

УДК 519.713

Про додатні розв'язки однієї задачі з гетеротонним оператором та про побудову послідовних наближень

С. В. Колосова, В. С. Луханін

Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна

В роботі розглядаються питання існування, єдиності та побудови двосторонніх наближень до додатного рішення однієї нелінійної еліптичної крайової задачі. Дослідження проводилося методами теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах. Отримано умови, які пов'язують параметри, для існування та єдиності додатного рішення, а також для побудови двосторонніх наближень. Результати обчислень представлено у вигляді таблиці, графіків поверхні наближення, ліній рівня та у розрізі. Вони були порівняні із результатами, отриманими за допомогою методу квазіфункцій Гріна.

Ключові слова: *функція Гріна, квазіфункція Гріна, двосторонні наближення, сильно інваріантний конусний відрізок, псевдоогнутість, гетеротонний оператор.*

В работе рассматриваются вопросы существования, единственности и построения двусторонних приближений к положительному решению одной нелинейной эллиптической краевой задачи. Исследование этой задачи проводилось методами теории операторных уравнений в полуупорядоченных пространствах. Получены условия, связывающие параметры, для существования и единственности положительного решения, а также для построения двусторонних приближений. Результаты вычислений представлены в виде таблицы, графиков поверхности приближения, линий уровня и в сечении. Они были сравнены с результатами, полученными с помощью квазифункций Грина.

Ключевые слова: *функция Грина, квазифункция Грина, двусторонние приближения, сильно инвариантный конусный отрезок, псевдогогнутость, гетеротонный оператор.*

In this paper, the existence, uniqueness and possibility of constructing of two-sided approximations to the positive solution of the nonlinear elliptic boundary problem are considered. An investigation of the problem is based on methods of operator equations theory in half-ordered spaces. Conditions that link the parameters in order to ensure the existence and uniqueness of the positive solution are obtained as well as conditions needed for construction of two-sided approximations. The results of the computational experiment are presented as a table, plots of approximate solution surface, level lines and a cross section. They are compared with the results obtained by Green's quasifunction method.

Key words: *Green's function, Green's quasifunction, two-sided approximations, strongly invariant cone segment, pseudoconvexity, heterotone operator.*

1. Загальна постановка задачі та її актуальність

В сучасній науці спостерігається велика зацікавленість у процесах, що відбуваються в нелінійних середовищах. Математичними моделями таких процесів зазвичай є нелінійні крайові задачі математичної фізики вигляду

$$-\Delta u = f(\lambda, u) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset R^n, \quad (1.1)$$

$$u > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.2)$$

де λ – числовий параметр.

Багато змістовних задач зводяться до рівняння (1.1). Наприклад:

а) різноманітні задачі теорії пружності, де в якості параметра виступає навантаження;

б) задачі про розподіл температури при пропусканні через тіло електричного струму (параметр – величина струму);

в) задачі про автоколивання (параметр – невідомий період) тощо.

Більш конкретно, якщо $f(u) = e^{-u}$, то задача (1.1), (1.2) є математичною моделлю течії провідного середовища в циліндрі з непроникними стінками [1]; при $f(u) = \lambda e^u$ рівняння (1.1) є стаціонарним рівнянням теорії теплового самозаймання хімічно активної суміші газів у судині [2-5], задачу (1.1), (1.2) в цьому випадку називають задачею Ліувілля-Гельфанда; якщо $f(u) = u^p$, $p > 0$, то маємо математичну модель задачі про розподіл густини газу в зорях (рівняння з такою правою частиною називається рівнянням Лане-Емдена) [6]; задача вибору моделі міграції популяції в генетиці приводить до задачі (1.1), (1.2) з $f(u) = \lambda(1+u)^q$ [7]; задачі вигляду (1.1), (1.2) з $f(u) = \lambda + u^p$, $f(u) = \lambda u^q + u^p$, $f(u) = \lambda(e^u + e^{\gamma u})$ розглядалися в [8, 9]; в роботі [10] $f(u) = au^{-q} + bu^p$, $a > 0$, $b > 0$, $q > 0$, $p > 0$ тощо.

Відомо, що задача (1.1), (1.2) у класі функцій з $C(\Omega)$ еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\lambda, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (1.3)$$

де $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функція Гріна оператора Лапласа для першої крайової задачі в області Ω , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$. Рівняння (1.3) перепишемо у вигляді

$$u = Tu,$$

тут

$$Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\lambda, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}$$

– оператор з областю визначення $D(T) = K$, K – конус невід’ємних в $C(\Omega)$ функцій.

Природно очікувати, що питання існування та єдиності розв’язку рівняння (1.3), а, отже, і задачі (1.1), (1.2), суттєво залежать від властивостей оператора T і, відповідно, від вигляду функції $f(\lambda, u)$. Випадки, коли Tu є монотонним та антитонним оператором, розглянуто в [11-13].

В даній роботі розглянемо задачу

$$-\Delta u = au^{-q} + bu^p \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset R^n, \quad (1.4)$$

$$u > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.5)$$

де сталі $a > 0$, $b > 0$, $q \in (0, 1)$, $p \in (0, 1)$ [10]. Далі ми покажемо, що відповідний цій задачі оператор Tu є гетеротонним. Для дослідження розглядуваної задачі ми використовуємо методи теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах, які дозволяють довести існування розв’язку рівняння (1.3) та

побудувати двосторонні наближення, які беруть розв'язок у «виделку», і, таким чином, отримати зручну апостеріорну оцінку похибки наближень.

Усю термінологію, яка використовується у даній роботі, можна знайти в [14].

2. Дослідження існування додатного розв'язку

Вводимо у розгляд наступні оператори

$$Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [bu^p(\mathbf{s}) + au^{-q}(\mathbf{s})] ds, \quad (2.1)$$

$$\hat{T}(v, w) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [bv^p(\mathbf{s}) + aw^{-q}(\mathbf{s})] ds.$$

Оператор $\hat{T}(v, w)$ називають супутним оператору Tu , при цьому маємо $\hat{T}(u, u) = Tu$.

Дослідимо їх властивості.

1) Оператор $\hat{T}(v, w)$ зростає за змінною v та спадає за змінною w , тобто Tu – гетеротонний оператор.

2) Будуємо сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, тобто такий, що виконуються нерівності

$$\begin{cases} \hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0, \\ \hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0. \end{cases}$$

Нехай $v_0 = \varepsilon$, $w_0 = \beta$. Тоді

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \hat{T}(v_0, w_0) \geq \varepsilon, \\ \hat{T}(w_0, v_0) \leq \beta, \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [b\varepsilon^p + a\beta^{-q}] ds \geq \varepsilon, \\ \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [b\beta^p + a\varepsilon^{-q}] ds \leq \beta, \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} (b\varepsilon^p + a\beta^{-q}) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \geq \varepsilon, \\ (b\beta^p + a\varepsilon^{-q}) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \beta, \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} (b\varepsilon^p + a\beta^{-q}) \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \geq \varepsilon, \\ (b\beta^p + a\varepsilon^{-q}) \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \beta, \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b\varepsilon^p + a\beta^{-q} \geq \frac{\varepsilon}{M}, \\ b\beta^p + a\varepsilon^{-q} \leq \frac{\beta}{M}, \end{cases} \quad (2.2)$$

де $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$. Нерівності (2.2) встановлюють зв'язок між сталими ε ,

β та параметрами задачі p, q .

3) Дослідимо гетеротонний оператор (2.1) на псевдоугнутість, для цього доведемо виконання умови

$$\begin{aligned} \hat{T}\left(\tau v, \frac{w}{\tau}\right) &\geq \tau \hat{T}(v, w), \quad \tau \in (0,1): \\ \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[b(\tau v(\mathbf{s}))^p + a\left(\frac{w(\mathbf{s})}{\tau}\right)^{-q} \right] ds - \tau \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [b(v(\mathbf{s}))^p + a(w(\mathbf{s}))^{-q}] ds = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[b\tau^p (v(\mathbf{s}))^p - \tau b(v(\mathbf{s}))^p + \frac{a\tau^q}{(w(\mathbf{s}))^q} - \frac{\tau a}{(w(\mathbf{s}))^q} \right] ds = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[b(v(\mathbf{s}))^p (\tau^p - \tau) + \frac{a}{(w(\mathbf{s}))^q} (\tau^q - \tau) \right] ds \geq 0. \end{aligned}$$

Нерівність буде виконуватися, якщо

$$\begin{aligned} b(v(\mathbf{s}))^p (\tau^p - \tau) + \frac{a}{(w(\mathbf{s}))^q} (\tau^q - \tau) &> 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \tau^p - \tau > 0, \\ \tau^q - \tau > 0, \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \tau(\tau^{p-1} - 1) > 0, \\ \tau(\tau^{q-1} - 1) > 0, \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \tau^{p-1} > 1, \\ \tau^{q-1} > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Звідси можна отримати обмеження, яким мають задовольняти параметри p та q , щоб останні нерівності виконувалися, а саме, $p \in (0,1)$, $q \in (0,1)$. Це означає, що їх в постановці задачі вказувати немає необхідності, і можна зробити про це висновок на даному кроці.

Крім того, щоб оператор T був псевдоугнутим, необхідно ще показати, що виконується умова: $\forall v, w \in K$ існують додатні числа α^* , β^* такі, що $\alpha^* u_0 \leq \hat{T}(v, w) \leq \beta^* u_0$, $u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$.

Розглянемо ліву нерівність:

$$\alpha^* u_0 \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [bv^p(\mathbf{s}) + aw^{-q}(\mathbf{s})] ds,$$

$$\alpha^* \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [bv^p(\mathbf{s}) + aw^{-q}(\mathbf{s})] ds.$$

Оскільки $v > v_0 = \varepsilon$, $w > w_0 = \varepsilon$, $v < w_0 = \beta$, $w < w_0 = \beta$, то маємо

$$\alpha^* u_0 \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[b\varepsilon^p + \frac{a}{\beta^q} \right] ds \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[bv^p + \frac{a}{w^q} \right] ds,$$

звідки

$$\alpha^* \leq b\varepsilon^p + \frac{a}{\beta^q}.$$

Розглянемо тепер праву нерівність:

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [bv^p(\mathbf{s}) + aw^{-q}(\mathbf{s})] ds \leq \beta^* u_0.$$

Маємо

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[bv^p + \frac{a}{w^q} \right] ds \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[b\beta^p + \frac{a}{\varepsilon^q} \right] ds,$$

звідки

$$b\beta^p + \frac{a}{\varepsilon^q} \leq \beta^*.$$

4) Дослідимо оператор T на u_0 -псевдоугнутість. Для цього треба показати, що існує $\eta(v, w, \tau) > 0$ така, що

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{w}{\tau}\right) \geq [1 + \eta(v, w, \tau)] \tau \hat{T}(v, w),$$

якщо $v, w \in K(u_0)$, $\tau \in (0, 1)$, або що

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{w}{\tau}\right) - [1 + \eta] \tau \hat{T}(v, w) \geq 0,$$

звідки маємо

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[b\tau^p (v(\mathbf{s}))^p + \frac{a\tau^q}{(w(\mathbf{s}))^q} - (1 + \eta) \left(\tau b (v(\mathbf{s}))^p + \frac{\tau a}{(w(\mathbf{s}))^q} \right) \right] ds \geq 0.$$

Для виконання цієї нерівності необхідно, щоб вираз у квадратних дужках був невід'ємним, а для цього необхідно, щоб

$$\begin{cases} \tau^p - (1 + \eta)\tau \geq 0, \\ \tau^q - (1 + \eta)\tau \geq 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau^{p-1} - 1 - \eta \geq 0, \\ \tau^{q-1} - 1 - \eta \geq 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta \leq \tau^{p-1} - 1, \\ \eta \leq \tau^{q-1} - 1. \end{cases}$$

Оскільки, $\tau \in (0,1)$, $p \in (0,1)$, $q \in (0,1)$, то потрібно, щоб $0 < \eta \leq \min\{\tau^{p-1} - 1, \tau^{q-1} - 1\}$, тобто така функція η існує.

Якщо

$$f(\mathbf{x}, u) = g(\mathbf{x})u^{-q} + h(\mathbf{x})u^p,$$

$$\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = g(\mathbf{x})w^{-q} + h(\mathbf{x})v^p,$$

де $g(\mathbf{x}) > 0$ та $h(\mathbf{x}) > 0$ – деякі неперервні та обмежені в Ω функції і

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} h(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{x} \in \Omega} h(\mathbf{x}),$$

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{x}),$$

нерівності (2.2) приймають вигляд

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} h(\mathbf{x})\varepsilon^p + \max_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{x})\beta^{-q} \geq \frac{\varepsilon}{M}, \\ \max_{\mathbf{x} \in \Omega} h(\mathbf{x})\beta^p + \max_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{x})\varepsilon^{-q} \leq \frac{\beta}{M}. \end{cases}$$

Із виконання властивостей 1) – 4) випливає існування та єдиність додатного розв'язку у задачі (1.4), (1.5) [14].

Послідовні наближення для розв'язання задачі (1.4), (1.5) мають вигляд

$$v_{n+1}(\mathbf{x}) = \hat{T}(v_n, w_n),$$

$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \hat{T}(w_n, v_n).$$

За цією схемою маємо:

$$\tau u^* = v_0 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq \mathbf{x}^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_0 = \frac{u^*}{\tau},$$

де u^* – точний розв'язок, $\tau \in (0,1)$.

3. Результати обчислювального експерименту

Проведемо обчислювальний експеримент у крузі та півкрузі.

1) Розглянемо область

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}. \quad (3.1)$$

Задаємо наступні значення параметрів $a = 4$, $b = 2$, $q = 0,1$, $p = 0,7$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 2,5$, крім того маємо $M \approx 0,248$. Такі значення задовольняють умовам (2.2).

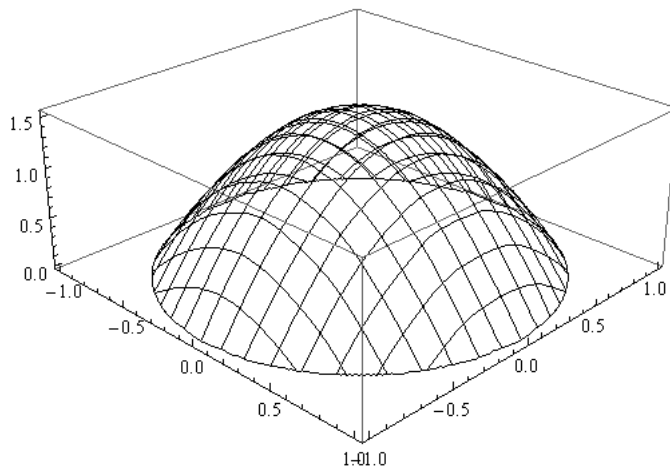
В таблиці 1 наведено значення для наближень $v_7(\mathbf{x})$ та $w_7(\mathbf{x})$ у точках області Ω з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$.

Табл.1. Значення для наближень $v_7(\mathbf{x})$ та $w_7(\mathbf{x})$ у крузі.

φ		ρ			
		0,2	0,4	0,6	0,8
$\frac{\pi}{10}$	w_7	1,466900	1,278620	0,961526	0,528012
	v_7	1,466890	1,278610	0,961519	0,528008
$\frac{\pi}{5}$	w_7	1,466910	1,277790	0,959488	0,526069
	v_7	1,466900	1,277780	0,959481	0,526065
$\frac{3\pi}{10}$	w_7	1,466920	1,276890	0,957789	0,523992
	v_7	1,466910	1,276880	0,957782	0,523989
$\frac{2\pi}{5}$	w_7	1,466940	1,277270	0,958597	0,524694
	v_7	1,466930	1,277260	0,958590	0,524690
$\frac{\pi}{2}$	w_7	1,467020	1,282540	0,969812	0,536952
	v_7	1,467010	1,282520	0,969805	0,536948

На рисунках 1 та 2 представлені поверхні та лінії рівня для наближення $w_7(\mathbf{x})$ відповідно.

На рисунку 3 зображено наближення $v_i(0, x_2)$ (штрихова лінія) та $w_i(0, x_2)$ (суцільна лінія), $i = \overline{1,3}$.

Рис.1. Поверхня для наближення $w_7(\mathbf{x})$.

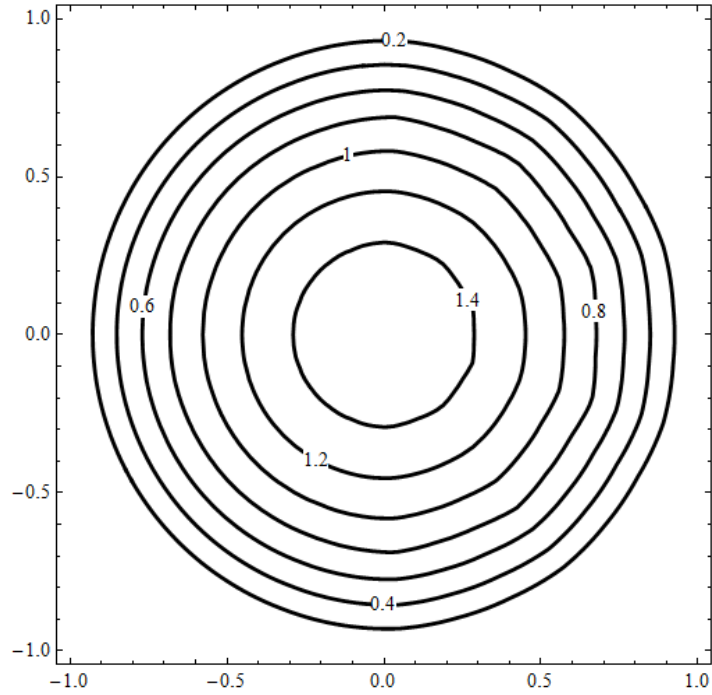


Рис.2. Лінії рівня для наближення $w_7(\mathbf{x})$.

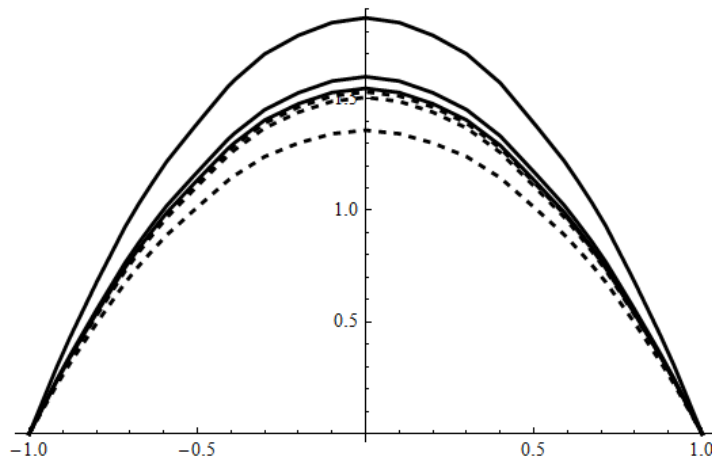


Рис.3. Значення наближень $v_i(0, x_2)$ (штрихова лінія) та $w_i(0, x_2)$ (суцільна лінія), $i = \overline{1,3}$.

2) Розглянемо область

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 < 1\} \quad (3.2)$$

і наступні значення параметрів $a = 8$, $b = 4$, $q = 0,1$, $p = 0,7$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 2,5$, $M \approx 0,098$. Такі значення задовольняють умовам (2.2).

В таблиці 2 наведено значення для наближень $v_7(\mathbf{x})$ та $w_7(\mathbf{x})$ у точках області Ω з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$.

Табл.2. Значення для наближень $v_7(\mathbf{x})$ та $w_7(\mathbf{x})$ у півкрузі.

φ		ρ			
		0,2	0,4	0,6	0,8
$\frac{\pi}{10}$	w_7	0,266472	0,463016	0,517101	0,378678
	v_7	0,266471	0,463016	0,517101	0,378677
$\frac{\pi}{5}$	w_7	0,481274	0,776343	0,806670	0,543475
	v_7	0,481273	0,776342	0,806669	0,543474
$\frac{3\pi}{10}$	w_7	0,634196	0,974721	0,969572	0,627974
	v_7	0,634195	0,974719	0,969570	0,627973
$\frac{2\pi}{5}$	w_7	0,724959	1,084010	1,054390	0,670615
	v_7	0,724957	1,084010	1,054390	0,670614
$\frac{\pi}{2}$	w_7	0,754978	1,118730	1,080410	0,683393
	v_7	0,754977	1,118730	1,080410	0,683392

На рисунках 4 та 5 представлені поверхні та лінії рівня для наближення $w_7(\mathbf{x})$ відповідно. На рисунку 6 зображено наближення $v_i(0, x_2)$ (штрихова лінія) та $w_i(0, x_2)$ (суцільна лінія), $i = \overline{1,3}$.

3) Знання функції Гріна дозволяє від нелінійної задачі (1.1), (1.2) перейти до еквівалентного на класі функцій $C(\Omega)$ інтегрального рівняння (1.3). Однак побудова функції Гріна у замкнутому вигляді можлива лише для деяких достатньо простих областей. Якщо функція Гріна невідома або має доволі складний вигляд, пропонуємо наближений метод розв'язання задачі (1.1), (1.2), який використовує квазіфункцію Гріна [15]. Цей метод полягає у тому, що

вихідна задача (1.1), (1.2) на класі функцій $W_2^1(\Omega)$ зводиться до нелінійного інтегрального рівняння

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) f(\lambda, u(\xi)) d\xi + \int_{\Omega} u(\xi) K(\mathbf{x}, \xi) d\xi, \quad (3.3)$$

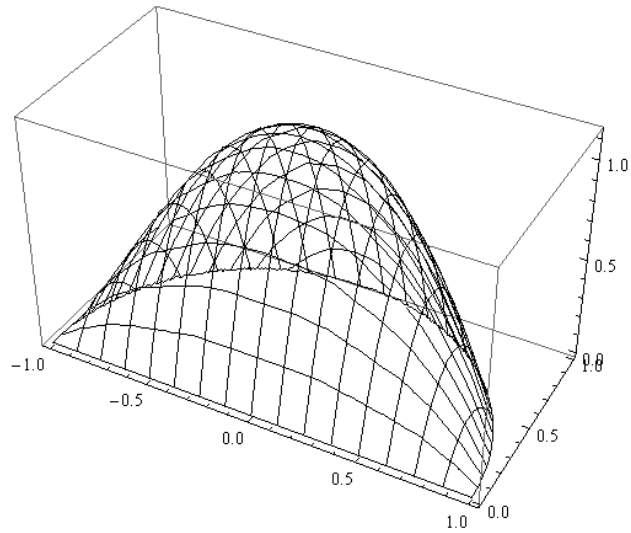


Рис.4. Поверхня для наближення $w_7(\mathbf{x})$.

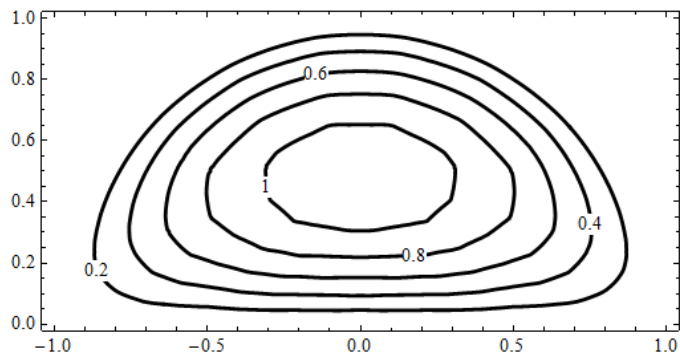


Рис.5. Лінії рівня для наближення $w_7(\mathbf{x})$.

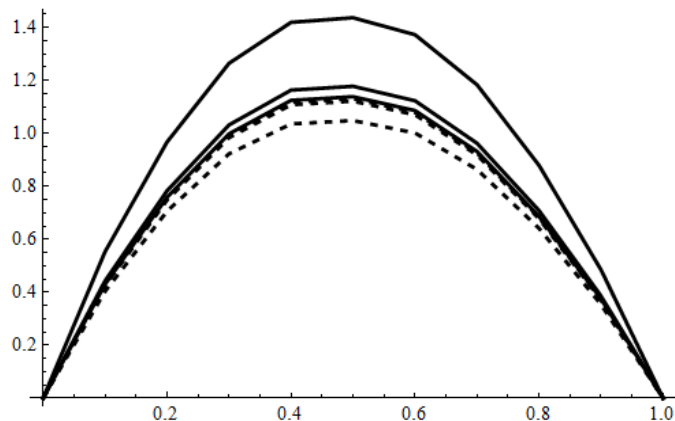


Рис.6. Значення наближень $v_i(0, x_2)$ (штрихова лінія) та $w_i(0, x_2)$ (суцільна лінія), $i = \overline{1,3}$.

де

$$G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{r} - \psi(\mathbf{x}, \xi) \right], \quad \psi(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2} \ln \left[r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\xi) \right],$$

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - \xi_i)^2}, \quad K(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\xi} \psi(\mathbf{x}, \xi), \quad \Omega \subset R^2,$$

$\omega = 0$ – нормалізоване до першого порядку рівняння межі $\partial\Omega$, $\omega > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$,

$W_2^1(\Omega)$ – простір функцій, що дорівнюють нулю на $\partial\Omega$ та мають квадратично сумовні в Ω узагальнені похідні першого порядку.

Відомо [15], що у крузі (3.1) рівняння (3.3) зводиться до рівняння (1.3), тому в цьому випадку результати, отримані методом квазіфункцій Гріна, співпадатимуть із результатами, отриманими методом функцій Гріна.

Розглянемо рівняння (3.3) у півкрузі (3.2). Зводимо його до послідовності лінійних інтегральних рівнянь, застосувавши метод послідовних наближень [16]

$$u_{m+1}(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} u_{m+1}(\xi) K(\mathbf{x}, \xi) d\xi = \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) \left(a u_m^{-q}(\xi) + b u_m^p(\xi) \right) d\xi, \quad m = 1, 2, \dots$$

Застосовуючи метод Бубнова-Гальоркіна [17], шукаємо наближений розв'язок у вигляді

$$u_{m,k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k c_{m,i} \varphi_i(\mathbf{x}),$$

де $\varphi_i(\mathbf{x})$ – координатна послідовність, а $c_{m,i}$ ($i = \overline{1, k}, m = 2, 3, \dots$) – розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^k c_{2,i} \left[\int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \xi) \varphi_i(\xi) \varphi_j(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x} \right] =$$

$$= \int_{\Omega} \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) \left(a u_1^{-q}(\xi) + b u_1^p(\xi) \right) \varphi_j(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x}, \quad j = \overline{1, k},$$

$$\sum_{i=1}^k c_{m,i} \left[\int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \xi) \varphi_i(\xi) \varphi_j(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x} \right] =$$

$$= \int_{\Omega} \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) \left(a u_{m-1,k}^{-q}(\xi) + b u_{m-1,k}^p(\xi) \right) \varphi_j(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x}, \quad j = \overline{1, k}, \quad m = 3, 4, \dots$$

В якості першого наближення візьмемо

$$u_1(\mathbf{x}) = 0,05.$$

Нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega$ має вигляд

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (1 - x_1^2 - x_2^2) x_2 = 0.$$

В якості координатної послідовності оберемо

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) P_{i_1}(x_1) P_{i_2}(2x_2 - 1), \quad i_1 = \overline{0, 2}, \quad i_2 = \overline{0, 2 - i_1}, \quad i = \overline{1, k},$$

де $k = 6$, $P_m(z)$ – поліноми Лежандра

$$P_m(z) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dz^m} \left[(z^2 - 1)^m \right].$$

В таблиці 3 наведено значення для наближення $u_{5,6}(\mathbf{x})$ у точках області Ω з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$.

На рисунках 7 та 8 представлені поверхні та лінії рівня для наближення $u_{6,6}(\mathbf{x})$ відповідно.

Табл.3. Значення для наближення $u_{6,6}(\mathbf{x})$ у півкрузі.

φ	ρ			
	0,2	0,4	0,6	0,8
$\frac{\pi}{10}$	0,269723	0,448701	0,489529	0,352223
$\frac{\pi}{5}$	0,487426	0,769360	0,796433	0,544760
$\frac{3\pi}{10}$	0,643866	0,973798	0,966411	0,636174
$\frac{2\pi}{5}$	0,737047	1,084210	1,047640	0,674798
$\frac{\pi}{2}$	0,767881	1,118770	1,071330	0,685467

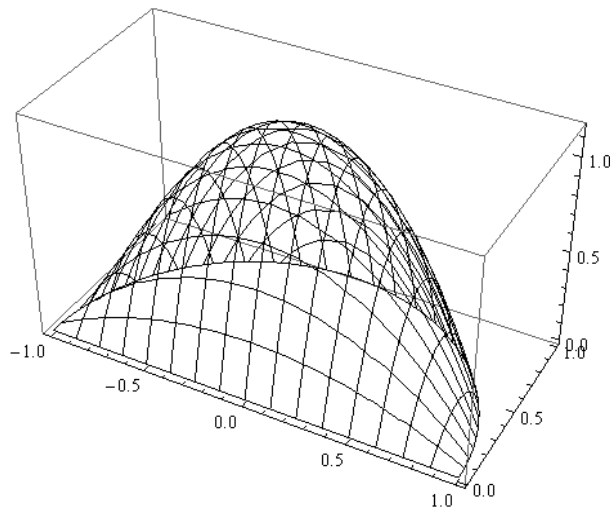


Рис.7. Поверхня для наближення $u_{6,6}(\mathbf{x})$.

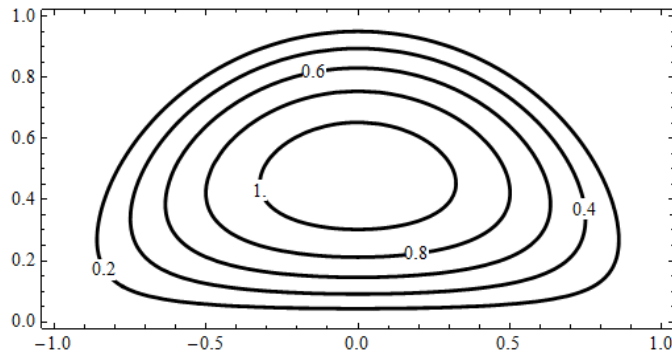


Рис.8. Лінії рівня для наближення $u_{6,6}(\mathbf{x})$.

4. Висновки

У роботі було досліджено можливість побудови двосторонніх наближень до додатного розв'язку задачі (1.4), (1.5) та отримано умови (2.2), які гарантують збіжність ітераційного процесу.

Крім того, нам вдалося зв'язати умовою фактично чотири параметри a, b, p, q розглядуваної задачі, при яких існує єдиний додатний розв'язок.

Побудувавши конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, ми отримали апіорну оцінку шуканого розв'язку, оскільки маємо $v_0 \leq u^* \leq w_0$. Отримані двосторонні наближення до розв'язку задачі дають можливість робити апостеріорні висновки.

Однією з переваг цього методу у порівнянні з іншими є відносна простота реалізації алгоритму, що в свою чергу вимагає менше обчислювальних ресурсів.

Крім того, було показано застосування методу квазіфункцій Гріна, який може використовуватися у випадках, коли функція Гріна невідома або має складний вигляд.

Розглянутий метод може бути використаний для відшукування розв'язків прикладних задач, математичними моделями яких є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 183 с.
2. Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. – Долгопрудный: Интеллект, 2008. – 408 с.
3. Dong Ye, Feng Zhou. A generalized two dimensional Emden-Fowler equation with exponential nonlinearity // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. – 2001. – 13 (2). – P.141-158.
4. Bozhkov Yuri. Noether Symmetries and Critical Exponents // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2005. – 1 (022). – P.1-12.

5. Рвачев В.Л., Слесаренко А.П., Сафонов Н.А. Математическое моделирование теплового самовоспламенения для стационарных условий методом R-функций // Доклады академии наук Украины. – 1992. – №12. – С.24-27
6. Галахов Е.И. Положительные решения квазилинейного эллиптического уравнения // Математические заметки. – 2005. – Т.78, вып. 2. – С.202-211.
7. M. Matinfar, K. Nemati. A numerical extension on a convex nonlinear elliptic problem // International Mathematical Forum. – 2008. – 3 (17). – P.811-816.
8. A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems // J. Funct. Anal. – 1994. – 122. – P.519-543.
9. S. Baraket, Dong Ye. Singular limit solutions for two-dimensional elliptic problems with exponentially dominated nonlinearity // Chinese Annals of Mathematics. Series B. – 2001. – 22 (03). – P.287-296.
10. Junping Shi, Miaoxin Yao. Positive solutions for elliptic equations with singular nonlinearity // Electronic Journal of Differential Equations. – 2005. – 04. – P.1-11.
11. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2013. – № 1. – С.35-42.
12. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2015. – № 3. – С.107-120.
13. Луханін В.С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі з експоненціальною мажорантою // Радіоелектроніка та інформатика. – 2015. – № 2 (69). – С.16-18.
14. Опойцев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Труды Моск. матем. общества. – 1978. – Т. 36. – С.237-273.
15. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
16. Свирский И.В. Методы типа Бубнова-Галеркина и последовательных приближений. – М.: Наука, 1968. – 199 с.
17. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.