of thin-walled shells. – Springer, 2013. – 180 pp.
6. Omberg L., Dolan K., Neiman A., Moss F. Detecting the onset of bifurcations and their precursors from noisy data // *Physical Review E*. - 2000. - Vol. 61, № 5. - P. 4848-4853.
7. Pei X., Moss F. Characterization of low-dimensional dynamics in the crayfish caudal photoreceptor // *Nature*. - 1996. - Vol. 379, № 6566. - P. 618-621.
8. Pierson D., Moss F. Detecting Periodic Unstable Points in Noisy Chaotic and Limit Cycle Attractors with Applications to Biology // *Phys. Rev. Lett* 75. - 1995. - Vol. 75, № 11. - P. 2124-2135.
9. Surovyatkina E. Prebifurcation noise amplification and noise-dependent hysteresis as indicators of bifurcations in nonlinear geophysical systems // *Nonlinear Processes in Geophysics*. - 2005. - Vol. 12. - P. 25-29.
10. Wiesenfeld K. Virtual Hopf phenomenon: A new precursor of period-doubling bifurcations // *Physical Review A*. - 1985. - Vol. 32, № 3. - P. 1744- 1751.
11. Wishart D. A numerical classification methods for deriving natural classes // *Nature*. - 1969. - Vol. 221, - P. 97-98.