УДК 519.6

Метод построения базиса краевой задачи Дирихле для использования вариационных методов

И. А. Баранов
Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Украина

В работе представлен метод построения базиса для аппроксимации функций, удовлетворяющих однородному условию Дирихле на границе двумерной области на основе кубических B-сплайнов. Новый базис состоит из B-сплайнов, если их носители принадлежат замыканию рассматриваемой области и граничных базисных элементов, которые учитывают граничные условия и стыковку со стандартным базисом внутри области. На примере модельной задачи показано, что граничные базисные элементы не ухудшают аппроксимационной способности стандартного базиса кубических сплайнов.

Ключевые слова: *базис краевой задачи Дирихле, вариационные методы, численное решение.*

У роботі представлено метод побудови базису для апроксимації функцій, що задовольняють однорідній умові Діріхле на межі двовимірної області на основі кубічних B-сплайнів. Новий базис складається з B-сплайнів, якщо їх носії належать замиканню області, що розглядається, і граничних базисних елементів, які враховують граничні умови і стикування зі стандартним базисом всередині області. На прикладі модельної задачі показано, що граничні базисні елементи не погіршують апроксимаційної здатності стандартного базису кубічних сплайнів.

Ключові слова: *базис крайової задачі Діріхле, варіаційні методи, чисельний розв'язок.*

This paper presents some method, with which a basis for approximation of functions that satisfy the homogeneous Dirichlet condition over the two-dimensional domain boundary can be constructed based on the cubic B-splines. This new basis consists of B-splines, if their supports lie in the closure of the said domain and boundary basic elements, which match the boundary conditions and fit with the standard basis inside the domain. It is shown that boundary basic elements do not degrade the approximation properties of the standard cubic spline basis.

Key words: *basis of the Dirichlet boundary value problem, variations method, numerical solution.*

Вариационные методы математической физики [1-3] представляют собой эффективный математический аппарат решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Сюда относятся метод наименьших квадратов, метод Ритца, метод Бубнова-Галеркина и др. В этих методах решение краевой задачи для дифференциальных уравнений сводится к минимизации некоторого функционала. Однако удовлетворение краевым условиям задачи часто представляет серьезную проблему и обычно осуществляется за счет выбора координатных функций. Для построения координатных функций, которые удовлетворяют краевым условиям задачи, разработан метод R-функций [4,5]. Краевую задачу в общем виде можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} Au(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ L_i u(x)\big|_{\partial\Omega_j} = \varphi_i(x), \quad i = 1,\dots,N, j = 1,\dots,M, \end{cases} \tag{1}$$

где A и L_i – некоторые операторы, действующие внутри области Ω и на участках ее границы $\partial\Omega_j$ соответственно, $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ – известные функции, $u(x)$ – искомая функция, которая может быть скаляром, вектором или тензором, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Структурой решения, учитывающей краевые условия задачи (1), называется формула $u = B(\Phi)$, если $L_i B(\Phi)\big|_{\partial\Omega_j} = \varphi_i(x), \quad i = 1,\dots,N, j = 1,\dots,M$, где Φ – элемент некоторого функционального множества $\mathbf{M}$, B – некоторый оператор: $B: \ \mathbf{M} \to X(\Omega)$, $\mathbf{X}(\Omega)$ – множество функций, определенных в области Ω.

Структура решения краевой задачи с условием Дирихле $u(x)\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ называется структурой Канторовича [4,6]. Данная структура имеет вид

$$u(x) = \omega(x)\Phi(x) + \varphi(x), \tag{2}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\omega(x)$: $\omega(x) = 0, x \in \partial\Omega$, $\omega(x) > 0, x \in \Omega$, $\Phi(x)$ – неопределенная компонента структуры, которая выбирается из условия точного или приближенного удовлетворения уравнению $Au(x) = f(x)$. Неопределенная компонента обычно представляется в виде ряда $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(x)$, где $\{\varphi_i(x)\}$ – полная система базисных функций, $\{c_i\}$ – неизвестные коэффициенты, которые нужно определить.

Функцию $\omega(x)$: $\omega(x) = 0, x \in \partial\Omega$, $\omega(x) > 0, x \in \Omega$ можно строить с использованием R-операций [4]. Существуют различные системы R-операций [4,7,8], обладающие различными свойствами (гладкости, нормализованности и т.д.) .

В работе [9] разработана структура гладких решений краевой задачи Дирихле для областей с негладкой границей, которая обладает более высокой аппроксимационной способностью, по сравнению с классической структурой Канторовича с использованием различных R-операций, в случае, если искомая функция является гладкой вплоть до границы области.

Все описанные подходы к построению координатных функций, удовлетворяющих некоторым краевым условиям, основаны на изменении некоторого стандартного базиса. В этом случае изменяются все элементы стандартного базиса под воздействием оператора структуры решения. Кроме того, весовые функции $\omega(x)$: $\omega(x) = 0, x \in \partial\Omega$, $\omega(x) > 0, x \in \Omega$, построенные с использованием R-операций, которые входят в структуру решения, для достаточно сложных областей являются очень громоздкими, причем их размер растет по показательному закону. Таким образом, каждый элемент базиса становится сложной и громоздкой функцией, что снижает скорость расчетов.

Целью данной работы является построение базиса краевой задачи с однородным условием Дирихле на границе двумерной области на основе кубических B-сплайнов. Новый базис состоит из B-сплайнов [10-12] и граничных базисных элементов, которые учитывают граничные условия и стыковку со стандартным базисом внутри области. Такой подход для одномерного случая был предложен и реализован в работе [13] и развит в работах для широкого класса граничных условий в работах [14-16].

Поскольку обеспечение быстрых и точных расчетов всегда являлось важной и востребованной задачей, то данная работа является актуальной.

Рассмотрим задачу построения базиса однородной задачи Дирихле в двумерной области Ω. Новый базис состоит из B-сплайнов, если их носители принадлежат замыканию области Ω, и элементов, определяющих поведение функции в окрестности границы области, которые далее будем называть граничными базисными элементами. B-сплайны, носители которых принадлежат замыканию области Ω, обеспечивают аппроксимацию в некоторой области, которая принадлежит области Ω, а граничные базисные элементы удовлетворяют краевым условиям задачи, а также учитывают стыковку с базисными элементами внутри области. Таким образом, метод построения базиса сводится к построению граничных базисных элементов.

Пусть область аппроксимации задачи Ω, для которой $\partial\Omega$ – гладкая граница области, описывается неравенством $\omega(x,y)>0$, где $\omega(x,y)\in C^2(\overline{\Omega})$, $\omega(x,y)\big|_{\partial\Omega}=0$, $0<\nabla\omega(x,y)\big|_{\partial\Omega}<\infty$. Рассмотрим базис, состоящий из кубических B-сплайнов $\{\varphi_i\}$, $i=0,\ldots,N$. Пронумеруем базисные элементы следующим образом: элементы φ_i, $i=0,\ldots,n$ – это элементы, носители которых пересекают границу области Ω, а элементы φ_i, $i=n+1,\ldots,N$ – это элементы, носители которых принадлежат множеству $\overline{\Omega}$.

Рассмотрим следующие разложения функций $\omega^k(x,y)$, $k=0,\ldots,3$ в области Ω: $\omega^k(x,y)\approx\sum_{i=0}^{N}c_{i,k}\varphi_i$, $k=0\ldots3$, например, с использованием метода наименьших квадратов.

Положим $\delta_k(x,y)=\sum_{i=0}^{n}c_{i,k}\varphi_i$, $k=0\ldots3$.

Пусть некоторая область $\Omega'\subset\Omega:\operatorname{supp}\varphi_i\cap\Omega'=\varnothing, i=0,..,n$ описывается уравнением $\omega'(x,y)<0$, для которого $\partial\Omega'\in C^2$ – граница области Ω', $\omega'(x,y)\big|_{\partial\Omega'}=0$, $\omega'(x,y)\in C^2(\overline{\Omega})$, $0<\nabla\omega'(x,y)\big|_{\partial\Omega'}<\infty$.

Положим $\omega_2(x,y)=\begin{cases}\omega'(x,y), & (x,y)\in(\Omega/\Omega');\\ 0, & (x,y)\in\Omega'.\end{cases}$

Рассмотрим функции $\theta_k(x,y) = \dfrac{\omega_2{}^3(x,y)\left(\sum\limits_{i=0}^{N} c_{i,k}\varphi_i - \omega^k(x,y)\right)}{\omega^k(x,y) + \omega_2{}^3(x,y)}, \quad k = 0\ldots 3.$

Положим $\delta^*{}_k(x,y) = \delta_k(x,y) - \theta_k(x,y)$.

Тогда $\delta^*{}_k(x,y) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_{i,k}\varphi_i - \dfrac{\omega_2{}^3(x,y)\left(\sum\limits_{i=0}^{N} c_{i,k}\varphi_i - \omega^k(x,y)\right)}{\omega^k(x,y) + \omega_2{}^3(x,y)} =$

$$= \frac{\left(\omega^k(x,y) + \omega_2{}^3(x,y)\right)\sum\limits_{i=0}^{n} c_{i,k}\varphi_i - \omega_2{}^3(x,y)\left(\sum\limits_{i=0}^{N} c_{i,k}\varphi_i - \omega^k(x,y)\right)}{\omega^k(x,y) + \omega_2{}^3(x,y)} =$$

$$= \frac{\left(\omega^k(x,y) + \omega_2{}^3(x,y)\right)\sum\limits_{i=0}^{n} c_{i,k}\varphi_i - \omega_2{}^3(x,y)\left(\sum\limits_{i=0}^{n} c_{i,k}\varphi_i\right) - \omega_2{}^3(x,y)\left(\sum\limits_{i=n+1}^{N} c_{i,k}\varphi_i\right)}{\omega^k(x,y) + \omega_2{}^3(x,y)} +$$

$$+ \frac{\omega^k(x,y)\omega_2{}^3(x,y)}{\omega^k(x,y) + \omega_2{}^3(x,y)};$$

$$\delta^*{}_k(x,y) = \frac{\omega^k(x,y)\sum\limits_{i=0}^{n} c_{i,k}\varphi_i - \omega_2{}^3(x,y)\sum\limits_{i=n+1}^{N} c_{i,k}\varphi_i + \omega^k(x,y)\omega_2{}^3(x,y)}{\omega^k(x,y) + \omega_2{}^3(x,y)}. \qquad (3)$$

Функции $\delta^*{}_k(x,y) \in C^2(\Omega), \quad k = 0,\ldots,3$.

Утверждение.

$$\left.\frac{\partial^i \delta^*{}_k(x,y)}{\partial n^i}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 0,\ldots,k-1, \quad k = 1,\ldots,3.$$

Доказательство.

Рассмотрим

$$\delta^*{}_k(x,y) = \frac{\omega^k(x,y)\sum\limits_{i=0}^{n} c_{i,k}\varphi_i - \omega_2{}^3(x,y)\sum\limits_{i=n+1}^{N} c_{i,k}\varphi_i + \omega^k(x,y)\omega_2{}^3(x,y)}{\omega^k(x,y) + \omega_2{}^3(x,y)} =$$

$$= \frac{\omega^k(x,y)\sum\limits_{i=0}^{n} c_{i,k}\varphi_i}{\omega^k(x,y) + \omega_2{}^3(x,y)} - \frac{\omega_2{}^3(x,y)\sum\limits_{i=n+1}^{N} c_{i,k}\varphi_i}{\omega^k(x,y) + \omega_2{}^3(x,y)} + \frac{\omega^k(x,y)\omega_2{}^3(x,y)}{\omega^k(x,y) + \omega_2{}^3(x,y)}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^i \delta^*{}_k(x,y)}{\partial n^i}=\frac{\partial^i\left(\dfrac{\omega^k(x,y)\sum\limits_{i=0}^{n}c_{i,k}\varphi_i}{\omega^k(x,y)+\omega_2{}^3(x,y)}\right)}{\partial n^i}-\frac{\partial^i\left(\dfrac{\omega_2{}^3(x,y)\sum\limits_{i=n+1}^{N}c_{i,k}\varphi_i}{\omega^k(x,y)+\omega_2{}^3(x,y)}\right)}{\partial n^i}+$$

$$+\frac{\partial^i\left(\dfrac{\omega^k(x,y)\omega_2{}^3(x,y)}{\omega^k(x,y)+\omega_2{}^3(x,y)}\right)}{\partial n^i}.$$

Вычислим каждое слагаемое правой части правой части данного равенства:

$\dfrac{\partial^i\left(\dfrac{\omega^k(x,y)\omega_2{}^3(x,y)}{\omega^k(x,y)+\omega_2{}^3(x,y)}\right)}{\partial n^i}=0,\quad i=0,\ldots,k-1,\quad k=1,\ldots,3$ для $(x,y)\in\partial\Omega$, так как функция $\left.\dfrac{\omega_2{}^3(x,y)}{\omega^k(x,y)+\omega_2{}^3(x,y)}\right|_{\partial\Omega}$ – ограничена;

аналогично, $\dfrac{\partial^i\left(\dfrac{\omega_2{}^3(x,y)\sum\limits_{i=n+1}^{N}c_{i,k}\varphi_i}{\omega^k(x,y)+\omega_2{}^3(x,y)}\right)}{\partial n^i}=0,\quad i=0,\ldots,k-1, k=1,\ldots,3$ для $(x,y)\in\partial\Omega$, так как функция $\left.\dfrac{\omega_2{}^3(x,y)}{\omega^k(x,y)+\omega_2{}^3(x,y)}\right|_{\partial\Omega}$ – ограничена, а $\dfrac{\partial^i\left(\sum\limits_{i=n+1}^{N}c_{i,k}\varphi_i\right)}{\partial n^i}=0,\quad \forall i$;

$\dfrac{\partial^i\left(\dfrac{\omega^k(x,y)\sum\limits_{i=0}^{n}c_{i,k}\varphi_i}{\omega^k(x,y)+\omega_2{}^3(x,y)}\right)}{\partial n^i}=0,\quad i=0,\ldots,k-1,\quad k=1,\ldots,3$ для $(x,y)\in\partial\Omega$, так как функция

$$\left.\frac{\sum_{i=0}^{n} c_{i,k}\varphi_i}{\omega^k(x,y)+\omega_2{}^3(x,y)}\right|_{\partial\Omega}$$ – ограничена.

Таким образом, $\left.\dfrac{\partial^i \delta^*{}_k(x,y)}{\partial n^i}\right|_{\partial\Omega} = 0, i = 0,\ldots,k-1, k = 1,\ldots,3$.

Утверждение доказано.

Положим

$$\psi^k{}_i(x,y) = \frac{\varphi_i(x,y)\delta^*{}_k(x,y)}{\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(x,y)}, \quad i = 0,\ldots,n, \quad k = 0,\ldots,3. \tag{4}$$

Функции $\psi^k{}_i(x,y)$ можно взять в качестве элементов базиса.
Пусть есть разложение некоторой функции $F(x,y)$ в области Ω

$$F(x,y) \approx \sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i + \sum_{i=n+1}^{N} c_i\varphi_i .$$

Данную функцию можно разложить по новому базису

$$F(x,y) \approx \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{3}\tilde{c}_{i,k}\psi^k{}_i + \sum_{i=n+1}^{N} c_i\varphi_i .$$

Потребуем, чтобы функция $F(x,y)$ удовлетворяла однородному граничному условию Дирихле $F(x,y)\big|_{\partial\Omega} \approx \left.\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{3}\tilde{c}_{i,k}\psi^k{}_i + \sum_{i=n+1}^{N} c_i\varphi_i\right)\right|_{\partial\Omega} = 0$.

Элементы $\{\varphi_i\}, \quad i = n+1,\ldots,N$ очевидно удовлетворяют данному условию.
Рассмотрим функции

$$\psi^k{}_i(x,y) = \frac{\varphi_i(x,y)\delta^*{}_k(x,y)}{\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(x,y)}, \quad i = 0,\ldots,n .$$

Имеем $\psi^k{}_i(x,y)\big|_{\partial\Omega} = \varphi_i(x,y)\delta^*{}_k(x,y)\big|_{\partial\Omega}, \quad i = 0,\ldots,n$.

Кроме того, $\varphi_i(x,y)\big|_{\partial\Omega} < \infty, \quad i = 0,\ldots,n$.

По утверждению 1 $\delta^*{}_k(x,y)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 1,\ldots,3$.

Тогда $\left.\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{3}\tilde{c}_{i,k}\psi^{k}{}_{i}+\sum_{i=n+1}^{N}c_i\varphi_i\right)\right|_{\partial\Omega}=\left.\sum_{i=0}^{n}\tilde{c}_{i,0}\psi^{0}{}_{i}\right|_{\partial\Omega}$.

Из условия $\left.\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{3}\tilde{c}_{i,k}\psi^{k}{}_{i}+\sum_{i=n+1}^{N}c_i\varphi_i\right)\right|_{\partial\Omega}=0$ следует, что $\left.\sum_{i=0}^{n}\tilde{c}_{i,0}\psi^{0}{}_{i}\right|_{\partial\Omega}=0$.

Так как функции $\left.\psi^{0}{}_{i}(x,y)\right|_{\partial\Omega}>0$, то $\tilde{c}_{i,0}=0,\quad i=0,\ldots,n$.

Таким образом, функции вида $\left\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{3}\tilde{c}_{i,k}\psi^{k}{}_{i}+\sum_{i=n+1}^{N}c_i\varphi_i\right\}$ удовлетворяют однородному условию Дирихле.

Рассмотрим представленную методику построения базисных элементов на следующем примере:

$$\begin{cases}\Delta u=25x^2\sin(5xy)(x^2+y^2-1)-40xy\cos(5xy)-4\sin(5xy)+\\ +25y^2\sin(5xy)(x^2+y^2-1);\\ \left.u\right|_{x^2+y^2=1}=0.\end{cases}\tag{5}$$

Аналитическим решением данной задачи является функция

$$u=\sin(5xy)(1-x^2-y^2)\tag{6}$$

На рисунке 1 представлено аналитическое решение задачи (5).

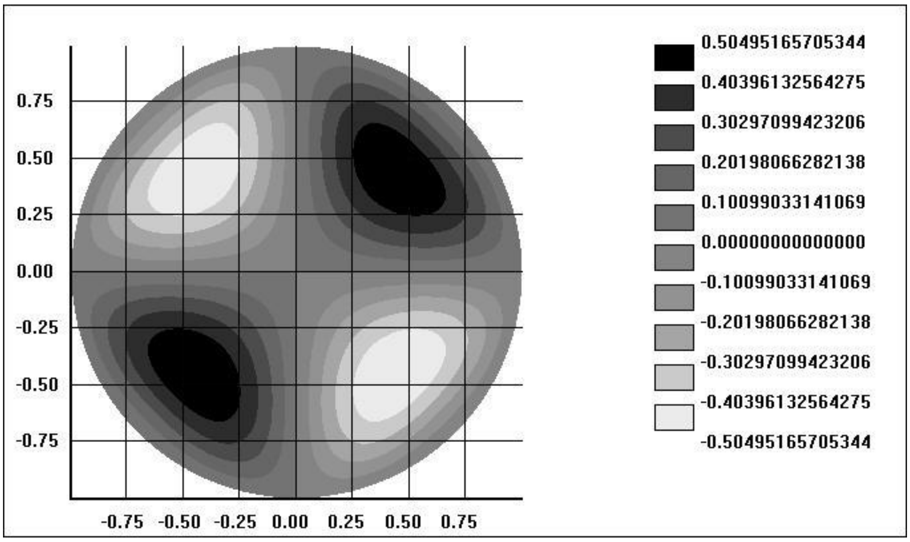

Рис. 1. График аналитического решения краевой задачи (5) в виде линий постоянного уровня на плоскости xOy

На рисунках 2 – 4 представлены графики функций $\delta^{*}{}_{k}(x,y),\quad k=1,2,3$ для краевой задачи (5). На рисунках 5, 6 представлены результаты численных расчетов с использования метода наименьших квадратов для случая сетки 19×19 B-сплайнов, построенной для квадрата $[-1,1] \times [-1,1]$.

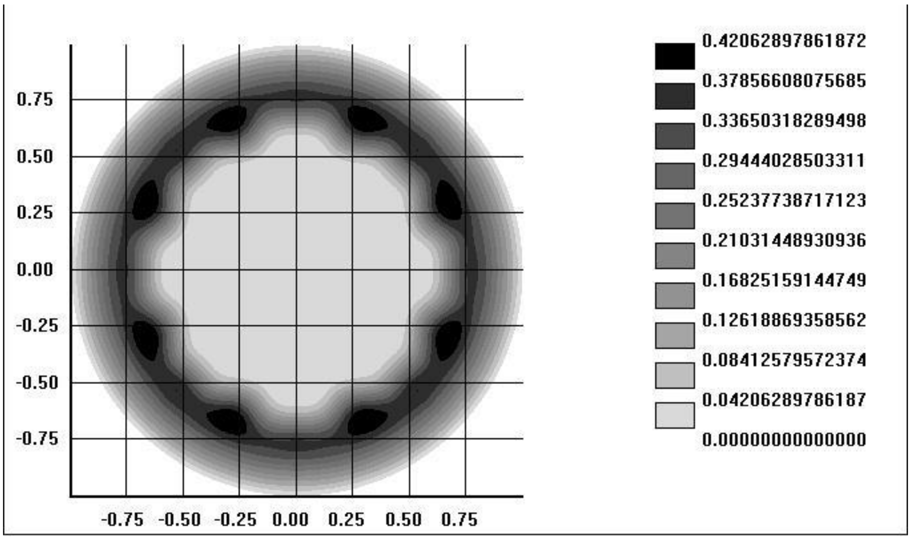

Рис. 2. График функции $\delta^*{}_1(x, y)$ *для краевой задачи (5) в виде линий постоянного уровня на плоскости* xOy

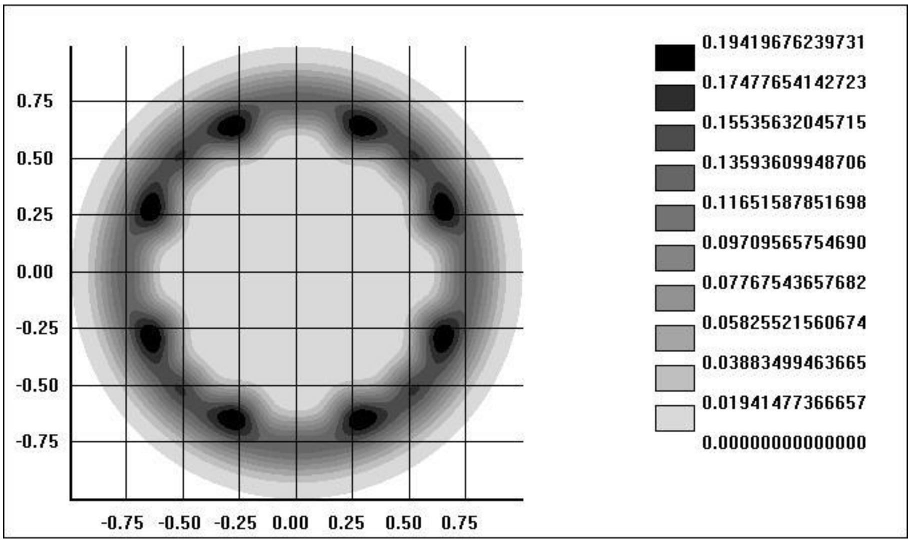

Рис. 3. График функции $\delta^*{}_2(x, y)$ *для краевой задачи (5) в виде линий постоянного уровня на плоскости* xOy

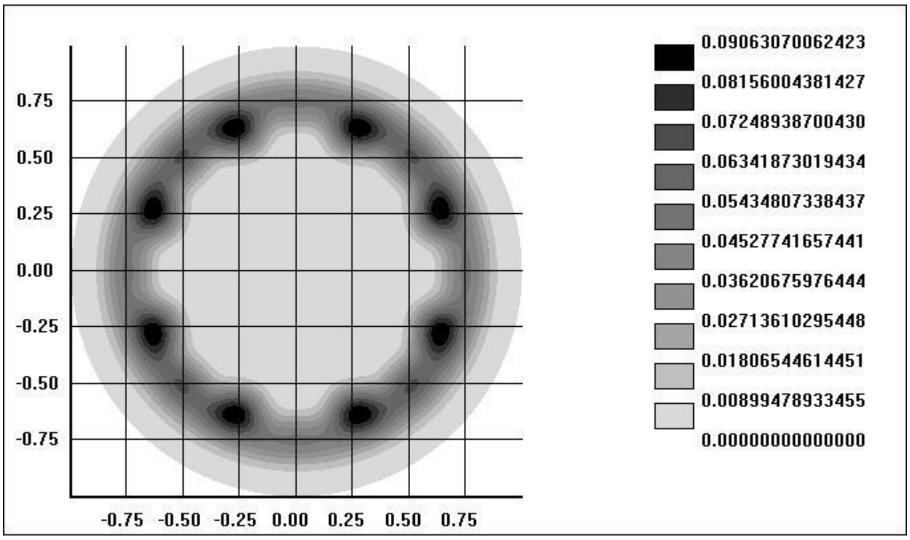

Рис. 4. График функции $\delta^{*}{}_{3}(x,y)$ *для краевой задачи (5) в виде линий постоянного уровня на плоскости* xOy

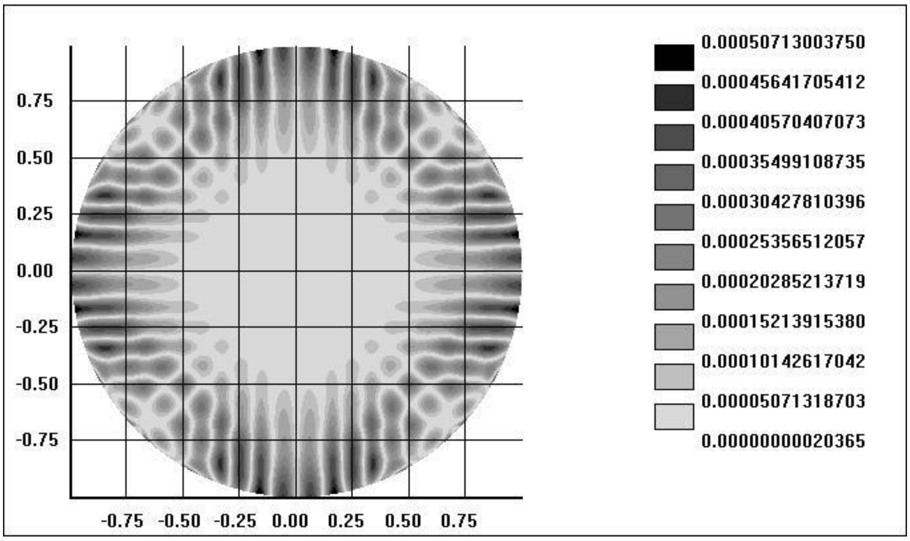

Рис. 5. График функции модуля разности аналитического решения задачи (5) и решения задачи аппроксимации функции (6) методом наименьших квадратов

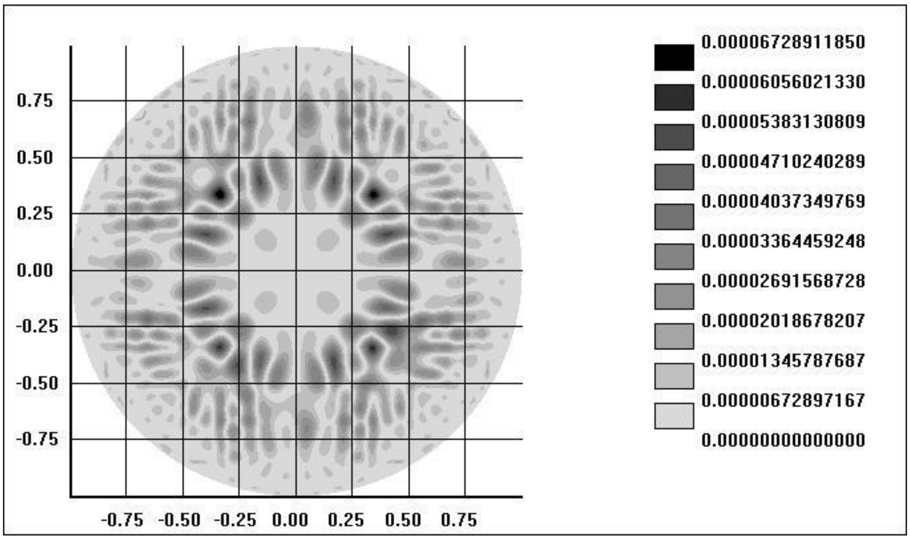

Рис. 6. График функции модуля разности аналитического и численного решения задачи (5) с использованием предложенного подхода методом наименьших квадратов

Выводы

В работе предложен метод построения базиса на основе кубических B-сплайнов для приближения функций, удовлетворяющих однородному условию Дирихле в двумерной области с гладкой границей. На примере модельной краевой задачи для уравнения Пуассона с однородным условием Дирихле показано, что построенный базис не ухудшает аппроксимационной способности стандартного базиса кубических сплайнов, а даже улучшает его. Улучшение можно объяснить тем, что максимальная погрешность аппроксимации искомой функции достигается на границе области, ввиду наибольшей кривизны в этих точках, а полученное решение на основе нового базиса удовлетворяет точно однородному условию Дирихле, поэтому максимальные погрешности отсутствуют. Внутри же области погрешность имеет один порядок.

При решении краевых задач с использованием вариационных методов таких, как метод наименьших квадратов, метод Ритца и др. возникает необходимость нахождения элементов матрицы СЛАУ, которые являются интегралами. В этих интегралах подинтегральная функция зависит от базисных элементов и оператора краевой задачи. При использовании в качестве базисных элементов стандартных B-сплайнов, для дифференциальных уравнений, оператор которых представляет линейную комбинацию самой функции и ее различных производных, элементы матрицы СЛАУ, будут повторяться и их можно будет вычислить точно. Поэтому, применение базиса, состоящего из стандартных B-сплайнов и граничных базисных элементов, позволяет сократить время счета и уменьшить накопление погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

2. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов/ С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432 с.
3. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. – М.: Мир, 1985. – 590 с.
4. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения./ В.Л. Рвачев. − К.: Наук. Думка, 1982. − 552 с.
5. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К.В. Максименко-Шейко. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.
6. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В.Канторович, В.И. Крылов. − М.-Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
7. Баранов И.А. Новые R-операции различного класса гладкости для построения базисов краевых задач / И.А. Баранов // Вестник Запорожского национального университета, серия физико-математические науки. – Запорожье: ЗНУ, 2011. - №2. - С.13-28.
8. Литвин О.Н. Формула В.Л. Рвачева в случае областей с угловыми точками / О.Н. Литвин // Украинский математический журнал. – 1972. – №2. – С. 240-246.
9. Баранов И.А. Построение гладких базисов краевой задачи Дирихле для областей с негладкой границей/ И.А. Баранов // Вестник Запорожского национального университета, серия физико-математические науки. – Запорожье: ЗНУ, 2012 - №1 - С.19-38.
10. Алберг Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. – М.: Мир, 1972. – 320 с.
11. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
12. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М. Наука, 1984. – 352 с.
13. Баранов И.А. Построение базиса смешанной краевой задачи для применения вариационных методов / И.А. Баранов // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». − Харьков: ХНУ, 2010. – №925. – С. 5–12.
14. Баранов И.А. Метод построения базиса краевых задач дифференциальных уравнений для применения вариационных методов / И.А. Баранов // Компьютерная математика. – Киев: И-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2011. – №1. – С. 122 − 129.
15. Баранов И.А. Базис краевых задач с граничными условиями широкого класса для использования вариационных методов / И.А. Баранов // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». − Харьков: ХНУ, 2011. – №977. – С.25–34.
16. Баранов И.А. Метод построения базиса краевых задач для широкого класса граничных условий / И.А. Баранов // Тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов. Современные проблемы машиностроения. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2011. – С.28.

Надійшла у першій редакції 19.06.2016, в останній - 13.09.2016.