УДК 517.977.5

Математическая модель профилактики сложной технической системы

Н. С. Подцыкин

Харківський національний університет имени В. Н. Каразина, Украина

Рассмотрена задача оптимизации уровня надежности и работоспособности сложной технической системы. Сложная система составлена из конечного числа простых подсистем, функционирующих независимо друг от друга для достижения общей цели. Каждая простая подсистема в процессе работы изнашивается, надежность уменьшается, вероятность отказа увеличивается. В построенной модели уровень надежности подсистемы характеризуется состоянием, определяемым по значениям контролируемых параметров. Изменение состояния определяется в модели случайным процессом. Обновление подсистем происходит в результате применения управлений в плановые моменты контроля. Выбор управления из множества допустимых зависит от наблюдаемого состояния и стратегии управления. Решение задачи состоит в определении периода контроля сложной системы и стратегии управления для каждой простой подсистемы, обеспечивающие оптимальный уровень надежности.

Ключевые слова: *математическая модель, сложная система, износ технической системы, работоспособность системы, стратегия управления, состояние системы*.

Розглянута задача оптимізації рівня надійності і працездатності складної технічної системи. Складна система складена з кінцевого числа простих підсистем, що функціонують незалежно один від одного для досягнення спільної мети. Кожна проста підсистема в процесі роботи зношується, надійність зменшується, вірогідність відмови збільшується. У побудованій моделі рівень надійності підсистеми характеризується станом, визначуваним по значеннях контрольованих параметрів. Зміна стану визначається в моделі випадковим процесом. Оновлення підсистем відбувається в результаті застосування управлінь в планові моменти контролю. Вибір управління з множини допустимих залежить від спостережуваного стану і стратегії управління. Рішення задачі полягає у визначенні періоду контролю складної системи і стратегії управління для кожної простої підсистеми, що забезпечують оптимальний рівень надійності.

Ключові слова: *математична модель, складна система, знос технічної системи, працездатність системи, стратегія управління, стан системи.*

The problem of optimization of reliability level and operability of the composite technical system is discussed. The composite system is considered as a finite set of the simple subsystems that aim to achieve a common goal, but operate independently of each other. In the course of work, each simple subsystem wears out, its reliability decreases raising the probability of failure. In the constructed model, the reliability level of a subsystem is characterized by its state described by the values of some controlled parameters. This state changes are determined in the model by some stochastic process. The subsystems are updated by control actions (managements) taken during the routine monitoring at the planned moments of time. The choice of management from a set of admissible ones depends on the identified state and the management strategy. The task is to find such monitoring period for the given composite system and the management strategy for each simple subsystem that provide the optimum level of reliability.

Keywords: *mathematical model, complex system, deterioration of the technical system, operation system, management strategy, the state of the system.*

1. Введение

Всякая техническая система в процессе эксплуатации изнашивается, качество выходного продукта снижается, вероятность отказа увеличивается. Если предполагается использовать систему неограниченно долго, то обычно периодически в определенные моменты времени проводится профилактическое обслуживание. Оно необходимо для уменьшения вероятности отказа, обновления системы. Как правило, на практике доступны несколько видов профилактических обслуживаний, отличающихся степенью обновления системы и, соответственно, стоимостью. Чем дороже обслуживание, чем степень обновления системы глубже, тем период его применения больше. Существующая система планирования профилактик основывается на статистической информации функционирования целого класса однотипных систем. Понятно, что особенности отдельной системы при этом не учитываются. Модель, которая позволит обоснованно выбирать управления в зависимости от состояния системы, очевидно, повысит эффективность ее функционирования. Решение задачи профилактики с использованием состояния системы находится в рамках нового перспективного направления в моделировании надежности и работоспособности технических систем.

В некоторых случаях адекватность модели можно повысить, если рассматриваемая система является сложной, то есть, составлена из нескольких подсистем, объединенных одной целью и, возможно функционально связанных. Модель, которая учитывает особенности изменения надежности и работоспособности во времени каждой подсистемы, может существенно увеличить эффективность управления рассматриваемой сложной системой.

Считать систему простой или сложной решает аналитик на основе экспертных суждений. Рассмотрим метод построения модели сложной системы для оптимизации ее надежности. В зависимости от особенностей сложной системы можно выделить два подхода к моделированию. Первый подход, приводящий к более простой модели, возможен в том случае, если подсистемы в смысле надежности не взаимосвязаны, но имеют одну цель функционирования. Второй подход приводит к значительно более сложной модели, и он необходим в случае взаимосвязанных в смысле надежности подсистем. Рассмотрим подробно построение модели сложной системы для первого случая. Будем предполагать, что сложная система контролируется через равные промежутки времени (период контроля). В моменты контроля, в зависимости от наблюдаемого состояния и выбранной стратегии управления, применяется одно из возможных управлений.

Ниже будет построена модель профилактики сложной системы, в основу которой положено состояние. Для этой модели будет предложен оптимизационный алгоритм, который позволит оптимизировать как общий период контроля системы, так и стратегии управления каждой подсистемой.

Модель сложной системы включает модели всех простых подсистем. Подробное построение модели простой системы, основанной на состоянии, рассмотрено в [1,2]. Для удобства приведем далее основные элементы, определяющие модель простой системы.

2. Модель простой системы.

Формально систему считаем простой, если ее состояние можно определить скалярной величиной. В противном случае – система сложная. Напомним, что считать рассматриваемую систему простой или сложной решает аналитик перед построением модели. Для этого он оценивает зависимость эффективности ее функционирования - от одного или нескольких показателей.

Предположим, что методами теории распознавания образов определены контролируемые параметры, содержащие информацию об уровне работоспособности и надежности рассматриваемой простой системы. Скалярный интегральный показатель этого уровня формально определяет случайный процесс, который описывает эволюцию надежности простой системы. Обозначим этот процесс через $X(t)$, $t \in T$, T - рассматриваемый интервал времени. Не уменьшая общности, можно считать, что множество состояний этого процесса $E = [0,1]$. Положим, что состоянию $x = 0$ - соответствует новая система с минимальной вероятностью отказа и максимальной производительностью. Состоянию $x = 1$ - полностью изношенная система с единичной вероятностью отказа на любом интервале времени. Состояние системы определяется степенью ее износа, поэтому траектории процесса $X(t)$ монотонно не убывают и приближаются к единице при неограниченном возрастании t.

Не уменьшая общности, можно считать, что траектории процесса имеют следующий вид:

$$x_t = x + (1 - x)\frac{\gamma t}{\gamma t + 1}, \quad t \ge 0, \quad \gamma \in [0, \infty),$$

где: x - начальное состояние, значение γ определяет траекторию процесса.

Обозначим плотность распределения вероятностей на множестве траекторий процесса через $f_\gamma(s|x)$, $s \in [0, \infty)$, x - начальное состояние.

Поддержание уровня надежности и работоспособности системы на приемлемом уровне на практике осуществляется с помощью регулярно проводимых профилактических обслуживаний и ремонтов. Примем этот подход при построении модели. Далее для удобства профилактические обслуживания и ремонты будем называть управлениями. Управления различаются по объему обновления системы, необходимости проведения восстановительных работ после отказа, по стоимости. Обозначим через Y конечное множество всех возможных управлений.

Пусть в момент контроля наблюдалось состояние $x \in E$. Применение управления $y \in Y$ в этом состоянии приводит к переходу процесса в новое состояние $z \in [0, x] \subset E$ и определяет величину среднего дохода $w(x, y)$ от эксплуатации системы на периоде до следующего момента контроля. Эта величина кроме прибыли учитывает стоимость управления и простоя системы при реализации управления. Плотность распределения вероятностей состояния z сосредоточена на интервале $[0,x]$. Обозначим эту плотность через $f_\gamma(s|x)$, $s\in[0,x]$. Величина "обновления" системы $\theta = x - z$.

Обозначим через ξ случайное время, которое проходит от начала траектории процесса до отказа системы. Пусть x - начало траектории. Плотность распределения вероятностей до отказа системы обозначим через $f_\xi(t|x,\gamma)$, $t\ge 0$, $x\in E$, $\gamma\in[0,\infty)$. Известно [3], что нестареющие системы имеют экспоненциальный тип распределения времени до отказа, а стареющие – как правило, аппроксимируется распределением Вейбулла. Интервал времени ς между двумя последовательными моментами контроля назовем реальным периодом. Положим $\varsigma = \min(\xi,\tau)$, где τ - заданный планируемый детерминированный период контроля. Заметим, что период ς случаен и его распределение зависит от траектории процесса.

Для оптимизации правила выбора управлений в моменты контроля выберем модель марковского процесса принятия решений [4]. Марковский процесс принятия решений определяется набором следующих объектов: $\{E,Y,Q,W,\pi\}$, где E - конечное множество состояний, Y - конечное множество управлений, Q - переходная функция, заданная на множестве $E\times E$, W - функция непосредственных доходов, заданная на $E\times Y$, π - стратегия управления, определяющая правило выбора управлений в каждый момент контроля. Все эти объекты будут ниже определены.

Построенный случайный процесс восстановления не является марковским. Однако легко определить вложенную марковскую цепь $Z(t)$, выделив состояния исходного процесса в моменты времени перед применением управлений. Полученная марковская цепь содержит всю необходимую информацию для решения оптимизационной задачи.

Выбранный подход требует проведения дискретизации множества E состояний процесса. Будем допускать, что в момент отказа множество допустимых управлений Y_1 не обязательно совпадает со всем множеством Y. Это потребует формально различать состояния, в котором произошел отказ и рабочие состояния. Подмножеству $I_k = \left[\frac{k}{N},\frac{k+1}{N}\right)\subset E$ поставим в соответствие состояние x_k, $k=0,1,\dots,N-1$. Если в соответствующем подмножестве I_k отказ системы не произошел, то считаем, что элемент $x_k\in E_0$, иначе считаем, что $x_k\in E_1$. Каждое из полученных множеств E_0 и E_1 составлено из N элементов. Обозначим $\hat{E}=E_0\cup E_1$. Множества допустимых управлений Y_0 и Y_1 в состояниях E_0 и E_1, вообще говоря, не совпадают. Не уменьшая общности можно считать, что они не пересекаются, $Y = Y_0 \cup Y_1$, $Y_0 \cap Y_1 = \varnothing$.

Для построения переходной функции вложенной марковской цепи введем необходимые определения и обозначения. Пусть в начале периода в исходном процессе $X(t)$ наблюдалось состояние $x_i \in \hat{E}$. Применение управления $y \in Y$ в состоянии x_i приведет при необходимости к восстановлению системы из отказа, если $x_i \in E_1$, и затем к улучшению состояния системы за счет перехода процесса в $x_k \in E_0$. Это состояние случайно и имеет плотность распределения $f_y(s|x_i)$. Поэтому положим, что вероятность перехода процесса $Z(t)$ из состояния x_i в состояние x_k под действием управления y происходит с вероятностью $P_y(x_k|x_i) = \int\limits_{\frac{i-k-1}{N}}^{\frac{i-k}{N}} f_y(s|x_i)ds$ для $k < i$. В остальных случаях положим: $P_y(x_0|x_0) = 1$, $P_y(x_k|x_i) = 0$, $k \ge i$, $k \ne 0$.

Время реализации управления, в течение которого подсистема простаивает, обозначим через τ_y.

Эволюция процесса $X(t)$ происходит по некоторой траектории, определяемой параметром γ. Положим, что все траектории, начинающиеся в состоянии x_k, приводящие исходный процесс в момент времени t в подмножество $\left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right) \subset E$ определяет переход вложенной цепи $Z(t)$ из состояния x_k в состояние x_j. Если $f_\gamma(s|x_k)$ - плотность распределения вероятностей на множестве траекторий и $f_\xi(t|x_k, \gamma)$ - плотность распределения вероятностей времени до отказа для траектории с параметром γ, то вероятность перехода процесса $Z(t)$ из состояния $x_k \in E_0$ через плановый период τ в состояние x_j равна

$$P_\eta(x_j|x_k) = \int\limits_{\tau}^{\infty} \int\limits_{\frac{j-k}{\tau(N-j)}}^{\frac{j-k+1}{\tau(N-j-1)}} f_\gamma(s|x_k) f_\xi(t|x_k, \gamma) ds dt, \quad j \ge k, \; x_j \in E_0.$$

Вероятность перехода процесса $Z(t)$ из состояния $x_k \in E_0$ в состояние $x_j \in E_1$ в момент отказа равна

$$P_\eta\left(x_j|x_k\right)=\int_0^\tau \int_{\frac{j-k}{t(N-j)}}^{\frac{j-k+1}{t(N-j-1)}} f_\gamma\left(s|x_k\right) f_\xi\left(t|x_k,\gamma\right) ds dt\,,\quad j \geq k\,,\ x_j \in E_1\,.$$

Зафиксируем состояние $x_i \in \hat{E}$ в момент контроля перед применением управления и состояние в следующий момент контроля $x_j \in \hat{E}$. Переходная вероятность $x_i \to x_j$ за период ς может быть вычислена по формуле

$$Q\left(x_j|x_i, y\right)=\sum_{k=0}^{\min(i,j)} P_y\left(x_k|x_i\right) P_\eta\left(x_j|x_k\right).$$

Отображение $g:\hat{E} \to Y$ назовем решающей функцией. Решающей функции g поставим в соответствие матрицу переходных вероятностей $Q(g)$ с элементами $Q\left(x_j|x_i, g(x_i)\right)$. Эта матрица имеет $2N$ строк и $2N$ столбцов. Разделим ее на 4 равные подматрицы размерности $N \times N$: $\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$. Элемент $Q\left(x_j|x_i, g(x_i)\right)$ подматрицы I_{11} определяет вероятность перехода из $x_i \in E_0$ в $x_j \in E_0$, подматрицы I_{12} определяет вероятность перехода из $x_i \in E_0$ в $x_j \in E_1$, подматрицы I_{21} определяет вероятность перехода из $x_i \in E_1$ в $x_j \in E_0$, подматрицы I_{22} определяет вероятность перехода из $x_i \in E_1$ в $x_j \in E_1$. Последовательность $\pi=(g_0, g_1, \ldots)$ решающих функций назовем стратегией. Стратегию $\pi = g^{(\infty)}=(g, g, \ldots)$ назовем стационарной. В дальнейшем стационарную стратегию $g^{(\infty)}$ будем обозначать также как и решающую функцию через g.

С каждой решающей функцией g связан вектор-столбец непосредственных доходов $W(g)$ с компонентами $W\left(x_i, g(x_i)\right)$, где первым N компонентам соответствуют состояния из E_0 и следующим N компонентам – состояния из E_1.

Компоненты вектора W можно вычислить по формуле:

$$W(x_i, y) = \frac{1}{\tau + \tau_y} \left\{ \int_0^{x_i}\int_0^{\infty}\int_0^{\tau} v\left(x_k + (1 - x_k)\frac{st}{st+1} \right) f_\gamma(s|x_k) f_\xi(t|x_k, s) dt ds f_y(x_k|x_i) dx_k + \right.$$

$$\left. + \int_0^{x_i}\int_0^{\infty}\int_{\tau}^{\infty} v\left(x_k + (1 - x_k)\frac{s\tau}{s\tau+1} \right) f_\gamma(s|x_k) f_\xi(t|x_k, s) dt ds f_y(x_k|x_i) dx_k \right\}.$$

В правой части последней формулы используются значения уровня состояния из $[0,1]$. Например, состоянию x_i соответствует уровень $\frac{i}{N}$.

Стационарной стратегии $\pi = g^{(\infty)}$ поставим в соответствие вектор $\varphi(\pi)$, компоненты которого определяют величину среднего дохода в единицу времени, зависящего, в общем случае, от начального состояния

$$\varphi(\pi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(g) W(g).$$

Далее считаем, что марковская цепь $Z(t)$ регулярна [4] для любой стационарной стратегии π. Известно [4], что в этом случае вектор $\varphi(\pi)$ имеет равные по величине компоненты.

Стратегия π^* называется оптимальной, если для любой стратегии π выполнено неравенство $\varphi(\pi^*) \geq \varphi(\pi)$. На практике чаще используется ε-оптимальная стратегия. Стратегия π_ε называется ε-оптимальной, если для любой стратегии π выполнено неравенство $\varphi(\pi) - \varphi(\pi_\varepsilon) \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

3. Метод оптимизации простой системы.

Рассмотрим метод оптимизации, основанный на принципе сжатых отображений [4,5]. Пусть заданы все элементы марковского процесса принятия решений. На множестве векторов V, размерность которых совпадает с количеством состояний, введем полунорму равенством $\|v\|_p = \max_i v_i - \min_i v_i$, где v_i - i-я компонента вектора v. Пусть $M = \{v : \|v\|_p = 0\}$. Тогда на фактор-пространстве $V' = V / M$ определенная выше полунорма является нормой [5].

Введем на V следующие операторы.

$$F(g)v = W(g) + Q(g)v,$$
$$Uv = \max_{g \in G} F(g)v.$$

Здесь G - множество всех решающих функций.

В условиях сделанных предположений о процессе $Z(t)$ оператор U на V' является сжимающим [4,5]. Это свойство положено в основу рекуррентного метода оптимизации стратегии управления [4]. Правило остановки алгоритма определяет следующее утверждение.

Утверждение 1[6]. Пусть $v \in V'$, $\|Uv - v\| = \varepsilon$ и $Uv = F(g)v$. Тогда

1. Стратегия $\pi = g^{(\infty)}$ является ε-оптимальной.
2. $\min_x (Uv - v)(x) \le \varphi^* \le \max_x (Uv - v)(x)$,

где φ^* - величина среднего дохода в единицу времени, которая соответствует оптимальной стратегии.

Алгоритм нахождения ε-оптимальной стратегии состоит в выполнении следующих действий.

1. Задать $\varepsilon > 0$.
2. Выбрать произвольно вектор $v_0 \in V'$.

   k-ый шаг алгоритма.
3. Вычислить $v_k = Uv_{k-1} = F(g_k)v_{k-1}$, $v_k \in V'$.
4. Проверить неравенство $\|v_k - v_{k-1}\| < \varepsilon$.

   Если оно выполнено, то стратегия $\pi = g_k^{(\infty)}$ является ε-оптимальной.

   Если не выполнено, то выполнить $k+1$-й шаг алгоритма.

За конечное число шагов будет достигнута ε-оптимальная стратегия.

Замечание. Для определенности удобно выбирать из класса смежности фактор-пространства V' представителя v_k с нулевой первой компонентой.

4. Метод оптимизации сложной системы.

Пусть сложная система состоит из L простых подсистем. Подсистемы независимы друг от друга в смысле надежности и функционируют для достижения общей цели. Система контролируется через равные промежутки времени (плановый период контроля). Любая из подсистем может отказать до момента планового контроля. Отказавшая подсистема простаивает до момента очередного контроля. В момент контроля, в зависимости от наблюдаемого состояния, стратегия определяет управление для применения в каждой подсистеме. Задача состоит в оптимизации периода планового контроля и стратегии управления каждой подсистемой.

Введем следующие обозначения для i-ой подсистемы, $i = 1,\dots,L$. Положим, что для каждого шага алгоритма k, $k = 0,1,2,\dots$, и параметра p, $p = 0,1,2,\dots$, вектор $v_{k,p}^{(i)}$ - есть некоторый представитель класса смежности из V' с нулевой первой компонентой. Положим, далее, для $k=1,2,...$ $v_{k,0}^{(i)}=v_{k-1,p}^{(i)}$, и для $k=0,1,2,...$ $v_{k,1}^{(i)}=Uv_{k,0}^{(i)}$, $v_{k,2}^{(i)}=Uv_{k,1}^{(i)}$, …, $v_{k,p}^{(i)}=Uv_{k,p-1}^{(i)}$.

Операторы U и F для фиксированного значения τ обозначим через $U^{(\tau)}$ и $F^{(\tau)}$. Пусть $U^{(\tau)}v_{k,p}^{(i)}=F^{(\tau)}\left(g_k^{(i)}\right)v_{k,p}^{(i)}$, $\varphi_{k,\max}^{(i)}(\tau)=\max\limits_x\left(\left(U^{(\tau)}v_{k,p}^{(i)}\right)(x)-v_{k,p}^{(i)}(x)\right)$.

Длину интервала I будем обозначать через $\Delta(I)$.

Рассмотрим один из возможных методов оптимизации периода контроля сложной системы и стратегии управления каждой подсистемой. Метод будет основан на последовательном вычислении векторов $v_{k,p}^{(i)}$, $k=0,1,2,...$, для каждой подсистемы $i=1,...,L$ [4].

Пусть (a,b) - интервал возможных значений периода контроля сложной системы. Его следует выбрать исходя из экспертных суждений. Обозначим $\delta=\frac{1}{4}(b-a)$. Выберем для проверки следующие пять значений периода: $\tau_j=a+(j-1)\delta$, $j=1,...,4$, $\tau_5=b$. Множество значений τ для анализа на k-м шаге алгоритма обозначим через T_k, в частности, $\mathrm{T}_1=\{\tau_j, j=1,...,5\}$. Будем предполагать, что минимальное значение, на которое можно изменить величину планируемого периода, равно δ_0.

Предлагается следующий метод оптимизации, основанный на принципе сжатых отображений [4] с использованием утверждения 1.

Выберем точность решения задачи $\varepsilon>0$.

Для каждого $i=1,...,L$ положим $v_{0,0}^{(i)}(\tau)$ равным нулевому вектору.

Первый шаг метода $(k=1)$.

Положим $p=1$. Для каждого $\tau_j\in\mathrm{T}_1$, вычислим последовательно $v_{1,1}^{(i)}(\tau_j)=U^{(\tau_j)}v_{0,0}^{(i)}(\tau_j)=F^{(\tau_j)}\left(g_1^{(i)}\right)v_{0,0}^{(i)}(\tau_j)$, $\varphi_{1,\min}^{(i)}(\tau_j)$, $\varphi_{1,\max}^{(i)}(\tau_j)$. Положим $\varphi_{1,\min}(\tau_j)=\sum\limits_{i=1}^{L}\varphi_{1,\min}^{(i)}(\tau_j)$, $\varphi_{1,\max}(\tau_j)=\sum\limits_{i=1}^{L}\varphi_{1,\max}^{(i)}(\tau_j)$ и образуем интервалы $\left(\varphi_{1,\min}(\tau_j),\varphi_{1,\max}(\tau_j)\right)$ для каждого $\tau_j\in\mathrm{T}_1$. Выберем период τ_l из условия $\varphi_{1,\max}(\tau_l)=\max\limits_j\left(\varphi_{1,\max}(\tau_j)\right)$. Сформируем множество значений периодов T_2 для анализа на втором шаге алгоритма. Для каждого $\tau_j\in\mathrm{T}_1$ проверим условие:

$$\left(\varphi_{1,\min}(\tau_j),\varphi_{1,\max}(\tau_j)\right)\bigcap\left(\varphi_{1,\min}(\tau_l),\varphi_{1,\max}(\tau_l)\right)\neq\varnothing. \tag{4.1}$$

Если оно выполнено и τ_j не равно a или b, то значения τ_j, $\tau_j - \frac{\delta}{2}$, $\tau_j + \frac{\delta}{2}$ включаются в множество T_2. Если для τ_j выполнено условие (4.1) и $\tau_j = a$, то значения τ_j, $\tau_j + \frac{\delta}{2}$ включаются в T_2, а если выполнено (4.1) и $\tau_j = b$, то в T_2 включаются τ_j, $\tau_j - \frac{\delta}{2}$. Все значения периодов в T_2 должны быть различными. Если некоторое значение периода встречается дважды, то одно из них следует исключить.

k-й *шаг метода*.

Положим $p = k$. Для каждого $\tau_j \in T_k$, вычислим последовательно $v_{k,1}^{(i)}(\tau_j) = U^{(\tau_j)} v_{k,0}^{(i)}(\tau_j), \ldots, v_{k,p}^{(i)}(\tau_j) = U^{(\tau_j)} v_{k,p-1}^{(i)}(\tau_j) = F^{(\tau_j)}(g_k^{(i)}) v_{k,p-1}^{(i)}(\tau_j)$ $\varphi_{k,\min}^{(i)}(\tau_j)$, $\varphi_{k,\max}^{(i)}(\tau_j)$. Положим $\varphi_{k,\min}(\tau_j) = \sum_{i=1}^{L} \varphi_{k,\min}^{(i)}(\tau_j)$, $\varphi_{k,\max}(\tau_j) = \sum_{i=1}^{L} \varphi_{k,\max}^{(i)}(\tau_j)$ и образуем интервалы $(\varphi_{k,\min}(\tau_j), \varphi_{k,\max}(\tau_j))$ для каждого $\tau_j \in T_k$. Выберем период τ_l из условия $\varphi_{k,\max}(\tau_l) = \max_j (\varphi_{k,\max}(\tau_j))$. Сформируем множество T_{k+1} значений периода. Для каждого $\tau_j \in T_k$ проверим условие:

$$(\varphi_{k,\min}(\tau_j), \varphi_{k,\max}(\tau_j)) \bigcap (\varphi_{k,\min}(\tau_l), \varphi_{k,\max}(\tau_l)) \neq \varnothing. \tag{4.2}$$

Если оно выполнено и τ_j не равно a или b, то значения τ_j, $\tau_j - \frac{\delta}{k}$, $\tau_j + \frac{\delta}{k}$ включаются в множество T_{k+1}. Если для τ_j выполнено условие (4.2) и $\tau_j = a$, то значения τ_j, $\tau_j + \frac{\delta}{k}$ включаются в T_{k+1}, а если выполнено (4.2) и $\tau_j = b$, то в T_{k+1} включаются τ_j, $\tau_j - \frac{\delta}{k}$. Множество T_{k+1} не пусто, оно обязательно содержит элемент τ_l. Пусть Q_k - множество элементов T_{k+1}, для которых выполнено условие (4.2). Обозначим интервал $I_k = \bigcup_{\tau_j \in Q_k} (\varphi_{k,\min}(\tau_j), \varphi_{k,\max}(\tau_j))$. Длина этого интервала $\Delta(I_k)$. Если $\Delta(I_k) < \varepsilon$ и $\frac{\delta}{k} < \delta_0$, то цель достигнута, любой планируемый период $\tau_j \in Q_k$ и стратегии управления подсистемами $g_k^{(i)}$, $i = 1, \ldots, L$, обеспечивают ε-оптимальную стратегию управления сложной системой.

В противном случае выполнить $(k+1)$-й шаг.

За конечное число шагов будет достигнута ε-оптимальная стратегия управления сложной системой. Заметим, что, вообще говоря, при увеличении δ_0 необходимое число шагов уменьшается.

5. Заключение.

Рассмотренный метод моделирования стареющей технической системы "по состоянию" может обеспечить выбор существенно более эффективной стратегии управления, чем обычно применяемый для этих целей метод моделирования "по времени". Применение стратегии управления, реализация которой учитывает состояние системы, позволяет поддерживать оптимальный уровень работоспособности конкретной системы, а не некоторой усредненной, построенной в модели "по времени".

Модель сложной системы, предложенная выше, основывается на моделях простых подсистем. Простой системой считаем такую, надежность и работоспособность которой можно определить скалярной величиной. Считать систему простой или сложной определяет аналитик, оценивая зависимость ее надежности и работоспособности от одного или нескольких интегральных показателей. Подробное построение модели простой системы, основанной на состоянии, приведено в [1,2].

При построении сложной системы было предположено, что она составлена из простых подсистем, работа которых направлена на достижение общей цели. Система контролируется через заданный период времени для оценки состояния каждой подсистемы. В зависимости от наблюдаемого состояния имеющаяся стратегия управления определяет управляющее воздействие, направленное на обновление подсистемы и, при необходимости, на восстановление ее из отказа. Допускается, что любая подсистема может отказать в любой момент времени и простаивать до момента контроля. Отказ любой подсистемы не влияет на вероятности отказов других подсистем. Целью моделирования является оптимизация планового периода контроля сложной системы и стратегий управления каждой простой подсистемой. При построении модели сложной системы не учитывалось такое маловероятное событие как отказ всех подсистем до момента планового контроля. Перенос для такого случая момента контроля в момент отказа всех подсистем не даст заметного выигрыша в оптимальности, но заметно усложнит модель. Заметим, что при необходимости такой перенос момента контроля в модели можно учесть без принципиальных трудностей.

Предложенный метод оптимизации позволяет найти плановый период контроля и стратегии управления подсистемами, которые обеспечивают ε-оптимальность управления всей сложной системой. Следует заметить, что метод предполагает выполнение вогнутости среднего дохода φ от периода τ. Обычно это условие выполнено в реальных системах. В сомнительных случаях метод необходимо дополнить очевидными изменениями в правило формирования множеств T_k.

Можно предположить, что в реальных условиях статистической информации о поведении простых подсистем может быть недостаточно, либо она может отсутствовать. В этом случае, при построении моделей простых подсистем, можно предложить байесовский подход в статистике для оценки вероятностных распределений в процессе наблюдений за состояниями подсистем [7,8,9].

Следующим шагом в обобщении модели сложной системы можно считать наличие и учет зависимости в смысле надежности каждой подсистемы от некоторых других подсистем. Эти соединения могут быть следующих видов: простое (последовательное), резервирование (параллельное) и смешанное [3]. Допускается, что все эти три вида могут быть представлены в одной сложной системе. В этом случае в модели следует учесть возможность отказа всей системы до момента контроля, так как, вообще говоря, может существовать одна подсистема, вероятность отказа которой не мала, но она приводит к отказу всей сложной системы. Цель моделирования такой системы может быть той же, что и в рассмотренном случае, однако сама модель будет существенно сложнее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подцыкин Н. С. Математическая модель надежности восстанавливаемой технической системы. // Автоматизовані системи управління та прилади автоматики, вип. 149, 2009р., с. 4-8.
2. Подцыкин Н. С. Дискретная модель надежности восстанавливаемой системы. Автоматизовані системи управління та прилади автоматики, вип. 129, 2004 р., с.14-18.
3. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М.: Книжный дом Либроком, 2013. – 584с.
4. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. – М.: Наука, 1977. – 175с.
5. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. – 443с.
6. Подцыкин Н. С. Оптимизация периода наблюдений в марковском процессе принятия решений. Вісник ХНУ, №629, Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”, Випуск 3, Харків, 2004., с.25-32.
7. Подцыкин Н. С. Адаптивная модель надежности и работоспособности технической системы. // Автоматизовані системи управління та прилади автоматики, вип. 150, 2010р., с.54-60.
8. Горелик А. Д., Скрипкин В.А. Методы распознавания, М.: Высшая школа, 2004. – 262с.
9. Н.С. Подцыкин Метод оптимизации надежности технической системы в условиях ограниченной информации // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. АСУ", Харків, 2013, № 1089, с.134-144.

Надійшла – 19.10.2016.